Soluciones de una Clase de Ecuaciones Integrales No-lineales en $L^{p(\cdot)}(a,b)$

por

David Ojeda Marulanda

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de Magíster en Matemáticas

Director: Edixon M. Rojas

Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Bogotá, 2016

RESUMEN. En esta tesis se demostrará la existencia y unicidad de soluciones de una clase de ecuaciones integrales no lineales de tipo de Volterra definidas sobre espacios de Lebesgue con exponente variable. Para lograr este objetivo impondremos condiciones de crecimiento sobre los operadores asociados a estas ecuaciones, lo que nos permitirá usar técnicas de punto fijo para suma de aplicaciones de tipo contractivo, así como también el método de estimación a priori (grado topológico para aplicaciones α-condensantes).

ABSTRACT. This thesis is devoted to the study of existence and uniqueness of solutions for a class of non-linear Volterra integral equations definided on the so-called variable Lebesgue spaces. To attaing our goals, we will impose growth conditions on the associated operators, which allow us to use fixed point techniques for sum of contractive mapping, as well as the method of a priori bounds.

PALABRAS CLAVE: Ecuación integral de Volterra, espacio de Lebesgue variable, aplicación contractiva, estimación a priori, grado topológico, punto fijo.

KEYWORDS: Volterra integral equations, variable Lebesgue space, contractive mapping, a priori estimate method, topological degree, fixed point.
MSC[2010]: 45D05, 46E30, 47H08, 47H09, 47H10, 47H11.

Índice general

Introducción **v**

1. Algunos Teoremas de Existencia de Punto Fijo **1**
1.1. Medida de no compacidad de Kuratowski 1
1.2. El grado topológico en la teoría del punto fijo 10
1.2.1. Grado de Brouwer 13
1.2.2. Grado de Leray-Schauder 15
1.2.3. Construcción del grado topológico para aplicaciones α–condensantes 19
1.3. Existencia de puntos fijos para la suma de dos aplicaciones de tipo contractivo 28

2. Espacios de Lebesgue con Exponente Variable **39**
2.1. El modular y las funciones exponentes 39
2.2. El espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 42
2.3. Embebimiento de $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 49
2.4. Desigualdad de Hölder y desigualdad integral de Minkowski 52
2.5. Convergencia en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 55
2.6. Completez y algunos subconjuntos densos en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 58
2.7. Criterio de compacidad de Kolmogorov 62

3. Algunos Operadores en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ **67**
3.1. El operador de Nemytskii 67
3.2. Continuidad y acotación del operador de superposición y un operador integral de Volterra 71
3.3. Compacidad del operador integral de Volterra G 76

4. Existencia de soluciones de ecuaciones integrales no lineales de Volterra **79**
4.1. Soluciones de la ecuación (4.1) vía el grado topológico de aplicaciones α-condensantes 80

4.2. Existencia y unicidad de soluciones de la ecuación (4.1) por medio de la suma de aplicaciones de tipo contractivo 83
4.3. Soluciones continuas de la ecuación (4.1) 90

Conclusión **95**

Bibliografía **97**

Agradecimientos

Quiero expresar mis agradecimientos a mi director Edixon M. Rojas, su ayuda fue fundamental en la consecución de este documento, primero en lo que se refiere a las cuestiones de forma, tales como la redacción y escritura de este trabajo el Latex, y segundo en las cuestiones de fondo, como son los resultados nuevos que se presentan en esta tesis.

Quiero también expresar mi gratitud al profesor José Francisco Caicedo por la lectura y corrección de esta tesis y por sus valiosas enseñanzas, las cuales fueron claves en la realización de la parte teórica de este trabajo.

Ademas, me gustaría manifestar mi gratitud al profesor René E. Castillo por la lectura del trabajo, por señalar errores presentes en el documento, así como por sus importantes sugerencias.

Finalmente, agradezco inmensamente a mi familia y compañera, a quienes dedico esta tesis. Sin su constante e incondicional apoyo habría sido imposible llevar a cabo este trabajo.

Introducción

El propósito de esta tesis es estudiar la existencia y unicidad de soluciones de la siguiente clase de ecuaciones integrales no lineales de Volterra

$$u(s) = \varphi(s, u(s)) + \mu \int_a^b \psi(s, t, u(t))ds, \ s \in (a, b), \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{1}$$

donde $\varphi : (a, b) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\psi : (a, b) \times (a, b) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de Carathéodory que satisfacen algunas condiciones de crecimiento. La idea principal es transformar la existencia de soluciones de la ecuación integral en un problema de existencia de puntos fijos de operadores de tipo contractivo sobre $L^{p(\cdot)}$. Haremos uso de la acotación y compacidad de los operadores relacionados con la ecuación (1), tales como el operador de Nemytskii y un operador integral de tipo Volterra, para usar resultados de punto fijo tanto para la suma de estos operadores, como teoría del grado topológico para aplicaciones α-condensantes. Analizaremos también la existencia de soluciones continuas para estas ecuaciones.

Las ecuaciones integrales de Volterra aparecen por primera vez en la literatura en 1896 (ver [67]) y desde entonces han sido extensamente estudiadas. (Ver p. ej., las monografías [5,12,16,30,35,37,39,41,46,53,54,64]). Parte de este interés proviene de la gran variedad de aplicaciones que pueden ser modelada mediante estas ecuaciones en diversas áreas del conocimiento, como por ejemplo en *semiconductores*, *reacciones químicas*, *elasticidad* y *dinámica de poblaciones* entre otras. Para conocer más sobre estas y otras aplicaciones en las cuales este tipo de ecuaciones juegan un rol principal recomendamos los trabajos, [4, 38, 45, 55, 56, 68].

El ambiente clásico para el estudio de estas ecuaciones son los espacios de Lebesgue $L^p(K)$ y el espacio de las funciones continuas $C(K)$. Las técnicas típicas utilizadas para dicho estudio son las de teoría de la medida e índice topológico para el caso de espacios de Lebesgue y métodos iterativos cuando las ecuaciones se consideran definidas en el espacios de funciones continuas. Quisiéramos recalcar que en versiones vectoriales de estos espacios (funciones Bochner integrables y funciones continuas matriz-valuadas) también se han podido establecer criterios de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones de tipo Volterra (ver [5]).

Por otro lado, en años recientes, ha quedado claro que los espacios clásicos de funciones no son suficientes para resolver los problemas contemporáneos de análisis tales como *elasticidad no lineal, modelamiento de varios flujos de fluidos, variación de corrientes y problemas de mecánica*. Sin embargo, la teoría de espacios de funciones con crecimiento no estándar, también conocidos como espacios de Lebesgue generalizados con exponente variable, han sido extensamente estudiados en años recientes (ver p. ej., [14,15,18] y sus referencias). Estos espacios surgieron en aplicaciones a la *mecánica de medios continuos* (en particular, en la *teoría de fluidos electroreológicos*). También surgen en la teoría de ecuaciones diferenciales y problemas variacionales. Muchos de los resultados en esta línea de investigación se resumen en las monografías [18, 63].

Si bien estos espacio fueron introducidos por W. Orlicz en 1931 ([52]), mucho del éxito en el resurgimiento del estudio de estos radica en la variedad de aplicaciones modeladas mediante ellos; por ejemplo, en *problemas en cálculo de variaciones integrales con condiciones de crecimiento no estándar y ecuaciones diferenciales con exponente variable*. Citamos aquí los trabajos [1–3, 6, 11, 13, 22–28, 36, 44, 69].

Esta tesis está estructurada en cuatro capítulos, en el primero de estos empezamos definiendo la *medida de no compacidad de Kuratowski*, con la cual podemos caracterizar las aplicaciones compactas, con estas a su vez podemos introducir una herramienta topológica conocida como *grado de Leray–Schauder* cuyas propiedades nos permitirán demostrar el Teorema del Punto Fijo de Schauder (Teorema 1.2.8), con una generalización de este resultado, el llamado Teorema del Punto Fijo de Schaefers, (Teorema 1.2.10), establecemos la existencia de soluciones continuas de la ecuación (1). La medida de no compacidad de Kuratowski también es importante en esta tesis pues permite introducir la noción de grado topológico para aplicaciones α*–condensantes*, este concepto es una extensión del grado de Leray–Schauder cuyas propiedades nos permitirán demostrar un resultado de punto fijo mediante la técnica de estimación a priori, la cual es una consecuencia de la invariaza bajo homotopía del grado definido para perturbaciones de la identidad α-condensantes (Teorema 1.2.13), con el cual podemos establecer que la ecuación en estudio tiene al menos una solución. Hasta este punto solo hemos utilizado la que es conocida como la teoría topológica del punto fijo, en la Sección 1.3 utilizamos la llamada teoría métrica del punto fijo, demostramos que la suma de dos aplicaciones de tipo contractivo es a su vez una aplicación de tipo contractiva, lo que nos permite utilizar resultados clásicos de la teoría métrica del punto fijo con los cuales podemos establecer la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación (1) sin el uso de la medida de Kuratowski, dos de estos resultados: Teoremas 1.3.6 y 1.3.8, en nuestro conocimiento no han sido demostrados anteriormente.

En el capítulo 2 introducimos los espacios de Lebesgue con exponente variable y demostramos algunas de las propiedades básicas de este espacio, las cuales serán útiles para

establecer la continuidad y acotación de los operadores relacionados con la ecuación integral objeto de estudio en esta tesis.

El capítulo 3 está dedicado a establecer la continuidad y acotación del operador de Nemytskii y un operador integral de Volterra, para este último operador establecemos además la compacidad, mediante el llamado criterio de compacidad de Kolmogorov–Tulajkov.

Empezamos el Capítulo 4 escribiendo la ecuación (1) en términos de los operadores de Nemytskii y de Volterra definidos en el Capítulo 3, de esta forma trasladamos el problema de encontrar las soluciones de la ecuación (1) a un problema de existencia de puntos fijos del operador definido como la suma de dichos operadores. De esta manera podemos aplicar los resultados del Capítulo 1 para demostrar la existencia de soluciones de la ecuación (1). Primero, gracias a la compacidad del operador integral de Volterra, podemos hacer uso de la teoría del grado topológico para aplicaciones α–*condensantes* (Teorema 1.2.11) y el correspondiente resultado de punto fijo mediante la técnica de estimación a priori, (Teorema 1.2.13), con el que establecemos la existencia de al menos una solución de la ecuación (1) (Teorema 4.1.1). Posteriormente, estableceremos ciertas condiciones de crecimiento sobre las funciones de Carathéodory $\varphi : (a,b) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\psi : (a,b) \times (a,b) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que los que los operadores de Nemytskii y Volterra asociados con estas funciones sean de tipo contractivo, para poder aplicar los Teoremas de la Sección 1.3. De esta forma, en el Teorema 4.2.6, demostramos que existe una única solución de la ecuación en estudio. Además, usando el Teorema 1.3.6 y el Teorema 1.3.8 respectivamente, obtenemos dos nuevos resultados de existencia unicidad para la ecuación (1), a saber, Teorema 4.2.7 y Teorema 4.2.8. Finalmente, en la Sección 4.3, usamos el Teorema del Punto Fijo de Schaefers y el Teorema del Punto Fijo de Banach para demostrar la existencia y unicidad de soluciones continuas de la ecuación en estudio.

Quisiéramos puntualizar que los resultados nuevos presentes en esta tesis aparecen en el trabajo del autor [51].

Capítulo 1

Algunos Teoremas de Existencia de Punto Fijo

En este capítulo desarrollamos técnicas topológicas y métricas que nos permitirán establecer algunos teoremas de punto fijo con los cuales analizaremos la existencia de soluciones de las ecuaciones integrales objeto de estudio en esta tesis.

1.1. Medida de no compacidad de Kuratowski

En la presente sección, a no ser que se especifique otra cosa, X representa un espacio de Banach de dimensión infinita con los números reales como campo de escalares.

Sabemos que no todo conjunto acotado es precompacto (=relativamente compacto); esto es, puede existir un conjunto acotado en X que no es precompacto, es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que A no puede ser cubierto por un número finito de conjuntos de diámetro menor que ϵ.

Lo anterior motiva la introducción de la llamada *medida de no compacidad* mencionada por primera vez por Kazimierz Kuratowski en 1930 (ver [47]), esta medida juega un papel clave en la teoría del grado topolológico para aplicaciones $\alpha - condensantes$. A continuación definimos esta medida y demostramos algunas de sus propiedades.

Definición 1.1.1. Sea X un espacio de Banach y $B \in \mathcal{B}(X)$, donde $\mathcal{B}(X)$ denota a la familia de todos los subconjuntos acotados de X, la función $\alpha : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty)$ dada por

$$\alpha(B) := \text{ínf}\{d > 0 : B \text{ admite un cubrimiento } finito \text{ por conjuntos de diámetro} \leq d\},$$

es llamada *medida de no compacidad de Kuratowski.*

La medida de no compacidad de Kuratowski satisface las siguientes propiedades.

Proposición 1.1.1. *Sea X un espacio de Banach y $B \in \mathcal{B}(X)$. Entonces,*

(a) $\alpha(B) = 0$ *si y solo si B es relativamente compacto.*

(b) α *es una semi norma, es decir para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(X)$,* $\alpha(\lambda B) = |\lambda|\alpha(B)$ *y* $\alpha(B_1 + B_2) \leq \alpha(B_1) + \alpha(B_2)$.

(c) *Si* $B_1 \subseteq B_2$, *entonces* $\alpha(B_1) \leq \alpha(B_2)$.

(d) $\alpha(B_1 \cup B_2) = \text{máx}\{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\}$.

(e) $\alpha(B) = \alpha(\text{conv}(B))$, *donde* $\text{conv}(B)$ *es la cápsula convexa de B.*

(f) $\alpha\left(\overline{B}\right) = \alpha(B)$, *siendo $\overline{B}$ la adherencia de B.*

Demostración. (a) Supongamos que B es relativamente compacto, o de manera equivalente, que B es precompacto; es decir, dado $\epsilon > 0$ existe un conjunto $\{b_1, \ldots, b_N\} \subseteq B$ tal que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(b_i, \epsilon/2)$, donde $B(b_i, \epsilon/2)$ es la bola abierta con centro en b_i y radio $\epsilon/2$. Esto significa que B tiene un cubrimiento finito por conjuntos de diámetro $d = \text{diam}(B(b_i, \epsilon/2)) = \epsilon$, y como $\alpha(B)$ es el menor de tales números, tenemos que

$$0 \leq \alpha(B) < \epsilon, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Esto es, $\alpha(B) = 0$.

Ahora demostremos la otra implicación. Consideremos el conjunto F dado por

$$F = \{d > 0 : B \textit{ admite un cubrimiento finito por conjuntos de diámetro} \leq d\},$$

por las propiedades del ínfimo de un conjunto, dado $\epsilon > 0$ existe $d \in F$ tal que

$$\alpha(B) \leq d < \alpha(B) + \epsilon$$

y por definición de medida de Kuratowski, existe un cubrimiento finito $\{M_1, \ldots, M_m\}$ de B con $\text{diam}(M_i) \leq d$. Pero $d < \alpha(B) + \epsilon = 0 + \epsilon = \epsilon$, esto es $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} M_i$ donde $\text{diam}(M_i) < \epsilon$. Es decir B es precompacto y por lo tanto relativamente compacto.

(b) Si $\lambda = 0$ la proposición es inmediata. Supongamos entonces que $\lambda \neq 0$. Como antes, sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $d \in F$ tal que

$$\alpha(B) \leq d < \alpha(B) + \frac{\epsilon}{|\lambda|}$$

y conjuntos $M_1, \ldots, M_m$ con $\text{diam}(M_i) \leq d$, tales que $B \subseteq M_1 \cup \cdots \cup M_m$.

Luego, $\lambda B \subseteq (\lambda M_1) \cup \cdots \cup (\lambda M_m)$ y $\text{diam}(\lambda M_i) = |\lambda|\text{diam}(M_i) \leq |\lambda| d$. Lo cual implica que $\alpha(\lambda B) \leq |\lambda| d$. Así tenemos que

$$\alpha(\lambda B) < |\lambda|\alpha(B) + \epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Dado que ϵ es arbitrario, concluimos que $\alpha(\lambda B) \leq |\lambda|\alpha(B)$. Demostremos la otra desigualdad. Dado $\epsilon > 0$, existe $d > 0$ tal que

$$\alpha(\lambda B) \leq d < \alpha(\lambda B) + \epsilon$$

y conjuntos $M_1, \ldots, M_m$ con $\text{diam}(M_i) \leq d$, tales que $\lambda B \subseteq M_1 \cup \cdots \cup M_m$. Esto implica que

$$B \subseteq \frac{1}{\lambda}M_1 \cup \cdots \cup \frac{1}{\lambda}M_m \text{ con } \text{diam}(\frac{1}{\lambda}M_i) = \frac{1}{|\lambda|}\text{diam}(M_i) \leq \frac{d}{|\lambda|},$$

lo que a su vez significa que $\alpha(B) \leq d/|\lambda|$. Por lo tanto, $|\lambda|\alpha(B) \leq d < \alpha(\lambda B) + \epsilon$ entonces $|\lambda|\alpha(B) \leq \alpha(\lambda B) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Esto es $|\lambda|\alpha(B) \leq \alpha(\lambda B)$. Demostremos ahora la desigualdad triangular. Dado $\epsilon > 0$ existen $d_1, d_2 > 0$ tales que

$$\alpha(B_1) \leq d_1 < \alpha(B_1) + \frac{\epsilon}{2}\ ,\ \alpha(B_2) \leq d_2 < \alpha(B_2) + \frac{\epsilon}{2}$$

y cubrimientos finitos $\{M_1, \ldots, M_m\}$ y $\{N_1, \ldots, N_n\}$ de B_1 y B_2 respectivamente tales que $\text{diam}(M_i) \leq d_1$ y $\text{diam}(N_j) \leq d_2$. Entonces,

$$\alpha(B_1) + \alpha(B_2) \leq d_1 + d_2 < \alpha(B_1) + \alpha(B_2) + \epsilon.$$

Además, como

$$B_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} M_i \text{ y } B_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} N_j, \text{ entonces } B_1 + B_2 \subseteq \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (M_i + M_j),$$

donde $I = \{1, \ldots, m\}$, $J = \{1, \ldots, n\}$ y dado que el diámetro es una seminorma, tenemos que $\text{diam}(M_i + M_j) \leq \text{diam}(M_i) + \text{diam}(M_j) \leq d_1 + d_2$. De esta forma hemos encontrado un cubrimiento finito de $B_1 + B_2$ por conjuntos de diámetro menor o igual que $d_1 + d_2$. Por lo tanto,

$$\alpha(B_1 + B_2) \leq d_1 + d_2,$$

así tenemos que $\alpha(B_1 + B_2) < \alpha(B_1) + \alpha(B_2) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. De este modo concluimos que

$$\alpha(B_1 + B_2) \leq \alpha(B_1) + \alpha(B_2).$$

(c) Sea $d > 0$ para el cual existe un cubrimiento finito $\{M_1, \ldots, M_m\}$ de B_2 con $\text{diam}(M_i) \leq d$. Como B_1 es un subconjunto de B_2, tenemos un cubrimiento finito de B_1 por conjuntos de diámetro menor o igual que d, lo que significa que $\alpha(B_1) \leq d$. Dado que d es arbitrario, $\alpha(B_2) \geq \alpha(B_1)$.

(d) Por el ítem (c) $\alpha(B_1), \alpha(B_2) \leq \alpha(B_1 \cup B_2)$, por lo tanto tenemos que

$$\text{máx}\{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\} \leq \alpha(B_1 \cup B_2).$$

Recíprocamente, dado $\epsilon > 0$ existen d_1, d_2 tales que

$$\alpha(B_1) \leq d_1 < \alpha(B_1) + \epsilon \ , \ \alpha(B_2) \leq d_2 < \alpha(B_2) + \epsilon.$$

Sea $d = \text{máx}\{d_1, d_2\}$. Como

$$d_1 < \alpha(B_1) + \epsilon \leq \text{máx}\{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\} + \epsilon$$

y

$$d_2 < \alpha(B_2) + \epsilon \leq \text{máx}\{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\} + \epsilon,$$

concluimos que

$$d < \text{máx}\{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\} + \epsilon.$$

Por otro lado, $B_1 \subseteq M_1 \cup \cdots \cup M_m$, $B_2 \subseteq N_1 \cup \cdots \cup N_n$, donde $\text{diam}(M_i) \leq d_1$ y $\text{diam}(N_j) \leq d_2$, con lo cual

$$B_1 \cup B_2 \subseteq M_1 \cup \cdots \cup M_m \cup N_1 \cup \cdots \cup N_n,$$

donde $\text{diam}(M_i) \leq d$ y $\text{diam}(N_j) \leq d$. Tenemos entonces que

$$\alpha(B_1 \cup B_2) \leq d.$$

Por lo tanto, $\alpha(B_1 \cup B_2) < \text{máx}\{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\} + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, así

$$\alpha(B_1 \cup B_2) \leq \text{máx}\{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\}.$$

Nótese que en general se cumple:

Corolario 1.1.2. *Si $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(X)$, entonces*

$$\alpha(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = \text{máx}\{\alpha(B_1), \ldots, \alpha(B_n)\}.$$

Antes de demostrar el ítem (e) debemos establecer los siguientes lemas.

Lema 1.1.3. *Si A y B son subconjuntos de un espacio normado X. Entonces*

$$\bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} [\lambda A + (1-\lambda)B] \subseteq \text{conv}(A \cup B).$$

La igualdad se tiene si A y B son conjuntos convexos.

Demostración. Sea $C = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} [\lambda A + (1-\lambda)B]$, sea $z \in C$. Entonces existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $z = \lambda a + (1-\lambda)b$ con $a \in A$ y $b \in B$, de modo que $a, b \in A \cup B \subseteq \text{conv}(A \cup B)$, y al ser la cápsula convexa siempre un conjunto convexo tenemos que $z \in \text{conv}(A \cup B)$. Por lo tanto $C \subseteq \text{conv}(A \cup B)$. Supongamos ahora que A y B son conjuntos convexos y sea $z \in \text{conv}(A \cup B)$. Si $z \in A \cup B$, como $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$, tenemos tres casos: si $z \in A - B$, $z = a(1) + (1-1)b$, $a \in A$, $b \in B$, entonces $z \in C$. De manera similar si $z \in B - A$, $z = a(1-1) + (1)b$, $a \in A$, $b \in B$, con lo cual $z \in C$, finalmente si $z \in A \cap B$, $z = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z$, $z \in A$, $z \in B$, por lo tanto $z \in C$. En conclusión si $z \in A \cup B$, $z \in C$.

Supongamos que $z \notin A \cup B$. Como $z \in \text{conv}(A \cup B)$, $z = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ con $x_i \in A \cup B$ y $\sum \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$. Sea $I_A := \{i : x_i \in A\}$ e $I_B := \{j : x_j \in B\}$. Si $\varphi = \sum_{i \in I_A - I_B} \lambda_i$ y $\beta = \sum_{j \in I_B} \lambda_j$, entonces $\varphi + \beta = 1$. Afirmamos que $\varphi > 0$ puesto que si $\varphi = 0$ entonces $\lambda_i = 0$ para todo $i \in I_A - I_B$ con lo cual $z = \sum_{j \in I_B} \lambda_j x_j$ donde $\lambda_j \geq 0$ y $\sum_{j \in I_B} \lambda_j = 1$, y por la convexidad de B tendríamos que $z \in B$ contradiciendo lo supuesto. De la misma forma, la convexidad de A implica que $\varphi < 1$. Por lo tanto $\varphi > 0$ y $1 - \varphi > 0$, y al definir $a = \frac{1}{\varphi} \sum_{i \in I_A - I_B} \lambda_i x_i$ y $b = \frac{1}{1-\varphi} \sum_{j \in I_B} \lambda_j x_j$, vemos que $a \in A$, $b \in B$, y $z = \varphi a + (1 - \varphi) b$. Esto es $z \in C$. □

Lema 1.1.4. *Si C_1 y C_2 son subconjuntos convexos y acotados de un espacio normado X, entonces*

$$\alpha(\text{conv}(C_1 \cup C_2)) \leq \text{máx}\{\alpha(C_1), \alpha(C_2)\}.$$

Demostración. Como $C_1 - C_2 := \{a - b : a \in C_1, b \in C_2\}$ es acotado, existe $r > 0$ tal que $\|x\| \leq r$ para todo $x \in C_1 - C_2$. Dado $\epsilon > 0$, la colección $\{B(x, \epsilon) : x \in [0,1]\}$ es un cubrimiento abierto del intervalo $[0,1]$. Luego por compacidad podemos encontrar $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ en $[0,1]$ tal que $[0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(\lambda_i, \frac{\epsilon}{r})$. Afirmamos que

$$\bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} [\lambda C_1 + (1 - \lambda) C_2] = \bigcup_{i=1}^{p} [\lambda_i C_1 + (1 - \lambda_i) C_2 + \overline{B}(0, \epsilon)],$$

donde $\overline{B}(0, \epsilon)$ es la bola cerrada con centro 0 y radio ϵ. Sea $z \in \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} [\lambda C_1 + (1 - \lambda) C_2]$, entonces existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $z = \lambda c_1 + (1 - \lambda) c_2$ con $c_1 \in C_1$ y $c_2 \in C_2$. Cómo $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{p} B(\lambda_i, \frac{\epsilon}{r})$, existe $k \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $\lambda \in B(\lambda_k, \frac{\epsilon}{r})$. Luego

$$\begin{aligned} z &= \lambda c_1 + (1 - \lambda) c_2 \\ &= (\lambda - \lambda_k + \lambda_k) c_1 + (1 - (\lambda - \lambda_k + \lambda_k)) c_2 \\ &= (\lambda - \lambda_k) c_1 + \lambda_k c_1 + c_2 - (\lambda - \lambda_k) c_2 - \lambda_k c_2 \\ &= \lambda_k c_1 + c_2 - \lambda_k c_2 + (\lambda - \lambda_k)(c_1 - c_2) \\ &= \lambda_k c_1 + (1 - \lambda_k) c_2 + (\lambda - \lambda_k)(c_1 - c_2). \end{aligned}$$

Ahora sea $w = (\lambda - \lambda_k)(c_1 - c_2)$. Cómo $\lambda \in B(\lambda_k, \frac{\epsilon}{r})$ tenemos que $|\lambda - \lambda_k| < \frac{\epsilon}{r}$, ademaś $(c_1 - c_2) \in C_1 - C_2$, con lo cual $\|c_1 - c_2\| \leq r$. Por lo tanto, tenemos que

$\|w\| = |\lambda - \lambda_k|\|c_1 - c_2\| \leq r\frac{\epsilon}{r} = \epsilon$, esto es $w \in \overline{B}(0,\epsilon)$. De modo que $z = z_k + w$ donde $z_k = \lambda_k c_1 + (1-\lambda_k)c_2 \in \bigcup_{i=1}^{p}[\lambda_i C_1 + (1-\lambda_i)C_2]$ y $w \in \overline{B}(0,\epsilon)$. Esto es,

$$z \in \bigcup_{i=1}^{p}[\lambda_i C_1 + (1-\lambda_i)\, C_2 + \overline{B}(0,\epsilon)].$$

Además, por el Lema 1.1.3, la convexidad de C_1 y C_2, implica que

$$\operatorname{conv}(C_1 \cup C_2) = \bigcup_{0\leq\lambda\leq 1}[\lambda C_1 + (1-\lambda)\, C_2].$$

Por lo tanto, por el ítem (c), concluimos que

$$\alpha(\operatorname{conv}(C_1 \cup C_2)) \leq \alpha(\bigcup_{i=1}^{p}[\lambda_i C_1 + (1-\lambda_i)\, C_2 + \overline{B}(0,\epsilon)]).$$

Ahora por el Corolario 1.1.2

$$\alpha(\bigcup_{i=1}^{p}[\lambda_i C_1 + (1-\lambda_i)\, C_2 + \overline{B}(0,\epsilon)]) = \max_{1\leq i\leq p}\alpha(\lambda_i C_1 + (1-\lambda_i)\, C_2 + \overline{B}(0,\epsilon)).$$

Como el máximo se alcanza en algún $k \in \{1,\ldots,p\}$, tenemos que

$$\max_{1\leq i\leq p}\alpha(\lambda_i C_1 + (1-\lambda_i)\, C_2 + \overline{B}(0,\epsilon)) = \alpha(\lambda_k C_1 + (1-\lambda_k)\, C_2 + \overline{B}(0,\epsilon)),$$

además α es una seminorma, por lo que

$$\alpha(\lambda_k C_1 + (1-\lambda_k)\, C_2 + \overline{B}(0,\epsilon)) \leq \alpha(\lambda_k C_1) + \alpha((1-\lambda_k)C_2) + \alpha(\overline{B}(0,\epsilon))$$

y

$$\alpha(\lambda_k C_1) = \lambda_k \alpha(C_1) \leq \lambda_k \operatorname{máx}\{\alpha(C_1), \alpha(C_2)\}.$$

De manera similar

$$\alpha((1-\lambda_k)C_1) = (1-\lambda_k)\alpha(C_2) \leq (1-\lambda_k)\operatorname{máx}\{\alpha(C_1), \alpha(C_2)\}.$$

De tal forma que

$$\alpha(\lambda_k C_1) + \alpha((1-\lambda_k)C_2) \leq \operatorname{máx}\{\alpha(C_1), \alpha(C_2)\}.$$

Por último, como $\alpha(\overline{B}(0,\epsilon)) \leq 2\epsilon$ concluimos que

$$\alpha(\operatorname{conv}(C_1 \cup C_2)) \leq \operatorname{máx}\{\alpha(C_1), \alpha(C_2)\} + 2\epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

De donde concluimos que

$$\alpha(\operatorname{conv}(C_1 \cup C_2)) \leq \operatorname{máx}\{\alpha(C_1), \alpha(C_2)\}.$$

□

El siguiente corolario generaliza el lema anterior.

Corolario 1.1.5. *Si $B_1, \ldots, B_n$ son subconjuntos convexos y acotados de un espacio normado X, entonces*

$$\alpha\left(\operatorname{conv}\left(C_1 \cup \cdots \cup C_n\right)\right) \leq \operatorname{máx}\left\{\alpha\left(C_1\right), \ldots, \alpha\left(C_n\right)\right\}. \tag{1.1}$$

Demostración. Utilizaremos inducción matemática. Primero que todo notemos que cuando $n = 2$ la desigualdad (1.1) es el Lema 1.1.4. Supongamos Ahora que la desigualdad (1.1) se tiene para $n = k - 1$, esto es

$$\alpha\left(\operatorname{conv}\left(C_1 \cup \cdots \cup C_{k-1}\right)\right) \leq \operatorname{máx}\left\{\alpha\left(C_1\right), \ldots, \alpha\left(C_{k-1}\right)\right\}.$$

Por propiedades de la cápsula convexa

$$\operatorname{conv}(A \cup B) = \operatorname{conv}[\operatorname{conv}(A) \cup \operatorname{conv}(B)].$$

Sea $C = C_1 \cup \cdots \cup C_{k-1}$. Entonces

$$\alpha[\operatorname{conv}(C \cup C_k)] = \alpha\left\{\operatorname{conv}[\operatorname{conv}(C) \cup \operatorname{conv}(C_k)]\right\} = \alpha\left\{\operatorname{conv}[\operatorname{conv}(C) \cup C_k]\right\}.$$

Ahora, puesto que tanto $\operatorname{conv}(C)$ como C_k son convexos, el Lema 1.1.4 garantiza que

$$\alpha\left\{\operatorname{conv}[\operatorname{conv}(C) \cup C_k]\right\} \leq \operatorname{máx}\left\{\alpha[\operatorname{conv}(C)], \alpha(C_k)\right\}.$$

Pero se supuso que (1.1) es válida para $n = k - 1$, de modo que

$$\alpha(\operatorname{conv}(C)) \leq \operatorname{máx}\left\{\alpha\left(C_1\right), \ldots, \alpha\left(C_{k-1}\right)\right\} \leq \operatorname{máx}\left\{\alpha\left(C_1\right), \ldots, \alpha\left(C_k\right)\right\}.$$

Como también $\alpha(C_k) \leq \operatorname{máx}\left\{\alpha\left(C_1\right), \ldots, \alpha\left(C_k\right)\right\}$, concluimos que

$$\alpha\left(\operatorname{conv}\left(C_1 \cup \cdots \cup C_k\right)\right) = \alpha\left(\operatorname{conv}\left(C \cup C_k\right)\right) \leq \operatorname{máx}\left\{\alpha\left(C_1\right), \ldots, \alpha\left(C_k\right)\right\}.$$

Por consiguiente (1.1) es válida para $n = k$. □

Retomemos la demostración de la Proposición 1.1.1.

(e) Como $B \subseteq \operatorname{conv}(B)$, por el ítem (c), $\alpha(B) \leq \alpha(\operatorname{conv}(B))$. Demostremos entonces la otra desigualdad. Dado $\epsilon > 0$ existe $d > 0$ tal que

$$\alpha(B) \leq d < \alpha(B) + \epsilon$$

y conjuntos $M_1, \ldots, M_n$ tales que $B \subseteq M_1 \cup \cdots \cup M_n$ con $\operatorname{diam}(M_i) \leq d$. Podemos suponer que los M_i son convexos ya que

$$M_1 \cup \cdots \cup M_n \subseteq \operatorname{conv}(M_1) \cup \cdots \cup \operatorname{conv}(M_n)$$

y $\operatorname{diam}(\operatorname{conv}(M_i)) = \operatorname{diam}(M_i) \leq d$. Ahora por el Corolario 1.1.5

$$\alpha\left(\operatorname{conv}\left(M_1 \cup \cdots \cup M_n\right)\right) \leq \operatorname{máx}\left\{\alpha\left(M_1\right), \ldots, \alpha\left(M_n\right)\right\},$$

pero $\alpha(M_i) \leq d$, por lo que $\operatorname{máx}\left\{\alpha\left(M_1\right), \ldots, \alpha\left(M_n\right)\right\} \leq d$. Por lo tanto, tenemos que $\alpha\left(\operatorname{conv}\left(M_1 \cup \cdots \cup M_n\right)\right) \leq d$, luego

$$\alpha(\operatorname{conv}(B)) \leq \alpha(\operatorname{conv}(M_1 \cup \cdots \cup M_n)) \leq d.$$

De modo que $\alpha(\text{conv}(B)) \leq \alpha(B) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. De donde $\alpha(\text{conv}(B)) \leq \alpha(B)$.
(f) Como $B \subseteq \overline{B}$, $\alpha(B) \leq \alpha(\overline{B})$. Por otro lado, dado $\epsilon > 0$ existe, $d > 0$ tal que

$$\alpha(B) \leq d < \alpha(B) + \epsilon$$

y conjuntos $M_1, \ldots, M_n$ tales que $B \subseteq M_1 \cup \cdots \cup M_n$ con $\text{diam}(M_i) \leq d$. Luego

$$\overline{B} \subseteq \overline{M_1} \cup \cdots \cup \overline{M_n} \text{ y } \text{diam}(\overline{M_i}) = \text{diam}(M_i) \leq d,$$

por lo tanto $\alpha(\overline{B}) \leq d$ y entonces $\alpha(\overline{B}) \leq \alpha(B) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ con lo cual $\alpha(\overline{B}) \leq \alpha(B)$. □

Una importante propiedad de la medida de no compacidad de Kuratowski viene dada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.1. La medida de Kuratowski es invariante bajo traslaciones esto es, dados $x \in X$, y $B \in \mathcal{B}(X)$ tenemos que

$$\alpha(B) = \alpha(x + B).$$

En efecto, al aplicar el ítem (b) y luego el ítem (a) de la proposición anterior obtenemos $\alpha(x + B) = \alpha(\{x\} + B) \leq \alpha(\{x\}) + \alpha(B) = \alpha(B)$. Por lo tanto $\alpha(x + B) \leq \alpha(B)$. Una nueva aplicación de los ítems anteriores nos da $\alpha(B) = \alpha(-x + x + B) \leq \alpha(\{-x\}) + \alpha(x + B) = \alpha(x + B)$. Así $\alpha(B) \leq \alpha(x + B)$.

