Por lo tanto, en el análisis de **costo mínimo,** se comparan los proyectos, cotejando el valor presente de sus costos, puesto que los beneficios son constantes para todos los posibles proyectos, o en otros casos son inestimables. Podemos simplificar la ecuación de manera que sólo incluya los costos. Entonces, la ecuación es: Costo a valor presente, igual a la suma de los costos anuales, o $C_i$, descontados según el factor correspondiente a cada año, ***i***.

$$\textbf{COSTOS A VALOR PRESENTE} = \sum_{i=0}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^i}$$

En efecto, los costos a valor presente de un proyecto, se calculan sumando los costos descontados de cada año del proyecto, desde el año cero hasta el último en el que haya costos.

Como lo muestra esta ecuación, hay tres variables que deben considerarse al calcular los costos a valor presente.

- **La primera es la tasa de descuento, - r -.**

- **La segunda, representada por *i*, es la fecha de los costos**, es decir, el año o período en que ocurrirán.

- **La tercera variable, C, es la magnitud de los costos que corresponderán a algún período del proyecto.**

Del análisis en detalle de estas tres variables, se verá como cada una de ellas afecta el valor presente de los costos de un proyecto.

Se concluye entonces, que la minimización de los costos de una alternativa, depende de: La tasa de descuento, el número de expansiones, o sea cada cuanto tiempo se deciden y la escala o rangos del tamaño, lo que a su vez depende de la flexibilidad de la tecnología y el comportamiento de las economías de escala (factor de escala).

La primera variable que se va a analizar es la tasa de descuento -**r**-, la cual determina el factor de descuento.

# CAPÍTULO 3 LA TASA DE DESCUENTO

El objetivo de este capítulo es el reconocimiento de la tasa de descuento en la valorización de los costos.

## 3.1 LA FUNCION DE LA TASA DE DESCUENTO EN EL CÁLCULO DE LOS COSTOS A VALOR PRESENTE.

Los costos en que incurre un proyecto cada año o período se reducen por un porcentaje fijo, que se denomina tasa de descuento. Por lo tanto, la tasa de descuento debe ser igual al costo de oportunidad del capital.

Este costo que se expresa generalmente como un tipo de interés porcentual, mide el rendimiento que habrían tenido los recursos usados en el proyecto, si se hubieran empleado en el proyecto que se considera la segunda mejor opción. El descuento es necesario entonces, porque los costos ocurren en el futuro.

Puesto que los costos se producen en el futuro, su valor disminuirá con el tiempo. Al descontar costos futuros que ocurren en distintos años, todos los costos pueden compararse usando una base común de medición. Esta base común, es el valor presente que, en este caso, es el valor de los costos en el año cero. El descuento es

una forma de hacer que los costos futuros sean comparables, expresándolos en términos de valor presente.

Por ejemplo, la tierra utilizada para una nueva planta de tratamiento pudo haberse dedicado a cultivos de productos alimenticios. La mano de obra y los equipos utilizados para construir la planta pudieron haber sido usados para instalar un sistema de saneamiento en otra comunidad.

En ambos casos, el rendimiento que pudieron haber logrado, los recursos invertidos en la segunda opción determina el costo de oportunidad del capital para la sociedad y, por lo tanto, la tasa de descuento que se usará para calcular los costos del proyecto.

Aunque generalmente se incurre en el error de pensar la tasa de descuento como el costo de financiamiento o el tipo de interés actual, esto no es correcto a la luz de la teoría económica, porque no siempre, la alternativa de un proyecto, es invertir los recursos en el sector financiero. Habrá que aclarar que existe esta confusión, porque no se piensa que los recursos de inversión pueden obtenerse de diversas fuentes, entre otras, levantando empresas ineficientes.

En el caso colombiano, las empresas privadas y las personas naturales, tienen que pagar tipos de interés elevados cuando se presentan coyunturas especulativas por la estrechez del mercado de capitales, mientras que los organismos gubernamentales tal vez pueden recibir recursos en condiciones de fomento con lo cual el interés es bajo. En todos los casos, hay que aclarar que un comportamiento tan errático de la tasa de interés, no puede significar la tasa de descuento.

