



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Emparejamientos perfectos, álgebras de conglomerado y algunas de sus aplicaciones

Astrid Carolina Melo Lopez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2019

Emparejamientos perfectos, álgebras de conglomerado y algunas de sus aplicaciones

Astrid Carolina Melo Lopez

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Matemáticas

Director(a):
Título (Ph.D.) Agustín Moreno Cañadas

Línea de Investigación:
Álgebra y Combinatoria
Grupo de Investigación:
TERENUFIA

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2019

(Dedicatoria)

A mis padres y a mi hermano. Siempre me he sentido y me sentiré afortunada de contar con una familia tan excepcional y maravillosa.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia. A mis padres, debido a que todo lo que he logrado es gracias a su amor, esfuerzo y sobre todo su apoyo y comprensión porque, a pesar de que ellos deseaban que estudiara una de las carreras usuales como lo son medicina o ingeniería, nunca se opusieron a que estudiara matemáticas que es lo que realmente me apasiona. Le agradezco también a mi hermano Samuel, porque cada logro que he obtenido lo ha celebrado conmigo, y esa compañía que me ha brindado, junto a la alegría que lo representa, me llena de felicidad, además le agradezco porque ha hecho que ofrezca lo mejor de mí para ser un ejemplo a seguir para él.

En segundo lugar, quiero agradecer a una persona muy importante en mi vida la cual conocí durante la maestría: agradezco a Diego. Le doy gracias porque en estos más de dos años me ha apoyado de muchas maneras, maneras que no muchas personas han logrado ayudarme. Me ha permitido crecer a nivel personal y profesional, y estoy segura que mi paso por la Universidad Nacional no hubiese sido el mismo sino lo hubiese conocido.

Agradezco también a mis amigos Andrés Felipe González, Nicole Sarmiento, Jhon Ramirez, Felipe Tiria, Esteban Palacios y Tatiana Pulido, pues su amistad es algo que ha perdurado a pesar del tiempo y la distancia. De ellos he obtenido consejos muy valiosos y múltiples experiencias enriquecedoras por más de cinco años, y debido a que ya no puedo verlos tan seguido como antes, cada vez que nos encontramos me emociono al escucharlos y ver que siguen siendo las mismas personas lindas que compartieron conmigo tantos espacios.

Quiero agradecer a Estefanía Vanegas y a Daniel Bernal, pues aunque los conozco hace tan solo un año, un poco más o un poco menos, me han ofrecido en ese tiempo una bonita amistad y me han confiado muchas experiencias que ellos han vivido y que me han hecho reflexionar. Adicionalmente, quiero darle las gracias a Carolina Martínez y a Jasmín García porque han depositado mucha confianza en mí, y eso ha hecho que yo también confíe en mí misma, realmente las admiro mucho y nunca voy a tener cómo pagar lo que han hecho por mí.

Agradezco enormemente a los profesores de la Universidad Nacional de Colombia y de otras universidades que han contribuido a mi formación. Principalmente agradezco a los profesores Agustín Moreno Cañadas y Carolina Benedetti, porque este trabajo final de maestría se construyó con base en todos los conocimientos que han compartido conmigo. Quiero que sepan que tienen todo mi respeto.

Por último, quiero agradecer a todas las personas que no mencioné aquí, pero que de una u otra manera me ayudaron en la realización o revisión de este trabajo, o aquellas personas me han apoyado en cada uno de los pasos que he decidido dar.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es estudiar las álgebras de conglomerado, los emparejamientos perfectos de una clase de grafos particulares, y las diversas relaciones que existen entre estos dos temas. Para esto, se introducen conceptos y resultados relacionados con la teoría de grafos y la teoría de representación de carcajes, los cuales son fundamentales para realizar un estudio combinatorio y algebraico del tema. Posteriormente, se introduce el concepto de álgebras de conglomerado, y se presentan algunas de sus aplicaciones, como lo son la construcción del carcaj de Auslander-Reiten, sucesiones y ecuaciones diofánticas, y conteo de emparejamientos perfectos por medio de fracciones continuas en grafos serpiente. Como resultado del estudio previamente mencionado, se presenta la solución de una ecuación diofántica, el conteo de emparejamientos en una familia de grafos, y la relación entre emparejamientos, caminos de Dyck, particiones, triangulaciones de polígonos regulares y diamantes Aztecas. Por último, se presentan algunas conclusiones y recomendaciones que servirán de base para definir un futuro trabajo de investigación.

Palabras clave: Emparejamiento perfecto, álgebra de conglomerado, carcaj de Auslander-Reiten, triangulación, camino de Dyck, grafo serpiente, fracción continua, ecuación diofántica.

Abstract

The main objective of this work is to study cluster algebras, perfect matchings of a class of particular graphs, and the various relationships that exist between these topics. In order to do this, concepts and results related to the theory of graphs and the theory of representation of quivers are introduced, which are fundamental to carry out a combinatorial and algebraic study of the subject. Subsequently, the concept of cluster algebras is introduced, and some of its applications are presented, such as the construction of the Auslander-Reiten quiver, sequences and diophantine equations, and counting of perfect matchings through continuous fractions in snake graphs. As a result of the previously mentioned study, the solution of a diophantine equation, the counting of matchings in a family of graphs, and the relationship between matchings, Dyck

paths, partitions, triangulations of regular polygons and Aztec diamonds are presented. Finally, some conclusions and recommendations are presented that will serve as a basis for defining future research work.

Keywords: Perfect matching, cluster algebra, Auslander-Reiten's quiver, triangulation, Dyck path, snake graph, continued fraction, diophantic equation

Lista de símbolos

Símbolo	Término o definición	Página
$m(G)$	Número de emparejamientos perfectos en un grafo G	2
K_n	Grafo completo de n vértices	2
$G_{m,n}$	Grafo cuadrícula de tamaño $m \times n$	3
$\binom{()}{()}$	Número de multiconjuntos de cardinalidad k , con elementos tomados de un conjunto finito de cardinalidad n	5
C_n	n -ésimo número de Catalán	9
P_n	Polígono regular con n vértices	9
$[n]$	Conjunto de los números naturales desde 1 hasta n	11
$sgn(x)$	$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	25
$Match \mathcal{G}_\gamma$	Conjunto de los Emparejamientos perfectos del grafo \mathcal{G}_γ	60
$cross(\mathcal{G}_\gamma)$	Producto de las diagonales atravesadas por el arco γ	60
L_n	Grafo escalera de $2n$ vértices	67
t_k^d	n -ésimo número triangular de dimensión d	67
F_n	n -ésimo número de Fibonacci	70

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Lista de símbolos	xi
1 Introducción	2
1.1 Emparejamientos perfectos	2
1.2 Álgebras de conglomerado	3
2 Marco teórico	5
2.1 Conceptos básicos y notación	5
2.1.1 Teoría de grafos	5
2.1.2 Números de Catalán y lema de Lindström - Gessel - Viennot	8
2.2 Carcaj	13
2.2.1 Carcaj y álgebra de caminos	13
2.2.2 Teoría de representación de carcajes	17
2.3 Álgebras de conglomerado	24
2.3.1 Mutación	24
2.3.2 Triangulaciones y álgebras de conglomerado	38
2.4 Aplicaciones	46
2.4.1 Carcaj de Auslander-Reiten asociado al carcaj del tipo \mathbb{A}_n	46
2.4.2 Sucesiones y ecuaciones diofánticas asociadas a las álgebras de conglomerado	50
2.4.3 Grafos serpiente, fracciones continuas y emparejamientos perfectos	54
3 Resultados	64
3.1 Sucesión Dana Scott y ecuación diofántica	64

3.2	Emparejamientos perfectos en grafos escalera	66
3.2.1	Relación con los números de Fibonacci	66
3.2.2	Relación con las triangulaciones	71
3.2.3	Determinante de una familia de matrices	86
4	Conclusiones y recomendaciones	95
4.1	Conclusiones	95
4.2	Recomendaciones - Trabajo futuro	96
	Bibliografía	98

1 Introducción

Algunas de las investigaciones más importantes de la matemática involucran diversas áreas de la misma. Este estudio desde distintos puntos de vista incrementa notablemente las oportunidades de encontrar aplicaciones del tema estudiado, y por supuesto, permite hacer conexiones de temas que en principio no parecían tener relación. En este caso particular, se observarán las relaciones entre los emparejamientos perfectos de un grafo y las álgebras de conglomerado, y a lo largo del trabajo se usarán conceptos pertenecientes a distintas áreas de la matemática como la teoría de grafos, combinatoria, teoría de representación de carcajes y teoría de números.

1.1. Emparejamientos perfectos

Un emparejamiento en un grafo es un subconjunto de aristas independientes, es decir, que no tengan vértices en común. Este objeto ha sido extensamente estudiado por investigadores interesados en algunas áreas de la matemática y de ciencias de la computación. Lo anterior se debe a que, aunque tiene una definición tan sencilla, cuenta con diversas aplicaciones como lo son la coloración de grafos, redes de flujo, redes neuronales, entre muchas otras.

A pesar de los múltiples estudios existentes en este tema, aún hay bastantes problemas abiertos concernientes a los emparejamientos. Por ejemplo, no ha sido posible encontrar una fórmula cerrada que brinde la cantidad de emparejamientos en un grafo. En particular, no existe una fórmula cerrada que indique el número de emparejamientos perfectos $m(G)$ en un grafo G cualquiera. Sin embargo, existen algunas aproximaciones asintóticas y algunos resultados exactos al considerar algunas clases de grafos.

Por ejemplo, para los grafos completos K_n con una cantidad n par de vértices, se

puede ver fácilmente que

$$m(K_n) = \frac{n!}{2^{n/2} \left(\frac{n}{2}\right)!}.$$

Kasteleyn en [13], mostró que, para un grafo "cuadrícula" $G_{m,n}$ de tamaño $m \times n$, se tiene

$$m(G_{m,n}) = \left(\prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left(4 \cos^2 \left(\frac{\pi j}{m+1} \right) + 4 \cos^2 \left(\frac{\pi k}{n+1} \right) \right) \right)^{1/4}.$$

Por otra parte, Çanakçı y Schiffler estudian en [19], [25] y [26] la noción de grafo serpiente abstracto, y establecen interesantes relaciones con fracciones continuas finitas e infinitas y los emparejamientos perfectos de los grafos serpiente, encontrando que $m(G)$ coincide con la fracción continua asociada al grafo G .

1.2. Álgebras de conglomerado

Las álgebras de conglomerado fueron introducidas por Fomin y Zelevinsky en [10] en el 2000. Estas fueron encontradas en el marco de investigación que concierne la positividad de los menores de una matriz y a las bases canónicas en la teoría de Lie, desde entonces este tópico se ha convertido en una de las áreas de investigación de más dinamismo. Tal es la importancia lograda por este área que la AMS le asignó el código 13F60 a las investigaciones que conciernen este tópico.

Un álgebra de conglomerado \mathcal{A} es una subálgebra de un campo de funciones racionales en N variables x_1, \dots, x_N . \mathcal{A} está dada por un conjunto específico de generadores denominados variables de conglomerado, los cuales se pueden construir recursivamente por un proceso de mutación.

Desde su introducción las álgebras de conglomerado han sido fuente de muchos problemas abiertos y conjeturas. Por ejemplo, encontrar fórmulas cerradas que permitan el cálculo directo de las variables de conglomerado es un problema abierto en la investigación de las álgebras de conglomerado.

Por un lado, Fomin y Zelevinsky en [11] mostraron que las álgebras de conglomerado de tipo finito se pueden clasificar por medio de los diagramas de Dynkin. Adicional a eso, en [4] Caldero, Chapoton y Schiffler, relacionan las

álgebras de conglomerados y la teoría de la representación mediante la introducción de categorías de conglomerados para el tipo \mathbb{A}_n , y Schiffler en [19] hace lo mismo para categorías de conglomerados para el tipo \mathbb{D}_n . Dichas relaciones permiten la construcción del carcaj de Auslander-Reiten por medio de triangulaciones de polígonos y polígonos agujerados, obteniendo así que el número de variables de conglomerado en el caso particular de las álgebras del tipo \mathbb{A}_n corresponde a los números de Catalán.

En 2002 Fomin y Zelevinsky probaron que toda variable de conglomerado es un polinomio de Laurent en las variables iniciales x_1, \dots, x_N y conjeturaron que los coeficientes de estos polinomios son siempre positivos. La prueba de esta conjetura la obtuvieron en el 2015 K. Lee y R. Schiffler [26]. En el 2018, Schiffler y sus colaboradores han descrito interesantes relaciones entre algunas ecuaciones diofánticas conocidas como ecuaciones de Markov cuyas soluciones se llaman triplas de Markov y fracciones continuas con el número de emparejamientos perfectos en grafos serpiente.

En este trabajo se hará un estudio de los resultados encontrados en álgebras de conglomerados, y se describirán algunas de sus aplicaciones en distintos campos de la matemática. En particular, se estudiarán los resultados encontrados por Schiffler para grafos serpiente, y se usarán herramientas combinatorias para estudiar emparejamientos perfectos en grafos cuadrícula, y en un subconjunto especial de esta clase de grafos conocida como grafos escalera. Adicionalmente, se usará la teoría de álgebras de conglomerado para la construcción del carcaj de Auslander-Reiten para álgebras de tipo finito \mathbb{A}_n .

2 Marco teórico

En esta sección se encuentran definiciones fundamentales que permitirán un planteamiento adecuado de los objetivos general y específicos del proyecto. Los conceptos fundamentales a los que se hará referencia son los de emparejamiento perfecto, carcaj y álgebras de conglomerado; ligados a estos conceptos se tratarán elementos de la combinatoria y de la teoría de representaciones de carcaj, como lo son las triangulaciones de un polígono, grafos serpiente, fracciones continuas, el carcaj de Auslander-Reiten, entre otros.

2.1. Conceptos básicos y notación

2.1.1. Teoría de grafos

Definición 2.1.1 ([22], p. 655). Un **grafo no dirigido** (o simplemente grafo) G , consiste de un conjunto no vacío de elementos $V(G)$ llamados vértices, un conjunto de elementos $E(G)$ llamados aristas, y una función

$$\phi : E(G) \longrightarrow \left(\binom{V(G)}{2} \right)$$

que asigna a cada arista e un 2-multiconjunto $\{u, v\}$ de $V(G)$.

Si $u, v \in V(G)$ y $\phi(e) = \{u, v\} \in E(G)$, entonces se dice que los vértices u y v son adyacentes y, que tanto u y $\{u, v\}$ como v y $\{u, v\}$ son incidentes. Dos aristas que comparten un vértice también se dicen adyacentes.

Definición 2.1.2 ([1], p. 47). Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$ y sea $S \subset E$. Se dice que S es un **emparejamiento** en G (también conocido como conjunto de aristas independiente), si dichas aristas no tienen vértices en común. Si cada vértice en G es incidente a una arista de S , entonces S es un **emparejamiento perfecto** y $|S| = \frac{n}{2}$.

Definición 2.1.3 ([22], p. 655). Un **grafo dirigido** (o digrafo) D , consiste de un conjunto de vértices $V(D)$, un conjunto de flechas $E(D)$, y una función

$$\phi : E(G) \longrightarrow V(G) \times V(G)$$

que asigna a cada flecha e una pareja ordenada (u, v) , es decir, D es un digrafo si D es un grafo cuyas aristas tienen una dirección asignada.

Si no hay confusión, los vértices y aristas (flechas) de un grafo (digrafo), se notarán simplemente como V y E , respectivamente.

Definición 2.1.4 ([16], p. 14). Si $(u, v) \in E$ es una flecha en D , entonces se dirá que u es **predecesor directo** de v , y que v es **sucesor directo** de u . Si $w \in V$ es un vértice en D , P_w denotará el conjunto de predecesores directos de w , y S_w el conjunto de sucesores directos de w .

Esta notación para los conjuntos de predecesores y sucesores directos de un vértice será bastante útil para definir la mutación en carcajes más adelante.

Definición 2.1.5 ([22], p. 655). Sea D un digrafo. Un **camino** de longitud k del vértice u al vértice v es una secuencia $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ tal que $v_i \in V$, $e_i \in E$, para todo $i \in [k]$, $v_0 = u$, $v_n = v$, y cualesquiera dos elementos consecutivos en la secuencia son incidentes. Un camino de longitud k es un **k -ciclo** si $k \geq 1$ y todos los v_i 's son distintos, excepto para $v_0 = v_n$.

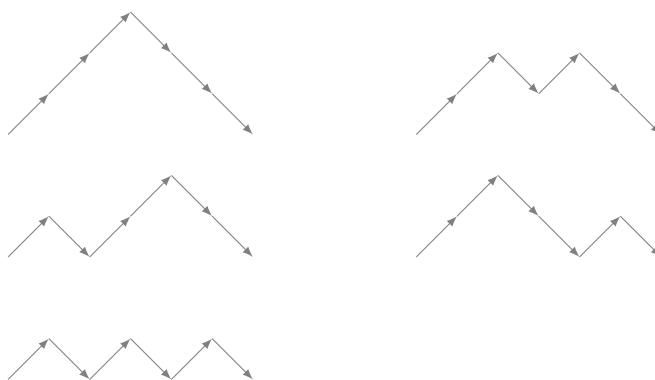
Un digrafo D es **acíclico** si no contiene ciclos. Usualmente, se trabaja con grafos finitos, pero también se puede trabajar con aquellos que sean infinitos mientras que sean localmente finitos, es decir, para todo $u, v \in V$, hay un número finito de caminos entre u y v .

Definición 2.1.6 ([22], p. 655). Dos vértices están **conectados** si existe un camino que vaya de uno a otro, de lo contrario estarán desconectados. Un grafo es conectado si para todo $u, v \in V$, u y v están conectados.