Las nociones que introduciremos a continuación se utilizarán en la construcción del grado topológico para aplicaciones $\alpha - \textit{condensantes}$.

Definición 1.1.2. Sean X, Y espacios de Banach y $\Omega \subseteq X$. Denotamos por $C(\Omega, Y)$ a la familia de todas las funciones continuas $F : \Omega \to Y$, en el caso en que $X = Y$, escribimos $C(\Omega)$ en vez de $C(\Omega, X)$ para denotar la clase de todas las funciones continuas $F : \Omega \to X$. Una aplicación $F : \Omega \to Y$ se dice compacta si es continua y $F(\Omega)$ es relativamente compacto. Denotamos por $\mathcal{K}(\Omega, Y)$, a la clase de todas las aplicaciones compactas $F : \Omega \to Y$, nuevamente escribimos $\mathcal{K}(\Omega)$ en vez de $\mathcal{K}(\Omega, X)$.

Definición 1.1.3. Sea X un espacio de Banach, $\Omega \subseteq X$ y $F : \Omega \to X$ una aplicación continua y acotada. F es llamada $\alpha - \textit{Lipschitz}$ si existe $k \geq 0$ tal que

$$\alpha(F(B)) \leq k\alpha(B) \text{ para todo } B \in \mathcal{B}(\Omega),$$

si además $k < 1$, entonces decimos que F es una *α–contracción estricta*. Una aplicación F es *α–condensante* si

$$\alpha(F(B)) < \alpha(B) \text{ para todo } B \in \mathcal{B}(\Omega) \text{ con } \alpha(B) > 0.$$

Denotamos por $SC_\alpha(\Omega)$ a la clase de todas $\alpha - \textit{contracciones estrictas } F : \Omega \to X$ y por $C_\alpha(\Omega)$ a la clase de todas las aplicaciones $\alpha - \textit{condensantes } F : \Omega \to X$.

Definición 1.1.4. Sean X, Y conjuntos arbitrarios, $J = [0,1]$, y $f, g : X \to Y$ funciones. Una homotopía afín es una función continua $h : J \times X \to Y$ tal que $h(0,x) = f(x)$ y $h(1,x) = g(x)$ para todo $x \in X$. En tal caso decimos que f y g son homotópicamente equivalentes.

Proposición 1.1.6. *Toda homotopía afín entre aplicaciones $\alpha-$condensantes es a su vez $\alpha-$condensante, es decir para todo $B \subseteq \overline{\Omega}$ con $\alpha(B) > 0$ tenemos que*

$$\alpha(H([0,1] \times B)) < \alpha(B).$$

Además, si $F, G : \overline{\Omega} \to X$ son solo aplicaciones compactas, entonces H es una aplicación compacta.

Demostración. En efecto, sea Ω un subconjunto abierto y acotado de un espacio de Banach X y sean $F, G \in C_\alpha(\overline{\Omega})$. Definamos $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ dada por

$$H(t,x) = (1-t)Fx + tGx,$$

entonces H es una homotopía afín y para todo $B \subseteq \overline{\Omega}$ con $\alpha(B) > 0$ tenemos que

$$H([0,1] \times B) \subseteq \operatorname{conv}(F(B) \cup G(B)),$$

de hecho, por el Lema 1.1.3,

$$H(t,x) = (1-t)Fx + tGx \in (1-t)F(B) + tG(B) \subseteq \operatorname{conv}(F(B) \cup G(B)).$$

Con lo cual por la Proposición 1.1.1

$$\begin{aligned} \alpha(H([0,1] \times B)) &\leq \alpha(\operatorname{conv}(F(B) \cup G(B))) \\ &= \alpha((F(B) \cup G(B)) \\ &= \operatorname{máx}\{\alpha(F(B)), \alpha(G(B))\}. \end{aligned}$$

Ahora bien como $F, G \in C_\alpha(\overline{\Omega})$ tenemos que $\alpha(F(B)) < \alpha(B)$ y $\alpha(G(B)) < \alpha(B)$, de donde

$$\alpha(H([0,1] \times B)) \leq \operatorname{máx}\{\alpha(F(B)), \alpha(G(B))\} < \alpha(B).$$

Esto es H es $\alpha-$*condensante*.
Ahora, si $F, G : \overline{\Omega} \to X$ son aplicaciones compactas tenemos que

$$\alpha(H([0,1] \times \overline{\Omega})) \leq \operatorname{máx}\left\{\alpha(F(\overline{\Omega})), \alpha(G(\overline{\Omega}))\right\} = 0,$$

es decir H es una aplicación compacta. □

Proposición 1.1.7. *Si $F, G : \Omega \to X$ son aplicaciones $\alpha-$Lipschitz con constantes k y k', entonces $F + G : \Omega \to X$ es $\alpha-$Lipschitz con constante $k + k'$.*

Demostración. Tenemos que

$$\alpha(F(B)) \leq k\alpha(B) \text{ y } \alpha(G(B)) \leq k'\alpha(B),$$

entonces

$$\alpha(F(B)) + \alpha(G(B)) \leq (k + k')\alpha(B)$$

y $\alpha((F + G))(B) = \alpha(F(B) + G(B)) \leq \alpha(F(B)) + \alpha(G(B)) \leq (k + k')\alpha(B)$.
Esto es $F + G : \Omega \to X$ es $\alpha - Lipschitz$ con constante $k + k'$. □

Proposición 1.1.8. *Si $F : \Omega \to X$ es una aplicación compacta, entonces F es $\alpha - Lipschitz$ con constante $k = 0$.*

Demostración. Al ser F una aplicación compacta, $F(\Omega)$ es relativamente compacto. Luego por Proposición 1.1.1(a), $\alpha(F(\Omega)) = 0$. Ahora si $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ por Proposición 1.1.1(b) $\alpha(F(B)) \leq \alpha(F(\Omega)) = 0$ con lo cual $\alpha(F(B)) = 0 \leq 0 \cdot \alpha(B)$. Por lo tanto F es $\alpha - Lipschitz$ con constante $k = 0$. □

Proposición 1.1.9. *Si F es Lipschitz con constante k, entonces F es $\alpha - Lipschitz$ con constante k.*

Demostración. Si F es *Lipschitz* con constante k tenemos que

$$\|Fx - Fy\| \leq k\|x - y\| \text{ para todo } x, y \in \Omega,$$

entonces tomando el supremo sobre todos los $x, y \in \Omega$ tenemos que

$$\sup_{x,y\in B} \|Fx - Fy\| \leq \sup_{x,y\in B} k\|x - y\| = k \sup_{x,y\in B} \|x - y\|,$$

es decir $\text{diam}(F(B)) \leq k\text{diam}(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$. Ahora tomando el ínfimo de todos los diámetros de los conjuntos que cubren $F(B)$ tenemos que,

$$\alpha(F(B)) \leq \text{diam}(F(B)) \leq k\text{diam}(B).$$

Finalmente tomando el ínfimo sobre todos los diámetros de los conjuntos que cubren a B tenemos que $\alpha(F(B)) \leq k\alpha(B)$, lo que termina la demostración. □

1.2. El grado topológico en la teoría del punto fijo

En muchos casos la solución de una ecuación funcional no se puede dar explícitamente, por esta razón, se utilizan métodos topológicos y analíticos que permiten tener una información cualitativa de la solución o soluciones de la ecuación. Por ejemplo, sea $f : X \to Y$ una función y supongamos que queremos analizar el conjunto de soluciones de la ecuación

$$f(x) = y,$$

a la cual exigiremos las siguientes restricciones: La función f es continua en un subconjunto abierto y acotado Ω de X, y es un valor dado de Y tal que $y \notin f(\partial\Omega)$. A la tripla conformada por la función f, el conjunto Ω y el valor dado y, la llamaremos *admisible* y a la colección conformada por las triplas de esta forma, *familia admisible de triplas*; a cada tripla de dicha familia queremos asociar un entero $d(f, \Omega, y)$, llamado *grado de f relativo al conjunto* Ω, tal que las propiedades de la función d permitan dar solución a tres preguntas básicas:

(i) ¿Existe al menos un $x \in \Omega$ que es solución de la ecuación?

(ii) ¿Cómo están distribuidas las soluciones sobre el conjunto Ω?

(iii) ¿Cómo dependen dichas soluciones de la función f y de y?

Lo primero es notar que si $f = I$, la función identidad, la ecuación tiene una única solución $x = y$ y por lo tanto requerimos que

(d1) $$d(I, \Omega, y) = 1 \text{ para } y \in \Omega.$$

Consideremos ahora dos subconjuntos abiertos y disyuntos Ω_1 y Ω_2 de Ω y supongamos que la ecuación $f(x) = y$, tiene un número finito de soluciones en $\Omega_1 \cup \Omega_2$, pero ninguna solución en $\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Entonces el número de soluciones en Ω es la suma de las soluciones en Ω_1 y Ω_2, esto sugiere que d debería ser aditiva respecto al argumento Ω, esto es

(d2) $$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y),$$

siempre que Ω_1 y Ω_2 sean abiertos disyuntos de Ω tal que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. La tercera condición que le debemos imponer a d tiene que ver con el hecho de que para una función f complicada el número $d(f, \Omega, y)$ puede ser calculado por $d(g, \Omega, y)$, siendo g una función más simple que f, esto lo podemos llevar a cabo definiendo una homotopía entre la función f y la función g que permita deformar la primera de estas funciones en la segunda manteniendo la continuidad.

(d3) $$d(h(t, \cdot), \Omega, y(t)) \text{ es independiente de } t \in J = [0, 1]$$

siempre que $h : J \times \overline{\Omega} \to Y$ y $y : J \to Y$ sean continuas y $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in J$. A la función h definida en la (d3) la llamaremos *homotopía admisible*.

Nos planteamos ahora el objetivo de encontrar una expresión explícita para la aplicación d, para tal fin consideremos primero el caso más simple. Supongamos que $X = Y = \mathbb{R}$ y que $y = 0$, en este caso nuestro problema se reduce a hallar los ceros de una función de valor y variable real. Si suponemos solamente que la función f es continua en un intervalo abierto (a, b), puede que el conjunto $f^{-1}(0) = \{x \in (a, b) : f(x) = 0\}$ no sea finito, para remediar este problema requerimos que f sea continua $[a, b]$, diferenciable

con continuidad en (a,b) y además que todos sus ceros sean simples, esto es, si $f(x)=0$ entonces $f'(x)\neq 0$. Bajo estas condiciones definimos como

$$d(f,(a,b),0)=\sum_{x\in f^{-1}(0)}\operatorname{sgn}(f'(x)), \tag{1.2}$$

donde

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ -1, & \text{si } x<0,\end{cases}$$

al grado de f relativo al intervalo (a,b). Si $f^{-1}(0)=\emptyset$, por convención $d(f,(a,b),0)=0$. Ahora, usando el Teorema de Bolzano podemos demostrar que

$$d(f,(a,b),0)=\begin{cases}0, & \text{si } f(a)f(b)>0,\\ 1, & \text{si } f(a)<0 \text{ y } f(b)>0,\\ -1, & \text{si } f(a)>0 \text{ y } f(b)<0.\end{cases}$$

Expresando el grado de esta forma notamos que si $d(f,(a,b),0)\neq 0$, la función f tiene al menos un cero. Como veremos posteriormente esta es una de las propiedades más importantes a la hora de aplicar el concepto de grado a los problemas de existencia de existencia de puntos fijos. Es natural ahora extender la noción de grado a funciones definidas sobre un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$, cambiando la derivada de la función por el Jacobiano.

Definición 1.2.1. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Si $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ es continua en $\overline{\Omega}$ y diferenciable con continuidad en Ω, y si además todos los ceros de f son simples con ninguno de ellos en la frontera. Entonces definimos

$$d(f,\Omega,0)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{x\in f^{-1}(0)}\operatorname{sgn}(\det(f'(x)), & \text{si } f^{-1}(0)\neq\emptyset,\\ 0, & \text{si } f^{-1}(0)=\emptyset.\end{cases}$$

Denotamos por $f'(x)$ a la matriz Jacobiana de la función f. Decimos que un cero de f es simple si $f(x)=0$ y $\det(f'(x))\neq 0$. Nótese que como $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es continua en $\overline{\Omega}$ y diferenciable con continuidad en Ω, y además todos los ceros de f son simples, el conjunto $f^{-1}(0)$ es finito. La expresión para la aplicación d dada en la Definición 1.2.1 constituye la primera fase en la construcción del *grado de Brouwer*, en las siguientes dos fases se suprimen las hipótesis sobre los ceros simples de f así como la diferenciabilidad hasta llegar al caso general en el que solo se pide la continuidad de la función f. El siguiente paso natural es extender este concepto al caso de dimensión infinita, este proceso no se puede llevar a cabo directamente; pues una de las consecuencias del grado de Brouwer es que toda función continua de la adherencia bola unitaria de $\mathbb{R}^n$ en si

misma tiene un punto fijo, este resultado es conocido como el *Teorema del Punto Fijo de Brouwer*. Sin embargo, Kakutani (ver [8]) demostró que existe una función continua de la adherencia de la bola unitaria del espacio de dimensión infinita l^2 de las sucesiones de números reales en si misma que no tiene puntos fijos. Para tener una versión del Teorema de Brouwer en dimensión infinita, debemos pedir a la aplicación f, además de continuidad, compacidad, dado que las aplicaciones compactas pueden ser aproximadas por una sucesión de aplicaciones finito dimensionales en las cuales podemos definir el grado de Brouwer (ver la Proposición 1.2.4). Esta extensión vía aplicaciones compactas es conocida como *grado de Leray-Schauder*. Esta herramienta nos permitirá aplicar las propiedades del grado de Brouwer en dimensión infinita para resolver problemas de existencia de puntos fijos, más exactamente, entre otras cosas demostraremos una extensión del teorema del punto fijo de Brouwer conocido como Teorema del Punto Fijo de Schauder.

Las definiciones y terminología usadas a continuación fueron tomadas de [17]. No haremos en esta tesis las construcciones del grado de Brouwer ni del grado de Leray-Shauder, puesto que nuestro objetivo es utilizar estos resultados para hacer una extensión del grado de Leray-Schauder al grado para aplicaciones α-*condensantes*, en esta construcción demostraremos en todo detalle como mediante un proceso de reducción podemos expresar este último grado en términos del grado de Leray-Schauder.

1.2.1. Grado de Brouwer

Primero veamos que la condición $y \notin f(\partial\Omega)$ es necesaria para definir una aplicación d que satisfaga (d1)-(d3), para esto haremos uso del siguiente resultado.

Proposición 1.2.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, $f \in C(\Omega)$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe una función $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in \Omega$.*

Recordemos que $C^k(\Omega)$ denota la clase de todas las aplicaciones $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ para las cuales existen derivadas parciales de orden k y son continuas en Ω, si $f \in C^k(\Omega)$, decimos que f es de clase C^k en Ω, en particular si $k = 0$, escribimos $C(\Omega)$, para denotar la clase de todas las funciones continuas $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, mientras que $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 1} C^k(\Omega)$ denota la clase de todas las aplicaciones con derivadas parciales continuas de todos los ordenes en Ω, además si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/2}$. Finalmente, si B es compacto y $f \in C(B)$ denotamos por $\|f\|_\infty$ a la norma uniforme de la función f esto es $\|f\|_\infty = \max\{\|f(x)\| : x \in B\}$.

Ahora consideremos $f \in C(\overline{\Omega})$ y $y \notin f(\partial\Omega)$. Definimos $\alpha = \varrho(y, f(\partial\Omega)) > 0$ donde $\varrho(x, B)$ denota la distancia del punto x al conjunto B. Cómo $\overline{\Omega}$ es compacto y $f \in$

$C(\overline{\Omega})$ estamos en las hipótesis de la Proposición 1.2.1, de tal forma que existe una función $g \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, pero entonces $\|f - g\|_\infty < \epsilon$, y si tomamos $\epsilon = \alpha$ tenemos que

$$\|f - g\|_\infty < \varrho(y, f(\partial\Omega)).$$

Ahora bien, por definición de ϱ, $\varrho(y, f(\partial\Omega)) \leq \|y - y_1\|$ para todo $y_1 \in f(\partial\Omega)$. Esto es, $\varrho(y, f(\partial\Omega)) \leq \|y - f(x)\|$ para todo $x \in \partial\Omega$ y $\|f - g\|_\infty \geq \|f(x) - g(x)\|$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, en particular $\|f - g\|_\infty \geq \|f(x) - g(x)\|$ para todo $x \in \partial\Omega$. Por lo tanto tenemos que

$$\|f(x) - g(x)\| < \|y - f(x)\| \textit{ para todo } x \in \partial\Omega. \tag{1.3}$$

Consideremos la función $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(t,x) = (1-t)f(x) + tg(x)$, h es continua y si $t \in [0,1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|h(t,x) - y\| &= \|(1-t)f(x) + tg(x) - y\| \\ &= \|f(x) - y + t(f(x) - g(x))\| \\ &\geq \|f(x) - y\| - t\|f(x) - g(x)\| \\ &\geq \|f(x) - y\| - \|f(x) - g(x)\|. \end{aligned}$$

Pero por (1.3) sabemos que $\|f(x) - y\| - \|f(x) - g(x)\| > 0$ si $x \in \partial\Omega$, por consiguiente $\|h(t,x) - y\| > 0$ si $t \in [0,1]$ y $x \in \partial\Omega$. Por lo tanto, (d3) con $y(t) \equiv y$ implica que $d(h(t,\cdot), \Omega, y(t))$ es independiente de $t \in [0,1]$, lo que significa que $d(h(t,x), \Omega, y(t)) =$ *constante* para todo $t \in [0,1]$, en particular si $t = 0$, $d(f(x), \Omega, y) = d(h(0,x), \Omega, y) =$ *constante*, y si $t = 1$, $d(g(x), \Omega, y) = d(h(1,x), \Omega, y) =$ *constante*. Por lo tanto tenemos que

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y).$$

Hemos demostrado que (d3) implica la unicidad de la función d, en lo cual fue crucial la hipótesis $y \notin f(\partial\Omega)$.
El siguiente resultado pone de manifiesto que existe una única aplicación que verifica (d1)-(d2)-(d3). Sea

$$M = \big\{(f, \Omega, y) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ abierto y acotado}, f \in C(\overline{\Omega}), y \notin f(\partial\Omega)\big\}.$$

Teorema 1.2.2 (Grado de Brouwer)**.** *Existe una única aplicación $d : M \to \mathbb{Z}$, llamada grado de Brouwer, que satisface las siguientes propiedades:*

(d1) *(Normalización) Para todo $y \in \Omega$*

$$d(I, \Omega, y) = 1.$$

(d2) *(Aditividad) Si* Ω_1 *y* Ω_2 *son abiertos disyuntos de* Ω *tal que* $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$*, entonces*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y).$$

(d3) *(Invarianza por homotopía) Si* $h : J \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *e* $y : J \to \mathbb{R}^n$ *son continuas con* $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ *para todo* $t \in J = [0, 1]$*, entonces*

$$d(h(t, \cdot), \Omega, y(t)) \text{ es independiente de } t \in J.$$

El resultado anterior caracteriza el grado de Brouwer, es decir si existe una aplicación $D : M \to \mathbb{Z}$ que verifica las propiedades (d1)-(d2)-(d3) entonces $D(\cdot, \Omega, y) = d(\cdot, \Omega, y)$; esto es, la aplicación D es el grado de Brouwer.
El grado de Brouwer satisface además las siguientes propiedades.

Proposición 1.2.3. *Sea* M *como en el Teorema 1.2.2 y* $d : M \to \mathbb{Z}$*, el grado de Brouwer, entonces*

(d4) *(Existencia) Si* $d(f, \Omega, y) \neq 0$ *implica que* $y \in f(\Omega)$*.*

(d5) *(Escisión) Sea* Ω_1 *un subconjunto abierto de* Ω *tal que* $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$*, entonces*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y).$$

1.2.2. Grado de Leray-Schauder

Ahora extenderemos la noción de grado de Brouwer para aplicaciones actuando en espacios de dimensión infinita.

Definición 1.2.2. Consideremos dos espacios de Banach X, Y, un subconjunto Ω de X y una aplicación $F : \Omega \to Y$. Decimos que una aplicación F es finita-dimensional si $F(\Omega)$ está contenido en un subespacio finito dimensional de Y. Denotamos por $\mathcal{F}(\Omega, Y)$ a la clase de todas las aplicaciones finito dimensionales $F : \Omega \to Y$. Como antes escribimos $\mathcal{F}(\Omega)$ en vez de $\mathcal{F}(\Omega, X)$.

Proposición 1.2.4. *Sean* X*,* Y *espacios de Banach y* $B \subseteq X$ *cerrado y acotado. Entonces* $\mathcal{F}(B, Y)$ *es denso en* $\mathcal{K}(B, Y)$ *con respecto a la norma del supremo, es decir para toda aplicación* $F \in \mathcal{K}(B, Y)$ *y* $\epsilon > 0$ *existe una aplicación* $F_\epsilon \in \mathcal{F}(B, Y)$ *tal que* $\sup_{x \in B} \|Fx - F_\epsilon x\| \leq \epsilon$*.*

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de un espacio de Banach X. A una aplicación de la forma $I - F$ donde $F \in \mathcal{K}(\Omega)$ se le llama *perturbación de la identidad* y una tripla

de la forma $(I - F, \Omega, y)$ donde $I - F$ es una perturbación de la identidad, Ω es un subconjunto abierto y acotado de X, y $y \notin (I - F)(\partial\Omega)$, se le llama *admisible*.

El siguiente resultado es la generalización del grado de Brouwer en espacios de dimensión infinita.

Teorema 1.2.5 (Grado de Leray-Schauder)**.** *Sea X un espacio de Banach y*

$$M = \big\{(I - F, \Omega, y) : \Omega \subseteq X \text{ abierto y acotado}, F \in \mathcal{K}(\overline{\Omega}), y \notin (I - F)(\partial\Omega)\big\}.$$

Entonces existe una única aplicación $D : M \to \mathbb{Z}$, llamada grado de Leray-Schauder, que satisface las siguientes propiedades:

(D1) *(Normalización) Para todo $y \in \Omega$*

$$d(I, \Omega, y) = 1.$$

(D2) *(Aditividad) Si Ω_1 y Ω_2 son abiertos disyuntos de Ω tal que $y \notin (I - F)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, entonces*

$$D(I - F, \Omega, y) = D(I - F, \Omega_1, y) + D(I - F, \Omega_2, y).$$

(D3) *(Invarianza por homotopía) Si $H : J \times \overline{\Omega} \to X$ es compacta, $y : J \to X$ es continua y $y(t) \notin (I - H(t, \cdot))(\partial\Omega)$ para todo $t \in J = [0, 1]$, entonces*

$$D(I - H(t, \cdot), \Omega, y(t)) \text{ es independiente de } t \in J.$$

El entero $D(I - F, \Omega, y)$ está dado por $d((I - F_1)|_{\Omega_1}, \Omega_1, y)$, donde F_1 es cualquier aplicación en $\mathcal{F}(\overline{\Omega})$ tal que $\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|F_1 x - Fx\| < \varrho(y, (I - F)(\partial\Omega))$, $\Omega_1 = \Omega \cap X_1$, con X_1 cualquier subespacio finito-dimensional de X, $y \in X_1$, $F_1(\overline{\Omega}) \subseteq X_1$ y d es el grado de Brouwer en X_1.

Las propiedades (d4) y (d5) de la Proposición 1.2.3 del grado de Brouwer también las cumple el grado de Leray-Schauder.

Proposición 1.2.6. *Sea M como en el Teorema 1.2.5 y $D : M \to \mathbb{Z}$, el grado de Leray-Schauder, entonces*

(D4) *(Existencia) Si $D(I - F, \Omega, y) \neq 0$ implica que $y \in (I - F)(\Omega)$.*

(D5) *(Escisión) Sea Ω_1 un subconjunto abierto de Ω tal que $y \notin (I - F)(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$, entonces*

$$D(I - F, \Omega, y) = D(I - F, \Omega_1, y).$$

Ilustraremos como podemos aplicar el grado de Leray-Schauder a la teoría del punto fijo demostrando una extensión del teorema del punto fijo de Brouwer a aplicaciones compactas realizada por Schauder en 1930. Para esto es necesario el siguiente resultado.

Teorema 1.2.7. *Sean X y Y espacios normados, $A \subseteq X$ un conjunto cerrado y $F : A \to Y$ continua. Entonces F tiene una extensión $\widetilde{F} : X \to Y$ tal que $\widetilde{F}(X) \subseteq \operatorname{conv}(F(A))$.*

Definición 1.2.3. Sea X un espacio normado y A un subconjunto de X. Una retracción de X en A es una función continua $R : X \to A$ tal que $Rx = x$ para todo $x \in A$.

Observación 1.2.1. *Por el Teorema 1.2.7 si A es un subconjunto convexo, cerrado y no vacio de X entonces existe una retracción de R de X en A. En efecto, sea F la restricción de la identidad en X al conjunto A, esto es $F : A \to X$ y $Fx = x$ para todo $x \in A$, F es continua por lo tanto existe una extensión continua $R : X \to X$ tal que $R(X) \subseteq \operatorname{conv}(F(A))$, pero $F(A) = A$ con lo cual $\operatorname{conv}(F(A)) = \operatorname{conv}(A) = A$. Luego la función $R : X \to \operatorname{conv}(F(A)) = A$ es continua y $Rx = Fx = x$ para todo $x \in A$.*

Teorema 1.2.8 (Teorema del punto fijo de Schauder)**.** *Sea X un espacio de Banach, $C \subseteq X$ no vacio, cerrado, convexo y acotado, $F : C \to C$ compacto. Entonces F tiene un punto fijo.*

Demostración. Como C es acotado, existe $r > 0$ tal que $C \subseteq B(0, r) =: B$, además C es cerrado, convexo y no vacio, luego por la Observación 1.2.1 existe una aplicación continua $H : X \to C$ tal que $Hx = x$ para todo $x \in C$. Denotemos por R a la restricción de H a la bola $\overline{B} = \overline{B}(0, r)$, entonces R sigue siendo continua y $G := FR$, cumple que $G : \overline{B} \to C$ y G es una aplicación compacta. En efecto, al ser F una aplicación compacta $F(C)$ es relativamente compacto, luego $\alpha(F(C)) = 0$, por lo tanto $\alpha(G(\overline{B})) \leq \alpha(F(C)) = 0$, con lo cual $\alpha(G(\overline{B})) = 0$. Ahora supongamos que existe $x \in \partial\overline{B}$ tal que $FRx = x$. Como $x \in \overline{B}$, $Rx \in C$, con lo cual $x = FRx \in F(C) \subseteq C$, esto es, $x \in C$. Entonces $x = Hx = Rx$ de donde $x = Fx$ y el resultado se tiene. Supongamos entonces que $FRx \neq x$ para todo $x \in \partial\overline{B}$ y definamos $H : [0, 1] \times \overline{B} \to X$ como $H(t, x) = tFRx$. Sea $x \in \partial\overline{B}$, tenemos $\|x - tFRx\| \geq \|x\| - t\|FRx\|$, y como $FRx \in C \subseteq \overline{B}$, $\|FRx\| \leq r$, de donde $-t\|FRx\| \geq -rt$. Por lo tanto, $\|x - tFRx\| \geq \|x\| - rt = r - rt = r(1 - t) > 0$ si $0 \leq t < 1$. Y si $t = 1$, como $FRx \neq x$ para todo $x \in \partial\overline{B}$, entonces $\|x - FRx\| > 0$. Se sigue así que $0 \notin (I - H)(\partial\overline{B}) = (I - H)(\partial B)$ para todo $t \in [0, 1]$. Además $H(t, x) = tFRx + (1 - t)0$ es una homotopía afín entre las aplicaciones 0 y $FR \in \mathcal{K}(\overline{B})$, entonces por la Proposición 1.1.6 $H : [0, 1] \times \overline{B} \to X$ es una aplicación compacta. Entonces (D3) del grado Leray-Schauder con $y(t) \equiv 0$ nos dice que $D(I - H(x, t), B(0, r), 0) = \textit{constante}$ para todo $t \in [0, 1]$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D(I - FR, B(0, r), 0) &= D(I - H(1, \cdot), B(0, r), 0) \\ &= D(I - H(0, \cdot), B(0, r), 0) \\ &= D(I, B(0, r), 0) = 1. \end{aligned}$$

Luego por (D4) del grado Leray-Schauder concluimos que $0 \in (I - FR)(B(0,r))$, esto es, existe $x \in B(0,r)$ tal que $x = FRx$, pero $x = FRx \in C$, con lo cual $x \in C$, $Rx = Hx = x$ y entonces $Fx = x$. □

Estableceremos a continuación una generalización del Teorema anterior. En la demostración debemos tener presente el siguiente resulto clásico en la teoría de espacios métricos.

Lema 1.2.9. (Ver, [7, pag. 23, Proposición 1.41]). *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) *A es relativamente compacto.*

(b) *Toda sucesión de elementos en A tiene una subsucesión convergente a un punto de X.*

Teorema 1.2.10 (Teorema del punto fijo de Schaefer)**.** *Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X$ una aplicación compacta, si el conjunto*

$$\bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \{x \in X : x = \lambda Tx\},$$

es acotado. Entonces T tiene un punto fijo.

Demostración. Por hipótesis existe $r > 0$ tal que

$$\|x\| < r \text{ si } x = \lambda Tx \text{ para algún } \lambda \in [0,1].$$

Sea $B := B(0,r)$, entonces $\overline{B} = \overline{B}(0,r)$. Definamos la retracción $R : X \to \overline{B}$, dada por

$$Rx = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| < r, \\ \left(\dfrac{r}{\|x\|}\right) x & \text{si } \|x\| > r. \end{cases}$$

Sea $S := T\ |_{\overline{B}}$. Demostremos que la aplicación $RS : \overline{B} \to \overline{B}$, es compacta. Para esto debemos ver que el conjunto $A = RS\overline{B}$(escribimos $RS\overline{B}$ en vez de $R(S(\overline{B}))$) es relativamente compacto. Sea $(z_n)_n$ una sucesión en $RS\overline{B}$, entonces $z_n = RSx_n$ donde $(Sx_n)_n$ es una sucesión en $S\overline{B}$, y al ser este conjunto es relativamente compacto, por el Lema 1.2.9 existe $y \in X$ tal que $Sx_{n_k} \to y$ cuando $k \to \infty$. Ahora por la continuidad de la función R, $z_{n_k} = RSx_{n_k} \to Ry \in X$ cuando $k \to \infty$. Por lo tanto, de nuevo por el Lema 1.2.9, concluimos que el conjunto $RS\overline{B}$ es relativamente compacto. Consideremos el conjunto

$$K := \overline{\text{conv}}\left(RS\overline{B}\right),$$

$\overline{\text{conv}}(A) := \overline{\text{conv}(A)}$. Vemos que por definición el conjunto K es convexo y cerrado. Además, como

$$K = \overline{\text{conv}}\left(RS\overline{B}\right) \subseteq \text{conv}(\overline{B}) = \overline{B},$$

tenemos que

$$RSK \subseteq RS\overline{B} \subseteq \operatorname{conv}(RS\overline{B}) = K,$$

con lo cual $RS\mid_K : K \to K$, más aún, por la Proposición 1.1.1

$$\alpha(K) = \alpha\left(\overline{\operatorname{conv}}\left(RS\overline{B}\right)\right) = \alpha\left(\operatorname{conv}\left(RS\overline{B}\right)\right) = \alpha\left(RS\overline{B}\right) = 0.$$

Es decir, la aplicación, $RS\mid_K$ es compacta. Por el Teorema del Punto Fijo de Schauder existe $x \in K$ tal que $RSx = x$. Veamos que esto implica que $Sx \in K$. Supongamos que no. Entonces $\|Sx\| > r$ y $x = RSx = \dfrac{r}{\|Tx\|}Tx$, lo cual implica que $\|x\| = r$. Por otro lado $x = \lambda Sx$, donde $\lambda = \dfrac{r}{\|Sx\|} \in (0,1)$. Luego por hipótesis $\|x\| < r$, lo cual es una contradicción. Se debe tener entonces que $Sx \in K \subseteq \overline{B}$. Por lo tanto $x = RSx = Sx = Tx$. □

1.2.3. Construcción del grado topológico para aplicaciones $\alpha-$ condensantes

Como vimos, el grado de Leray-Schauder nos permite demostrar un Teorema de punto fijo para aplicaciones compactas en un espacio de Banach de dimensión infinita, el Teorema del punto fijo de Schauder, queremos extender este teorema para aplicaciones más generales, de manera más precisa, para aplicaciones α-condensantes (recordemos que toda aplicación compacta es α-condensantes pero el recíproco es falso, ver Proposición 1.1.8). Para esto, introduciremos la noción de grado topológico para aplicaciones α-condensantes.

