CÁLCULO DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO PRODUCIDO POR RAYO PARA TERRENO NO PLANO Y SU EFECTO EN LAS TENSIONES INDUCIDAS EN LÍNEAS DE DISTRIBUCIÓN

I.E. Edison Andrés Soto Ríos

Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales

Facultad de Ingeniería y Arquitectura

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación

2010

CÁLCULO DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO PRODUCIDO POR RAYO PARA TERRENO NO PLANO Y SU EFECTO EN LAS TENSIONES INDUCIDAS EN LÍNEAS DE DISTRIBUCIÓN

I.E. Edison Andrés Soto Ríos

código 298342

Tesis de Maestría para obtener el título de Magíster en Ingeniería Eléctrica con énfasis en Alta Tensión

Director

I.E, MSc, PhD. Ernesto Pérez González

Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales

Facultad de Ingeniería y Arquitectura

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación

Manizales, Diciembre de 201

TÍTULO EN ESPAÑOL:
CÁLCULO DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO PRODUCIDO POR RAYO PARA TERRENO NO PLANO Y SU EFECTO EN LAS TENSIONES INDUCIDAS EN LÍNEAS DE DISTRIBUCIÓN

TÍTULO EN INGLÉS:
ELECTROMAGNETIC FIELD CALCULATION PRODUCED BY LIGHTNING IN NON FLAT TERRAIN AND ITS THE EFECT ON THE LIGHTNING INDUCED VOLTAGES ON DISTRIBUTION NETWORKS.

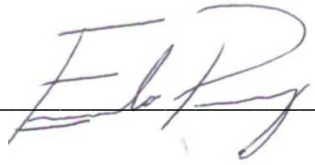
RESUMEN EN ESPAÑOL:
Esta tesis evalúa la influencia que tienen las montañas en el campo electromagnético que produce una descarga de rayo vertical y en las tensiones inducidas que se producen en líneas de distribución. El campo electromagnético se calcula solucionando las ecuaciones de Maxwell en diferentes configuraciones de terreno no plano, por medio del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) y las tensiones inducidas se obtienen incluyendo el campo anterior en la línea por medio del método de acople de Agrawal. Se obtienen cambios considerables de los campos y de las tensiones inducidas producidas por rayo en redes de distribución, en comparación con el tradicional cálculo para terreno plano.

TRADUCCIÓN DEL RESUMEN AL INGLÉS:
This thesis evaluates the influence of the mountains in the electromagnetic field produced by a vertical lightning channel and the lightning induced voltages on distribution networks. The electromagnetic field is calculated solving the Maxwell equations in the different non flat terrain configurations, by means of the finite difference time domain method (FDTD), and the lightning induced voltages resulting of include the last field in the network by means of Agrawal coupling model. It is obtained important variations in the field and lightning induced voltages on distribution networks, compared with the traditional calculus on flat terrain.

DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL:
Campo electromagnético, tensión inducida por rayo, línea de distribución, terreno no plano, Diferencias Finitas

TRADUCCIÓN AL INGLÉS DE LOS DESCRIPTORES:
Electromagnetic Field, lightning induced voltage, distribution newtwork, non flat terrain, Finite Difference

FIRMA DEL DIRECTOR:_____



Edison Andrés Soto Ríos (1986)

Les dedico este trabajo a mis padres por su especial apoyo e interés en todo lo que hago y por su decidido compromiso en mi educación y a mi hermano por su comprensión en mi largo camino de estudios

AGRADECIMIENTOS

A Ernesto Pérez, con quien me he formado como profesional e investigador. Del cual he aprendido mucho en todos los aspectos. Alguien por el que siento la más profunda admiración, por su inteligencia, su personalidad y su sentido social.

A mis amigos de la maestría: Juan Diego, Ana María, Diego y Jesús, por los agradables momentos y las valiosas discusiones que tuvimos.

A mi tío Jorge, por su respaldo económico para hacer la maestría, por su interés en mis estudios, y por ser una fuente de conocimiento para mí

A Camilo Younes por sus valiosas recomendaciones en la construcción de la propuesta de la maestría.

A CODENSA por su apoyo en las actividades de investigación en tensiones inducidas por rayo en los circuitos rurales de Cundinamarca.

Al grupo PAAS por vincularme al proyecto de investigación en tensiones inducidas en redes de distribución

Al profesor Eduardo Cano por vincularme a los proyectos de extensión de la universidad, y por enseñarme nuevos tópicos de la ingeniería eléctrica.

A la Universidad Nacional y al Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación, por su apoyo en las diferentes actividades de la maestría.

TABLA DE CONTENIDO

CAPITULO 1: CAMPO ELECTROMAGNÉTICO PRODUCIDO POR EL RAYO 5

1.1 Técnicas analíticas para el cálculo del campo electromagnético 5

1.1.1 Técnica del Dipolo 7

1.1.2 Técnica del Monopolo 9

1.1.3 Comparación de las dos técnicas 9

1.2 Metodología general para el cálculo del campo electromagnético 11

1.2.1 Expresiones para el cálculo del campo 11

1.2.2 Modelo para describir la descarga de retorno 12

1.2.3 Efecto de la conductividad del terreno 14

1.2.4 Efecto de la topografía del terreno 15

1.2.5 Soluciones numéricas a las ecuaciones de campo electromagnético producido por rayo 17

CAPITULO 2: CÁLCULO DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO POR EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS 19

2.1 Método de diferencias finitas 19

2.2 Método de diferencias en electromagnetismo 20

2.2.1 FDTD en 2D 24

2.2.2 Inclusión de canal del rayo 27

2.2.3 Condición de estabilidad 30

2.2.4 Fronteras Absorbentes 31

2.3 Validación del método de diferencias finitas para terreno plano 36

2.3.1 Comparación con el FDTD STUDIO 36

2.3.2 Validación con ecuaciones analíticas....38

CAPITULO 3: CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN TERRENO NO PLANO....45

3.1 Modelado del terreno no plano usando diferencias finitas....45

3.1.1 Metodología escalera (staircase):....45

3.1.2 Metodología de partición de celda diagonal (diagonal splitcell) para superficies PEC....47

3.1.3 Metodología de ruta de contorno (Contour Path)....48

3.1.4 Metodología con distintos materiales....50

3.2 Validación con el FDTD STUDIO....50

3.2.1 Simulación de un cilindro....50

3.2.2 Simulación de un cono....52

3.3 Aproximación de contorno vs escalera....53

3.4 Calculo del campo eléctrico en terreno no plano....57

3.4.1 Resultados Conductividad Infinita....57

3.4.2 Conductividad Finita....70

CAPITULO 4: TENSIONES INDUCIDAS EN TERRENO NO PLANO....75

4.1 Introducción....75

4.2 Casos de simulación:....76

4.2.1 Simulación de terreno plano:....76

4.2.2 Simulación de inclinación negativa....78

4.2.3 Simulación inclinación positiva:....81

4.2.4 $\alpha = 26.6^{\circ}$:....81

4.2.5 $\alpha = 45^{\circ}$:....82

4.2.6 $\alpha = 63.4^{\circ}$:....83

4.3 Aportes al modelado de tensiones inducidas por rayo en líneas de distribución 84

CAPITULO 5: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS 87

5.1 Conclusiones 87

5.1.1 Campo Electromagnético 87

5.1.2 Tensiones inducidas por rayo 88

5.2 Trabajos futuros 89

ANEXO A: DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE CAMPO EN DIFERENCIAS FINITAS EN COORDENADAS CILÍNDRICAS 91

INDICE DE FIGURAS

FIGURA 1. FOTOGRAFÍA DE UNA LÍNEA DE DISTRIBUCIÓN TÍPICA EN ZONA MONTAÑOSA 2
FIGURA 2. GEOMETRÍA Y SISTEMA DE COORDENADAS PARA LOS PUNTOS DE CAMPO Y DE FUENTE USADOS EN LA SOLUCIÓN CON EL VECTOR DE POTENCIAL 7
FIGURA 3. A) CAMPO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO TOTAL A UNA DISTANCIA DE 100M, B) CAMPO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO A UNA DISTANCIA DE 5 KM C) CAMPO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO A UNA DISTANCIA DE 200 KM 11
FIGURA 4. ANTENA FINITA SOBRE UN PLANO PERFECTAMENTE CONDUCTOR..... 12
FIGURA 5. CANAL INCLINADO Y SU EQUIVALENTE CONFIGURACIÓN DE TERRENO NO PLANO..... 16
FIGURA 6. CANAL INCLINADO Y SUS PUNTOS DE OBSERVACIÓN. TOMADO DE [27]..... 16
FIGURA 7. CAMPOS PARA DIFERENTES PUNTOS DE OBSERVACIÓN. A) CAMPO ELÉCTRICO A 500M, B)CAMPO MAGNÉTICO A 500M. TOMADO DE [27] 17
FIGURA 8. CELDA DE YEE EN COORDENADAS CILÍNDRICAS. ADAPTADO DE [35] 24
FIGURA 9. GRILLA EN DOS DIMENSIONES. CASO $TE\varphi$ 26
FIGURA 10. ÁREA DE INTEGRACIÓN DE LA LEY DE AMPÉRE..... 28
FIGURA 11. FUENTE DE CORRIENTE CON RESISTENCIA INTERNA. ADAPTADO DE [34]..... 29
FIGURA 12. ONDA PLANA INCIDENTE SOBRE LA FRONTERA IZQUIERDA. ADAPTADO DE [35]..... 32
FIGURA 13. GRILLA PARA FRONTERAS ABSORBENTES DE MUR 35
FIGURA 14. FORMA DE ONDA GAUSSIANA MODULADA. F = 1MHZ. 37
FIGURA 15. MEDICIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN EL FDTD STUDIO. (EL CUBO REPRESENTA EL PUNTO DE MEDICIÓN)..... 38
FIGURA 16. COMPARACIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO VERTICAL OBTENIDO PARA LAS DOS METODOLOGÍAS. 38
FIGURA 17. PUNTO DE MEDICIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO VERTICAL PARA TERRENO PLANO. 39
FIGURA 18. CAMPO ELÉCTRICO VERTICAL MEDIDO A UNA DISTANCIA DE 50 M DE UN CANAL SOBRE UN TERRENO PLANO. 40
FIGURA 19. . CAMPO ELÉCTRICO VERTICAL MEDIDO A UNA DISTANCIA DE 100 M DE UN CANAL SOBRE UN TERRENO PLANO. 40
FIGURA 20. . CAMPO ELÉCTRICO VERTICAL MEDIDO A UNA DISTANCIA DE 300 M DE UN CANAL SOBRE UN TERRENO PLANO. 41
FIGURA 21. . CAMPO ELÉCTRICO VERTICAL MEDIDO A UNA DISTANCIA DE 500 M DE UN CANAL SOBRE UN TERRENO PLANO. 41

FIGURA 22. . CAMPO ELÉCTRICO VERTICAL MEDIDO A UNA DISTANCIA DE 1 KM DE UN CANAL SOBRE UN TERRENO PLANO.....42
FIGURA 23. CAMPO ELÉCTRICO HORIZONTAL A UNA ALTURA DE 10 M SOBRE UN TERRENO PLANO CON CONDUCTIVIDAD FINITA DE 0.01 S/M A 100 M DEL CANAL 43
FIGURA 24. CAMPO ELÉCTRICO HORIZONTAL A UNA ALTURA DE 10 M SOBRE UN TERRENO PLANO CON CONDUCTIVIDAD FINITA DE 0.01 S/M A 300 M DEL CANAL 43
FIGURA 25. CAMPO ELÉCTRICO HORIZONTAL A UNA ALTURA DE 10 M SOBRE UN TERRENO PLANO CON CONDUCTIVIDAD FINITA DE 0.01 S/M A 500 M DEL CANAL 44
FIGURA 26. APROXIMACIÓN ESCALERA 45
FIGURA 27. CELDA UBICADA EN LA INTERFAZ AIRE TERRENO PARA LA APROXIMACIÓN ESCALERA.....46
FIGURA 28. APROXIMACIÓN DE PARTICIÓN DE CELDA (SPLITCELL) 47
FIGURA 29. CELDA DE YEE CON APROXIMACIÓN CONTOUR PATH 48
FIGURA 30. SIMULACIÓN DE UN TERRENO CILÍNDRICO EN EL FDTD STUDIO Y SU CORRESPONDIENTE SIMULACIÓN EN 2D.....51
FIGURA 31. COMPARACIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO VERTICAL OBTENIDO POR LA METODOLOGÍA FDTD EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (CIL 2D) Y LA FDTD EN COORDENADAS CARTESIANAS DEL *FDTD STUDIO* (CART 3D).....51
FIGURA 32. ESTRUCTURA DE CONO SIMULADA EN EL FDTD STUDIO 52
FIGURA 33. EQUIVALENTE EN 2D DEL CONO SIMULADO EN LA FIGURA 32 52
FIGURA 34. SIMULACIÓN DE DOS CILINDROS PEC EN EL FDTD STUDIO COMO APROXIMACIÓN A UN CONO 53
FIGURA 35. COMPARACIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO VERTICAL OBTENIDO POR LA METODOLOGÍA FDTD EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (CIL 2D) Y LA FDTD EN COORDENADAS CARTESIANAS DEL FDTD STUDIO (CART 3D).....53
FIGURA 36. PUNTO DE MEDICIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR 54
FIGURA 37. METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO DE CAMPOS SOBRE EL TERRENO.....55
FIGURA 38. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR AL TERRENO, PARA UNA INCLINACIÓN DE 26.6° 55
FIGURA 39. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR AL TERRENO, PARA UNA INCLINACIÓN DE 45º 56
FIGURA 40. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR AL TERRENO, PARA UNA INCLINACIÓN DE 63.4º.....56
FIGURA 41. CONFIGURACIÓN DE TERRENO NO PLANO INCLINADO NEGATIVAMENTE, CON SU EQUIVALENTE EN 3D 58
FIGURA 42. CAMPO ELÉCTRICO VERTICAL Y HORIZONTAL MEDIDO A 500 M DE DISTANCIA DEL CANAL DE LA DESCARGA.....58
FIGURA 43. CAMPO ELÉCTRICO VERTICAL Y HORIZONTAL MEDIDO A 100 M DE DISTANCIA DEL CANAL DE LA DESCARGA.....59

FIGURA 44. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR AL TERRENO A 500 M DEL RAYO. 60
FIGURA 45. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR A UNA DISTANCIA DE 100 M DEL RAYO. 60
FIGURA 46. CAMPO MAGNÉTICO ACIMUTAL MEDIDO A 500 M Y A 5 M POR ENCIMA DEL CANAL DE LA DESCARGA 61
FIGURA 47. CAMPO MAGNÉTICO ACIMUTAL MEDIDO A 100 M Y A 5 M POR ENCIMA DEL CANAL DE LA DESCARGA. 61
FIGURA 48. CONFIGURACIÓN DE TERRENO NO PLANO INCLINADO POSITIVAMENTE. 62
FIGURA 49. CAMPO ELÉCTRICO HORIZONTAL A UNA DISTANCIA DE 500 M SOBRE UN TERRENO CON INCLINACIÓN POSITIVA 62
FIGURA 50. CAMPO ELÉCTRICO VERTICAL MEDIDO A UNA DISTANCIA DE 500 M SOBRE UN TERRENO CON INCLINACIÓN POSITIVA. 63
FIGURA 51. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR MEDIDO A 100M DEL RAYO SOBRE UN TERRENO CON INCLINACIÓN POSITIVA. 63
FIGURA 52. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR MEDIDO A 300M DEL RAYO SOBRE UN TERRENO CON INCLINACIÓN POSITIVA. 64
FIGURA 53. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR MEDIDO A 500 M SOBRE UN TERRENO CON INCLINACIÓN POSITIVA. 64
FIGURA 54. CAMPO MAGNÉTICO ACIMUTAL MEDIDO A 100 M Y A 5 M POR ENCIMA DEL CANAL DE LA DESCARGA 65
FIGURA 55. CAMPO MAGNÉTICO ACIMUTAL MEDIDO A 300 M Y A 5 M POR ENCIMA DEL CANAL DE LA DESCARGA 65
FIGURA 56. CAMPO MAGNÉTICO ACIMUTAL MEDIDO A 500 M Y A 5 M POR ENCIMA DEL CANAL DE LA DESCARGA 66
FIGURA 57. CONFIGURACIÓN DE TERRENO INCLINADO MÁS UN PLANO. 66
FIGURA 58. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR SOBRE UNA MONTAÑA MÁS UN PLANO, MEDIDO A UNA DISTANCIA SOBRE EL TERRENO DE 100M 67
FIGURA 59. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR SOBRE UNA MONTAÑA MÁS UN PLANO, MEDIDO A UNA DISTANCIA SOBRE EL TERRENO DE 300M 68
FIGURA 60. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR SOBRE UNA MONTAÑA MÁS UN PLANO, MEDIDO A UNA DISTANCIA SOBRE EL TERRENO DE 500M. 68
FIGURA 61. CONFIGURACIÓN DE TERRENO INCLINADO MÁS UN PLANO CON MEDICIONES SOBRE EL TERRENO PLANO 69
FIGURA 62. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR MEDIDO A UNA DISTANCIA *R = 300 M* DE LA MONTAÑA. 69

FIGURA 63. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR MEDIDO A UNA DISTANCIA *R = 700 M* DE LA MONTAÑA. 70
FIGURA 64. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR MEDIDO A UNA DISTANCIA *R = 700 M* DE LA MONTAÑA. 70
FIGURA 65. CAMPO ELÉCTRICO HORIZONTAL A 500 M DE DISTANCIA DEL RAYO PARA UNA INCLINACIÓN NEGATIVA DE 63.4°.....71
FIGURA 66. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR A 500 M DE DISTANCIA DEL RAYO PARA UNA INCLINACIÓN NEGATIVA DE 63.4°. 71
FIGURA 67. CAMPO ELÉCTRICO HORIZONTAL A 500 M DEL CANAL DEL RAYO PARA UN TERRENO CON INCLINACIÓN POSITIVA PARA CONDUCTIVIDAD FINITA, Y CONDUCTIVIDADES DE 0.01 Y 0.001 S/M.....72
FIGURA 68. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR A 500 M DEL CANAL DEL RAYO PARA UN TERRENO CON INCLINACIÓN POSITIVA PARA CONDUCTIVIDAD FINITA, Y CONDUCTIVIDADES DE 0.01 Y 0.001 S/M.....72
FIGURA 69. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR AL TERRENO DE INCLINACIÓN NEGATIVA MÁS PLANO, CON UN ÁNGULO DE 26.6° Y CONDUCTIVIDAD FINITA. 73
FIGURA 70. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR AL TERRENO DE INCLINACIÓN NEGATIVA MÁS PLANO, CON UN ÁNGULO DE 26.6° Y CONDUCTIVIDAD FINITA. 73
FIGURA 71. CAMPO ELÉCTRICO PERPENDICULAR AL TERRENO DE INCLINACIÓN NEGATIVA MÁS PLANO, CON UN ÁNGULO DE 26.6° Y CONDUCTIVIDAD FINITA. 74
FIGURA 72. CONFIGURACIÓN DE TERRENO PLANO PARA CÁLCULO DE TENSIÓN INDUCIDA 77
FIGURA 73. TENSIÓN INDUCIDA AL INICIO DE UNA LÍNEA SOBRE TERRENO PLANO. MARCADOR (□) PARA CAMPO INTERNO. MARCADOR (○) PARA CAMPO EXTERNO CALCULADO MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS 78
FIGURA 74. LÍNEA DE DISTRIBUCIÓN SOBRE UN PLANO INCLINADO CON PENDIENTE NEGATIVA.....78
FIGURA 75. TENSIÓN INDUCIDA AL INICIO DE LA LÍNEA SOBRE UN TERRENO CON INCLINACIÓN DE 26.6. MARCADOR (□) PARA TERRENO PLANO. MARCADOR (○) PARA TERRENO INCLINADO 79
FIGURA 76. TENSIÓN INDUCIDA AL INICIO DE LA LÍNEA SOBRE UN TERRENO CON INCLINACIÓN DE 45. □ MARCADOR (□) PARA TERRENO PLANO. MARCADOR (○) PARA TERRENO INCLINADO 80
FIGURA 77. TENSIÓN INDUCIDA AL INICIO DE LA LÍNEA SOBRE UN TERRENO CON INCLINACIÓN DE 63.4 MARCADOR (□) PARA TERRENO PLANO. MARCADOR (○) PARA TERRENO INCLINADO 80
FIGURA 78. LÍNEA DE DISTRIBUCIÓN SOBRE UN PLANO INCLINADO CON PENDIENTE POSITIVA 81
FIGURA 79. TENSIÓN INDUCIDA AL INICIO DE LA LÍNEA SOBRE UN TERRENO CON INCLINACIÓN POSITIVA DE 26.6. MARCADOR (□) PARA TERRENO PLANO. MARCADOR (○) PARA TERRENO INCLINADO.....82

FIGURA 80. TENSIÓN INDUCIDA AL INICIO DE LA LÍNEA SOBRE UN TERRENO CON INCLINACIÓN POSITIVA DE 45. MARCADOR (□) PARA TERRENO PLANO. MARCADOR (○) PARA TERRENO INCLINADO 82
FIGURA 81. TENSIÓN INDUCIDA AL INICIO DE LA LÍNEA SOBRE UN TERRENO CON INCLINACIÓN POSITIVA DE 63.4 MARCADOR (□) PARA TERRENO PLANO. MARCADOR (○) PARA TERRENO INCLINADO 83
FIGURA 82. CELDA DE INTEGRACIÓN DE LA LEY DE AMPÉRE EN COORDENADAS CILÍNDRICAS 92
FIGURA 83. CELDA DE INTEGRACIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO ACIMUTAL 94

Introducción

El rayo es el fenómeno de interferencia electromagnética más común en líneas de distribución y transmisión a nivel mundial. Se estima que es el causante de al menos del 70 al 80% de todos los problemas de calidad de la energía eléctrica [1]. Colombia es un país con una alta actividad atmosférica, su ubicación en zona tropical lo hace especialmente propenso a estos [2], la salida de líneas de transmisión y distribución a causa de rayos ha sido un problema constante para las empresas de energía del país. Un rayo que impacte una línea puede causar flameo en su cadena de aisladores que hace que ésta salga de servicio, mostrando que en las líneas de distribución la mayoría de las salidas se deben a impactos indirectos. Éstos son más frecuentes que los impactos directos e inducen tensiones de elevado valor en estas, que debido a su bajo nivel de aislamiento terminan por salir de servicio afectando los índices de calidad de la energía y a los usuarios finales. También debido a que la mayoría de las líneas de distribución en nuestro país son aéreas, el efecto de las descargas eléctricas atmosféricas es mucho mayor que si fueran subterráneas como ocurre en otros países. Por esta razón resulta fundamental realizar un adecuado modelado de las tensiones inducidas producidas por la descarga de retorno del rayo, que parte desde un adecuado cálculo del campo electromagnético producido por la descarga.

No obstante, el modelado del campo electromagnético se ha llevado a cabo considerando que los terrenos son planos. Quizá esto tenga motivaciones de tipo analítico, ya que considerarlos así hace que las ecuaciones de campo electromagnético se simplifiquen, ó también que los lugares en los que se han realizado investigaciones en tensiones inducidas por rayos, cuentan con topografías planas en las que tener en cuenta algunas irregularidades del terreno no resulta de interés [3], [4], [5]. El caso de Colombia y la región andina es distinto, porque muchas de sus ciudades están construidas sobre montañas y las líneas de distribución atraviesan topografías abruptas que difícilmente se pueden aproximar a terreno plano. Son innumerables los ejemplos de líneas de distribución en regiones montañosas, especialmente en la zona de las cordilleras, central, oriental y occidental. Un ejemplo se muestra en la siguiente fotografía:

Figura 1. Fotografía de una línea de distribución típica en zona montañosa

Para obtener las tensiones inducidas en este tipo de líneas, se hacen suposiciones de alturas promedio y los campos se evalúan con las expresiones para terreno plano usadas tradicionalmente en la literatura, sin embargo ¿será una buena aproximación? Para esto es necesario realizar experimentos o cálculos numéricos que permitan determinar el efecto de la orografía. Esta tesis se direcciona hacia el cálculo del campo electromagnético producido por rayo en condiciones de terreno no plano y el efecto que tiene en las tensiones inducidas en una línea de distribución típica. En cuanto a experimentación, en otra tesis de Maestría, se están realizando mediciones de campos eléctricos producidos por rayos en Manizales, en zona montañosa [6], y por otro lado en un proyecto que se hizo en la región de Cundinamarca se han realizado mediciones de tensiones inducidas en una red de distribución en zona montañosa [7].

Para obtener los campos electromagnéticos que produce una descarga de retorno sobre terrenos irregulares se ha dicho que no se pueden utilizar las expresiones que se conocen en la literatura. El problema entonces se debe abordar solucionando directamente las ecuaciones de Maxwell en un espacio limitado con la topografía escogida y por unas fronteras adecuadas que acoten el espacio sobre el que se propaga la onda electromagnética, a través de un método numérico apropiado. En la literatura los métodos más usados para resolver problemas de electromagnetismo son: el método de los momentos (MOM), el método de elementos finitos (FEM), y el de diferencias finitas en el dominio de la frecuencia (FD) y del tiempo (FDTD). El primero se usa para resolver ecuaciones integrales, el segundo aplica un principio variacional sobre el dominio del problema y el último

resuelve ecuaciones diferenciales. Si bien, varios métodos pueden resolver el mismo problema, cada método tiene diferentes aplicaciones, no se puede decir que haya uno "mejor", más bien existe complementariedad entre uno y otro, ya que un método puede hacer mejor algunas cosas que otro, pero fallar en otras, además a la hora de escogerlo también importa la familiaridad que tenga el investigador con un método [8]. El método de diferencias finitas se puede entender con facilidad, sus ecuaciones son simples de implementar en un computador y de allí se deriva la gran utilización que ha tenido para resolver problemas de electromagnetismo [9]. Si bien la técnica de elementos finitos tiene un alto potencial para simular geometrías complejas, su formulación matemática en comparación con la de diferencias finitas (FD) es más tediosa y presenta mayor dificultad para realizar los enmallados de los objetos, así como para la implementación de su algoritmo. Debido a la facilidad que presenta el método de diferencias finitas, se escoge como la herramienta para encontrar los campos electromagnéticos que produce una descarga sobre un terreno no plano. Si bien se simularán configuraciones de terreno no plano, su geometría no es demasiado compleja, para ser adaptada a una grilla cuadrada como la del método de diferencias finitas.