Aunque el costo de oportunidad del capital o la tasa de descuento, variaría de una época a otra, y de un país a otro, hay que tener siempre presente que el empleo de una tasa de descuento exige estabilidad, o sea que no puede ser tomada en período de especulación del capital financiero o de riesgo o de crisis. En muchos países en desarrollo, este costo es del 10 % ó más, en precios constantes. Para el caso colombiano, el costo de oportunidad del capital de los recursos públicos es el 12%; quiere ello decir que el rendimiento marginal de los recursos públicos es del 12% si no se utilizaran en la financiación del proyecto del sector público[3]. Esto es así, porque en todos los casos, cada vez que se acepta un proyecto nuevo, se sacrifica otro; el que se rechaza, es su costo de oportunidad.

## 3.2 UN CASO REPRESENTATIVO DEL EMPLEO DE LA TASA DE DESCUENTO

A continuación, se examinará cómo se emplean las tasas de descuento para calcular el valor presente de los costos, o su valor equivalente en el año cero.

En el siguiente ejemplo, se enumeran los costos de cuatro años de un proyecto en millones de pesos.

---

[3] Revista Planeación y Desarrollo DNP 1.986. El rendimiento marginal del capital de Colombia.

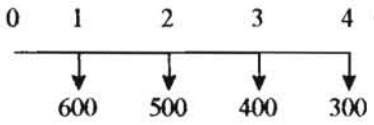


**Gráfico No. 5 Ejemplo del uso de la tasa de descuento**

El factor de descuento que debe aplicarse a los costos de cada año, lo determina la tasa de descuento. En este caso, se supondrá que la tasa es del 10%.

Los costos de cada año se descuentan por el factor apropiado para ese año a fin de obtener el valor presente. En este ejemplo, los costos del año uno se multiplicaron por el factor de descuento de 0.91 y su valor se redujo de 600 millones de pesos a 546 millones. En el año dos, se descontaron de 400 millones a 332 millones de pesos; en el año tres, de 400 millones a 300 millones de pesos, y en el año cuatro, de 300 millones a 204 millones de pesos.

Los factores de descuento en constante disminución y los valores decrecientes de los costos que se destacan en el cuadro No. 1, demuestran que cuanto más tarde se produzca un costo, menor será su valor presente.

**Cuadro No. 1**

| AÑO | COSTOS (millones $) | FACTOR DE DESCUENTO (tasa de descuento 0.1) | COSTO A VALOR PRESENTE ($) |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | 600 | 0.91 | 546 |
| 2 | 400 | 0.83 | 332 |
| 3 | 400 | 0.75 | 300 |
| 4 | 300 | 0.68 | 204 |

FUENTE: Manual del participante en Ingeniería Económica. Facultad de Minas 1995

# CAPÍTULO 4 EL TIEMPO Y SU EFECTO ECONÓMICO

El objetivo de este capítulo es la estimación de la fecha que puede minimizar los costos, al señalar el momento óptimo de la expansión.

## 4.1 LA FECHA ÓPTIMA PARA EL *COSTO MÍNIMO*

Al analizar las variables que determinan el costo de un proyecto, se plantea la necesidad de considerar el comportamiento futuro de la demanda como una forma de referenciar las respuestas de los componentes de la planta inicial de un proyecto a su virtual dinamismo; esto significa que, a largo plazo, todos los componentes de una planta inicial requerirán una capacidad adicional, pero a corto plazo, sólo la necesitarán algunos de estos componentes y en fechas distintas.

El estudio de mercado además de permitir proyectar la demanda en un número de períodos (años), en que se desarrolla el mercado desde que se inicia la producción del proyecto, permite el cálculo de una tasa de crecimiento de mercado **(R)**, de tal manera que uno puede decir que la demanda óptima, $D_i$, es igual a la magnitud del mercado actual $D_0$, multiplicada por el desarrollo porcentual de la demanda **(1 + R )**.

**Factor de Crecimiento de la Demanda** $= (1+R) \Rightarrow D_i = D_0(1+R)^i$.

A esta demanda en el período **i** (óptimo), deberá el proyecto responder con una capacidad de producción, para impedir llegar al punto de demanda insatisfecha, lo cual plantea el segundo problema de la ecuación de **costo mínimo,** o sea, el **cuándo** deberá hacerse la expansión.