Consideremos la tripla $(I - F, \Omega, y)$ donde $F \in C_\alpha(\overline{\Omega})$, Ω un subconjunto abierto y acotado de un espacio de Banach X y $y \notin (I - F)(\partial\Omega)$. Como antes llamaremos a la colección conformada por las triplas de esta forma *familia admisible de triplas*. Queremos definir en esta familia una función D a valor entero que satisfaga
Primero que todo, observemos que D depende en realidad de las triplas admisibles tales que F es una α contracción estricta. Para ver esto notemos que si $F \in C_\alpha(\Omega)$ y $k \in [0,1)$, entonces $G := kF$ es una α-contracción estricta. En efecto, tenemos dos casos $\alpha(B) = 0$ o $\alpha(B) > 0$. Si $\alpha(B) = 0$ tomamos $k = 0$ con lo cual $G \equiv 0$ y $\alpha(G(B)) = 0 \leq 0 \cdot \alpha(B)$; esto es, $G \in SC_\alpha(\Omega)$. Ahora si $\alpha(B) > 0$ tomamos $0 < k < 1$ y recordamos que α es una seminorma con lo cual

$$\alpha(G(B)) = \alpha(kF(B)) = k\alpha(F(B)) < k\alpha(B),$$

en la última desigualdad usamos el hecho de que $F \in C_\alpha(\Omega)$, de nuevo vemos que $G \in SC_\alpha(\Omega)$. Ahora consideremos $H : J \times \overline{\Omega} \to X$, dada por

$$H(t,x) = (1-t)Fx + tkFx = (1-t)Fx + tGx.$$

Tenemos entonces una homotopía afín entre las aplicaciones $\alpha - condensantes$ F y G. Luego, por la Proposición 1.1.6, la aplicación H es $\alpha - condensante$. Ahora escojamos $k < 1$ y $(1-k)$ tal que

$$(1-k)\sup\left\{\|Fx\| : x \in \overline{\Omega}\right\} < \varrho(y, (I-F)(\partial\Omega)),$$

nótese que $\varrho(y, (I-F)(\partial\Omega)) > 0$ ya que $y \notin (I-F)(\partial\Omega))$ de tal forma que

$$(1-k)\|Fx\| < \|y - (x - Fx)\| \; para\, todo\, x \in \partial\Omega. \tag{1.4}$$

De este modo si $x \in \partial\Omega$ y $t \in J = [0,1]$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|H(t,x) - x + y\| &= \|(1 - t(1-k))Fx - x + y\| \\
&= \|Fx - x + y - t(1-k)Fx\| \\
&= \|y - (x - Fx) - t(1-k))Fx\| \\
&\geq \|y - (x - Fx)\| - t(1-k)\|Fx\| \\
&\geq \|y - (x - Fx)\| - (1-k)\|Fx\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto de (1.4) concluimos que

$$\|H(t,x) - x + y\| > 0.$$

Y hemos demostrado que si $x \in \partial\Omega$ y $t \in J$ entonces $y(t) \neq x - H(t,x)$. Por lo tanto (D3) con $y(t) \equiv y$ nos dice que

$$D(I - H(t,\cdot), \Omega, y) = constante \text{ para todo } t \in J.$$

Luego, en particular tenemos que

$$D(I-F, \Omega, y) = D(I - H(0,\cdot), \Omega, y) = D(I - H(1,\cdot), \Omega, y) = D(I - kF, \Omega, y),$$

esto es

$$D(I-F, \Omega, y) = D(I - kF, \Omega, y).$$

Así, en adelante suponemos que F es una α-contracción estricta con constante $k < 1$. Ahora de (D2) con $\Omega_1 = \Omega$ y $\Omega_2 = \emptyset$ obtenemos

$$D(I-F, \Omega, y) = D(I-F, \Omega, y) + D(I-F, \emptyset, y),$$

de donde se concluye que $D(I-F, \emptyset, y) = 0$. Por lo tanto (D2) con $\Omega_2 = \emptyset$, implica que

$D(I-F, \Omega, y) = D(I-F, \Omega_1, y)$ para todo abierto $\Omega_1 \subseteq \Omega$ tal que $y \notin (I-F)(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$.

Por lo tanto si $(I-F)^{-1}(y) = \emptyset$, entonces $D(I-F,\Omega,y) = D(I-F,\emptyset,y) = 0$. Supongamos entonces que $(I-F)^{-1}(y) \neq \emptyset$. Consideremos

$$C_0 = \overline{\text{conv}}\left[F(\overline{\Omega}) + y\right] \ y\, C_n = \overline{\text{conv}}\left[F\left(\overline{\Omega} \cap C_{n-1}\right) + y\right] \ \textit{para } n \geq 1. \tag{1.5}$$

Utilicemos inducción matemática para demostrar que

$$\textit{existe } x \in \overline{\Omega} \textit{ tal que } x \in C_{n-1} \textit{ para todo } n \geq 1. \tag{1.6}$$

De hecho como $(I-F)^{-1}(y) \neq \emptyset$, existe $x \in \overline{\Omega}$ tal que $x - F(x) = y$. Por lo tanto

$$x = F(x) + y \in F\left(\overline{\Omega}\right) + y \subseteq \overline{\text{conv}}\left[F\left(\overline{\Omega}\right) + y\right] = C_0,$$

con lo cual $x \in C_0$ y (1.6) se tiene para $n = 1$. Ahora supongamos que (1.6) se tiene para cierto $n = k$, esto es

$$\text{existe } x \in \overline{\Omega} \text{ tal que } x \in C_{k-1},$$

pero esto implica que

$$x = F(x) + y \in F\left(\overline{\Omega} \cap C_{k-1}\right) + y \subseteq \overline{\text{conv}}\left[F\left(\overline{\Omega} \cap C_{k-1}\right) + y\right] = C_k.$$

Se concluye que $x \in C_k$. Es decir (1.6) se tiene.
Ahora por la Proposición 1.1.1 ítems (f) y (e) y el Ejemplo 1.1.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha(C_n) &= \alpha(\overline{\text{conv}}\left[F\left(\overline{\Omega} \cap C_{n-1}\right) + y\right]) \\
&= \alpha(\text{conv}\left[F\left(\overline{\Omega} \cap C_{n-1}\right) + y\right]) \\
&= \alpha\left(F\left(\overline{\Omega} \cap C_{n-1}\right) + y\right) \\
&= \alpha\left(F\left(\overline{\Omega} \cap C_{n-1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Luego en virtud de la Proposición 1.1.1(c) y el hecho que $F \in SC_\alpha(\overline{\Omega})$, obtenemos:

$$\alpha(F\left(\overline{\Omega} \cap C_{n-1}\right)) \leq \alpha(F(C_{n-1})) \leq k\alpha(C_{n-1}),$$

concluimos que $\alpha(C_n) \leq k\alpha(C_{n-1})$. De manera similar $\alpha(C_{n-1}) \leq k\alpha(C_{n-2})$, con lo cual $\alpha(C_n) \leq k^2\alpha(C_{n-1})$, continuando este proceso vemos que

$$\alpha(C_n) \leq k\alpha(C_{n-1}) \leq k^2\alpha(C_{n-2}) \leq \cdots \leq k^n\alpha(C_0).$$

Por lo tanto $\alpha(C_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. De esta forma si definimos $C_\infty := \bigcap_{n\geq 0} C_n$, $C_\infty \neq \emptyset$ por (1.6), más aún $\alpha(C_\infty) \leq \alpha(C_n)$ para todo $n \geq 0$, lo cual implica que $\alpha(C_\infty) = 0$, por lo tanto C_∞ es relativamente compacto. Pero al ser cerrado él es compacto. Además cada uno de los C_n es convexo por lo que C_∞ es convexo. Concluimos que C_∞ es no vacio compacto y convexo. Por lo tanto el Teorema 1.2.7 garantiza la existencia de una retracción $R : X \to C_\infty$ (ver Proposición 1.2.1). Entonces $R^{-1}(\Omega) \cap \Omega$ es abierto y,

por (1.6), tenemos que $(I-F)^{-1}(y) \subseteq C_\infty$, más aún $(I-F)^{-1}(y) \subseteq \overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$ y $y \notin (I-F)(\partial\Omega)$, así $(I-F)^{-1}(y) \subseteq \Omega$. De esta forma concluimos que

$$(I-F)^{-1}(y) \subseteq C_\infty \cap \Omega. \tag{1.7}$$

Utilicemos (1.7) para demostrar que

$$(I-F)^{-1}(y) \subseteq \ R^{-1}(\Omega) \cap \Omega. \tag{1.8}$$

Sea $x \in (I-F)^{-1}(y)$, por (1.7), $x \in C_\infty$ y $x \in \Omega$. Como $x \in C_\infty$, por definición de retracción $Rx = x$, entonces $Rx \in \Omega$, con lo cual $x \in R^{-1}(\Omega)$, esto es $x \in R^{-1}(\Omega) \cap \Omega$. Ahora, sea $\Omega_1 = R^{-1}(\Omega) \cap \Omega$, usaremos (1.8) para demostrar que

$$D(I-F, \Omega, y) = D(I-F, R^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y).$$

En efecto, supongamos que $x \in \Omega \setminus \Omega_1$, por (1.8) $x \notin (I-F)^{-1}(y)$, es decir $y \notin (I-F)(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$. De donde la conclusión se obtiene usando la propiedad (D2). Más que eso, afirmamos que

$$D(I-F, R^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y) = D(I-FR, R^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y). \tag{1.9}$$

Consideremos $H : J \times \overline{\Omega_1} \to X$ dada por $H(t,x) = Fx + t(FRx - Fx)$. Supongamos que $(I-H)^{-1}(y) \neq \emptyset$. Procederemos por inducción matemática para demostrar que

$$\textit{existe } x \in \overline{\Omega_1} \textit{ tal que } x \in C_{n-1} \textit{ para todo } n \geq 1. \tag{1.10}$$

En efecto, como $(I-H)^{-1}(y) \neq \emptyset$, existen $x \in \overline{\Omega_1}$ y $t \in J$ tales que $x - H(t,x) = y$, entonces

$$\begin{aligned} x &= H(t,x) + y \\ &= Fx + t(FRx - Fx) + y \\ &= Fx - tFx + tFRx + y \\ &= Fx - tFx + tFRx + y + ty - ty \\ &= (1-t)(Fx + y) + t(FRx + y). \end{aligned}$$

Como $x \in \overline{\Omega_1} = \overline{R^{-1}(\Omega) \cap \Omega} \subseteq \overline{R^{-1}(\Omega)} \cap \overline{\Omega}$, tenemos por un lado que $x \in \overline{\Omega}$, de donde

$$Fx + y \in F(\overline{\Omega}) + y \subseteq \overline{\text{conv}}\left[F\left(\overline{\Omega}\right) + y\right] = C_0.$$

Y por el otro lado tenemos que $x \in \overline{R^{-1}(\Omega)}$, de donde existe una sucesión $(x_n)_n$ en $R^{-1}(\Omega)$ tal que $x_n \to x$, luego Rx_n es una sucesión en Ω tal que $Rx_n \to Rx$, con lo cual $Rx \in \overline{\Omega}$. Entonces

$$FRx + y \in F(\overline{\Omega}) + y \subseteq \overline{\text{conv}}\left[F\left(\overline{\Omega}\right) + y\right] = C_0.$$

Como $Fx+y, FRx+y \in C_0$, la convexidad de este conjunto implica que

$$x = (1-t)(Fx+y) + t(FRx+y) \in C_0.$$

Por lo tanto (1.10) se tiene para $n=1$. Supongamos que (1.10) se tiene para $n=k$, esto es

$$existe\, x \in \overline{\Omega_1}\, tal\, que\, x \in C_{k-1}.$$

En tal caso $x \in \overline{\Omega} \cap C_{k-1}$ y entonces

$$Fx+y \in F(\overline{\Omega} \cap C_{k-1}) + y \subseteq \overline{\text{conv}}\left[F\left(\overline{\Omega} \cap C_{k-1}\right) + y\right] = C_k,$$

además $Rx \in \overline{\Omega} \cap C_{k-1}$, de donde

$$FRx+y \in F(\overline{\Omega} \cap C_{k-1}) + y \subseteq \overline{\text{conv}}\left[F\left(\overline{\Omega} \cap C_{k-1}\right) + y\right] = C_k.$$

Luego de la convexidad de C_k concluimos que

$$x = (1-t)(Fx+y) + t(FRx+y) \in C_k.$$

Por lo tanto (1.10) se tiene. Hemos demostrado que el hecho que $(I-H)^{-1}(y) \neq \emptyset$ implica que $x \in C_\infty$, en consecuencia $Rx = x$, $H(t,x) = Fx$ y $x - Fx = x - H(t,x) = y$, con lo cual $x \in (I-F)^{-1}(y)$. Pero $(I-F)^{-1}(y) \subseteq R^{-1}(\Omega) \cap \Omega$, entonces $x \in R^{-1}(\Omega) \cap \Omega$ y al ser este conjunto abierto tenemos que $x \notin \partial(R^{-1}(\Omega) \cap \Omega)$. En conclusión si $x - H(t,x) = y$ entonces $x \notin \partial(R^{-1}(\Omega) \cap \Omega)$ o, de manera equivalente, si $x \in \partial(R^{-1}(\Omega) \cap \Omega)$ entonces $y \neq x - H(t,x)$. Finalmente, como $H(t,x) = Fx + t(FRx - Fx) = (1-t)Fx + tFRx$ y tanto F como FR son α-condensantes, por la Proposición 1.1.6, la aplicación H es α-condensante. Así (D3) nos permite concluir (1.9).

Resumamos: la aplicación reiterada de (D3) nos ha permitido hacer un trabajo de reducción primero de las aplicaciones α-condensantes a las α-contracciones-estrictas y después a las aplicaciones compactas. Pero en esta última clase solo hay una única aplicación que cumple las propiedades (D1)-(D2)-(D3), el grado de Leray-Schauder, la cual denotaremos por D_{LS}. Por lo tanto debemos tener que

$$D(I-F, \Omega, y) = D_{LS}(I - FR, R^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y)\ si\ (I-F)^{-1}(y) \neq \emptyset, \tag{1.11}$$

y $D(I-F, \Omega, y) = 0$ si $(I-F)^{-1}(y) = \emptyset$. Por último observemos que la parte derecha de (1.11) no se ve afectada si cambiamos R por una retracción $\widetilde{R}$ de X en un subconjunto C cerrado y convexo tal que $C_\infty \subseteq C$, $F(\overline{\Omega} \cap C) + y \subseteq C$ y $F(\overline{\Omega} \cap C)$ es relativamente compacto. Para verlo, demostremos que

$$F(\overline{\Omega} \cap C_\infty) + y \subseteq C_\infty. \tag{1.12}$$

En efecto, como la sucesión $(C_n)_n$ definida en (1.5) es decreciente, esto es $C_n \subseteq C_{n-1}$ para todo $n \geq 1$, tenemos que

$$F(C_n \cap \overline{\Omega}) + y \subseteq F(C_{n-1} \cap \overline{\Omega}) + y \subseteq C_n,$$

entonces $F(C_n \cap \overline{\Omega}) + y \subseteq C_n$ para todo $n \geq 0$, pero $F(\overline{\Omega} \cap C_\infty) + y \subseteq F(C_n \cap \overline{\Omega}) + y$ para todo $n \geq 0$, de donde $F(\overline{\Omega} \cap C_\infty) + y \subseteq C_\infty$. Ahora bien, como $\widetilde{R}(X) \subseteq \overline{\Omega}$ y $\widetilde{R}(X) \subseteq C$, entonces $\widetilde{R}(X) \subseteq \overline{\Omega} \cap C$, de donde $F\widetilde{R}(X) \subseteq F(\overline{\Omega} \cap C)$ y $\alpha(F\widetilde{R}(X)) \leq \alpha(F(\overline{\Omega} \cap C)) = 0$, esto es $\widetilde{R} \in \mathcal{K}(X)$. Sean $\Omega_1 = R^{-1}(\Omega) \cap \Omega$, $\Omega_2 = \widetilde{R}^{-1}(\Omega) \cap \Omega$ y $\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Supongamos que $y \in (I - FR)(\overline{\Omega_1} \setminus \Omega_3)$, esto es, existe $x \in \overline{\Omega_1} \setminus \Omega_3$ tal que $x - FRx = y$. Como $x \in \overline{\Omega}_1$ en particular tenemos que $x \in \overline{R^{-1}(\Omega)}$, entonces como se demostró en la página 22, $Rx \in \overline{\Omega}$, como además $Rx \in C_\infty$ tenemos que $x = FRx + y \in F(\overline{\Omega} \cap C_\infty) + y$. Luego de (1.12), $x \in C_\infty$, de donde $Rx = x$ y $x - Fx = y$ con lo cual $x \in (I - F)^{-1}(y) \subseteq R^{-1}(\Omega) \cap \Omega = \Omega_1$, lo cual es una contradicción pues $x \notin \Omega_3$. Por lo tanto debemos tener que $y \notin (I - FR)(\overline{\Omega} \setminus \Omega_3)$ y al utilizar (D2) del grado de Leray-Schauder concluimos que

$$D_{LS}(I - FR, \Omega_1, y) = D_{LS}(I - FR, \Omega_3, y).$$

De manera similar si $y \in (I - F\widetilde{R})(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_3)$, existe $x \in \overline{\Omega_2} \setminus \Omega_3$ tal que $x - F\widetilde{R}x = y$, $x \in \overline{\Omega}_2$ luego $x \in \overline{\widetilde{R}^{-1}(\Omega)}$, de donde $\widetilde{R}x \in \overline{\Omega}$, como además $\widetilde{R}x \in C$, tenemos que $x = F\widetilde{R}x + y \in F(\overline{\Omega} \cap C) + y \subseteq C$, esto es $x \in C$, entonces $\widetilde{R}x = x$ y $x - Fx = y$, con lo cual $x \in \Omega_1$ y tenemos una contradicción ya que $x \notin \Omega_3$. Entonces como $y \notin (I - F\widetilde{R})(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_3)$, por (D2) del grado de Leray-Schauder tenemos que

$$D_{LS}(I - F\widetilde{R}, \Omega_2, y) = D_{LS}(I - F\widetilde{R}, \Omega_3, y).$$

En resumen:

$$\begin{aligned} D_{LS}(I - FR, \Omega_1, y) &= D_{LS}(I - FR, \Omega_3, y) \\ D_{LS}(I - F\widetilde{R}, \Omega_2, y) &= D_{LS}(I - F\widetilde{R}, \Omega_3, y). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Veamos que los miembros derechos de (1.13) coinciden. Consideremos la aplicación $H(t, \cdot) = tFR + (1-t)F\widetilde{R}$ la cual es compacta ya que FR y $F\widetilde{R}$ lo son. Ahora, como en la demostración de (1.10) $x - H(t, x) = y$ implica que $x \in C_\infty$ con lo cual $Rx = \widetilde{R}x = x$ y por lo tanto $x - Fx = x - H(t, x) = y$. Ahora observemos que $(I-F)^{-1}(y) \subseteq \widetilde{R}^{-1}(\Omega) \cap \Omega$. Como $C_\infty \subseteq C$,

$$(I - F)^{-1}(y) \subseteq C_\infty \cap \Omega \subseteq C \cap \Omega.$$

Así, si $x \in (I - F)^{-1}(y)$, entonces $x - Fx = y$ para algún $x \in C \cap \Omega$, y como $x \in C$, $\widetilde{R}x = x$, con lo cual $\widetilde{R}x \in \Omega$, esto es $x \in \widetilde{R}^{-1}(\Omega)$. Luego $x \in \widetilde{R}^{-1}(\Omega) \cap \Omega$ como se quería demostrar. Así tenemos que $(I - F)^{-1}(y) \subseteq \Omega_1, \Omega_2$, con lo cual $(I - F)^{-1}(y) \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_3$. Y hemos demostrado que si $x - H(t, x) = y$ se tiene que $x \notin \partial\Omega_3$. Por lo tanto (D3) del grado de Leray-Schauder nos permite concluir que

$$D_{LS}(I - FR, \Omega_3, y) = D_{LS}(I - F\widetilde{R}, \Omega_3, y).$$

Luego por (1.13), podemos escribir que

$$D_{LS}(I - FR, R^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y) = D_{LS}(I - F\widetilde{R}, \widetilde{R}^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y).$$

Con esto terminamos la construcción del grado para aplicaciones $\alpha - condensantes$ y estamos listos para establecer el siguiente resultado.

Teorema 1.2.11 (Grado para aplicaciones $\alpha - condensantes$)**.** *Sea X un espacio de Banach y*

$$M = \big\{(I - F, \Omega, y) : \Omega \subseteq X \text{ es abierto y acotado}, F \in C_\alpha(\overline{\Omega}), y \notin (I - F)(\partial\Omega)\big\}.$$

Entonces tenemos que:

(a) *Existe una única aplicación $D : M \to \mathbb{Z}$ que satisface* (D1)-(D3)*, llamada grado para aplicaciones $\alpha - condensantes$.*

(b) *Sea $F \in SC_\alpha(\overline{\Omega})$. Entonces $D(I-F, \Omega, y) = D_{LS}(I-FR, R^{-1}(\Omega)\cap\Omega, y)$ si existe un conjunto convexo cerrado $C \subseteq X$ tal que $C_\infty \subseteq C$, $F(\overline{\Omega} \cap C) + y \subseteq C$ y $F(\overline{\Omega} \cap C)$ es relativamente compacto. Aquí $C_\infty = \bigcap_{n\geq 0} C_n$, $(C_n)_n$ está definida por* (1.5) *y R es cualquier retracción de X en C. En particular si $C_\infty \neq \emptyset$, D está dada por* (1.11)*. Si tal C no existe, $D(I - F, \Omega, y) = 0$.*

(c) *Si F es solo $\alpha - condensante$, tenemos que $D(I - F, \Omega, y) = D(I - kF, \Omega, y)$, donde $k \in [0, 1)$ y $(1 - k)\sup\big\{\|Fx\| : x \in \overline{\Omega}\big\} < \varrho(y, (I - F)(\partial\Omega))$.*

Demostración. Primero que todo notemos que por la construcción hecha anteriormente se sigue el ítem (b) de este Teorema.

(a) Sea $y \in \Omega$, tenemos que $D(I, \Omega, y) = D_{LS}(I, R^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y) = 1$. Por lo tanto (D1) se tiene. Demostremos (D2). Consideremos Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos y disyuntos de Ω. Sean $\Omega_3 = R^{-1}(\Omega_1)\cap\Omega_1$ y $\Omega_4 = R^{-1}(\Omega_2)\cap\Omega_2$. Entonces Ω_3 y Ω_4 son subconjuntos abiertos y disyuntos de $R^{-1}(\Omega) \cap \Omega$, más aún

$$(I - FR)(\overline{R^{-1}(\Omega) \cap \Omega} \setminus (\Omega_3 \cup \Omega_4)) \subseteq (I - F)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)).$$

En efecto, sea $y \in (I - FR)(\overline{R^{-1}(\Omega) \cap \Omega} \setminus (\Omega_3 \cup \Omega_4))$, existe $x \in \overline{R^{-1}(\Omega) \cap \Omega} \setminus (\Omega_3 \cup \Omega_4)$ tal que $x - FRx = y$. Dado que $x \in \overline{R^{-1}(\Omega) \cap \Omega} \subseteq \overline{R^{-1}(\Omega)}$, $Rx \in \overline{\Omega}$. Como también $Rx \in C$, tenemos que $x = FRx + y \in F(\overline{\Omega} \cap C) + y \subseteq C$, esto es $x \in C$. Pero entonces $Rx = x$, de donde $x - Fx = y$, además $x \notin \Omega_3 \cup \Omega_4$ y por lo tanto $x \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$, es decir $x \in \overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Concluimos que $y \in (I - F)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Supongamos que $y \notin (I - F)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, entonces $y \notin (I - FR)(\overline{R^{-1}(\Omega) \cap \Omega} \setminus (\Omega_3 \cup \Omega_4))$, por lo tanto (D2) del grado de Leray-Schauder garantiza que

$$D_{LS}(I - FR, R^{-1}(\Omega) \cap \Omega, y) =$$
$$D_{LS}(I - FR, R^{-1}(\Omega_1) \cap \Omega_1, y) + D_{LS}(I - FR, R^{-1}(\Omega_2) \cap \Omega_2, y).$$

Así por la definición de D

$$D(I-F,\Omega,y)=D(I-F,\Omega_1,y)+D(I-F,\Omega_2,y).$$

Luego (D2) está demostrado. Demostremos (D3). Sea H una α-contracción estricta con constante $k<1$ y sea $y:J\to X$ continua tal que $y(t)\neq x-H(t,x)$ en $J\times\partial\Omega$. Sea

$$C_0=\overline{\text{conv}}\left[H(J\times\overline{\Omega})+y(J)\right],\ C_n=\overline{\text{conv}}\left[H\left(J\times(\overline{\Omega}\cap C_{n-1})\right)+y(J)\right],\ n\geq 0,$$

y $C_\infty(H)=\bigcap_{n\geq 1}C_n$. Como en la construcción hecha anteriormente $C_\infty(H)$ es compacto, convexo y si $(I-H)^{-1}(y)\neq\emptyset$, entonces $x\in C_\infty(H)$. En consecuencia $C_\infty(H)=\emptyset$ implica que $(I-H)^{-1}(y)=\emptyset$. Por lo tanto por (D2) tenemos que $D(I-H(t,\cdot),\Omega,y(t))=0$ en J. Ahora $C_\infty(H)$ es cerrado y convexo, si además es no vacio sabemos que existe una retracción R de X en $C_\infty(H)$. Más aún

$$H(J\times(\overline{\Omega}\cap C_\infty(H)))+y(t)\subseteq C_\infty(H).$$

Luego por el ítem (b)

$$D(I-H(t,\cdot),\Omega,y(t))=D_{LS}(I-H(t,R(\cdot)),R^{-1}(\Omega)\cap\Omega,y(t))\ en\ J. \tag{1.14}$$

Veamos que la aplicación $H:J\times\overline{R(R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)}\to X$ es compacta. De hecho como H es una α-contracción estricta y $C_\infty(H)$ es relativamente compacto tenemos que

$$\alpha(H(J\times\overline{R(R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)}))\leq\alpha(\overline{R(R^{-1}(\Omega)\cap\Omega)})\leq\alpha(C_\infty(H))=0.$$

Pero (D3) del grado de Leray-Schauder sabemos que la parte derecha de (1.14) no depende de t. Por lo tanto $D(I-H(t,\cdot),\Omega,y(t))$ no depende de t.

Como ya demostramos (D3) el ítem (c) se sigue por construcción. □

Como una consecuencia de (D2) tenemos dos propiedades adicionales.

Proposición 1.2.12. *Sea M como en el Teorema 1.2.11 y $D:M\to\mathbb{Z}$ el grado para aplicaciones α-condensantes, entonces*

(D4) *(Existencia) Si $D(I-F,\Omega,y)\neq 0$ implica que $y\in(I-F)(\Omega)$.*

(D5) *(Escisión) Sea Ω_1 un subconjunto abierto de Ω tal que $y\notin(I-F)(\overline{\Omega}\setminus\Omega_1)$, entonces*

$$D(I-F,\Omega,y)=D(I-F,\Omega_1,y).$$

Demostración. Demostremos primero (D5). De (D2) con $\Omega_1=\Omega$ y $\Omega_2=\emptyset$ obtenemos

$$D(I-F,\Omega,y)=D(I-F,\Omega,y)+D(I-F,\emptyset,y),$$

de donde se concluye que $D(I-F,\emptyset,y)=0$. Por lo tanto (D2) con $\Omega_2=\emptyset$, implica que

$D(I-F,\Omega,y) = D(I-F,\Omega_1,y)$ para todo abierto $\Omega_1 \subseteq \Omega$ tal que $y \notin (I-F)(\overline{\Omega}\setminus\Omega_1)$.

Ahora de (D5) con $\Omega_1 = \emptyset$, vemos que si $y \notin (I-F)(\overline{\Omega})$ entonces $D(I-F,\Omega,y) = 0$, o equivalentemente si $D(I-F,\Omega,y) \neq 0$, tenemos que $y \in (I-F)(\overline{\Omega})$. Como la tripla $(I-F,\Omega,y)$ es admisible $y \notin (I-F)(\partial\Omega)$, pero Ω es abierto con lo cual $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, con lo cual

$$(I-F)(\overline{\Omega}) = [(I-F)(\partial\Omega)] \cup [(I-F)(\Omega)].$$

Por lo tanto $y \in (I-F)(\Omega)$. Así, $D(I-F,\Omega,y) \neq 0$ implica que $y \in (I-F)(\Omega)$. □

Podemos ahora aplicar el grado para aplicaciones $\alpha - condensantes$ para establecer el siguiente resultado de punto fijo, el cual nos permitirá demostrar la existencia de soluciones para la ecuación integral objeto de estudio en esta tesis.

Teorema 1.2.13. *Sea X un espacio de Banach, $F : X \to X$ una aplicación α-condensante y*

$$S = \{x \in X : \textit{existe } \lambda \in [0,1] \textit{ tal que } x = \lambda Fx\}.$$

Si S es acotado en X, esto es si existe $r > 0$ tal que $S \subseteq B(0,r)$, entonces

$$D(I-\lambda F, B(0,r), 0) = 1 \textit{ para todo } \lambda \in [0,1].$$

En consecuencia, F tiene al menos un punto fijo y el conjunto de todos los puntos fijos de F está en $B(0,r)$.

Demostración. Fijemos $\lambda \in [0,1]$ y consideremos $H : [0,1]\times X \to X$ dada por $H(t,x) = t\lambda Fx$. Nótese que H es una homotopía afín entre las aplicaciones $\lambda F, 0 \in C_\alpha(X)$, por lo que por la Proposición 1.1.6 la aplicación H es $\alpha - condensante$. Por otro lado, si $x \in X$ y $t \in [0,1]$ verifican que $x - H(t,x) = 0$, entonces $x \in S \subseteq B(0,r)$. Por lo tanto, si $x \in \partial B(0,r)$ y $t \in [0,1]$ debemos tener que $\|x - \lambda tFx\| > 0$, ya que si $\|x - \lambda tFx\| = 0$, $x = \lambda tFx$, esto es $x \in B(0,r)$, lo cual es una contradicción. Estamos en las hipótesis de $(D3)$ del grado para aplicaciones $\alpha - condensantes$, podemos entonces concluir que

$$\begin{aligned} D(I-\lambda F, B(0,r), 0) &= D(I - H(1,\cdot), B(0,r), 0) \\ &= D(I - H(0,\cdot), B(0,r), 0) \\ &= D(I, B(0,r), 0). \end{aligned}$$

Pero por la propiedad $(D1)$, $D(I, B(0,r), 0) = 1$. Entonces $D(I-\lambda F, B(0,r), 0) = 1$ y esto para todo $\lambda \in [0,1]$, en particular para $\lambda = 1$, tenemos que $D(I-F, B(0,r), 0) = 1 \neq 0$, por lo tanto por $(D4)$, $y \in (I-F)(B(0,r))$; esto es, existe $x \in B(0,r)$ tal que $Fx = x$. □

1.3. Existencia de puntos fijos para la suma de dos aplicaciones de tipo contractivo

Ahora mostraremos que la aplicación resultante de la suma de aplicaciones de tipo contractivo, también es una aplicación contractiva y por lo tanto bajo ciertas condiciones esta tiene un punto fijo.

En el siguiente resultado originalmente demostrado en [21] se establece una desigualdad del triángular contraria en espacios normados.

Teorema 1.3.1. *Sea X un espacio normado. Si $F : X \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal de norma unitaria y los vectores $x_1, \ldots, x_n$ satisfacen la condición*

$$0 \leq r\|x_i\| \leq Fx_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq n,\ r \geq 0$$

entonces

$$r(\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|) \leq \|x_1 + \cdots + x_n\|. \tag{1.15}$$

La igualdad se tiene si se satisfacen simultáneamente

$$F(x_1 + \cdots + x_n) = r(\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|) \tag{1.16}$$

y

$$F(x_1 + \cdots + x_n) = \|x_1 + \cdots + x_n\|. \tag{1.17}$$

Demostración. Recordemos que $\|F\| = \sup\left\{\dfrac{|Fx|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\}$. Entonces

$$1 = \|F\| \geq \frac{|Fx|}{\|x\|} \text{ para todo } x \in X, x \neq 0,$$

de donde $|Fx| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$. En particular para $x = x_1 + \cdots + x_n$, tenemos que

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \geq |F(x_1 + \cdots + x_n)| = Fx_1 + \cdots + Fx_n,$$

pero por hipótesis $Fx_1 + \cdots + Fx_n \geq r(\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|)$, luego (1.15) se tiene.

Veamos la igualdad en (1.15). Si (1.16) y (1.17) se tienen, entonces está claro que se tiene la igualdad en (1.15). Supongamos ahora que se tiene la igualdad en (1.15) y que $r\|x_i\| \leq Fx_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ y $r \geq 0$. Luego en particular, si $r = 1$, $Fx_i \geq \|x_i\|$ y $\|x_1\| + \cdots + \|x_n\| = \|x_i + \cdots + x_n\|$, pero $Fx_i \leq \|x_i\|$, por lo que $Fx_i = \|x_i\|$ y

$$\|x_i + \cdots + x_n\| = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| = Fx_1 + \cdots + Fx_n = F(x_1 + \cdots + x_n),$$

con lo cual (1.17) se tiene. Finalmente de la igualdad en (1.15) y de (1.17) obtenemos (1.16). □

El siguiente resultado recopíla algunos teoremas clásicos en la teoría métrica del punto fijo. No daremos su demostración, sin embargo dejamos las referencias.

Teorema 1.3.2 (Goebel, Kirk, Shimi, [29])**.** *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, K un subconjunto no vacio, acotado, convexo y cerrado de X y sea $T : K \subseteq X \to K$ una aplicación continua, si*

$$\|Tx - Ty\| \leq a_1\|x - y\| + a_2\|x - Tx\| + a_3\|y - Ty\| + a_4\|x - Ty\| + a_5\|y - Tx\|,$$

para todo $x, y \in K$ y algunos $a_i \geq 0$ con $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 1$, entonces T tiene un único punto fijo en K. En particular, T tiene un único punto fijo en K si se cumplen cualquiera de las siguientes condiciones:

(a) *K un subconjunto no vacio, acotado, convexo y cerrado de X y existe $\alpha \in [0, 1)$ tal que*

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in K \quad (\textit{contracción de Banach})$$

ver [32].

(b) *K un subconjunto no vacio, acotado, convexo y cerrado de X y existe $\alpha \in [0, 1/2)$*

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\left(\|x - Tx\| + \|y - Ty\|\right),$$

para todo $x, y \in K$ (Kannan [33, 34]).

(c) *K un subconjunto no vacio, acotado, convexo y cerrado de X y existen a_1, a_2, a_3 con $0 \leq a_1 + a_2 + a_3 < 1$ tales que*

$$\|Tx - Ty\| \leq a_1\|x - y\| + a_2\|x - Tx\| + a_3\|y - Ty\|, \text{ para todo } x, y \in K$$

(Reich, [59–61]*).*

(d) *K un subconjunto no vacio, acotado, convexo y cerrado de X y existen $a, b \geq 0$, con $a + 2b < 1$ tales que*

$$\|Tx - Ty\| \leq a\|x - y\| + b\left(\|x - Tx\| + \|y - Ty\|\right), \text{ para todo } x, y \in K$$

(Nova, [19, 20, 50]*).*

En el Teorema anterior, si un operador $T : X \to X$ es una *contracción de Banach* con constante α escribimos $T \in BC(\alpha)$, si T satisface la condición (b) decimos que T es del tipo *Kannan* y escribimos $T \in KA(\alpha)$, si T satisface la condición (c), escribimos $T \in RE(a_1, a_2, a_3)$ para denotar que T es un operador del tipo *Reich* . Finalmente, si un operador satisface la condición (d) escribimos $T \in D(a, b)$.