El estudio propuesto indagará si las tensiones inducidas en zona montañosa son diferentes a la de aquellos lugares con topografías planas. Obtener este conocimiento permitiría diseñar mejores sistemas de protecciones para las líneas de distribución en nuestro país y en general en cualquier sitio que esté ubicado sobre montañas, realizando una mejor aproximación al fenómeno de las tensiones inducidas por rayo, evaluando si éste se está subestimando o sobreestimando, para así posiblemente reconsiderar el uso de ciertos equipos, repensar los materiales usados en las redes de distribución, las estrategias de aislamiento y los apantallamientos. La utilidad de este conocimiento radica en lograr disminuir la tasa de salidas de las redes eléctricas de distribución, en aquellas poblaciones ubicadas sobre zonas montañosas, especialmente en el sector rural en el que las fallas toman tiempo considerable en repararse, lo cual redundará en una mejor calidad del servicio para los usuarios finales.

La tesis se divide en cuatro capítulos. El primero describe una recopilación de las técnicas analíticas y numéricas usadas para calcular el campo

electromagnético producido por una descarga de rayo. El segundo capítulo se concentra en describir el método de diferencias finitas aplicado al cálculo del campo electromagnético producido por una descarga vertical sobre terreno plano. El tercer capítulo aborda el problema de adaptar el método de diferencias finitas a las configuraciones de terreno no plano escogidas, presentando los resultados del campo electromagnético en estas configuraciones. Por último el capítulo 4 presenta los resultados de las tensiones inducidas calculadas con los campos obtenidos en el capítulo 3, algunos aportes adicionales que se han logrado en el cálculo de tensiones inducidas y las conclusiones del presente trabajo.

Capitulo 1: Campo Electromagnético producido por el rayo

En este capítulo se describen las metodologías tanto analíticas como numéricas utilizadas para calcular el campo eléctrico producido por la descarga de retorno del rayo, describiendo los factores que influencian el campo electromagnético tales como el modelo de la descarga de retorno, la conductividad y la topografía del terreno

1.1 Técnicas analíticas para el cálculo del campo electromagnético

Las dos metodologías más ampliamente utilizadas para calcular los campos eléctricos y magnéticos de configuraciones conocidas de corriente y de carga, son la técnica del dipolo y la técnica del monopolo. La primera ha sido más ampliamente utilizada en teoría de antenas y radiación por rayos, esta solo requiere del conocimiento de la densidad de corriente de la fuente en función del espacio y del tiempo. Por su parte la técnica del monopolo requiere conocer tanto la densidad de corriente y de carga espacio-temporal [10]. Una tercera técnica se conoce como de densidades de cargas aparentes y resulta de una transformación matemática que relaciona las densidades de corriente y carga que vería un observador en el punto de cálculo. [11]. Todas las técnicas están basadas en las ecuaciones de Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell para un medio lineal, isotrópico, homogéneo e invariante en el tiempo son:

$$\nabla . E = \rho/\varepsilon \tag{1.1}$$

$$\nabla . (\mu H) = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\nabla \times H = J + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \tag{1.4}$$

Sabiendo que (1.2) puede ser derivada de (1.3) al sacar la divergencia de esta última e integrando en el tiempo para encontrar $\nabla.(\mu H)$, con la información de que en algún tiempo μH es cero, se llega a siete ecuaciones independientes con las siguientes incógnitas: tres componentes de la intensidad del campo eléctrico *E*, tres componentes de intensidad del campo magnético *H*, tres componentes de la densidad de corriente *J* y la densidad de carga ρ. Siendo μ la permeabilidad y ε la permitividad del medio, quedan diez incógnitas, de las cuales se deben especificar al menos siete. Esto se da estableciendo la densidad de corriente y/o la carga como las fuentes electromagnéticas y asumiendo que estas no son afectadas por los campos. Cuando se conoce tanto la carga como las densidades de corrientes, el problema queda sobreespecificado pues se conocen 4 de las incógnitas. En este hecho se basa la técnica del monopolo, con la cual es posible obtener soluciones sencillas para problemas complicados. Si solo se conocen las densidades de corriente, se tiene un sistema de siete ecuaciones con siete incógnitas, en el cual las variables desconocidas se hallan en función de las densidades de corriente, éste es el principio de la técnica del dipolo [4].

Para facilitar la solución de las ecuaciones de Maxwell con fuentes conocidas, los campos se expresan en términos de potenciales escalares y vectoriales:

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \tag{1.5}$$

$$\mu H = \nabla \times A \tag{1.6}$$

Los potenciales están relacionados entre sí, a través de la condición de Lorentz:

$$\nabla . A + \mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{1.7}$$

Las ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales se reducen a:

$$\nabla^2 A - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J \tag{1.8}$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon \tag{1.9}$$

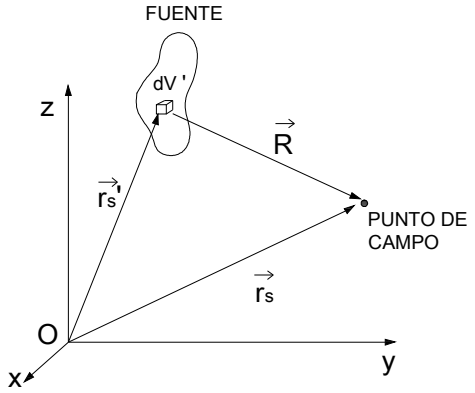


Figura 2. Geometría y sistema de coordenadas para los puntos de campo y de fuente usados en la solución con el vector de potencial

Las soluciones para un medio no homogéneo, de acuerdo a la geometría mostrada en la Figura 2, están dadas por:

$$A(r_s, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J\left(r_s', t - \frac{|r_s - r_s'|}{c}\right)}{|r_s - r_s'|} dV' \tag{1.10}$$

$$\varphi(r_s, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho\left(r_s', t - \frac{|r_s - r_s'|}{c}\right)}{|r_s - r_s'|} dV' \tag{1.11}$$

1.1.1 Técnica del Dipolo

También llamada la técnica de condición de Lorentz consiste de los siguientes pasos:

Se especifica la densidad de corriente $\bar{J}$

Se usa $\bar{J}$ para encontrar el vector potencial $\bar{A}$

Se usa $\bar{A}$ y la condición de Lorentz para encontrar el potencial escalar φ

Se calcula el campo eléctrico $\bar{E}$ usando $\bar{A}$ y φ.

El campo magnético $\bar{B}$ se calcula usando $\bar{A}$.

La técnica del dipolo utiliza como fuentes de campo eléctrico y magnético, dipolos infinitesimales variantes en el tiempo. El potencial vectorial magnético se puede expresar en función de la corriente como:

$$\mathrm{dA}(\mathrm{r_s}, \mathrm{t}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\mathrm{i}(\mathrm{t} - \mathrm{R/c})}{\mathrm{R}}\mathrm{dz}' \tag{1.12}$$

El potencial escalar φ se puede relacionar también con la corriente, al expresarlo en términos de $\bar{A}A$ mediante la condición de Lorentz:

$$\varphi(r_s, t) = -\frac{1}{\mu\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} \nabla . A dt' + \varphi(t = -\infty) \tag{1.13}$$

El campo eléctrico se calcula como:

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \tag{1.14}$$

Reemplazando (1.12) y (1.13) en (1.14) y siguiendo el procedimiento detallado descrito en [12] se obtiene:

$$dE = dE_r a_r + dE_z a_z \tag{1.15}$$

$$dE_r = \frac{dz'}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{3r(z-z')}{R^5}\int_{-\infty}^{t} i(z', t - R/c)d\tau + \frac{3r(z-z')}{cR^4} i(z', t - R/c) + \frac{r(z-z')}{c^2R^3}\frac{\partial i(z', t - R/c)}{\partial t}\right] \tag{1.16}$$

$$dE_z = \frac{dz'}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{2(z-z')^2 - r^2}{R^5}\int_{-\infty}^{t} i(z', t - R/c)d\tau + \frac{2(z-z')^2 - r^2}{cR^4} i(z', t - R/c) - \frac{r^2}{c^2R^3}\frac{\partial i(z', t - R/c)}{\partial t}\right] \tag{1.17}$$

$$dH\varphi = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{r}{cR^2}\frac{\partial i(z', t - R/c)}{\partial x} + \frac{r}{R^3} i(z', t - R/c)\right]dz' \tag{1.18}$$

1.1.2 Técnica del Monopolo

También se conoce como la técnica de la ecuación de continuidad, consiste de los siguientes pasos:

Se especifica la densidad de corriente $\bar{J}$ (o la densidad lineal de carga ρ)
Se usa $\bar{J}$ (o ρ) y la ecuación de continuidad para encontrar ρ (o $\bar{J}$).
Se usa $\bar{J}$ para encontrar $\bar{A}$ y ρ para encontrar φ
Se calcula el campo eléctrico $\bar{E}$ usando $\bar{A}$ y φ.
El campo magnético $\bar{B}$ se calcula usando $\bar{A}$.

Se asumirá que las densidades de corrientes J están dadas.

Con ayuda de la ecuación de continuidad se obtiene la densidad de carga:

$$\nabla . J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.19}$$

Se calculan los potenciales y los campos por medio de (1.5), (1.6), (1.10) y (1.11).

1.1.3 Comparación de las dos técnicas

Rubinstein [4] realiza una comparación de las dos técnicas, al calcular el campo electromagnético que produce una línea de carga y de corriente vertical sobre un terreno plano y perfectamente conductor. Esta es una sencilla aproximación a la descarga de retorno, la cual asciende desde la tierra removiendo carga negativa (o depositando carga positiva) en un canal previamente formado por una rayo nube tierra, cargado negativamente. La corriente es cero arriba de la altura vt, donde v es la velocidad de la descarga de retorno y t es el tiempo transcurrido. La corriente y la carga se pueden expresar como:

$$i(z', t) = I_0 u(t - z'/v) \tag{1.20}$$

$$q(z', t) = q_0 u(t - z'/v) \tag{1.21}$$

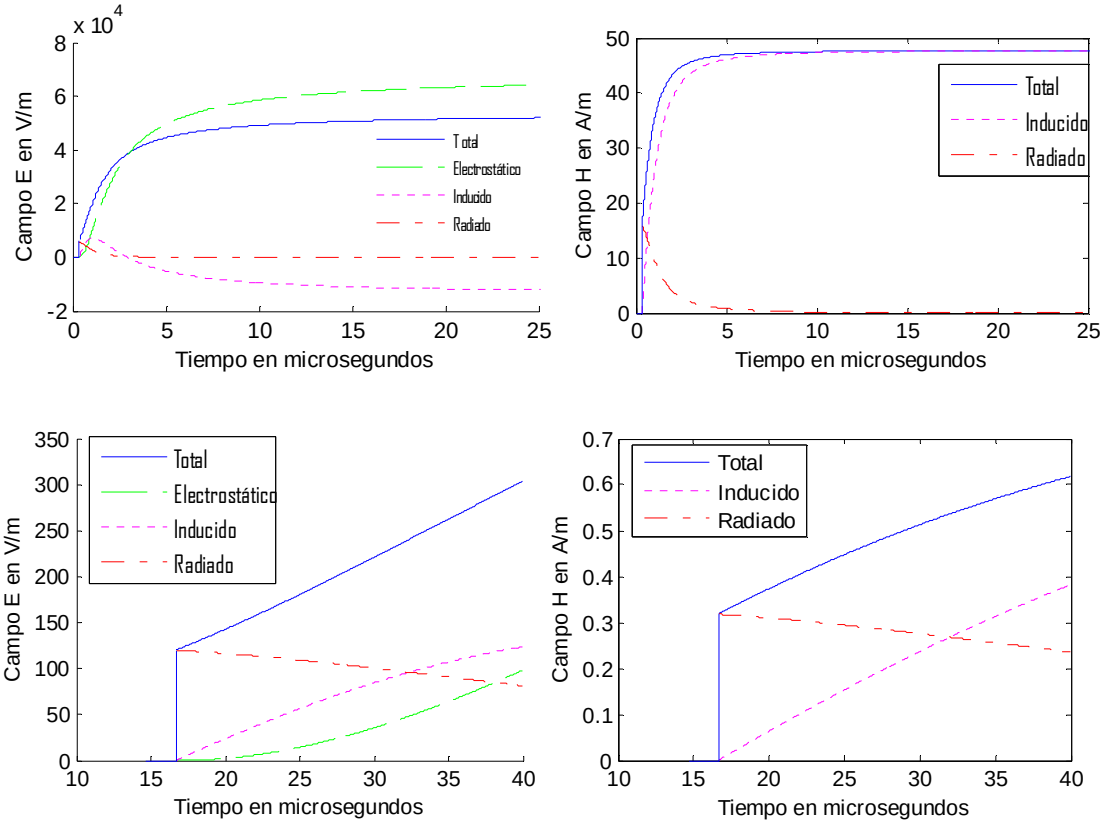
Siendo u, la función de Heaviside,

Considerando las imágenes para éstos, dado que se trata de un terreno infinitamente conductor, se obtiene:

$$\varphi_{imagen}(z) = -\varphi_{real}(-z) \tag{1.22}$$

$$A_{imagen}(z) = A_{real}(-z) \tag{1.23}$$

El potencial escalar imagen es de signo contrario al real porque la carga imagen es de signo opuesto a la de la carga real, mientras que el potencial vectorial imagen y el real son iguales debido a que ambas corrientes tienen la misma dirección. Los potenciales totales son equivalentes a la suma de sus partes reales más las imágenes. Siguiendo el desarrollo detallado de [4], se llega a expresiones analíticas para el campo eléctrico vertical en sus tres componentes: electrostático ($dependencia\ R^{-3}$), inducido ($dependencia\ c^{-1}R^{-2}$) y radiado ($dependencia\ c^{-2}R^{-1}$), siendo c la velocidad de la luz y R la distancia desde el dipolo de corriente hasta el punto en el que se calcula el campo; y para el campo magnético (inducido y radiado). Como un ejemplo se muestran los campos eléctricos y magnéticos calculados a distancias de 100 m, 5 km y 200 km respectivamente, con una fuente de corriente pico $I_0 = 30$ kA, y $v/c = 1/3$, reproducidos en esta tesis por medio de las fórmulas analíticas descritas en el artículo:



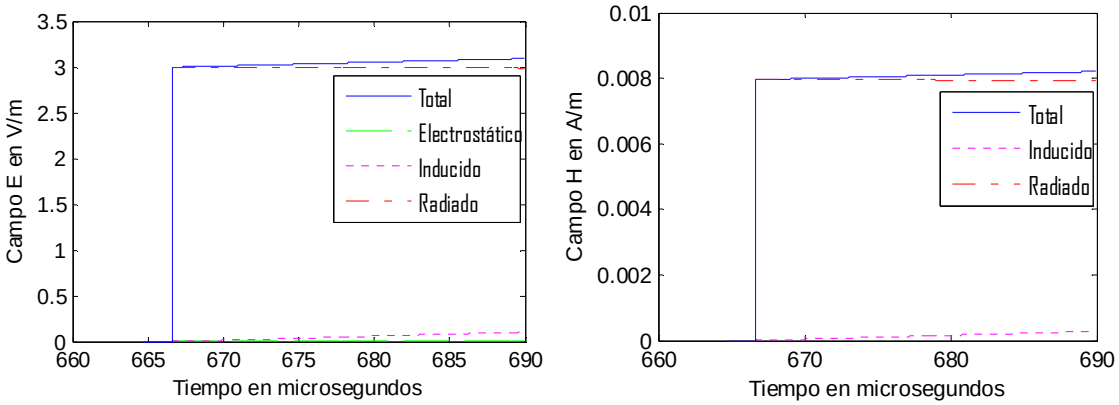


Figura 3. a) Campo eléctrico y magnético total a una distancia de 100m, b) Campo eléctrico y magnético a una distancia de 5 km c) Campo eléctrico y magnético a una distancia de 200 km

Si bien el campo electromagnético total obtenido a través de las dos técnicas es idéntico, al ser un desarrollo riguroso de las ecuaciones de Maxwell, las componentes electrostática, inducida y radiada de la técnica del dipolo mostradas en la gráfica no necesariamente son iguales a sus correspondientes de la técnica del monopolo. En [11], se ha descrito como las componentes difieren entre sí para distancias cercanas a la fuente, pero las diferencias se acortan cuando el cálculo se realiza a distancias mayores, por ejemplo a 100 km.

1.2 Metodología general para el cálculo del campo electromagnético

1.2.1 Expresiones para el cálculo del campo

Las expresiones del campo electromagnético producido por rayo en el dominio del tiempo, fueron presentadas por primera vez por Uman en 1975 [13], al describir el campo radiado por una antena finita vertical sobre un plano perfectamente conductor (Figura 4).

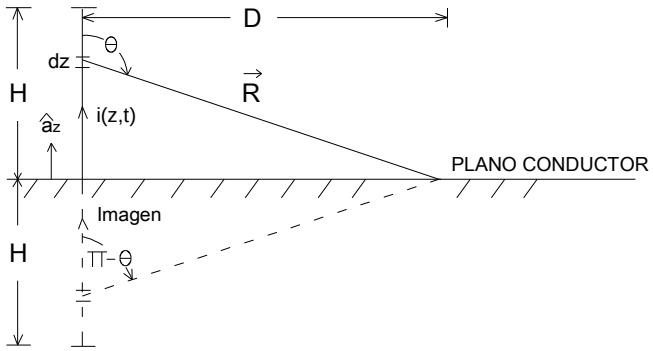


Figura 4. Antena finita sobre un plano perfectamente conductor

Las ecuaciones generales son presentadas en [12] y se derivan de la técnica del dipolo descrita en la sección 1.1.1:

$$dE_r = \frac{dz'}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{3r(z-z')}{R^5}\int_{-\infty}^{t} i(z',t-R/c)d\tau + \frac{3r(z-z')}{cR^4}i(z',t-R/c) + \frac{r(z-z')}{c^2R^3}\frac{\partial i(z',t-R/c)}{\partial t}\right] \quad (1.24)$$

$$dE_z = \frac{dz'}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{2(z-z')^2-r^2}{R^5}\int_{-\infty}^{t} i(z',t-R/c)d\tau + \frac{2(z-z')^2-r^2}{cR^4}i(z',t-R/c) - \frac{r^2}{c^2R^3}\frac{\partial i(z',t-R/c)}{\partial t}\right] \quad (1.25)$$

$$dH\varphi = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{r}{cR^2}\frac{\partial i(z',t-R/c)}{\partial x} + \frac{r}{R^3}i(z',t-R/c)\right]dz' \quad (1.26)$$

Estas ecuaciones son sólo válidas para configuraciones de terreno plano perfectamente conductor. Para incluir las irregularidades del terreno es necesario el desarrollo directo de las ecuaciones de Maxwell sobre dicha topografía por medio de un método numérico, como se mostrará en la sección 1.2.5

1.2.2 Modelo para describir la descarga de retorno

Las expresiones anteriores muestran que se debe tener una expresión para la variación espacio-temporal de la corriente de la descarga de retorno a lo largo del canal. Existen en la literatura varios modelos para describir la corriente de retorno que se pueden clasificar en modelos de dinámica de gases, de parámetros distribuidos,

electromagnéticos y de ingeniería. Estos últimos son los de mayor facilidad de implementación. Algunos de estos son: el modelo de Bruce Gold (BG) [14], el modelo de línea de transmisión (TL) [15],[16], el modelo de corriente viajera (TCS) [17], el modelo modificado de línea de transmisión (MTL)[18][19], el modelo de Diendorfer y Uman [20] y el modelo de Cooray [21] . Todos los métodos de ingeniería se basan en la descripción de la corriente a lo largo del canal $i(z',t)$, en relación a la corriente en la base del canal $i(0,t)$, que es de la única de la que desde el punto de vista de la ingeniería se tienen mediciones {Document Not In Library}

El modelo TL asume que la corriente en la base del canal asciende por este como si se tratara de una línea de transmisión sin pérdidas a una velocidad v (Ec. (1.27)).

$$i(z',t) = i\left(0, t - \frac{z'}{v}\right), \qquad z < vt \tag{1.27}$$

$$i(0,t) = 0, \qquad z > vt$$

El modelo MTL hace una pequeña modificación al modelo TL al considerar que existe atenuación de la corriente a medida que se propaga por el canal, para incluir el efecto de la distribución vertical de la carga producida por el corona del líder, esta disminución puede ser lineal (modelo MTLL) [19] , o exponencial (MTLE)[18] , que es actualmente el modelo más utilizado:

$$i(z',t) = i\left(0, t - \frac{z'}{v}\right)e^{-z'/\lambda}, \qquad z < vt \tag{1.28}$$

$$i(0,t) = 0, \qquad z > vt$$

Donde λ es la constante de decaimiento (típicamente 2000)

v es la velocidad de la descarga de retorno.

La corriente en la base de canal se representa por una onda tipo Heidler [23], que es la que mejor se aproxima a las datos experimentales y tiene la ventaja de tener una derivada nula en t=0:

$$i(0,t) = \frac{I_0}{\eta} \frac{\left(\frac{t}{\tau_1}\right)^n}{1 + \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^n} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \tag{1.29}$$

$$\eta = e^{-\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)\left(n\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

Donde η es un factor de corrección de la amplitud

I_0 es la amplitud de la corriente en la base del canal

τ_1 es la constante del tiempo de frente

τ_2 es la constante del tiempo de cola

n es un exponente que varía entre 2 y 10

1.2.3 Efecto de la conductividad del terreno

Para obtener las soluciones del campo electromagnético para terrenos con conductividad finita se puede realizar mediante el uso de las ecuaciones de Sommerfeld, sin embargo resolverlas implica un gran costo computacional ya que se deben resolver una gran cantidad de integrales para cada uno de los dipolos elementales que se suponen sobre el canal y para diferentes frecuencias [24]. Cuando el terreno no es perfectamente conductor, el campo eléctrico horizontal (o radial) tiene variaciones significativas en magnitud y en polaridad, el campo eléctrico vertical y el campo magnético acimutal por su parte no cambian mucho respecto al caso de conductividad infinita para distancias menores a 1 km [3]. Si bien la intensidad del campo eléctrico horizontal es menor que el vertical, éste tiene gran importancia en el mecanismo de acople con la línea de distribución, por lo que debe ser calculado de una forma precisa [25]. Por tanto se pueden usar aproximaciones para hallar el campo horizontal como las de wave-tilt, que funciona bien para distancias más allá de unos cuantos kilómetros, pero no para distancias intermedias y cercanas al rayo [26]. Rubinstein [26] y Cooray [5] de una manera independiente plantearon una aproximación para hallar el campo eléctrico horizontal sobre y por encima del terreno a distancias cercanas e intermedias usando los campos eléctrico y magnético para conductividad infinita y los parámetros del terreno. La expresión conocida como la ecuación de Cooray-Rubistein es:

$$E_r(r,z,j\omega) = E_{rp}(r,z,j\omega) - H_{\varphi p}(r,z=0,j\omega)\frac{1+j}{\sigma\delta} \quad (1.30)$$

Donde:

p: es un subíndice que establece que el campo es para conductividad infinita

ε_{rg} es la permitividad relativa del suelo

σ_g es la conductividad del terreno

μ_g es la permeabilidad del terreno

δ es el factor de penetración, ($\sqrt{2/\omega\mu_g\sigma_g}$)

$E_{rp}(r,z,j\omega) y\ H_{\varphi p}(r,z=0,j\omega)$ son las transformadas de Fourier de las componentes horizontales del campo eléctrico a una altura z y de la componente acimutal del campo magnético a nivel del suelo respectivamente, ambos calculados asumiendo un terreno perfectamente conductor.

Esta aproximación predice de una forma satisfactoria el campo horizontal: tanto su polaridad, positiva, negativa o doble, así como su valor para distancias cercanas (cien metros), intermedia (algunos kilómetros) y lejanas (más de diez kilómetros), arrojando resultados cercanos a los obtenidos con expresiones más precisas [25]

1.2.4 Efecto de la topografía del terreno

Existe un interés investigativo en este tema a nivel mundial, por ejemplo Cooray plantea la necesidad de hacer estudios sobre los efectos de la propagación de los campos electromagnéticos sobre terrenos irregulares orientados a mejorar la precisión de los sistemas de localización de rayos [11] . Hasta el momento, los cálculos de campo electromagnético producidos por rayo se han realizado para terrenos planos. Sin embargo, los artículos publicados para canales de la descarga inclinados sirven de comparación, ya que son equivalentes a tener planos inclinados sobre los que caen descargas verticales (Figura 5), de acuerdo al método de las imágenes. El artículo de Moini et al [27] calcula el campo eléctrico vertical para un canal inclinado 30° en diferentes puntos de observación y calcula las tensiones inducidas que se producen en una línea de distribución cercana al canal de la descarga. Aunque no lo plantean así en

el artículo, esta es la primera aproximación al campo para terreno no plano, específicamente un plano inclinado a 30˚.

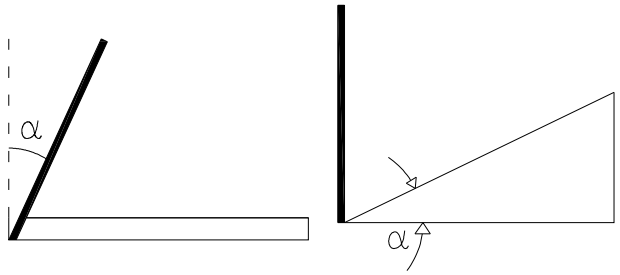


Figura 5. Canal inclinado y su equivalente configuración de terreno no plano

El artículo calcula el campo eléctrico y magnético que produce un canal inclinado utilizando el método de los momentos para resolver las ecuaciones integrales del campo electromagnético. Estas últimas ecuaciones resultan de modificar las ecuaciones descritas en la sección 1.2.1, al incluir el ángulo de inclinación y la distancia del dipolo al punto de cálculo. Allí se determina el campo electromagnético que produce un canal con una inclinación de 30º y su efecto en diferentes puntos de observación (ver Figura 6)

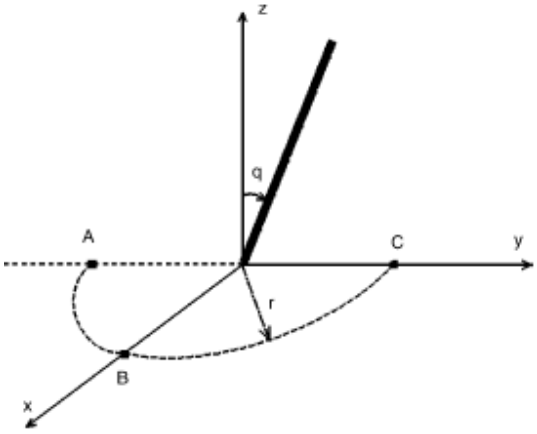


Figura 6. Canal inclinado y sus puntos de observación. Tomado de [27]

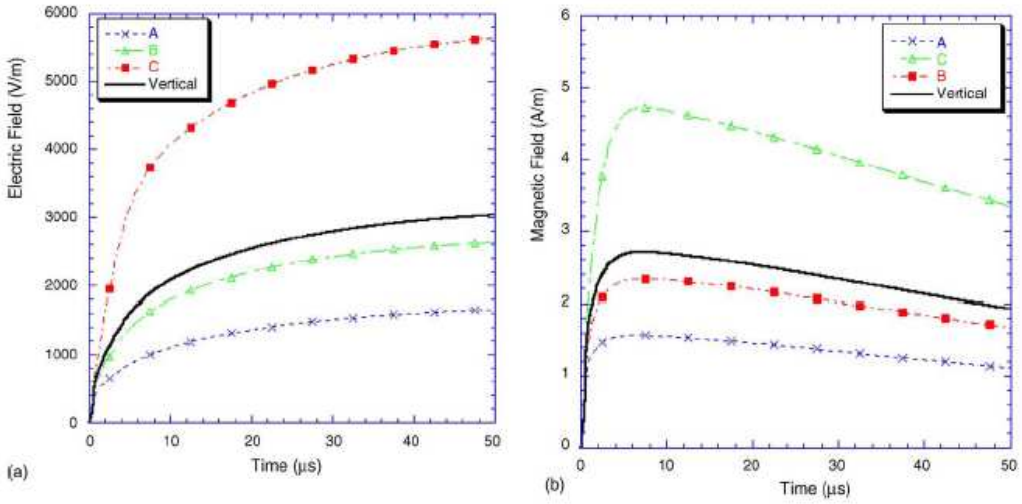


Figura 7. Campos para diferentes puntos de observación. a) Campo eléctrico a 500m, b)Campo magnético a 500m. Tomado de [27]

Los resultados para el campo eléctrico vertical y el campo acimutal para los diferentes puntos de observación a una distancia de 500m se muestran en la Figura 7. Allí se observa que en los puntos de medición A y B los campos presentan menores valores porque el canal está a mayor distancia comparado con el caso del canal recto, caso contrario al punto C en el que el canal se encuentra más cerca debido a su inclinación, por lo que el campo vertical es allí más del doble que para el canal vertical. De acuerdo a este análisis, se espera que para terrenos con inclinaciones positivas, el campo tenga un valor superior al caso de terreno plano.