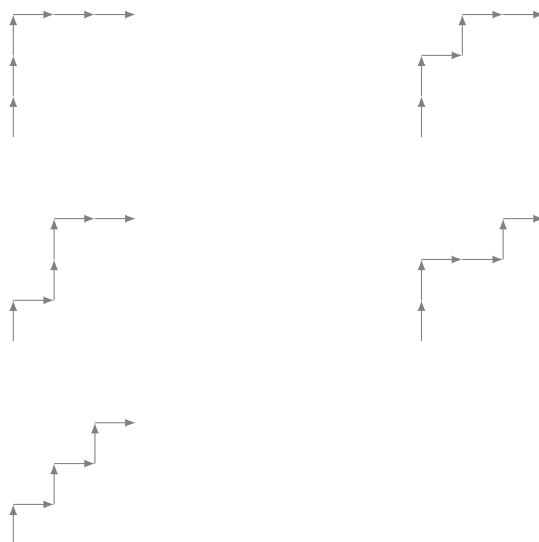
Una clase particular de caminos que se tratan bastante en este trabajo son los caminos reticulares, puesto que hay dos ejemplos que guardan una interesante conexión con las triangulaciones de un polígono regular y emparejamientos perfectos.

Definición 2.1.7 ([22], p. 28). Sea S un subconjunto de \mathbb{Z}^d . Un **camino reticular** L en \mathbb{Z}^d de longitud k con pasos en S es una sucesión $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{Z}^d$ tal que cada diferencia consecutiva $v_i - v_{i-1}$ vive en S . Se dice que L comienza en v_0 y finaliza en v_k .

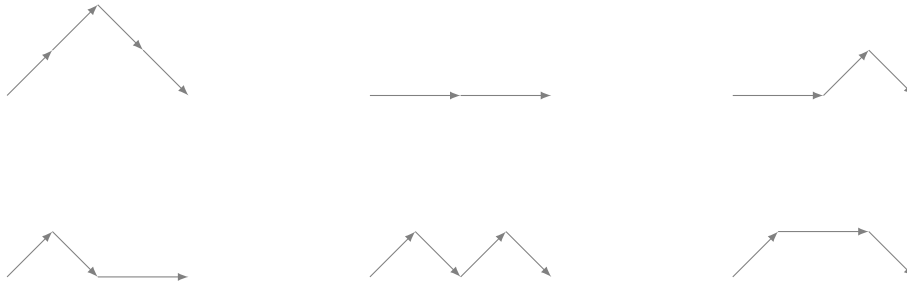
Ejemplo 2.1.8 (Caminos de Dyck, [21], Corolario 6.2.3). Son caminos reticulares en \mathbb{Z}^2 que comienzan en $(0, 0)$ y finalizan en $(2n, 0)$, donde $S = \{(1, 1), (1, -1)\}$ y tales que no pasan por debajo del eje x . El conjunto de caminos de Dyck con las anteriores especificaciones se denota por D_n . Los siguientes 5 caminos reticulares conforman D_3



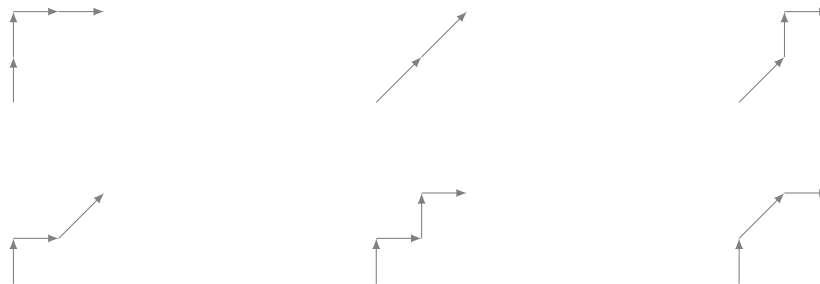
Los caminos de Dyck también se pueden describir como caminos reticulares que inician en $(0, 0)$ y finalizan en (n, n) usando pasos $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$, de tal manera que estos no pasen por debajo de la diagonal $y = x$. Teniendo en cuenta esto, D_3 se puede ver como



Ejemplo 2.1.9 (Caminos de Schröder, [6], p. 2). Son caminos reticulares en \mathbb{Z}^2 que comienzan en $(0,0)$ y finalizan en $(2n,0)$, donde $S = \{(1,1), (1,-1), (2,0)\}$ y tales que no pasan por debajo del eje x . S_n denota el conjunto de caminos de Schröder. Los siguientes 6 caminos reticulares conforman S_2



Al igual que en los caminos de Dyck, los caminos de Schröder también se pueden ver como caminos reticulares que inician en $(0,0)$ y finalizan en (n,n) usando pasos $S = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$, de tal manera que estos no pasen por debajo de la diagonal $y = x$. Así, S_2 también se puede ver como



2.1.2. Números de Catalán y lema de Lindström - Gessel - Viennot

La sucesión de números de Catalán es una de las más conocidas e importantes de la combinatoria, puesto a que ha sido estudiada desde muchos puntos de vista, a tal punto que, en este momento se encuentra asociada a más de 200 objetos combinatorios distintos, ver [23]. Dicha sucesión aparece en la OEIS como la A000108, y se describe recursivamente de la siguiente manera:

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}, \quad \text{con } n \geq 0,$$

adicionalmente, una fórmula cerrada para esta viene dada por:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad \text{con } n \geq 0.$$

Stanley en [21, Corolario 6.2.3] enuncia algunos objetos contados por esta sucesión, dentro de los cuales se destacan aquí:

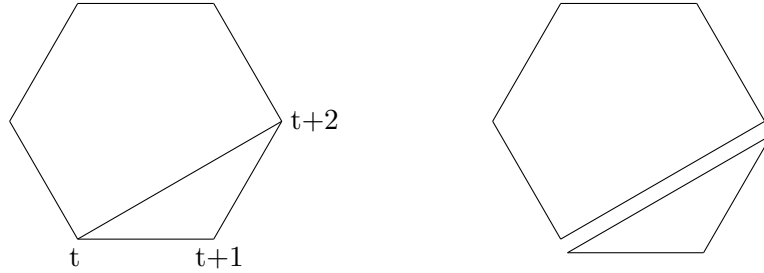
- Las triangulaciones de un polígono convexo,
- Los árboles binarios,
- Los caminos de Dyck.

Anteriormente, ya se definieron los caminos de Dyck, ahora, se va a definir las triangulaciones T de un polígono regular (basta con que el polígono sea convexo) con n vértices P_n .

Definición 2.1.10 ([16], p. 19). Un segmento de línea que une dos vértices diferentes no consecutivos de P_n será una **diagonal**. Si d_1 y d_2 son dos diagonales de P_n , se dirá que ellas se cruzan si su intersección está en el interior de P_n . Una **triangulación** de P_n es una colección de diagonales que no se cruzan y que dividen al polígono en triángulos.

Proposición 2.1.11. *Una triangulación de P_{n+3} contiene n diagonales y divide al polígono en $n + 1$ triángulos.*

Demostración. (Inducción sobre n) El polígono P_3 corresponde a un triángulo, el cual claramente tiene 0 diagonales. Se supone verdadero para $n = k$, esto es, P_{k+3} contiene k diagonales y $k + 1$ triángulos. En P_{k+4} se etiqueta cada vértice con $[k + 4]$ en el orden usual en contra de las manecillas del reloj. De esta manera, si se traza la diagonal d correspondiente a los vértices t y $t + 2$, para algún $t \in \mathbb{N}$ módulo $k + 4$, P_{k+4} queda dividido en un polígono P_{k+3} y un triángulo Δ formado por los vértices t , $t + 1$ y $t + 2$. Por hipótesis de inducción, P_{k+3} contiene k diagonales $\{d_1, \dots, d_k\}$ y divide al polígono en $k + 1$ triángulos $\{\Delta_0, \dots, \Delta_k\}$, por lo tanto, P_{k+4} tiene $k + 1$ diagonales $\{d, d_1, \dots, d_k\}$ y divide al polígono en $k + 2$ triángulos $\{\Delta, \Delta_0, \dots, \Delta_k\}$



□

Proposición 2.1.12 ([16], Proposición 2.2.13). *El número de triangulaciones de un polígono regular P_{n+3} está dado por el número de Catalán C_{n+1} .*

En este trabajo se usan únicamente las triangulaciones de un polígono regular y los caminos de Dyck. La razón para mencionar los árboles binarios radica en que, para mostrar que las triangulaciones están en biyección con los caminos de Dyck, se debe mostrar que estas están en biyección con los árboles y a su vez, estos están en biyección con los caminos. Como resultado importante de este trabajo de investigación, se encuentra un nuevo algoritmo para ver dicha biyección sin necesidad de usar los árboles binarios.

Matrices de Hankel y matrices de caminos

Un problema bastante conocido dentro del álgebra lineal es el estudio de las **matrices de Hankel**, las cuales son matrices $B = (b_{i,j})_{n \times n}$ tales que, para $i \leq j$, se tiene que $b_{i,j} = b_{i+k,j-k}$, para todo $k \in [j-i]$. En combinatoria específicamente, se estudian matrices de Hankel asociadas a una sucesión $\mathcal{B} = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, las cuales se definen en [1, p.53] como

$$H_n(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_n & \cdots & b_{2n-2} \end{pmatrix} \quad y \quad H'_n(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n+1} & \cdots & b_{2n-1} \end{pmatrix}.$$

En particular, las matrices de Hankel asociadas a la sucesión de los números de Catalán cumplen una propiedad interesante con respecto a su determinante, la cual se puede derivar haciendo uso de un lema conocido por el nombre de

Lindström-Gessel-Viennot. Para ello, primero se define el concepto de ruta y de la matriz de caminos.

Definición 2.1.13 ([12], p. 1). Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido y sea $n \in \mathbb{N}$. Un n -**vértice** $s = (s_1, \dots, s_n)$ de G es una n -tupla donde $s_i \in V$, para todo $i \in [n]$. Si $s = (s_1, \dots, s_n)$ y $t = (t_1, \dots, t_n)$ son n -vértices de G , se define un n -**camino** desde s hasta t como $A = (A_1, \dots, A_n)$, donde A_i es un camino de s_i hasta t_i .

Si para $1 \leq i, j \leq n$, los caminos A_i y A_j no tienen vértices en común, se dice que son **caminos vértice-disjuntos**. Se dice además que $A = (A_1, \dots, A_n)$ es una n -**ruta** si para todo $i \neq j$, se tiene que A_i y A_j son vértice-disjuntos.

Definición 2.1.14 ([12], p. 1). La **matriz de caminos** $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ entre dos n -vectores $s = (s_1, \dots, s_n)$ y $t = (t_1, \dots, t_n)$ es tal que

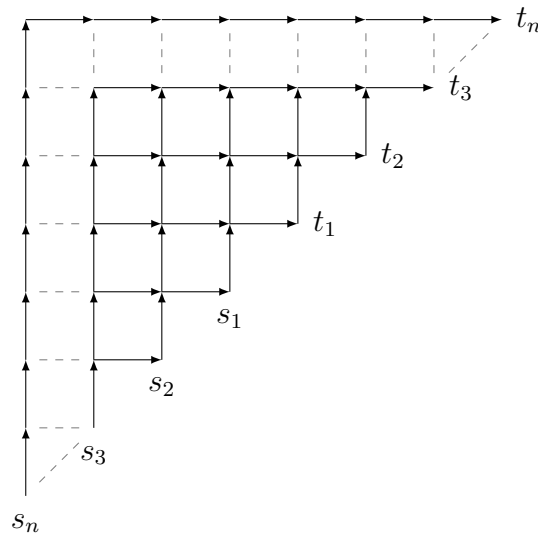
$$m_{i,j} = \#\{\text{Caminos de } s_i \text{ hasta } t_j\}.$$

Lema 2.1.15 (Lema de Lindström-Gessel-Viennot, [12], Teorema 1). *Sea G un grafo dirigido y acíclico, y sean $s = (s_1, \dots, s_n)$ y $t = (t_1, \dots, t_n)$ dos n -vectores de G , se tiene que*

$$\det M = \#\{A : A \text{ es } n\text{-ruta de } s \text{ a } t\},$$

donde M es la matriz de caminos entre s y t .

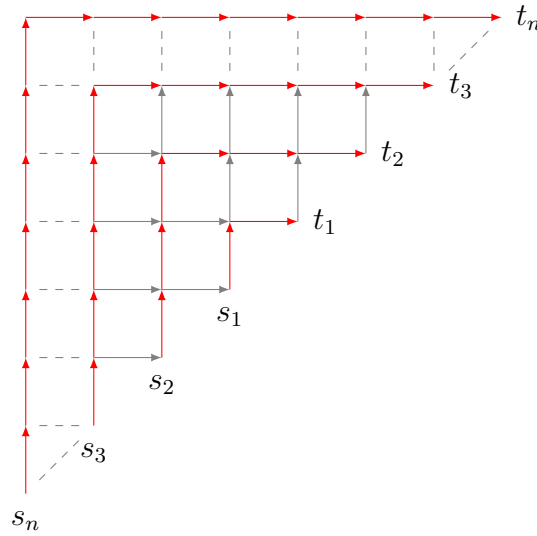
Ejemplo 2.1.16 (Determinante de Catalán, [1], p. 53). Dado el siguiente grafo con n -vértices $s = (s_1, \dots, s_n)$ y $t = (t_1, \dots, t_n)$,



Se puede observar que los caminos de s_i hasta t_k son caminos de Dyck, así que se pueden describir por medio de los números de Catalán:

- Ahora, si el vértice s_2 se fija como la coordenada $(0, 0)$, entonces el vértice t_i se encuentra en la coordenada $(i + 1, i + 1)$, por lo tanto la cantidad de caminos de s_2 hasta t_i es C_{i+1} , para todo $i \in [n]$.
- En general, si el vértice s_j es la coordenada $(0, 0)$, entonces el vértice t_i se encuentra en la coordenada $(i + j - 1, i + j - 1)$, por lo cual el número de caminos de s_j hasta t_i es C_{i+j-1} , para todo $i \in [n]$.

De esta manera, la matriz de caminos del grafo es $(m_{i,j})$, donde $m_{i,j} = C_{i+j-1}$, la cual no es más que la matriz de Hankel $H'_n(C)$ asociada a la sucesión C de los números de Catalán. Se observa que la única n -ruta es la siguiente,



Por lo tanto, haciendo uso del Lema 2.1.15, se concluye que

$$\det H'_n(C) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ C_2 & C_3 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-1} \end{vmatrix} = 1.$$

De manera similar, con base en el mismo grafo pero tomando los n -vértices de

manera que $s_1 = t_1$, se obtiene como matriz de caminos $H_n(C)$, luego

$$\det H_n(C) = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & C_n & \cdots & C_{2n-2} \end{vmatrix} = 1.$$

2.2. Carcaj

Un carcaj en la teoría de la representación es lo que se denominó anteriormente como un grafo dirigido. Teniendo en cuenta lo anterior, ¿por qué usar otro nombre para algo que ya estaba definido y, además, que ya es bastante conocido por su nombre inicial?

Pues bien, este nuevo nombre se debe al matemático francés, Peter Gabriel, quien sugirió el término de carcaj en vez de grafo, debido a que la última palabra tiene bastantes conceptos relacionados a ella y en muchas áreas de la matemática. De esta manera, el término nació para indicar que se está estudiando las representaciones de este objeto.

2.2.1. Carcaj y álgebra de caminos

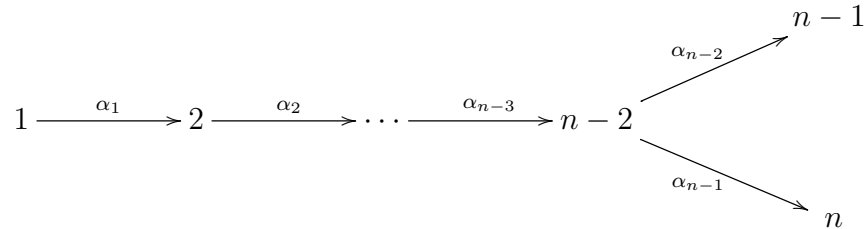
Definición 2.2.1 ([20], Definición 1.1.). Un **carcaj** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ consiste de: un conjunto de vértices Q_0 , un conjunto de flechas Q_1 , una aplicación $s : Q_1 \rightarrow Q_0$ tal que a cada flecha le asigna su vértice inicial y, una aplicación $t : Q_1 \rightarrow Q_0$ tal que a cada flecha le asigna su vértice terminal.

Ejemplo 2.2.2 (Carcaj linealmente orientado del tipo \mathbb{A}_n). Este carcaj es tal que $Q_0 = [n]$ y $Q_1 = \{\alpha_i : i \rightarrow i + 1 \mid i \in [n - 1]\}$

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} n - 1 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n$$

Ejemplo 2.2.3 (Carcaj linealmente orientado del tipo \mathbb{D}_n). Este carcaj es tal

que $Q_0 = [n]$ y $Q_1 = \{\alpha_i : i \rightarrow i + 1 \mid i \in [n - 2]\} \cup \{\alpha_n : n - 2 \rightarrow n\}$



Dado un carcaj Q , se llama **carcaj subyacente** \overline{Q} de Q , al grafo determinado por el carcaj Q , es decir, no se considera la dirección de las flechas. En teoría de representaciones, los carcajes que tienen asociado un cierto grafo subyacente en común, cumplen propiedades interesantes, algunas de las cuales se mencionan más adelante.

Definición 2.2.4 ([2], p. 252). Dados $m \geq 1$ y $n \geq 4$, algunos de los **diagramas de Dynkin** se definen como

$$A_m = \circ - \circ - \circ - \dots - \circ - \circ$$

$$D_n = \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ \circ \end{array} - \circ - \dots - \circ - \circ$$

$$E_6 = \circ - \circ - \circ - \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} - \circ - \circ$$

$$E_7 = \circ - \circ - \circ - \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} - \circ - \circ - \circ$$

$$E_8 = \circ - \circ - \circ - \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} - \circ - \circ - \circ - \circ$$

Un concepto muy importante para la aplicación en ecuaciones diofánticas es el de isomorfismo de carcajes, el cual se enuncia formalmente a continuación.