Estas condiciones en son general independientes entre ellas, en [49] se muestran ejemplos sobre esto. Una comparación de estas y otras clases de aplicaciones de tipo contractivo se dan en [62].

Sea X un espacio de Banach y $T, S : X \to X$ dos aplicaciones. Estableceremos siguiente resultado dado en [48]. Supongamos que se tienen las hipótesis del Teorema 1.3.1 para los valores $x - Tx$ y $x - Sx$, donde x no es punto fijo común del par (T, S); esto es, F es un funcional lineal real de norma unitaria definido en X y

$$\begin{aligned} 0 < r\|x - Tx\| &\leq F(x - Tx) \\ 0 < r\|x - Sx\| &\leq F(x - Sx), \end{aligned} \tag{1.18}$$

para todo $x \in X \setminus \{x = Tx \wedge x = Sx\}$, $r > 0$. Nos referiremos al sistema de desigualdades en (1.18) como *condición de Diaz—Metcalf*. Nótese que en el caso en que $0 = r = F(x - Tx) = F(x - Sx)$, en virtud del Teorema 1.3.2 x es un punto fijo común de T y S, el cual es único o no existe.

Teorema 1.3.3. *Sea X un espacio de Banach y $T, S : \overline{B}(0, r) \to \overline{B}(0, r)$. Supongamos que las siguientes condiciones se tienen*

(a) $T \in BC(\alpha)$.

(b) *Para cada $x \in \overline{B}(0, r)$, la condición* (1.18) *de Diaz–Metcalf se tiene para todo $r > 0$.*

Entonces,

(i) $T + S \in D(\alpha, (\beta + 1)/r)$, *si* $S \in KA(\beta)$ *con*

$$\beta \leq \inf_{x,y \in \overline{B}(0,r)} \left\{ \frac{1}{2r}(\|x - (T + S)x\| + \|y - (T + S)y\|) \right\}.$$

(ii) $T + S \in RE(a, (a_2 + 1)/r, (a_3 + 1)/r)$, *si* $S \in RE(a_1, a_2, a_3)$, $a = \alpha + a_1$ *y*

$$a_2 + a_3 \leq \frac{1}{r} \min_{x,y \in \overline{B}(0,r)} \{\|x - (T + S)x\|, \|y - (T + S)y\|\}.$$

Demostración. Sea $T \in BC(\alpha)$ y $S \in KA(\beta)$. Por lo tanto

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\| \text{ y } \|Sx - Sy\| \leq \beta(\|x - Sx\| + \|y - Sy\|);$$

entonces

$$\begin{aligned}\|(T+S)x - (T+S)y\| &= \|Tx - Ty + Sx - Sy\| \\ &\leq \|Tx - Ty\| + \|Sx - Sy\| \\ &\leq \alpha\|x - y\| + \beta(\|x - Sx\| + \|y - Sy\|),\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\beta(\|x - Sx\| + \|y - Sy\|) \leq \beta(\|x - Sx\| + \|y - Sy\| + \|x - Tx\| + \|y - Ty\|).$$

Ahora, por la desigualdad (1.15) en el Teorema 1.3.1

$$\|x - Sx\| + \|x - Tx\| \leq \frac{1}{r}\|x - Tx + x - Sx\| = \frac{1}{r}\|2x - (T+S)x\|.$$

De manera similar concluimos

$$\|y - Sy\| + \|y - Ty\| \leq \frac{1}{r}\|2y - (T+S)y\|,$$

de donde

$$\begin{aligned}\beta(\|x - Sx\| + \|y - Sy\|) &\leq \frac{\beta}{r}(\|2x - (T+S)x\| + \|2y - (T+S)y\|) \\ &\leq \frac{\beta}{r}(\|x\| + \|y\|) + \frac{\beta}{r}(\|x - (T+S)x\| + \|y - (T+S)y\|) \\ &\leq 2\beta + \frac{\beta}{r}(\|x - (T+S)x\| + \|y - (T+S)y\|).\end{aligned}$$

En la última desigualdad usamos el hecho que $x, y \in \overline{B}(0, r)$. Concluimos que

$$\|(T+S)x - (T+S)y\| \leq \alpha\|x - y\| + \frac{\beta}{r}(\|x - (T+S)x\| + \|y - (T+S)y\|) + 2\beta.$$

Pero, por la estimación impuesta sobre β en (i)

$$\beta \leq \frac{1}{2r}(\|x - (T+S)x\| + \|y - (T+S)y\|),$$

con lo cual

$$\|(T+S)x - (T+S)y\| \leq \alpha\|x - y\| + ((\beta+1)/r)(\|x - (T+S)x\| + \|y - (T+S)y\|).$$

Lo cual significa que $T + S \in D(\alpha, (\beta+1)/r)$. Demostremos (ii). Tenemos que

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\|$$

y

$$\|Sx - Sy\| \leq a_1\|x - y\| + a_2\|x - Sx\| + a_3\|y - Sy\|;$$

entonces

$$\begin{aligned}\|(T+S)x-(T+S)y\| &\leq \|Tx-Ty\|+\|Sx-Sy\| \\ &\leq \|Tx-Ty\|+\|Sx-Sy\|+a_2(\|x-Tx\|)+a_3(\|y-Ty\|).\end{aligned}$$

Luego, en analogía con lo hecho en (i) tenemos que

$$\begin{aligned}\|(T+S)x-(T+S)y\| &\leq a\|x-y\|+a_2(\|x-Tx\|+\|x-Sx\|) \\ &\quad +a_3(\|y-Ty\|+\|y-Sy\|) \\ &\leq a\|x-y\|+\frac{a_2}{r}\|2x-(T+S)x\|+\frac{a_3}{r}\|2y-(T+S)y\|,\end{aligned}$$

donde $a=a_1+\alpha$. Pero $x,y\in\overline{B}(0,r)$, con lo cual
$\frac{a_2}{r}\|2x-(T+S)x\|+\frac{a_3}{r}\|2y-(T+S)y\| \leq \frac{a_2}{r}\|x-(T+S)x\|+\frac{a_3}{r}\|y-(T+S)y\|+a_2+a_3.$
Entonces concluimos que

$$\begin{aligned}\|(T+S)x-(T+S)y\| &\leq a\|x-y\|+\frac{a_2}{r}\|x-(T+S)x\| \\ &\quad +\frac{a_3}{r}\|y-(T+S)y\|+a_2+a_3.\end{aligned}$$

Ahora, por la estimación en (ii) sobre el termino a_2+a_3, tenemos que

$$a_2\leq\frac{1}{r}\|x-(T+S)x\| \text{ y } a_3\leq\frac{1}{r}\|y-(T+S)y\|.$$

Con lo cual

$\|(T+S)x-(T+S)y\| \leq a\|x-y\|+((a_2+1)/r)\|x-(T+S)x\|+((a_3+1)/r)\|y-(T+S)y\|.$
Esto es $T+S\in RE(a,((a_2+1)/r)/r,((a_3+1)/r))$. □

Observación 1.3.1. *Las estimaciones para los escalares β y a_2+a_3 dadas en* (i) *y* (ii) *respectivamente no son únicas, por ejemplo, si suponemos que*

$$\beta\leq\frac{1}{r}\min_{x,y\in\overline{B}(0,r)}\{\|x-(T+S)x\|,\|y-(T+S)y\|\}.$$

Tenemos que $T+S\in D(\alpha,(\beta+1)/r)$. Es decir, obtenemos el mismo resultado pero con diferente estimación sobre β.

De la condición (1.18) de *Diaz–Metcalf*, podemos obtener una desigualdad triángulo contraria. Queremos ahora saber bajo que condiciones se tiene la igualdad en la desigualdad triangular. Podemos obtener dichas condiciones del siguiente resultado originalmente demostrado en [43].

Teorema 1.3.4. *Sean x, y elementos no nulos de un espacio normado X. Entonces*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \text{mín}\,\{\|x\|, \|y\|\} \tag{1.19}$$

y

$$\|x+y\| \geq \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \text{máx}\,\{\|x\|, \|y\|\} \tag{1.20}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|x\| \leq \|y\|$. Entonces, por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \left\|\frac{\|x\|}{\|x\|}x + \frac{\|y\|}{\|y\|}y + \left(1 - \frac{\|x\|}{\|y\|}\right)y\right\| \\
&\leq \|x\|\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| + \|y\| - \|x\| \\
&= \|y\| + \left(\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| - 1\right)\|x\| \\
&= \|x\| + \|y\| + \left(\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| - 2\right)\|x\|.
\end{aligned}$$

Con lo cual, tenemos la estimación (1.19). De manera similar demostramos (1.20). □

Vemos que si, $\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| = 2$, de (1.19) y (1.20) obtenemos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. De igual forma, si $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ de (1.19) y (1.20) tenemos que $\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| = 2$. Por lo tanto, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.3.5. *Si x, y son elementos no nulos de un espacio normado X. Entonces*

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \text{ si y sólo si } \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| = 2.$$

Ahora, podemos establecer un resultado similar al Teorema 1.3.3

Teorema 1.3.6 (Primer teorema de punto fijo)**.** *Sea X un espacio de Banach y $T, S : \overline{B}(0,r) \to \overline{B}(0,r)$. Supongamos que las siguientes condiciones se tienen*

(a) $T \in BC(\alpha)$.

(b) *Para cada $x \in X \setminus \{x = Tx \wedge x = Sx\}$ tenemos que*

$$\left\|\frac{x - Sx}{\|x - Sx\|} + \frac{x - Tx}{\|x - Tx\|}\right\| = 2.$$

Entonces,

(i) $T+S \in D(\alpha, \beta+2/13)$, *si* $S \in KA(\beta)$ *con*

$$\beta \leq \inf_{x,y\in\overline{B}(0,r)} \left\{ \frac{1}{13r}(\|x-(T+S)x\| + \|y-(T+S)y\|) \right\}.$$

(ii) $T+S \in RE(a, a_2+1/4, a_3+1/4)$, *donde* $a=\alpha+a_1$, *si* $S \in RE(a_1,a_2,a_3)$ *y*

$$a_2+a_3 \leq \frac{1}{4r} \min_{x,y\in\overline{B}(0,r)} \{\|x-(T+S)x\|, \|y-(T+S)y\|\}.$$

Demostración. Sea $T \in BC(\alpha)$ y $S \in KA(\beta)$. Por lo tanto

$$\|Tx-Ty\| \leq \alpha\|x-y\| \text{ y } \|Sx-Sy\| \leq \beta(\|x-Sx\| + \|y-Sy\|);$$

entonces

$$\begin{aligned} \|(T+S)x-(T+S)y\| &= \|Tx-Ty+Sx-Sy\| \\ &\leq \|Tx-Ty\| + \|Sx-Sy\| \\ &\leq \alpha\|x-y\| + \beta(\|x-Sx\| + \|y-Sy\|). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\beta(\|x-Sx\| + \|y-Sy\|) \leq \beta(\|x-Sx\| + \|y-Sy\| + \|x-Tx\| + \|y-Ty\|).$$

Ahora, por la condición (b) y el Corolario 1.3.5, tenemos que

$$\|x-Sx\| + \|x-Tx\| = \|x-Tx+x-Sx\| = \|2x-(T+S)x\|.$$

De manera similar concluimos

$$\|y-Sy\| + \|y-Ty\| = \|2y-(T+S)y\|,$$

de donde

$$\begin{aligned} \beta(\|x-Sx\| + \|y-Sy\|) &\leq \beta(\|2x-(T+S)x\| + \|2y-(T+S)y\|) \\ &\leq \beta(\|x\| + \|y\| + \|x-(T+S)x\| + \|y-(T+S)y\|) \\ &\leq 2\beta r + \beta(\|x-(T+S)x\| + \|y-(T+S)y\|). \end{aligned}$$

En la última desigualdad usamos el hecho de que $x, y \in \overline{B}(0,r)$. Concluimos que

$$\|(T+S)x-(T+S)y\| \leq \alpha\|x-y\| + \beta(\|x-(T+S)x\| + \|y-(T+S)y\|) + 2\beta r.$$

Pero, por la estimación impuesta sobre β en (i)

$$\beta \leq \frac{1}{13r}(\|x-(T+S)x\| + \|y-(T+S)y\|),$$

de esta estimación concluimos por un lado que,

$$\beta \leq \frac{1}{13r}(\|x-(T+S)x\|+\|y-(T+S)y\|) \leq 6r/13r < 1/2,$$

en concordancia con el hecho que $S \in KA(\beta)$, y por el otro,

$$\|(T+S)x-(T+S)y\| \leq \alpha\|x-y\|+(\beta+2/13)(\|x-(T+S)x\|+\|y-(T+S)y\|).$$

Lo cual significa que $T+S \in D(\alpha, \beta+2/13)$.

Demostremos (ii). Tenemos que

$$\|Tx-Ty\| \leq \alpha\|x-y\|$$

y

$$\|Sx-Sy\| \leq a_1\|x-y\|+a_2\|x-Sx\|+a_3\|y-Sy\|;$$

entonces

$$\begin{aligned}\|(T+S)x-(T+S)y\| &\leq \|Tx-Ty\|+\|Sx-Sy\| \\ &\leq \|Tx-Ty\|+\|Sx-Sy\|+a_2(\|x-Tx\|)+a_3(\|y-Ty\|).\end{aligned}$$

Luego, en analogía con lo hecho en (i) tenemos que

$$\begin{aligned}\|(T+S)x-(T+S)y\| \leq a\|x-y\| &+ a_2(\|x-Tx\|+\|x-Sx\|) \\ &+ a_3(\|y-Ty\|+\|y-Sy\|) \\ &\leq a\|x-y\|+a_2\|2x-(T+S)x\|+a_3\|2y-(T+S)y\|,\end{aligned}$$

donde $a = a_1+\alpha$. Pero $x, y \in \overline{B}(0,r)$, con lo cual

$$a_2\|2x-(T+S)x\|+a_3\|2y-(T+S)y\| \leq a_2\|x-(T+S)x\|+a_3\|y-(T+S)y\|+(a_2+a_3)r.$$

Entonces concluimos que

$$\begin{aligned}\|(T+S)x-(T+S)y\| \leq a\|x-y\| &+ a_2\|x-(T+S)x\| \\ &+ a_3\|y-(T+S)y\|+(a_2+a_3)r.\end{aligned}$$

Ahora, por la estimación en (ii) sobre el termino a_2+a_3, tenemos que

$$a_2 \leq \frac{1}{4r}\|x-(T+S)x\| \text{ y } a_3 \leq \frac{1}{4r}\|y-(T+S)y\|.$$

Con lo cual

$$\|(T+S)x-(T+S)y\| \leq a\|x-y\|+(a_2+1/4)\|x-(T+S)x\|+(a_3+1/4)\|y-(T+S)y\|.$$

Esto es $T+S \in RE(a, a_2+1/4, a_3+1/4)$, donde $a = \alpha+a_1$. □

Nos referiremos a la igualdad en (b) en el Teorema anterior, como *primera condición de Maligranda*

Observación 1.3.2. *Concluimos del Teorema anterior que el operador $T+S$ pertenece a una de las siguientes clases contractivas:*

(a) $T+S \in D(\alpha, \beta + 2/13)$

(b) $T+S \in RE(a, a_2 + 1/4, a_3 + 1/4)$, *donde* $a = \alpha + a_1$,

en ambos casos, si X es uniformemente convexo y los operadores S y T son continuos en la bola $\overline{B}(0,r)$, entonces por el Teorema 1.3.2, el operador $T+S$ posee un único punto fijo en la bola $\overline{B}(0,r)$, para una escogencia conveniente de los parámetros contractivos.

El siguiente resultado da condiciones bajo las cuales se tiene la igualdad en la desigualdad triangular generalizada.

Teorema 1.3.7. *Si $x_1, \ldots, x_n$ son elementos en un espacio normado X, entonces la igualdad*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \tag{1.21}$$

se tiene si y sólo si

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| = \sum_{k=1}^{n} a_k \|x_k\| \tag{1.22}$$

para cualesquiera números positivos $a_1, \ldots, a_n$.

Demostración. Es suficiente demostrar que (1.21) implica (1.22). Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $a_1 = \max_{1 \le k \le n} a_k$. Entonces, por la condición (1.21) obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| &= \left\| a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} (a_1 - a_k) x_k \right\| \\
&\geq a_1 \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| - \left\| \sum_{k=1}^{n} (a_1 - a_k) x_k \right\| \\
&\geq a_1 \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| - \sum_{k=1}^{n} (a_1 - a_k) \|x_k\| \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \|x_k\| .
\end{aligned}$$

La otra desigualdad se sigue de la desigualdad del triángulo. □

Ahora podemos establecer otro resultado de punto fijo.

Teorema 1.3.8 (Segundo teorema de punto fijo)**.** *Sea X un espacio de Banach y $T, S : \overline{B}(0,r) \to \overline{B}(0,r)$. Supongamos que las siguientes condiciones se tienen*

(a) $T \in BC(\alpha)$.

(b) *Para cada $x \in X \setminus \{x = Tx \wedge x = Sx\}$ tenemos que*

$$\|a(x - Sx) + b(x - Tx)\| = a\|x - Sx\| + b\|x - Tx\|.$$

para cualquier par de números positivos a y b.

Entonces,

(i) $T + S \in D(\alpha, \beta + 2/13)$*, si* $S \in KA(\beta)$ *con*

$$\beta \leq \inf_{x,y \in \overline{B}(0,r)} \left\{ \frac{1}{13r}(\|x - (T+S)x\| + \|y - (T+S)y\|) \right\}.$$

(ii) $T + S \in RE(a, a_2 + 1/4, a_3 + 1/4)$*, donde* $a = \alpha + a_1$*, si* $S \in RE(a_1, a_2, a_3)$ *y*

$$a_2 + a_3 \leq \frac{1}{4r} \min_{x,y \in \overline{B}(0,r)} \{\|x - (T+S)x\|, \|y - (T+S)y\|\}.$$

Demostración. Es análoga del Teorema 1.3.6, pero en vez de usar el Corolario 1.3.5, usamos el Teorema 1.3.7. □

Nos referiremos a la igualdad en (b) impuesta sobre los operadores T y S en el Teorema anterior como *segunda condición de Maligranda*.

Capítulo 2

Espacios de Lebesgue con Exponente Variable

En este capítulo introduciremos los espacios de Lebesgue con exponente variable y mostraremos algunas de sus propiedades. Para más información sobre estos espacios recomendamos [9, 14, 15, 18, 58].

2.1. El modular y las funciones exponentes

Definición 2.1.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto Lebesgue medible, denotamos por $\mathcal{P}(\Omega)$ a la familia de todas las funciones Lebesgue–medibles $p(\cdot) : \Omega \to [1, \infty]$. Los elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$ son llamados funciones exponentes o simplemente exponentes.

Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $E \subseteq \Omega$, denotamos respectivamente por $p_-(E)$ y $p_+(E)$ al ínfimo y al supremo esencial del exponente $p(\cdot)$. Esto es,

$$p_-(E) := \operatorname{essinf}_{x\in E} p(x) = \sup\{M > 0 : \ p(x) \geq M \text{ c.t.p. } en\ \Omega\},$$

$$p_+(E) := \operatorname{esssup}_{x\in E} p(x) = \text{ínf}\{M > 0 : \ p(x) \leq M \text{ c.t.p. } en\ \Omega\}.$$

Si el dominio está claro escribiremos $p_- = p_-(\Omega)$, $p_+ = p_+(\Omega)$.

Definición 2.1.2. Dados Ω un conjunto Lebesgue–medible y una función $r(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$, decimos que $r(\cdot)$ es localmente ln-Hölder continua, y denotamos esto por $r(\cdot) \in LH_0(\Omega)$, si existe una constante $C_0 > 0$ tal que

$$|r(x) - r(y)| \leq \frac{C_0}{-\ln\|x - y\|},$$

para todo $x, y \in \Omega$ con $\|x - y\| \leq 1/2$.

Decimos que la función $r(\cdot)$ es ln-Hölder continua en el infinito, y denotamos esto por $r(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$, si existen constantes C_∞ y r_∞ tales que

$$|r(x) - r_\infty| \leq \frac{C_\infty}{\ln(e + \|x\|)}, \tag{2.1}$$

para todo $x \in \Omega$.

Si $r(\cdot)$ es localmente ln-Hölder continua y ln-Hölder continua en el infinito, denotaremos esto por $r(\cdot) \in LH(\Omega)$, esto es, tenemos que $LH(\Omega) = LH_0(\Omega) \cap LH_\infty(\Omega)$.

Finalmente, para un exponente $p(\cdot)$ introducimos el siguiente conjunto

$$L^\infty_+(\Omega) = \{p \in L^\infty(\Omega) : p_- \geq 1\}.$$

Nótese que si $p \in L^\infty_+(\Omega)$ se verifica que

$$1 \leq p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty.$$

Como en el caso de los espacios de Lebesgue clásicos, particionaremos Ω en tres diferentes conjuntos dependiendo de la función exponente p.

$$\Omega^{p(\cdot)}_\infty = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\} = \bigcap_{n\geq 1} \{x \in \Omega : p(x) > n\}$$
$$\Omega^{p(\cdot)}_1 = \{x \in \Omega : p(x) = 1\},\ \Omega^{p(\cdot)}_* = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\}.$$

De nuevo, por simplicidad omitiremos el superíndice $p(\cdot)$ si no hay confusión.

Dada $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, definimos la función exponente conjugada $p'(x)$ por la fórmula

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1, \quad x \in \Omega,$$

con la convención de que $1/\infty = 0$.

Definición 2.1.3. Dados Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue medible, definimos el funcional modular (*o simplemente modular*) asociado con $p(\cdot)$ por

$$\rho_{p(\cdot)}(f) := \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}.$$

Si la función f no es acotada en Ω_∞ o si $f(\cdot)^{p(\cdot)} \notin L^1(\Omega)$, definimos $\rho_{p(\cdot),\Omega}(f) = \infty$. En gran parte de los resultados que demostraremos en este capítulo supondremos que $p(x) < \infty$ para todo $x \in \Omega$, con lo cual $\Omega_\infty = \emptyset$ y $\|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} = 0$ por lo que la expresión para el funcional modular se reduce a

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx.$$

A continuación establecemos las propiedades fundamentales del modular.

Proposición 2.1.1. *Dados Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue medible.*

(a) $\rho(f) \geq 0$ *y* $\rho(f) = \rho(|f|)$ *para toda* f.

(b) $\rho(f) = 0$ *si solo si* $f(x) = 0$ c.t.p. *en* Ω.

(c) ρ *es un funcional convexo:* $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$,

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq \alpha\rho(f) + \beta\rho(g).$$

(d) *El funcional* ρ *conserva desigualdades, esto es*

$$\textit{si } |f(x)| \leq |g(x)| \text{ c.t.p. } \textit{en } \Omega, \textit{ entonces } \rho(f) \leq \rho(g).$$

(e) ρ *tiene la siguiente propiedad de continuidad: si para algún* $\lambda_0 > 0$, $\rho(f/\lambda_0) < \infty$, *entonces* $\lambda \mapsto \rho(f/\lambda)$ *es continua y decreciente en* $[\lambda_0, \infty)$. *Más aún* $\rho(f/\lambda) \to 0$ *cuando* $\lambda \to \infty$.

Demostración. Primero que todo, notemos que al ser la composición de funciones medibles medible, $y = |f(x)|^{p(x)} = \exp^{p(x)\ln|f(x)|}$ es una función medible. Ahora, la propiedad (a) es inmediata a partir de la definición del modular y los ítems (b), (d) y (e) se siguen de las propiedades de las normas en L^1 y L^∞. La propiedad (c) se tiene de la convexidad de la norma en L^∞ y del hecho que la función $t \mapsto t^p$ es convexa para todo $p \geq 1$ y $t \geq 0$. □

Como una consecuencia inmediata de la convexidad del modular se sigue que

$$\rho(kf) \leq k\rho(f) \text{ si } 0 \leq k \leq 1 \text{ y } \rho(kf) \geq k\rho(f) \text{ si } k \geq 1.$$

En general el modular no satisface la desigualdad triangular, sin embargo tenemos el siguiente resultado:

$$\rho(f + g) \leq 2^{p_+ - 1}(\rho(f) + \rho(g)).$$

En efecto, como $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ para todo $a, b \geq 0$ y $p \geq 1$. Tenemos que

$$|f(x) + g(x)|^{p(x)} \leq 2^{p(x)-1}(|f(x)|^{p(x)} + |g(x)|^{p(x)}), \text{ para cada } x \in \Omega,$$

de donde

$$\rho(f + g) \leq \int_\Omega 2^{p(x)-1}(|f(x)|^{p(x)} + |g(x)|^{p(x)})dx.$$

Pero como $p(x) \leq p_+$ c.t.p. en Ω, si $p_+ < \infty$, obtenemos que

$$\int_\Omega 2^{p(x)-1}(|f(x)|^{p(x)} + |g(x)|^{p(x)})dx \leq 2^{p_+ - 1}(\rho(f) + \rho(g)).$$

Nos referimos a esta relación como *desigualdad modular del triángulo.*

2.2. El espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Con el siguiente ejemplo motivamos la definición de los espacios de Lebesgue con exponente variable.

Ejemplo 2.2.1. En la recta real, consideremos la función, $f(x) = |x|^{-1/3}$. Mostraremos, que la función f no está en $L^p(\mathbb{R})$ para cualquier p, $1 \leq p \leq \infty$. En efecto, supongamos que $x > 0$. Entonces, si $0 < a < b$,

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = \begin{cases} \ln b/a, & \text{si } p = 3, \\ 3/(3-p)\left(b^{3/(3-p)} - a^{3/(3-p)}\right), & \text{si } p \neq 3. \end{cases}$$

Además,

$$\lim_{a \to 0+} a^{3/(3-p)} = \begin{cases} 0, & \text{si } p < 3, \\ \infty, & \text{si } p > 3. \end{cases}$$

y

$$\lim_{b \to \infty} b^{3/(3-p)} = \begin{cases} \infty, & \text{si } p < 3, \\ 0, & \text{si } p > 3. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|^p dx = \infty$, y como la función f es par, se debe tener que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \infty$, y esto para todo $1 \leq p \leq \infty$. Obsérvese que como la función f no es acotada, $f \notin L^\infty(\mathbb{R})$.

Como contraste, si permitimos que el exponente varíe, más específicamente, tomemos

$$p(x) = \frac{9|x| + 2}{2|x| + 1},$$

demostraremos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$. Nuevamente supongamos que $x > 0$. Tenemos que

$$|f(x)|^{p(x)} = \frac{1}{x^{r(x)}},$$

donde, $r(x) := p(x)/3 = 3(6x+3)/2 - 5/2$. Entonces

$$\frac{1}{x^{r(x)}} = \frac{x^{5(6x+3)/2}}{x^{3/2}}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$x^{5(6x+3)/2} = \frac{1/x^{r(x)}}{1/x^{3/2}},$$

donde, $\lim_{x\to\infty} x^{5(6x+3)/2} = 1 \neq 0$, esto sumado al hecho que $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}dx < \infty$, nos permite concluir que

$$\int_1^\infty |f(x)|^{p(x)}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{r(x)}}dx < \infty.$$

De manera similar

$$\frac{1/x^{r(x)}}{1/x^{1/2}} = 1/x^{(12x+1)/(12x+6)},$$

donde, $\lim_{x\to\infty} 1/x^{(12x+1)/(12x+6)} = 0$ y $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx < \infty$, lo cual implica que

$$\int_0^1 |f(x)|^{p(x)}dx < \infty.$$

Se concluye que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p(x)}dx = 2\int_0^\infty |f(x)|^{p(x)}dx < \infty.$$

El anterior Ejemplo sugiere definir el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ como el conjunto de todas la funciones f tales que

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx < \infty.$$

Definición 2.2.1. Dados Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ con $1 \leq p(x) < \infty$. Definimos $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ como la clase de todas las funciones Lebesgue medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx < \infty.$$

Proposición 2.2.1. *Dados Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si $p_+ < \infty$ y $\lambda \geq 1$, entonces*

$$\lambda^{p_-}\rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda^{p_+}\rho(f).$$

Si $0 \leq \lambda \leq 1$ tenemos,

$$\lambda^{p_+}\rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda^{p_-}\rho(f).$$

Demostración. Supongamos que $\lambda \geq 1$. Como $p_- \leq p(x) \leq p_+$ c.t.p. en Ω, $\lambda^{p_-} \leq \lambda^{p(x)} \leq \lambda^{p_+}$ y

$$\lambda^{p_-}\int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx \leq \int_\Omega \lambda^{p(x)}|f(x)|^{p(x)}dx \leq \lambda^{p_+}\int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx,$$

es decir, $\lambda^{p_-}\rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda^{p_+}\rho(f)$. La otra desigualdad la obtenemos de manera similar. □

Teorema 2.2.2. *Dados Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}$. Si $p_+ < \infty$, entonces $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio vectorial.*

Demostración. Dado que el espacio de todas las funciones Lebesgue–medibles es en si mismo un espacio vectorial, y dado que $0 \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, es suficiente demostrar que si α y β son reales que no se anulan simultáneamente, entonces $\alpha f + \beta g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ siempre que $f, g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Por las propiedades (a) y (d) en la Proposición 2.1.1, si $\lambda \geq 1$ tenemos que

$$\rho(f/\lambda) = \rho(|f/\lambda|) \leq \rho(|f|) = \rho(f) < \infty,$$

de manera similar $\rho(g/\lambda) < \infty$. Por lo tanto, por las propiedades (a), (c) y (d) de la misma proposición, si $\mu := (|\alpha| + |\beta|)\lambda$, entonces

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\alpha f + \beta g}{\mu}\right) &= \rho\left(\frac{|\alpha f + \beta g|}{\mu}\right) \\
&\leq \rho\left(\frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}\frac{|f|}{\lambda} + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\frac{|g|}{\lambda}\right) \\
&\leq \frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}\rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\rho\left(\frac{g}{\lambda}\right) \\
&\leq \rho\left(f/\lambda\right) + \rho\left(g/\lambda\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Ahora, por la Proposición 2.2.1, si $0 < \mu \leq 1$, $\rho\left(\alpha f + \beta g\right) \leq \mu^{p_-}\rho\left(\dfrac{\alpha f + \beta g}{\mu}\right) < \infty$, y si $\mu > 1$, $\rho\left(\alpha f + \beta g\right) \leq \mu^{p_+}\rho\left(\dfrac{\alpha f + \beta g}{\mu}\right) < \infty$. □

Podemos además dotar de una norma este espacio al definir (norma de Kolmogorov–Minkowski)

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} := \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1\right\}.$$

Si no hay ambigüedad en el dominio Ω escribiremos $\|f\|_{p(\cdot)}$ en vez de $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$. Nótese que si $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, esto es $\rho(f) < \infty$, por la propiedad (e) en la Proposición 2.1.1, la aplicación $F(\lambda) := \rho(f/\lambda)$ es continua y decreciente para todo $\lambda \in [1, \infty)$, además $F(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$. Ahora bien, si $\rho(f/\lambda) > 1$ para todo $\lambda > 0$, lo anterior no se puede cumplir. Por lo tanto, debe existir $\lambda_0 > 0$ con $\rho(f/\lambda_0) \leq 1$, con lo cual por la definición de norma tenemos que $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \lambda_0$. Concluimos, que si $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \infty$.

Teorema 2.2.3. *Dados Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, la función $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ define una norma en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demostración. Demostremos que $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$ si solo si $f \equiv 0$. Supongamos que $f \equiv 0$, entonces $\rho(f/\lambda) = 0 < 1$ para todo $\lambda > 0$, con lo cual $\{\lambda > 0 : \rho(f/\lambda) \leq 1\} = (0, \infty)$. De modo que $\|f\|_{p(\cdot)} = \text{ínf}\,(0, \infty) = 0$. Si ahora, $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$, por las propiedades del ínfimo de un conjunto, dado $0 < \epsilon \leq 1$ existe $\lambda_0 > 0$ con $\rho(f/\lambda_0) \leq 1$ tal que $\lambda_0 < \epsilon$, así que $0 < \lambda_0 < 1$, y por la Proposición 2.2.1 con $\lambda = 1/\lambda_0$ tenemos que $\frac{1}{\lambda_0^{p_-}}\rho(f/\lambda_0) \leq 1$, por consiguiente $\rho(f) \leq \lambda_0^{p_-} < \epsilon^{p_-}$ y $\rho(f) < \epsilon^{p_-}$ para todo $0 < \epsilon \leq 1$, luego, en particular,

$$\rho(f) < \frac{1}{n^{p_-}} \text{ para todo } n \geq 1.$$

Por lo tanto, $\rho(f) \leq \text{ínf}\left\{\frac{1}{n^{p_-}} : n \geq 1\right\} = 0$, esto es $\rho(f) = 0$, o lo que es lo mismo $\|f(\cdot)^{p(\cdot)}\|_{L^1(\Omega)} = 0$, lo cual implica que $f(x) = 0$ c.t.p. en Ω. Es decir $f \equiv 0$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, demostraremos que $\|\alpha f\|_{p(\cdot)} = |\alpha|\|f\|_{p(\cdot)}$. Si $\alpha = 0$, $0 = \|0\|_{p(\cdot)} = 0\|f\|_{p(\cdot)}$ y el resultado se tiene. Supongamos que $\alpha \neq 0$; por un cambio de variables tenemos

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{p(\cdot)} &= \text{ínf}\,\{\lambda > 0 : \rho(|\alpha| f/\lambda) \leq 1\} \\
&= \text{ínf}\left\{|\alpha|\frac{\lambda}{|\alpha|} > 0 : \rho\left(\frac{f}{\lambda/|\alpha|}\right) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha|\,\text{ínf}\,\{\mu > 0 : \rho(f/\mu) \leq 1\} \\
&= |\alpha|\|f\|_{p(\cdot)}.
\end{aligned}$$

Demostremos ahora la desigualdad triangular. Sean $f, g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, por definición de ínfimo, dado $\epsilon > 0$ existen $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tales que

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq \lambda_1 < \|f\|_{p(\cdot)} + \epsilon/2,$$

y

$$\|g\|_{p(\cdot)} \leq \lambda_2 < \|g\|_{p(\cdot)} + \epsilon/2,$$

con $\rho(f/\lambda_1) \leq 1$, $\rho(f/\lambda_2) \leq 1$. Entonces

$$\|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)} \leq \lambda_1 + \lambda_2 < \|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)} + \epsilon.$$

Sea $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, por la convexidad del funcional ρ tenemos que

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{f+g}{\lambda}\right) &= \rho\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{f}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{f}{\lambda_2}\right) \\
&\leq \frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\left(\frac{f}{\lambda_1}\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda}\rho\left(\frac{f}{\lambda_2}\right) \\
&\leq \frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{\lambda_2}{\lambda} = 1.
\end{aligned}$$

Lo cual significa que

$$\|f+g\|_{p(\cdot)} \leq \lambda_1 + \lambda_2.$$

Por lo tanto,

$$\|f+g\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)} + \epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

por consiguiente

$$\|f+g\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)}.$$

□

Como consecuencia de la convexidad del modular y la definición de la norma en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.4. *Dados Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces*

(a) *La norma en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ conserva desigualdades; esto es,*

$$\text{si } |f(x)| \leq |g(x)| \text{ c.t.p. en } \Omega, \text{ entonces } \|f\|_{p(\cdot)} \leq \|g\|_{p(\cdot)}.$$

(b) *Si $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, entonces $\rho(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$, y si $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$, entonces $\rho(f) \geq \|f\|_{p(\cdot)}$.*

(c) *Si $p_+ < \infty$, entonces $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) = 1$ para toda función no nula $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demostración. Supongamos que $|f(x)| \leq |g(x)|$ c.t.p. en Ω. Si $g \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$ y la condición (a) se sigue. Sea $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $\|g\|_{p(\cdot)} \leq 1$. Si $\rho(f) > 1$ por definición de la norma, $\|g\|_{p(\cdot)} > 1$. Por lo tanto debemos tener que $\rho(f) \leq 1$. Concluimos que $\rho(g/\|g\|_{p(\cdot)}) \leq 1$ para toda función $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $\|g\|_{p(\cdot)} > 0$. Ahora, por la Proposición 2.1.1(d) $\rho(f/\lambda) \leq \rho(g/\lambda)$ para todo $\lambda > 0$, luego, en particular, $\rho(f/\|g\|_{p(\cdot)}) \leq \rho(g/\|g\|_{p(\cdot)}) \leq 1$, esto es $\rho(f/\|g\|_{p(\cdot)}) \leq 1$. Con lo cual, por la definición de la norma $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \|g\|_{p(\cdot)}$.