1.2.5 Soluciones numéricas a las ecuaciones de campo electromagnético producido por rayo

Diferentes métodos han sido utilizados para calcular el campo electromagnético producido por rayo, en especial se destacan el método de los momentos (MOM) y el de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD). Se ha utilizado integración numérica para resolver las ecuaciones en el dominio del tiempo dadas por (1.24), (1.25) y (1.26), con el objeto de calcular tensiones inducidas en líneas de distribución [28] . El método de los momentos se ha usado para resolver las integrales del campo electromagnético producidas por un canal de rayo inclinado y su efecto en las tensiones inducidas en líneas de distribución [27]. El método de diferencias finitas aplicado a la

solución de las ecuaciones de Maxwell fue introducido por Yee [29] y a partir de su publicación se ha convertido en una técnica importante para resolver problemas de electromagnetismo. Entre las aplicaciones que ha tenido se pueden mencionar: dispersión de ondas (*wave scattering*) electromagnéticas tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia, interacción electromagnética con tejidos biológicos, acoplamiento de pulsos electromagnéticos, diseño de circuitos de microondas [30], cálculo de tensiones inducidas en líneas de distribución, entre otras. La aplicación del método de diferencias finitas al cálculo de campos electromagnéticos en el dominio del tiempo producidos por rayo la realiza inicialmente Sartori, proponiendo un método híbrido para calcular el LEMP (Lightning Electromagnetic Pulse), que consiste en obtener la densidad de flujo magnético a través de una fórmula analítica para una corriente tipo escalón y luego introducir éste en las ecuaciones de campo eléctrico obtenidas a través del método de diferencias finitas. Esta metodología plantea diferencias con la convencional planteada por Yee, ya que los valores de B se obtienen previamente, por lo que E y B no se calculan en pasos de tiempos medios alternadamente. El método híbrido permite además que los campos electromagnéticos se calculen sin necesidad de enmallar toda la región. [31]. Las ecuaciones en diferencias finitas en coordenadas cilíndricas en 2D para encontrar el campo electromagnético producido por una descarga vertical son presentadas por Yang et al [24], éstas son utilizadas en varios artículos posteriores: en [32] se plantea la influencia del enmallado en la precisión del campo electromagnético obtenido por el método de diferencias finitas (FDTD), Mimouni et al [30] calcula el campo electromagnético bajo diferentes profundidades de un terreno considerando diferentes conductividades, en [33] se calculan los campos electromagnéticos producidos en cercanías de una torre impactada por rayo, sobre y por debajo de un terreno con conductividad finita. Las ecuaciones de Yang et al se usarán a lo largo de esta tesis para obtener las soluciones del campo electromagnético para terreno no plano.

Capitulo 2: Cálculo del campo electromagnético por el método de diferencias finitas

El cálculo del campo electromagnético producido por un canal de la descarga vertical para configuraciones de terreno no plano requiere de la implementación de las ecuaciones de Maxwell a través de un método numérico en un programa computacional, esto debido a que las ecuaciones analizadas en el capítulo anterior no son aplicables para configuraciones de terreno no plano. Se ha escogido el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD), por su facilidad de implementación numérica. A lo largo de este capítulo se explicará la forma en que el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo, permite incluir la simulación de la descarga de retorno, y el cálculo de los campos electromagnéticos para configuraciones de terreno plano, haciendo una comparación con los resultados obtenidos con otras metodologías de otros programas de simulación

2.1 Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas ha sido popular, debido especialmente a su facilidad de implementación. Aunque resuelve problemas en el tiempo, también lo hace para el dominio de la frecuencia sobre un amplio espectro usando la transformada de Fourier. Éste puede manejar geometrías que involucren diferentes tipos de materiales: dieléctricos, magnéticos, dependientes de la frecuencia, no lineales y materiales anisotrópicos. Además es fácil de implementar usando técnicas de computación paralelas. Se ha usado para resolver diversidad de problemas que incluyen: dispersión de ondas, circuitos microelectrónicos, guías de ondas, aplicaciones médicas, aplicaciones en geología,

apantallamiento, acoplamiento, compatibilidad electromagnética, protección de pulsos electromagnéticos, entre otros [34].

2.2 Método de diferencias en electromagnetismo

En electromagnetismo el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) resuelve las ecuaciones de maxwell en el dominio del tiempo:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\zeta} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{M} \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \tag{2.4}$$

Donde $\vec{E}$ es el vector intensidad de campo eléctrico, $\vec{D}$ es el vector desplazamiento eléctrico en coulombs por metro cuadrado, $\vec{H}$ es el vector intensidad de campo magnético en amperios por metro, $\vec{B}$ es el vector densidad de flujo magnético en webers por metro cuadrado, $\vec{\zeta}$ es la densidad de corriente en amperes por metro cuadrado, $\vec{M}$ es el vector de densidad de corriente magnética en voltios por metro cuadrado, ρ_e es la densidad de carga eléctrica en coulombs por metro cúbico y ρ_m es la densidad de carga magnética en webers por metro cúbico. Se pueden establecer las siguientes relaciones para un medio lineal, isotrópico y no dispersivo:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{2.5}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{2.6}$$

Donde ε es la permitividad y μ es la permeabilidad del material. En el vacío:

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\, F/m$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$$

Solo se requiere usar las ecuaciones con rotacionales (2.1) y (2.2) ya que teóricamente las que contienen la divergencia se pueden derivar de las que contienen el rotacional [35]. Se puede notar que $\vec{\zeta}$ y $\vec{M}$ pueden actuar como fuentes independientes $\overrightarrow{\zeta_{fuente}}$ y $\overrightarrow{M_{fuente}}$ de E y H respectívamente. Adicionalmente para materiales isotrópicos, no dispersivos, los campos eléctricos y magnéticos se atenúan debido a la conversión de energía en calor. Las densidades se pueden expresar como:

$$\vec{\zeta} = \overrightarrow{\zeta_{fuente}} + \sigma_e \overrightarrow{E} \tag{2.7}$$

$$\vec{M} = \overrightarrow{M_{fuente}} + \sigma_m \vec{H} \tag{2.8}$$

Donde $\sigma_e$es la conductividad eléctrica en siemens por metro y σ_m es la conductividad magnética en ohms por metro. Así las ecuaciones (2.1) y (2.2) se pueden reescribir como:

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma_e \vec{E} + \vec{\zeta}_{\text{fuente}} \tag{2.9}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \sigma_m \vec{H} - \overrightarrow{M_{fuente}} \tag{2.10}$$

Las anteriores ecuaciones al ser vectoriales se pueden descomponer cada una en tres ecuaciones para cada dirección. En la mayoría de la literatura los problemas se han resuelto en coordenadas cartesianas siguiendo el artículo de Yee [29], sin embargo el que se propone esta tesis hará uso de coordenadas cilíndricas como ya se explicará más adelante. A continuación se presenta la descomposición de las dos ecuaciones anteriores en las tres coordenadas (φ, r, z respectivamente):

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} + \sigma_e E_\varphi + \zeta_{i\varphi} \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} + \sigma_e E_r + \zeta_{ir} \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}\right]=\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}+\sigma_e E_z+\zeta_{iz} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}=-\mu\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}-\sigma_m H_\varphi-M_{i\varphi} \tag{2.14}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}=-\mu\frac{\partial H_r}{\partial t}-\sigma_m H_r-M_{ir} \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial E_r}{\partial \varphi}\right]=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}-\sigma_m H_z-M_{iz} \tag{2.16}.$$

Las permitividades ε están asociadas a cada componente del campo que acompañan, mientras que las permeabilidades μ se relacionan con la componente del campo magnético que multipliquen.

El algoritmo FDTD divide una región del espacio en una grilla espacial en la cual los campos eléctrico y magnético se colocan en posiciones discretas y resuelve las ecuaciones de Maxwell para pasos de tiempo determinados. Lo anterior se logra primero aproximando las derivadas en el espacio y en el tiempo que aparecen en las ecuaciones de Maxwell por medio de ecuaciones de diferencias y luego construyendo un arreglo de ecuaciones que calcule los campos en un instante de tiempo futuro con base en los valores de campo en el instante pasado, así se construye un algoritmo que simula la progresión del campo en el tiempo [34].

Es necesario escoger el tipo de aproximación que se hará de la derivada: aproximación hacia adelante, aproximación hacia atrás y diferencias centrales, respectívamente:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{2.17}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x} \tag{2.18}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \tag{2.19}$$

Donde Δx es un valor pequeño diferente de cero. Dichas aproximaciones pueden ser obtenidas por medio de la serie de Taylor, de la cual se extrae el orden de la aproximación y el error. Así, se obtiene que las aproximaciones hacia atrás y hacia adelante son de primer orden porque su error tiene dependencia de $\Delta x/2$, lo cual indica que un decremento en el paso Δx disminuye el error a la mitad. Por su parte las diferencias centrales representan una aproximación de segundo orden porque su error tiene dependencia con el cuadrado del paso Δx, lo cual indica que una disminución de la mitad del paso, representa un decremento del error en 4 veces. Una mayor precisión, y unas ecuaciones en diferencias con pocos términos, han hecho de la aproximación en diferencias centrales de amplio uso en la literatura. La solución de las ecuaciones de Maxwell en esta tesis se hará por medio de diferencias centrales de segundo orden.

El método presentado por Yee precisamente hace uso de diferencias centrales de segundo orden para discretizar las ecuaciones de Maxwell. El método de Yee no maneja los campos por separado, sino que aprovecha el acoplamiento que existe entre ambos para calcularlos. Así como físicamente un campo magnético variable en el tiempo induce un campo eléctrico sobre la trayectoria que atraviesa el primero (ley de Faraday), y un campo eléctrico variable en el tiempo produce un campo magnético a su alrededor (ley de Ampére-Maxwell), el método de Yee discretiza el espacio de tal forma que se cumplan las dos ecuaciones rotacionales anteriores, rodeando en 3D al campo eléctrico de cuatro componentes de campo magnético y al campo magnético de 4 componentes de campo eléctrico, como se muestra en la Figura 8, para coordenadas cilíndricas.

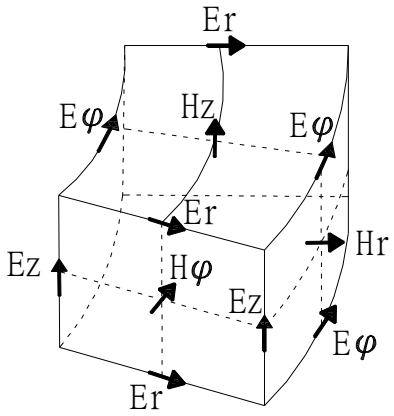


Figura 8. Celda de Yee en coordenadas cilíndricas. Adaptado de [35]

El campo eléctrico se ubica en los centros de los ejes, orientado paralelo a estos, mientras que el campo magnético se ubica orientado normal a las caras. Las celdas se adaptan al tipo de coordenadas que se están usando, en este caso coordenadas cilíndricas.

Se debe notar que los campos eléctricos se calculan en posiciones enteras del espacio ($n\Delta x$), mientras que los campos magnéticos se calculan en posiciones intermedias ($n\Delta x/2$). Adicionalmente el algoritmo calcula los campos en tiempos discretos, pero distintos para el campo eléctrico y magnético. El campo magnético se calcula en instantes medios de tiempo $\frac{1}{2}\Delta t, \frac{3}{2}\Delta t, \dots, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t$, mientras que el campo eléctrico lo hace en instantes enteros $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots n\Delta t$. Las derivadas en el espacio y en el tiempo se pueden aproximar como:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(i\Delta r, j\Delta\varphi, k\Delta \mathrm{z}, \mathrm{n}\Delta \mathrm{t}) = \frac{u^n_{i+\frac{1}{2},j,k} - u^n_{i-\frac{1}{2},j,k}}{\Delta r} + O[(\Delta x)^2] \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(i\Delta r, j\Delta\varphi, k\Delta \mathrm{z}, \mathrm{n}\Delta \mathrm{t}) = \frac{u^{n+1/2}_{i,j,k} - u^{n-1/2}_{i,j,k}}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2] \tag{2.21}$$

Donde se han usado diferencias finitas centrales de segundo orden.

2.2.1 FDTD en 2D

Es importante realizar una implementación de diferencias finitas en 2D debido a que la capacidad de memoria computacional se ve disminuida en comparación con una simulación en tres dimensiones, de igual forma el tiempo de

procesamiento es menor, lo que permite tener resultados con mayor rapidez. Por esta razón, la implementación del método para la solución de los campos electromagnéticos en esta tesis se hará en 2D. Si bien la implementación en 3D permite la inclusión de terrenos con mayor detalle, en 2D se pueden hacer topografías básicas de las que se pueda concluir el comportamiento de los campos para terrenos no planos. Existen algunas técnicas para hacer una extensión de los campos de 2D a 3D [36], las cuales puede ser aprovechadas a futuro.

Se logra una aproximación en 2D asumiendo que no existe cambio en la estructura modelada en la dirección acimutal (φ), (que hay simetría en φ) y que la onda es uniforme a lo largo de esta dirección. Así, la derivada de cualquier campo en la dirección φ es nula. Si además se eliminan las fuentes eléctricas y magnéticas, las ecuaciones (2.11) a (2.16)., se convierten en:

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} + \sigma_e E_\varphi \tag{2.22}$$

$$-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} + \sigma_e E_r \tag{2.23}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rH_\varphi\right)}{\partial r}\right] = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma_e E_z \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} - \sigma_m H_\varphi \tag{2.25}$$

$$-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_r}{\partial t} - \sigma_m H_r \tag{2.26}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rE_\varphi\right)}{\partial r}\right] = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} - \sigma_m H_z \tag{2.27}$$

El grupo constituido por las ecuaciones (2.23), (2.24) y (2.25), que solo dependen de los campos $E_r, E_z \, y \, H\varphi$ se puede denominar el modo transversal eléctrico respecto a φ (TE_φ), mientras que las ecuaciones restantes (2.21), (2.22) y (2.26), constituyen el modo transversal magnético TM_φ, que involucra a $H_r, H_z y \, E\varphi$.

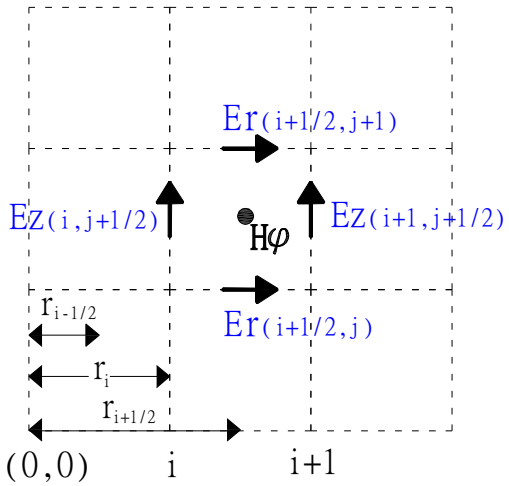


Figura 9. Grilla en dos dimensiones. Caso TE_φ

La discretización de la primera ecuación del modo TE_φ (2.25), teniendo en cuenta la Figura 9, es:

$$\frac{E_r^n\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)-E_r^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)}{\Delta z}-\frac{E_z^n\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)-E_z^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta r} \tag{2.28}$$
$$=-\mu\frac{H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_\varphi^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t}$$
$$-\sigma_m H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)$$

Si se desprecian la conductividad magnética ($\sigma_m = 0$) y se rescribe en función de $H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}$:

$$H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) \tag{2.29}$$
$$=H_\varphi^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{\Delta t}{\mu\Delta r}\left[E_z^n\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)-E_z^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$-\frac{\Delta t}{\mu\Delta r}\left[E_r^n\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)-E_r^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right]$$

La deducción de los demás campos se realiza de una manera similar para las ecuaciones (2.23) y (2.24) (Mirar Anexo A):

$$E_z^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=\frac{2\varepsilon-\sigma\Delta t}{2\varepsilon+\sigma\Delta t}E_z^{n}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)+\frac{2\Delta t}{(2\varepsilon+\sigma\Delta t)r_i\Delta r}\left[r_{i+1/2}H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-r_{i-1/2}H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)\right] \tag{2.30}$$

$$E_r^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=\frac{2\varepsilon-\sigma\Delta t}{2\varepsilon+\sigma\Delta t}E_r^{n}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-\frac{2\Delta t}{(2\varepsilon+\sigma\Delta t)\Delta z}\left[H_\varphi^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_\varphi^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)\right] \tag{2.31}$$

Estas ecuaciones permiten calcular el avance del campo electromagnético en el espacio y en el tiempo, en el vacío o en otro material isotrópico y no dispersivo, siempre y cuando se cumplan las condiciones de simetría en coordenadas cilíndricas.

2.2.2 Inclusión de canal del rayo

El uso de modelos de ingeniería como el TL, MTL y MTLE implica la inclusión de una fuente de corriente en la base del canal que se propaga desde el suelo a lo largo del canal del rayo a una determinada velocidad. Estos modelos se utilizarán a lo largo de esta tesis, por lo que es necesario incluir una fuente de corriente en las ecuaciones de Maxwell y en la discretización en diferencias finitas. Aquí se establece la importancia de utilizar coordenadas cilíndricas, ya que el campo magnético que produce una corriente vertical forma líneas concéntricas a su alrededor, lo que hace que exista simetría en la dirección acimutal (φ). Esto permite reducir el análisis a dos dimensiones como ya se ha explicado en la sección 2.2.1, disminuyendo el costo computacional y de memoria que se requiere al simular una configuración en 3D, pero a su vez teniendo la herramienta para obtener los campos en las configuraciones de interés.

La inclusión de una fuente de corriente en las ecuaciones se lleva a cabo tomando la ley de Ampére en su forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{D}\cdot \mathrm{dS}_1 = \oint \vec{H}\cdot \overrightarrow{Dl_1} - \mathrm{I} \tag{2.32}$$

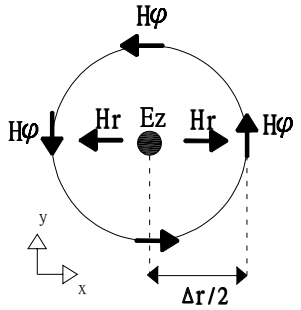


Figura 10. Área de integración de la ley de Ampére

La corriente está dirigida en la dirección z. El área sobre la que se realiza la integración del campo eléctrico E_z es la circunferencia que tiene como diámetro el tamaño de la celda (Δr), mientras que el contorno sobre el que se integra el campo magnético $H\varphi$ es $2\pi\frac{\Delta r}{2}$ según se muestra en la Figura 10. La simetría en el eje acimutal, hace que las componentes H_r se eliminen. Con base en lo anterior la discretización de la ecuación en el espacio vacío queda:

$$\varepsilon_0 \frac{E_z^{n+1}\left(0, j+\frac{1}{2}\right) - E_z^{n}\left(0, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t}\frac{\pi\Delta r^2}{4} = 2 * (\pi\frac{\Delta r}{2}) H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - I \tag{2.33}$$

Reorganizando términos se tiene:

$$E_z^{n+1}\left(0, j+\frac{1}{2}\right) = E_z^{n}\left(0, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{8\Delta t}{2\varepsilon_0\Delta r} H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \frac{4\Delta t}{\pi\varepsilon_0\Delta r^2} I^{n+\frac{1}{2}}\left(0, j+\frac{1}{2}\right) \tag{2.34}$$

De una forma más general, Yang [24], da la expresión para el campo eléctrico para una corriente ubicada en la esquina izquierda de la grilla:

$$E_z^{n+1}\left(0,j+\frac{1}{2}\right)=\frac{2\varepsilon-\sigma\Delta t}{2\varepsilon+\sigma\Delta t}E_z^n\left(0,j+\frac{1}{2}\right)+\frac{8\Delta t}{(2\varepsilon+\sigma\Delta t)\Delta r}H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-\frac{4\Delta t}{\pi\varepsilon_0\Delta r^2}I^{n+\frac{1}{2}}\left(0,j+\frac{1}{2}\right) \quad (2.35)$$

La anterior deducción corresponde a una fuente ideal (hard), que no tiene resistencia interna. Si se desea incluir una resistencia se debe tener en cuenta la siguiente ecuación (ver Figura 11):

$$I=\mathrm{I_s}+\frac{\Delta \mathrm{V}}{\mathrm{R_s}} \quad (2.36)$$

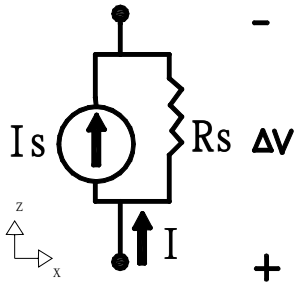


Figura 11. Fuente de corriente con resistencia interna. Adaptado de [34]

Incluyendo esta ecuación en la (2.32), y teniendo en cuenta que $\Delta \mathrm{V}$ es igual a:

$$\Delta \mathrm{V}=\ \Delta \mathrm{z}\cdot E_z^{n+1/2}\left(0,j+\frac{1}{2}\right) \quad (2.37)$$

Además que:

$$E_z^{n+1/2}\left(0,j+\frac{1}{2}\right)=\frac{E_z^{n+1}\left(0,j+\frac{1}{2}\right)+E_z^n\left(0,j+\frac{1}{2}\right)}{2} \quad (2.38)$$

Sustituyendo las tres ecuaciones anteriores en (2.32), y reorganizando términos se tiene:

$$E_z^{n+1}\left(0,j+\frac{1}{2}\right)=\frac{2\varepsilon_0-\sigma\Delta t-\frac{4\Delta \mathrm{t}\Delta \mathrm{z}}{\pi\Delta r^2\mathrm{R_s}}}{2\varepsilon_0+\sigma\Delta t+\frac{4\Delta \mathrm{t}\Delta \mathrm{z}}{\pi\Delta r^2\mathrm{R_s}}}E_z^n\left(0,j+\frac{1}{2}\right)+\frac{8\Delta t}{\left(2\varepsilon_0+\sigma\Delta t+\frac{4\Delta \mathrm{t}\Delta \mathrm{z}}{\pi\Delta r^2\mathrm{R_s}}\right)\Delta r}H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-\frac{8\Delta t}{(2\varepsilon_0+\frac{4\Delta \mathrm{t}\Delta \mathrm{z}}{\pi\Delta r^2\mathrm{R_s}})\pi\Delta r^2}I^{n+\frac{1}{2}}\left(0,j+\frac{1}{2}\right) \tag{2.39}$$

Esta ecuación corresponde a la fuente ideal, ecuación (2.34), cuando $\mathrm{R_s}\to\infty$.

Se debe tener en cuenta que la inclusión de la fuente de corriente se ha hecho en la frontera izquierda del área de simulación, y la expresión para el cálculo del campo electromagnético sólo es válida en esa frontera. Una fuente de corriente colocada en cualquier otro punto, debido a la simetría, daría lugar a una fuente cilíndrica, lo cual no corresponde con la simulación propuesta de un canal de rayo.

2.2.3 Condición de estabilidad

Para garantizar la estabilidad del método se debe cumplir con la condición de Courant descrita en la siguiente ecuación:

$$\Delta t\le\frac{\min\left(\Delta r,\Delta z\right)}{2v_{max}} \tag{2.40}$$

Siendo v_{max}, la máxima velocidad de propagación de la onda. Se debe cumplir que:

$$(\Delta r,\Delta z)\le\frac{\lambda_{min}}{10} \tag{2.41}$$

Donde λ_{min} es la mínima longitud de onda de la fuente de corriente a través de su espectro de frecuencia.

2.2.4 Fronteras Absorbentes

Debido a la memoria finita del computador, se debe acotar la grilla de simulación, limitando así la distancia hasta la cual se calculan los campos. Para esto se usan ciertas condiciones de frontera, como lo son conductores eléctricos perfectos (PEC, por sus siglas en inglés), en los cuales los campos tangenciales a estos son cero. En muchas aplicaciones, como dispersión y radiación de ondas es necesario establecer condiciones de frontera que simulen un espacio abierto. Las condiciones de frontera que simulan ondas electromagnéticas propagándose más allá del espacio de cómputo se conocen como condiciones de frontera absorbentes (ABC, por sus siglas en inglés). Cuando estas fronteras no son lo suficientemente apropiadas al problema pueden crear reflexiones que perturban los resultados [34]. A continuación se presentan algunas de las fronteras absorbentes más comúnmente utilizadas.