La consideración que habrá que hacer, es que si se conoce el grado de flexibilidad tecnológica (expresado en la vida útil de los diferentes componentes de la planta) y el crecimiento de la demanda **(R)**, la fecha óptima para hacer los ajustes (ampliaciones) de la planta, deberá ser aquella que permita mantener al mínimo los costos totales de inversión, durante el horizonte del proyecto; o sea, se deberá ajustar la planta cada que la demanda lo exija y la tecnología lo permita. En consecuencia, cada cierto tiempo **i,** se deberá hacer un ajuste de planta, que se expresa en un $\mathbf{C_i}$ (Costo de ajuste en el año i), de manera que:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^i}$$

Por tanto, la fecha económicamente óptima **(i)** para los costos del proyecto, deberá ser tan tarde como sea posible, mientras se atienda la demanda, sin recurrir al racionamiento (demanda insatisfecha). Esto, porque cuanto más tarde se produzcan los costos, mayor será su descuento y por consiguiente, menos será su valor presente. Por ejemplo, un millón de pesos que se irían a gastar hoy prematuramente, si se pospone para el período 15, cuando la demanda lo exija, sólo serán $ 240.000 (a una tasa de descuento del 10%).

Se admite luego, que una inversión prematura, hará que los recursos permanezcan improductivos y entre tanto, se impedirá que estos recursos produzcan beneficios en otra parte de la economía.

En conclusión, son varios los beneficios de diferir las inversiones hasta una fecha óptima:

- El menor valor presente de los costos.

- El aprovechamiento de los costos en un mayor número de años, lo cual alivia la carga de financiación.

- La distribución más uniforme de las inversiones, en un período más prolongado del proyecto.

Invertir prematuramente para prevenir las alteraciones de costos que produce la inflación, es ignorar que es más valorizadora la tasa de interés real creando, que la inflación destruyendo.

## 4.2 UN EJEMPLO SOBRE TIEMPOS DE EXPANSIÓN

La comunidad del municipio de Agua Blanca, ha venido creciendo y tiene un consumo inicial de agua de 20.000 lts./día. Se ha supuesto que este consumo crecerá a una tasa

de 0.10 anual acumulativo. El analista del proyecto ha pensado en instalar una planta de tratamiento, dotada con un exceso de capacidad del 0.25 sobre la demanda inicial. Se supone que la curva de demanda es monótonamente creciente en el tiempo y tiene una longitud temporal de 10 años.

Pregunta:

¿En qué período la capacidad inicial se hace insuficiente, de tal manera que se deba realizar un nuevo ensanche?

Respuesta:

La curva de demanda está dada por la expresión:

$D_i = D_0 (1 + R)^i$, donde:

$D_i =$ Demanda en el año i

$D_0 =$ Demanda inicial (20.000 lts./día)

$R =$ Tasa de crecimiento anual acumulativo = 0.10

Por tanto, la capacidad inicial será:

$D_0 (1 + 0.25) = 20.000 (1.25) = 25.000$ lts./día.

Estos 25.000 litros diarios, serán insuficientes a partir del año i, donde:

$25.000 = D_0 (1 + 0.10)^i$ (En este punto, la oferta será igual a la demanda del año i).

$25.000 = 20.000 (1.1)^i$

$$i = \log(2.3/2) / \log(1.1) = 0.09691 / 0.04139 = 2.34$$

O sea, que a los 2.34, es la fecha óptima para realizar la segunda expansión, porque a partir de esa fecha, el crecimiento de la demanda supera la capacidad inicial de la planta que es de 25000 lts./día.

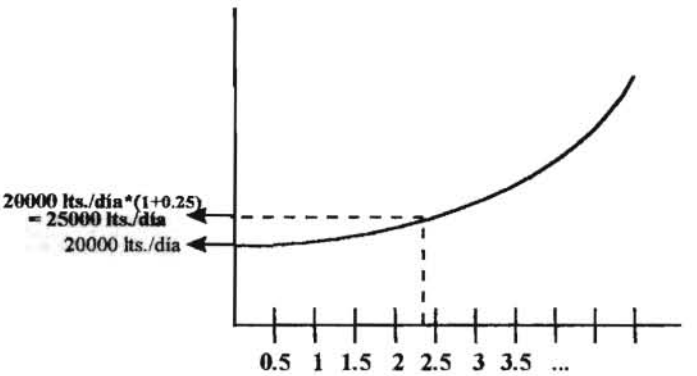


**Gráfico No. 6**

# CAPÍTULO 5 LAS ECONOMÍAS DE ESCALA

El objetivo de este capítulo es indicar el efecto que tiene la selección de la tecnología en la minimización de los costos.