Demostremos (b). Supongamos que $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, mostraremos que $\rho(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$. Si $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$, entonces $f \equiv 0$, con lo cual $\rho(f) = 0$ y el resultado se tiene. Supongamos entonces que $0 < \|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, por la convexidad del modular,

$$\rho(f) = \rho\left(\|f\|_{p(\cdot)} \frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq \|f\|_{p(\cdot)} \rho\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Supongamos ahora que $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$, por la definición de la norma, $\rho(f) > 1$. Pero entonces tenemos

$$\rho\left(\frac{f}{\rho(f)}\right) = \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\rho(f)}\right|^{p(x)} dx \leq \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\rho(f)} dx = 1.$$

De donde se sigue que $\rho(f) \geq \|f\|_{p(\cdot)}$.

Finalmente, supongamos que $p_+ < \infty$ pero que $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) < 1$. Entonces para todo $0 < \lambda < \|f\|_{p(\cdot)}$, por la Proposición 2.2.1,

$$\rho(f/\lambda) = \rho\left(\frac{\|f\|_{p(\cdot)}}{\lambda}\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq \left(\frac{\|f\|_{p(\cdot)}}{\lambda}\right)^{p_+} \rho\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) < \left(\frac{\|f\|_{p(\cdot)}}{\lambda}\right)^{p_+}.$$

Entonces, $\lim_{\lambda\to\|f\|_{p(\cdot)}} \rho(f/\lambda) < \lim_{\lambda\to\|f\|_{p(\cdot)}} \left(\frac{\|f\|_{p(\cdot)}}{\lambda}\right)^{p_+} = 1$, o lo que es lo mismo $\lim_{\lambda\to\|f\|_{p(\cdot)}}(\rho(f/\lambda)-1) < 0$, lo cual significa que $\rho(f/\lambda) < \epsilon + 1$ para todo $\epsilon > 0$ para λ suficientemente cercano a $\|f\|_{p(\cdot)}$. Es decir, $\rho(f/\lambda) < 1$ para λ suficientemente cercano a $\|f\|_{p(\cdot)}$. Pero por la definición de la norma $\rho(f/\lambda) \geq 1$. Lo cual es una contradicción, luego la igualdad se tiene. □

El siguiente resultado muestra que la convergencia en el modular y en la norma son nociones equivalentes, lo cual será de gran utilidad en esta tesis.

Proposición 2.2.5. *Si $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $1 \leq p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty$* c.t.p. *en Ω, entonces si $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$*

$$\|f\|_{p(\cdot)}^{p_+} \leq \rho(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{p_-}, \tag{2.2}$$

y si $\|f\|_{p(\cdot)} \geq 1$

$$\|f\|_{p(\cdot)}^{p_-} \leq \rho(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{p_+}. \tag{2.3}$$

Demostración. Supongamos que $0 < \|f\|_{p(\cdot)} < 1$. Por la Proposición 2.2.1

$$\lambda^{p_+}\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) \leq \rho(\lambda f/\|f\|_{p(\cdot)}) \leq \lambda^{p_-}\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}),$$

para todo $0 < \lambda < 1$. Luego, en particular, si $\lambda = \|f\|_{p(\cdot)}$, tenemos que

$$\|f\|_{p(\cdot)}^{p_+}\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) \leq \rho(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{p_-}\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}).$$

Pero, por el Corolario 2.2.4(c), $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) = 1$. Por lo tanto

$$\|f\|_{p(\cdot)}^{p_+} \leq \rho(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{p_-}.$$

Ahora, si $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$, $f(x) = 0$ c.t.p. en Ω, con lo cual $\rho(f) = 0$ y vemos que la igualdad se tiene en (2.2). Lo mismo ocurre si $\|f\|_{p(\cdot)} = 1$, ya que una nueva aplicación del Corolario 2.2.4(c) nos dice que $\rho(f) = 1$. De manera análoga demostramos (2.3). □

El corolario anterior nos permite estimar la norma de la función característica de un conjunto.

Corolario 2.2.6. *Dados Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $p_+ < \infty$, si $E \subseteq \Omega$ es tal que $|E| < \infty$ ($|E|$ denota la medida de Lebesgue del conjunto E), entonces si $\|\chi_E\|_{p(\cdot)} \leq 1$*

$$\|\chi_E\|_{p(\cdot)}^{p_+} \leq |E| \leq \|\chi_E\|_{p(\cdot)}^{p_-}, \tag{2.4}$$

y si $\|\chi_E\|_{p(\cdot)} \geq 1$

$$\|\chi_E\|_{p(\cdot)}^{p_-} \leq |E| \leq \|\chi_E\|_{p(\cdot)}^{p_+}. \tag{2.5}$$

En consecuencia

$$\|\chi_E\|_{p(\cdot)} \leq \text{máx}\left\{|E|^{1/p_-}, |E|^{1/p_+}\right\}. \tag{2.6}$$

Por lo tanto, si $|\Omega| < \infty$, podemos acotar la norma de la función 1:

$$\|1\|_{p(\cdot)} \leq \text{máx}\left\{|\Omega|^{1/p_-}, |\Omega|^{1/p_+}\right\}. \tag{2.7}$$

Demostración. Es suficiente aplicar la Proposición 2.2.5 con $f = \chi_E$ y notar que

$$\rho(\chi_E) = \int_\Omega \chi_E(x)^{p(x)} dx = \int_\Omega \chi_E(x) dx = |E|.$$

□

Lema 2.2.7. *Sea $0 < \varphi(x) \leq p(x) \leq p_+ < \infty$, $x \in \Omega$. Entonces, si $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$*

$$\|f\|_{p(\cdot)}^{\varphi_+} \leq \|f^\varphi\|_{p(\cdot)/\varphi(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{\varphi_-}, \tag{2.8}$$

y si $\|f\|_{p(\cdot)} \geq 1$

$$\|f\|_{p(\cdot)}^{\varphi_-} \leq \|f^\varphi\|_{p(\cdot)/\varphi(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{\varphi_+}. \tag{2.9}$$

Demostración. Demostraremos solamente la desigualdad (2.9) ya que (2.8) es análoga. Supongamos que $\|f\|_{p(\cdot)} \geq 1$ y sean $\lambda = \|f\|_{p(\cdot)}$, $\mu = \|f\|_{p(\cdot)/\varphi(\cdot)}$. Por el Corolario 2.2.4(c)

$$1 = \rho_{p(\cdot)/\varphi(\cdot)}(f^\varphi/\mu) = \int_\Omega \left|\frac{f^\varphi}{\mu}\right|^{p(x)/\varphi(x)} dx \text{ y } 1 = \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) = \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx,$$

entonces

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} \frac{\left(\lambda^{p(x)} - \mu^{p(x)/\varphi(x)}\right)}{\lambda^{p(x)}\mu^{p(x)/\varphi(x)}} dx = 0. \tag{2.10}$$

Demostremos la desigualdad de la derecha en (2.9), esto es $\mu \leq \lambda^{\varphi_+}$. Supongamos que $\mu > \lambda^{\varphi_+}$, entonces $\mu^{p(x)/\varphi(x)} > \lambda^{\varphi_+ p(x)/\varphi(x)} > \lambda^{p(x)}$. Esto significa que el numerador en (2.10) es no positivo en c.t.p. en Ω, lo cual es imposible. De igual forma: $\mu < \lambda^{\varphi_+}$ produce no negatividad en el numerador, lo cual es imposible. □

2.3. Embebimiento de $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Definición 2.3.1. Sean X, Y espacios normados. Si la identidad $I_X : X \to Y$ es continua decimos que X se embebe (o encaja) de forma continua en el espacio Y, denotamos este hecho por $X \hookrightarrow Y$. En otras palabras, si $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ son las normas de los espacios X, Y respectivamente, $X \hookrightarrow Y$ si y sólo si

$$\text{existe } c > 0 : \|f\|_Y \leq c\|f\|_X \text{ para todo } f \in X.$$

A continuación mostramos que el embebimiento entre $L^\infty(\Omega)$ y $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tiene lugar cuando el conjunto Ω tiene medida de Lebesgue finita.

Teorema 2.3.1. *Sean Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ tales que $|\Omega| < \infty$ y $p_+ < \infty$. Entonces $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $f \in L^\infty(\Omega)$. Si $f \equiv 0$, el resultado se tiene. Supongamos entonces que f es una función no nula. Para c.t.p. en Ω, tenemos que

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty < \infty.$$

Dado que, el modular conserva desigualdades obtenemos

$$\rho\left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right) \leq \rho(1) = |\Omega| < \infty.$$

Esto es, $\dfrac{f}{\|f\|_\infty} \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, con lo cual $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Concluimos que, $L^\infty(\Omega) \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Más aún, como la norma en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ conserva desigualdades, tenemos que

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq \|\|f\|_\infty\|_{p(\cdot)} = \|f\|_\infty\|1\|_{p(\cdot)} \tag{2.11}$$

Nótese, que la desigualdad (2.11) es finita, ya que $1 \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. □

A continuación establecemos el embebimiento de $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Teorema 2.3.2. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ y supongamos que $0 < |\Omega| < \infty$. Entonces $L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si y sólo si $p(x) \leq q(x) < \infty$ c.t.p. en Ω.*

Demostración. Supongamos que

$$p(x) \leq q(x) < \infty \text{ c.t.p. en } \Omega. \tag{2.12}$$

Sea $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$. Si $0 \leq |f(x)| \leq 1$, puesto que el modular conserva desigualdades tenemos que $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \rho_{p(\cdot)}(1) = |\Omega| < \infty$. Luego, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Por otro lado si $|f(x)| \geq 1$, entonces $|f(x)|^{p(x)} \leq |f(x)|^{q(x)}$, con lo cual $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \rho_{q(\cdot)}(f) < \infty$. Esto es

$f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Concluimos que $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Ahora, tomemos $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ tal que $\|f\|_{q(\cdot)} \leq 1$. Sea $E := \{x \in \Omega : |f(x)| \leq 1\}$

$$\begin{aligned}\rho_{p(\cdot)}(f) &= \int_E |f(x)|^{p(x)}dx + \int_{\Omega\setminus E} |f(x)|^{p(x)}dx \\ &\leq |E| + \int_{\Omega\setminus E} |f(x)|^{q(x)}dx \\ &\leq |E| + \rho_{q(\cdot)}(f).\end{aligned}$$

Como $\|f\|_{q(\cdot)} \leq 1$, por el Corolario 2.2.4(b), $\rho_{q(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{q(\cdot)} \leq 1$. De modo que

$$\rho_{p(\cdot)}(f) \leq |E| + 1.$$

En consecuencia, por la convexidad del modular

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{|E|+1}\right) \leq \frac{\rho_{p(\cdot)}(f)}{|E|+1} \leq 1.$$

Luego, por la definición de la norma de Kolmogorov–Minkowski, $\|f\|_{p(\cdot)} \leq |E| + 1$. Tenemos entonces que

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq |E| + 1 \text{ si } f \in L^{q(\cdot)} \text{ y } \|f\|_{q(\cdot)} \leq 1.$$

En particular, si $\|f\|_{q(\cdot)} > 0$, para $g := \dfrac{f}{\|f\|_{q(\cdot)}}$, vemos que $g \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ y $\|g\|_{q(\cdot)} \leq 1$. Por lo tanto,

$$\left\|\frac{f}{\|f\|_{q(\cdot)}}\right\|_{p(\cdot)} \leq |E| + 1,$$

de donde

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq (|E| + 1)\,\|f\|_{q(\cdot)}, \tag{2.13}$$

si $f \in L^{q(\cdot)}$ y $0 < \|f\|_{q(\cdot)} \leq 1$. Sin embargo, vemos que (2.13) también se verifica si $\|f\|_{q(\cdot)} = 0$, más aún, si $\|f\|_{q(\cdot)} \geq 1$, al aplicar (2.13) a la función $g := \dfrac{f}{\|f\|_{q(\cdot)}}$ tenemos

$$\left\|\frac{f}{\|f\|_{q(\cdot)}}\right\|_{p(\cdot)} \leq (|E| + 1)\left\|\frac{f}{\|f\|_{q(\cdot)}}\right\|_{q(\cdot)},$$

es decir, la desigualdad (2.13) se mantiene. Por consiguiente, esta desigualdad es válida para toda función $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$. Lo cual implica que $L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Demostremos el recíproco. Supongamos que (2.12) no se tiene. Entonces existe un conjunto $E \in \Omega$, con $|E| > 0$ tal que si $x \in E$, $p(x) > q(x)$. Escojamos r de tal forma que $q(x) < r < p(x)$ y definamos $F = \{x \in \Omega : q(x) \leq r\}$. Entonces $0 < |F| < \infty$, $1 < r < \infty$, $F \subseteq E$ y $q(x) \leq r$ si $x \in F$. Particionemos el conjunto F como una unión disyunta de conjuntos F_j, $j \geq 1$, tal que $|F_j| = 2^{-j}|F|$ y definamos una función f por

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{j/r} \chi_{F_j}(x).$$

Entonces f no es acotada, así que

$$\|f\|_{p(\cdot)} \geq \|f\chi_F\|_{p(\cdot)} = \|f\chi_F\|_{\infty} = \infty.$$

Por otro lado, $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ dado que

$$\begin{aligned}\rho_{q(\cdot)}(f) &= \int_{\Omega} |f(x)|^{q(\cdot)} dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{F} \left(\frac{3}{2}\right)^{jq(x)/r} \chi_{F_j}(x) dx.\end{aligned}$$

Ahora, como $F = \bigcup_{1\leq i\leq N} F_i$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{F} \left(\frac{3}{2}\right)^{jq(x)/r} \chi_{F_j}(x) dx &= \int_{\cup F_i} \left(\frac{3}{2}\right)^{jq(x)/r} \chi_{F_j}(x) dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{F_i} \left(\frac{3}{2}\right)^{jq(x)/r} \chi_{F_j}(x) dx \\ &= \int_{F_j} \left(\frac{3}{2}\right)^{jq(x)/r} dx \leq (3/2)^j |F_j|.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{F_j} \left(\frac{3}{2}\right)^{jq(x)/r} \leq \sum_{j=1}^{\infty} (3/2)^j 2^{-j} |F| = 3|F| < \infty.$$

Por lo tanto, el embebimiento no se puede tener. □

Observación 2.3.1. *De la demostración del Teorema anterior, concluimos dos cosas*: *primero si la condición* (2.12) *se satisface, entonces* $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega)$. *Segundo, esta última contenencia es estricta, pues si la condición* (2.12) *no se tiene, entonces existe un conjunto* F *con,* $0 < |F| < \infty$, *el cual podemos particionar de tal forma que* $|F_j| = 2^{-j}|F|$ *y al definir la función*

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{j/r} \chi_{F_j}(x),$$

demostramos que $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$, *pero que,* $f \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

2.4. Desigualdad de Hölder y desigualdad integral de Minkowski

La desigualdad de Hölder clásica nos dice que si p y p' verifican que $p > 1$, $1/p+1/p' = 1$, $f \in L^p(\Omega)$ y $f \in L^{p'}(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}. \tag{2.14}$$

Si admitimos los casos $p = 1$, $p = \infty$ y $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^\infty(\Omega)$, tenemos que

$$\|fg\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_\infty. \tag{2.15}$$

En el siguiente resultado demostraremos una generalización de (2.14) para el caso de los espacios de Lebesgue variable.

Teorema 2.4.1. *Dados Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq K_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}, \tag{2.16}$$

donde $K_{p(\cdot)} = \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-}\right) \|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty$.

Demostración. Calculemos la integral de $|fg|$ para cada uno de los conjuntos Ω_∞, Ω_1 y Ω_*. Si $x \in \Omega_\infty$, entonces $p(x) = \infty$ y $p'(x) = 1$ y por (2.15) tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\infty} |f(x)g(x)|dx &\leq \|f\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty \|g\chi_{\Omega_\infty}\|_1 \\
&= \|f\chi_{\Omega_\infty}\|_{p(\cdot)} \|g\chi_{\Omega_\infty}\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)} \\
&\leq \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)} \|\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty.
\end{aligned}$$

De manera similar, si $x \in \Omega_1$, entonces $p(x) = 1$ y $p'(x) = \infty$, luego al invertir los roles de $p(x)$ y $p'(x)$ obtenemos

$$\int_{\Omega_1} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)} \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty.$$

Estimemos la integral sobre Ω_*. Por la desigualdad de Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

para todo $a, b \geq 0$, $1 < p$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$; tomemos $a = \dfrac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}$, $b = \dfrac{g}{\|g\|_{p\prime(\cdot)}}$ y usemos el Corolario 2.2.4(c) para obtener

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_*} \left| \frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}} \frac{g}{\|g\|_{p\prime(\cdot)}} \right| dx &\leq \frac{1}{p(x)} \int_{\Omega_*} \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot)}} \right|^{p(x)} dx + \frac{1}{p'(x)} \int_{\Omega_*} \left| \frac{g(x)}{\|g\|_{p(\cdot)}} \right|^{p'(x)} dx \\
&\leq \frac{1}{p_-} \rho_{p(\cdot),\Omega_*} \left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}} \right) + \frac{1}{p'_-} \rho_{p'(\cdot),\Omega_*} \left(\frac{g}{\|g\|_{p(\cdot)}} \right) \\
&\leq \frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-} \\
&= \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-} \right) \|\chi_{\Omega_*}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Combinando las tres estimaciones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)g(x)|dx &= \int_{\Omega_*} |f(x)g(x)|dx + \int_{\Omega_\infty} |f(x)g(x)|dx + \int_{\Omega_1} |f(x)g(x)|dx \\
&\leq \left[\left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p_-} \right) \|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty \right] \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}.
\end{aligned}$$

La cual es la desigualdad deseada. □

Observación 2.4.1. *Nótese, que si $x \in \Omega_*$, la constante $K_{p(\cdot)}$ en (2.16) es igual a $\dfrac{1}{p_-} + \dfrac{1}{p'_-}$, si $x \in \Omega_\infty \cup \Omega_1$, $K_{p(\cdot)} = 1 = \dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p'(x)} \leq \dfrac{1}{p_-} + \dfrac{1}{p'_-}$. Concluimos que $K_{p(\cdot)} \leq \dfrac{1}{p_-} + \dfrac{1}{p'_-}$ si $1 \leq p(x) \leq \infty$; por lo que también encontraremos la desigualdad de Hölder en la siguiente forma*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq K\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}. \tag{2.17}$$

donde $K = \dfrac{1}{p_-} + \dfrac{1}{p'_-} = \sup \dfrac{1}{p(x)} + \sup \dfrac{1}{p'(x)}$.

En los espacios de Lebesgue clásicos $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, la norma puede ser calculada usando la identidad

$$\|f\|_p = \sup \int_\Omega |f(x)g(x)|dx,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las $g \in L^{p'}(\Omega)$ con $\|g\|_{p'} \leq 1$. Una analogía algo más débil de esta desigualdad es cierta en los espacios de Lebesgue variables.

Definición 2.4.1. Dados Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible, definimos

$$\|f\|'_{p(\cdot)} = \sup \int_\Omega |f(x)g(x)|dx,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ con $\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1$.

Temporalmente denotamos por $M^{p(\cdot)}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles f tales que $\|f\|'_{p(\cdot)} < \infty$.

Proposición 2.4.2. *Sean Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, el conjunto $M^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio normado respecto a la norma $\|\cdot\|'_{p(\cdot)}$. Además dicha norma conserva el orden:*

$$\text{si } |f(x)| \leq |g(x)|, \text{ entonces } \|f\|_{p'(\cdot)} \leq \|g\|_{p'(\cdot)}.$$

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in M^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ con $\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1$, entonces

$$\sup \int_\Omega |\lambda f_1(x) g(x)| dx \leq \lambda \sup \int_\Omega |f_1(x) g(x)| dx < \infty$$

y

$$\sup \int_\Omega |(f_1(x) + f_2(x)) g(x)| dx \leq \sup \int_\Omega |f_1(x) g(x)| dx + \sup \int_\Omega |f_2(x) g(x)| dx < \infty.$$

Esto es, $\lambda f_1, f_1 + f_2 \in M^{p(\cdot)}(\Omega)$, con lo cual, el conjunto $M^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio vectorial. El hecho de que $\|\cdot\|'_{p(\cdot)}$ sea una norma que conserva el orden es consecuencia de las propiedades de la integral, el supremo y de la siguiente caracterización equivalente de $\|\cdot\|'_{p(\cdot)}$. Primero que todo notemos que es inmediato de la definición que

$$\|f\|'_{p(\cdot)} \leq \sup_{\|g\|'_{p(\cdot)} \leq 1} \left| \int_\Omega f(x) g(x) dx \right| \leq \sup_{\|g\|'_{p(\cdot)} \leq 1} \int_\Omega |f(x) g(x)| dx,$$

más aún, estas cantidades son iguales. Para ver esto, es suficiente notar que para toda $g \in L^{p'}(\Omega)$ con $\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1$, $|f(x)g(x)| = f(x)h(x)$, donde $h(x) = \operatorname{sgn} f(x)|g(x)|$ y $\|h\|_{p'(\cdot)} \leq \|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1$; en consecuencia

$$\int_\Omega |f(x) g(x)| dx = \int_\Omega |f(x) h(x)| dx \leq \|f\|_{p'(\cdot)}.$$

□

El siguiente resultado será de utilidad para establecer la desigualdad integral de Minkowski, para su demostración ver el Teorema 2.34 en [14]. El Teorema muestra que $M^{p(\cdot)}(\Omega) = L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y que las normas $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ y $\|\cdot\|'_{p(\cdot)}$ son equivalentes. Nos referimos a la norma $\|\cdot\|'_{p(\cdot)}$ como la *norma asociada* en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Teorema 2.4.3. *Sean Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ con $p(x) \leq p_+ < \infty$ y f una función medible, entonces $f \in M^{p(\cdot)}(\Omega)$ si y sólo si $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$; además,*

$$k_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|'_{p(\cdot)} \leq K_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)}, \tag{2.18}$$

donde $K_{p(\cdot)} = \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-} \right) \|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty$, $\frac{1}{k_{p(\cdot)}} = \|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty$.

Teorema 2.4.4 (Desigualdad integral de Minkowski)**.** *Dados* Ω *y* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ *con* $p(x) \leq p_+ < \infty$*,* $f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ *una función medible (respecto a la medida producto) tal que para cada* $y \in \Omega$*,* $f(\cdot, y) \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$*. Entonces*

$$\left\| \int_\Omega f(\cdot, y)dy \right\|_{p(\cdot)} \leq k_{p(\cdot)}^{-1} K_{p(\cdot)} \int_\Omega \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot)} \, dy. \tag{2.19}$$

Demostración. Si la integral en lado derecho de la desigualdad (2.19) es infinita el resultado se tiene, podemos entonces suponer que dicha integral es finita. Definamos

$$g(x) = \int_\Omega f(x, y)dy$$

y tomemos $h \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ con $\|h\|_{p'(\cdot)} \leq 1$. Entonces por el Teorema de Fubini y la desigualdad de Hölder para los espacios de Lebesgue variable,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g(x)h(x)|dx &= \int_\Omega \left| \int_\Omega f(x, y)dy \right| |h(x)|dx \\
&\leq \int_\Omega \left[\int_\Omega |f(x, y)|dy \right] |h(x)|dx \\
&\leq \int_\Omega \int_\Omega |f(x, y)h(x)|dydx \\
&\leq K_{p(\cdot)} \int_\Omega \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot)} \|h\|_{p'(\cdot)} dy.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\|g\|'_{p(\cdot)} \leq K_{p(\cdot)} \int_\Omega \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot)} \|h\|_{p'(\cdot)} dy,$$

ahora, el resultado se sigue de la desigualdad (2.18) en el Teorema 2.4.3. □

2.5. Convergencia en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

En esta sección consideramos tres tipos de convergencia en los espacios de Lebesgue variables: convergencia en norma, convergencia en modular y convergencia en medida.

Definición 2.5.1. Sean Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $(f_k)_k$ una sucesión en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, decimos que $f_k \to f$ en modular si para algún $\beta > 0$, $\rho(\beta(f - f_k)) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Decimos que $f_k \to f$ en norma si $\|f - f_k\|_{p(\cdot)} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Recordemos además que $f_k \to f$ en medida si para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si $k \geq N$,

$$|\{x \in \Omega : |f(x) - f_k(x)| \geq \epsilon\}| < \epsilon.$$

Proposición 2.5.1. *Sean* Ω*,* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$*, si la sucesión* $(f_k)_k$ *converge a* f *en norma, entonces para todo* $\beta > 0$*,* $\rho(\beta(f - f_k)) \to 0$ *cuando* $k \to \infty$*.*

Demostración. Supongamos que $(f_k)_k$ converge a f en norma. Sea $\beta > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f - f_k\|_{p(\cdot)} < 1/\beta \text{ para todo } k \geq k_0.$$

En consecuencia, $\|\beta(f - f_k)\|_{p(\cdot)} = \beta\|f - f_k\|_{p(\cdot)} < 1$ y por el Corolario 2.2.4(b)

$$\rho(\beta(f - f_k)) \leq \|\beta(f - f_k)\|_{p(\cdot)},$$

esto es, $\rho(\beta(f - f_k)) \to 0$ cuando $k \to \infty$. □

De la Proposición anterior en particular se deduce que la convergencia en norma siempre implica la convergencia en modular. El recíproco se tiene, si además suponemos que $p_+ < \infty$.

Proposición 2.5.2. *Sean Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si $p_+ < \infty$, entonces la convergencia en modular implica la convergencia en norma.*

Demostración. Supongamos que existe $\beta > 0$ tal que $\rho(\beta(f - f_k)) \to 0$. Fijemos λ tal que $0 < \lambda < \beta^{-1}$. Entonces por la Proposición 2.2.1,

$$\rho((f - f_k)/\lambda) \leq \left(\frac{1}{\beta\lambda}\right)^{p_+} \rho(\beta(f - f_k)).$$

En consecuencia, para k suficientemente grande tenemos que

$$\rho\left(\frac{f - f_k}{\lambda}\right) \leq 1.$$

Con lo cual, por la definición de la norma, $\|f - f_k\|_{p(\cdot)} \leq \lambda$ y esto para λ tal que $0 < \lambda < \beta^{-1}$, en particular, si $\lambda = \dfrac{1}{(k+1)\beta}$ tenemos que

$$\|f - f_k\|_{p(\cdot)} < \frac{1}{(k+1)\beta} \text{ para todo } k \geq 1.$$

Es decir, $f \to f_k$ en norma. □

En teoría de la medida se demuestra que si f_k converge a f en medida, entonces existe una subsucesión $(f_{k_j})_j$ que converge puntualmente en c.t.p. en Ω a f. Además, en los espacios de Lebesgue clásicos la convergencia en norma implica la convergencia en medida y lo mismo se tiene en los espacios de Lebesgue variables.

Teorema 2.5.3. (Ver, [14, pag. 48, Teorema 2.66]). *Sean Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $(f_k)_k \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega)$ converge a f en norma, entonces converge a f en medida.*

El siguiente resultado es la versión del teorema de la convergencia monótona para los espacios de Lebesgue variables.

Teorema 2.5.4. (Ver, [14, pag. 45, Teorema 2.59]). *Sean* Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *y sea* $(f_k)_k$ *una sucesión creciente de funciones medibles no negativas en* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *la cual converge puntualmente en* c.t.p. *en* Ω *a una función* f. *Entonces* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *y* $\|f_k\|_{p(\cdot)} \to \|f\|_{p(\cdot)}$ *o bien* $f \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *y* $\|f_k\|_{p(\cdot)} \to \infty$.

Corolario 2.5.5. *En las hipótesis del Teorema 2.5.4, si la sucesión* $(\|f_k\|_{p(\cdot)})_k$ *es convergente, entonces* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *y* $\|f_k\|_{p(\cdot)} \to \|f\|_{p(\cdot)}$.

Demostración. Como $(f_k)_k$ es una sucesión creciente de términos no negativos que converge puntualmente en c.t.p. en Ω a la función f, tenemos que $f_k \leq f$, de modo que $\|f_k\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)}$. Pero entonces $\|f_k\|_{p(\cdot)} - \|f\|_{p(\cdot)} \leq 0 < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, esto es, $\|f_k\|_{p(\cdot)} \to \|f\|_{p(\cdot)}$. Por lo tanto, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ya que la sucesión $(\|f_k\|_{p(\cdot)})_k$ es convergente. □

Demostraremos a continuación el teorema de la convergencia dominada para los espacios de Lebesgue variables.

Teorema 2.5.6. *Sean* Ω *y* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tal que* $p_+ < \infty$. *Si* $(f_k)_k$ *es una sucesión de funciones la cual converge puntualmente en* c.t.p. *en* Ω *a una función* f *y existe* $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *tal que* $|f_k(x)| \leq g(x)$ *en* c.t.p. *en* Ω, *entonces* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *y* $\|f - f_k\|_{p(\cdot)} \to 0$ *cuando* $k \to \infty$.

Demostración. Como $f_k \to f$ y $|f_k(x)| \leq g(x)$ en c.t.p. en Ω tenemos que $|f(x)| \leq g(x)$. Por lo tanto,

$$|f(x) - f_k(x)|^{p(x)} \leq 2^{p(x)-1} \left(|f(x)|^{p(x)} + |f_k(x)|^{p(x)}\right) \leq 2^{p_+}|g(x)|^{p(x)}.$$

Ahora, como $2^{p_+}|g(x)|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$ y $|f(x) - f_k(x)|^{p(x)} \to 0$ cuando $k \to \infty$, por el Teorema de la convergencia dominada de los espacios de Lebesgue clásicos obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} \rho(f - f_k) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f(x) - f_k(x)|^{p(x)} dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} |f(x) - f_k(x)|^{p(x)} dx = 0,$$

por consiguiente, por la Proposición 2.5.2, $\|f - f_k\|_{p(\cdot)} \to 0$. □

Proposición 2.5.7. *Sean* Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *supongamos que la sucesión* $(f_k)_k \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *converge en norma a* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. *Entonces existe una subsucesión* $(f_{k_j})_j$ *y* $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *tal que la subsucesión converge puntualmente en* c.t.p. *en* Ω *a* f, *y para* c.t.p. *en* Ω, $|f_{k_j}(x)| \leq g(x)$.

Demostración. Por el Teorema 2.5.3, existe una subsucesión $(f_{k_j})_j$ la cual converge puntualmente en c.t.p. en Ω a f. Además, como $(f_k)_k$ es una sucesión de Cauchy

$$\text{existe } N \in \mathbb{N}\text{: } \|f_m - f_n\|_{p(\cdot)} < \epsilon \text{ para todo } m, n \geq N.$$

Por otro lado, al ser (k_j) una sucesión creciente en $\mathbb{N}$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_j \geq N$ para todo $j \geq j_0$, en particular $\|f_{j_0+1} - f_{j_0}\|_{p(\cdot)} < 2^{-1}$, $\|f_{j_0+2} - f_{j_0+1}\|_{p(\cdot)} < 2^{-2}$, continuando esta construcción

$$\|f_{j_0+j} - f_{j_0+j-1}\|_{p(\cdot)} < 2^{-j} \text{ para todo } j \geq 1.$$

Por simplicidad escribamos f_j en vez de f_{j_0+j-1}, en tal caso tenemos que

$$\|f_{j+1} - f_j\|_{p(\cdot)} < 2^{-j} \text{ para todo } j \geq 1.$$

Para cada j, definamos la función h_j por

$$h_j(x) = \sum_{i=1}^{j-i} |f_{i+1}(x) - f_i(x)|.$$

Entonces $(h_j)_j$ es una sucesión creciente de funciones no negativas que converge puntualmente a una función h. Más aún, por la desigualdad triangular tenemos que

$$\|h_j\|_{p(\cdot)} = \left\| \sum_{i=1}^{j-i} |f_{i+1}(x) - f_i(x)| \right\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{i=1}^{j-i} \|f_{i+1} - f_i\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{i=1}^{j-i} 2^{-j} < \infty.$$

Por lo tanto, por el Corolario 2.5.5, $h \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Pero entonces, para cada j y en c.t.p. en Ω,

$$|f_j(x) - f_1(x)| \leq \sum_{i=1}^{j-i} |f_{i+1}(x) - f_i(x)| = h_j(x) \leq h(x).$$

Esto es, si $g = h + |f_1|$, vemos que $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y que $|f_j(x)| \leq g(x)$ en c.t.p. en Ω. □

2.6. Completez y algunos subconjuntos densos en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

En esta sección mostraremos que $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio de Banach y determinaremos algunos subconjuntos densos de este espacio.