2.2.4.1 Fronteras absorbentes de Mur

Las fronteras absorbentes propuestas por Mur se basan en la teoría de ecuaciones de ondas de Engquist y Magda [37], las cuales plantean que una ecuación de onda en una dirección (aquella ecuación diferencial que permite la propagación solo en ciertas direcciones), cuando se aplica en la frontera de un espacio computacional de FDTD, permite la absorción numérica de ondas incidentes. La teoría y aplicación numérica de estas ecuaciones constituyen la base de las formulaciones de ABC en los años 1970's y 1980's [35]. El principio del método se basa en la formulación de la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.42)$$

Donde E es una componente escalar del campo y c es la velocidad de propagación. Se puede definir un operador G:

$$G \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (2.43)$$

La ecuación se puede escribir como:

$$GE = 0 \tag{2.44}$$

Se puede demostrar que el operador G puede ser descompuesto en:

$$GE = G^{+}G^{-}E = 0 \tag{2.45}$$

Donde G^{-} se define como:

$$G^{-} = D_x - \frac{D_t}{c}\sqrt{1 - S^2} \tag{2.46}$$

$$S = \frac{D_y}{D_t/c}$$

Donde $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$, iguales definiciones se puede hacer para D_t y D_y.

El operador G^{+}se define de la misma manera que G^{-}, pero con un signo (+) antes del radical. Engquist y Majda demostraron que en la frontera izquierda (x = 0) de la grilla, si se aplicaba el operador G^{-} a la función de onda E, se absorbía una onda plana que incidiera sobre esta frontera a cualquier ángulo α (Figura 12)

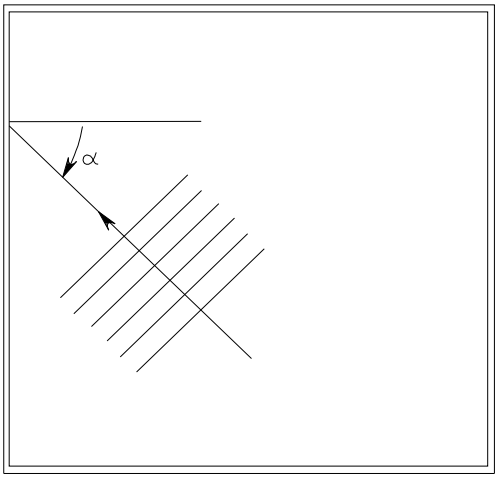


Figura 12. Onda plana incidente sobre la frontera izquierda. Adaptado de [35]

Así:

$$G^{-}E = 0 \tag{2.47}$$

El operador G^+ juega el mismo papel para una onda que incide sobre la frontera derecha del espacio analizado. Mur [38] introduce un esquema sencillo de diferencias finitas que es similar al hecho por Engquist y Majda, haciendo aproximaciones además de segundo orden. En estas, la frontera la constituye una capa en la cual el campo eléctrico o magnético es tratado con el operador de (2.47). Las fronteras de Mur han sido utilizadas ampliamente, sin embargo existe el inconveniente de que la absorción es buena para ángulos de incidencia normales a la frontera. Para esto se han hecho modificaciones que permiten mejorar el algoritmo planteado por Mur. [39]. La formulación de Mur fue originalmente desarrollada en coordenadas cartesianas. En coordenadas cilíndricas se puede hacer un desarrollo similar, tomando el campo magnético como frontera, tal como se hace en [24], y es complementado en [30], obteniéndose las ecuaciones siguientes (ver Figura 13):

Para la frontera derecha:

$$H_{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i_{max}+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) \tag{2.48}$$
$$= \frac{2N-1}{2N+1}.\frac{v\Delta t-\Delta r}{v\Delta t+\Delta r}H_{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i_{max}-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)$$
$$-\frac{v\Delta t-\Delta r}{v\Delta t+\Delta r}H_{\varphi}^{n-\frac{1}{2}}\left(i_{max}+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{2N-1}{2N+1}H_{\varphi}^{n-\frac{1}{2}}\left(i_{max}-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)$$

Para las fronteras superior e inferior:

$$H_{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j_{max}+\frac{1}{2}\right) = H_{\varphi}^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j_{max}-\frac{1}{2}\right) + \frac{v\Delta t-\Delta r}{v\Delta t+\Delta r}\left[H_{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j_{max}-\frac{1}{2}\right) - H_{\varphi}^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j_{max}+\frac{1}{2}\right)\right] \tag{2.49}$$

$$H_{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j_{min}-\frac{1}{2}\right) = H_{\varphi}^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j_{min}+\frac{1}{2}\right) + \frac{v\Delta t-\Delta z}{v\Delta t+\Delta z}\left[H_{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j_{min}+\frac{1}{2}\right) - H_{\varphi}^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j_{min}-\frac{1}{2}\right)\right] \tag{2.50}$$

Donde i_{max}, j_{max} y j_{min} son los índices sobre la frontera según se muestra en la Figura 13.

Además $i_{max} = N, j_{min} = 0, j_{max} = M$, ν es la velocidad de propagación del campo en el aire o en la tierra. En el último caso se usa la aproximación de alta frecuencia $v = c/\sqrt{\varepsilon_r}$ [30], donde ε_r es la permitividad relativa del material.

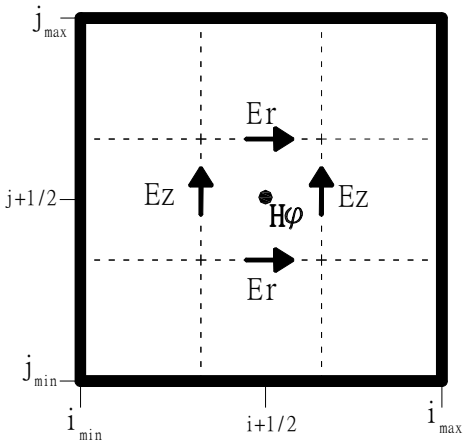


Figura 13. Grilla para fronteras absorbentes de Mur

Las fronteras absorbentes de Mur se usarán a lo largo de esta tesis para acotar el espacio de simulación.

2.2.4.2 Fronteras absorbentes de Liao

Las fronteras propuestas por Liao et al fueron populares en las décadas de 1970's y 1980's, estas presentan una reducción en las reflexiones de 10 a 20 dB con respecto a las fronteras de Mur de segundo orden y una menor sensibilidad al ángulo de incidencia de la onda [35]. El método se basa en considerar los valores del campo en instantes previos y en posiciones que estén sobre una línea perpendicular a la frontera (x_{max}):

$$u^{n+1}(x_{max}) = 3u^{n}(x_{max} - \Delta x) - 3u^{n-1}(x_{max} - 2\Delta x) + u^{n-2}(x_{max} - 3\Delta x) \tag{2.51}$$

Distintos artículos presentan modificaciones de las fronteras de Liao: la expresión de 2D en coordenadas cilíndricas [40], modificaciones para la estabilización del método en el tiempo [41] o para mejorar su operación a diferentes ángulos de incidencia y a diferentes frecuencias [42].

El primer artículo [40] es útil porque permite realizar el desarrollo de Liao en coordenadas cilíndricas. Para hacer la deducción, se empieza por la expresión en coordenadas cilíndricas de la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2(rH_\varphi)}{\partial r^2}+\frac{\partial^2(rH_\varphi)}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(rH_\varphi)}{\partial t^2}=0 \tag{2.52}$$

Dado que las fronteras absorbentes de Liao permiten truncar el dominio computacional de la ecuación de onda, la expresión (2.51) en función de rH_φ permite obtener la frontera absorbente en la dirección *r*:

$$\begin{aligned} r_{max}H^{n+1}{}_\varphi(r_{max}) &= 3(r_{max}-\Delta r)H^{n}{}_\varphi(r_{max}-\Delta r) \\ &- 3(r_{max}-2\Delta r)H^{n-1}{}_\varphi(r_{max}-2\Delta r) \\ &+ (r_{max}-3\Delta r)H^{n-2}{}_\varphi(r_{max}-3\Delta r) \end{aligned} \tag{2.53}$$

En la dirección *z* se puede usar la misma expresión que en coordenadas cartesianas, es decir reemplazando Er en la ecuación (2.51):

$$\begin{aligned} Er^{n+1}(z_{max}) = 3Er^{n}(z_{max}-\Delta z) - 3Er^{n-1}(z_{max}-2\Delta z) + Er^{n-2}(z_{max} \\ -3\Delta z) \end{aligned} \tag{2.54}$$

2.2.4.3 Fronteras absorbentes de Berenger (PML)

Las fronteras PML (Perfect Matched Layer), fueron introducidas for Berenger [43], y han demostrado ser las más robustas ABC, en comparación con las demás técnicas usadas en el pasado. Las PML constituyen un medio especial de espesor finito que rodea el espacio computacional, compuesto por parámetros ficticios, que crean una condición de impedancia característica, que hace que no existan reflexiones de ondas, independiente de su ángulo de incidencia y de su frecuencia.

2.3 Validación del método de diferencias finitas para terreno plano

2.3.1 Comparación con el FDTD STUDIO

La implementación realizada para el desarrollo de esta tesis se valida con el programa FDTD STUDIO [44], desarrollado por Renato Proenca en la Universidad de Brasilia, que usa el método de diferencias finitas para resolver problemas de

electromagnetismo en tres dimensiones espaciales. Se simula el campo Ez que produce una fuente de tensión gaussiana coseno modulada colocada en un suelo PEC, de un espacio rodeado por fronteras MUR.

La fuente de tensión tiene una amplitud de 1V, una frecuencia de 1 MHz, un retardo de tiempo t_0 de 10 ns, un ancho de pulso $\tau_p = 2.24$ ns y una resistencia interna nula (fuente fija). La forma de onda se presenta en la Figura 14. La expresión numérica para esta fuente es:

$$v_s(t) = \cos(\omega_c(t - t_0))e^{\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}} \qquad (2.55)$$

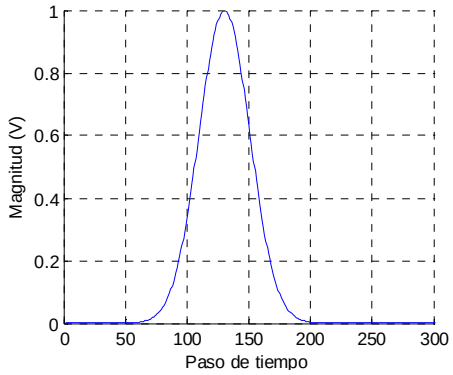


Figura 14. Forma de onda gaussiana modulada. f = 1MHz.

Se debe recordar que la simulación de diferencias finitas en el dominio del tiempo en esta tesis (CIL 2D), se realiza en coordenadas cilíndricas dado que existe simetría rotacional, mientras que la metodología del programa FDTD STUDIO (CART 3D) utiliza coordenadas cartesianas.

Los parámetros de simulación para el método de diferencias finitas en ambos casos son $\Delta x = \Delta y = 0.4m, \Delta t = 77.033\, ps$. Se obtiene el campo eléctrico vertical (Ez), a una distancia de 4 m de la fuente sobre un terreno perfectamente conductor. (Figura 15).

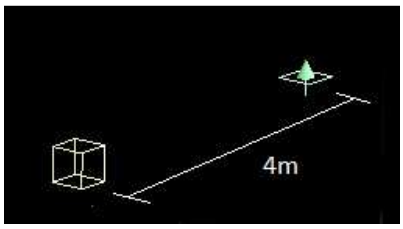


Figura 15. Medición del campo electromagnético en el FDTD STUDIO. (El cubo representa el punto de medición)

La comparación entre los resultados obtenidos por las dos metodologías se muestra en la siguiente gráfica:

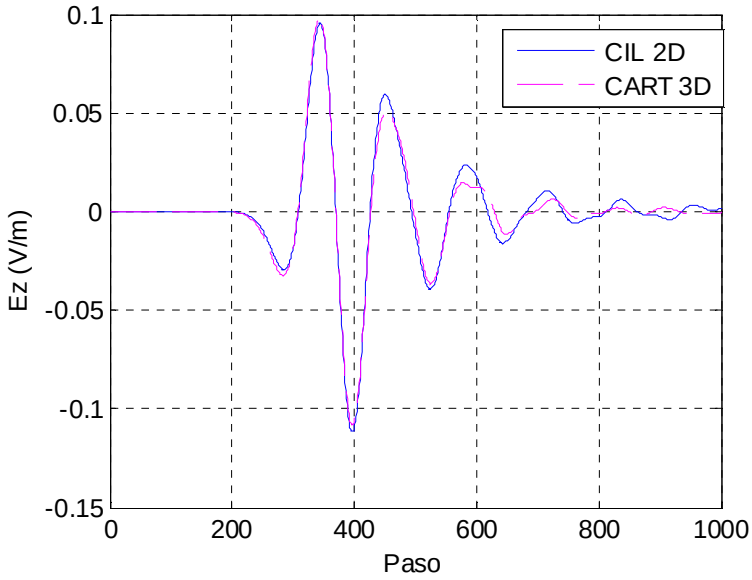


Figura 16. Comparación del campo eléctrico vertical obtenido para las dos metodologías.

Las diferencias en magnitud se explican debido al error introducido por el cambio de coordenadas de una metodología a otra (cartesianas en el FDTD STUDIO y cilíndricas en la tesis), según se explica en [36]. Adicionalmente, se presentan diferencias al final de la señal debido a que ambos programas implementan en diferentes coordenadas las fronteras MUR.

2.3.2 Validación con ecuaciones analíticas

Las ecuaciones presentadas en la sección 1.2.1, se comparan con el programa de diferencias finitas implementado para el desarrollo de esta tesis. Esto se lleva

a cabo por medio del programa YALUK DRAW [28] [45], que resuelve las ecuaciones en el dominio del tiempo para terreno plano presentadas en la sección 1.2.1 , a través de un método de integración numérico (INTEGRAL). Se simula una descarga de retorno subsecuente con I_0 = 12 kA y di/dt = 12 kA/μs, que se representa con una función de heidler con los siguientes parámetros: $I_{01} = 10.7\ kA, \tau_{11} = 0.95\mu s, \tau_{12} = 4.7\mu s, I_{02} = 6.5kA, \tau_{21} = 4.6\mu s, \tau_{22} = 900\mu s, n = 2$ [46]. Se utiliza un modelo TL para representar la variación de la corriente a lo largo del canal, una altura del canal de 8 km y una velocidad de la descarga de retorno de 120 m/μs. Se calculan impactos a diferentes distancias del canal de la descarga, tomando un $\Delta r = \Delta z = 10m$, el paso de tiempo se calcula siguiendo el criterio mencionado en (2.42). Y se considera una distancia apropiada a la frontera derecha para evitar las reflexiones ocasionadas por la frontera absorbente de Mur.

2.3.2.1 Conductividad Infinita

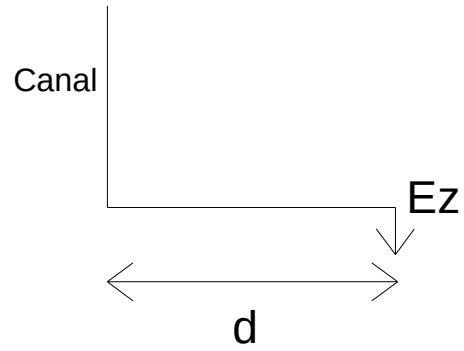


Figura 17. Punto de medición del campo eléctrico vertical para terreno plano.

Se presenta a continuación el campo eléctrico vertical sobre un terreno de conductividad infinita obtenido para distancias *d* (ver la Figura 17) del canal de la descarga descrito en el numeral anterior, iguales a 50, 100, 300, 500 y 1000 m, respectivamente:

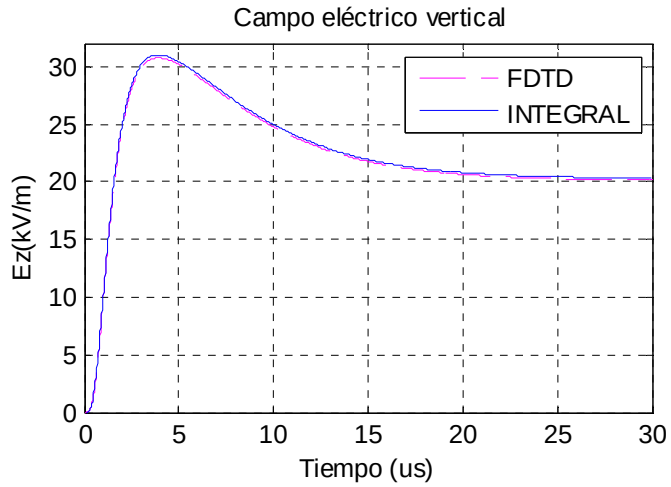


Figura 18. Campo eléctrico vertical medido a una distancia de 50 m de un canal sobre un terreno plano.

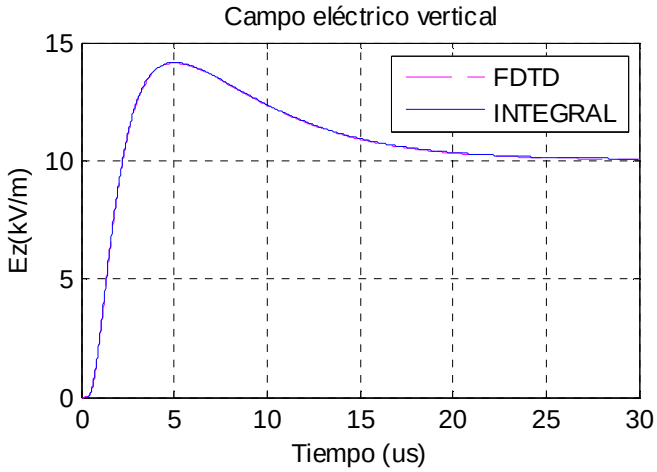


Figura 19. . Campo eléctrico vertical medido a una distancia de 100 m de un canal sobre un terreno plano.

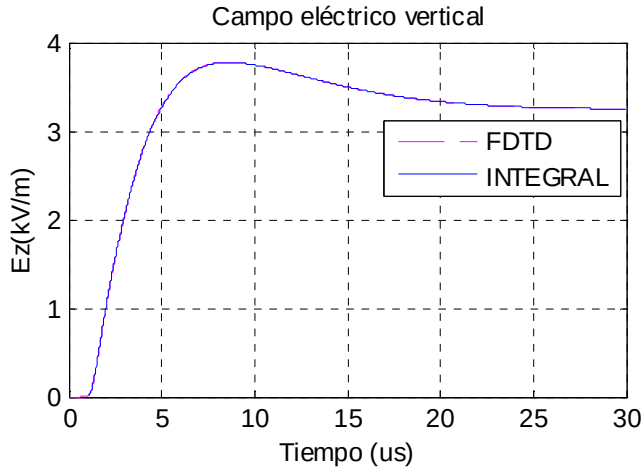


Figura 20. . Campo eléctrico vertical medido a una distancia de 300 m de un canal sobre un terreno plano.

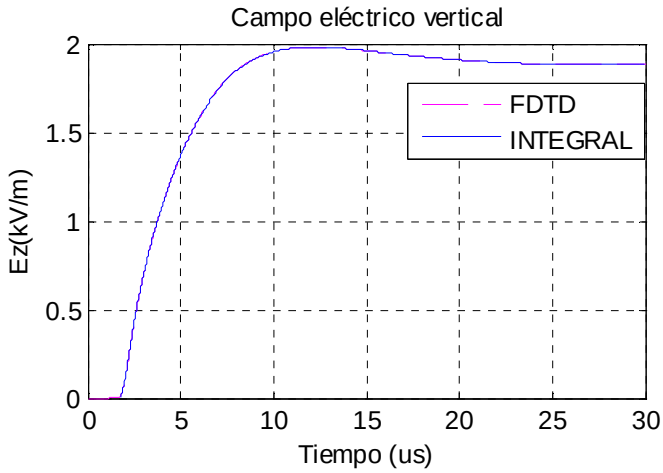


Figura 21. . Campo eléctrico vertical medido a una distancia de 500 m de un canal sobre un terreno plano.

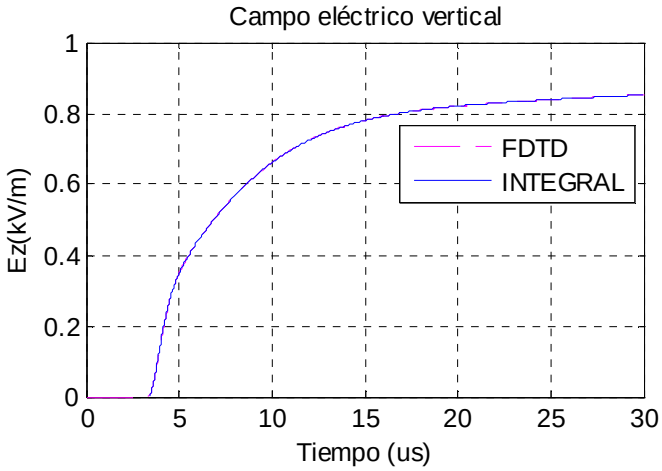


Figura 22. . Campo eléctrico vertical medido a una distancia de 1 km de un canal sobre un terreno plano.

En general el ajuste es bastante bueno, para las diferentes distancias. Sin embargo cerca del canal, como por ejemplo para 50 m, existen algunas diferencias por lo que es necesario utilizar un paso de espacio más pequeño, para campos cercanos al canal del rayo por ejemplo 5m.

2.3.2.2 Validación Conductividad Finita

En esta sección se calcula el campo eléctrico horizontal a una altura de 10 m sobre un terreno con conductividad de 0.01 S/m, para distancias del canal de la descarga de 100, 300 y 500 m respectivamente.

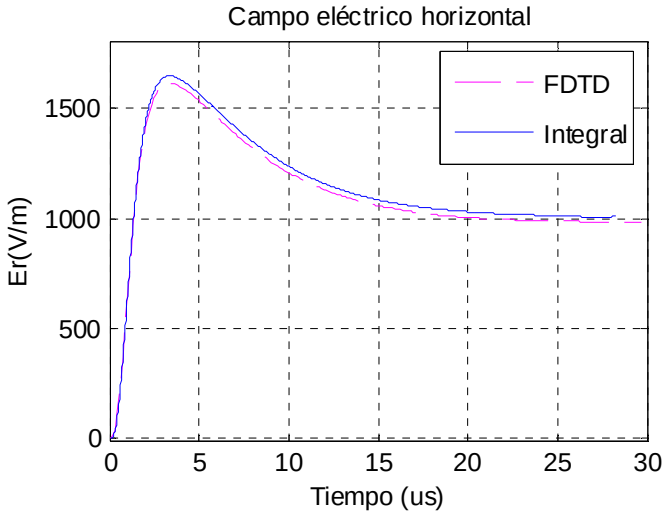


Figura 23. Campo eléctrico horizontal a una altura de 10 m sobre un terreno plano con conductividad finita de 0.01 S/m a 100 m del canal

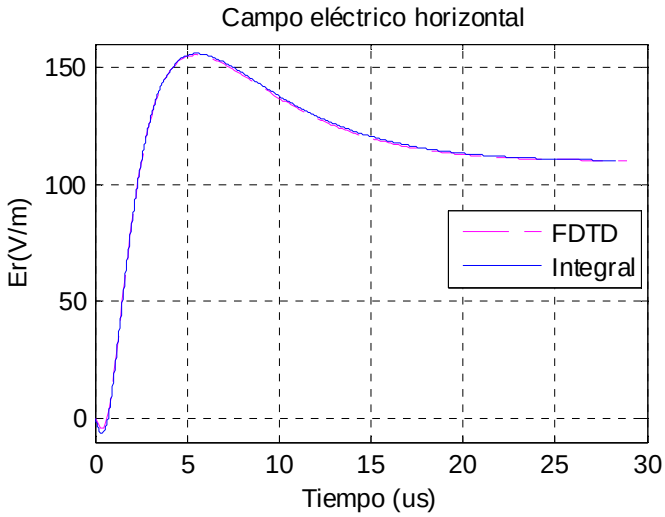


Figura 24. Campo eléctrico horizontal a una altura de 10 m sobre un terreno plano con conductividad finita de 0.01 S/m a 300 m del canal

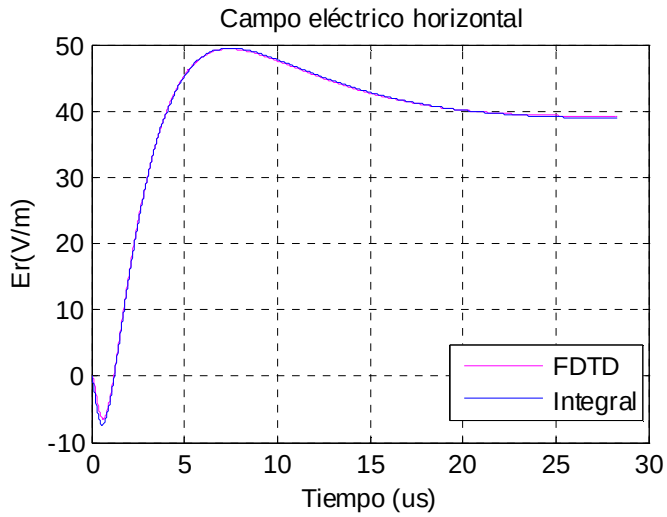


Figura 25. Campo eléctrico horizontal a una altura de 10 m sobre un terreno plano con conductividad finita de 0.01 S/m a 500 m del canal

Se puede notar que el ajuste que se presenta es bueno, salvo para cortas distancias, en las que es necesario disminuir el paso de espacio por ejemplo a 5m para obtener mejores resultados, tal y como se había explicado para el caso de conductividad infinita.

Capitulo 3: Campo electromagnético en terreno no plano

Como se ha mencionado en los anteriores capítulos, pocos o ningún resultado se ha obtenido para analizar la influencia del terreno no plano en el campo electromagnético producido por rayo. Este capítulo se dedicará a calcular a través del método de diferencias finitas, el campo eléctrico y magnético que produce un canal de la descarga vertical para distintas configuraciones de terreno no plano.

3.1 Modelado del terreno no plano usando diferencias finitas

Para calcular el campo electromagnético en terreno no plano, se debe aproximar el método de diferencias finitas a la geometría del terreno, para esto existen las siguientes metodologías:

3.1.1 Metodología escalera (staircase):

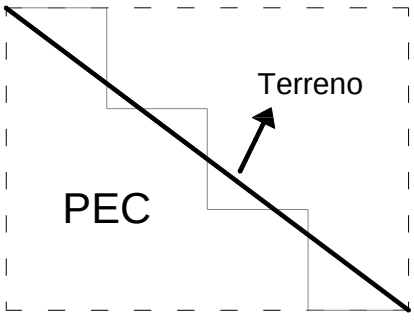


Figura 26. Aproximación escalera

Esta metodología permite simular una superficie conductora curva aproximándola por medio de escaleras que se ajustan a la grilla de Yee, como se muestra en la Figura 26:

Para esta se debe escoger un paso de espacio pequeño para evitar la imprecisión en los resultados. También se debe utilizar un algoritmo adecuado que haga que el terreno se aleje lo menos posible de la escalera, tal como el descrito en [47], en donde se explica cómo la aproximación escalera introduce un retardo de tiempo en la propagación de la onda, debido a que la distancia real que recorre la onda sobre el terreno es mayor, a causa de la presencia de las escaleras. A esta distancia se le denomina la *distancia Manhattan*. Según algunas simulaciones realizadas en esta tesis, el retardo de tiempo no es significativo para las configuraciones de terreno no plano escogidas.