Definición 2.2.5 ([16], Definición 2.1.2). Sean $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ y $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ dos carcajes. Se dice que Q y Q' son **isomorfos** si existe un par de aplicaciones biyectivas

$$f_0 : Q_0 \longrightarrow Q'_0 \quad \text{y} \quad f_1 : Q_1 \longrightarrow Q'_1$$

tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{s} & Q_0 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 \\ Q'_1 & \xrightarrow{s'} & Q'_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{t} & Q_0 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 \\ Q'_1 & \xrightarrow{t'} & Q'_0 \end{array}$$

Definición 2.2.6 ([2], p. 42). Un **camino** p de i a j de longitud $l \geq 1$ es una sucesión finita de flechas $\alpha_i \in Q_1$ concatenadas, para $i \in [l]$, notado por $p = (i|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l|j)$, y para el cual se cumple que

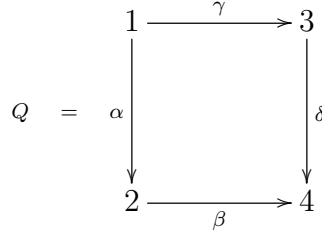
$$\begin{aligned} s(\alpha_1) &= i, \\ s(\alpha_h) &= t(\alpha_{h-1}), \text{ para } h = 2, 3, \dots, l \\ t(\alpha_l) &= j. \end{aligned}$$

Si $s(p) = t(p)$, se dice que p es un l -ciclo orientado. Los ciclos de longitud 1 se llaman lazos o bucles.

Si un carcaj no contiene ciclos orientados se llamará **acíclico**. A partir de la definición es claro que un carcaj no puede ser acíclico si contiene un bucle. Además, un carcaj acíclico contiene un número finito de caminos.

Definición 2.2.7 ([2], Definición 2.3). Una **relación** σ en un carcaj Q sobre un campo k es una combinación lineal $\sigma = a_1 p_1 + \dots + a_n p_n$, de caminos p_i con $a_i \in k$, para todo $i \in [n]$, para la cual se tiene que $s(p_1) = \dots = s(p_n)$, $t(p_1) = \dots = t(p_n)$ y $l(p_i)$ es al menos 2, para cada p_i .

Ejemplo 2.2.8. El siguiente carcaj es acíclico:



Se observa que $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Adicionalmente, existen dos caminos del vértice 1 al vértice 4, estos son $p_1 = (1|\gamma, \delta|4)$ y $p_2 = (1|\alpha, \beta|4)$, ambos de longitud $l = 2$. Una posible relación en Q es $\rho = \{\alpha\beta - \gamma\delta\}$.

Definición 2.2.9 ([2], p. 43). Sea Q un carcaj y sea $i \in Q_0$. Se define e_i como el **camino trivial** $(i||i)$ de longitud 0 asociado al vértice $i \in Q_0$.

Si $p_1 = (i|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r|j)$ y $p_2 = (i'|\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_s|j')$ son dos caminos de Q , se define la siguiente operación:

$$p_1 \cdot p_2 = \begin{cases} (i|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_s|j'), & \text{si } t(p_1) = s(p_2) = j \\ 0, & \text{si } t(p_1) \neq s(p_2) \end{cases}$$

Definición 2.2.10 ([2], Definición 1.2). Dado un carcaj Q se llama k -álgebra de caminos de Q , y se denota por kQ , al k -espacio vectorial que tiene como base todos los caminos de longitud $l \geq 0$ de Q junto con la operación definida anteriormente.

Si kQ_l es el subespacio vectorial de kQ generado por el conjunto de todos los caminos de longitud l , entonces kQ se puede ver como una descomposición en suma directa de la siguiente manera

$$kQ = kQ_0 \oplus kQ_1 \oplus kQ_2 \oplus \dots \oplus kQ_l \oplus \dots$$

Adicionalmente, como para todo $n, m \geq 0$, el producto de un camino de longitud n por uno de longitud m , o es cero o es un camino de longitud $n + m$, entonces kQ es una k -álgebra graduada, lo cual quiere decir que, $(kQ_n)(kQ_m) \subseteq kQ_{n+m}$.

Ejemplo 2.2.11. El espacio vectorial kQ asociado al carcaj mostrado en el ejemplo 2.2.8 tiene por base al conjunto $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\beta, \gamma\delta\}$, por lo cual $\dim_k kQ = 10$. Adicionalmente,

$$kQ = kQ_0 \oplus kQ_1 \oplus kQ_2.$$

Esta relación vista anteriormente entre las k -álgebras y los carcajes, es considerada como el paso inicial de la teoría de representaciones de álgebras asociativas.

2.2.2. Teoría de representación de carcajes

Definición 2.2.12 ([20], Definición 1.2). Una **representación** $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ de un carcaj Q , es una colección de k -espacios vectoriales M_i , uno por cada vértice $i \in Q_0$, y una colección de transformaciones lineales $\varphi_\alpha : M_{s(\alpha)} \rightarrow M_{t(\alpha)}$, una por cada flecha $\alpha \in Q_1$.

Una representación M se dice **finito-dimensional** si cada espacio vectorial M_i es finito-dimensional. En este caso, el **vector dimensión** $\underline{\dim} M$ de M es el vector $(\dim M_i)_{i \in Q_0}$ de las dimensiones de los espacios vectoriales.

Definición 2.2.13 ([20], Definición 1.3). Sea Q un carcaj y sean $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)$ representaciones de Q . Un **morfismo** de representaciones $f : M \rightarrow M'$ es una colección $(f_i)_{i \in Q_0}$ de aplicaciones lineales

$$f_i : M_i \rightarrow M'_i$$

tal que para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ en Q_1 el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_j \\ \downarrow f_i & & \downarrow f_j \\ M'_i & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_j \end{array}$$

Un morfismo $f = (f_i)_{i \in Q} : M \rightarrow N$ es un **isomorfismo** si cada f_i es biyectivo. La clase de todas las representaciones que son isomorfas a una representación M se denomina **isoclase** de M .

Dado un carcaj Q , se define la categoría $rep Q$, formada por las representaciones de dimensión finita de Q junto con los morfismos de representaciones, y la operación entre morfismos para $M, M', M'' \in Ob(rep Q)$, $f \in Mor(M, M')$ y $g \in Mor(M', M'')$, definida por

$$\begin{aligned} Mor(M, M') \times Mor(M', M'') &\longrightarrow Mor(M, M'') \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f = (g_i \circ f_i)_{i \in Q_0} \end{aligned}$$

donde $f_i : M_i \longrightarrow M'_i$ y $g_i : M'_i \longrightarrow M''_i$. Además, $i_M \in Mor(M, M)$ es la colección $(id_{M_i})_{i \in Q_0}$.

Definición 2.2.14 ([20], Definición 1.4). Dadas dos representaciones de Q , $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)$, se define la representación **suma directa** como

$$M \oplus M' = \left(M_i \oplus M'_i, \begin{bmatrix} \varphi_\alpha & 0 \\ 0 & \varphi'_\alpha \end{bmatrix} \right)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

Además, si $M_i \in rep Q$ para $i \in [k]$, la suma directa se define de manera recursiva como

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_{k-1} \oplus M_k = (M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_{k-1}) \oplus M_k.$$

Definición 2.2.15 ([20], Definición 1.5). Una representación $M \in rep Q$ se dice **indescomponible** si $M \neq 0$ y M no puede ser escrita como suma directa de dos representaciones no nulas.

Teniendo en cuenta lo anterior, el objetivo de la teoría de representaciones es clasificar las representaciones y morfismos de representaciones de un carcaj Q . Para esto, basta con estudiar las representaciones indescomponibles y morfismos irreducibles.

Proposición 2.2.16 (Teorema de Krull–Schmidt, [20], Teorema 1.2). *Sea Q un carcaj y sea $M \in rep Q$. Entonces*

$$M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_t$$

donde $M_i \in rep Q$ son indescomponibles y únicos salvo por orden.

Adicional a las representaciones irreducibles, se tienen tres tipos de representaciones de gran importancia y las cuales son análogas a los módulos simples, proyectivos e inyectivos en un álgebra.

Definición 2.2.17 ([20], pp. 36-37). Sea Q un carcaj sin ciclos orientados y sea $i \in Q_0$.

a) Se define la **representación simple** sobre el vértice i como $S(i) = (S(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, donde

$$S(i)_j = \begin{cases} k & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\varphi_\alpha = 0, \text{ para toda } \alpha \in Q_1$$

b) La **representación proyectiva** sobre el vértice i se denota por $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, donde

- $P(i)_j$ es el k -espacio vectorial cuya base es el conjunto de todos los caminos de i a j .
- Si $\alpha : j \rightarrow l$ es una flecha en Q , entonces $\varphi_\alpha : P(i)_j \rightarrow P(i)_l$ es la aplicación lineal definida sobre la base de $P(i)_j$, tal que a cada camino de i a j lo compone con la flecha $\alpha : j \rightarrow l$.

c) La **representación inyectiva** sobre el vértice i , $I(i) = (I(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, es tal que

- $I(i)_j$ es el k -espacio vectorial cuya base es el conjunto de todos los caminos en Q de j a i .
- Si $\alpha : j \rightarrow l$ es una flecha en Q , entonces $\varphi_\alpha : I(i)_j \rightarrow I(i)_l$ es la aplicación lineal definida sobre la base de $I(i)_j$, tal que a cada camino $c = (j|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s|i)$ le asigna el camino $\varphi_\alpha(c) = (l|\beta_2, \dots, \beta_s|\alpha|i)$, o $\varphi_\alpha(c) = 0$, en otro caso.

Como se comentó anteriormente, se busca caracterizar las representaciones indescomponibles y los morfismos irreducibles, y para esto, se ha definido un nuevo carcaj construido a partir del original, llamado el carcaj de Auslander-Reiten.

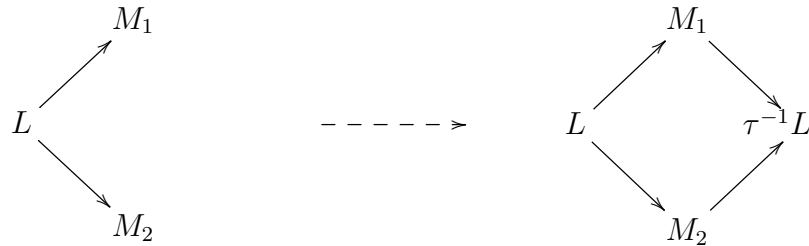
Definición 2.2.18 ([20], p. 24). Sea Q un carcaj. El **carcaj de Auslander-Reiten** de Q es un nuevo carcaj ΓQ cuyos vértices son las isoclasas de representaciones indescomponibles y cuyas flechas son morfismos irreducibles.

Existe varias formas de construir el carcaj de Auslander-Reiten, una de ellas se conoce como "algoritmo de tejimiento" pues se construyen mallas de manera recursiva.

Algoritmo 2.2.19 (Carcaj de Auslander-Reiten, [20], p. 70). *Sea Q un carcaj.*

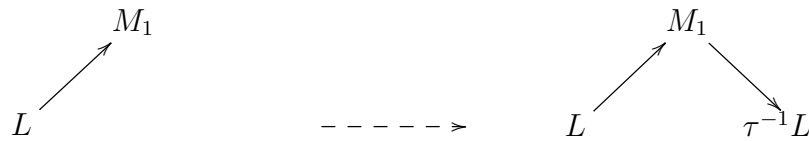
1. *Para comenzar, se debe calcular las representaciones proyectivas indescomponibles.*
2. *Si $j \rightarrow i$ es una flecha en Q_1 , dibujar una flecha $P(i) \rightarrow P(j)$ de tal manera que $P(i)$ y $P(j)$ queden en un nivel diferente.*
3. *Construir una malla tomando como referencia uno de los siguientes tres casos*

a)



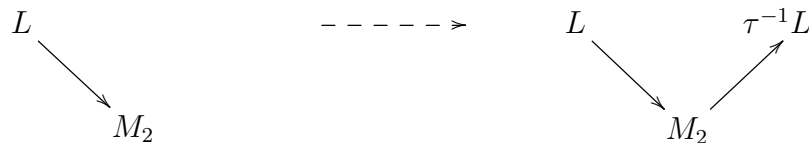
en donde, $\underline{\dim} L + \underline{\dim} \tau^{-1}L = \underline{\dim} M_1 + \underline{\dim} M_2$

b)



en donde, $\underline{\dim} L + \underline{\dim} \tau^{-1}L = \underline{\dim} M_1$

c)



de tal manera que, $\underline{\dim} L + \underline{\dim} \tau^{-1}L = \underline{\dim} M_2$

4. Repetir el paso 3 hasta obtener algún entero negativo en el vector de dimensión.

Ejemplo 2.2.20. Dado el carcaj linealmente orientado \mathbb{A}_3

$$\mathbb{A}_3 = 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

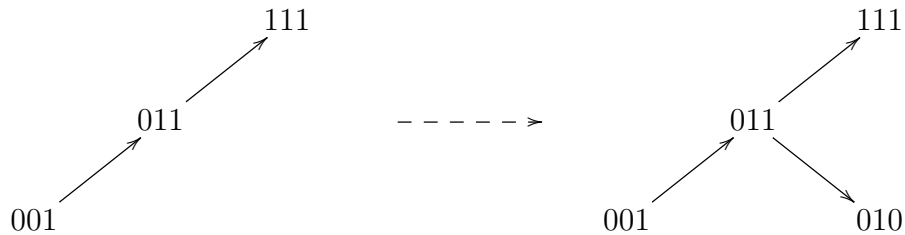
Sus representaciones proyectivas y sus respectivos vectores dimensión son

$$P(1) = k \longrightarrow k \longrightarrow k = 111$$

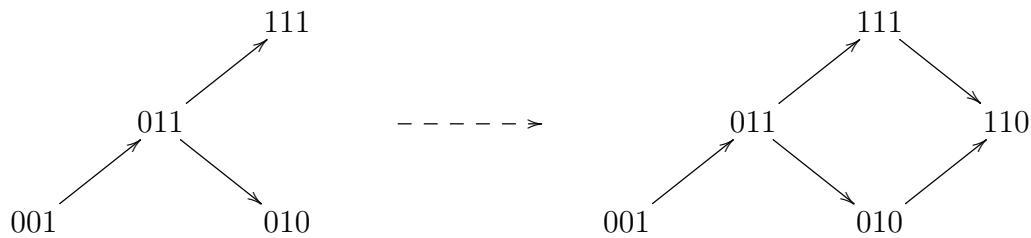
$$P(2) = 0 \longrightarrow k \longrightarrow k = 011$$

$$P(3) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k = 001$$

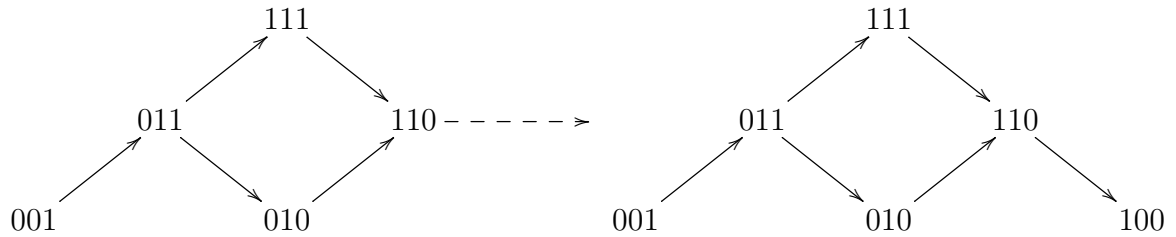
Debido a que hay una flecha del vértice 1 al 2, y del 2 al 3, entonces se tienen flechas de $P(3)$ a $P(2)$, y de $P(2)$ a $P(1)$. Aplicando el paso 3b se tiene



Ahora, para la siguiente malla se tiene el caso 3a



Por último, se aplica de nuevo el paso 3b, obteniendo para \mathbb{A}_3 el carcaj de Auslander-Reiten mostrado a la derecha



Ejemplo 2.2.21. Considérese ahora el carcaj \mathbb{A}_4

$$\mathbb{A}_4 = 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4$$

Sus representaciones proyectivas son

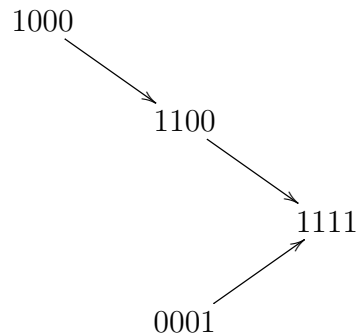
$$P(1) = k \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longrightarrow 0 = 1000$$

$$P(2) = k \longleftarrow k \longleftarrow 0 \longrightarrow 0 = 1100$$

$$P(3) = k \longleftarrow k \longleftarrow k \longrightarrow k = 1111$$

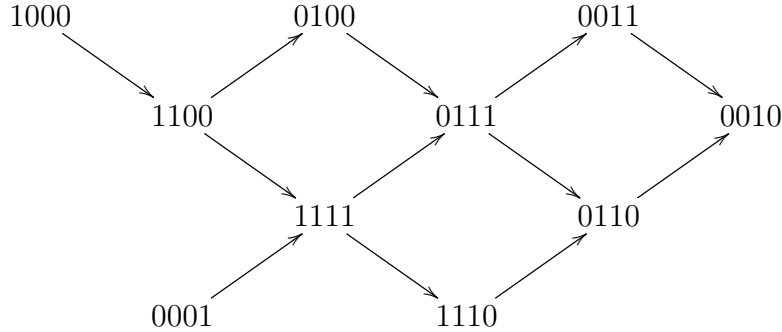
$$P(4) = 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longrightarrow k = 0001$$

Debido a que hay una flecha del vértice 2 al 1, del 3 al 2 y del 3 al 4, entonces se tienen flechas de $P(1)$ a $P(2)$, de $P(2)$ a $P(3)$ y de $P(4)$ a $P(3)$, como se muestra a continuación



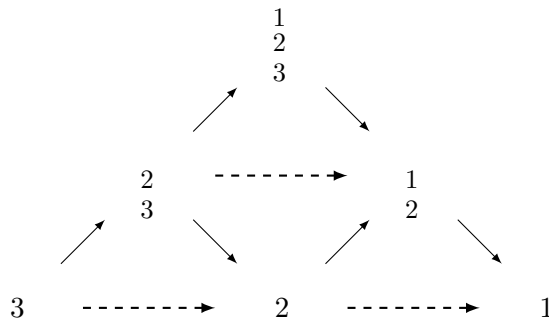
Aplicando el paso 3 de manera recursiva se obtiene el siguiente carcaj de Auslander-

Reiten

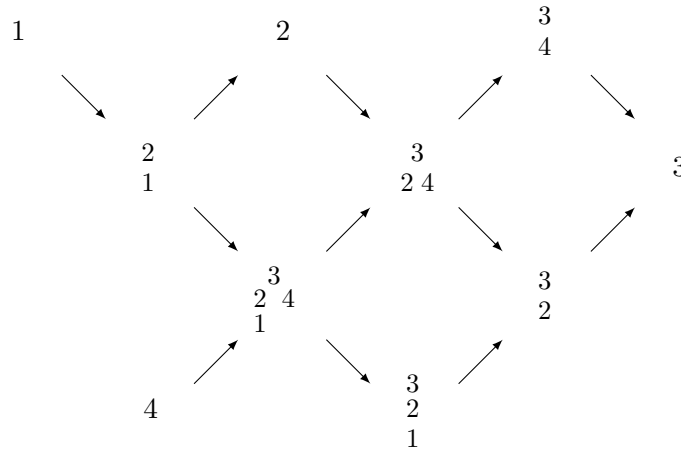


Nota 2.2.22. Algunos autores hacen uso de una notación abreviada para las representaciones. Si Q es un carcaj, $Q_0 = [n]$ es su conjunto de vértices y, $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ es una representación indecomponible de Q para la cual se tiene el vector dimensión $\underline{dim} M = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Se representa a M usando los dígitos $i \in [n]$ de tal manera que i aparece exactamente d_i veces. Además, se organizan los dígitos de tal manera que si hay una flecha $\alpha : i \rightarrow j$ y su respectivo morfismo asociado $\varphi_\alpha : M_i \rightarrow M_j$ es no nulo, entonces el dígito i se coloca arriba del dígito j .