Antes de establecer la completez del espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, necesitamos el siguiente resultado de convergencia en espacios métricos.

Teorema 2.6.1. (Ver, [40, pag. 199, Problema 4]). *Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_k)_k$ una sucesión de Cauchy en X, si $(x_k)_k$ tiene una subsucesión convergente $(x_{k_j})_j$, $x_{k_j} \to x$. Entonces $(x_k)_k$ es convergente y $x_k \to x$.*

La completez de los espacios de Lebesgue variables es ahora obtenida como una consecuencia del siguiente teorema conocido como *propiedad de Riesz–Fischer*.

Teorema 2.6.2. (Ver, [14, pag. 54, Teorema 2.70]). *Sean Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $(f_k)_k$ una sucesión en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p(\cdot)} < \infty.$$

Entonces existe $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que

$$\sum_{k=1}^{i} f_k \to f$$

en norma cuando $i \to \infty$ y

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p(\cdot)}.$$

Teorema 2.6.3 (Completez de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$)**.** *Sean Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es completo.*

Demostración. Sea $(f_k)_k$ una sucesión de Cauchy. Entonces

$$\text{dado } \epsilon > 0 \text{ existe } k_1 \in \mathbb{N} : \|f_m - f_n\|_{p(\cdot)} < \epsilon \text{ para todo } m, n \geq k_1,$$

luego, en particular $\|f_m - f_{k_1}\|_{p(\cdot)} < 2^{-1}$ si $m \geq k_1$, escojamos $k_2 > k_1$, entonces $\|f_{k_2} - f_{k_1}\|_{p(\cdot)} < 2^{-1}$, ahora, si escogemos $k_3 > k_2$ y repetimos lo hecho anteriormente obtenemos que $\|f_{k_3} - f_{k_2}\|_{p(\cdot)} < 2^{-2}$. Continuando este proceso tenemos una subsucesión $(f_{k_j})_j$, $k_{j+1} > k_j$, tal que

$$\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{p(\cdot)} < 2^{-j} \text{ para todo } j \geq 1.$$

Definamos una nueva sucesión $(g_j)_j$ por $g_1 = f_{k_1}$ y para $j > 1$, $g_j = f_{k_j} - f_{k_{j-1}}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{j} g_i = g_1 + \sum_{i=2}^{j} g_i = f_{k_1} + f_{k_j} - f_{k_1} = f_{k_j},$$

además tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \|g_i\|_{p(\cdot)} &= \|g_1\|_{p(\cdot)} + \sum_{j=2}^{\infty} \|g_{i+1}\|_{p(\cdot)} \\
&= \|f_{k_1}\|_{p(\cdot)} + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{p(\cdot)} \\
&\leq \|f_{k_1}\|_{p(\cdot)} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la propiedad de Riesz–Fischer (Teorema 2.6.2), existe $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $f_{k_j} \to f$ en norma cuando $j \to \infty$. Finalmente, por el Teorema 2.6.1, $f_k \to f$ en norma cuando $k \to \infty$. □

El siguiente resultado muestra que $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio uniformemente convexo, esto es, para cada $\epsilon \in (0, 2]$, le corresponde un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que las condiciones

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|g\|_{p(\cdot)} = 1, \quad \|f - g\|_{p(\cdot)} \geq \epsilon$$

implican que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{p(\cdot)} \leq 1 - \delta(\epsilon).$$

Este hecho fue demostrado por Lukeš, Pick y Pokorný en [42]. La demostración es similar al caso de los espacios de Lebesgue clásicos, usando la correspondiente versión de las desigualdades de Clarkson.

Proposición 2.6.4. *Si $1 < p_- \leq p_+ < \infty$, entonces $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio uniformemente convexo.*

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua, el soporte de f, denotado por $\operatorname{supp}(f)$, es la adherencia del conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$. Denotamos por $C_c(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones continuas con soporte compacto contenido en Ω y por $S(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones simples, esto es, $s \in S(\Omega)$ si

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x),$$

donde los a_j son distintos y los conjuntos E_j son disyuntos dos a dos. La familia $S_0(\Omega)$ es la colección de las funciones simples con la propiedad adicional que

$$\left| \bigcup_{j=1}^{n} E_j \right| < \infty.$$

Mostraremos a continuación que ambas familias de funciones $C_c(\Omega)$ y $S_0(\Omega)$ son subconjuntos densos de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Primero debemos demostrar que el conjunto de las funciones acotadas con soporte compacto contenido en Ω es también un subconjunto denso de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Teorema 2.6.5. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que $p_+ < \infty$. Entonces el conjunto de todas las funciones acotadas con soporte compacto contenido en Ω es denso en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión en Ω

$$K_j := \{x \in \Omega : \varrho(x, \partial\Omega) \geq 1/j\} \cap \overline{B(0,j)}.$$

Nótese que como Ω es un conjunto abierto, si $x \in \Omega$, $x \notin \partial\Omega$, de modo que $\varrho(x, \partial\Omega) > 0$. Por lo tanto, por la propiedad arquimediana, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varrho(x, \partial\Omega) > 1/k_0$. Por otro lado, existe $r_0 > 0$ tal que $x \in B(0, r_0) \subseteq \Omega$. Sea $j_0 = \max\{k_0, r_0\}$, tenemos que

$$\varrho(x, \partial\Omega) > 1/k_0 \geq 1/j_0 \text{ y } x \in B(0, r_0) \subseteq B(0, j_0) \subseteq \overline{B(0, j_0)},$$

esto es, $x \in K_{j_0}$. Demostramos que $\Omega = \bigcup_j K_j$. Además, como la función ϱ es continua, el conjunto $\varrho^{-1}(0, 1/j) = \{x \in \Omega : \varrho(x, \partial\Omega) < 1/j\}$ es abierto. Por lo tanto, K_j es cerrado, más aún, K_j es acotado, esto es, K_j es compacto. Ahora, fijemos $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y definamos una sucesión $(f_j)_j$ como sigue:

$$f_j(x) = \begin{cases} j, & f(x) > j, \\ f(x), & -j \leq f(x) \leq j, \\ -j, & f(x) < -j, \end{cases}$$

y sea $g_j(x) = f_j(x)\chi_{K_j}(x)$. Como $\{x \in \Omega : g_j(x) \neq 0\} \subseteq K_j$, tenemos que $\operatorname{supp}(g_j) \subseteq K_j$. Esto es, la función g_j tiene soporte compacto contenido en Ω. Además, como $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $|f(x)| \leq M$, para algún $M > 0$ para c.t.p.. en Ω y como $|g_j(x)| \leq |f(x)|$, $g_j \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, más aún, si $j \geq M$, tenemos que $|f(x) - g_j(x)| = 0 < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, es decir, $g_j \to f$ en c.p.t en Ω. Por lo tanto, dado que $p_+ < \infty$, por el Teorema de la convergencia dominada (Teorema 2.5.6), $g_j \to f$ en norma, lo cual significa que dado $\epsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f - g_i\|_{p(\cdot)} < \epsilon,$$

para todo $j \geq i_0$, en particular tenemos que $\|f - g_{i_0}\|_{p(\cdot)} < \epsilon$. Lo cual termina la demostración. □

Teorema 2.6.6. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que $p_+ < \infty$. Entonces los conjuntos $C_c(\Omega)$ y $S_0(\Omega)$ son densos en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demostración. Demostraremos el resultado para $C_c(\Omega)$; la demostración para $S_0(\Omega)$ es análoga. Fijemos $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\epsilon > 0$, debemos demostrar que existe $h \in C_c(\Omega)$ tal que $\|f - h\|_{p(\cdot)} < \epsilon$. Por el Teorema 2.6.5 existe una función acotada g con soporte compacto contenido en Ω tal que $\|f - g\|_{p(\cdot)} < \epsilon/2$. Entonces $\operatorname{supp}(f) \in B \cap \Omega$ para alguna bola abierta B. Por consiguiente, dado que $p_+ < \infty$, $C_c(B \cap \Omega)$ es denso en $L^{p_+}(B \cap \Omega)$; esto es, existe $h \in C_c(B \cap \Omega) \subseteq C_c(\Omega)$ tal que

$$\|g - h\|_{L^{p_+}(\Omega)} = \|g - h\|_{L^{p_+}(B \cap \Omega)} < \frac{\epsilon}{2(1 + |B \cap \Omega|)}.$$

Por lo tanto, por el Teorema 2.3.2

$$\|g-h\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \|g-h\|_{L^{p(\cdot)}}|B\cap\Omega| \leq (1+|B\cap\Omega|)\|g-h\|_{L^{p(+)}} < \epsilon/2,$$

así,

$$\|f-h\|_{p(\cdot)} \leq \|f-g\|_{p(\cdot)} + \|g-h\|_{p(\cdot)} < \epsilon.$$

□

2.7. Criterio de compacidad de Kolmogorov

Todos los resultados que enunciamos sin demostración en la presente sección pueden encontrarse en [57].

Definición 2.7.1 (Función de Steklov)**.** Sea Ω un conjunto abierto y $f \in L^1(B(x,h))$, definimos la función de Steklov como

$$f_h(x) = \Phi_h * f(x) = \frac{1}{v_n h^n} \int\limits_{B(x,h)} f(t)dt,$$

donde $h>0$, $\Phi_h(x) = \dfrac{1}{v_n}\chi_{B(0,1)}(x)$, $\Phi_h(x) = \dfrac{1}{h^n}\Phi_h\left(\dfrac{x}{n}\right)$, $v_n = |B(0,1)| = \dfrac{\pi^n}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}$.

Lema 2.7.1. *Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $p \in LH(\Omega)$. Entonces*

(a) $\|f_h\| \leq C\|f\|_{p(\cdot)}$

(b) $\lim\limits_{h\to 0}\|f_h - f\|_{p(\cdot)} = 0$,

donde $C>0$ no depende $h>0$ y $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

El siguiente resultado es una extensión del criterio de compacidad de Kolmogorov a los espacios de Lebesgue variables.

Teorema 2.7.2. *Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea $p \in LH(\Omega)$. Entonces $\mathcal{F}$ es relativamente compacto si y sólo si*

(a) $\lim\limits_{h\to 0}\|f_h - f\|_{p(\cdot)} = 0$, *uniformemente para $f \in \mathcal{F}$,*

(b) *$\mathcal{F}$ es acotado en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ es acotado. Por lo tanto, tenemos (b). Demostremos (a). Como $\mathcal{F}$ es precompacto en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, dado $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(f_j, \epsilon/2),$$

es decir, para toda $f \in \mathcal{F}$ existe $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\|f - f_{j_0}\|_{p(\cdot)} < \epsilon/2$. Además, por Teorema 2.6.6, el conjunto de las funciones simples es denso en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, por lo cual existe un conjunto finito $\{s_1, \ldots, s_m\}$ de funciones simples tales que $\|f_j - s_j\|_{p(\cdot)} < \epsilon/2$ para todo $1 \leq j \leq m$. Pero entonces

$$\|f - s_{j_0}\|_{p(\cdot)} \leq \|f - f_{j_0}\|_{p(\cdot)} + \|f_{j_0} - s_{j_0}\|_{p(\cdot)} < \epsilon.$$

Ahora, por el Lema 2.7.1(b), dado $\epsilon > 0$ existe h_{j_0} tal que

$$\|\Phi_h * s_{j_0} - s_{j_0}\|_{p(\cdot)} < \epsilon,$$

siempre que $h < h_{j_0}$. Además, por el Lema 2.7.1(a),

$$\|\Phi_h * f - \Phi_h * s_{j_0}\|_{p(\cdot)} \leq \|\Phi_h * (f - s_{j_0})\|_{p(\cdot)} \leq C\|f - s_{j_0}\|_{p(\cdot)}.$$

Entonces si $h < h_{j_0}$ y $f \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
\|\Phi_h * f - f\|_{p(\cdot)} &\leq \|\Phi_h * f - \Phi_h * s_{j_0}\|_{p(\cdot)} + \|\Phi_h * s_{j_0} - s_{j_0}\|_{p(\cdot)} + \|f - s_{j_0}\|_{p(\cdot)} \\
&\leq C\|f - s_{j_0}\|_{p(\cdot)} + \|\Phi_h * s_{j_0} - s_{j_0}\|_{p(\cdot)} + \|f - s_{j_0}\|_{p(\cdot)} \\
&\leq (C + 2)\epsilon.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos (a).

Recíprocamente, supongamos que tenemos (a) y (b). Dado que $\mathcal{F}$ es acotado,

$$\text{existe } M > 0 \text{ tal que } \|f\|_{p(\cdot)} \leq M \text{ para toda } f \in \mathcal{F}.$$

Sea $\mathcal{F}_h := \{f_h : f \in \mathcal{F}\}$. Por la desigualdad de Hölder (Teorema 2.4.1)

$$v_n h^n |f_h(x)| = \int_{\Omega} f(t)\chi_{B(x,h)}(t)dt \leq K\|f\|_{p(\cdot)}\|\chi_{B(x,h)}\|_{p'(\cdot)}.$$

Ahora, como $B(x, h) = x + hB(0, 1)$, por propiedades de la medida de Lebesgue

$$|B(x, h)| = |x + hB(0, 1)| = |hB(0, 1)| = h^n|B(0, 1)| = h^n v_n.$$

Supongamos que $|B(x, h)| = h^n v_n \leq 1$, entonces

$$\rho_{p'(\cdot)}\left(\chi_{B(x,h)}\right) = \int_{\Omega} \left(\chi_{B(x,h)}(x)\right)^{p'(x)} dx = \int_{\Omega} \chi_{B(x,h)}(x)dx = |B(x, h)| \leq 1,$$

con lo cual, por la definición de la norma $\|\chi_{B(x,h)}\|_{p'(\cdot)} \leq 1$. Pero entonces, por el Corolario 2.2.6, $\|\chi_{B(x,h)}\|_{p'(\cdot)} \leq |B(x,h)|^{1/p'_+} = (h^n v_n)^{1/p'_+}$. Concluimos que

$$|f_h(x)| \leq KM\left(h^n v_n\right)^{1/p'_+ - 1}, \tag{2.20}$$

para toda $h > 0$ tal que $h^n v_n \leq 1$. Esto significa que bajo una elección adecuada de h la colección $\mathcal{F}_h$ es uniformemente acotada.

Ahora definamos otro conjunto, denotemoslo por $\mathcal{F}_{hh} = \{f_h : f \in \mathcal{F}_h\}$. Las funciones en $\mathcal{F}_{hh}$ son de la forma

$$f_{hh}(x) = \frac{1}{v_n h^n} \int\limits_{B(x,h)} f_h(t)dt.$$

Por la desigualdad (2.20), tenemos que la colección $\mathcal{F}_{hh}$ es uniformemente acotada, más aún, demostraremos que dicha colección es equicontinua. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
v_n h^n |f_{hh}(x+u) - f_{hh}(x)| &= \left| \int_{B(x+u,h)} f_h(t)dt - \int_{B(x,h)} f_h(t)dt \right| \\
&\leq \left| \int_{B(x+u,h)} f_h(t)dt \right| + \left| \int_{B(x,h)} f_h(t)dt \right| \\
&\leq \int_{B(x+u,h)} |f_h(t)|dt + \int_{B(x,h)} |f_h(t)|dt \\
&\leq \int_{B(x,h)\cup B(x+u,h)} |f_h(t)|dt \\
&= \int_{\Omega} |f_h(t)| \chi_{B(x,h)\cup B(x+u,h)}(t)dt \\
&= \int_{\Omega} |f_h(t)| \chi_{B(x,h)\triangle B(x+u,h)}(t)dt \\
&= \int_{\Omega(x,u,h)} |f_h(t)|dt,
\end{aligned}$$

donde $\Omega(x,u,h) = B(x,h)\triangle B(x+u,h)$ y $\triangle$ denota la diferencia simétrica de conjuntos. Ahora, usando (2.20), obtenemos que,

$$v_n h^n |f_{hh}(x+u) - f_{hh}(x)| \leq KM(v_n h^n)^{1/p'_+ - 1} |\Omega(x,u,h)|. \tag{2.21}$$

Nótese que si $\|u\| < h$ entonces,

$$B(x+u,h) \subseteq B(x, \|u\| + h) \; y \; B(x, h - \|u\|) \subseteq B(x,h),$$

con lo cual,

$$B(x+u,h) \setminus B(x,h) \subseteq B(x, \|u\| + h) \setminus B(x,h)$$

y

$$B(x,h) \setminus B(x+u,h) \subseteq B(x,h) \setminus B(x,h-\|u\|),$$

por lo tanto,

$$\Omega(x,u,h) \subseteq [B(x,\|u\|+h) \setminus B(x,h)] \cup [B(x,h) \setminus B(x,h-\|u\|)] =: \Theta(x,u,h).$$

La medida de Lebesgue de Θ, está dada por

$$\begin{aligned} |\Theta(x,u,h)| &= |B(x,\|u\|+h) \setminus B(x,h)| + |B(x,h) \setminus B(x,h-\|u\|)| \\ &= |B(x,\|u\|+h)| - |B(x,h-\|u\|)| \\ &= [(\|u\|+h)^n - (h-\|u\|)^n]\, v_n. \end{aligned}$$

Sean $x = \|u\| + h$ y $y = h - \|u\|$. Entonces,

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \leq (x-y)(x+y)^{n-1},$$

si $x, y \geq 0$ y $n \geq 1$. Esto implica que,

$$|\Theta(x,u,h)| = v_n\,[(\|u\|+h)^n - (h-\|u\|)^n] \leq 2\|u\|(2h)^{n-1}v_n, \tag{2.22}$$

si $n \geq 1$. Combinando (2.21) y (2.22) obtenemos que

$$\begin{aligned} |f_{hh}(x+u) - f_{hh}(x)| &\leq KMK_h|\Omega(x,u,h)| \leq KMK_h|\Theta(x,u,h)| \\ &\leq 2KMv_n(2h)^{n-1}K_h\|u\|, \end{aligned}$$

donde $K_h = (v_n h^n)^{p_0}$, $p_0 = 1/p'_+ - 2$ y $\|u\| < h$. Ahora, escogiendo h suficientemente pequeña tenemos la equicontinuidad de la colección $\mathcal{F}_{hh}$. Por lo tanto, por el Teorema de Arzelà-Ascoli, el conjunto $\mathcal{F}_{hh}$ es relativamente compacto en $C(\overline{\Omega})$. Tenemos entonces que $\mathcal{F}_{hh}$ es precompacto en $C(\overline{\Omega})$, pero por el Teorema 2.6.6 este conjunto es denso en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, de modo que, $\mathcal{F}_{hh}$ es precompacto en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Esto es, dado $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $\{g_1, \ldots, g_m\} \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $\mathcal{F}_{hh} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(g_j, \epsilon/2)$. Sea $f \in \mathcal{F}_h$, por el Lema 2.7.1(b), $\|f - f_h\|_{p(\cdot)} < \epsilon/2$ siempre que $h < \delta$, luego en particular tenemos que $\|f - f_{\delta/2}\|_{p(\cdot)} < \epsilon/2$. Pero $f_{\delta/2} \in \mathcal{F}_{hh}$, por lo tanto, existe $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\|f_{\delta/2} - g_{j_0}\|_{p(\cdot)} < \epsilon/2$. Entonces,

$$\|f - g_{j_0}\|_{p(\cdot)} \leq \|f - f_{\delta/2}\|_{p(\cdot)} + \|f_{\delta/2} - g_{j_0}\|_{p(\cdot)} < \epsilon.$$

Por consiguiente, $\mathcal{F}_h \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(g_j, \epsilon)$. Es decir, el conjunto $\mathcal{F}_h$ es precompacto en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Finalmente, usando la precompacidad de $\mathcal{F}_h$, la condición (a) y repitiendo el razonamiento anterior demostramos que el conjunto $\mathcal{F}$ es precompacto en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, o equivalentemente $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. □

En [57] se demostró que:

Lema 2.7.3. *Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L^{p(\cdot)}(K)$, donde K es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $p \in LH(\Omega)$. Entonces la condición* (a) *del Teorema 2.7.2 implica la condición* (b).

Ahora, del Teorema 2.7.2 y el Lema 2.7.3 tenemos que

Teorema 2.7.4 (Criterio de compacidad de Kolmogorov-Tulajkov)**.** *Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $p \in LH(\Omega)$. Entonces $\mathcal{F}$ es relativamente compacto si sólo si*

$$\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_{p(\cdot)} = 0, \text{ uniformemente para } f \in \mathcal{F}.$$

Capítulo 3

Algunos Operadores en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

En el presente capítulo introducimos el operador de superposición también conocido como operador de Nemytskii y un operador integral de Volterra. Bajo ciertas condiciones demostraremos que el primero de estos operadores es continuo y acotado, también estableceremos la continuidad y acotación del operador integral de Volterra, más aún, demostraremos que este último operador es compacto.

Todos los resultados tanto de la sección 3.2 como de la sección 3.3 fueron originalmente demostrados en [10].

3.1. El operador de Nemytskii

Definición 3.1.1 (Operador de Nemytskii)**.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto Lebesgue–medible con $|\Omega| > 0$ y $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Esto es,

(i) $g(\cdot, u) : \Omega \to \mathbb{R}$ es Lebesgue–medible para todo $u \in \mathbb{R}$;

(ii) $g(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en c.t.p. en Ω.

Sean $p_1, p_2 \in L^\infty_+(\Omega)$ (ver la Definición 2.1.2). El operador de Nemytskii generado por $g(x, u)$ está dado por

$$G(u(x)) = g(x, u(x)).$$

Sea $D \subseteq \Omega$ un conjunto Lebesgue medible. Denotamos por P_D al operador multiplicación por χ_D, esto es:

$$P_D u(x) := \chi_D(x) u(x),$$

donde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función medible.

Proposición 3.1.1. *Sea G el operador de Nemytskii generado por la función $g(x, u)$. Supongamos que $G(0) = 0$ y sean $u_1, u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones medibles cuyos soportes son disyuntos. Entonces*

(a) $G \circ P_D = P_D \circ G$

(b) $G(u_1 + u_2) = G(u_1) + G(u_2)$

(c) $G(u_1 - u_2) = G(u_1) - G(u_2)$

Demostración. El ítem (a) es inmediato a partir de la definición de la función característica. Ahora podemos usar este hecho para concluir que

$$G(u_1 + u_2) = G(P_{D_1 \cup D_2} u) = P_{D_1} G u + P_{D_2} G u = G P_{D_1} u + G P_{D_2} u = G u_1 + G u_2,$$

donde $u = u_1 + u_2$ y $D_j = \operatorname{supp}(u_j)$ $(j = 1, 2)$. Con lo cual, tenemos el ítem (b). Ahora, usando la hipótesis y el ítem (b) obtenemos que

$$0 = G(0) = G(u + (-u)) = Gu + G(-u),$$

es decir, $G(-u) = -Gu$. Luego, el ítem (c) se sigue. □

Teorema 3.1.2. *Si el operador de Nemytski G envía $L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$ en $L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$, entonces G es continuo y acotado, y existe $b \geq 0$ y una función no negativa $a \in L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$ tal que para cada $x \in \Omega$ y $u \in \mathbb{R}$, tenemos la siguiente desigualdad:*

$$g(x, u) \leq a(x) + b|u|^{p_1(x)/p_2(x)}. \tag{3.1}$$

Por otro lado, si g satisface (3.1)*, entonces G envía $L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$ en $L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$ y G es continuo y acotado.*

Demostración. Supongamos que G envía $L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$ en $L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$. Si G es continuo en 0 cuando $G(0) = 0$, tenemos que si $(u_n)_n$ es una sucesión en $L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$ con $u_n \to u_0$, si definimos $v_n = u_n - u_0$, $v_n \to 0$, entonces $Gv_n \to G(0) = 0$. Pero, por la Proposición 3.1.1(c), esto implica que

$$\|Gu_n - Gu_0\|_{p_2(\cdot)} = \|G(u_n - u_0)\|_{p_2(\cdot)} = \|Gv_n\|_{p_2(\cdot)} \to 0.$$

Esto es, el operador G es continuo. Por lo tanto, solo tenemos que demostrar que G es continuo en 0 cuando $G(0) = 0$. Sea $(u_n)_n$ es una sucesión en $L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$ tal que $u_n \to 0$. Esto es, $\|u_n\|_{p_1(\cdot)} \to 0$. Por la Proposición 2.5.1, $\rho(u_n) \to 0$, es decir,

$$\int_\Omega |u_n(x)|^{p_1(x)} dx \to 0. \tag{3.2}$$

Ahora, para $v \in L^1(\Omega)$, definamos

$$(Hv)(x) := h(x, v(x)) = |G\left(\operatorname{sgn} v(x)|v(x)|^{1/p_1(x)}\right)|^{p_2(x)}, \tag{3.3}$$

donde $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es definida por

$$h(x,s) = |G\left(\operatorname{sgn} s|s|^{1/p_1(x)}\right)|^{p_2(x)},$$

entonces H envía $L^1(\Omega)$ en $L^1(\Omega)$ y es continua en 0 ([65]). Sea

$$v_n(x) := \operatorname{sgn} u_n(x)|u_n(x)|^{p_1(x)}$$

entonces, por (3.2),

$$\|v_n\|_{L^1(\Omega)} = \|u_n^{p_1(\cdot)}\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Por consiguiente, $\|Hv_n\|_{L^1(\Omega)} \to 0$. Pero,

$$|Hv_n| = |G\left(\operatorname{sgn} u_n|u_n|\right)|^{p_2(x)} = |G(u_n)|^{p_2(x)}.$$

Por lo tanto,

$$\rho_{p_2(\cdot)}(G(u_n)) = \int_\Omega |G(u_n(x))|^{p_2(x)}dx = \int_\Omega |Hv_n(x)dx| \to 0.$$

Ahora, por la Proposición 2.5.2, tenemos que

$$\|Gu_n\|_{p_2(\cdot)} \to 0.$$

Demostremos ahora que G es acotado. Sea A un conjunto acotado en $L^{p_1}(\cdot)(\Omega)$. Esto es,

$$existe\ \ M > 0 : \|u\|_{p_1(\cdot)} \leq M\ \ para\, todo\, u \in A.$$

Por el Corolario 2.2.4(b), $\rho_{p_1(\cdot)}(u/M) \leq 1$. Ahora, por la Proposición 2.2.1 con $\lambda = \dfrac{1}{M+1}$ tenemos que,

$$\frac{1}{(M+1)^{p_+}}\rho(u) \leq \rho\left(\frac{u}{M+1}\right) \leq \rho\left(\frac{u}{M}\right) \leq 1,$$

esto es, $\rho_{p_1(\cdot)}(u) \leq (M+1)^{p_+}$. Además, si $v \in L^1(\Omega)$, el operador H definido en (3.3) envía $L^1(\Omega)$ en $L^1(\Omega)$, por consiguiente, H es acotado. Ahora, como $u \in A \subseteq L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$, la función $|\operatorname{sgn} u(x)|u(x)|^{p_1(x)}| = |u(x)|^{p_1(x)} \in L^1(\Omega)$, esto es, $\operatorname{sgn} u(x)|u(x)|^{p_1(x)} \in L^1(\Omega)$, entonces

$$\|\operatorname{sgn} u(x)|u(x)|^{p_1(x)}\|_{L^1(\Omega)} = \|u(\cdot)^{p_1(\cdot)}\|_{L^1(\Omega)} = \rho_{p_1(\cdot)}(u) \leq (M+1)^{p_+}.$$

Por lo tanto,

$$existe\ \ K > 0 : \|H\left(\operatorname{sgn} u(x)|u(x)|^{p_1(x)}\right)\|_{L^1(\Omega)} \leq K$$

pero, $H(\operatorname{sgn} u(x)|u(x)|^{p_1(x)}) = |G(u(x))|^{p_2(x)}$, con lo cual

$$\rho_{p_2(\cdot)}(Gu) = \int_\Omega |Gu|^{p_2(x)} dx \leq K.$$

Una nueva aplicación del Corolario 2.2.4(b) y la Proposición 2.2.1, nos permite concluir que

$$existe\ K_0 > 0\ tal\ que\ \|Gu\|_{p_2(\cdot)} \leq K_0.$$

Es decir, el conjunto $G(A)$ es acotado, lo cual implica la acotación del operador G.

Establezcamos ahora la condición (3.1). Como G envía $L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$ en $L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$, si $v \in L^1(\Omega)$, H envía $L^1(\Omega)$ en $L^1(\Omega)$. Veamos que esto último implica que

$$existe\ b_1 \geq 0\ tal\ que\ |Hv(x)| \leq b_1|v(x)|. \tag{3.4}$$

Si $v \equiv 0$, vemos que (3.4) se tiene tomando $H \equiv 0$. Sea $v \in L^1(\Omega)$ una función no nula, si resulta que

$$|Hv(x)| > b|v(x)|\ para\ todo\ b > 0,$$

entonces

$$\int_\Omega |Hv(x)|dx > bK_0\ para\ todo\ b > 0,$$

donde $K_0 = \int_\Omega |v(x)|dx > 0$. Pero esto contradice el hecho que $Hv \in L^1(\Omega)$. Por lo tanto, (3.4) se tiene. Consideremos ahora $a_1 \in L^1(\Omega)$ con $a_1(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$, entonces por (3.4) tenemos que

$$|Hv(x)| \leq a_1(x) + b_1|v(x)|,$$

para algún $b_1 \geq 0$ y $v \in L^1(\Omega)$.

Para $u \in L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$, sea $v(x) = \operatorname{sgn} u(x)|u(x)|^{p_1(x)}$, entonces $v \in L^1(\Omega)$ y por (3.4)

$$|G(u(x))|^{p_2(x)} = |Hv(x)| \leq a_1(x) + b_1|u(x)|^{p_1(x)},$$

además, como la función $\varphi(t) = t^{1/p}$ es convexa para $p \geq 1$ y $t \geq 0$, tenemos que

$$(a/2 + b/2)^{1/p} \leq \frac{1}{2}\left(a^{1/p} + b^{1/p}\right),$$

de donde

$$(a+b)^{1/p} \leq 2^{1/p-1}\left(a^{1/p} + b^{1/p}\right) \leq \left(a^{1/p} + b^{1/p}\right),$$

para todo $a, b \geq 0$ y $p \geq 1$. Por lo tanto, si $p_2(x) \geq 1$, tenemos que

$$|G(u(x))| \leq \left(a_1(x) + b_1|u(x)|^{p_1(x)}\right)^{1/p_2(x)} \leq a_1(x)^{1/p_2(x)} + b_1^{1/p_2(x)}|u(x)|^{p_1(x)/p_2(x)},$$

de lo cual obtenemos (3.1) al tomar $a(x) = a_1(x)^{1/p_2(x)} \geq 0$ y $b = b_1^{1/p_2(x)}$.

Finalmente, si se verifica la desigualdad (3.1), al tomar $u \in L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$, vemos que $G(u(x)) \leq a(x) + b|u|^{p_1(x)/p_2(x)} \in L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$. Es decir, G envía $L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$ en $L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$. Por lo tanto, el operador G es continuo y acotado. □

Otra de las propiedades del operador de Nemytski es que envía funciones medibles en funciones medibles, para demostrar este hecho son necesarios los siguientes resultados.

Lema 3.1.3. (Ver, [66, pag. 41, Corolario 2.4]). *Si $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función Lebesgue medible, entonces existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones simples tal que $s_n \to u$ puntualmente en* c.t.p. *en Ω con la propiedad adicional que $s_n(\Omega) \subseteq u(\Omega)$.*

Lema 3.1.4. (Ver, [66, pag. 163, Proposición 8.1]). *Sea B un conjunto de funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Si g es una función de Carathéodory, entonces el operador de Nemytski G generado por g es secuencialmente continuo en B respecto a la convergencia en medida. Esto es, si $(u_n)_n$ es una sucesión en B tal que $u_n \to u$ en medida, entonces $Gu_n \to Gu$ en medida.*

Teorema 3.1.5. *Sea Ω un conjunto de medida finita. Si $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory, entonces el operador de Nemytski G generado por g envía funciones medibles con valores en $\mathbb{R}$ en funciones medibles.*

Demostración. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función simple, el resultado se tiene. Si no es así, por el Lema 3.1.3 existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones simples tal que $s_n \to u$ puntualmente en c.t.p. en Ω, entonces por el Teorema de Egoroff, $s_n \to u$ en medida, luego por el Lema 3.1.4 $Gs_n \to Gu$ en medida. Por consiguiente, existe una subsucesión $(Gs_{n_k})_k$ de $(Gs_n)_n$ tal que $Gs_{n_k} \to Gu$ puntualmente en c.t.p. en Ω. Se concluye que Gu es una función medible, por ser el límite de funciones medibles. □

3.2. Continuidad y acotación del operador de superposición y un operador integral de Volterra

Consideremos las siguientes aplicaciones

$$u \mapsto Fu, \qquad (Fu)(s) := \varphi(s, u(s)), \quad s \in (a, b)$$

$$u \mapsto Gu, \qquad (Gu)(s) := \int_a^b \psi(s, t, u(t))dt, \quad s \in (a, b)$$

Mostraremos que las aplicaciones F y G definidas anteriormente son continuas y aco-

tadas en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ con $p(\cdot) \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$. Para demostrar esto, suponemos que las siguientes condiciones se satisfacen: Existe una constante $b_1 \geq 0$ y una función no negativa $f \in L^{q(\cdot)}(a,b)$ tal que para c.t.p. en (a,b) y todo $x \in \mathbb{R}$

$$|\varphi(t,x)| \leq f(t) + b_1|x|^{p(t)/q(t)}. \tag{3.5}$$

Existe una constante $b_2 \geq 0$ y una función no negativa $g \in L^{r(\cdot,\cdot)}((a,b)\times(a,b))$ donde $r(s,t) = p(t)q(s)$, tal que para c.t.p. en $(a,b)\times(a,b)$ y todo $x \in \mathbb{R}$

$$|\psi(s,t,x)| \leq g(s,t) + b_2|x|^{p(t)/q(t)}. \tag{3.6}$$

Aquí $q(\cdot)$ es una función medible tal que $p(t) \leq q(t)$ en c.t.p. en (a,b).