El campo magnético, para la aproximación escalera, cuando se resuelve la ecuación de Faraday en una celda que está en la interfaz aire-terreno como la que se muestra en la Figura 27, está dado por:

$$H_\varphi{}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) = H_\varphi{}^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta}\left[E_z^n\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right) - E_r^n\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)\right] \tag{3.1}$$

Siendo $\Delta r = \Delta z = \Delta$

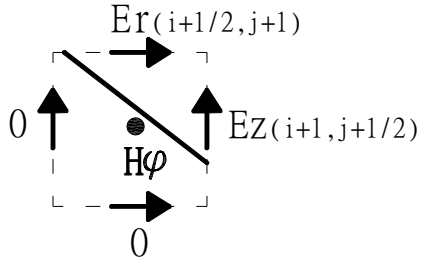


Figura 27. Celda ubicada en la interfaz aire terreno para la aproximación escalera

Solo el campo magnético debe actualizarse de esta manera y ajustar en cero los campos eléctrico y magnético dentro del terreno (la zona PEC de la Figura 26), esto únicamente para el caso de conductividad infinita.

3.1.2 Metodología de partición de celda diagonal (diagonal splitcell) para superficies PEC

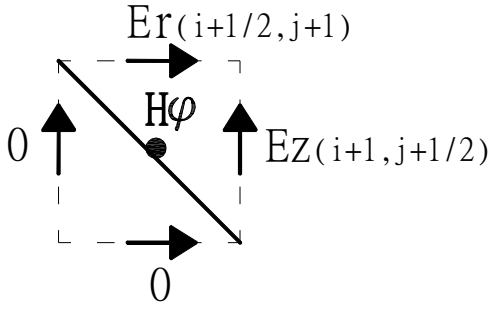


Figura 28. Aproximación de partición de celda (splitcell)

En este caso se considera que el terreno pasa por la diagonal de la celda (ver Figura 28). Con esta se logra aproximar mejor una superficie curva en comparación con el caso escalera, ya que en lugar de una escalera, el terreno se aproxima a través de una recta. De la misma manera que en el caso escalera se debe resolver la ecuación de Faraday en esta celda:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} = -\int_C \vec{E}.\overrightarrow{dl} \tag{3.2}$$

El área de integración es solo la mitad de la celda ($\frac{\Delta r \Delta z}{2}$), ya que el campo magnético solo afecta a la mitad de esta, mientras que los contornos de integración son las longitudes de las celdas Δr *y* Δz, para los valores no nulos de campo eléctrico:

$$\mu_0 \frac{H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) - H_\varphi^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t}\frac{\Delta r \Delta z}{2} = E_z^n\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)\times\Delta z - E_r^n\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)\times\Delta r \tag{3.3}$$

Reorganizando en función de H:

$$H_\varphi{}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)= \tag{3.4}$$
$$H_\varphi{}^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)+\frac{2\Delta t}{\mu_0\Delta}\left[E_z^n\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)-E_r^n\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)\right]$$

Se deben actualizar los campos magnéticos en las celdas que están en la interfaz aire terreno y actualizar los campos eléctricos horizontales y verticales a cero dentro del terreno.

3.1.3 Metodología de ruta de contorno (Contour Path)

Esta metodología toma en cuenta así como en los casos anteriores, el desarrollo de la ecuación de Faraday alrededor de la celda de Yee, teniendo en cuenta la geometría exacta que afecta a cada uno de los campos eléctricos y magnéticos (Figura 29).

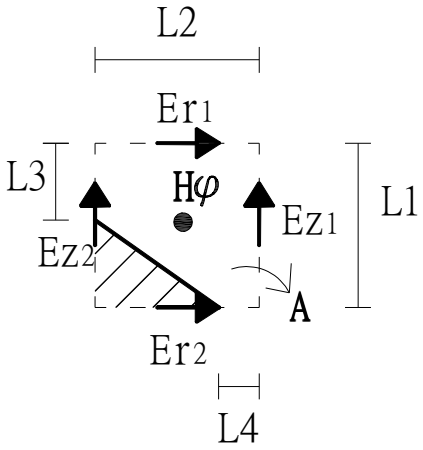


Figura 29. Celda de Yee con aproximación Contour Path

La deducción de las ecuaciones para esta metodología, parte nuevamente de la ecuación de Faraday en su forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} = -\int_C \vec{E}.\overrightarrow{dl} \tag{3.5}$$

Ya que el área sombreada en la Figura 29 es la superficie PEC, la integración de la ecuación de Faraday se hace sólo sobre el área A restante, y los contornos de integración de los campos eléctricos son sólo aquellas distancias que no están sobre la superficie PEC, en este caso L1, L2, L3 Y L4.:

$$\mu_0 \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \mathrm{A} = Ez1 \cdot \mathrm{L1} - Er1 \cdot \mathrm{L2} - \mathrm{Ez2} \cdot \mathrm{L3} - \mathrm{Er2} \cdot \mathrm{L4} \tag{3.6}$$

La discretización de la anterior ecuación en diferencias finitas queda como:

$$\mu_0 \frac{\mathrm{H}_\varphi^{\mathrm{n}+\frac{1}{2}}\left(\mathrm{i}+\frac{1}{2},\mathrm{j}+\frac{1}{2}\right) - \mathrm{H}_\varphi^{\mathrm{n}-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{i}+\frac{1}{2},\mathrm{j}+\frac{1}{2}\right)}{\Delta \mathrm{t}} A = E_z^n\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) \times L1 - E_r^n\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) \times L2 - E_z^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \times L3 + E_r^n\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \times L4 \tag{3.7}$$

Reorganizando para expresarlo en función del campo H_φ:

$$H_\varphi{}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\tfrac{1}{2}, j+\tfrac{1}{2}\right) = H_\varphi{}^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu_0 \mathrm{A}}\left[E_z^n\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) \times L1 - E_z^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \times L3 - E_r^n\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) \times L2 + E_r^n\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \times L4\right] \tag{3.8}$$

Si en la metodología anterior L1 = L2 = L3 = L4 = Δ, el área A es igual a la mitad de la celda (Δ/2), y los campos Ez2 y Er2 de la Figura 29 son cero, se llega a la misma expresión para la metodología *splitcell* (ecuación (3.4)). Este caso corresponde a un ángulo de inclinación del terreno de 45° (debido a la igualdad de los lados de la celda), y solo para este ángulo las dos metodologías (*splitcell* y *contour path*) coinciden.

3.1.4 Metodología con distintos materiales

Cuando se desea calcular los campos para dos materiales diferentes, por ejemplo un suelo con conductividad finita, es necesario considerar la porción de la celda que se encuentra inmersa en determinado material. Si se consideran dos materiales, el uno caracterizado con μ_1, ε_1 y el otro con μ_2, ε_2, se debe resolver nuevamente la ecuación de Faraday alrededor de la celda obteniéndose el siguiente resultado:

$$H_{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) = H_{\varphi}^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu_p \Delta}\left[E_z^n\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right) + E_r^n(i+1/2, j) - E_r^n\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right)\right] \tag{3.9}$$

Donde: $\mu_p = \mu_1 f_1 + \mu_2(1-f_1)$ y $f_1$es la proporción de la celda que contiene el material 1

En este caso la celda tiene una permeabilidad equivalente al promedio ponderado de cada material. Similares expresiones se pueden encontrar para el campo eléctrico radial y vertical, en las cuales la permitividad de los dos materiales se ve promediada [35].

3.2 Validación con el FDTD STUDIO

3.2.1 Simulación de un cilindro

Se puede encontrar una validación para terreno no plano del código de la tesis, haciendo una simulación de cilindros PEC en el FDTD STUDIO. La inclusión de un terreno cilíndrico en tres dimensiones en el FDTD STUDIO (Figura 30) equivale a la simulación de un rectángulo en dos dimensiones. Para esto, se simula un cilindro con un radio de 1.6 m y una altura de 3.2m, debajo de una fuente de tensión gaussiana modulada con una amplitud de 1V, una frecuencia de 1 MHz, un retardo de tiempo t_0 de 0.1 ns, un ancho de pulso τ_p = 2.24 ns y una resistencia

interna nula (fuente fija), con la expresión de la ecuación (2.55). Los parámetros de simulación para el método de diferencias finitas en ambos casos son $\Delta x = \Delta y = 0.4m, \Delta t = 77.033\, ps$. Se realiza la medición del campo eléctrico vertical a una distancia de 4 m en la dirección x sobre un terreno PEC. Los resultados se muestran en la Figura 31.

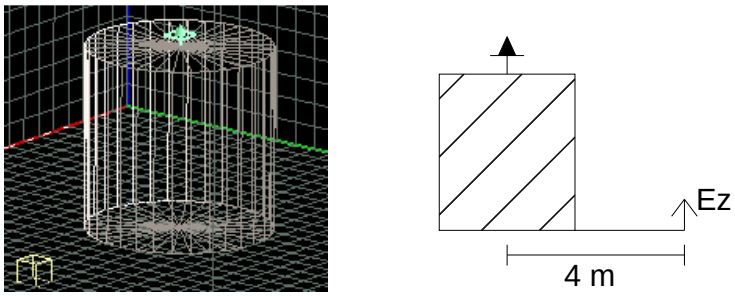


Figura 30. Simulación de un terreno cilíndrico en el FDTD STUDIO y su correspondiente simulación en 2D

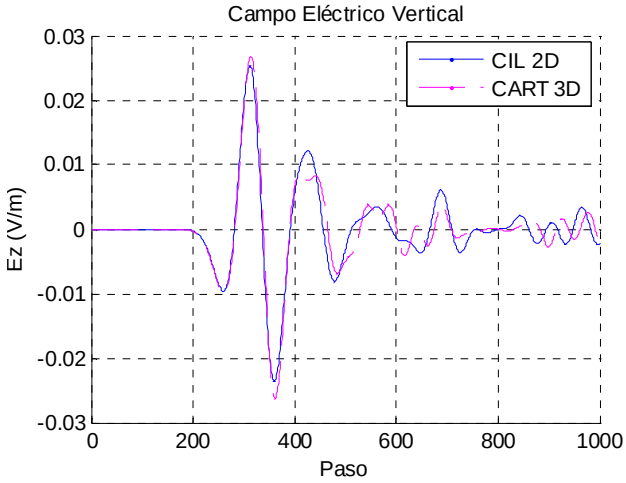


Figura 31. Comparación del campo eléctrico vertical obtenido por la metodología FDTD en coordenadas cilíndricas (CIL 2D) y la FDTD en coordenadas cartesianas del *FDTD STUDIO* (CART 3D)

Se encuentran resultados muy cercanos en ambas aproximaciones en los primeros 400 pasos de simulación, luego como resultado de las reflexiones el campo presenta diferencias, debido a la implementación de fronteras MUR en distintos sistemas coordenados para cada caso.

3.2.2 Simulación de un cono

Por otra parte, la simulación de diferentes cilindros, uno encima del otro, en 3 dimensiones, permite aproximarse a una estructura de terreno en forma de cono, que adquiere un aspecto similar al de una montaña, como se muestra en la siguiente figura:

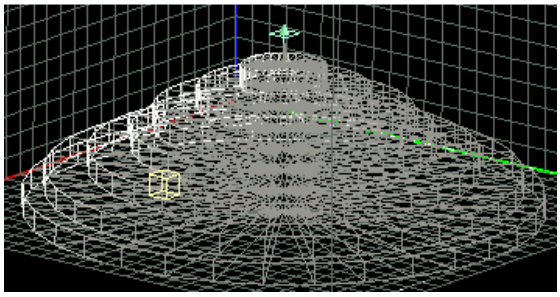


Figura 32. Estructura de cono simulada en el FDTD STUDIO

Esta estructura en 2D equivale al caso escalera, explicado en la sección 3.1.1, según se muestra en la siguiente figura:

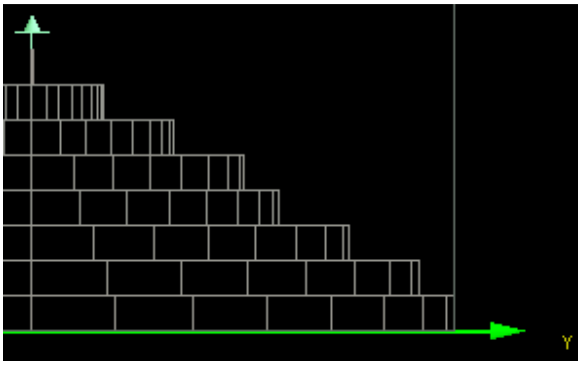


Figura 33. Equivalente en 2D del cono simulado en la Figura 32

Inicialmente, se realiza una simulación de dos cilindros PEC debajo de una fuente de tensión con los mismos parámetros de simulación descritos en la sección 3.2.1 (Figura 34)

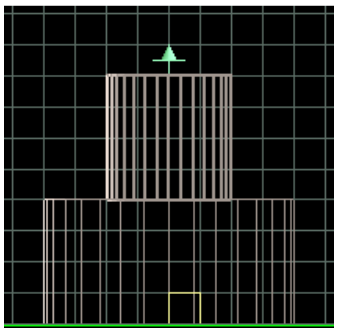


Figura 34. Simulación de dos cilindros PEC en el FDTD STUDIO como aproximación a un cono

Los resultados obtenidos para el campo eléctrico Ez medido a una distancia de 4 m en la dirección horizontal, sobre un terreno PEC, son los que se muestran en la siguiente gráfica:

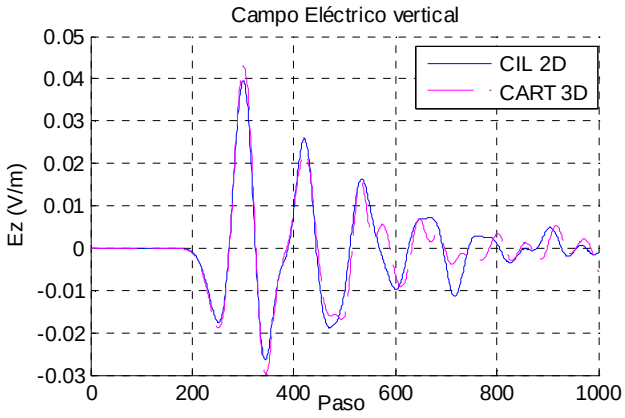


Figura 35. Comparación del campo eléctrico vertical obtenido por la metodología FDTD en coordenadas cilíndricas (CIL 2D) y la FDTD en coordenadas cartesianas del FDTD STUDIO (CART 3D)

Se puede ver nuevamente un buen ajuste entre las dos aproximaciones especialmente en los primeros 400 pasos de simulación.

3.3 Aproximación de contorno vs escalera

Antes de realizar las simulaciones para el campo electromagnético en terreno no plano, se debe examinar el grado de error de las aproximaciones mencionadas con anterioridad para modelar el terreno. Para esto se analizarán dos metodologías, la escalera (*staircase*) y la de ruta de contorno (*contour path*). Se escogerán simulaciones de terreno no plano con pendientes de 26.6º, 45º y 63.4º

(α en la Figura 36), en las cuales se calcula el campo eléctrico perpendicular a la superficie (*Ep*), a una distancia de 500 m de la ubicación del rayo, con los parámetros de la descarga de retorno descrita en la sección 2.3.2. La razón para obtener el campo *Ep* reside en que para efectos de comparación, éste campo es equivalente al campo vertical para el caso de terreno plano.

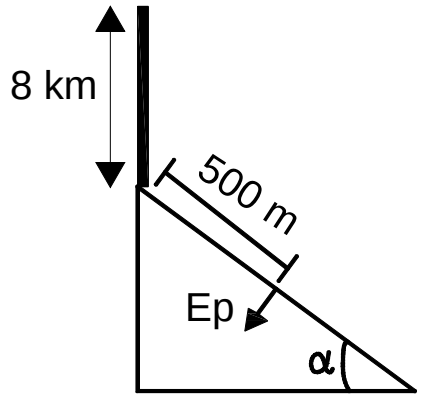


Figura 36. Punto de medición del campo eléctrico perpendicular

La obtención del campo perpendicular al terreno *Ep* se realiza como se muestra en la Figura 37: con los campos *Er* y *Ez* en la grilla de diferencias finitas se calcula el campo resultante E, la proyección de este campo sobre un vector que va perpendicular al terreno es *Ep*. El ángulo *d* se nombrará de aquí en adelante como el ángulo de proyección siendo equivalente a la diferencia angular entre el vector resultante *E* y el vector perpendicular *Ep*. Éste además es un indicativo del error que existe en la aproximación de diferencias finitas, cuando se tiene un terreno con conductividad infinita ya que en este caso los campos *Ep* y *E* deben coincidir, debido a que el campo entra perpendicular a la superficie, en consecuencia el campo tangencial al terreno *Et* se aproxima a cero.

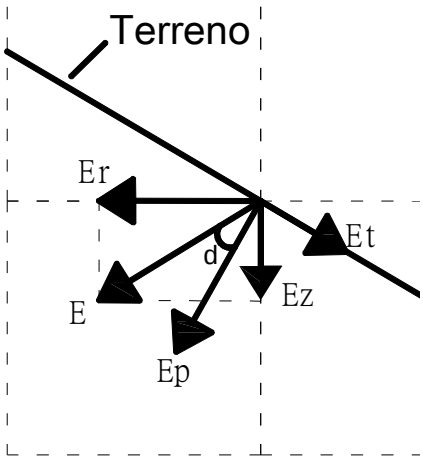


Figura 37. Metodología para el cálculo de campos sobre el terreno

El campo perpendicular que se obtiene para las dos aproximaciones de terreno no plano para un ángulo de 26.6º se muestra en la Figura 38. Se ve que existen diferencias entre las dos metodologías.

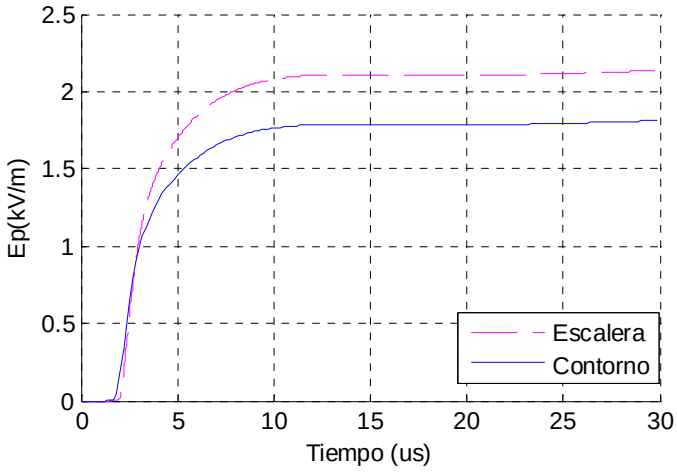


Figura 38. Campo eléctrico perpendicular al terreno, para una inclinación de 26.6°

Por su parte la comparación para un ángulo de 45º presenta un ajuste casi perfecto para las dos metodologías según se ve en la Figura 39, esto se explica debido a que la aproximación de escalera y contorno realizan el mismo algoritmo de actualización del campo $H\varphi$, cuando el ángulo es de 45º, según se ha explicado al final de la sección 3.1.3.

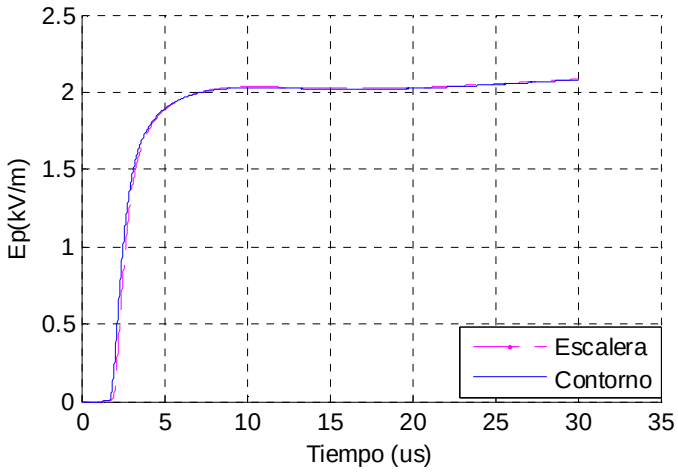


Figura 39. Campo eléctrico perpendicular al terreno, para una inclinación de 45º

La comparación entre las dos metodologías para el caso de 63.4º no es buena (Figura 40), las magnitudes difieren significativamente una de la otra, dado que el error aumenta a medida que la pendiente se hace mayor, como resultado de la no coincidencia de la grilla con el terreno.

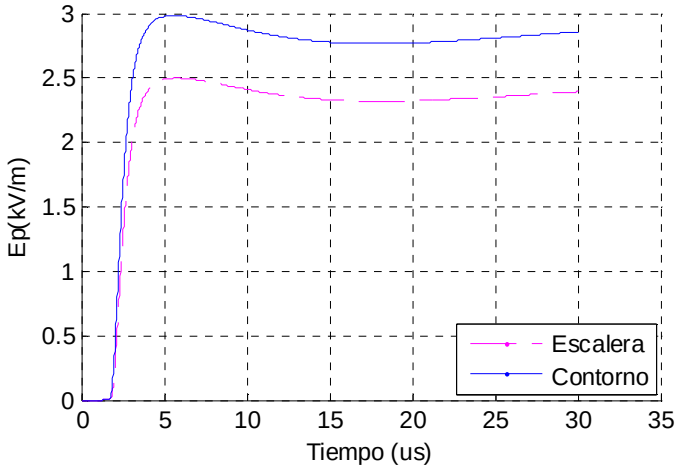


Figura 40. Campo eléctrico perpendicular al terreno, para una inclinación de 63.4º

El error de la aproximación dado por el ángulo de proyección (*d*), se presenta en la Tabla 1. En esta se evidencia, por ejemplo que no es posible utilizar la aproximación escalera (tomando el mismo paso de espacio *dx*) para un ángulo de 63.4º, dado que el error angular es de aproximadamente 20º.

Tabla 1. Error angular *d* para cada inclinación del terreno

	Ángulo de proyección (*d*)	
Inclinación	Escalera	Contorno
26.6	4.40	0.99
45.0	0.96	0.96
63.4	19.96	1.24

3.4 Calculo del campo eléctrico en terreno no plano

Para el cálculo del campo eléctrico producido por un rayo se presentan las diferentes configuraciones escogidas de terreno no plano, para los casos de conductividad infinita y finita respectivamente.

3.4.1 Resultados Conductividad Infinita

3.4.1.1 Configuración de Inclinación Negativa

Se muestra en la Figura 41 un canal de la descarga recto en la cúspide de una montaña que tiene una pendiente negativa. El canal tiene una altura de 8km, representando la altura típica de una nube. La distancia *d* indica el punto de medición del campo sobre terreno no plano. El ángulo α tomará diferentes valores desde 0 hasta 63.4º. Se debe recordar que la simulación realizada para este terreno presenta simetría respecto al eje acimutal, por lo que la simulación en 3D corresponde a un cono que tiene el canal en su cima, como se muestra en la Figura 41.

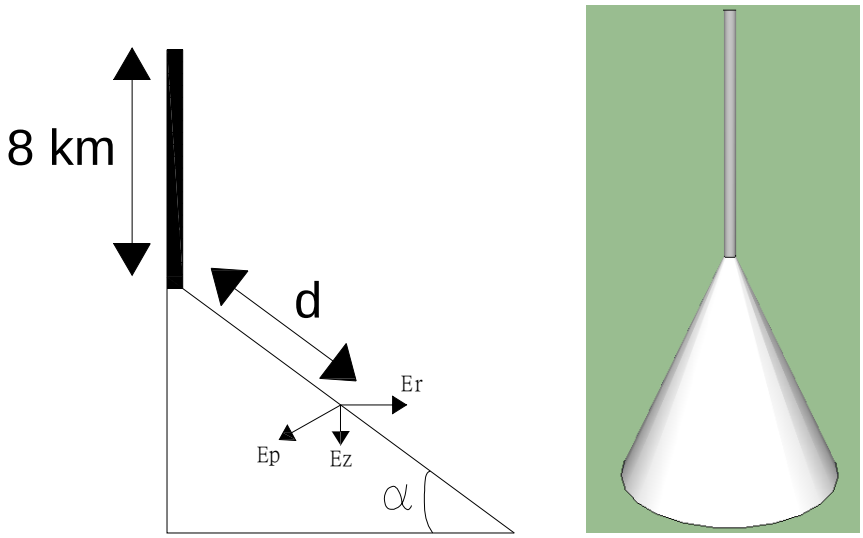


Figura 41. Configuración de terreno no plano inclinado negativamente, con su equivalente en 3D

Inicialmente se presenta el campo eléctrico horizontal y vertical medido a $d = 500\ m$ sobre el terreno, para diferentes ángulos de inclinación en la siguiente figura:

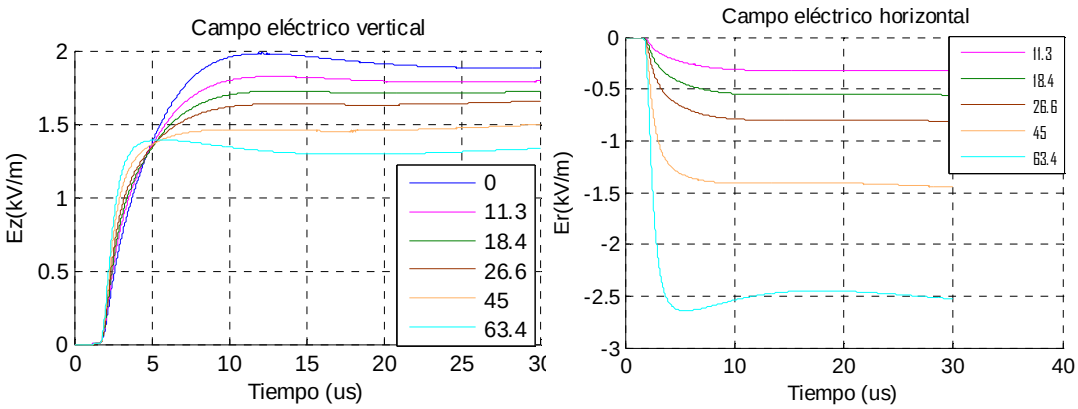


Figura 42. Campo eléctrico vertical y horizontal medido a 500 m de distancia del canal de la descarga.