Ejemplo 2.2.23. El carcaj de Auslander-Reiten asociado al carcaj linealmente orientado \mathbb{A}_3 visto en el ejemplo 2.2.20 se puede representar también de la siguiente manera



Ejemplo 2.2.24. El carcaj de Auslander-Reiten asociado mostrado en el ejemplo 2.2.21 se puede representar como



Definición 2.2.25 ([20], p. 82). Una k -álgebra A de dimensión finita se dice que es de **tipo representación finito** si el número de clases de isomorfismo de los A -módulos indescomponibles de dimensión finita es finito. Una k -álgebra A de tipo representación infinito es aquella que no es de tipo representación finito.

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene el siguiente criterio que caracteriza los carcajes de tipo de representación finita:

Proposición 2.2.26 (Teorema de Gabriel. Parte 1, [20], Teorema 3.1). *Un carcaj conectado es de tipo representación finita si y solo si su gráfica subyacente es uno de los diagramas de Dynkin de tipo A , D o E .*

2.3. Álgebras de conglomerado

Las álgebras de conglomerado fueron introducidas de manera combinatoria como un anillo conmutativo con un conjunto de generadores y relaciones. Aunque puede haber infinitos generadores y relaciones, todos se pueden obtener de un número finito de ellos mediante un procedimiento inductivo llamado *mutación*.

2.3.1. Mutación

En esta sección se presentan dos conceptos de vital importancia en la construcción combinatoria de las álgebras de conglomerado, estos son la mutación de matrices antisimétricas y la mutación de carcajes.

Mutación de matrices

Definición 2.3.1 ([16], Definición 2.2.14). Sea $n \in \mathbb{N}$ y $k \in [n]$. Suponga que $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{Z})$ es una matriz antisimétrica. La mutación de B sobre k es la matriz $\mu_k(B) = (b'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{Z})$ donde

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i = k \text{ o } j = k \\ b_{ij} + \text{sgn}(b_{ik}) [b_{ik} b_{kj}]_+ & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.2. Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La mutación de B con respecto a $k = 1$ cambia el signo de las entradas de la matriz que tienen en alguno de sus subíndices a $k = 1$, luego, $b_{11} = 0$, $b_{12} = 1$ y $b_{21} = -1$ se cambian por $b'_{11} = 0$, $b'_{12} = -1$ y $b'_{21} = 1$. Para $b_{22} = 0$, se aplica la segunda regla de mutación, luego

$$b'_{22} = 0 + \text{sgn}(b_{21}) [b_{21} b_{12}]_+ = -[(-1)(1)]_+ = -\text{máx}\{0, -1\} = 0.$$

Por lo anterior, se obtiene

$$\mu_1(B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene la siguiente definición alterna para la mutación de matrices

Definición 2.3.3 ([10], Definición 4.2). La mutación de B sobre k se define como la matriz $\mu_k(B) = (b'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{Z})$ donde

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i = k \text{ o } j = k \\ b_{ij} + \frac{1}{2} (|b_{ik}| b_{kj} + b_{ik} |b_{kj}|) & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.4. Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

encontremos la mutación de B sobre 1. Por ejemplo, se tiene que $b'_{12} = -1$ porque se tendría el caso $i = k$. Por otra parte,

$$b'_{23} = b_{23} + \frac{1}{2} (|b_{21}| b_{13} + b_{21} |b_{13}|) = 1 + \frac{1}{2} (|-1|(-1) + (-1)|-1|) = 0.$$

Haciendo un procedimiento similar para las otras entradas de a matriz B se obtiene

$$\mu_1(B(Q)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota 2.3.5. Es importante observar que en ningún momento se usó el hecho de que la matriz B es antisimétrica, aun así, se puede notar que las matrices de mutación obtenidas resultaron de nuevo antisimétricas. En este sentido, la condición de antisimetría se parece estar heredando. Más adelante, al definir la mutación para carcajes, se verá la razón por la cual se toman estas matrices en específico.

Mutación de carcajes

De manera muy natural, a cada carcaj se asocian dos matrices cuadradas. A partir de ellas se puede obtener bastantes propiedades, y en este caso particular, se puede vislumbrar un proceso de mutación para los carcajes.

Definición 2.3.6 ([16], Definición 2.1.11). Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj con $|Q_0| = n$. Se pueden definir 2 matrices de adyacencia de Q de la siguiente manera:

- (*Matriz de adyacencia*) $A = A(Q) = (a_{ij})_{i,j \in Q_0}$ donde a_{ij} es el número de flechas $i \rightarrow j$.
- (*Matriz de adyacencia signada*) $B = B(Q) = (b_{ij})_{i,j \in Q_0}$ donde $b_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$.

Se puede observar fácilmente de la definición que B es una matriz antisimétrica, de aquí que la mutación de matrices descrita anteriormente estuviese enfocada en este conjunto particular de matrices. Veamos mediante algunos ejemplos, la manera en la cual se ven afectados los carcajes bajo la mutación de su matriz de adyacencia signada asociada.

Ejemplo 2.3.7. Para el siguiente carcaj,

$$A_2 = 1 \longrightarrow 2$$

se tiene

$$A(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

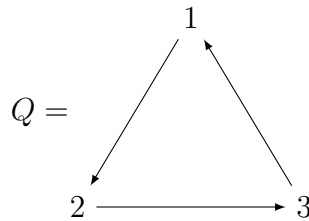
Por el ejemplo 2.3.2, se tiene que la mutación de $B(A_2)$ con respecto a 1 es

$$\mu_1(B(A_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo carcaj asociado, el cual denotaremos por $\mu_1(A_2)$, es:

$$\mu_1(A_2) = 1 \longleftarrow 2$$

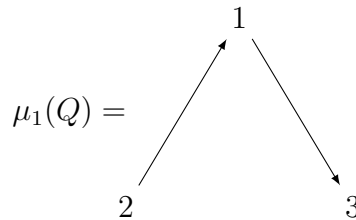
Ejemplo 2.3.8. Sea Q el carcaj mostrado a continuación:



entonces,

$$A(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por el ejemplo 2.3.4 se tiene el siguiente carcaj



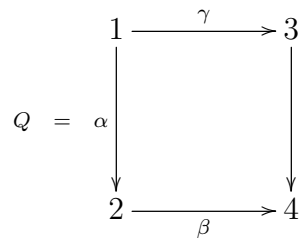
Nota 2.3.9. De los anteriores ejemplos se podría decir que la mutación de un carcaj con respecto al vértice k invierte las flechas incidentes a este vértice. Pero no solo realiza este cambio, pues en el segundo ejemplo se observa que la flecha $(2,3)$ no se ha remplazado por ninguna otra.

En realidad, hay 3 pasos para encontrar la mutación de un carcaj Q con respecto a uno de sus vértices k , sin necesidad de tener que recurrir a su matriz de adyacencia signada. Este algoritmo se encuentra en [9] descrito de la siguiente manera:

1. La orientación de todas las flechas en Q incidentes a k se invierte.
2. Se agrega una flecha $i \rightarrow j$ por cada camino $i \rightarrow k \rightarrow j$ existente en Q .
3. Finalmente, se borran cada par de flechas opuestas (2-ciclos).

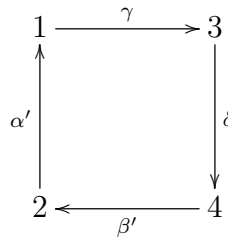
Veamos un ejemplo aplicando estas tres reglas, y posteriormente, se definirá de manera formal la mutación para un carcaj.

Ejemplo 2.3.10. Sea Q el siguiente carcaj

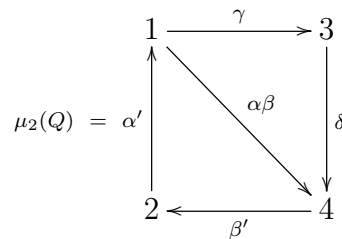


Calculemos dos mutaciones consecutivas, esto es:

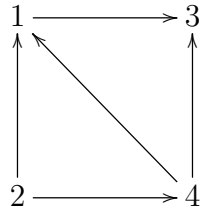
- Mutación de Q con respecto al vértice 2, $\mu_2(Q)$:
 1. Primero, se cambia la orientación de todas las flechas en Q incidentes al vértice 2.



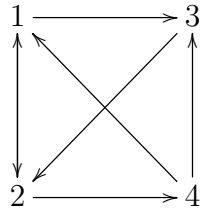
2. Se agrega la flecha $1 \rightarrow 4$ debido a que en Q se tiene el camino $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$



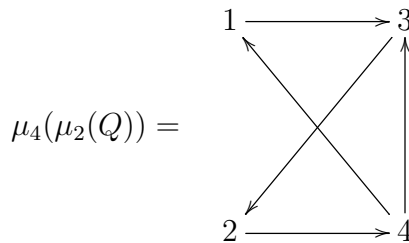
3. Finalmente, se borran cada par de flechas opuestas, pero como no se tienen 2-ciclos en el carcaj del paso 2, entonces $\mu_2(Q)$ queda tal cual está en el anterior paso.
- Ahora, se realizará la mutación de $\mu_2(Q)$ con respecto al vértice 4, $\mu_4(\mu_2(Q))$
 1. Se cambia la orientación de todas las flechas en $\mu_2(Q)$ incidentes a 4.



2. Se agregan las flechas $1 \rightarrow 2$ y $3 \rightarrow 2$, debido a que en $\mu_2(Q)$ se tienen los caminos $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ y $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, respectivamente.



3. Finalmente, se borran cada par de flechas opuestas, en este caso las flechas entre los vértices 1 y 2.



Equivalencia entre mutación de matrices y de carcajes

El algoritmo visto anteriormente es descrito en [16] de manera más formal para un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ sin bucles ni 2-ciclos y $k \in Q_0$. Dicha mutación de

carcajes se define con ayuda de los siguientes conjuntos:

$$S(k) = \{\alpha \in Q_1 | s(\alpha) = k\},$$

$$T(k) = \{\alpha \in Q_1 | t(\alpha) = k\},$$

$$A(k) = \{\alpha \in Q_1 | s(\alpha) \in P_k, t(\alpha) \in S_k\} \cup \{\alpha \in Q_1 | s(\alpha) \in S_k, t(\alpha) \in P_k\}.$$

De manera informal, $S(k)$ es el conjunto de flechas que inician en el vértice k , $T(k)$ es el conjunto de flechas que terminan en k , y $A(k)$ es el conjunto de flechas que conectan un predecesor directo de k con un sucesor directo de k .

Como Q no tiene bucles, $k \notin P_k$ y $k \notin S_k$. Adicionalmente, como Q no tiene 2-ciclos, $S(k)$, $T(k)$ y $A(k)$ son disjuntos dos a dos, por lo cual se puede definir la siguiente partición del conjunto de flechas $Q_1 = S(k) \cup T(k) \cup A(k) \cup R(k)$, con $R(k) = Q_1 - (S(k) \cup T(k) \cup A(k))$.

Algoritmo 2.3.11 ([16], Definición 2.2.1). *Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj sin bucles ni 2-ciclos y sea $k \in Q_0$. El **carcaj de mutación de Q** con respecto a k , denotado $\mu_k(Q) = (Q'_0, Q'_1, s', t')$, se obtiene de la siguiente manera:*

1. $Q'_0 = Q_0$.
2. $Q'_1 = S'(k) \cup T'(k) \cup A'(k) \cup R(k)$, donde
 - a) Para todo $i \in Q_0$ tal que $\alpha : i \rightarrow k \in Q_1$, se define $\alpha' : k \rightarrow i$. Análogamente, para todo $j \in Q_0$ tal que $\beta : k \rightarrow j \in Q_1$, se define $\beta' : k \rightarrow i$. De esta manera, se tiene que

$$S'(k) = \{\alpha' | \alpha \in T(k)\} \quad \text{y} \quad T'(k) = \{\beta' | \beta \in S(k)\}$$

- b) Sea r_{ij} el número de caminos en Q de la forma $i \rightarrow k \rightarrow j$. Se define la siguiente matriz $A = (a_{ij}) = (r_{ij} + b_{ij})$, donde b_{ij} está definido como en la definición 2.3.6.

- 1) Si $a_{ij} \geq 0$, entonces $A'(k) = \{\alpha_{ij}(r) : i \rightarrow j | 1 \leq r \leq a_{ij}\}$.
- 2) Si $a_{ij} < 0$, entonces $A'(k) = \{\alpha_{ji}(r) : j \rightarrow i | 1 \leq r \leq -a_{ij}\}$.

Debido a que Q no tiene 2-ciclos, entonces la situación $i \rightarrow k \rightarrow i$ no se presenta, por lo tanto, en el paso 2 no aparecen flechas $i \rightarrow i$, y por lo tanto $\mu_k(Q)$ no tiene bucles. Adicionalmente, el paso 3 elimina los posibles 2-ciclos que se puedan

formar. Por lo anterior, se obtiene nuevamente un carcaj con las condiciones pedidas en la definición 2.3.11, de esta manera se puede aplicar de manera recursiva el algoritmo.

Ejemplo 2.3.12. Tomemos el carcaj del tipo \mathbb{A}_2 mostrado en el ejemplo 2.3.7,

$$A_2 = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Este carcaj no tiene bucles ni ciclos orientados, además $Q_0 = \{1, 2\}$, $Q_1 = \{\alpha\}$, $S(1) = \{\alpha\}$ y $T(1) = \emptyset$. Según el algoritmo 2.3.11, la mutación de \mathbb{A}_2 con respecto al vértice 1 se encuentra de la siguiente manera:

1. $Q'_0 = \{1, 2\}$.
2. a) No hay un vértice que finalice en 1, por lo tanto solamente se consideran los vértices que inician en 1. Para el vértice 2, se tiene que $\alpha : 1 \rightarrow 2$, luego, se define la flecha $\alpha' : 2 \rightarrow 1$, así,

$$S' = \emptyset \quad y \quad T' = \{\alpha'\}$$

- b) Debido a que no hay caminos de la forma $i \rightarrow 1 \rightarrow j$, para algunos vértices i, j , entonces en este caso no se producen aristas nuevas en la mutación.

Por lo tanto el carcaj obtenido es

$$\mu_1(A_2) = 1 \xleftarrow{\alpha'} 2$$

Adicionalmente, si se realiza nuevamente la mutación del carcaj obtenido con respecto al vértice 1 se obtiene

$$\mu_1(\mu_1(A_2)) = 1 \xrightarrow{\alpha''} 2$$

El cual corresponde al carcaj inicial.

Esta propiedad vista en el ejemplo 2.3.12, se cumple de manera general y se puede enunciar de la siguiente manera:

Proposición 2.3.13. ([16], Proposición 2.2.3) *La aplicación $Q \rightarrow \mu_k(Q)$ es una involución.*

Adicionalmente, se puede observar también que la mutación para matrices y para carcajes realizan la misma función. La siguiente proposición muestra que, en efecto, la mutación vista desde matrices antisimétricas es equivalente a la mutación aplicada en carcajes.

Proposición 2.3.14. ([16], Proposición 2.2.15) *Sea Q un carcaj sin bucles ni 2-ciclos. Sea $B = B(Q)$ su matriz de adyacencia signada y sea $k \in Q_0$. La matriz de adyacencia de $\mu_k(Q)$ es igual a la mutación $\mu_k(B)$ de B sobre k .*

Mutación de semillas y álgebras de conglomerado

Con base en la definición dada anteriormente para mutación de carcajes y matrices, veamos ahora como se define la mutación de una semilla y definamos a partir de esto lo que es un álgebra de conglomerado.

