EJERCICIOS RESUELTOS

1). Sí A es una matriz de orden n y existe B de orden n , tal que $AB = I_n$, - entonces A es no singular .

demostración .

Sabemos que $r(I_n) = n$, $\Rightarrow r(I_n) = r(AB) \leq \left.\begin{array}{l} r(A) \\ \leq r(B) \end{array}\right] \Rightarrow \quad n \leq r(A) \Rightarrow r(A) = n$, $\Rightarrow$

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ A es no singular.(no puede ser $> n$, pues A es de orden n)

2) . Sea $T : E^3 \longrightarrow E^3$, una transformación lineal , tal que :

$T(\vec{e}_1) = 5\vec{\varepsilon}_1 - 2\vec{\varepsilon}_2 + 3\vec{\varepsilon}_3$

$T(\vec{e}_2) = \vec{\varepsilon}_1 + 2\vec{\varepsilon}_3$

$T(\vec{e}_3) = 3\vec{\varepsilon}_1 + 4\vec{\varepsilon}_2$, donde los $\vec{\varepsilon}_i$ son los vectores unitarios de E^3 .

i) Encontrar la matriz A , que representa la transformación lineal T , tal que - $\vec{y} = T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

ii) Hallar la dimensión del rango de A .

iii) . Sí en lugar de usar para el dominio , la base unitaria , se usa la - base : $\left\{ \overset{\vec{a}_1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}, \overset{\vec{a}_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}, \overset{\vec{a}_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$. Cual seá la matriz A que caracteriza la transformacion T .

demostración

iSabemos que la matriz A asociada a T y relativa a las bases unitarias es :

$$A = (T(\vec{e}_1) , T(\vec{e}_2) , T(\vec{e}_3)) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ii). Como la dimensión del rango de A , se puede encontrar por el # máximo - de vectores columna L.I. de A . Entonces , se puede demostrar que los 3 vectores columna de A son L.I. , o también , observando que el $|A| \neq 0$, por tanto - la dimensión del rango de $A = r(A) = 3$

iii). En este caso , la matriz relativa a estas bases es :

$A = (T(\vec{a}_1) , T(\vec{a}_2) , T(\vec{a}_3))$, donde :

$$T(\vec{a}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = T\left[0.\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \right] = 0.T(\vec{e}_1) + 2T(\vec{e}_2) + 3T(\vec{e}_3)$$

reeplazando $T(\vec{e}_i)$, $i=1,2,3$ de la definición de T , de tiene :

$$T(\vec{a}_1) = 2\,(\vec{\varepsilon}_1 + 2\vec{\varepsilon}_3) + 3(\,3\vec{\varepsilon}_1 + 4\vec{\varepsilon}_2) = 11\vec{\varepsilon}_1 + 12\vec{\varepsilon}_2 + 4\vec{\varepsilon}_3 = [\,11,12,4\,]$$

en la misma forma podemos calcular $T(\vec{a}_2)$ y $T(\vec{a}_3)$:

$T(\vec{a}_2) = [11,6,3]$

$T(\vec{a}_3) = [9,2,5\,]$, luego $A = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 9 \\ 12 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

comprobación :

Sea $\vec{x} \in E^3$, entonces $\vec{x}$ expresado en terminos de la base considerada $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$

es : $\vec{x} = [\,x_1, x_2, x_3\,] = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$

$$T(\vec{x}) = T\,(\,x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3\,) = x_1T(\vec{a}_1) + x_2T(\vec{a}_2) + x_3T(\vec{a}_3)$$

$$= x_1\,[\,11,12,4\,] + x_2[\,11,6,3\,] + x_3[\,9,2,5\,]$$

$$= [\,11x_1+11x_2+9x_3\ ,\ 12x_1+6x_2+2x_3\ ,\ 4x_1+3x_2+5x_3\,]$$

Ahora ,

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 9 \\ 12 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = T(\vec{x})$$. Luego $A\vec{x} = T(\vec{x})$, $\forall\ \vec{x} \in E^3$

Ejercicio 3 .

Sea $T : E^3 \longrightarrow E^2$, una transformación lineal , definida por :

$T[\,(x,y,z)\,] = [\,3x+2y-4z\ ,\ x-5y+3z\,]$

i) Encontrar la matriz A que representa la transformación lineal T , relativa a las bases : $\left\{ \overset{\vec{v}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{\vec{v}_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overset{\vec{v}_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$ para E^3 y $\left\{ \overset{\vec{a}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}, \overset{\vec{a}_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}} \right\}$ para E^2

ii) Compruebe que A es la matriz asociada a la transformación T .