Proposición 3.2.1. *El operador F envía $L^{p(\cdot)}(a,b)$ en si mismo, está bien definido y es continuo y acotado.*

Demostración. Dado que $\varphi(s,u)$ es una función de Carathéodory, F es el operador de Nemytskii generado por $\varphi(s,u)$; en consecuencia, por la condición de crecimiento (3.5) y el Teorema 3.1.2, F está bien definido y envía $L^{p(\cdot)}(a,b)$ en $L^{q(\cdot)}(a,b)$. Más aún, puesto que $p(s) \leq q(s)$ c.t.p. en (a,b), por el Teorema 2.3.2, $L^{q(\cdot)}(a,b) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(a,b)$, en particular $L^{q(\cdot)}(a,b) \subseteq L^{p(\cdot)}(a,b)$. Esto es, tenemos que $F(L^{p(\cdot)}(a,b)) \subseteq L^{p(\cdot)}(a,b)$. Finalmente, otra aplicación del Teorema 3.1.2 nos permite concluir que F es continuo y acotado. □

Proposición 3.2.2. *El operador integral de Volterra G envía $L^{p(\cdot)}(a,b)$ en si mismo, está bien definido y es continuo y acotado.*

Demostración. Sea N_ψ el operador de Nemytskii generado por la función de $\psi(s,t,x)$. Consideremos los conjuntos

$$\mathcal{M}_1 = \{u : (a,b) \to \mathbb{R} : u \text{ es Lebesgue medible}\}$$
$$\mathcal{M}_2 = \{v : (a,b)\times(a,b) \to \mathbb{R} : v \text{ es Lebesgue medible}\}.$$

Por el Teorema 3.1.5, para cada $v \in \mathcal{M}_2$, la función $N_\psi v : (a,b)\times(a,b) \to \mathbb{R}$ definida por

$$(N_\psi v)(s,t) = \psi(s,t,v(s,t)),\ \ (s,t) \in (a,b)\times(a,b)$$

es Lebesgue medible. Asociamos a cada función $u \in \mathcal{M}_1$ la función $v_u \in \mathcal{M}_2$ definida por

$$v_u(s,t) = u(t),\ \ (s,t) \in (a,b)\times(a,b).$$

Entonces la función

$$(s,t) \in (a,b)\times(a,b) \mapsto \psi(s,t,u(t)) \in \mathbb{R}$$

coincide con la función $N_\psi v_u(s,t)$ la cual es Lebesgue medible. De la condición de crecimiento (3.6) y la desigualdad de Hölder, tenemos que para cada $u \in L^{p(\cdot)}(a,b)$, la función

$$(s,t) \in (a,b)\times(a,b) \mapsto \psi(s,t,u(t)) \in \mathbb{R}$$

satisface

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_a^b |\psi(s,t,u(t))|dtds &\leq \int_a^b\int_a^b g(s,t)dtds + b_2\int_a^b\int_a^b |u(t)|^{p(t)/q(t)}dtds \\ &\leq K_{r(\cdot,\cdot)}\|g\|_{r(\cdot,\cdot)}\|1\|_{r'(\cdot,\cdot)} + b_2(b-a)\int_a^b |u(t)|^{p(t)/q(t)}dt.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Por otro lado, demostraremos que la función $u^{p(\cdot)/q(\cdot)} \in L^{q(\cdot)}(a,b)$. De hecho, dado que $0 < p(t)/q(t) \leq p(t) \leq p_+ < \infty$, por el Lema 2.2.7, tenemos que

$$\|u^{p/q}\|_{p(\cdot)/(p(\cdot)/q(\cdot))} = \|u^{p/q}\|_{q(\cdot)} \leq \|u\|_{p(\cdot)}^{(p/q)_\pm},$$

donde el signo + ocurre cuando $\|u\|_{p(\cdot)} \geq 1$ y el signo – ocurre en el caso que $\|u\|_{p(\cdot)} \leq 1$. En ambos casos, la desigualdad es finita porque $u \in L^{p(\cdot)}(a,b)$; por lo tanto, $u^{p(\cdot)/q(\cdot)} \in L^{q(\cdot)}(a,b)$. Ahora, de la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\int_a^b |u(t)|^{p(t)/q(t)}dt \leq K_{q(\cdot)}\|u^{p(\cdot)/q(\cdot)}\|_{q(\cdot)}\|1\|_{q'(\cdot)}, \tag{3.8}$$

donde, por la desigualdad (2.7) en el Corolario 2.2.6, la parte de la derecha de la desigualdad (3.8) es finita, esto es la desigualdad (3.7) es finita con lo cual la función $\psi(s,t,u(t))$ está en $L^1((a,b)\times(a,b))$. En consecuencia, por el Teorema de Fubini, se sigue que, para c.t.p. en (a,b), la función

$$t \in (a,b) \mapsto \psi(s,t,u(t)) \in \mathbb{R}$$

está en $L^1(a,b)$ y la función

$$s \in (a,b) \mapsto \int_a^b \psi(s,t,u(t))dt \in \mathbb{R}$$

está en $L^1(a,b)$. Así demostramos que $G(L^{p(\cdot)}(a,b)) \subseteq L^1(a,b)$.

Ahora mostraremos que $G(L^{p(\cdot)}(a,b)) \subseteq L^{p(\cdot)}(a,b)$. Por la desigualdad modular del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned}\int_a^b |(Gu)(s)|^{p(s)}ds &= \int_a^b \left|\int_a^b \psi(s,t,u(t))dt\right|^{p(s)} ds \\ &\leq \int_a^b \left|\int_a^b g(s,t)dt + b_2\int_a^b |u(t)|^{p(t)/q(t)}dt\right|^{p(s)} ds \\ &\leq 2^{p_+-1}\left[\int_a^b\left|\int_a^b g(s,t)dt\right|^{p(s)}ds + \int_a^b\left|b_2\int_a^b |u(t)|^{p(t)/q(t)}dt\right|^{p(s)}ds\right].\end{aligned}$$

Dado que $g \in L^{r(\cdot,\cdot)}((a,b)\times(a,b))$, entonces

$$\int_a^b \int_a^b g(s,t)^{p(t)q(s)} dtds < \infty.$$

Esto es, para c.t.p. en (a,b), tenemos que

$$\int_a^b g(s,t)^{\alpha q(s)} dtds < \infty, \quad \alpha := p(t) \geq 1.$$

Esto significa que la función $s \in (a,b) \mapsto (s,t) \in \mathbb{R}$ está en $L^{\alpha q(\cdot)}(a,b)$, más aún, como $L^{\alpha q(\cdot)}(a,b) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(a,b)$, entonces $g(\cdot,t) \in L^{p(\cdot)}(a,b)$. Ahora, sea $H(s) = \displaystyle\int_a^b g(s,t)dt$, por la Proposición 2.2.5

$$\int_a^b \left| \int_a^b g(s,t)dt \right|^{p(s)} ds = \rho(H(s)) \leq \left(\|H(s)\|_{p(\cdot)} \right)^{p_\pm} = \left(\left\| \int_a^b g(s,t)dt \right\|_{p(\cdot)} \right)^{p_\pm}.$$

Además, por la desigualdad integral de Minkowski (Teorema 2.4.4) obtenemos

$$\left(\left\| \int_a^b g(s,t)dt \right\|_{p(\cdot)} \right)^{p_\pm} \leq \left(k_{p(\cdot)}^{-1} K_{p(\cdot)} \int_a^b \|g(\cdot,t)\|_{p(\cdot)} dt \right)^{p_\pm} < \infty.$$

Por otro lado, dado que la función $u^{p(\cdot)/q(\cdot)} \in L^{q(\cdot)}(a,b)$, de la desigualdad de Hölder, la Proposición 2.2.5, el Corolario 2.7 y la homogeneidad de la norma, tenemos que

$$\int_a^b \left| b_2 \int_a^b |u(t)|^{p(t)/q(t)} dt \right|^{p(s)} ds \leq \int_a^b |b_2 K_{q(\cdot)} \|u^{p/q}\|_{q(\cdot)} \|1\|_{p'(\cdot)}|^{p(s)} ds \leq \left(k_0 \|1\|_{p(\cdot)} \right)^{p_\pm} < \infty$$

donde $k_0 = b_2 K_{q(\cdot)} \|u^{p/q}\|_{q(\cdot)} \|1\|_{p'(\cdot)}$. Esto es, G está bien definido y envía $L^{p(\cdot)}(a,b)$ en $L^{p(\cdot)}(a,b)$. Más que eso, por la Proposición 2.2.5, si $u \in L^{p(\cdot)}(a,b)$ tenemos que

$$\|Gu\|_{p(\cdot)} \leq (\rho(Gu))^{1/p_\pm} = \left(\int_a^b |(Gu)(s)|^{p(s)} ds \right)^{1/p_\pm} \leq K^{1/p_\pm}.$$

Es decir, G es un operador acotado.

Demostremos ahora que el operador G es continuo. Sea $(u_n)_n$ una sucesión en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ tal que $(u_n)_n \to u$. Mostraremos que $Gu_n \to Gu$ en $L^{p(\cdot)}(a,b)$. Para ver esto, es suficiente mostrar que cada subsucesión $(u_{n_k})_k$ tiene una subsucesión, denotémosla por $(u_{n_k})_k$, tal que $Gu_{n_k} \to Gu$ en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ cuando $k \to \infty$. Se sigue de la Proposición 2.5.7 que existe una subsucesión de $(u_{n_k})_k$, denotémosla por $(u_{n_k})_k$, tal que

$$u_{n_k} \to u \text{ para c.t.p. en } (a,b), \tag{3.9}$$

y existe $h \in L^{p(\cdot)}(a,b)$ satisfaciendo que

$$|u_{n_k}(x)| \leq h(x), \ \textit{para} \ \text{c.t.p.} \ \textit{en} \ (a,b) \ \textit{para todo} \ k \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Dado que la función $\psi(s,t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, de (3.9) deducimos que

$$\psi(s,t,u_{n_k}(t)) \to \psi(s,t,u(t)) \ \textit{para} \ \text{c.t.p.} \ \textit{en} \ (a,b) \times (a,b).$$

Ahora, por la condición (3.10) y la desigualdad (3.6) tenemos que para c.t.p. en $(a,b) \times (a,b)$,

$$|\psi(s,t,u_{n_k}(t))| \leq g(s,t) + b_2|h(t)|^{p(t)/q(t)}.$$

Como antes, podemos demostrar que para c.t.p. en (a,b) la función

$$t \in (a,b) \mapsto g(s,t) + b_2|h(t)|^{p(t)/q(t)} \in \mathbb{R}$$

esta en $L^1(a,b)$. En consecuencia, usando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue obtenemos

$$\int_a^b \psi(s,t,u_{n_k}(t))dt \to \int_a^b \psi(s,t,u(t))dt,$$

para c.t.p. en (a,b). Usando (3.6), (3.10) y la desigualdad $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$, la cual se cumple para todo $a, b \geq 0$ y $p \geq 1$, obtenemos que, para c.t.p. en (a,b),

$$\left|\int_a^b \psi(s,t,u_{n_k}(t))dt\right|^{p(s)} \leq 2^{p_+-1}\left[\left|\int_a^b g(s,t)dt\right|^{p(s)} + \left|b_2\int_a^b |h(t)|^{p(t)/q(t)}dt\right|^{p(s)}\right]$$

y como se demostró anteriormente, tenemos que

$$\int_a^b \left|\int_a^b g(s,t)dt\right|^{p(s)} ds, \int_a^b \left|b_2\int_a^b |h(t)|^{p(t)/q(t)}dt\right|^{p(s)} ds < \infty.$$

En consecuencia, el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$\int_a^b \left|\int_a^b \psi(s,t,u_{n_k}(t))dt - \int_a^b \psi(s,t,u(t))dt\right|^{p(s)} ds \to 0,$$

esto es, $\rho(Gu_{n_k} - Gu) \to 0$. Pero, por la Proposición 2.5.2, esto último implica que $\|Gu_{n_k} - Gu\|_{p(\cdot)} \to 0$. Luego, la continuidad de G está demostrada. □

3.3. Compacidad del operador integral de Volterra G

Ahora, demostraremos que el operador G es compacto bajo algunas condiciones adicionales sobre la función de Carathéodory ψ y la función medible $p(\cdot)$. De manera más precisa, supondremos que ψ satisface la condición:

$$|\psi(s_1,t,x)-\psi(s_2,t,x)|\leq K|s_1-s_2|^{\lambda},\ \ K,\lambda>0. \tag{3.11}$$

Esto es, la función ψ es Hölder continua en la primera variable. También, supondremos que el exponente $p(\cdot)\in LH(a,b)$.

Usaremos además el criterio de compacidad de Kolmogorov en $L^{p(\cdot)}(a,b)$. Para este caso, la función de *Steklov* toma la forma

$$f_h(t)=\frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2}f(u)du=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}f(t+v)dv.$$

Proposición 3.3.1. *Para $p(\cdot)\in LH(a,b)$, bajo la suposición adicional* (3.11)*, el operador $G:L^{p(\cdot)}(a,b)\to L^{p(\cdot)}(a,b)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $L^{p(\cdot)}(a,b)$ y $f\in G(\mathcal{F})$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
|f_h(v)-f(v)| &= \left|\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}f(v+w)dw-f(v)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}f(v+w)dw-\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}f(v)dw\right| \\
&= \frac{1}{h}\left|\int_{-h/2}^{h/2}(f(v+w)-f(v))dw\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{a}^{b}|\psi(v+w,t,u(t))-\psi(v,t,u(t))|dtdw \\
&\leq \frac{K}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{a}^{b}|v+w-v|^{\lambda}dtdw \\
&= \frac{K(b-a)}{h}\int_{-h/2}^{h/2}|w|^{\lambda}dw \\
&= \frac{K(b-a)h^{\lambda}}{2^{\lambda}(\lambda+1)}.
\end{aligned}$$

Ahora, por Corolario 2.2.4(a), concluimos que

$$\|f_h-f\|_{p(\cdot)}\leq\frac{K(b-a)h^{\lambda}}{2^{\lambda}(\lambda+1)}\|1\|_{p(\cdot)}.$$

Por lo tanto, $\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_{p(\cdot)} = 0$ uniformemente para $f \in G(\mathcal{F})$, luego, por el criterio de compacidad de Kolmogorov (Teorema 2.7.4), el conjunto $G(\mathcal{F})$ es relativamente compacto. Esto es, el operador G es compacto. $\square$

Capítulo 4

Existencia de soluciones de ecuaciones integrales no lineales de Volterra

Todos lo resultados de este capítulo, con excepción del Teorema 4.2.7 y el Teorema 4.2.8 que son originales del autor, fueron demostrados en [10].

Ahora estamos en condiciones de analizar el objetivo principal en esta tesis, el cual es estudiar la existencia de soluciones para la siguiente clase de ecuaciones integrales no lineales de Volterra:

$$u(s) = \varphi(s, u(s)) + \mu \int_a^b \psi(s, t, u(t))dt, \quad s \in (a, b), \mu \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

en $L^{p(\cdot)}(a, b)$, $p(\cdot) \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ con $\varphi : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\psi : (a, b) \times (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de Carathéodory.

Observe que la ecuación (4.1) escrita en términos de operadores toma la forma

$$u(s) = (Tu)(s),$$

donde $(Tu)(s) := (Fu)(s) + \mu(Gu)(s)$ y F, G son respectivamente el operador de superposición y el operador integral de Volterra definidos en la Sección 3.2.

En este capítulo daremos condiciones bajo las cuales la ecuación integral no lineal de Volterra (4.1) tiene al menos una solución. Primero, usaremos la teoría del grado topológico para aplicaciones *α–condensantes*. Posteriormente, usaremos algunos resultados de puntos fijos para la suma de aplicaciones de tipo contractivo.

4.1. Soluciones de la ecuación (4.1) vía el grado topológico de aplicaciones α-condensantes

En la Sección 3.2 demostramos que bajo ciertas condiciones de las funciones de Carathéodory φ y ψ, los operadores F y G son acotados y continuos en $L^{p(\cdot)}(a,b)$; más aún, el operador G es compacto. Esto nos permite usar la teoría del grado topológico para aplicaciones α–*condensantes* (Teorema 1.2.11) y el correspondiente resultado de punto fijo, Teorema 1.2.13.

Teorema 4.1.1 (Existencia de soluciones)**.** *Si las funciones* $\varphi : (a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *y* $\psi : (a,b)\times(a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *satisfacen las condiciones* (3.5) *y* (3.6)*, si la función* φ *es una contracción estricta en la segunda variable, es decir,*

$$|\varphi(t,x)-\varphi(t,y)|\leq L|x-y|,\ \ 0\leq L<1,$$

y la función ψ *satisface* (3.11)*, entonces la ecuación integral no lineal* (4.1)

$$u(s)=\varphi(s,u(s))+\mu\int_a^b\psi(s,t,u(t))dt,\ \ s\in(a,b),\ \ \mu\in\mathbb{R}$$

tiene al menos una solución $u\in L^{p(\cdot)}(a,b)$*, para* $p(\cdot)\in LH(a,b)$*, satisfaciendo que* $(p/q)_+<1$ *y el conjunto de todas las soluciones de la ecuación* (4.1) *es acotado en* $L^{p(\cdot)}(a,b)$*.*

Demostración. Sean $F,G,T : L^{p(\cdot)}(a,b)\to L^{p(\cdot)}(a,b)$ lo operadores definidos anteriormente. Como el operador G es compacto, por la Proposición 1.1.1(a), tenemos que $\alpha(GB)=0$, para todo conjunto B acotado en $L^{p(\cdot)}(a,b)$. Además, como φ es una contracción estricta, se sigue que, para todo $u,v\in L^{p(\cdot)}(a,b)$,

$$\|Fu-Fv\|_{p(\cdot)}\leq L\|u-v\|_{p(\cdot)},$$

es decir, F es una aplicación Lipschitz con constante L, luego, por la Proposición 1.1.9, F es α–*Lipschitz* con constante L. Por lo tanto, como la medida de Kuratowski define una seminorma, tenemos que

$$\alpha(TB)=\alpha\left[(F+\mu G)(B)\right]\leq\alpha(FB)+|\mu|\alpha(GB)\leq L\alpha(B),$$

esto es, el operador T es una α–*contracción estricta* con constante L, con lo cual, el operador T es α–*condensante*.

Consideremos el conjunto

$$S=\left\{u\in L^{p(\cdot)}(a,b):\ existe\ \lambda\in[0,1]\ tal\ que\ u=\lambda Tu\right\}.$$

Demostraremos que el conjunto S es acotado en $L^{p(\cdot)}(a,b)$. De hecho, para todo $u \in S$,

$$\|u\|_{p(\cdot)} = \lambda \|Tu\|_{p(\cdot)} \leq \lambda(\|Fu\|_{p(\cdot)} + |\mu| \|Gu\|_{p(\cdot)}).$$

Primero, hallemos una cota para $\|Fu\|_{p(\cdot)}$. Por la desigualdad (2.13) en el Teorema 2.3.2 existe $K > 1$ tal que $\|f\|_{p(\cdot)} \leq K\|f\|_{q(\cdot)}$, sumando esto a la condición de crecimiento (3.5), el Corolario 2.2.4(a) y al Lema 2.2.7, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|Fu\|_{p(\cdot)} &\leq \|f + b_1|u|^{p/q}\|_{p(\cdot)} \\
&\leq \|f\|_{p(\cdot)} + b_1\|u^{p/q}\|_{p(\cdot)} \\
&\leq K\|f\|_{q(\cdot)} + b_1 K\|u^{p/q}\|_{p(\cdot)} \\
&\leq K\|f\|_{q(\cdot)} + b_1 K\|u\|_{p(\cdot)}^{(p/q)_\pm}.
\end{aligned}$$

Ahora, daremos una cota para $\|Gu\|_{p(\cdot)}$. En este caso, usaremos la condición de crecimiento (3.6), el Corolario 2.2.4(a), la desigualdad de Hölder, la desigualdad integral de Minkowski y el Lema 2.2.7.

$$\begin{aligned}
\|Gu\|_{p(\cdot)} &\leq \left\| \int_a^b g(\cdot,t)dt \right\|_{p(\cdot)} + \left\| \int_a^b b_2|u(t)|^{p(t)/q(t)}dt \right\|_{p(\cdot)} \\
&\leq \left\| \int_a^b g(\cdot,t)dt \right\|_{p(\cdot)} + b_2 \int_a^b b_2|u(t)|^{p(t)/q(t)}dt \|1\|_{p(\cdot)} \\
&\leq k_{p(\cdot)}^{-1} K_{p(\cdot)} \int_a^b \|g(\cdot,t)\|_{p(\cdot)}dt + b_2 K_{p(\cdot)}\|u\|_{p(\cdot)}^{(p/q)_\pm}\|1\|_{q'(\cdot)}\|1\|_{p(\cdot)}.
\end{aligned}$$

Con estas cotas, obtenemos la siguiente estimación para todo $u \in S$,

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq K_1 + K_2,$$

donde,

$$K_1 = K\|f\|_{q(\cdot)} + b_1 K\|u\|_{p(\cdot)}^{(p/q)_\pm}$$

y

$$K_2 = k_{p(\cdot)}^{-1} K_{p(\cdot)} \int_a^b \|g(\cdot,t)\|_{p(\cdot)}dt + b_2 K_{p(\cdot)}\|u\|_{p(\cdot)}^{(p/q)_\pm}\|1\|_{q'(\cdot)}\|1\|_{p(\cdot)}.$$

Sumando esto al hecho que $0 < (p/q)_\pm < 1$, vemos que el conjunto S es acotado en $L^{p(\cdot)}(a,b)$. En consecuencia, por el Teorema 1.2.13, el operador T tiene al menos un punto fijo y el conjunto de los puntos fijos de T es acotado en $L^{p(\cdot)}(a,b)$. Por lo tanto, la ecuación integral no lineal (4.1) tiene al menos una solución $u \in L^{p(\cdot)}(a,b)$ y el conjunto de todas las soluciones de la ecuación es acotado en $L^{p(\cdot)}(a,b)$. □

Terminaremos esta sección construyendo una solución para la ecuación en estudio, basándonos en el Teorema 4.1.1.

Ejemplo 4.1.1 (Construcción de una solución)**.** Tomemos $p(s) = 2$ para todo $s \in (a, b)$, donde, $0 \leq a < b$. En este caso, $p \in LH(a, b)$. Consideremos una función exponente $q(s)$ satisfaciendo que $q_- > 2$ y que $(2/q)_+ < 1$. Ahora consideremos una constante L, con $0 < L < 1$ y definamos para $s \in (a, b)$ y $x \in \mathbb{R}$ la función

$$\varphi(s, x) := \begin{cases} x^{2/q(s)}, & \text{si } x > L^{q_-/(2-q_-)}, \\ L^{(2q_-)/((2-q_-)q(s))}, & \text{si } x \leq L^{q_-/(2-q_-)}. \end{cases}$$

Para cada s fijo, $\varphi(s, x)$ es diferenciable para cada $x \in \mathbb{R}$ y su derivada es

$$\varphi'(s, x) := \begin{cases} (2/q(s))x^{q(s)/(2-q(s))}, & \text{si } x > L^{q_-/(2-q_-)}, \\ 0, & \text{si } x \leq L^{q_-/(2-q_-)}. \end{cases}$$

Veamos que $\varphi'(s, x)$ es uniformemente acotada por L para cada $x \in \mathbb{R}$.

Caso I. $x > L^{q_-/(2-q_-)}$.

Como, $2 < q_- \leq q(s)$ y la función $t \mapsto t/(2-t)$ es creciente para todo $t \neq 2$, tenemos que $q_-/(2-q_-) \leq q(s)/(2-q(s))$, con lo cual, $L^{q_-/(2-q_-)} \geq L^{q(s)/(2-q(s))}$, pero entonces $x > L^{q_-/(2-q_-)} \geq L^{q(s)/(2-q(s))}$, de donde, $x^{q(s)/(2-q(s))} < L$. Por lo tanto tenemos que

$$|\varphi'(s, x)| = (2/q(s))x^{q(s)/(2-q(s))} < x^{q(s)/(2-q(s))} < L.$$

Caso II. $x \leq L^{q_-/(2-q_-)}$.

En este caso $|\varphi'(s, x)| = 0 < L$.

Concluimos así que $\varphi(s, x)$ es Lipschitz en $\mathbb{R}$ en la segunda variable con constante $L < 1$.

Ahora demostremos que satisface (3.5). Sea

$$f(s) := \begin{cases} 0, & \text{si } x > L^{q_-/(2-q_-)}, \\ L^{(2q_-)/((2-q_-)q(s))}, & \text{si } x \leq L^{q_-/(2-q_-)}. \end{cases}$$

Vemos que $|\varphi(s, x)| = 0 + x^{2/q(s)}$, para $x > L^{q_-/(2-q_-)}$ y $|\varphi(s, x)| = L^{(2q_-)/((2-q_-)q(s))} \leq L^{(2q_-)/((2-q_-)q(s))} + |x|^{2/q(s)}$, para $x \leq L^{q_-/(2-q_-)}$. En ambos casos la condición (3.5) se satisface tomando $b_1 = 1$.

Definamos ahora $\psi(s, t, x) := s$, $s, t \in (a, b)$ y $x \in \mathbb{R}$ y $r(s, t) := p(t)q(s) = 2q(s)$. Entonces

$$|\psi(s, t, x)| \leq b,$$

y tenemos que,

$$\rho_{2q(\cdot)}(b) = \int_a^b b^{2q(s)} ds = \int_a^b (b^2)^{q(s)} ds = \rho_{q(\cdot)}(b^2).$$

Ahora, por la Proposición 2.2.5 y la desigualdad (2.7) en el Corolario 2.2.6, concluimos que

$$\rho_{q(\cdot)}(b^2) \leq b^2 \|1\|^{p_\pm}_{q(\cdot)} < \infty.$$

Entonces,

$$\int_a^b \int_a^b b^{2q(s)} ds dt \leq \int_a^b (b^2) \|1\|^{p_\pm}_{q(\cdot)} dt = (b-a) b^2 \|1\|^{p_\pm}_{q(\cdot)} < \infty.$$

Por lo tanto, si $g(s,t) := b$, vemos que $g \in L^{r(\cdot,\cdot)}((a,b) \times (a,b))$, lo cual nos permite concluir que la función ψ satisface (3.6), con $g(s,t) = b$ y $b_2 = 0$, más aún, dado que

$$|\psi(s_1, t, x) - \psi(s_2, t, x)| = |s_1 - s_2|,$$

la función ψ satisface la condición (3.11) con $K = \lambda = 1$. Por consiguiente, por el Teorema 4.1.1, tenemos que

$$u(s) - \varphi(s, u(s)) = \mu \int_a^b \psi(s, t, u(t)) dt = \mu(b-a)s.$$

Concluimos que una solución para la ecuación en estudio viene dada en forma implícita por la relación

$$u(s) - u(s)^{2/q(s)} = \mu(b-a)s, \text{ para } u(s) > L^{q_-/(2-q_-)},$$

y en forma explicita por

$$u(s) = \mu(b-a)s, \text{ si } u(s) \leq L^{q_-/(2-q_-)}.$$

4.2. Existencia y unicidad de soluciones de la ecuación (4.1) por medio de la suma de aplicaciones de tipo contractivo

Mostramos que si la función φ es una *L–contracción* en la segunda variable, entonces el operador F es una contracción de Banach en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ con constante L. Ahora, demostraremos que si ψ es una función de *Lipschitz*, entonces el operador G es un operador de *Lipschitz* en $L^{p(\cdot)}(a,b)$. Entonces, la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación (4.1) es en este caso una consecuencia del hecho que la que la suma de dos contracciones de Banach es una contracción de Banach.

Proposición 4.2.1. *Si la función ψ satisface* (3.6) *y es Lipschitz en la tercera variable con constante $L > 0$, es decir,*

$$|\psi(s,t,x) - \psi(s,t,y)| \leq L|x-y|, \ \textit{para todo} \ x, y \in (a,b), L > 0, \tag{4.2}$$

entonces el operador inducido G es Lipschitz en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ con constante

$$\lambda = LK_{p(\cdot)}\|1\|_{p(\cdot)}\|1\|_{p'(\cdot)}.$$

Demostración. Sean $u, v \in L^{p(\cdot)}(a,b)$. Por la desigualdad de Hölder y la homogeneidad de la norma tenemos que

$$\begin{aligned}
\|Gu - Gv\|_{p(\cdot)} &= \left\| \int_a^b (\psi(s,t,x) - \psi(s,t,x))\, dt \right\|_{p(\cdot)} \\
&\leq \left\| L \int_a^b |u(t) - v(t)| dt \right\|_{p(\cdot)} \\
&\leq L \int_a^b |u(t) - v(t)| dt \cdot \|1\|_{p(\cdot)} \\
&\leq LK_{p(\cdot)}\|u - v\|_{p(\cdot)}\|1\|_{p'(\cdot)}\|1\|_{p(\cdot)},
\end{aligned}$$

esto es, G es *Lipschitz* en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ con constante

$$\lambda = LK_{p(\cdot)}\|1\|_{p(\cdot)}\|1\|_{p'(\cdot)}.$$

□

Teorema 4.2.2 (Existencia y unicidad)**.** *Si la función $\varphi : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface* (3.5) *y es una contracción estricta para la segunda variable, es decir,*

$$|\varphi(t,x) - \varphi(t,y)| \leq M|x-y|,$$

para $M < 1$, y $\psi : (a,b) \times (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface (3.6) *y* (4.2)*, con $L > 0$ suficientemente pequeño, entonces la ecuación integral no lineal* (4.1)*:*

$$u(s) = \varphi(s, u(s)) + \mu \int_a^b \psi(s,t,u(t))dt, \ \ s \in (a,b), \ \ \mu \in \mathbb{R}$$

tiene una única solución $u \in L^{p(\cdot)}(a,b)$.

Demostración. Como en la demostración del Teorema 4.1.1, el hecho que φ satisfaga la condición (3.5) y el hecho que sea una *contracción estricta* en la segunda variable con constante M, implican que operador F es una contracción de Banach en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ con constante M. Además, por la Proposición 4.2.1, el operador G es *Lipschitz* en $L^{p(\cdot)}(a,b)$

con constante $\lambda = LK_{p(\cdot)}\|1\|_{p(\cdot)}\|1\|_{p'(\cdot)}$. Por lo tanto, $T = F + \mu G$ es un operador de *Lipschitz* con constante

$$\kappa = M + L|\mu|K_{p(\cdot)}\|1\|_{p(\cdot)}\|1\|_{p'(\cdot)}.$$

Ahora, si $\mu = 0$, $\kappa = M < 1$ y si $\mu \neq 0$, al escoger L tal que $L < \dfrac{1-M}{K_0}$ donde $K_0 = |\mu|K_{p(\cdot)}\|1\|_{p(\cdot)}\|1\|_{p'(\cdot)} > 0$, de nuevo tenemos que $\kappa < 1$, con lo cual el operador T es una contracción de Banach en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ y por lo tanto por el Teorema del Punto Fijo de Banach tiene un único punto fijo. Esto es, la ecuación (4.1) tiene una única solución en $L^{p(\cdot)}(a,b)$. □

Ahora, impondremos ciertas condiciones adicionales a la función φ de tal forma que F sea un operador del tipo *Kannan* (ver Teorema 1.3.2). En este caso, la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación (4.1) es una consecuencia de la existencia y unicidad de puntos fijos de las aplicaciones que se pueden expresar como la suma de dos aplicaciones de tipo contractivo.

Ejemplo 4.2.1. Para la solución dada en el Ejemplo 4.1.1 notemos que podemos prescindir de la condición $(2/q)_+ < 1$ ya que las funciones φ y ψ satisfacen las hipótesis del Teorema 4.2.2 y por tanto podemos garantizar que dicha solución es única.

Proposición 4.2.3. *Si la función φ satisface que*

$$|\varphi(s,u(s))| \leq \frac{\lambda}{\lambda+1}|u(s)|,\ \ \lambda \in [0,1/2),\ \ u \in L^{p(\cdot)}(a,b), \tag{4.3}$$

entonces el operador F es del tipo Kannan en $L^{p(\cdot)}(a,b)$.

Demostración. Vemos que de la condición (4.3), se implica que el operador F es acotado en $L^{p(\cdot)}(a,b)$. Ahora, por la desigualdad (4.3) obtenemos que

$$\begin{aligned}|\varphi(s,u(s)) - \varphi(s,v(s))| &\leq |\varphi(s,u(s))| + |\varphi(s,v(s))| \\ &\leq \lambda|u(s)| - \lambda|\varphi(s,u(s))| + \lambda|v(s)| - \lambda|\varphi(s,v(s))| \\ &\leq \lambda\left[|u(s) - \varphi(s,u(s))| + |v(s) - \varphi(s,v(s))|\right].\end{aligned}$$

Ahora, puesto la norma en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ conserva desigualdades, tenemos que

$$\|Fu - Fv\|_{p(\cdot)} \leq \lambda\left[\|u - Fu\|_{p(\cdot)} + \|v - Fv\|_{p(\cdot)}\right],$$

$0 \leq \lambda < 1/2$. Por consiguiente, F es un operador del tipo *Kannan* en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ con constante λ. □

Proposición 4.2.4. *Si la función φ satisface que*

$$|\varphi(s,u(s))| \leq \frac{\lambda}{\lambda+1}|u(s)|,\ \ \lambda \in [0,1/3),\ \ u \in L^{p(\cdot)}(a,b), \tag{4.4}$$

entonces el operador F es del tipo Reich en $L^{p(\cdot)}(a,b)$.

Demostración. Como en la demostración de la Proposición 4.2.3, tenemos que

$$\begin{aligned}|\varphi(s,u(s))-\varphi(s,v(s))| &\leq \lambda|u(s)-\varphi(s,u(s))|+\lambda|v(s)-\varphi(s,v(s))|\\ &\leq \lambda^*|u(s)-v(s)|+\lambda|u(s)-\varphi(s,u(s))|+\lambda|v(s)-\varphi(s,v(s))|,\end{aligned}$$

para $\lambda^* \in [0,1/3)$. Por lo tanto, tomando la norma en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ tenemos que

$$\|Fu-Fv\|_{p(\cdot)} \leq \lambda^*\|u-v\|_{p(\cdot)}+\lambda\|u-Fu\|_{p(\cdot)}+\lambda\|v-Fv\|_{p(\cdot)},$$

donde $\lambda^*, \lambda \in [0,1/3)$, de tal forma que $0 \leq \lambda^*+\lambda+\lambda < 1$. Esto es, F es un operador del tipo *Reich* en $L^{p(\cdot)}(a,b)$. □

Supongamos ahora que los operadores F y μG satisfacen la condición de *Diaz–Metcalf*, esto es, si $\mathcal{F}$ un funcional de norma unitaria en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ entonces,

$$\begin{aligned}0 < r\|u-\mu Gu\|_{p(\cdot)} &\leq \mathcal{F}(u-\mu Gu)\\ 0 < r\|u-Fu\|_{p(\cdot)} &\leq \mathcal{F}(u-Fu),\end{aligned} \tag{4.5}$$

para todo $u \in L^{p(\cdot)}(a,b) \setminus \{u=\mu Gu \wedge u=Fu\}$, $r>0$.