Definición 2.3.15 ([16], Definición 2.3.9). Una **semilla** en $F = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ es un par $\Sigma = (\mathbf{y}, Q)$, donde $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ es un conjunto generador de F , y Q es un carcaj con vértices $\{1, \dots, n\}$ el cual no tiene bucles ni 2-ciclos.

Definición 2.3.16 ([16], Definición 2.3.10). Sea $\Sigma = (\mathbf{y}, Q)$ una semilla y $k \in [n]$ un vértice de Q . Se define una **mutación** como una nueva semilla $\mu_k(\Sigma) = (\mu_k(\mathbf{y}), \mu_k(Q))$ de la siguiente manera:

1. $\mu_k(\mathbf{y}) = (\mu_k(y_1), \dots, \mu_k(y_n))$, con

$$\mu_k(y_i) = \begin{cases} y_i & \text{si } i \neq k \\ \frac{1}{y_k} \left(\prod_{i \rightarrow k} y_i + \prod_{k \rightarrow j} y_j \right) & \text{si } i = k \end{cases}$$

2. $\mu_k(Q)$ es el carcaj obtenido de Q mediante la mutación de carcajes.

Nota 2.3.17. Si $B(Q)$ es la matriz de adyacencia signada de Q , entonces se puede reescribir la expresión anterior como:

$$y_k \mu_k(y_k) = \prod_{i \rightarrow k} y_i + \prod_{k \rightarrow j} y_j = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}; b_{ik} > 0} y_i^{b_{ik}} + \prod_{i \in \{1, \dots, n\}; b_{ik} < 0} y_i^{-b_{ik}}$$

Esta última relación es conocida también como la **relación de cambio**. En [9] se definen los conceptos de semilla y mutación de semilla con base en esta relación, pero para matrices más generales que las antisimétricas.

La sucesión $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ recibe el nombre de **conglomerado**, y sus elementos son llamados **variables de conglomerado**.

Definición 2.3.18 ([16], Definición 2.3.14). Sea (\mathbf{y}, Q) una semilla. El **álgebra de conglomerado** $\mathcal{A}\Sigma = \mathcal{A}(\mathbf{y}, Q)$ asociada a la semilla dada es el subálgebra de $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ generada por todas las variables de conglomerado.

Se dice que el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}\Sigma$ es de **tipo mutación finita** si hay únicamente un número finito de variables de conglomerado. Al igual que en la teoría de representaciones de carcajes, un problema de bastante interés es la caracterización de las álgebras de tipo mutación finito.

Definición 2.3.19 ([9], Definición 2.8.1). Sean $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ y $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ dos carcajes. Q y Q' son **mutaciones equivalentes** si existe una sucesión (k_1, \dots, k_r) , con $k_i \in Q_0$ para todo $1 \leq i \leq r$, tal que $(\mu_{k_1} \circ \dots \circ \mu_{k_r})(Q) = Q'$.

En otros términos, dos carcajes son mutaciones equivalentes si uno puede obtenerse del otro utilizando un número finito de mutaciones. Si Q' es un carcaj que es equivalente bajo mutación a Q , entonces las álgebras de conglomerado son isomorfas.

Nota 2.3.20. Es importante notar que la equivalencia bajo mutación define una relación de equivalencia. Si Q y Q' son mutaciones equivalentes, entonces se escribirá $Q \sim Q'$, y se tiene lo siguiente

- Como μ_k es una involución, $(\mu_k \circ \mu_k)(Q) \cong Q$, entonces $Q \sim Q$.
- Si $Q \sim Q'$, entonces existe una sucesión (k_1, \dots, k_r) , con $k_i \in Q_0$ tal que $(\mu_{k_1} \circ \dots \circ \mu_{k_r})(Q) = Q'$. De lo anterior, y nuevamente usando la propiedad de involución de la mutación, se obtiene que $Q' \sim Q$ porque existe (k_r, \dots, k_1) tal que $(\mu_{k_r} \circ \dots \circ \mu_{k_1})(Q') = Q$.
- Si $Q \sim Q'$ y $Q' \sim Q''$, entonces existen dos sucesiones (k_1, \dots, k_r) y (k'_1, \dots, k'_r) , tales que $(\mu_{k_1} \circ \dots \circ \mu_{k_r})(Q) = Q'$ y $(\mu_{k'_1} \circ \dots \circ \mu_{k'_r})(Q') = Q''$. Por lo anterior, $(\mu_{k'_1} \circ \dots \circ \mu_{k'_r} \circ \mu_{k_1} \circ \dots \circ \mu_{k_r})(Q) = Q''$.

El conjunto de todas las semillas obtenidas de Σ por medio de un número finito de mutaciones μ_k será llamado la **clase de mutación** de Σ , y se notará como $C(\Sigma)$.

Ejemplo 2.3.21. Dada la siguiente semilla $\Sigma = ((x_1), \mathbb{A}_1)$, se tiene una única opción para aplicar mutación, así que $\mu_1((x_1), \mathbb{A}_1) = \left(\left(\frac{2}{x_1}\right), \mathbb{A}_1\right)$. Al aplicar nuevamente la mutación se obtiene la semilla inicial, por lo tanto, la clase de mutación asociada a $\Sigma = ((x_1), \mathbb{A}_1)$ es

$$C((x_1), \mathbb{A}_1) = \left\{ ((x_1), \mathbb{A}_1), \left(\left(\frac{2}{x_1}\right), \mathbb{A}_1\right) \right\},$$

hay dos variables de conglomerado, y $\mathcal{A}((x_1), \mathbb{A}_1)$ está generada por el conjunto $\left\{x_1, \frac{2}{x_1}\right\}$, esto es, $\mathcal{A}((x_1), \mathbb{A}_1) \cong \mathbb{Q}[x_1^{\pm 1}]$.

Ejemplo 2.3.22. Tomemos la siguiente semilla $\Sigma = ((x_1, x_2), \mathbb{A}_2)$, representada por

$$((x_1, x_2), \mathbb{A}_2) = x_1 \longrightarrow x_2 .$$

Al aplicar la primera mutación con respecto al vértice 1 se obtiene la semilla

$$((x'_1, x_2), \mu_1(\mathbb{A}_2)) = x'_1 \longleftarrow x_2 .$$

donde $x'_1 = \frac{1+x_2}{x_1}$. Ahora, como la mutación es una involución, la única opción para volver a aplicar el proceso es con el vértice 2, de esta manera:

$$((x'_1, x'_2), \mu_2(\mu_1(\mathbb{A}_2))) = x'_1 \longrightarrow x'_2 .$$

con $x'_2 = \frac{1+x'_1}{x_2} = \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}$. Siguiendo con este proceso se obtienen las siguientes otras semillas:

$$((x''_1, x'_2), \mu_1(\mathbb{A}_2)) = x''_1 \longleftarrow x'_2, \quad \text{con} \quad x''_1 = \frac{1+x'_2}{x'_1} = \frac{1+x_1}{x_2},$$

$$((x''_1, x''_2), \mathbb{A}_2) = x''_1 \longrightarrow x''_2, \quad \text{con} \quad x''_2 = \frac{1+x''_1}{x'_2} = x_1,$$

$$((x'''_1, x''_2), \mu_1(\mathbb{A}_2)) = x'''_1 \longleftarrow x''_2, \quad \text{con} \quad x'''_1 = \frac{1+x''_2}{x''_1} = x_2.$$

Por lo tanto, se tienen únicamente 5 variables de conglomerado, y el álgebra de conglomerado asociada al carcaj \mathbb{A}_2 es de tipo mutación finito.

En general, todos los carcajes del tipo \mathbb{A}_n son de tipo mutación finita, y en concordancia con el *Teorema de Gabriel* 2.2.26, Fomin y Zelevinsky dieron la siguiente caracterización:

Proposición 2.3.23 (Condición de finitud, [11]). *Sea $\Sigma = (\mathbf{y}, Q)$ una semilla. El álgebra de conglomerado $\mathcal{A}\Sigma$ es de tipo finito si y solo si Q es una mutación equivalente a un carcaj de Dynkin enlazado.*

Más aún, la construcción recursiva a través de las mutaciones vista anteriormente se puede simplificar construyendo directamente las variables del conglomerado sin construir los conglomerados ni la mutación del carcaj. Esta forma de construcción es bastante similar a la observada en el algoritmo 2.2.19, y de hecho recibe el mismo nombre, puesto a que se construyen mallas de manera recursiva, aunque en este caso no se obtienen las dimensiones de las representaciones sino que se obtienen las variables de conglomerado.

Algoritmo 2.3.24 (Algoritmo de Tejimiento, [14], p. 3). *Sea $\Sigma = (\mathbf{y}, Q)$ una semilla en donde $\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_k)$ y Q es un carcaj que tiene por grafo subyacente a un diagrama de Dynkin. Se construye una nueva semilla $\mathbb{Z}\Sigma = (\mathbb{Z}\mathbf{y}, \mathbb{Z}Q)$ de la siguiente manera*

1. *Los vértices de $\mathbb{Z}Q$ son de la forma $x_i^{(n)}$, donde $n \in \mathbb{Z}$ e i es un vértice de Q . Estos se van a ubicar por niveles, en donde en el n -ésimo nivel se encuentran todos los vértices con súper índice n . Adicionalmente, $x_i^{(0)} := x_i$.*
2. *Por cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ de Q se definen las flechas de $\mathbb{Z}Q$ como sigue*
 - a) $\alpha^{(n)} : x_i^{(n)} \rightarrow x_j^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$.
 - b) $\beta^{(n)} : x_j^{(n-1)} \rightarrow x_i^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$
3. *Una vez construido el carcaj $\mathbb{Z}Q$, se construye a partir de este el conglomerado $\mathbb{Z}\mathbf{y}$. Los vértices de $\mathbb{Z}Q$ serán las variables de conglomerado, y se definen por*

$$x_i^{(n)} = \frac{1 + \prod y_i}{x_i^{(n-1)}},$$

donde y_i son los predecesores directos de $x_i^{(n)}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

A continuación se dan dos ejemplos en los cuales se observa que los vértices del carcaj asociado a la nueva semilla definida, en realidad corresponden a las n -ésima mutación de la variable de conglomerado x_i de la semilla original.

Ejemplo 2.3.25. Para la semilla tomada en el ejemplo 2.3.22, primero se coloca una copia del carcaj asociado a dicha semilla por cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x_1^{(0)} \xrightarrow{\alpha^{(0)}} x_2^{(0)}$$

$$x_1^{(1)} \xrightarrow{\alpha^{(1)}} x_2^{(1)}$$

$$x_1^{(2)} \xrightarrow{\alpha^{(2)}} x_2^{(2)}$$

\vdots

Note que, colocar las copias del carcaj corresponde a los pasos 1 y 2.a del algoritmo 2.3.24. Ahora, por cada flecha $\alpha^{(n)} : x_1^{(n)} \rightarrow x_2^{(n)}$, se agrega una nueva flecha $\beta^n : x_2^{(n)} \rightarrow x_1^{(n+1)}$, así, se obtiene el siguiente carcaj

$$\begin{array}{ccc}
 x_1^{(0)} & \xrightarrow{\alpha^{(0)}} & x_2^{(0)} \\
 & \searrow \beta^{(0)} & \\
 x_1^{(1)} & \xrightarrow{\alpha^{(1)}} & x_2^{(1)} \\
 & \searrow \beta^{(1)} & \\
 x_1^{(2)} & \xrightarrow{\alpha^{(2)}} & x_2^{(2)} \\
 & \vdots &
 \end{array}$$

En cuanto a las variables de conglomerado, se obtiene que

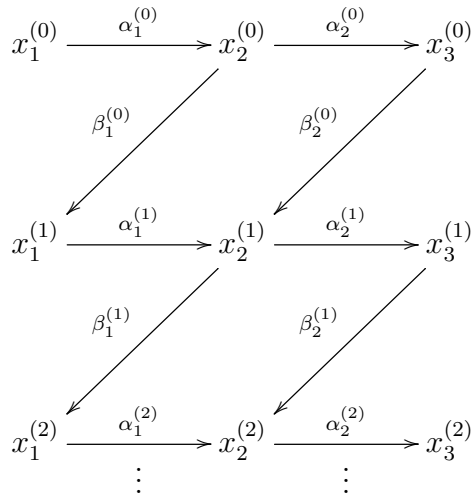
$$x_i^{(n)} = \frac{1 + \prod y_i}{x_i^{(n-1)}},$$

donde y_i son los predecesores directos de $x_i^{(n)}$. En este caso,

$$x_1^{(1)} = \frac{1 + x_2}{x_1}, \quad x_2^{(1)} = \frac{1 + x_1^{(1)}}{x_2^{(0)}} = \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1 x_2}, \quad x_1^{(2)} = \frac{1 + x_2^{(1)}}{x_1^{(1)}} = \frac{1 + x_1}{x_2},$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1 + x_1^{(2)}}{x_2^{(1)}} = x_1, \quad x_1^{(3)} = \frac{1 + x_2^{(2)}}{x_1^{(2)}} = x_2.$$

Ejemplo 2.3.26. Para el carcaj \mathbb{A}_3 se tiene,



En cuanto a las variables de conglomerado, se obtienen

$$x_1^{(1)} = \frac{1 + x_2^{(0)}}{x_1^{(0)}} = \frac{1 + x_2}{x_1}, \quad x_2^{(1)} = \frac{1 + x_1^{(1)} x_3^{(0)}}{x_2^{(0)}} = \frac{x_1 + x_3 + x_2 x_3}{x_1 x_2},$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1 + x_2^{(1)}}{x_3^{(0)}} = \frac{x_1 + x_3 + x_1 x_2 + x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3}, \quad x_1^{(2)} = \frac{1 + x_2^{(1)}}{x_1^{(1)}} = \frac{x_1 + x_3}{x_2},$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1 + x_1^{(2)} x_3^{(1)}}{x_2^{(1)}} = \frac{x_1 + x_3 + x_1 x_2}{x_2 x_3}, \quad x_3^{(2)} = \frac{1 + x_2^{(2)}}{x_3^{(1)}} = \frac{1 + x_2}{x_3}.$$

Se puede ver que hay un comportamiento bastante similar al observado en el algoritmo 2.2.19, en términos de la construcción de los módulos vía dimensiones, y la construcción de las variables de conglomerado. En el caso de dimensiones, se suman las dimensiones de los módulos que lo preceden y se resta la dimensión del trasladado. En la construcción de las variables se multiplican los predecesores, y se divide por el trasladado, que en este caso siempre es la mutación anterior.

Otro aspecto importante a notar es que, todas las variables de conglomerado obtenidas en los ejemplos anteriores tienen en su denominador un monomio. Lo anterior se tiene siempre y se conoce como el **Fenómeno de Laurent**.

Proposición 2.3.27 (Fenómeno de Laurent, [10], Teorema 3.1). *Sea $\mathcal{A}(\mathbf{x}, Q)$ un álgebra de conglomerado. Entonces, cualquier variable de conglomerado puede escribirse como un polinomio de Laurent en variables x_1, \dots, x_n con coeficientes enteros.*

2.3.2. Triangulaciones y álgebras de conglomerado

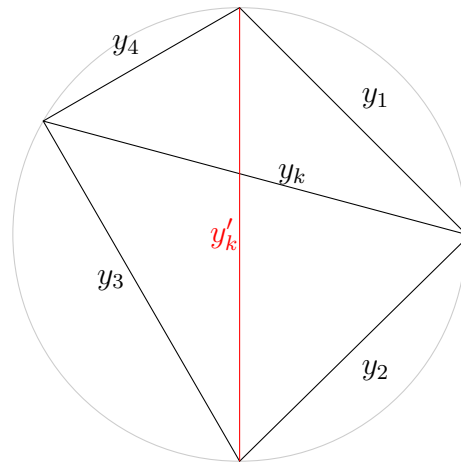
Las álgebras de conglomerado se pueden asociar a las triangulaciones de una superficie. En esta sección se presentará el caso particular de las triangulaciones de polígonos regulares P_n .

Anteriormente, en la definición 2.3.16 se vio que la mutación de una semilla se describe como

$$\mu_k(y_k) = \frac{1}{y_k} \left(\prod_{i \rightarrow k} y_i + \prod_{k \rightarrow j} y_j \right). \quad (2.3.1)$$

Esta definición se puede relacionar con el siguiente teorema de geometría elemental.

Proposición 2.3.28 (Teorema de Ptolomeo). *En todo cuadrilátero inscribible en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales.*



Teniendo en cuenta el cuadrilátero anterior y la proposición 2.3.28, se puede escribir una de las diagonales en términos de los datos restantes,

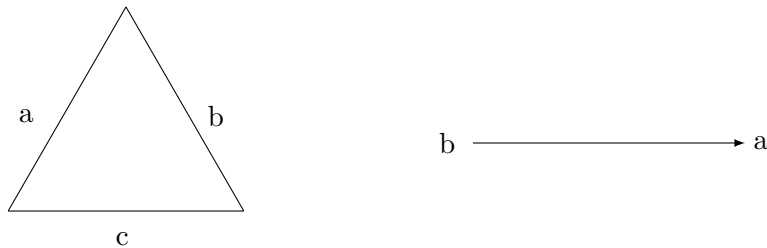
$$y'_k = \frac{1}{y_k}(y_1y_3 + y_3y_4),$$

lo cual es muy similar a la ecuación 2.3.1. Adicionalmente, si no se tiene en cuenta la diagonal roja, lo que se observa es una triangulación del cuadrilátero considerado. Veamos la teoría que se puede desarrollar a partir de esta interesante relación.