## 5.1 DIMENSIÓN DE LOS COSTOS Y EL TAMAÑO DEL AJUSTE

Es importante indicar que la comparación de la capacidad existente con la demanda proyectada, sólo indica el **cuándo** deberá hacerse la ampliación, pero no revela nada en cuanto a la **escala** de la ampliación requerida.

La escala o dimensión de los costos, exige una decisión sobre el grado en que se ampliará la planta existente, o mejor dicho, la pregunta central es ¿ cuál es el tamaño de la nueva expansión?. Esta pregunta es clave, porque el tamaño del ajuste afectará los costos de inversión. La respuesta a esta pregunta, exige que se defina primero qué es una función de producción, porque dependiendo del carácter de esta función, habrá o no economías de escala.

En forma simple, podemos decir que una función de producción es una relación entre una cantidad de producto ( Y ) y una cantidad de factores $X_1$, $X_2$,....., $X_n$, los cuales, al variar dentro de una técnica determinada , alteran el nivel de producción.

Ahora, si el resultado $Y = f(X_1, X_2)$, suponiendo que los factores de producción son:

$X_1$ = Trabajadores y
$X_2$ = Equipos,

se multiplica por **t**; siempre y cuando se multipliquen por **t** los factores , decimos que existen rendimientos constantes a escala; pero si el resultado del nivel de producción **Y** no crece en la misma proporción que los factores, habrá rendimientos decrecientes a escala y en caso contrario, habrá rendimientos crecientes; o sea:

Si $t * f(X_1, X_2) = f(tX_1, tX_2)$ $\Rightarrow$ Rendimientos constantes a escala.
Si $f(tX_1, tX_2) < t * f(X_1, X_2)$ $\Rightarrow$ Rendimientos decrecientes.
Si $f(tX_1, tX_2) > t * f(X_1, X_2)$ $\Rightarrow$ Rendimientos crecientes a escala.

Estos últimos rendimientos, significa que se obtiene una producción mayor al multiplicar los factores de producción por **t**, que **t** veces el producto; este es el caso de los poliductos, los cuales al duplicar su diámetro, más que duplican su capacidad, lo cual quiere decir, en términos de costos de inversión, que al duplicar, triplicar éstos, la capacidad responde más que duplicándose o triplicándose; o en otros términos, que el costo unitario de producción $C_t / Q$, disminuye, siendo $C_t$ = Costo total y Q = Nivel de producción. Gráficamente sería:

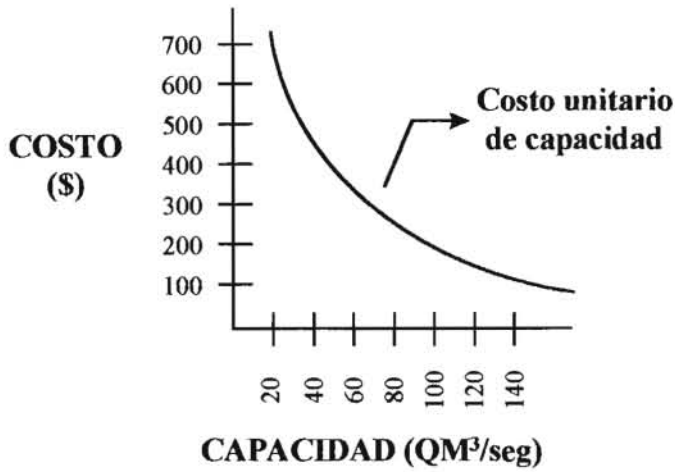


**Gráfico No. 7**

Sin embargo, esto no quiere decir que los proyectos deban concluirse con la mayor escala posible para obtener costos unitarios más bajos, porque en las mayores escalas pueden existir costos de oportunidad que arruinen las economías de escala. El "quit" del asunto, está en ampliarse, siempre cuando el ahorro en los costos de producción unitarios, producidos por la escala de producción, sean más altos que los costos de oportunidad unitarios generados por las grandes escalas de producción.

Para entender mejor esta compensación entre economías de escala y costos de oportunidad, habrá que examinar las funciones de costo que se derivan, colocando precio a los factores de producción en las funciones de producción.