Se puede notar que la tendencia del campo eléctrico horizontal es de incrementarse de una manera significativa, desde cero (en el caso de terreno plano), hasta 2.5 kV/m para una inclinación de 63.4˚ Por su parte el campo eléctrico vertical disminuye desde el valor de terreno plano hasta llegar a una inclinación de 63.4˚. Se ve entonces que existe una tendencia contraria entre el campo eléctrico horizontal y vertical cuando se simulan terrenos no planos. Esta variación produce a su vez un cambio en magnitud para el campo eléctrico perpendicular (*Ep*), según se ve en la Figura 44. Para ángulos menores comprendidos entre 0 y 26˚, el campo eléctrico perpendicular disminuye como resultado de la baja del campo eléctrico vertical que es el que predomina en magnitud en el campo eléctrico resultante. Para ángulos mayores tales como 45 y 63.4, el predominio del campo eléctrico horizontal que va en aumento hace que el campo eléctrico perpendicular se incremente. Se debe notar que el campo eléctrico horizontal tiene polaridad negativa debido a que las líneas de campo eléctrico entran perpendiculares al terreno hacia la izquierda. La medición a 100 m de distancia arroja un comportamiento similar en el campo eléctrico horizontal y vertical (Figura 43) y en el campo eléctrico perpendicular (Figura 45).

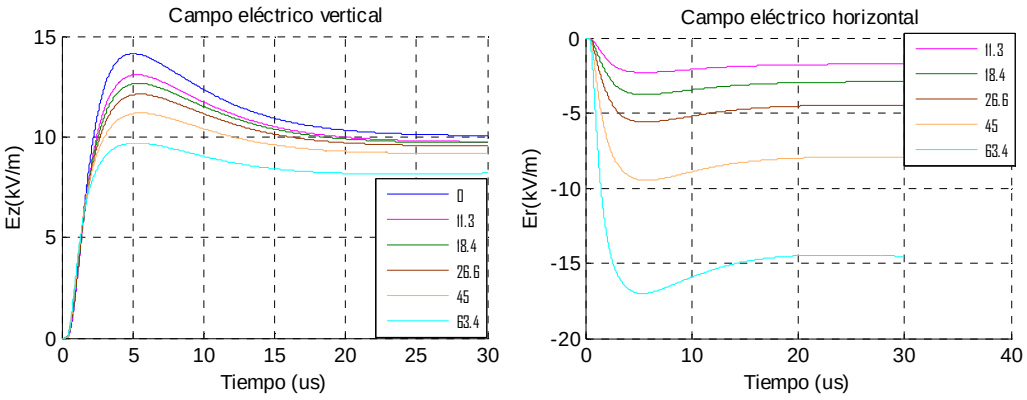


Figura 43. Campo eléctrico vertical y horizontal medido a 100 m de distancia del canal de la descarga.

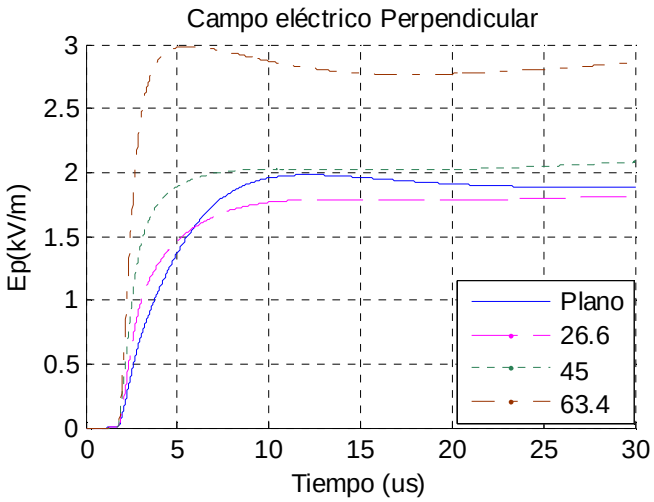


Figura 44. Campo eléctrico perpendicular al terreno a 500 m del rayo.

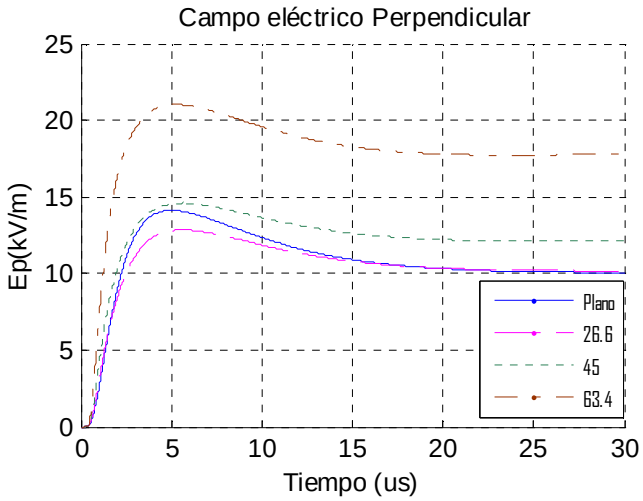


Figura 45. Campo eléctrico perpendicular a una distancia de 100 m del rayo.

Es importante obtener resultados del campo magnético obtenido a diferentes distancias del canal de la descarga. En las siguientes figuras se muestran los resultados del campo a 5 m por encima del terreno. Se ve que estos siguen una tendencia creciente a medida que la inclinación del terreno aumenta:

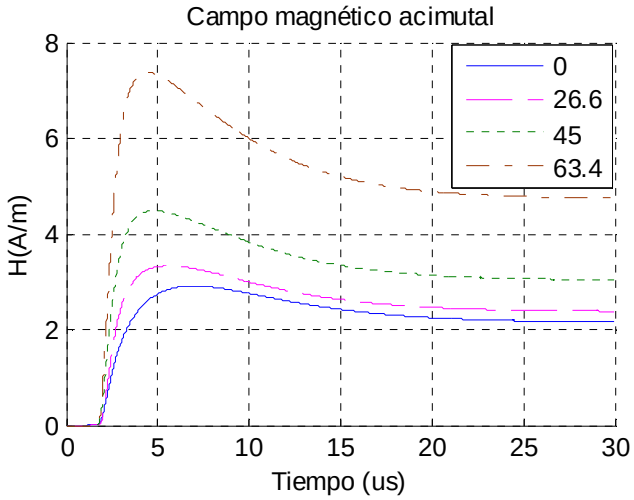


Figura 46. Campo magnético acimutal medido a 500 m y a 5 m por encima del canal de la descarga

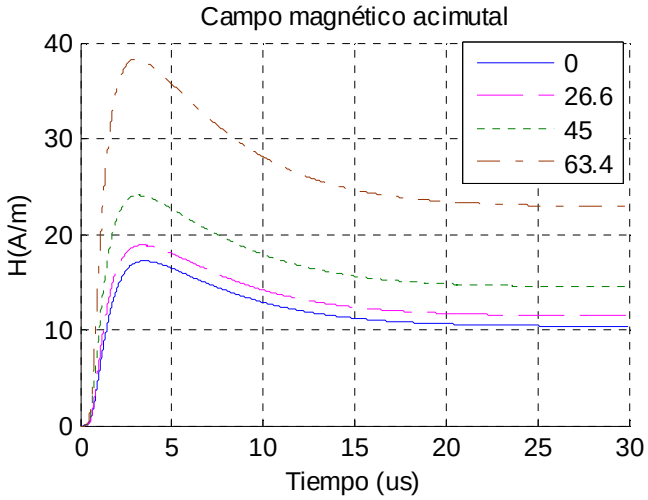


Figura 47. Campo magnético acimutal medido a 100 m y a 5 m por encima del canal de la descarga.

3.4.1.2 Configuración de Inclinación Positiva:

Se presenta una configuración en la cual el canal de la descarga se encuentra en la parte más baja de una montaña. Si bien este caso es más improbable en comparación con el de inclinación negativa debido a que los rayos tienden a caer en los sitios más altos, su análisis puede ser de interés.

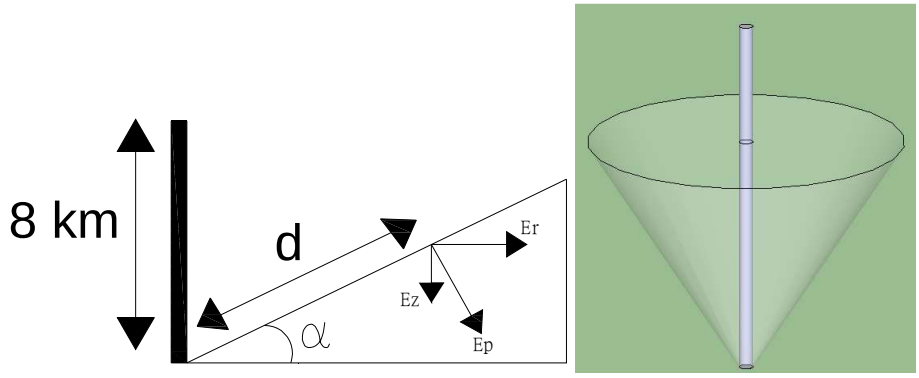


Figura 48. Configuración de terreno no plano inclinado positivamente y su equivalente en 3D

Se muestran en primer lugar el campo eléctrico horizontal y vertical medido a una distancia d = 500m, en la Figura 49. Se puede ver en la Figura 49 y la Figura 50, que la tendencia del campo eléctrico horizontal y vertical es la de aumentar a medida que la inclinación del terreno se hace mayor. Los valores positivos del campo eléctrico horizontal y vertical indican que las líneas de campo entran al terreno, de acuerdo a la dirección indicada en la Figura 48, de una manera perpendicular al plano perfectamente conductor. Siguiendo la tendencia de las componentes horizontal y vertical, el campo eléctrico perpendicular se incrementa a medida que el ángulo de inclinación α lo hace, para cualquier distancia de medición (Figura 51, Figura 52 y Figura 53).

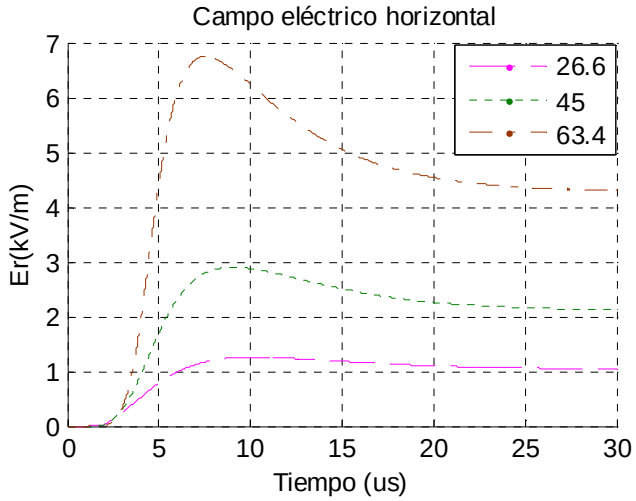


Figura 49. Campo eléctrico horizontal a una distancia de 500 m sobre un terreno con inclinación positiva

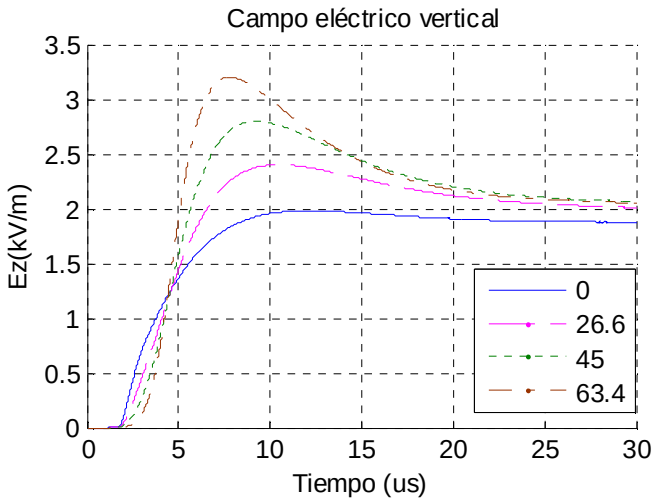


Figura 50. Campo eléctrico vertical medido a una distancia de 500 m sobre un terreno con inclinación positiva.

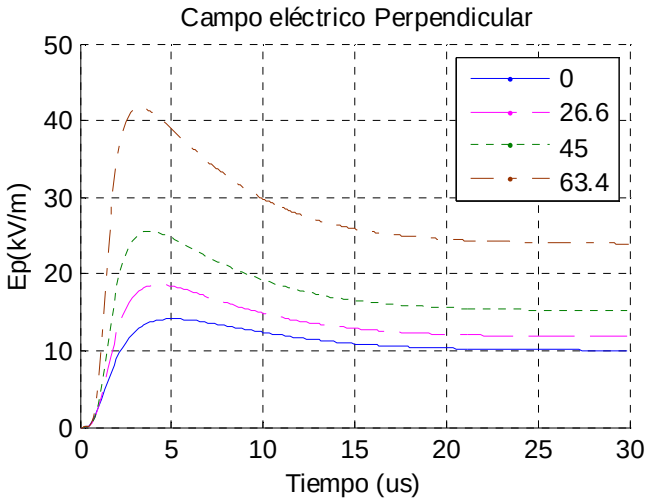


Figura 51. Campo eléctrico perpendicular medido a 100m del rayo sobre un terreno con inclinación positiva.

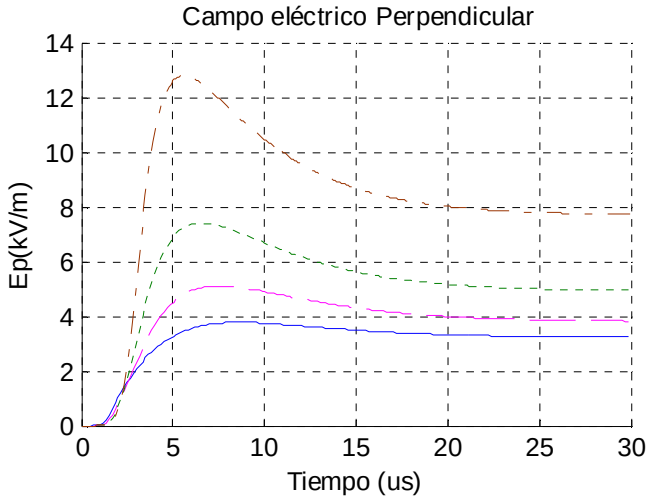


Figura 52. Campo eléctrico perpendicular medido a 300m del rayo sobre un terreno con inclinación positiva.

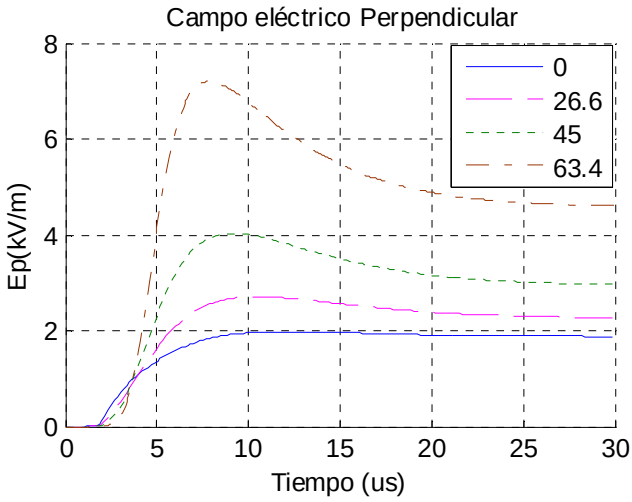


Figura 53. Campo eléctrico perpendicular medido a 500 m sobre un terreno con inclinación positiva.

El campo magnético a diferentes distancias se presenta en las Figura 54, Figura 55 y Figura 56. Se puede ver que la tendencia del campo magnético para las diferentes distancias es la de incrementarse a medida que la pendiente del terreno se hace mayor.

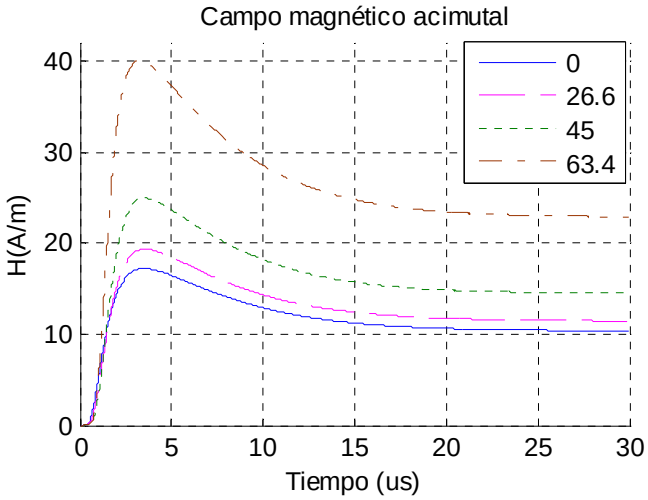


Figura 54. Campo magnético acimutal medido a 100 m y a 5 m por encima del canal de la descarga

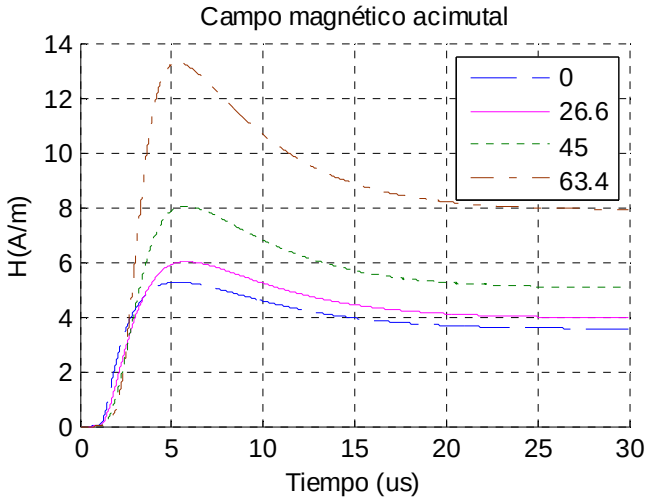


Figura 55. Campo magnético acimutal medido a 300 m y a 5 m por encima del canal de la descarga

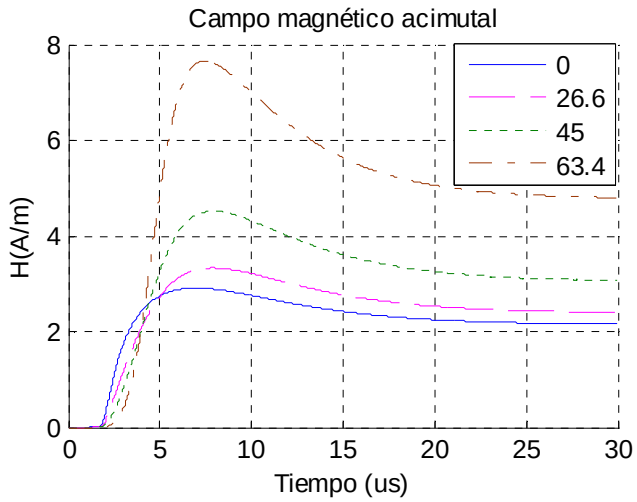


Figura 56. Campo magnético acimutal medido a 500 m y a 5 m por encima del canal de la descarga

3.4.1.3 Configuración de Inclinación Negativa más plano

Esta configuración la constituye una montaña con una inclinación negativa, con un plano a su derecha perfectamente conductor. El terreno inclinado tiene una longitud de 600m, mientras que el terreno plano mide 1km.

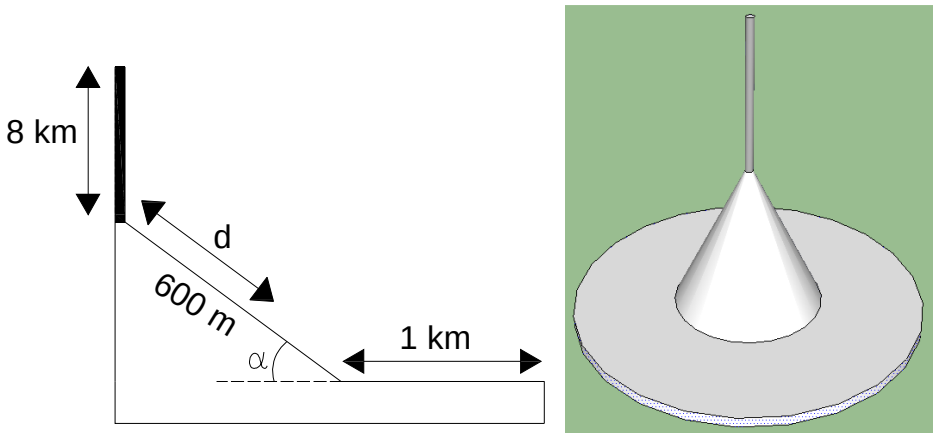


Figura 57. Configuración de terreno inclinado más un plano y su equivalente en 3D

El campo eléctrico perpendicular medido a distancias *d* de 100, 300 y 500m, se muestran en las Figura 58, Figura 59 Figura 60 Se puede ver que la influencia del terreno plano es significativa cuando la inclinación del terreno se hace mayor y cuando el punto de medición se encuentra más cerca del plano. Así para la inclinación de 63.4˚ a 500 m el campo disminuye el 30%, respecto al campo que

se obtiene cuando no está el plano (Figura 44), también es inferior al que se encuentra para los demás ángulos, contrario a lo que ocurría para pendiente negativa. No obstante, para distancias de 100 m (Figura 59) el campo no disminuye tan significativamente, debido a que las reflexiones que llegan del plano, tardan más tiempo en llegar al punto de cálculo. Así, el campo no se encuentra por debajo del caso de terreno plano, a pesar de que existe una disminución; en el caso de 45°, las reflexiones hacen que el campo se encuentre por debajo del equivalente en terreno plano. De esta manera, a 100 m se exhibe un comportamiento similar al que se presenta para el caso de *inclinación negativa*. Para 300 m se presenta algo similar que para 500 m ya que los campos logran disminuir lo suficiente y todos se encuentran por debajo del campo para terreno plano.

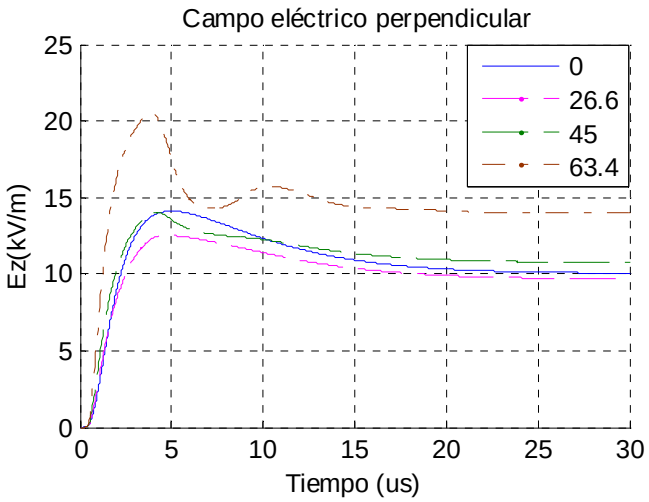


Figura 58. Campo eléctrico perpendicular sobre una montaña más un plano, medido a una distancia sobre el terreno de 100m

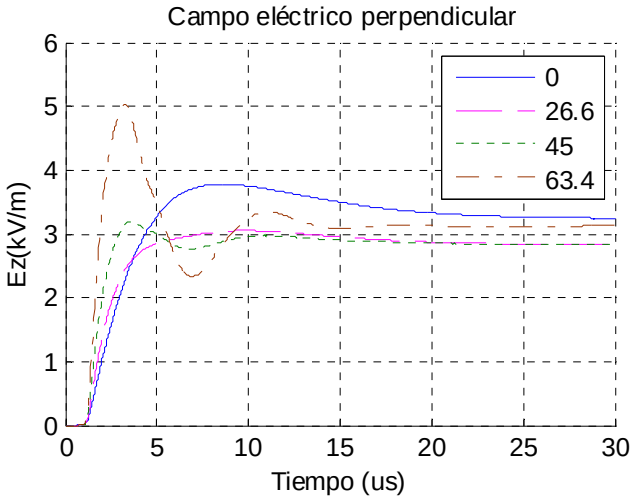


Figura 59. Campo eléctrico perpendicular sobre una montaña más un plano, medido a una distancia sobre el terreno de 300m

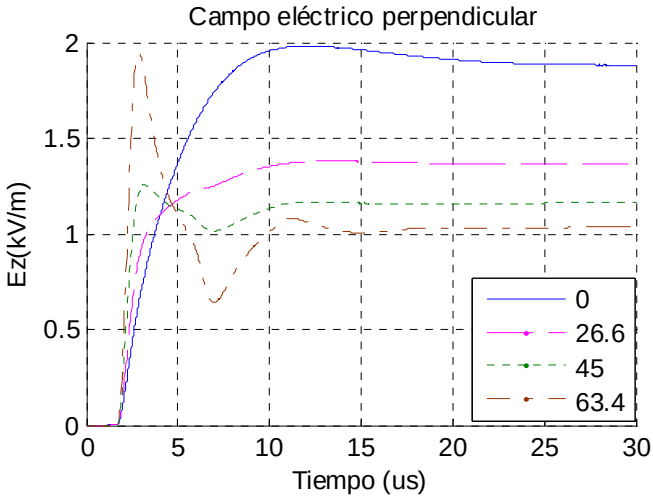


Figura 60. Campo eléctrico perpendicular sobre una montaña más un plano, medido a una distancia sobre el terreno de 500m.

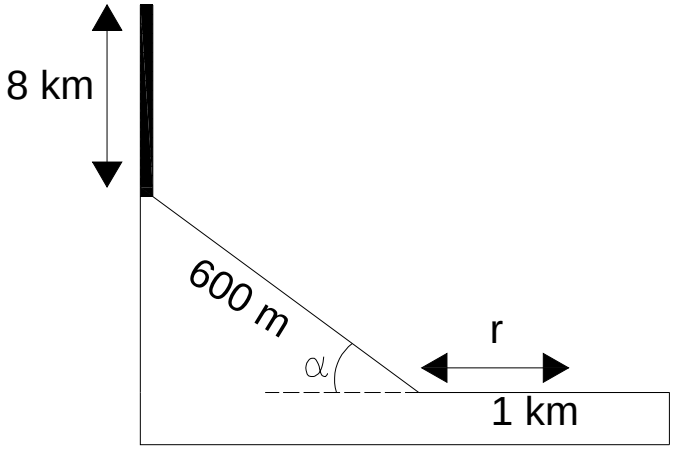


Figura 61. Configuración de terreno inclinado más un plano con mediciones sobre el terreno plano

En las siguientes figuras, se muestra el campo eléctrico perpendicular que se mide sobre el plano en la Figura 61, a diferentes distancias *r*. En estas se evidencia nuevamente que una inclinación mayor produce una notoria disminución en el campo eléctrico. También, las reflexiones provenientes del plano inclinado producen una disminución en el campo eléctrico para las diferentes distancias analizadas.