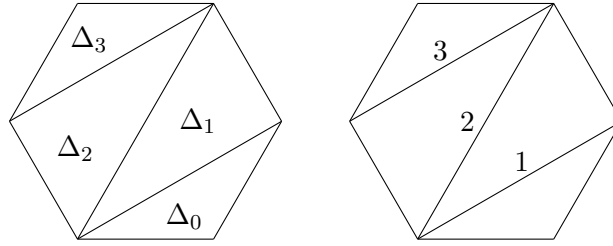
Clase de mutación de carcaj del tipo \mathbb{A}

En esta sección, se mostrará una relación entre las triangulaciones de un polígono regular y las mutaciones del carcaj \mathbb{A}_n , descrita por Schiffler en [20]. Primero, a cada triangulación T de P_{n+3} se le puede asociar un carcaj $Q(T)$, adicionalmente, los indescomponibles asociados a $Q(T)$ también se pueden representar por medio del polígono y una de sus diagonales.

Sea Δ_k , para algún $k \in [n + 1]$, un triángulo en T con lados etiquetados por a , b y c , ordenados en el sentido de las manecillas del reloj, tal que a y b se encuentran en el interior de P_{n+3} . En las condiciones anteriores se toman los lados a y b como vértices y se dibuja una flecha de b hacia a .



Ejemplo 2.3.29. Dada la siguiente triangulación mostrada a la izquierda, se observa que los triángulos con al menos dos de sus lados en el interior de P_6 son Δ_1 y Δ_2 . Etiquetando las diagonales, se obtiene la figura mostrada en el lado derecho:



Del triángulo Δ_1 se obtiene una flecha de 2 a 1, y del triángulo Δ_2 se tiene una flecha de 2 a 3, por lo que se construye el siguiente carcaj

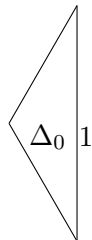
$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3$$

De manera similar, a partir de un carcaj Q del tipo \mathbb{A}_n se puede obtener una triangulación T_Q de un polígono P_{n+3} . Primero, sea a un vértice el cual tiene una única arista adyacente. De este vértice se construye un triángulo Δ_0 , el cual tendrá un único lado interior en P_{n+3} etiquetado precisamente con a . Si $a \rightarrow b$ es una flecha en Q , se dibuja un triángulo Δ_1 adyacente a Δ_0 por medio de la arista a , y se etiqueta con b aquella arista del nuevo triángulo que quede inmediatamente después de a en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si, por el contrario, $b \rightarrow a$ es una flecha en Q , entonces se hace una construcción similar en la cual la etiqueta de b quede inmediatamente después de a en sentido de las manecillas del reloj. Este proceso se realiza de manera recursiva hasta cubrir cada uno de los vértices del carcaj.

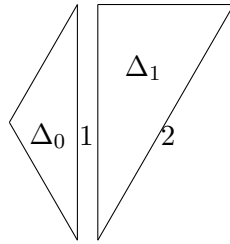
Ejemplo 2.3.30. Dado el siguiente carcaj

$$\mathbb{A}_3 = 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

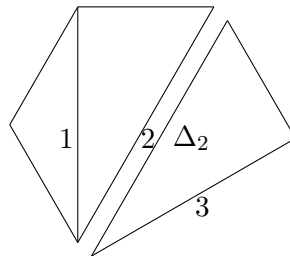
El vértice 1 es adyacente a una única flecha, por lo tanto, se obtiene el siguiente triángulo



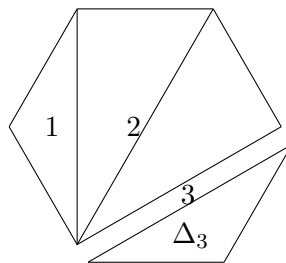
Debido a que hay una flecha de 1 a 2, entonces en el triángulo Δ_1 se debe etiquetar con 1 y 2, dos aristas en sentido contrario a las manecillas del reloj.



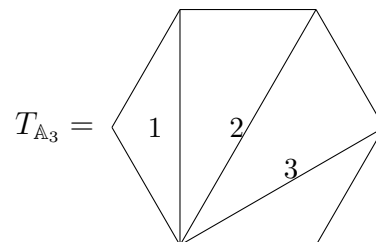
Análogamente, hay una flecha de 2 a 3, entonces el triángulo Δ_2 se etiqueta en sentido contrario a las manecillas del reloj.



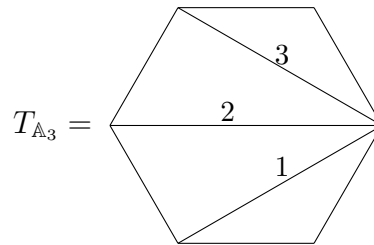
Por último, el vértice 3 ya no se encuentra conectado a otro vértice, por lo tanto, al igual que en el primer paso, se construye un triángulo de manera que 3 quede en el interior de P_6 .



Así, la triangulación obtenida es

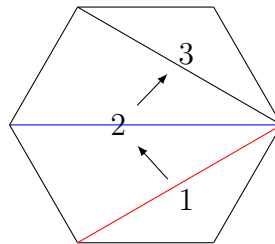


Nota 2.3.31. Se debe aclarar que la construcción mostrada anteriormente se podía iniciar asociando al vértice 1 cualquiera de las aristas del triángulo Δ_0 , en este caso, por ejemplo, la siguiente triangulación es equivalente a la encontrada anteriormente

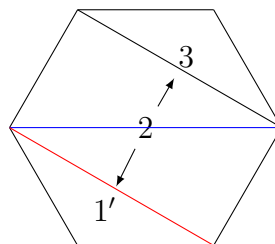


Se observa que esta corresponde a una rotación de la triangulación inicial.

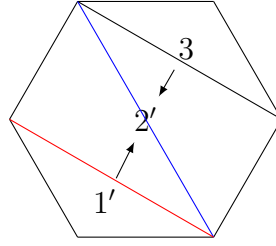
Por la forma en que se definió la correspondencia entre las triangulaciones y los carcajes, se puede encontrar una nueva forma de realizar las mutaciones de un carcaj por medio de cambios en las diagonales del polígono. Para observar esto, consideremos una representación gráfica en la cual está la triangulación del anterior ejemplo con su respectivo carcaj:



Si se aplica mutación con respecto al vértice 1, la flecha $1 \rightarrow 2$ se invierte, luego se obtiene



Tomando ahora la mutación con respecto al vértice 2, como es vértice fuente, nuevamente solo se deben invertir las flechas que salen de 2, así



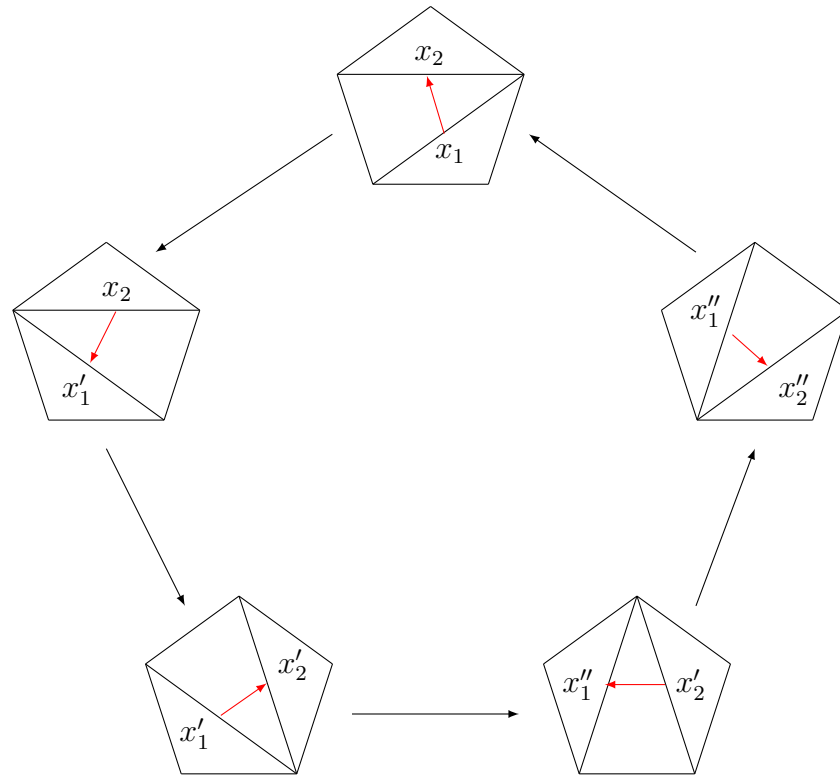
En este caso, la mutación con respecto a un vértice se obtuvo considerando el cuadrilátero que contiene a dicho vértice como diagonal, y cambiando esta por su otra diagonal. En el caso de las variables de conglomerado, se puede pensar en su mutación como la aplicación del *teorema de Ptolomeo* 2.3.28. Con base en los casos anteriores, al realizar el cambio de diagonal es claro que se obtiene de nuevo una triangulación, por lo cual se tiene la siguiente definición.

Definición 2.3.32 ([16], Definición 2.2.10). Sea T una triangulación del polígono P_{n+3} y sea $i \in [n]$ una diagonal de T . Sea G_i el cuadrilátero formado por los triángulos Δ_{i-1} y Δ_i que contienen a la arista i , y sea i' la otra diagonal de este cuadrilátero. Se define **el giro de la triangulación T en la diagonal i** , como la triangulación $F_i(T) = (T - \{i\}) \cup \{i'\}$.

Por construcción, se observa que $F_i(F_i(T)) = T$, así que la aplicación giro resulta ser una involución, propiedad que también tiene la mutación de un carcaj, de hecho, Lampe muestra en [16] la siguiente proposición.

Proposición 2.3.33 ([16], Proposición 2.2.11). *Sea $i \in [n]$ una diagonal de una triangulación T de un polígono P_{n+3} . Si el carcaj de la triangulación T es Q y el carcaj del giro $F_i(T)$ es Q' , entonces $Q' \cong \mu_i(Q)$.*

Ejemplo 2.3.34. Considérese de nuevo la semilla asociada al carcaj \mathbb{A}_2 visto en el ejemplo 2.3.22. Como se vio allí, el álgebra generada por esta semilla resulta ser de tipo mutación finita ya que cuenta con 5 variables de conglomerado. Veamos ahora su comportamiento por medio de triangulaciones y sus giros:



Así, se obtienen las 5 triangulaciones de P_5 , y esta es la misma cantidad de variables de conglomerado.

En general, el número de conglomerados en un álgebra de tipo finito \mathbb{A}_n está relacionado con los números de Catalán. Más específicamente, el número de conglomerados en este caso es C_{n+1} , como se aprecia en la siguiente adaptación del Teorema 5.1 en [7].

Proposición 2.3.35 ([7], Teorema 5.1). *El número de conglomerados en un álgebra de conglomerado de tipo finito \mathbb{A}_n es igual a*

$$N(\phi) = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}.$$

Representación del carcaj del tipo \mathbb{A} por medio de triangulaciones

Ya se tiene una representación geométrica para los carcajes y para la mutación de semillas, ahora se va a definir una para sus representaciones indescomponibles y así, más adelante poder construir el carcaj de Auslander-Reiten haciendo uso de dicha representación.

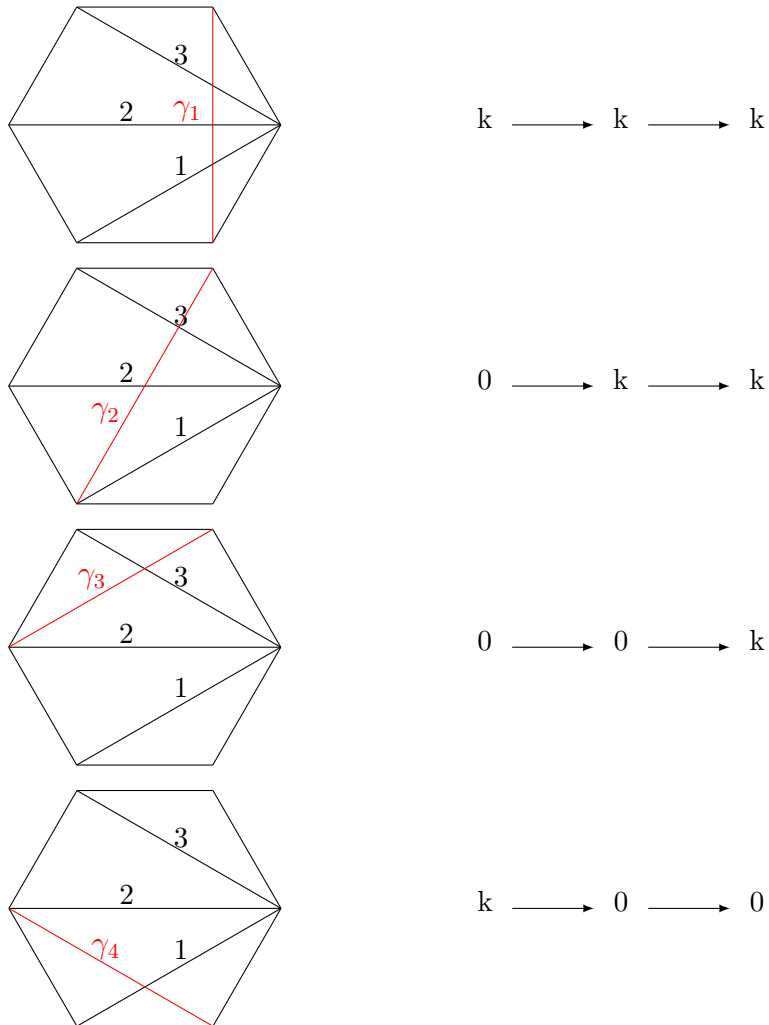
Definición 2.3.36. Sea T_Q una triangulación de un polígono P_{n+3} y sea γ una diagonal de P_{n+3} la cual no pertenece a T_Q . Se define la representación $M_\gamma = (M_i, \varphi_\alpha)$ de Q asociada a γ donde

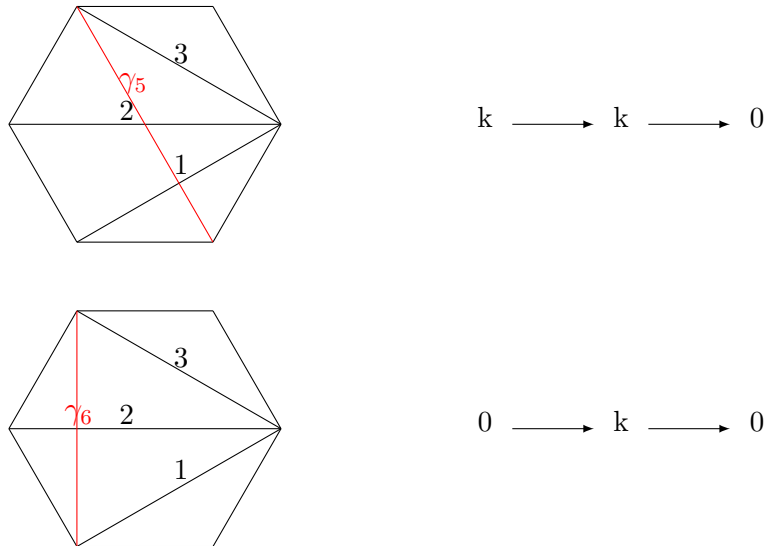
$$M_i = \begin{cases} k & \text{si la diagonal } \gamma \text{ cruza la diagonal } i, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

y

$$\varphi_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } M_{s(\alpha)} = M_{t(\alpha)} = k, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.37. Para la triangulación del ejemplo 2.3.30, se tienen las siguientes representaciones





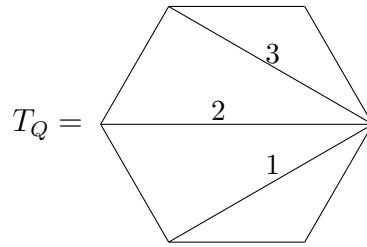
2.4. Aplicaciones

2.4.1. Carcaj de Auslander-Reiten asociado al carcaj del tipo \mathbb{A}_n

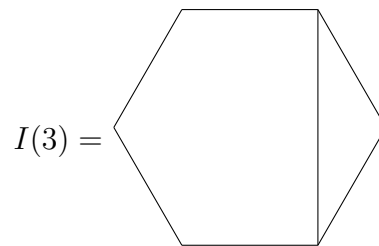
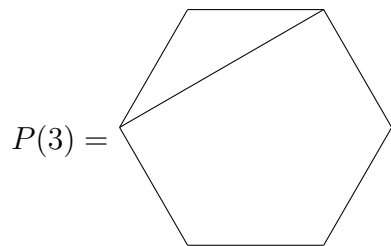
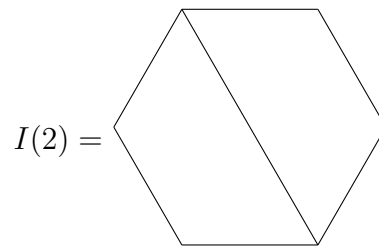
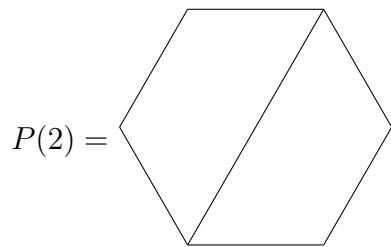
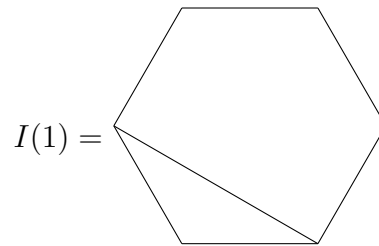
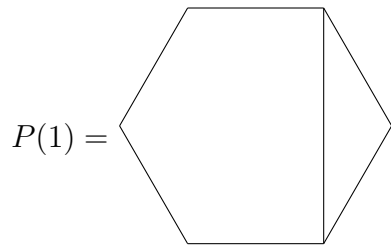
En la definición 2.2.17, para un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, con $|Q_0| = n$, sin k -ciclos orientados, se definió una representación proyectiva $P(i)$ en base a los caminos que tenían como punto inicial al vértice i . En [20], se define ahora el proyectivo $P(i)$ como la rotación, en sentido contrario a las manecillas del reloj, del polígono P_{n+3} que tiene únicamente a la diagonal i . De manera análoga, el inyectivo $I(i)$ se define como la rotación, en sentido de las manecillas del reloj, del polígono P_{n+3} que tiene únicamente a la diagonal i .