O sea, Costo de inversión, $C = f(PX_1, PX_2,..., PX_n)$, quiere decir que la dimensión de la capacidad de planta, determina el costo de inversión. Esto se expresa en una ecuación de comportamiento, que puede ser $C = KQ^a$, donde:

C = Costo de inversión

Q = Dimensión o capacidad que se mide en unidades fisicas por tiempo (m2/hora, lts./segundo).

a = Factor de escala, o sea cómo varían los costos al variar la capacidad, o lo que es lo mismo $\frac{\Delta C/C}{\Delta Q/Q}$. Quiere decir como varían los costos cuando varía la capacidad, este es un número mayor o menor que uno que indica la elasticidad de los costos.

K = Constante, cuyo valor depende de las unidades en que se miden costos y capacidad, como pesos, $m^2$/hora, lts./segundo.

La ecuación permite inferir lo siguiente: Cuando a = Factor de escala es mayor que 1, hay deseconomías de escala, o sea que suben más los costos que la producción en una eventual ampliación. Si el factor de escala es 1, existen rendimientos constantes y si **a** es menor que 1, se presentan **economías de escala** o rendimientos crecientes de la ampliación. En forma equivalente, esto significa que cuando existen economías de escala, resulta que toda ampliación reduce los Costos Medios = Costos totales de inversión / Q = Cantidades producidas.

En resumen, diferentes factores de escala, pueden producir diferentes funciones de costo total; por ejemplo, cuando el factor es 2, al duplicar la capacidad, se cuadruplica el costo; si el factor es 1, duplicar la capacidad implica duplicar el costo de inversión y cuando el factor es 0.5, significa que al duplicar la capacidad, los costos de inversión sólo se incrementarán en 0.40.

$$\frac{C_2}{C_1} = \left|\frac{Q_2}{Q_1}\right|^a$$

Donde C = Costo de inversión

Q = Capacidad

Los factores de escala son el resultado de diseños tecnológicos, del carácter de la industria y del tipo de expansiones que se hagan (por tramos, por unidades, etc.); también pueden variar de un país a otro por factores culturales e institucionales.

Ejemplo: Caso planta eléctrica.

Este ejemplo mostrará cómo se presenta una economía de escala por la evolución lenta de los costos, en comparación con la capacidad, en el caso de un ensanche de la planta.

PROBLEMA: Cuál sería el costo de una planta de 800 megavatios (MW), si la función de costos de las plantas de energía es:

$C_{inversión} = 1.3 * Q^{0.7}$, donde el factor de escala es 0.7 y Q es la capacidad.

$C_{inversión} = 1.3 * (800)^{0.7}$

$\log C = \log 1.3 + 0.7\log (800)$

$\log C = 0.1139 + 0.7 (2.9031) = 2.1461$

C = antilog (2.1461) = US $140.000.000.

Ahora, si la planta se expande 37.5%, ¿Cómo se expandirán los costos?

$C = 1.3 (1.100)^{0.7}$ = US $ 175.000.000.

Los costos sólo crecieron 25%.

## 5.2 EJEMPLO

Puede demostrarse que los tanques de almacenamiento (depósito), tienen un factor de escala de 0.66, con lo cual su ampliación puede representar economías de escala.

SOLUCIÓN:

Capacidad del tanque $K = L^3$ ,

donde L = Lado

$\therefore \quad L = K^{1/3}$

Costo de construcción, $C = L^2$ (porque el costo de construcción es proporcional al área construida).

De esta forma, $C = (K^{1/3})^2$

$C = K^{2/3}$

$C = K^{0.66}$

Factor de escala = 0.66 < 1, representa economía de escala.

# CAPÍTULO 6 MODELO PARA LA OPTIMIZACIÓN DE LA EXPANSIÓN

El objetivo de este capítulo es la construcción de un modelo que sintetice variables económicas y técnicas en la definición del periodo óptimo de diseño.

## 6.1 EL PERIODO ÓPTIMO DE DISEÑO

Se trata ahora, de identificar la escala óptima de incrementos de inversión del proyecto (o ajustes de capacidad), que minimizarán los costos a valor presente y atenderán la demanda futura; es decir, cuán grande deberá ser cada incremento.

Por desconocimiento de la programación dinámica, se trabajará con funciones lineales; en tal caso, se supondrá que:

- La curva de demanda es lineal y por ello, su crecimiento se puede medir en $m^2$/hora, lts./segundo, $m^3$/año, o sea, en una tasa_determinada por el estudio de mercado **(R)**.

- La capacidad existente, será igual a la demanda del año **0**, que se mide en las mismas unidades.