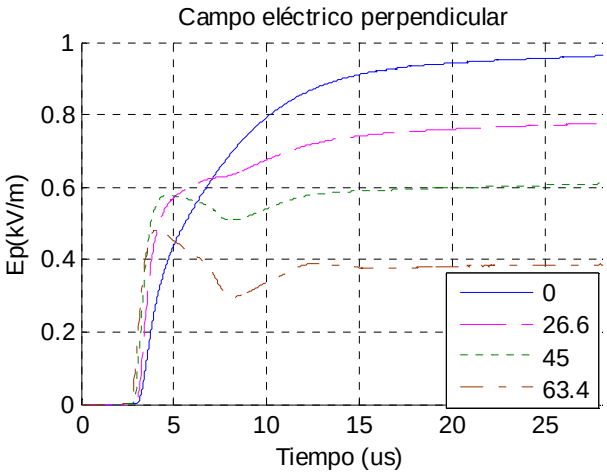


Figura 62. Campo eléctrico perpendicular medido a una distancia $r = 300\ m$ de la montaña.

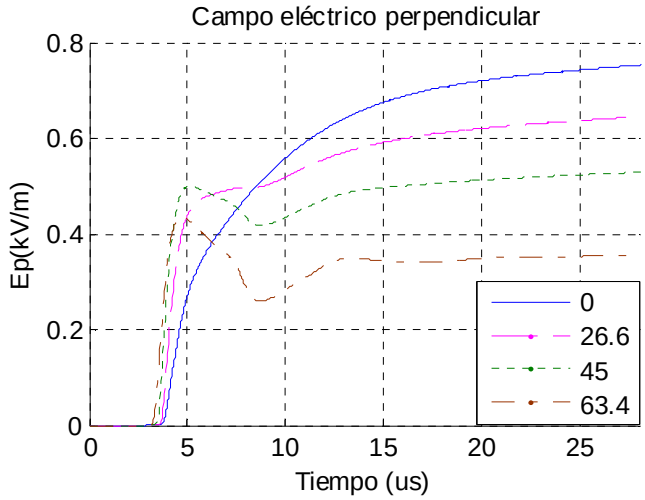


Figura 63. Campo eléctrico perpendicular medido a una distancia $r = 500\ m$ de la montaña.

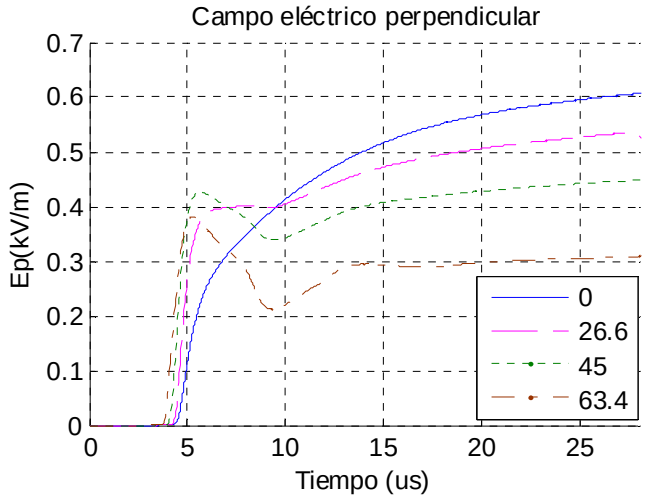


Figura 64. Campo eléctrico perpendicular medido a una distancia $r = 700\ m$ de la montaña.

3.4.2 Conductividad Finita

3.4.2.1 Configuración de Inclinación Negativa

Para la configuración de inclinación negativa de la Figura 41, el terreno se sustituye por uno de conductividad finita. Inicialmente se presenta el campo eléctrico horizontal (Figura 66) y perpendicular (Figura 66) al terreno a 500 m de distancia para una inclinación de 63.4˚, para conductividades de 0.01 S/m y 0.001 S/m.

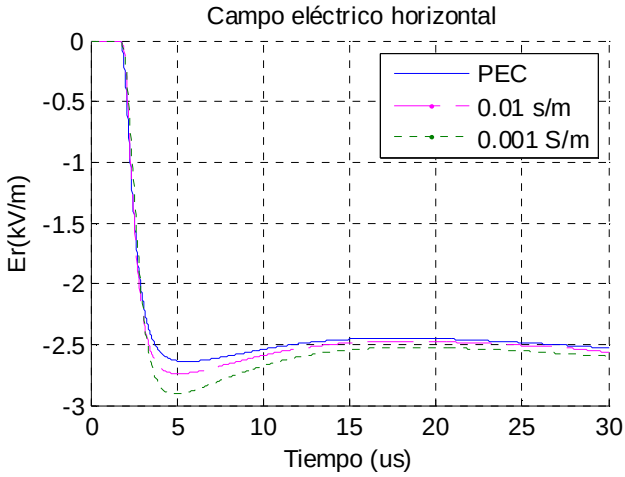


Figura 65. Campo eléctrico horizontal a 500 m de distancia del rayo para una inclinación negativa de 63.4°.

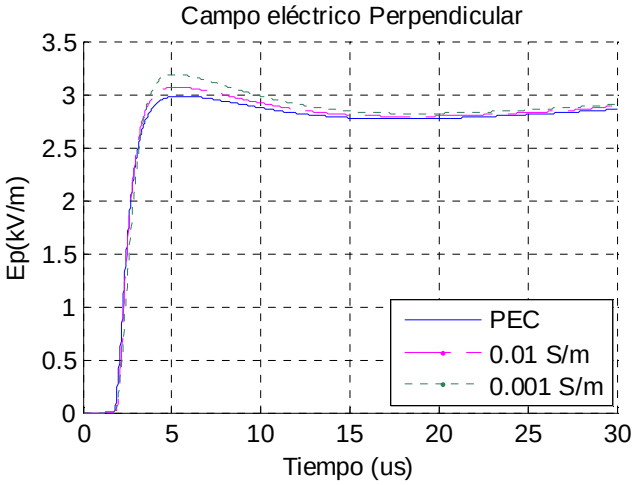


Figura 66. Campo eléctrico perpendicular a 500 m de distancia del rayo para una inclinación negativa de 63.4°.

Se ven pequeñas variaciones entre los casos de conductividad infinita y finita, por lo que el efecto de la inclinación del terreno es mucho más significativo que el de la conductividad del terreno. Una menor conductividad en cualquier caso hace que el campo eléctrico se incremente, como ocurre en terreno plano.

3.4.2.2 Configuración de Inclinación Positiva

En este caso, en la configuración mostrada en la Figura 48 se sustituye el terreno por uno de conductividad finita. Para esta configuración con una inclinación de 45˚, y conductividades de 0.01 S/m y 0.001 S/m, se presentan el

campo eléctrico horizontal (Figura 67) y perpendicular (Figura 68) a una distancia de 500 m del canal. .

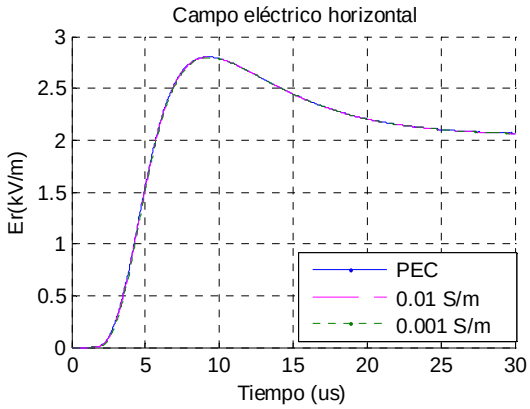


Figura 67. Campo eléctrico horizontal a 500 m del canal del rayo para un terreno con inclinación positiva para conductividad finita, y conductividades de 0.01 y 0.001 S/m

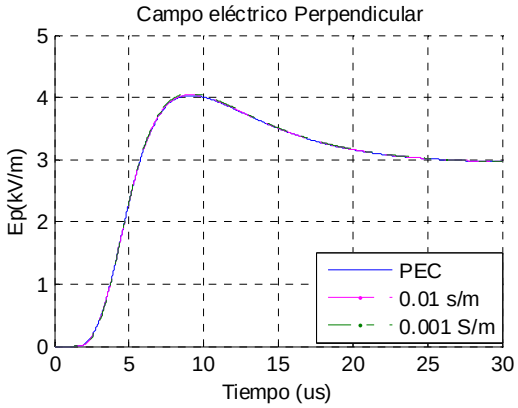


Figura 68. Campo eléctrico perpendicular a 500 m del canal del rayo para un terreno con inclinación positiva para conductividad finita, y conductividades de 0.01 y 0.001 S/m

Se puede ver que no existen significativas diferencias en los campos eléctricos para 45°; el mismo comportamiento se evidencia para los demás ángulos

3.4.2.3 Configuración de Inclinación Negativa más plano

La configuración analizada para conductividad finita en la Figura 57, se sustituye por una con conductividades de 0.01 y 0.001S/m. Se presentan el

campo eléctrico perpendicular a una distancia d = 500m para los diferentes ángulos de inclinación en las siguientes figuras.

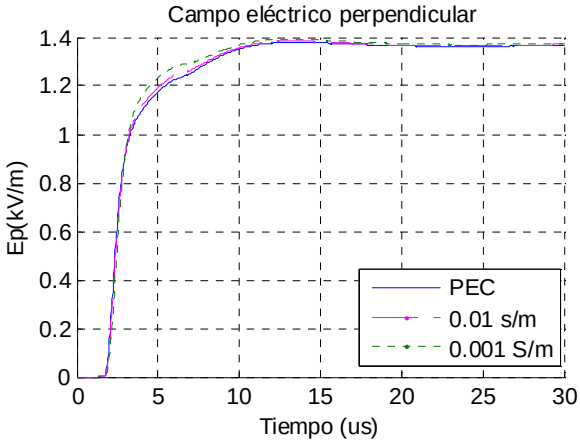


Figura 69. Campo eléctrico perpendicular al terreno de inclinación negativa más plano, con un ángulo de 26.6° y conductividad finita.

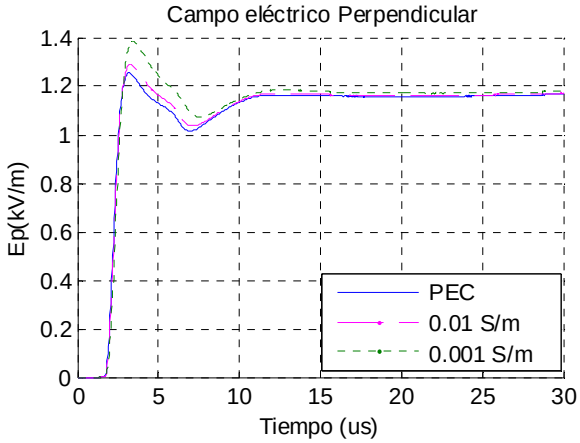


Figura 70. Campo eléctrico perpendicular al terreno de inclinación negativa más plano, con un ángulo de 45° y conductividad finita.

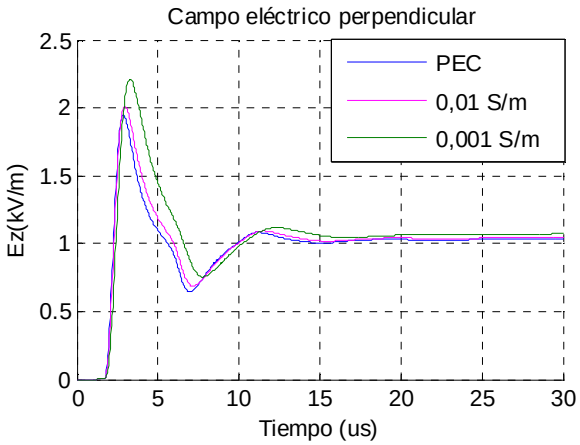


Figura 71. Campo eléctrico perpendicular al terreno de inclinación negativa más plano, con un ángulo de 63.4° y conductividad finita.

Se puede ver un comportamiento similar al que se presenta para conductividad infinita con un leve incremento del campo para conductividades menores como ya se había mencionado antes.

Capitulo 4: Tensiones inducidas en terreno no plano

En este capítulo se analizará el efecto en las tensiones inducidas por rayo, al ubicar una línea de distribución sobre algunas de las configuraciones de terreno no plano examinadas en el capítulo anterior.

4.1 Introducción

La consideración del efecto del campo electromagnético en líneas de distribución puede hacerse a través de un desarrollo riguroso de las ecuaciones de Maxwell a través de la teoría de antenas o puede llevarse a cabo por medio de la aproximación de las ecuaciones de línea de transmisión con fuentes distribuidas, siendo este el procedimiento más simple [28]

El primer modelo que usa la aproximación de línea de transmisión para describir la inducción electromagnética asociada a la descarga de retorno en una línea de distribución es el modelo de Rusck. Rusk dedujo una ecuación analítica para calcular la tensión inducida máxima en una línea cuando se desprecia la conductividad del terreno y se asume una línea infinita sin pérdidas. Otros modelos fueron desarrollados después, de los cuales los más conocidos son Agrawal, Price y Gurbaxani, Taylor, Scatterwhite, y Harvison, Rachidi y Chowdhuri [28].

En la actualidad el modelo de Agrawal es el más utilizado en la literatura. Este modelo se expresa por dos ecuaciones de línea de transmisión, en función de la tensión inducida dispersa (scattered) y como única fuente de inducción la componente de campo eléctrico horizontal [28]:

$$\frac{\partial[V^s(x)]}{\partial x} + Z'[I(x)] = [E_x(x,h)] \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial[I(x)]}{\partial x} + Y'[V^s(x)] = 0 \tag{4.2}$$

El modelo de Agrawal será usado a lo largo de esta tesis para obtener las tensiones inducidas en líneas de distribución.

4.2 Casos de simulación:

En esta sección se obtienen las tensiones inducidas en una línea de distribución ubicada encima de algunas de las configuraciones de terreno no plano analizadas en el capítulo anterior. La línea de distribución tiene una longitud de 500m, la altura se variará de acuerdo a la configuración, un radio del conductor de 5 mm, con una resistencia cercana a la impedancia característica de la línea conectada en cada uno de sus extremos y sobre terrenos de conductividad infinita. Se simulará una descarga de retorno subsecuente con I_0 = 12 kA y di/dt = 12 kA/μs, que se representa con una función de heidler con los siguientes parámetros: $I_{01} = 10.7\ kA, \tau_{11} = 0.95\mu s, \tau_{12} = 4.7\mu s, I_{02} = 6.5kA, \tau_{21} = 4.6\mu s, \tau_{22} = 900\mu s, n = 2$ [46]. Se utilizará un modelo TL para representar la variación de la corriente a lo largo del canal, una altura del canal de 8km y una velocidad de la descarga de retorno de 120 m/μs. Se escoge un paso de $\Delta r = \Delta z = 5m$, para el método de diferencias finitas, para el cálculo del campo electromagnético producido por el rayo; el paso de tiempo se calcula siguiendo el criterio de Courant mencionado en (2.42). Y se considera una distancia apropiada a la frontera derecha para evitar las reflexiones ocasionadas por la frontera absorbente de Mur.

4.2.1 Simulación de terreno plano:

Se simula la tensión inducida que produce un impacto lateral a 500m de una línea de 500 m de longitud, con una altura de 10m, sobre un terreno plano perfectamente conductor como se muestra en la Figura 72

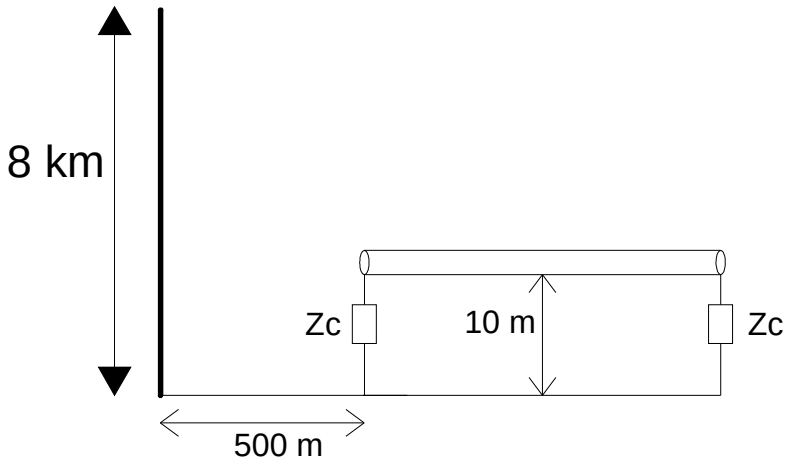


Figura 72. Configuración de terreno plano para cálculo de tensión inducida

La tensión inducida en la línea se obtiene a través del programa de simulación de tensiones inducidas Yaluk Draw [45], que implementa el método de acople de Agrawal para calcular la tensión inducida en la línea de distribución. El valor de la tensión al inicio de la línea se muestra en la Figura 73. Se muestra la tensión obtenida internamente por el programa (con marcador "□" y color verde), que se obtiene para terreno plano, y la tensión obtenida con los valores del campo electromagnético calculado a través de diferencias finitas desarrollada en esta tesis (con marcador "○" y color roja), siendo este un campo externo que se le introduce al programa. Se puede ver que existe un muy buen ajuste entre los dos resultados.

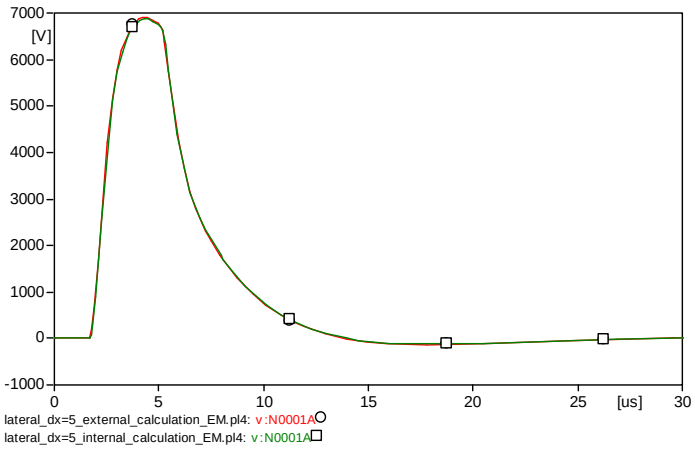


Figura 73. Tensión inducida al inicio de una línea sobre terreno plano. Marcador (□) para campo interno. Marcador (○) para campo externo calculado mediante diferencias finitas

4.2.2 Simulación de inclinación negativa

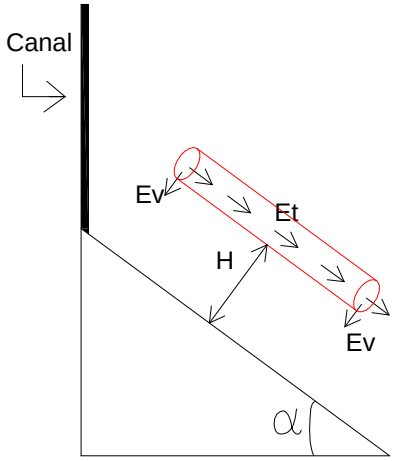


Figura 74. Línea de distribución sobre un plano inclinado con pendiente negativa

La simulación de tensiones inducidas sobre terreno no plano se lleva a cabo mediante la siguiente metodología: se obtienen los campos perpendiculares a la línea al inicio y al final de ésta (*Ev*). Debido a la variación que se presenta para terreno no plano, el campo *Ev* es el promedio del campo perpendicular a la línea hasta llegar al suelo. También se obtienen los campos tangenciales a la línea (*Et*), con el fin de introducírselos al programa de simulación de tensiones inducidas Yaluk Draw. Debido a que se usa la aproximación TEM, los campos eléctricos y

magnéticos se pueden relacionar, no es necesario obtener los campos magnéticos para introducírselos al programa.

A continuación se calculan las tensiones inducidas en líneas sobre terrenos con inclinaciones negativas de 26.6˚, 45˚ y 63.4˚, producidos por un impacto lateral de rayo a 300 m de distancia.

4.2.2.1 α = 26.6

Se realiza la simulación de la tensión inducida en una línea de distribución a una altura perpendicular al terreno de H = 8.94 m y un de 26.6 ˚ en la Figura 74. En la Figura 75, se muestran las tensiones inducidas en la línea de distribución al inicio de la línea. Se presenta la tensión que se obtiene para terreno plano y para terreno inclinado.

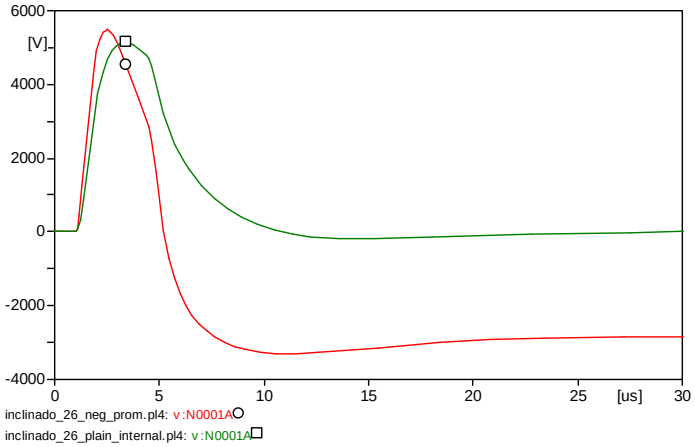


Figura 75. Tensión inducida al inicio de la línea sobre un terreno con inclinación de 26.6. Marcador (□) para terreno plano. Marcador (○) para terreno inclinado

4.2.2.2 α = 45

Se realiza la simulación de la tensión inducida en una línea de distribución puesta a 10 m por encima del terreno equivalente a una altura perpendicular al terreno de H = 7.07 m y un de 45 ˚ en la Figura 74 . Las tensión inducida al inicio de la línea se muestra en las Figura 76. Se puede ver un incremento de la tensión inducida con respecto al caso de terreno plano de aproximadamente 1.7 veces al inicio de la línea.

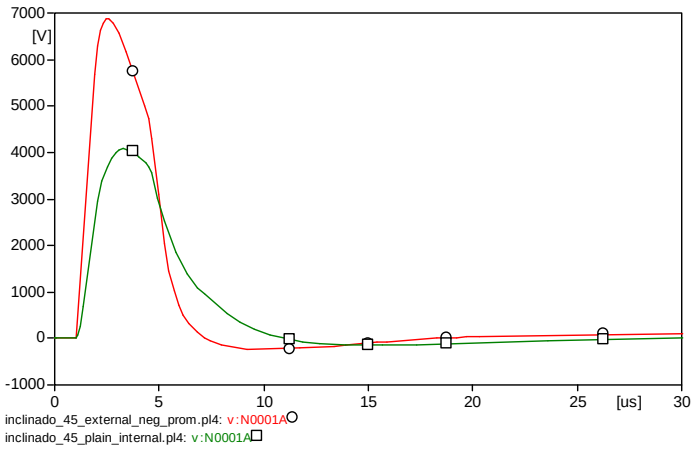


Figura 76. Tensión inducida al inicio de la línea sobre un terreno con inclinación de 45. Marcador (□) para terreno plano. Marcador (○) para terreno inclinado

4.2.2.3 α = 63.4°:

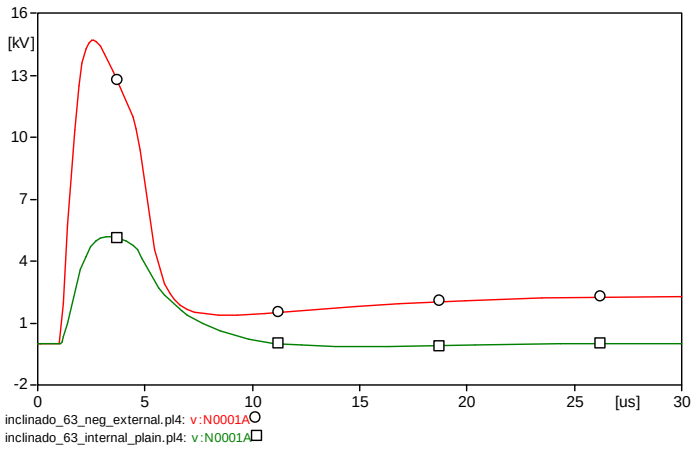


Figura 77. Tensión inducida al inicio de la línea sobre un terreno con inclinación de 63.4 Marcador (□) para terreno plano. Marcador (○) para terreno inclinado

Se realiza la simulación de la tensión inducida en una línea de distribución a una altura perpendicular al terreno de H = 8.96 m y un de 63.4 ° en la Figura 74. La tensión inducida al inicio de la línea se muestra en la Figura 77.

Se puede ver que la tensión al inicio de la línea es de al menos 2.8 veces su equivalente de terreno plano, lo cual evidencia el importante efecto de la configuración del terreno sobre el cálculo de las tensiones inducidas.

4.2.3 Simulación inclinación positiva:

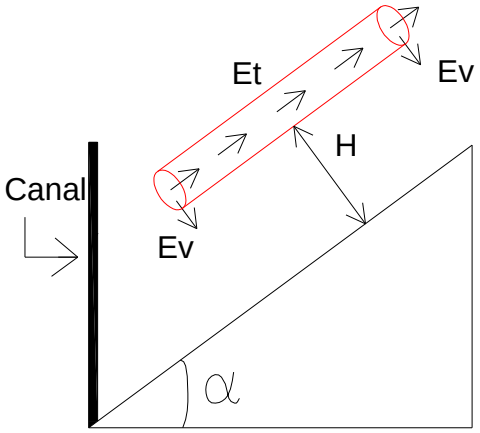


Figura 78. Línea de distribución sobre un plano inclinado con pendiente positiva

Siguiendo una metodología similar a la analizada para pendiente negativa, se obtienen los campos que se indican en la Figura 78. A continuación se obtendrán la tensión inducida al inicio de la línea para un rayo que cae a 300 m lateral a la línea. Se comparará cada caso con la tensión que se obtendría si la línea estuviera ubicada sobre terreno plano.

4.2.4 α = 26.6°:

Se realiza la simulación de la tensión inducida en una línea de distribución a una altura perpendicular al terreno de H = 8.94 m en la Figura 78. Se muestra a continuación los campos al inicio de la línea.