Siguiendo la idea del algoritmo 2.2.19, el carcaj de Auslander-Reiten se empieza a construir desde las representaciones proyectivas, y la órbita de cada proyectivo se genera haciendo rotaciones hasta encontrar una representación inyectiva.

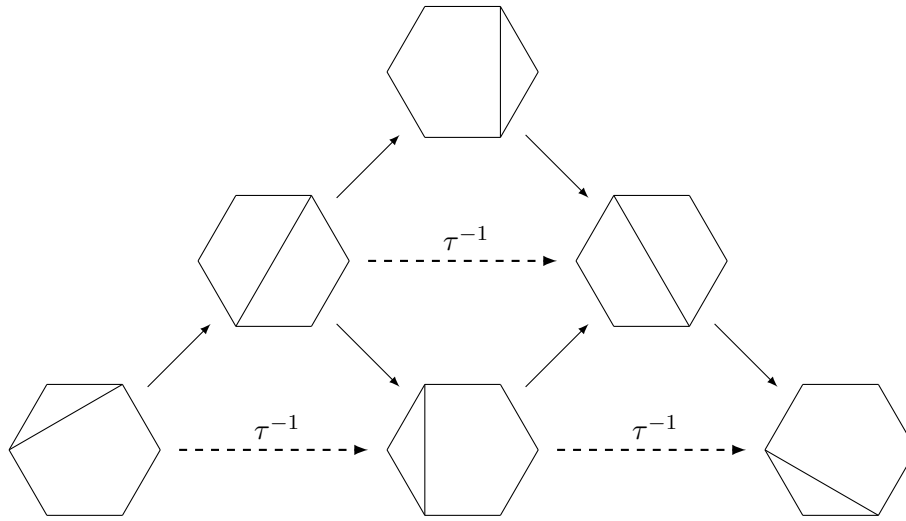
Ejemplo 2.4.1. En el ejemplo 2.3.30 se vio que la triangulación asociada al carcaj linealmente orientado \mathbb{A}_3 es



Sus triangulaciones proyectivas e inyectivas son



y el carcaj de Auslander-Reiten es

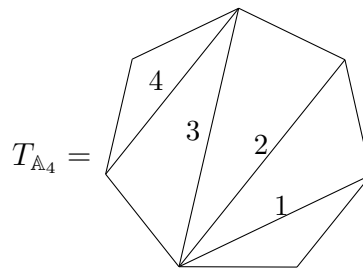


El cual se puede comparar con el carcaj obtenido en el ejemplo 2.2.20.

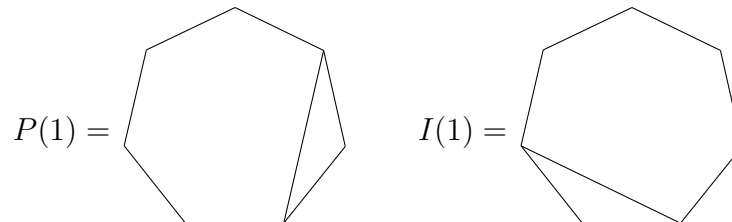
Ejemplo 2.4.2. Para el carcaj

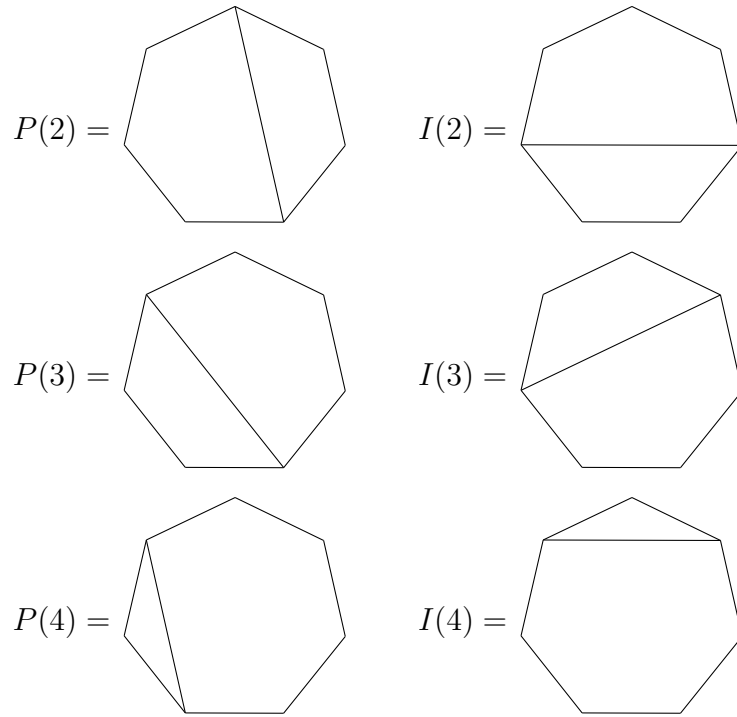


se tiene la triangulación

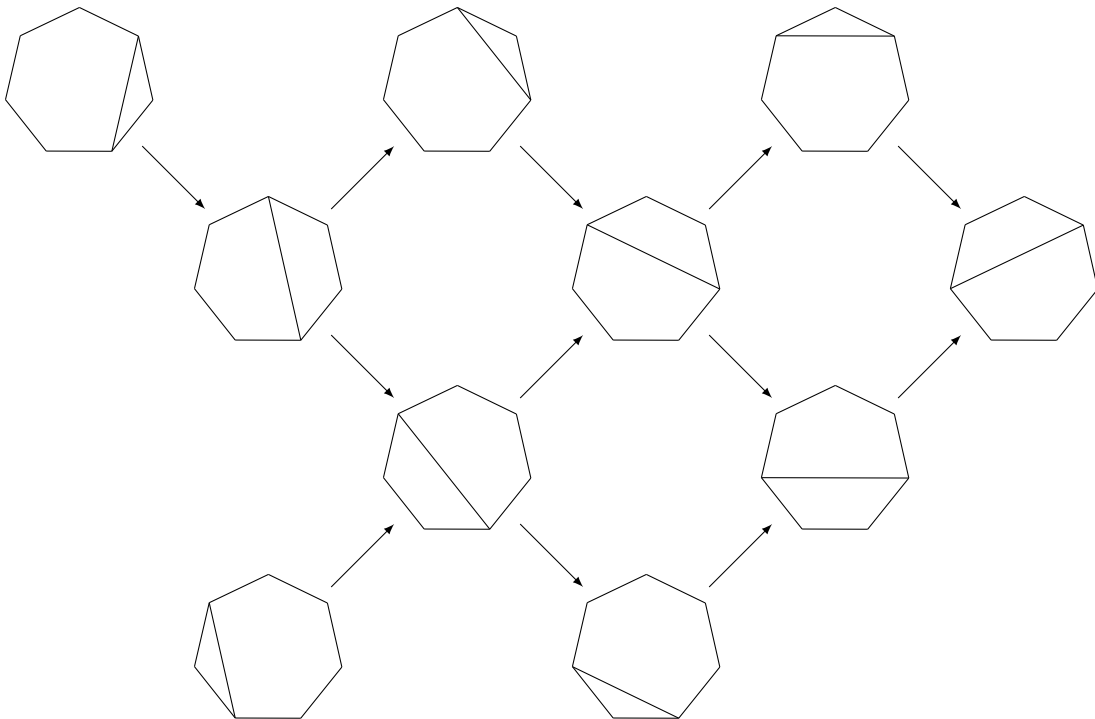


y se obtienen los siguientes proyectivos e inyectivos





y el carcaj de Auslander-Reiten es



Nuevamente, se puede observar el carcaj de Auslander-Reiten obtenido por medio de dimensiones en el ejemplo 2.2.21.

2.4.2. Sucesiones y ecuaciones diofánticas asociadas a las álgebras de conglomerado

Las ecuaciones diofánticas son ecuaciones de la forma

$$f(x_1, \dots, x_d) = 0,$$

donde f es un polinomio con coeficientes enteros, y cuyas soluciones se buscan en el conjunto de los números enteros. Uno de los ejemplos más famosos y estudiados en las ecuaciones diofánticas es la **ecuación de Markov**

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1x_2x_3 \quad (2.4.1)$$

Adicionalmente, una tripla $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$ con $a_i > 0$ para $i = \{1, 2, 3\}$, es llamada **tripla de Markov** si es solución de la ecuación 2.4.1, y cada a_i se conoce como un **número de Markov**. Los números de Markov aparecen en la OEIS como la sucesión A002559, y sus primeros 10 términos son:

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, \dots\}.$$

Hay una manera recursiva de construir las triplas de Markov, primero, se observa la ecuación 2.4.1 como una función en la variable x

$$f(x) = x^2 - 3(a_2a_3)x + (a_2^2 + a_3^2).$$

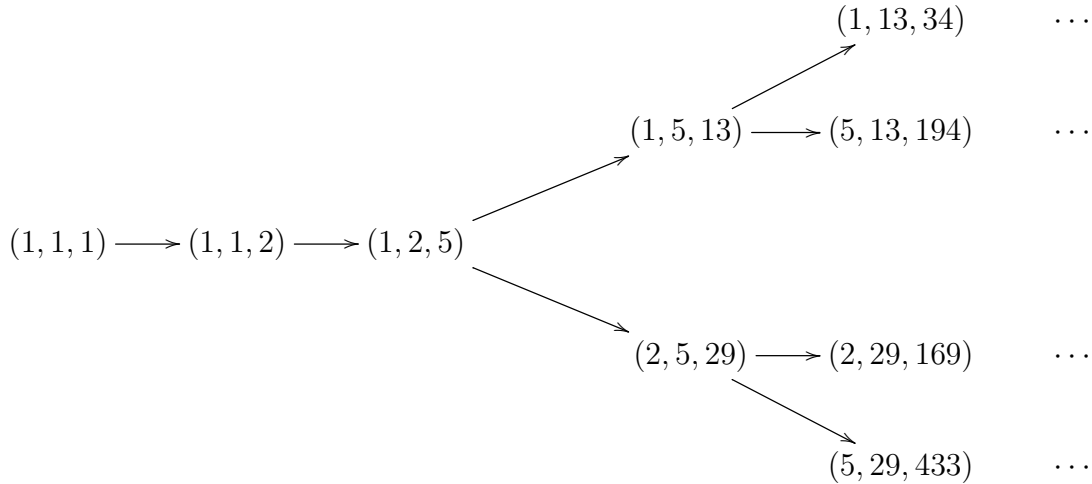
Es claro que las dos soluciones de esta ecuación cuadrática son números de Markov si a_2 y a_3 lo son, por lo tanto, si a_1 y a'_1 son dichas soluciones, entonces

$$a_1a'_1 = a_2^2 + a_3^2 \quad y \quad a_1 + a'_1 = 3a_2a_3.$$

Así, si (a_1, a_2, a_3) es una tripla de Markov, entonces también lo son

$$\begin{aligned} &(3a_2a_3 - a_1, a_2, a_3), \\ &(a_1, 3a_1a_3 - a_2, a_3), \\ &(a_1, a_2, 3a_1a_2 - a_3), \end{aligned}$$

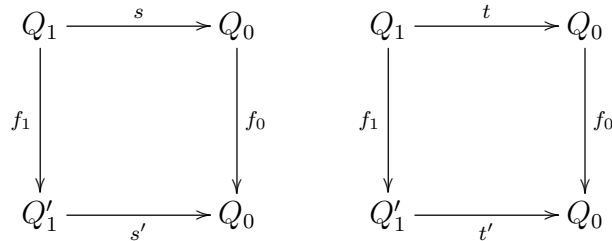
lo cual permite construir lo que se conoce como el árbol de Markov



A continuación, en base a [16], se mostrará cómo a partir de un álgebra de conglomerado se puede en algunos casos encontrar una sucesión y una ecuación diofántica asociadas a esta. De este texto también se toman dos ejemplos, uno asociado al carcaj 2–Kronecker, y el otro relacionado a los números de Markov y la ecuación de Markov.

Sucesión asociada a un álgebra de conglomerado

Sea $\mathcal{A}(x, Q)$ un álgebra de conglomerado de rango $n \in \mathbb{N}$, donde $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es tal que $Q' := \mu_1(Q) \cong Q$. Por definición, existen aplicaciones biyectivas $f_0 : Q_0 \rightarrow Q_0$ y $f_1 : Q_1 \rightarrow Q'_1$ tales que los siguientes diagramas conmutan



En otras palabras, se está pidiendo que los dos carcajes sean iguales, salvo por un reordenamiento de los vértices, para mayor facilidad, vamos a suponer que esta permutación de vértices está formada por un ciclo de la forma $(2\ 3\ \dots\ n\ 1)$. De

esta manera, si $x_{n+1} := x'_1 = \mu_1(x_1)$, entonces la semilla

$$\mu_1(\mathbf{x}, Q) = ((x'_1, x_2, \dots, x_n), \mu_1(Q))$$

se puede ver como $((x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}), Q)$. Iterando este proceso, se obtiene una sucesión de variables de conglomerado $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$, para las que existe un polinomio de Laurent $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $x_{n+i} = P(x_i, \dots, x_{i+n-1})$, por lo que es posible extender la sucesión a $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

A continuación, se muestran dos carcajes muy importantes que cumplen la condición anteriormente descrita. Adicionalmente, se muestran las sucesiones asociadas a ellos, y se describe la manera por la cual se obtiene una ecuación diofántica que tiene como soluciones a las variables de conglomerado del carcaj.

Ejemplo 2.4.3 (Carcaj 2-Kronecker, [16], p. 33). Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ un cluster y

$$Q(2) = 1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} 2$$

el carcaj 2-Kronecker, se define la semilla (\mathbf{x}, Q) como

$$(\mathbf{x}, Q(2)) = x_1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} x_2$$

Al aplicar μ_1 a se obtiene

$$\mu_1(\mathbf{x}, Q(2)) = (\mu_1(\mathbf{x}) = (x'_1, x_2), \mu_1(Q(2))) = x'_1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} x_2$$

donde $x'_1 = \frac{x_2^2+1}{x_1}$. Renombrando el cluster x'_1 como x_3 y organizando el cluster como (x_2, x_3) , se puede ver la semilla anteriormente encontrada como

$$((x_2, x_3), Q(2)) = x_2 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} x_3 ,$$

así, $\mu_1(\mathbf{x}, Q(2)) \cong (\mathbf{x}, Q(2))$. Este último isomorfismo permite que, al mutar reiterativamente, se obtenga la misma relación de cambio para cada par nuevo de variables de conglomerado. En general, aplicando μ_n a la semilla $((x_n, x_{n+1}), Q(2))$, se tiene la relación de cambio $x_{n+2} := x'_n = \frac{x_{n+1}^2+1}{x_n}$, lo cual permite obtener la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $x_{i+1}x_{i-1} = x_i^2 + 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

El proceso anteriormente mostrado es fácil de desarrollar para cualquier álgebra de conglomerado, una vez que se ha encontrado el carcaj conveniente. Sin

embargo, para encontrar una ecuación diofántica asociada es un poco más tedioso, puesto que se debe encontrar una expresión algebraica que dé el mismo resultado, independientemente del cluster en el que se evalúe.

Para el álgebra 2-Kronecker, en [16, Proposición 3.1.1] haciendo uso de la relación de cambio $x_{i+1}x_{i-1} = x_i^2 + 1$ se observa que la expresión racional

$$T(i) := \frac{1 + x_i^2 + x_{i+1}^2}{x_i x_{i+1}}$$

es independiente de i , esto es,

$$T(i) = \frac{x_i^2 + x_i x_{i+2}}{x_i x_{i+1}} = \frac{x_i + x_{i+2}}{x_{i+1}} = \frac{x_i x_{i+2} + x_{i+2}^2}{x_{i+1} x_{i+2}} = \frac{1 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2}{x_{i+1} x_{i+2}} = T(i+1)$$

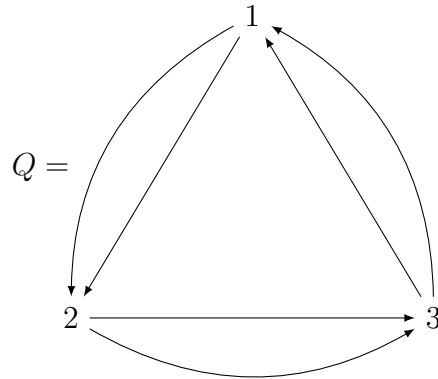
Además por inducción, si $T(i) = T(k)$, entonces $T(i) = T(k+1)$, por lo cual $T(i) = T(j)$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$, en particular, $T(i) = T(1) = 3$ si $x_1 = x_2 = 1$. Por último,

$$T(i)x_i = \frac{1 + x_i^2 + x_{i+1}^2}{x_{i+1}} = \frac{1 + x_i^2}{x_{i+1}} + x_{i+1} = x_{i-1} + x_{i+1},$$

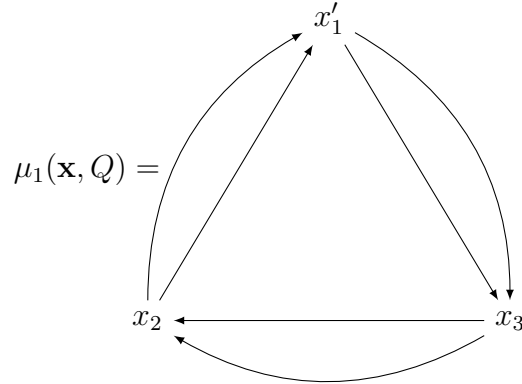
por lo tanto, $T(i)x_i = T(1)x_1 = 3x_i = x_{i-1} + x_{i+1}$.