Solución

Sabemos que $A = (T(\vec{v}_1) , T(\vec{v}_2) , T(\vec{v}_3))$, donde cada $T(\vec{v}_i)$, $i=1,2,3$, debe - estar expresado en términos de la base considerada para E^2 .

Según la definición de T :

$$T(\vec{v}_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = [\,3(1) + 2(1) - 4(1) \;,\; 1-5(1) + 3(1)\,] = [1,-1]$$

$$T(\vec{v}_2) = T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = [\,5 \,,\, -4\,] \quad ; \; T(\vec{v}_3) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = [\,3 \,,\, 1]$$

Antes de entrar a expresar cada $T(\vec{v}_i)$ en términos de la base considerada para E^2 , debemos averiguar la forma como un vector cualquiera de E^2 , se expresa - en términos de la base $\{\vec{a}_1 \,,\, \vec{a}_2\}$.

Sea $[m,n] \in E^2$, entonces $[\,m,n\,] = x_1\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = [\,x_1+2x_2 \,,\, 3x_1+5x_2]$

por tanto : $m = x_1 + 2x_2 \;\wedge\; n = 3x_1 + 5x_2 \Longrightarrow x_1 = 2n-5m \;;\; x_2 = 3m-n$

luego (A) : $[\,m\,,n\,] = (\,2n-5m)\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + (3m-n\,)\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

Entonces : $T(\vec{v}_1) = [1\,,\,-1\,] = (2(-1)-5(1)\,)\vec{a}_1 + (3(1)-(-1)\,)\vec{a}_2 = -7\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2$

asi sucesivamente ,

$T(\vec{v}_2) = -33\vec{a}_1 + 19\vec{a}_2$

$T(\vec{v}_3) = -13\vec{a}_1 + 8\vec{a}_2$, luego la matriz $A = \begin{bmatrix}-7 & -33 & -13\\ 4 & 19 & 8\end{bmatrix}$

ii) debe cumplirse que : $A\vec{v} = T(\vec{v})$, $\forall\; \vec{v} \in E^3$.

Pero debemos tener presente que $\vec{v}$ tiene que estar expresado en términos de la base $\{\vec{v}_1 \,,\vec{v}_2 \,,\vec{v}_3\}$. Primero expresemos a $\vec{v} = (\,x,y,z) = x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+x_3\vec{v}_3 =$

$[\,x_1+x_2+x_3 \;,\; x_1+x_2 \,,\, x_1\,]$, entonces $\left.\begin{array}{l} x = x_1+x_2+x_3 \\ y = x_1 + x_2 \\ z = x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = z \\ x_2 = y-z \\ x_3 = x-y \end{array}$

O sea que : $\vec{v} = [\ z\ ,y-z\ ,x-y\ ]$, expresado en la base para e E^3

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{bmatrix}_{(3\times 1)} = \begin{bmatrix} -13x & -20y & +26z \\ 8x & +11y & -15z \end{bmatrix}_{(2\times 1)}$$

$$T(\vec{v}) \overset{\text{Por def } T}{=} [\ 3x+2y-4z\ ,x-5y+3z\ ] \overset{\text{Por } A}{=} (2(x-5y+3z)-5(3x+2y-4z))\vec{a}_1 +$$

$$(3(3x+2y-4z)-(x-5y+3z))\vec{a}_2 = (-13x-20y+26z)\vec{a}_1 + (8x+11y-15z)\vec{a}_2 ,$$

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} -13x & -20y & +26z \\ 8x & +11y & -15z \end{bmatrix}$$, por tanto $A\vec{v} = T(\vec{v})$

Ejercicios propuestos .

1).Sea $T : R^3 = E^3 \longrightarrow E^3$, la función Proyección en el plano XY , definida así $T(x,y,z) = (\ x,y,0\ )$. Pruebe que T es una transformación lineal .

2). Sea $T : E^2 \longrightarrow E^2$, la función Translación , definida por : $T(x,y) = (x+1,y+2)$. Analice y diga sí T es una transformación lineal

3). Sea $L : E^2 \longrightarrow E^2$, una transformación lineal , tal que envía un punto (x,y) en el punto $(\ x^1\ ,y^1)$, obtenido de (x,y) al hacer rotar el plano un - ángulo θ . Demuestre que la matriz A ,asociada a L y relativa a las bases - unitarias , esta dada por $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$