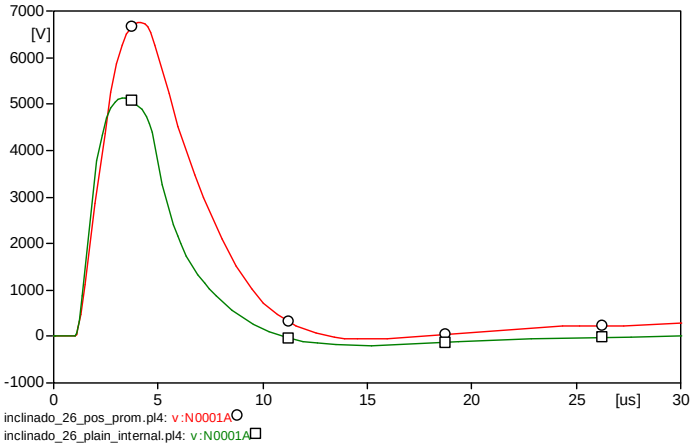


Figura 79. Tensión inducida al inicio de la línea sobre un terreno con inclinación positiva de 26.6. Marcador (□) para terreno plano. Marcador (○) para terreno inclinado

4.2.5 α = 45°:

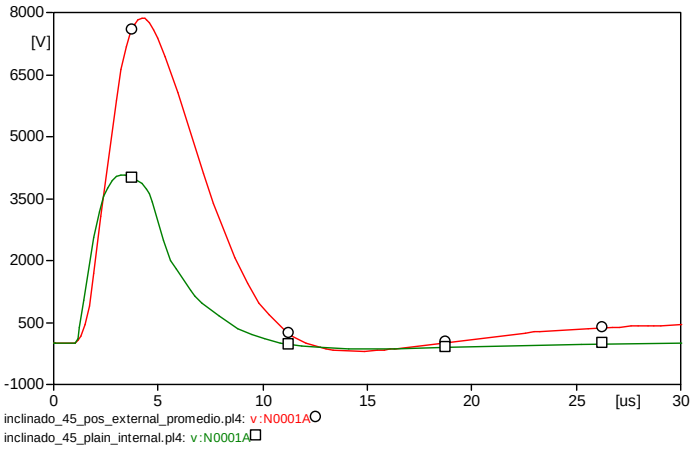


Figura 80. Tensión inducida al inicio de la línea sobre un terreno con inclinación positiva de 45. Marcador (□) para terreno plano. Marcador (○) para terreno inclinado

Se realiza la simulación de la tensión inducida en una línea de distribución a una altura perpendicular al terreno de H = 7.07 m en la Figura 78. En la Figura 80, se presenta la tensión inducida al inicio de la línea

4.2.6 α = 63.4°:

Se realiza la simulación de la tensión inducida en una línea de distribución a una altura perpendicular al terreno de H = 8.96 m en la Figura 78. En la siguiente gráfica se muestra la tensión inducida al inicio de la línea:

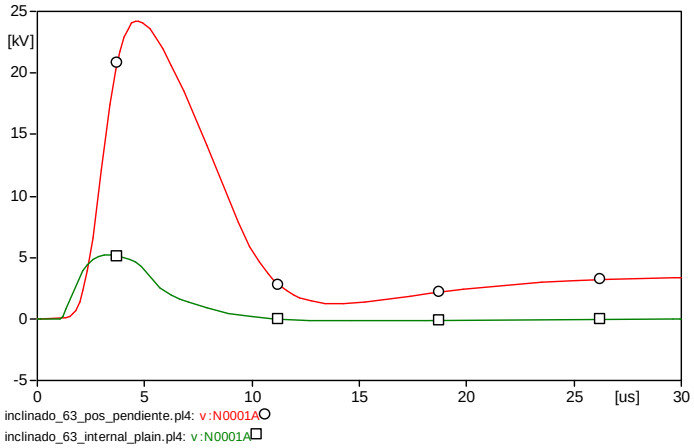


Figura 81. Tensión inducida al inicio de la línea sobre un terreno con inclinación positiva de 63.4 Marcador (□) para terreno plano. Marcador (○) para terreno inclinado

Se puede ver el notorio incremento de la tensión inducida en este caso, que alcanza hasta 4.7 veces el valor de terreno plano.

En la Tabla 2 se muestra el factor de incremento de la tensión inducida con respecto al caso de terreno plano, se evidencia que las tensiones inducidas se incrementan a medida que la inclinación del terreno es mayor. Para el caso de pendiente negativa el efecto es menor, llegando a ser de 2.9 veces para un ángulo de 63.4°, para ese mismo ángulo en inclinación positiva, la tensión inducida puede ser de 4.7 veces

Tabla 2. Incremento de la tensión inducida respecto al caso de terreno plano

Inclinación	Incremento
-26.56	1.1
-45	1.7
-63.4	2.8
26.56	1.3
45	2.1
63.4	4.7

4.3 Aportes al modelado de tensiones inducidas por rayo en líneas de distribución

Paralelo al desarrollo de esta tesis se han realizado otros trabajos orientados a una ampliación del conocimiento en el modelado y simulación de las tensiones inducidas por rayo en líneas de distribución aéreas. De estos han salido resultados notables como el programa de simulación de tensiones inducidas Yaluk Draw [45], que tiene tres módulos de funcionamiento: uno de simulación en líneas ramificadas y complejas, uno estadístico que permite calcular el índice de fallas de líneas de distribución y uno de optimización que permite a través de la técnica de algoritmos genéticos calcular la mejor ubicación de descargadores de sobretensión para disminuir el índice de fallas de una línea.

Se han desarrollado artículos para presentación en eventos nacionales: el primero que introduce el concepto de densidad difusa al cálculo del índice de fallas de una red de distribución [48], en el segundo se desarrolla una metodología de regresión multilineal para disminuir el número de simulaciones de tensiones inducidas requeridas por el método de MonteCarlo para obtener el estimativo de la rata de fallas de una línea de distribución, lográndose reducciones significativas de hasta el 90% en el número de casos totales a simular [49]. En cuanto a eventos internacionales se presenta un artículo que estudia la energía absorbida por los descargadores de sobretensión de acuerdo a la

ubicación que estos tengan en una línea ramificada y del número que estén conectados a la línea [50]. Se concluye en este artículo que la ubicación de los descargadores en puntos en que existen ramificaciones son especialmente importantes en el desempeño de la línea. En revistas indexadas se ha publicado un artículo que reconsidera el uso del criterio de flameo de 1.5CFO para determinar el número de salidas de una línea por año debido a impactos indirectos [51]. Esto se logra a través del uso de modelos basados en curvas experimentales tensión-tiempo del aislamiento, que son incluidas en un análisis estadístico, en el que se verifica que el criterio de 1.5 CFO puede estar subestimando el fenómeno de las tensiones inducidas.

De manera muy significativa el presente trabajo da un nuevo aporte al modelado de las tensiones inducidas, porque introduce un nuevo parámetro de simulación y diseño como es el terreno sobre el que se ubica la línea de distribución La precisión en el cálculo de tensiones inducidas, así como el mejoramiento en los estimativos de los índices de salida de redes de distribución es uno de los logros que esta tesis arroja.

Capitulo 5: Conclusiones y trabajos futuros

5.1 Conclusiones

El trabajo ha cumplido a cabalidad con los objetivos propuestos de calcular el campo electromagnético para configuraciones de terreno no plano, haciendo una comparación con sus equivalentes de terreno plano. También se ha calculado las tensiones inducidas para los campos electromagnéticos obtenidos para las configuraciones no planas. Las conclusiones sobre el campo electromagnético y las tensiones inducidas por rayo para terrenos no plano se resumen a continuación:

5.1.1 Campo Electromagnético

Para efectos de comparación, el campo eléctrico perpendicular es el que se aproxima al campo eléctrico vertical para terreno plano, por esta razón es el que se analiza a lo largo de este documento en las diferentes configuraciones de terreno no plano.

El campo eléctrico para terreno no plano es significativamente diferente al del terreno plano. Cuando un rayo cae encima de una montaña, los campos que se miden a determinada distancia sobre la montaña se comportan así: el campo eléctrico horizontal se incrementa, el campo eléctrico vertical disminuye y el campo magnético aumenta a medida que la inclinación del terreno es mayor. Esto produce una variación en la magnitud del campo eléctrico perpendicular a medida que el ángulo de inclinación del terreno es más alto, haciendo que decrezca respecto a su valor de terreno plano y luego se incremente considerablemente. La variación del campo eléctrico perpendicular es similar a diferentes distancias de medición de la descarga.

Para pendientes positivas el campo eléctrico horizontal y vertical, contrario de lo que ocurre para pendientes negativas, en los dos casos se incrementa. Así el campo eléctrico perpendicular es siempre mayor cuando se tienen montañas de gran inclinación. Si bien este caso es improbable porque el impacto de un rayo tiende a buscar los sitios más elevados, es de consideración las magnitudes que puede alcanzar el campo eléctrico, en caso de que ocurra, siendo de hasta 2.5 veces el valor de terreno plano, hasta el ángulo analizado, para pendientes mayores el resultado será más alto.

Cuando se coloca un terreno montañoso al lado de uno plano, se produce un efecto interesante de disminución de la magnitud del campo eléctrico, especialmente cuando la pendiente de la montaña es elevada y cuando el punto de medición del campo sobre la pendiente está más cerca del plano, esto debido a que las reflexiones que vienen del plano llegan más rápido al punto. De igual forma cuando se mide sobre el plano los campos disminuyen respecto a su equivalente de terreno plano, debido a causa de las reflexiones que vienen desde el terreno inclinado.

No existen significativas variaciones del campo cuando la conductividad del terreno cambia. El efecto del terreno plano prevalece sobre el de la conductividad del terreno. No obstante, la magnitud del campo se incrementa levemente para malas conductividades, lo cual coincide con lo descrito en la literatura [3].

Se destaca la inversión de la polaridad del campo eléctrico para pendientes negativas, esto se explica debido a que las líneas de campo entran perpendiculares a la superficie, por lo que el campo eléctrico horizontal va hacia la izquierda y el campo vertical hacia abajo. El cambio de polaridad no se ve ni para inclinación positiva en la cual el campo entra al terreno, por lo que va hacia la derecha, ni para terreno plano.

5.1.2 Tensiones inducidas por rayo

Las tensiones inducidas en redes de distribución ubicadas sobre terrenos no planos son mayores en comparación con las obtenidas sobre terrenos planos en todos los casos analizados, siguiendo la misma tendencia de los campos

eléctricos. Así mismo el incremento de la pendiente hace que las tensiones inducidas sean mayores.

Las tensiones inducidas son de un valor más elevado cuando el canal se encuentra en la parte baja de una montaña, en comparación cuando el rayo cae encima de la montaña. No obstante las magnitudes en este último caso puede ser de hasta casi 3 veces cuando la pendiente es de 63° e incrementarse para inclinaciones mayores.

La metodología para calcular los campos eléctricos que producen la inducción en la línea, para configuraciones de terreno no plano, debe cambiarse para incluir el campo perpendicular a la línea (*Ev*), ya que no se puede usar el campo eléctrico vertical del caso de terreno plano. Ocurre lo mismo con el campo *Et*, que no coincide con el campo eléctrico horizontal en terreno plano.

5.2 Trabajos futuros

Los resultados de esta tesis, arrojan variados trabajos que irán en el camino de mejorar el modelado y simulación de tensiones inducidas en líneas de distribución aéreas. El más próximo se centra en la inclusión en el Yaluk Draw de un módulo de simulación en el que se pueda incluir la configuración del terreno para evaluar tanto los campos eléctricos como las tensiones inducidas de líneas colocadas sobre esos terrenos. Los algoritmos deben apropiarse al cálculo de las tensiones inducidas en líneas que atraviesan diferentes alturas, lo que implica que el cálculo de los parámetros para cada segmento de línea sea diferente. Por otra parte debido a la simetría rotacional que existe en el método de diferencias finitas en coordenadas cilíndricas, es posible hacer simulaciones de líneas de distribución en espacios 3D, pero sólo usando los campos obtenidos de la simulación en 2D en coordenadas cilíndricas. Esto permite disminuir el tiempo y el espacio de cómputo significativamente y obtener resultados muy cercanos a los de las líneas de distribución reales.

Será inexorable la publicación de los resultados obtenidos, ya que la comunidad científica ha mostrado su interés, pero hasta el momento no se conocen investigaciones al respecto. Este conocimiento resultará importante

para la ingeniería colombiana, en la que como se ha mencionado, muchas de las líneas de distribución pasan por terrenos montañosos y en las que se debe evaluar con detalle como difieren las tensiones inducidas respecto al tradicional cálculo de terreno plano. Por supuesto, no solo en Colombia, sino a nivel mundial donde las líneas de distribución atraviesen montañas, esta investigación servirá de referencia para mejorar los diseños de protección contra rayos.

El trabajo posterior a este será el de validación experimental del campo electromagnético para terreno no plano, en el cual se construirá un dispositivo a escala que permita encontrar experimentalmente las diferencias del campo para terreno plano y no plano. Esto se hará en el marco del estudio del doctorado.

Anexo A: DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE CAMPO EN DIFERENCIAS FINITAS EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

A1. Campo eléctrico vertical (Ez)

Para obtener el campo eléctrico vertical, se desarrolla la ecuación de Ampére en su forma integral alrededor del eje z:

$$\oint H \cdot dl = \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{D} \cdot \overrightarrow{dA} + \iint_A \vec{J} \cdot \overrightarrow{dA} \tag{A.1}$$

Sería equivalente a deducir la ecuación en forma diferencial (2.24).

La celda en la que se integran los campos es la que se muestra en la Figura 82. El contorno de integración del campo magnético es $r_{i+1/2}\Delta\varphi$ (la longitud del arco), mientras que el área que atraviesa el campo eléctrico es $\frac{r_{i+1/2}+r_{i-1/2}}{2}\Delta\varphi\Delta r = r_i\Delta\varphi\Delta r$ (el área de un trapecio circular).

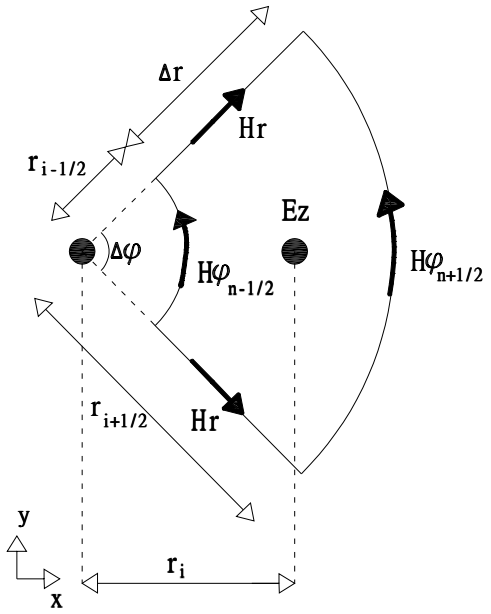


Figura 82. Celda de integración de la ley de Ampére en coordenadas cilíndricas

La discretización de la ecuación de Ampére queda:

$$r_{i+1/2}\Delta\varphi H_{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-r_{i-1/2}\Delta\varphi H_{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) \tag{A.2}$$
$$=\varepsilon_0\frac{E_z^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-E_z^{n}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t}r_i\Delta\varphi\Delta r$$
$$+\sigma E_z^{n+1/2}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)*r_i\Delta\varphi\Delta r$$

Teniendo en cuenta, que

$$E_z^{n+1/2}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=\frac{E_z^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)+E_z^{n}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}{2} \tag{A.3}$$

Reorganizando términos se tiene:

$$E_z^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=\frac{2\varepsilon-\sigma\Delta t}{2\varepsilon+\sigma\Delta t}E_z^{n}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)+\frac{2\Delta t}{(2\varepsilon+\sigma\Delta t)r_i\Delta r}\left[r_{i+1/2}H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-r_{i-1/2}H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)\right] \tag{A.4}$$

A2. CAMPO ELÉCTRICO HORIZONTAL (ER)

Para obtener la expresión del campo eléctrico horizontal se puede desarrollar la ecuación de Ampére alrededor del eje r o por facilidad desarrollar la ecuación diferencial (2.23):

$$-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}=\varepsilon\frac{\partial E_r}{\partial t}+\sigma_e E_r \tag{A.5}$$

En diferencias finitas la expresión queda como:

$$-\frac{H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_\varphi^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z}=\varepsilon\frac{E_r^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-E_r^{n}\left(i+\frac{1}{2},j\right)}{\Delta t}+\sigma_e E_r^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right) \tag{A.6}$$

Teniendo en cuenta que:

$$E_r^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=\frac{E_r^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)+E_r^{n}\left(i+\frac{1}{2},j\right)}{2} \tag{A.7}$$

Sustituyendo:

$$-\frac{H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z}=\left[\frac{\varepsilon}{\Delta \mathrm{t}}+\frac{\sigma_e}{2}\right]E_r^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-\left[\frac{\varepsilon}{\Delta t}+\frac{\sigma_e}{2}\right]E_r^{n}\left(i+\frac{1}{2},j\right) \tag{A.8}$$

Reorganizando términos:

$$E_r^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=\frac{2\varepsilon-\sigma\Delta t}{2\varepsilon+\sigma\Delta t}E_r^{n}\left(i+\frac{1}{2},j\right) - \frac{2\Delta t}{(2\varepsilon+\sigma\Delta t)\Delta z}\left[H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) - H_\varphi^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)\right] \tag{A.9}$$

A3 - CAMPO MAGNÉTICO ACIMUTAL (H_φ)

El campo magnético acimutal se puede obtener al aplicar la ecuación de Faraday en su forma integral sobre una de las celdas en 2D:

$$\frac{d}{dt}\iint_A \vec{B}\cdot\overrightarrow{dA} = -\oint_l \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} \tag{A.10}$$

El área que atraviesa el campo magnético es el área de la celda ($\Delta r \cdot \Delta z$), mientras que la trayectoria de integración del campo eléctrico es el perímetro de la celda, como se muestra en la Figura 83.

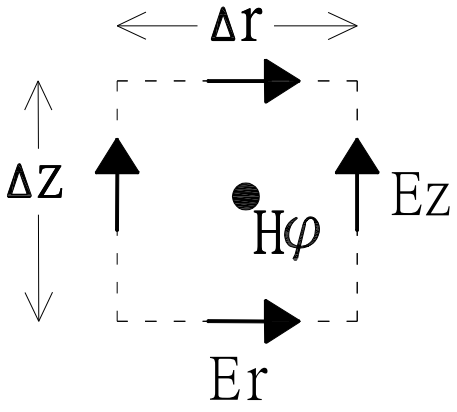


Figura 83. Celda de integración del campo magnético acimutal

Así, la discretización de la ecuación de faraday despreciando la conductividad magnética:

$$\mu \frac{H_{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_{\varphi}^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t}\Delta r\cdot\Delta z$$
$$= E_z^n\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)\cdot\Delta z - E_r^n(i+1/2,j+1)\cdot\Delta r$$
$$- E_z^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\cdot\Delta z + E_r^n(i+1/2,j)\cdot\Delta r \qquad \text{(A.11)}$$

Reorganizando en función de H_{φ}:

$$H_{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)$$
$$= H_{\varphi}^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{\Delta t}{\mu\Delta r}\left[E_z^n\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)-E_z^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$-\frac{\Delta t}{\mu\Delta r}\left[E_r^n\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)-E_r^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right] \qquad \text{(A.12)}$$

Referencias

[1] J. Gomez and M. Morcos, "Voltage Sag and Recovery Time in Repetitive Events," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 17, 2002, pp. 1037-1043.

[2] H. Torres, *El rayo. Mitos, leyendas, ciencia y tecnología*, UNIBIBLOS, 2002.

[3] F. Rachidi, C.A. Nucci, M. Ianoz, and C. Mazzeti, "Influence of Lossy Ground on Lightning Induced Voltages on Overhead Lines," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 38, 1996, pp. 250-264.

[4] M. Rubinstein and M. Uman, "Methods for Calculating Electromagnetic Fields from a Known Source Distribution," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 31, 1989.

[5] V. Cooray, "Horizontal Field generated by Return Strokes," *Radio Science*, vol. 27, 1992, pp. 529-537.

[6] D. Del Río, "Caracterización de las descargas eléctricas atmósféricas en regiones montañosas. Caso Manizales," 2010.

[7] PAAS UN, -. Universidad Nacional, Colciencias, and Codensa, *Mejoramiento de Índices de Calidad de los Circuitos de Distribución Rural de Codensa en Zonas de Alta Actividad Eléctrica Atmosférica*, Bogotá: 2006.

[8] M.N. Sadiku and A.F. Peterson, "A Comparison of Numerical Methods For Computing Electromagnetic Fields," *Proceeding - 1990 Southeastcon*, IEEE, 1990, pp. 42-47.

[9] J. Lee, R. Lee, and A. Cangellaris, "Time-Domain Finite-Element Methods," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, 1997, pp. 430-442.

[10] R. Thottappillil and V.A. Rakov, "Calculation of lightning electromagnetic fields: a review," *Current*.

[11] *The lightning Flash*, The Institution of Electrical Engineers, 2003.

[12] M.J. Master and M.A. Uman, "Transient electric and magnetic fields associated with establishing a finite electrostatic dipole," *Amer. J. Physics.*, vol. 51, 1983, pp. 118-126.

[13] M.A. Uman, D.K. Mclain, and E.P. Krider, "The Electromagnetic Radiation from a finite antenna," *AJP*, vol. 43, 1975.

[14] C. Bruce and R. Golde, "The Ligtning Discharge," *Journal of the Institution of electrical Engineers*, vol. 88, 1941.

[15] M. Uman and D. Mclain, "Magnetic Field of Lightning Return stroke," *Journal of Geophysical Research*, vol. 74, 1969.

[16] M. Uman and D. Mclain, "Calculations of Lightning Return Stroke Models.," *Journal of Geophysical Research*, vol. 85, 1985.

[17] M.J. Master, "Traveling Current Source model for LEMP Calculation," *6th Symposium and Technical Exhibition on Electromagnetic Compatibility. Zurich, Switzerland*, 1985.

[18] C.A. Nucci and F. Rachidi, "Experimental validation of a modification to the transmission line model for LEMP calculations," *8th International Symposium and Technical Exhibition on Electromagnetic Compatibility Zurich, Switzerland*, 1985.

[19] C.A. Nucci, C. Mazzeti, F. Rachidi, and M. Ianoz, "On lightning Return Stroke Models for LEMP Calculations," *19th International Conference on Lightning Protection (ICLP) Graz, Austria*, 1988.

[20] G. Diendorfer and M.A. Uman, "An Improved Return stroke Model with Specified Channel Base Current," *Journal of Geophysical Research*, vol. 95, 1981.

[21] V. Cooray, "A model for Subsequent Return Strokes," *Journal of Electrostatics*, vol. 30, 1993.

{Document Not In Library}

[22] F. Heidler, J. Cvetic, and B. Stanic, "Calculation of Lightning Current Parameters.," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 14, 1999.

[23] C. Yang and B. Zhou, "Calculation Methods of Electromagnetic Fields very Close to Lightning," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 46, 2004, pp. 133-141.

[24] M. Paolone, "Modeling of Lightning-Induced Voltages," *Distribution*, 2001.

[25] M. Rubinstein, "An Approximate Formula for the Calculation of the Horizontal Electric Field from Lightning at Close, Intermediate, and Long Range," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 38, 1996, pp. 12-16.

[26] R. Moini, S.H. Sadeghi, B. Kordi, and F. Rachidi, "An antenna-theory approach for modeling inclined lightning return stroke channels," *Electric Power Systems Research*, vol. 76, 2006, pp. 945-952.

[27] E. Pérez, "Avances en el Modelamiento y Experimentación de Tensiones Inducidas en Redes de Distribución," 2006.

[28] K.S. Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. Ap-14, 1966.

[29] A. Mimouni, F. Rachidi, and Z. Azzouz, "Electromagnetic environment in the inmediate vicinity of a lightning return stroke," *Journal of Lightning Research*, vol. 2, 2007, pp. 64-75.

[30] C.A. Sartori and J.R. Cardoso, "An Analytical-FDTD Method for Near LEMP Calculation," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 36, 2000, pp. 1631-1634.

[31] Y. Bo, Z. Bi-hua, C. Yong-guang, and M. Xin, "Influences of Mesh Size and Lightning Channel Length on Lightning Electromagnetic Field," *CEEM'2009/Xi'an*, 2009, pp. 349-352.

[32] "A finite-difference time-domain approach for the evaluation of electromagnetic fields radiated by lightning strikes to tall structures," *Journal of Electrostatics*, 2008, pp. 1-10.

[33] A. Elsherbeni and V. Demir, *The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics with MATLAB Simulations*, Scitech, 2008.

[34] A. Taflove and S.C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Boston-London: 2000.

[35] X. Li, B. Zhou, T. Yu, and G. Cheng, "Coupled Field Inside Shielding Enclosure With an Aperture Due to Nearby Lightning," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 49, 2007, pp. 133-142.

[36] B. Engquist and A. Majda, "Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of Waves.," *Mathematics of Computation*, vol. 31, pp. 629-651.

[37] G. Mur, "Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. emc-23, 1981, pp. 377-382.

[38] D. Weiping and L. Zhang, "An Improvement Algorithm of Mur's First-Order Absorbing Boundary Condition," *EMC Research Section*, pp. 592-595.

[39] T. Yu, Z. Qian, and C. Lu, "A Modified Liao ' s Absorbing Boundary Condition for FDTD Simulations in 2-D Cylindrical Coordinates with Rotational Symmetry," *IEEE 2007 International Symposium on*

Microwave, Antenna, Propagation, and EMC Technologies For wireless Communications, 2007, pp. 845-847.

[40] T. Yu, B. Zhou, and S. Liu, "A Modified Liao ' s Absorbing Boundary Condition with stabilization," *CEEM'2006/Dalian*, 2006, pp. 372-374.

[41] W. Cho and R.L. Wagner, *A modified Form of Liao's Absorbing Boundary Condition*, 1992.

[42] J. Berenger, "Three-Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves," *Journal of Cumputational Physics*, vol. 379, 1996, pp. 363-379.

[43] R. Proenca, "Desenvolvimento de uma interface integrada para o projeto e análise de antenas utilizando o método das diferencas finitas no domínio do tempo (FDTD)," *Interface*, 2006.

[44] E. Pérez and E. Soto, "Yaluk Draw."

[45] M. Paolone, "Modeling of Lightning-Induced Voltages on Distribution Networks for the Solution of Power Quality Problems, and Relevant Implementation in a Transient Program," *Distribution*, 2001.

[46] T. Noda, "Error in Propagation Velocity Due to Staircase Approximation of an Inclined Thin Wire in FDTD Surge Simulation," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 27, 2004, pp. 1063-1918.

[47] E. Soto, D. Del Rio, E. Perez, and C. Younes, "Lightning performance of overhead distribution network assessment using fuzzy ground flash density concept," *2008 IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America*, 2008, pp. 1-6.

[48] E. Soto and E. Pérez, "MULTILINEAR REGRESSION TECHNIQUE FOR LIGHTNING PERFORMANCE OF DISTRIBUTION NETWORKS ASSESSMENT," 2008, pp. 1-4.

[49] E. Perez and E. Soto, "International Conference on Grounding and Earthing & 3rd International Conference on Lightning Physics and Effects," 2008, pp. 3-6.

[50] A. Di Conti, E. Pérez, E. Soto, F. Silveira, and S. Visacro, "Calculation of Lightning-Induced Voltages on Overhead Distribution Lines Including Insulation Breakdown," *Journal IEEE Transactions on Power Delivery*, 2010.