Notemos, que si la función φ satisface (4.3) o (4.4) y $u \in \overline{B}(0,r)$, tenemos que $\|Fu\|_{p(\cdot)} \leq \dfrac{\lambda}{\lambda+1}r$. Esto es, el operador F envía la bola $\overline{B}(0,r)$ en la bola $\overline{B}(0,\dfrac{\lambda}{\lambda+1}r)$.
Veamos que lo mismo se cumple para el operador μG, escogiendo μ suficientemente pequeño.

Lema 4.2.5. *Para $|\mu|$ suficientemente pequeño, el operador μG envía la bola $\overline{B}(0,r)$ en la bola $\overline{B}(0,\dfrac{\lambda}{\lambda+1}r)$.*

Demostración. Sea $u \in B(0,r)$. Entonces de la demostración de la Proposición 3.2.2, la Proposición 2.2.5 y la desigualdad de Hölder, tenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}\rho(Gu) &\leq 2^{p_+-1}\left(k_{p(\cdot)}^{-1}K_{p(\cdot)}\int_a^b\|g(\cdot,t)\|_{p(\cdot)}dt\right)^{p_\pm}+2^{p_+-1}\int_a^b|b_2K_{q(\cdot)}\|u\|_{p(\cdot)}^{(p/q)_\pm}\|1\|_{q'(\cdot)}|^{p(s)}ds\\ &\leq 2^{p_+-1}\left(k_{p(\cdot)}^{-1}K_{p(\cdot)}\int_a^b\|g(\cdot,t)\|_{p(\cdot)}dt\right)^{p_\pm}+2^{p_+-1}\|b_2K_{q(\cdot)}\|u\|_{p(\cdot)}^{(p/q)_\pm}\|1\|_{q'(\cdot)}\|_{p(\cdot)}^{p_\pm}\\ &\leq 2^{p_+-1}\left(k_{p(\cdot)}^{-1}K_{p(\cdot)}\int_a^b\|g(\cdot,t)\|_{p(\cdot)}dt\right)^{p_\pm}+2^{p_+-1}\left(r^{(p/q)_\pm}b_2K_{q(\cdot)}\|1\|_{q'(\cdot)}\|1\|_{p(\cdot)}\right)^{p_\pm}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la Proposición 2.2.5

$$\|\mu Gu\|_{p(\cdot)}^{p_\pm}=|\mu|^{p_\pm}\|Gu\|_{p(\cdot)}^{p_\pm} \leq |\mu|^{p_\pm}\rho(Gu).$$

Por consiguiente,

$$\|\mu Gu\|_{p(\cdot)}^{p_\pm} \leq |\mu|^{p_\pm} 2^{p_+-1} \left[K_\pm + r^{k_\pm} C_\pm\right],$$

donde,

$K_\pm = \left(k_{p(\cdot)}^{-1} K_{p(\cdot)} \int_a^b \|g(\cdot,t)\|_{p(\cdot)} dt\right)^{p_\pm}$, $k_\pm = (p/q)_\pm p_\pm$ y $C_\pm = \left(b_2 K_{q(\cdot)} \|1\|_{q'(\cdot)} \|1\|_{p(\cdot)}\right)^{p_\pm}$. Ahora, podemos escoger $|\mu|$ suficientemente pequeño, de tal forma que $\|\mu Gu\|_{p(\cdot)} \leq \dfrac{\lambda}{\lambda+1} r$, de donde el resultado se sigue. □

En el siguiente resultado se demuestra la existencia de una única solución de la ecuación (4.1) cuando se imponen ciertas condiciones a la función ψ de tal forma que el operador F sea *Kannan* o *Reich*.

Teorema 4.2.6. *Si la función $\varphi : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface* (4.3) *o* (4.4)*, $\psi : (a,b) \times (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las condiciones* (3.6) *y* (4.2) *y los operadores F, μG satisfacen la condición* (4.5) *de Diaz–Metcalf, entonces la ecuación integral no lineal* (4.1)

$$u(s) = \varphi(s, u(s)) + \mu \int_a^b \psi(s,t,u(t))dt, \;\; s \in (a,b), \;\; |\mu| \ll 1,$$

tiene una única solución $u \in \overline{B}(0,r)$, para una escogencia conveniente de los parámetros μ, λ y r.

Demostración. Sea $u \in \overline{B}(0,r)$. Entonces por el Lema 4.2.5

$$\|Tu\|_{p(\cdot)} \leq \|F\|_{p(\cdot)} + \|\mu G\|_{p(\cdot)} \leq \frac{\lambda}{\lambda+1} r + \frac{\lambda}{\lambda+1} r = \frac{2\lambda}{\lambda+1} r \leq r.$$

Esto es, el operador T envía la bola $\overline{B}(0,r)$ en si misma.

Si la función φ satisface (4.3), por la Proposición 4.2.3, $F \in KA(\lambda)$ y si φ satisface (4.4), de la Proposición 4.2.4, $F \in RE(\lambda^*, \lambda, \lambda)$. Por otro lado, por la Proposición 4.2.1, $\mu G \in BC(|\mu|\lambda_L)$, con $\lambda_L = LK_{p(\cdot)} \|1\|_{p(\cdot)} \|1\|_{p'(\cdot)}$.

Esto es, del Teorema 1.3.3, concluimos que T pertenece a una de las siguientes clases

(a) $T \in D\left(|\mu|\lambda_L, (\lambda+1)/r\right)$.

(b) $T \in RE\left(\lambda^* + |\mu|\lambda_L, (\lambda+1)/r, (\lambda+1)/r\right)$.

En ambos casos, en virtud del Teorema 1.3.2 y la Proposición 2.6.4, el operador T tiene un único punto fijo en $\overline{B}(0,r)$ para una escojencia conveniente de los parámetros contractivos. Por lo tanto, la ecuación (4.1) tiene una única solución $u \in \overline{B}(0,r)$. □

Supongamos ahora que los operadores F y μG satisfacen la *primera condición de Maligranda*, esto es,

$$\left\| \frac{u-\mu Gu}{\|u-\mu Gu\|_{p(\cdot)}} + \frac{u-Fu}{\|u-Fu\|_{p(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)} = 2. \tag{4.6}$$

A continuación estableceremos un resultado similar al Teorema 4.2.6.

Teorema 4.2.7. *Si la función $\varphi : (a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface* (4.3) *o* (4.4)*, $\psi : (a,b)\times(a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las condiciones* (3.6) *y* (4.2) *y los operadores F y μG satisfacen la primera condición de Maligranda* (4.6)*, entonces la ecuación integral no lineal* (4.1)

$$u(s) = \varphi(s,u(s)) + \mu\int_a^b \psi(s,t,u(t))dt,\ \ s\in(a,b),\ \ |\mu|\ll 1,$$

tiene una única solución $u\in\overline{B}(0,r)$, para una escogencia conveniente de los parámetros μ y λ.

Demostración. Sea $u\in\overline{B}(0,r)$. Entonces por el Lema 4.2.5

$$\|Tu\|_{p(\cdot)} \le \|F\|_{p(\cdot)} + \|\mu G\|_{p(\cdot)} \le \frac{\lambda}{\lambda+1}r + \frac{\lambda}{\lambda+1}r = \frac{2\lambda}{\lambda+1}r \le r.$$

Esto es, el operador T envía la bola $\overline{B}(0,r)$ en si misma.

Si la función φ satisface (4.3), por la Proposición 4.2.3, $F\in KA(\lambda)$ y si φ satisface (4.4), de la Proposición 4.2.4, $F\in RE(\lambda^*,\lambda,\lambda)$. Por otro lado, por la Proposición 4.2.1, $\mu G\in BC(|\mu|\lambda_L)$, con $\lambda_L = LK_{p(\cdot)}\|1\|_{p(\cdot)}\|1\|_{p'(\cdot)}$.

Esto es, del Teorema 1.3.6, concluimos que T pertenece a una de las siguientes clases

(a) $T\in D\left(|\mu|\lambda_L,\lambda+2/13\right)$.

(b) $T\in RE\left(\lambda^*+|\mu|\lambda_L,\lambda+1/4,\lambda+1/4\right)$.

En ambos casos, en virtud del Teorema 1.3.2 y la Proposición 2.6.4, el operador T tiene un único punto fijo en $\overline{B}(0,r)$ para una escojencia conveniente de los parámetros contractivos. Por lo tanto, la ecuación (4.1) tiene una única solución $u\in\overline{B}(0,r)$. □

A continuación construiremos una solución para la ecuación en estudio basados en el Teorema anterior.

Ejemplo 4.2.2. Sea $\varphi(s,u) := \dfrac{\lambda}{\lambda+1}\operatorname{sen} u$, para $\lambda\in[0,1/2)$. Se sabe que $|\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y| \le |x-y|$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$, en particular $|\operatorname{sen}x|\le|x|$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Entonces

$$|\varphi(s,u)| = \frac{\lambda}{\lambda+1}|\operatorname{sen}u| \le \frac{\lambda}{\lambda+1}|u| \text{ para todo } u\in\mathbb{R}.$$

Esto es, $\varphi(s,u)$ satisface la condición (4.3). Definamos ahora

$$\psi(s,t,x) := \frac{\lambda}{\mu(b-a)}(\operatorname{sen} x - x),\ \mu > 0$$

Vemos que por su definición la función $\psi(s,t,x)$, es Lipschitz en la tercera variable con constante $\dfrac{2\lambda}{\mu(b-a)}$, además tenemos que

$$|\psi(s,t,x)| = \frac{\lambda}{\mu(b-a)}|\operatorname{sen} x - x| \leq \frac{\lambda}{\mu(b-a)} + \frac{\lambda}{\mu(b-a)}|x|,$$

es decir, $\psi(s,t,x)$ satisface (3.6) con $p(s) = q(s)$, $g(s,t) := \dfrac{\lambda}{\mu(b-a)}$ y $b_2 := \dfrac{\lambda}{\mu(b-a)}$. Más aún,

$$\mu G u(s) = \int_a^b \psi(s,t,u(s))dt = \lambda(\operatorname{sen} u(s) - u(s)),$$

con lo cual,

$$\frac{u - \mu G u}{\|u - \mu G u\|_{p(\cdot)}} = \frac{u + \lambda(u(s) - \operatorname{sen} u(s))}{\|u + \lambda(u(s) - \operatorname{sen} u(s))\|_{p(\cdot)}} = \frac{u - Fu}{\|u - Fu\|_{p(\cdot)}},$$

de donde

$$\left\| \frac{u - \mu G u}{\|u - \mu G u\|_{p(\cdot)}} + \frac{u - Fu}{\|u - Fu\|_{p(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)} = 2.$$

Es decir, los operadores F, μG satisfacen la *primera condición de Maligranda*. Entonces por el Teorema 4.2.7 tenemos que

$$u(s) = \varphi(s,u(s)) + \mu \int_a^b \psi(s,t,u(t))dt.$$

Por lo tanto,

$$u(s) = \frac{\lambda}{\lambda+1}\operatorname{sen} u(s) + \lambda(\operatorname{sen} u(s) - u(s)),$$

o equivalentemente,

$$(\lambda+1)^2 u(s) = \lambda(\lambda+2)\operatorname{sen} u(s). \tag{4.7}$$

En conclusión, la ecuación en estudio tiene única solución en la bola $\overline{B}(0,r)$, la cual viene dada por la relación (4.7).

Impongamos ahora la *segunda condición de Maligranda* a los operadores F y μG:

$$\|a(u-\mu Gu)+b(u-Fu)\|_{p(\cdot)}=a\|u-\mu Gu\|_{p(\cdot)}+b\|u-Fu\|_{p(\cdot)} \tag{4.8}$$

para cualquier par de reales positivos a y b.

Teorema 4.2.8. *Si la función $\varphi:(a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface* (4.3) *o* (4.4)*, $\psi:(a,b)\times(a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las condiciones* (3.6) *y* (4.2) *y los operadores F y μG satisfacen segunda condición de Maligranda* (4.8)*, entonces la ecuación integral no lineal* (4.1)

$$u(s)=\varphi(s,u(s))+\mu\int_a^b\psi(s,t,u(t))dt,\ \ s\in(a,b),\ \ |\mu|\ll 1,$$

tiene una única solución $u\in\overline{B}(0,r)$, para una escogencia conveniente de los parámetros μ y λ.

Demostración. Es la misma del Teorema 4.2.7, usando primero el Teorema 1.3.8 y luego el Teorema 1.3.2 junto con la Proposición 2.6.4. □

4.3. Soluciones continuas de la ecuación (4.1)

Dado que, en el caso $p_+<\infty$, el conjunto $C(a,b)\cap L^{p(\cdot)}(a,b)$ así como el conjunto $C_c(a,b)$ son densos en $L^{p(\cdot)}(a,b)$, en esta sección desarrollaremos el estudio de existencia de soluciones continuas de la ecuación (4.1).

La existencia de soluciones continuas de la ecuación (4.1) es establecida en el siguiente resultado.

Teorema 4.3.1. *Si la función $\varphi:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface* (3.5) *con $f\in L^\infty(a,b)$ y es continua, y si la función $\psi:[a,b]\times[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface* (3.6) *con*

$$M:=\sup_{s\in[a,b]}\left|\int_a^b g(s,t)dt\right|<\infty$$

y es continua, entonces la ecuación integral no lineal (4.1)*:*

$$u(s)=\varphi(s,u(s))+\mu\int_a^b\psi(s,t,u(t))dt,\ \ s\in(a,b),\ \ \mu\in\mathbb{R}$$

tiene una solución $u\in C[a,b]$.

Demostración. Queremos obtener un punto fijo del operador $T=F+\mu G$. Para lograr esto, aplicaremos el Teorema del punto fijo de Schaefer (Teorema 1.2.10); por lo tanto, necesitamos demostrar que T envía el conjunto $C[a,b]$ en si mismo, es continuo y compacto.

Primero, demostremos que $T(C[a,b]) \subseteq C[a,b]$. Consideremos una función arbitraria en $u \in C[a,b]$ y sean $s, s_0 \in [a,b]$. Entonces, obtenemos

$$\begin{aligned} |(Tu)(s) - (Tu)(s_0)| \leq\ & |\varphi(s,u(s)) - \varphi(s,u(s_0))| \\ & + |\mu| \int_a^b |\psi(s,t,u(t)) - \psi(s_0,t,u(t))| dt. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dado que la función u es acotada en $[a,b]$, existe $M > 0$ tal que $|u(t)| \leq M$ para todo $t \in [a,b]$. Además, como u es una función continua definida en el compacto $[a,b]$, tenemos que u es uniformemente continua. Esto implica que la función $\varphi : [a,b] \times [-M,M] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua; esto es, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|\varphi(s,u(s)) - \varphi(s,u(s_0))| < \epsilon/2$$

para todo $(s,u(s)), (s_0,u(s_0)) \in [a,b] \times [-M,M]$, satisfaciendo que

$$0 < \|(s,u(s)) - (s_0,u(s_0))\|_\infty = \text{máx}\,\{|s-s_0|, |u(s)-u(s_0)|\} < \delta_1.$$

De manera similar, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|\psi(s,t,u(t)) - \psi(s,t,u(t))| < \frac{\epsilon}{2(|\mu|+1)(b-a)}$$

para todo $(s,t,u(t)), (s_0,t,u(t)) \in [a,b] \times [a,b] \times [-M,M]$, satisfaciendo que

$$0 < \|(s,t,u(t)) - (s_0,t,u(t))\|_\infty = |s-s_0| < \delta_2.$$

Tomando $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$ y suponiendo que $\|(s,t,u(t)) - (s_0,t,u(t))\|_\infty < \delta$, por la desigualdad (4.9), concluimos que

$$|(Tu)(s) - (Tu)(s_0)| < \frac{\epsilon}{2} + |\mu| \int_a^b \frac{\epsilon}{2(|\mu|+1)(b-a)} dt < \frac{\epsilon}{2} + \left(\frac{|\mu|}{|\mu|+1}\right)\frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, $(Tu)(s)$ es una función uniformemente continua, para cualquier $u \in C[a,b]$. En consecuencia $T(C[a,b]) \subseteq C[a,b]$. Más aún, dado que la continuidad de T es independiente de la elección de u, demostramos que $T(C[a,b]) \subseteq C[a,b]$ es equicontinuo.

La continuidad de T en $C[a,b]$ se sigue de la continuidad de T en $L^{p(\cdot)}[a,b]$ y del hecho que $C[a,b] \subseteq L^{p(\cdot)}[a,b]$. Ahora, demostraremos la compacidad del operador T. Es suficiente verificar las condiciones del teorema de Arzelà–Ascoli para el conjunto $\overline{T(B_\infty(1))}$, que es la clausura en $C[a,b]$ de la imagen por medio del operador T de la bola unitaria cerrada $B_\infty(1)$. Dado que T es un operador continuo, el conjunto $T(B_\infty(1))$ es acotado. La equicontinuidad de $\overline{T(B_\infty(1))}$ se sigue de la equicontinuidad de $T(C[a,b])$. Por lo tanto, el operador $T : C[a,b] \to C[a,b]$ es compacto.

Finalmente, demostraremos que para todo $\lambda \in [0,1]$ los conjuntos

$$S_\lambda := \{u \in C[a,b] : u = \lambda T u\}$$

son acotados. De hecho, por las condiciones (3.5) y (3.6), para $u \in S_\lambda$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_\infty = \lambda\|Tu\|_\infty &\leq \|\varphi(s,u(s))\|_\infty + \lambda\left\|\mu\int_a^b \psi(s,t,u(t))dt\right\|_\infty \\
&\leq \lambda\left(\|f\|_\infty + b_1\|u^{p/q}\|_\infty + |\mu|\left\|\int_a^b (g(s,t) + b_2|u(t)|^{p(t)/q(t)})dt\right\|_\infty\right) \\
&\leq \lambda\left(\|f\|_\infty + b_1\|u^{p/q}\|_\infty\right) + \lambda|\mu|\sup_{s\in[a,b]}\left\{b_2(b-a)\|u^{p/q}\|_\infty + \int_a^b g(s,t)dt\right\} \\
&= \lambda\left(\|f\|_\infty + (b_1 + b_2(b-a)|\mu|)\|u^{p/q}\|_\infty + |\mu|M\right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ahora, por el Teorema 2.3.1 $L^\infty[a,b] \subseteq L^{p(\cdot)}[a,b]$ y $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \|1\|_{p(\cdot)}\|f\|_\infty$. Por lo tanto, para todas las funciones $f \in C[a,b] \subseteq L^\infty[a,b]$, podemos encontrar $K > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq K\|f\|_{q(\cdot)}$. Usando esto y el Lema 2.2.7, tenemos

$$\|u^{p/q}\|_\infty \leq K\|u^{p/q}\|_{q(\cdot)} \leq K\|u\|_{p(\cdot)}^{(p/q)_\pm} \leq K\|1\|_{p(\cdot)}^{(p/q)_\pm}\|u\|_\infty^{(p/q)_\pm}. \tag{4.11}$$

Por lo tanto, de la desigualdad (4.10), tenemos

$$\|u\|_\infty = \lambda\|Tu\|_\infty \leq \lambda\left(\|f\|_\infty + (b_1 + b_2(b-a)|\mu|)K\|1\|_{p(\cdot)}^{(p/q)_\pm} + |\mu|M\right).$$

En consecuencia, cada S_λ es acotado, por lo tanto, lo mismo se tiene para el conjunto $\bigcup_{0\leq\lambda\leq 1} S_\lambda$. Aplicando el Teorema del punto fijo de Schaefers (Teorema 1.2.10), el operador T tiene un punto fijo en $C[a,b]$, o equivalentemente, la ecuación (4.1) tiene una solución en $C[a,b]$. □

Observación 4.3.1. *Nótese que las condiciones de crecimiento* (3.5) *y* (3.6)*, impuestas sobre las funciones φ y ψ respectivamente, están relacionadas con las funciones exponentes en $L^{p(\cdot)}$. El Teorema 4.3.1 establece condiciones para existencia de soluciones en $C[a,b]$ de la ecuación* (4.1) *y como hemos visto, la demostración tiene en consideración la relación entre la norma en $C[a,b]$ y la norma en $L^{p(\cdot)}[a,b]$ (ver, desigualdad* (4.11)*).*

Dado que el objetivo principal en esta tesis es analizar la existencia de soluciones de la ecuación (4.1) cuando esta está definida en $L^{p(\cdot)}(a,b)$, el Teorema 4.3.1 se convierte en una herramienta que garantiza la existencia de soluciones continuas de la ecuación (4.1) en este ambiente. Este resultado toma relevancia puesto que el conjunto de las funciones continuas con soporte compacto contenido en (a,b) es denso en $L^{p(\cdot)}(a,b)$ (suponiendo que, $p_+ < \infty$).

La existencia de soluciones de la ecuación (4.1) en $C[a,b]$, en el caso que las condiciones crecimiento (3.5) y (3.6) de las funciones de Carathéodory φ y ψ no están relacionadas con la norma del espacio $L^{p(\cdot)}$ son discutidas en [31].

La unicidad de las soluciones continuas de la ecuación integral (4.1) es dada en el siguiente resultado.

Teorema 4.3.2. *Si la función $\varphi : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y es una contracción estricta en la segunda variable, es decir*

$$|\varphi(t,x) - \varphi(t,y)| \leq L|x-y|, \;\; 0 \leq L \leq 1$$

y si la función $\psi : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y es Lipschitz en la tercera variable, es decir

$$|\psi(t,s,x) - \psi(t,s,y)| \leq M|x-y|, \;\; M > 0,$$

entonces la ecuación integral no lineal (4.1):

$$u(s) = \varphi(s,u(s)) + \mu \int_a^b \psi(s,t,u(t))dt, \;\; s \in (a,b), \;\; \mu \in \mathbb{R}$$

tiene una única solución $u \in C[a,b]$ siempre que $L + |\mu|M(b-a) < 1$.

Demostración. Sean $u, v \in C[a,b]$. Dado que las funciones de Carathéodory φ y ψ son continuas, en el Teorema 4.3.1, se demostró que $T(C[a,b]) \subseteq C[a,b]$. Ahora, de las condiciones de Lipschitz impuestas sobre las funciones φ y ψ obtenemos

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\|_\infty &\leq \|\varphi(s,u) - \varphi(s,v)\|_\infty + \left\| \mu \int_a^b [\psi(s,t,u(t)) - \psi(s,t,v(t))]\, dt \right\|_\infty \\ &\leq (L + |\mu|(b-a)M)\|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Esto significa que el operador $T : C[a,b] \to C[a,b]$ pertenece a la clase $BC(\alpha)$ con constante $\alpha = L + |\mu|(b-a)M < 1$. Esto es, por el Teorema del Punto Fijo de Banach, T tiene un único punto fijo, o equivalentemente la ecuación (4.1) tiene una única solución en $u \in C[a,b]$. □

Conclusión

La medida de no compacidad de Kuratowski nos permitió introducir la noción grado topológico para aplicaciones α–*condensantes*. Utilizando las propiedades de esta herramienta topológica logramos demostrar un Teorema de punto fijo con el cual pudimos establecer existencia de soluciones de la ecuación (4.1). Dado que tenemos condiciones para la compacidad del operador G, resta por estudiar la existencia de soluciones de la ecuación integral (4.1) mediante teoremas de tipo Kranoselkiĭ, lo cual permite estudiar soluciones positivas de esta ecuación.

Por otro lado, al imponer ciertas condiciones especiales de crecimiento a las funciones φ y ψ conseguimos que los operadores F y μG fueran de tipo contractivo y bajo la suposición adicional de que estos operadores satisficieran la condición de *Diaz–Metcalf*, demostramos que el operador $T := F + \mu G$ también es de tipo contractivo, con lo cual logramos establecer la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación en estudio sin usar la medida de no compacidad de Kuratowski. Al cambiar la condición de *Diaz–Metcalf* impuesta sobre los operadores de tipo contractivo T y S, por las *condiciones de Maligranda* logramos demostrar dos nuevos teoremas de punto fijo, con lo cuales a su vez obtuvimos dos nuevos resultados de existencia y unicidad para la ecuación (4.1).

Quisiéramos hacer notar que una de las características más importantes de las clases de aplicaciones de Kannan y $D(a, b)$ es que estas admiten aplicaciones discontinuas, sin embargo, las condiciones de crecimiento usadas en esta tesis hacen que los operadores asociados a la ecuación (4.1) sean continuos, queda por estudiar condiciones sobre las funciones φ y ψ de tal forma que los correspondientes operadores inducidos F y G sean discontinuos.

Suponiendo la continuidad y ciertas condiciones de crecimiento sobre las funciones φ y ψ logramos que el operador $T := F + \mu G$ estuviera en las hipótesis del Teorema de Punto Fijo de Schaefers y del Teorema del Punto Fijo de Banach, con lo cual demostramos la existencia de soluciones continuas de la ecuación (4.1).

Otros aspectos importantes de establecer para estas ecuaciones son la existencia de soluciones aproximadas, la estabilidad de soluciones y la aplicabilidad de métodos numéricos.

Bibliografía

[1] E. Acerbi and G.Mingione, *Functionals with $p(x)$ growth and regularity*, Attidella Accademia Nazionale dei Lincei Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali Rendiconti Lincei. Serie 9. Matematica e Applicazioni, 11**(3)** (2000), 169–174.

[2] E. Acerbi and G. Mingione, *Regularity results for stationary electro-rheological fluids*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 164**(3)** (2002), 213–259.

[3] Yu. A. Alkhutov, *The Harnack inequality and the Hölder property of solutions of nonlinear elliptic equations with a nonstandard growth condition*, Differentsialnye Uravneniya, 33**(12)** (1997), 1651–1660, 1726, (En Ruso), (trad. en Differential Equations, 33**(12)**, 1997, 1653–1658 (1998)).

[4] G. Arfken, *Integral Equations* Ch. 16 in Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press, 865–924, 1985.

[5] T.A. Burton, *Volterra Integral and Differential Equations* (2nd ed.), Mathematics in Science and Engineering 202, Elseiver, Amsterdam, 2005.

[6] A. Cabada and R.L. Pouso, *Existence theory for functional p-Laplacian equations with variable exponents*, Nonlinear Analysis, 52**(2)** (2003), 557–572.

[7] J. F. Caicedo, *Cálculo avanzado*: *introducción*, Unibiblos, Universidad Nacional de Colombia, 2005, 352 pp.

[8] J. F. Caicedo, A. Castro, *Ecuaciones Semilineales con Espectro Discreto*, Colección textos, Universidad Nacional de Colombia, 2012, 175 pp.

[9] R. Castillo and H. Rafeiro, *An Introductory Course in Lebesgue Spaces*, CMS books in Mathematics, Springer, Switzerland, 2016, 461pp.

[10] R. Castillo, J.C Ramos–Fernández and E.M. Rojas, *Volterra integral equations on variable exponent Lebesgue spaces*, Journal of Integral Equations and Applications, 28**(1)** (2016), 1–29.

[11] V. Chiadò Piat and A. Coscia, *Hölder continuity of minimizers of functionals with variable growth exponent*, Manuscripta Mathematica, 93**(3)** (1997), 283–299.

[12] C. Corduneanu, *Principles of Differential and Integral Equations* (2nd ed.), Chelsea, New York, 1988.

[13] A. Coscia and G. Mingione, *Hölder continuity of the gradient of $p(x)$-harmonic mappings*, Comptes Rendus Mathématiques de l'Academie des Sciences, Paris, Série I Mathematique, 328**(4)** (1999), 363–368.

[14] D. V. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces, Foundations and Harmonic Analysis*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhuäser Basel, 2013, 312 pp.

[15] D. V. Cruz–Uribe, A. Fiorenza and M.V, Ruzhansky, *Variable Lebesgue Spaces, Foundations and Hyperbolic Systems*, Advanced Courses in Mathematics–CRM Barcelona, Birkhäuser, 2014, ix 170 pp.

[16] H.T. Davis, *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, New York: Dover, 1962.

[17] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985, xiv, 450 pp.

[18] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Math., Vol 2017, Springer, 2011, ix 509 pp.

[19] W.R. Derryck and L. Nova, *Interior properties and fixed points of certain discontinuous operators*, Elsevier Science, 1992, 239–245.

[20] W.R. Derryck and L. Nova, *Fixed points theorems for discontinuous operators*, Glasnik Matem., (1989), 339-347.

[21] J.B. Diaz and F.T. Metcalf, *A complementary triangle inequality in Hilbert and Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., (17)**(1)** (1966), 88–97.

[22] X. Fan *Regularity of non standard Lagrangians $f(x, \xi)$*, Nonlinear Analysis, 27**(6)** (1996), 669–678.

[23] X. Fan and X. Fan, *A Knobloch-type result for $p(t)$-Laplacian systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 282**(2)** (2003), 453–464.

[24] X. Fan, H.-Q Wu and F.-Z. Wang, *Hartman-type results for $p(t)$-Laplacian systems*, Nonlinear Analysis, 52**(2)** (2003), 585–594.

[25] X.L. Fan and Q.H. Zhang, *Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem*, Nonlinear Anal. T.M.A., 52, (2003), 1843–1852.

[26] X. Fan and D. Zhao, *Regularity of minimizers of variational integrals with continuous $p(x)$-growth conditions*, Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 17**(4)** (1996), 327–336.

[27] X. Fan and D. Zhao, *A class of De Giorgi type and Hölder continuity*, Nonlinear Analysis, Series A: Theory Methods, 36**(3)** (1999), 295–318.

[28] X. Fan and D. Zhao, *The quasi-minimizer of integral functionals with $m(x)$ growth conditions*, Nonlinear Analysis, Series A: Theory Methods, 39**(7)** (2000), 807–816.

[29] K. Goebel, W. A. Kirk, T. N. Shimi, *A fixed point theorem in uniformly convex spaces*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **(7)** (1973), 63–75.

[30] G. Gripenberg, S.O. Londen and O. Staffans, *Volterra Integral and Functional Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[31] F. Isaia, *On a nonlinear integral equation without compactness*, Acta Math. Univ. Comen. **(75)** (2006), 233–240.

[32] V. Istrăţescu, *Fixed Point Theory*: *An Introduction*, Mathematics and Its Applications, **7**, Reidel Publishing Company, Boston, 1981.

[33] R. Kannan, *Some results on fixed points II*, Amer. Math. Monthly, 76, (1969), 405–408.

[34] R. Kannan, *Some results on fixed points III*, Fund. Math., 70, (1971), 169–177.

[35] J. Kondo, *Integral Equations*, Oxford, England: Clarendon Press, 1992.

[36] O. Kovácĭk, *Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$*, Fascicola Matematică, 25, (1995), 87–94.

[37] R. Kress, *Linear Integral Equations*, New York: Springer-Verlag, 1989.

[38] R. Kress, *Numerical Analysis*, New York: Springer-Verlag, 1998.

[39] V. Lakshmikantham and M.R.M. Rao, *Thoery of Integro-differential Equations*, Stability and Control: Theory, Methods and Applications 1, Gordon and Breach Publ. Philadelphia, 1995.

[40] S. Lipschutz, *Theory and Problems of General Topology*, New York, 1965, Schaum's Outline Series, McGraw–Hill, 239 pp.

[41] W.V. Lovitt, *Linear Integral Equations*, New York: Dover, 1950.

[42] J. Lukeš, L. Pick, D. Pokorný. *On geometric properties of the spaces $L^{p(x)}$*, Rev. Math. Complut, 24**(1)** (2011), 115–130.

[43] L. Maligranda, *Simple norm inequalities*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), 256–260.

[44] P. Marcellini, *Regularity for elliptic equations with general growth conditions*, Journal of Differential Equations, 105**(2)** (1993), 296–333.

[45] S.G. Mikhlin, *Integral Equations and Their Applications to Certain Problems in Mechanics, Mathematical Physics and Technology*, 2nd rev. ed. New York: Macmillan, 1964.

[46] S.G. Mikhlin, *Linear Integral Equations*, New York: Gordon & Breach, 1961.

[47] M. Milovanović, *Measures of noncompactness on uniform spaces the axiomatic approach*, Filomat, 15, (2001), 221–225.

[48] J.R. Morales and E.M. Rojas, *On the sum of contractive type of mappings II*: *Maps on different classes*, J. Inequal. Appl. **2014**, 208.

[49] J.R. Morales and E.M. Rojas, *Some results for one class of discontinuous operators with fixed points*, Acta Math. Univ. Comen., 76, (2007), 149–160.

[50] L. Nova, *Fixed points theorems for some discontinuous operators*, Pac. J. Math. **123**, (1986), 189–196.

[51] D. Ojeda-Marulanda, *Existencia de soluciones de una ecuación de Volterra en espacios de Lebesgue con exponente variable*, preprint, 2016, 9 pp.

[52] W. Orlicz, *Über konjugierte exponentenfolgen*, Studia Math., 3, (1931), 200–212.

[53] A.C. Pipkin, *A Course on Integral Equations*, New York: Springer-Verlag, 1991.

[54] A.D. Polyanin and A.V. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations*, Boca Raton, FL: CRC Press, 1998.

[55] D. Porter and D.S.G. Stirling, *Integral Equations: A Practical Treatment, from Spectral Theory to Applications*, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990.

[56] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, *Integral Equations and Inverse Theory*, Ch. 18 in Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing, 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 779–817, 1992.

[57] H. Rafeiro, *Kolmogorov compactness criterion in variable exponent Lebesgue spaces*, Proc. A. Razmazde Math. Inst., 150, (2009), 105–113.

[58] H. Rafeiro and E.M. Rojas, *Espacios de Lebesgue con Exponente Variable*: *Un Espacio de Banach de Funciones Medibles*, IVIC –Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (2014).

[59] S. Reich, *Kannan's Fixed points theorems*, Boll. Union. Math. Ital. **4** (1971), 121–128.

[60] S. Reich, *Remarks concerning contration mappings*, Canad. Math. Bull., 14, (1971), 121–124.

[61] S. Reich, *Remarks on fixed points*, Rend. Accad. Naz. Lincei., 52, (1972), 689–697.

[62] B.E. Rhoades, *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., 226, (1977), 257–290.

[63] M. Růžička, *Electroreological Fuids: Modeling and Mathematical Theory*, Springer, Lecture Notes in Math., 2000, vol. 1748, xiv 178 pp.

[64] F.G. Tricomi, *Integral Equations*, New York: Dover, 1957.

[65] M. M. Vainberg, *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*, Holden–Day, 1964, 333 pp.

[66] M. Väth, *Volterra and Integral Equations of Vector Functions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, CRC Press, 2000, 349 pp.

[67] V. Volterra, *Opere Matematiche*, Vol. I–V (Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1954-1962.

[68] E.T. Whittaker and G. Robinson, *The Numerical Solution of Integral Equations*, 183 in The Calculus of Observations: A Treatise on Numerical Mathematics, 4th ed. New York: Dover, 376–381, 1967.

[69] V. V. Zhikov, *Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system*, Differ. Uravn., 33**(1) (143)** (1997), 107–114.