En conclusión, la ecuación $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$ tiene por soluciones enteras a las variables de conglomerado (x_i, x_{i+1}) del álgebra 2-Kronecker.

Ejemplo 2.4.4 (Carcaj de Markov, [16], p. 38). Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un conglomerado y sea



el carcaj asociado, entonces



donde $x'_1 = \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1}$. Note que la expresión racional

$$T(i) := \frac{x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2}{x_i x_{i+1} x_{i+2}}$$

es independiente de $i \in \mathbb{Z}$. En efecto, como $x_{i+3}x_i = x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2$ es la relación de cambio, entonces

$$\begin{aligned} T(i) &= \frac{x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2}{x_i x_{i+1} x_{i+2}} = \frac{x_i^2 + x_i x_{i+3}}{x_i x_{i+1} x_{i+2}} = \frac{x_i(x_i + x_{i+3})}{x_i x_{i+1} x_{i+2}} = \frac{x_i + x_{i+3}}{x_{i+1} x_{i+2}} \\ &= \frac{(x_i + x_{i+3})x_{i+3}}{x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}} = \frac{x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + x_{i+3}^2}{x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}} = T(i+1) \end{aligned}$$

Si $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, entonces $T(1) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1 x_2 x_3} = 3$, por lo tanto

$$x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 = 3x_i x_{i+1} x_{i+2}.$$

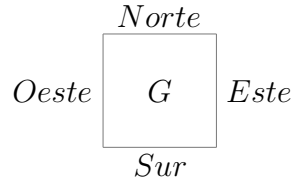
La anterior expresión no es más que la ecuación diofántica $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,

2.4.3. Grafos serpiente, fracciones continuas y emparejamientos perfectos

En [26] y [25] se muestra una relación bastante interesante entre la fracción continua asociada a un grafo serpiente, el número de emparejamientos perfectos de dicho grafo y las álgebras de conglomerado. Estas relaciones han

permitido solucionar problemas asociados a cada uno de estos objetos de manera más sencilla, de aquí el interés de realizar este estudio.

Para empezar, se considera la tesela



Teniendo en cuenta que una tesela G es un grafo con cuatro vértices y cuatro aristas ubicados en forma de cuadrado, se enuncia la siguiente definición:

Definición 2.4.5 ([26], p. 5). Un grafo Serpiente \mathcal{G} es un grafo plano conectado que consiste en una secuencia finita de teselas G_1, G_2, \dots, G_d , con $d \geq 1$, de tal manera que para cada $i \in [d - 1]$, las teselas G_i y G_{i+1} comparten exactamente una arista e_i , la cual es la arista Norte de G_i y la arista Sur de G_{i+1} , o es la arista Este de G_i y la arista Oeste de G_{i+1} .

Las aristas e_1, e_2, \dots, e_{d-1} se llaman interiores y las otras se dicen aristas de contorno. A las aristas de un grafo serpiente se les puede asignar los símbolos $+$ o $-$, y más adelante se usará esta asignación en un subconjunto especial de las aristas para encontrar una fracción asociada al grafo. A continuación, se describe esa asignación y se define también el concepto de fracción continua.

Definición 2.4.6 ([26], p. 9). Una función signo f sobre un grafo Serpiente \mathcal{G} es una aplicación

$$f : E(\mathcal{G}) \longrightarrow \{+, -\}$$

tal que para cada tesela G_i en \mathcal{G} se cumplen las siguientes condiciones

- Las aristas Norte y Oeste tienen el mismo signo,
- Las aristas Sur y Este tienen el mismo signo,
- El signo de la arista Norte es opuesto al signo de la arista Sur.

Definición 2.4.7 ([26], p. 7). Una fracción continua finita es una función de n variables a_1, \dots, a_n ,

$$[a_1, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Similarmente, una fracción continua infinita es una función de infinitas variables a_1, a_2, \dots ,

$$[a_1, a_2 \dots] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}}$$

Se puede asociar una fracción continua a un grafo Serpiente por medio de su función signo de la siguiente manera: Si \mathcal{G} es un grafo Serpiente con d teselas, entonces se obtiene la sucesión de signos

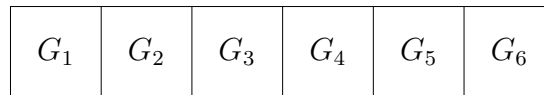
$$[f(e_0), f(e_1), \dots, f(e_{d-1}), f(e_d)],$$

donde e_1, \dots, e_{d-1} son las aristas interiores de \mathcal{G} , e_0 es la arista Sur de G_1 y e_d es la arista Norte de G_d . Si, $\epsilon \in \{+, -\}$ se tiene

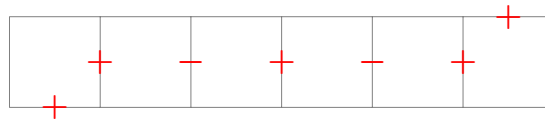
$$[f(e_0), f(e_1), \dots, f(e_{d-1}), f(e_d)] = [\underbrace{\epsilon, \dots, \epsilon}_{a_1}, \underbrace{-\epsilon, \dots, -\epsilon}_{a_2}, \dots, \underbrace{\pm\epsilon, \dots, \pm\epsilon}_{a_n}],$$

entonces se obtiene la fracción continua $[a_1, \dots, a_n]$ asociada a \mathcal{G} .

Ejemplo 2.4.8. Para el siguiente grafo con 6 teselas



se obtiene la siguiente asignación de signos

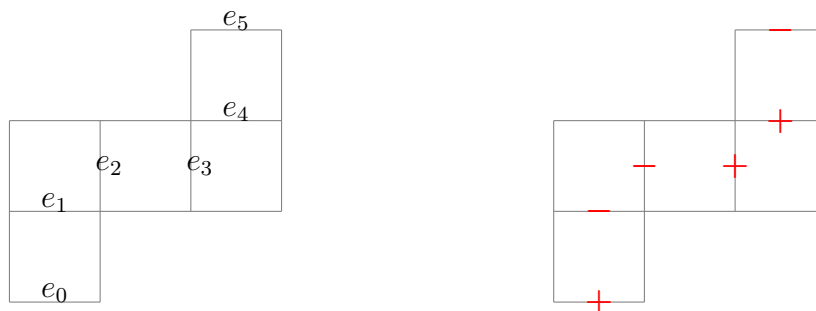


Así, su sucesión de signos y fracción continua asociadas son, respectivamente

$$\left(\underbrace{+, +}_2, \underbrace{-}_1, \underbrace{+}_1, \underbrace{-}_1, \underbrace{+, +}_2 \right),$$

$$[2, 1, 1, 1, 2] = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{21}{8}.$$

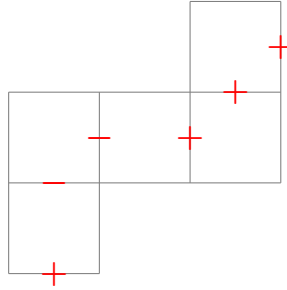
Ejemplo 2.4.9. El siguiente es un grafo Serpiente con 5 teselas G_i , $i \in [5]$, y 4 aristas interiores e_k , $k \in [4]$. A su derecha se encuentra la asignación de signos correspondiente



Su sucesión de signos es $(+, -, -, +, +, -)$, y por tanto la fracción continua asociada es

$$[1, 2, 2, 1] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{10}{7}.$$

Una pregunta que surge con este ejemplo es ¿qué sucede con el grafo serpiente asociado a la fracción continua $[1, 2, 3] = \frac{10}{7}$? Pues bien, es el mismo grafo, solo que su última arista e_5 ya no es la Norte de la tesela G_5 , sino que se toma la Este de la misma tesela:



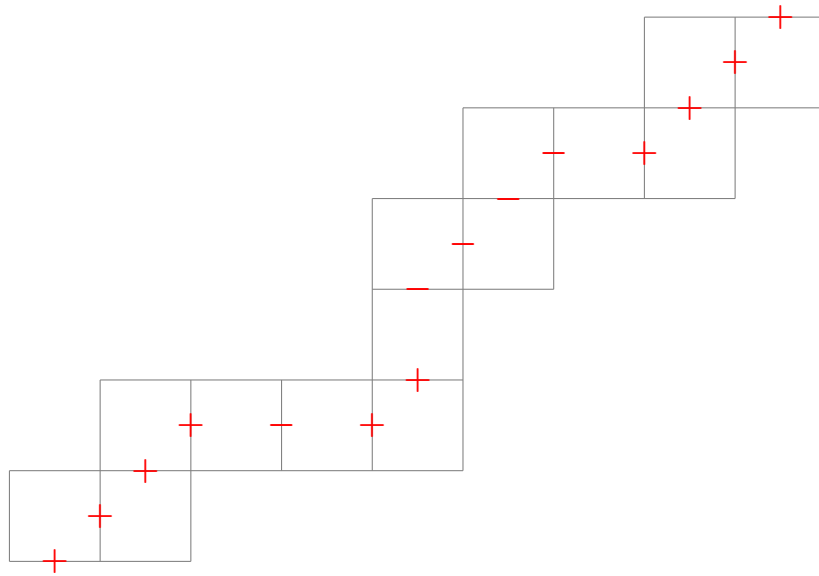
En general, si $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ fracción continua con $a_n = 1$, entonces

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1].$$

Proposición 2.4.10 ([26], Teorema 3.4). *Si $m(\mathcal{G})$ denota el número de emparejamientos perfectos de \mathcal{G} entonces*

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{m(\mathcal{G}[a_1, a_2, \dots, a_n])}{m(\mathcal{G}[a_2, \dots, a_n])}$$

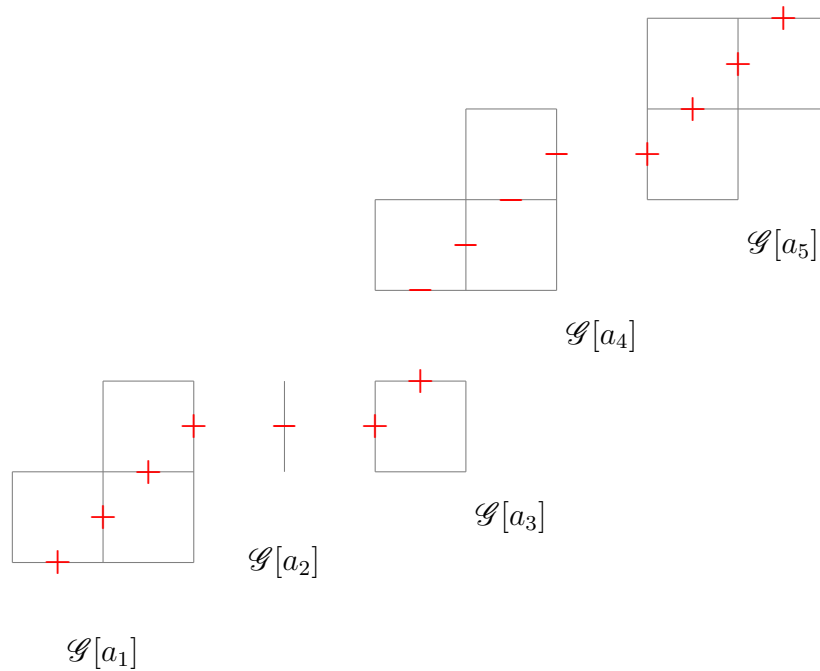
Ejemplo 2.4.11. Sea \mathcal{G} el siguiente grafo serpiente con su función de signo asignada



Su fracción continua asociada es

$$[4, 1, 2, 4, 4] = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}}} = \frac{258}{55}.$$

Por el teorema 2.4.10, este grafo tiene 258 emparejamientos perfectos, veamos cómo se encuentran haciendo uso de la demostración y observemos su relación con el algoritmo de la división. Primero, los subgrafos de \mathcal{G} obtenidos como $\mathcal{G}[a_i]$, para $i \in [5]$ son



donde $m(\mathcal{G}[a_1]) = m(\mathcal{G}[a_4]) = m(\mathcal{G}[a_5]) = 4$, $m(\mathcal{G}[a_2]) = 1$, $m(\mathcal{G}[a_3]) = 2$.

Los emparejamientos perfectos de \mathcal{G} se pueden separar en dos conjuntos disjuntos: El primero, consiste de aquellos que no toman las aristas que conectan a $\mathcal{G}[a_1]$ y a $\mathcal{G}[a_2]$, entonces se obtienen $m(\mathcal{G}[a_1])m(\mathcal{G}[a_2, a_3, a_4, a_5])$. Para el segundo conjunto se toman aquellos emparejamientos que contienen a las aristas vu , en tal caso, se tiene un total de $m(\mathcal{G}[a_3, a_4, a_5])$. Por lo anterior,

$$\begin{aligned} m(\mathcal{G}) &= m(\mathcal{H}_1)m(\mathcal{G}[a_2, a_3, a_4, a_5]) + m(\mathcal{G}[a_3, a_4, a_5]) \\ &= 4 \cdot m(\mathcal{G}[a_2, a_3, a_4, a_5]) + m(\mathcal{G}[a_3, a_4, a_5]) \end{aligned}$$

Ahora, aplicando un razonamiento similar, se obtiene que

$$\begin{aligned}
m(\mathcal{G}[a_2, a_3, a_4, a_5]) &= m(\mathcal{H}_2) \cdot m(\mathcal{G}[a_3, a_4, a_5]) + m(\mathcal{G}[a_4, a_5]) \\
&= 1 \cdot m(\mathcal{G}[a_3, a_4, a_5]) + m(\mathcal{G}[a_4, a_5]), \\
m(\mathcal{G}[a_3, a_4, a_5]) &= m(\mathcal{H}_3) \cdot m(\mathcal{G}[a_4, a_5]) + m(\mathcal{G}[a_5]) \\
&= 2 \cdot m(\mathcal{G}[a_4, a_5]) + 4, \\
m(\mathcal{G}[a_4, a_5]) &= m(\mathcal{H}_4) \cdot m(\mathcal{H}_5) + 1 \\
&= 4 \cdot 4 + 1,
\end{aligned}$$

de esta manera, $m(\mathcal{G}[a_4, a_5]) = 17$, $m(\mathcal{G}[a_3, a_4, a_5]) = 38$, $m(\mathcal{G}[a_2, a_3, a_4, a_5]) = 55$ y $m(\mathcal{G}[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]) = 258$. Adicionalmente, se observa que al aplicar el algoritmo de la división se obtienen los emparejamientos perfectos obtenidos en cada paso de la recursividad

$$\begin{aligned}
258 &= 4 \cdot 55 + 38 \\
55 &= 1 \cdot 38 + 17 \\
38 &= 2 \cdot 17 + 4 \\
17 &= 4 \cdot 4 + 1 \\
4 &= 4 \cdot 1
\end{aligned}$$

donde los términos en rojo son precisamente los términos de la fracción continua asociada a \mathcal{G} .

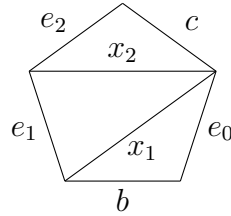
Por último, la siguiente proposición permite aplicar los conceptos vistos en esta sección al cálculo de las variables de conglomerado. El teorema está enunciado para álgebras de conglomerado cuyas triangulaciones asociadas son más generales que las descritas en este trabajo:

Proposición 2.4.12 ([26], p. 7). *Si γ es un arco en una superficie triangulada (S, M) , la variable de conglomerado x_γ está dada por la fórmula*

$$x_\gamma = \frac{1}{\text{cross}(\mathcal{G}_\gamma)} \sum_{P \in \text{Match } \mathcal{G}_\gamma} x(P).$$

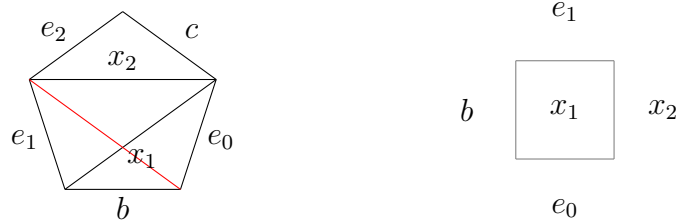
Sin embargo, a continuación se muestra un ejemplo de cómo se interpreta este resultado para las álgebras de tipo finito \mathbb{A}_2 .

Ejemplo 2.4.13. Consideremos el carcaj \mathbb{A}_2 , y veamos cómo obtener las variables de conglomerado obtenidas en el ejercicio 2.3.22 haciendo uso del teorema 2.4.12. Primero, se debe construir el grafo serpiente etiquetado, así que se etiqueta la triangulación asociada a la semilla de la siguiente manera



Se tienen 3 diagonales de P_5 no contenidas en la triangulación, las cuales hacen alusión a los arcos:

- γ_1 atraviesa únicamente al cuadrilátero que contiene a la diagonal x_1 , de esta manera $cross(\mathcal{G}_{\gamma_1}) = x_1$. Luego, su función de signo es $[+, -]$ y se obtiene el siguiente grafo serpiente



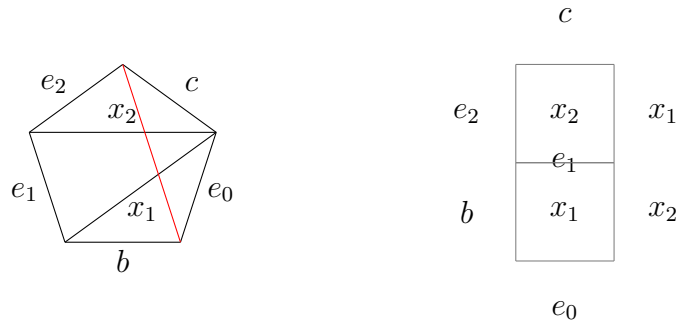
Los emparejamientos perfectos para este caso son

$$P_1 = \begin{array}{c} e_1 \\ \hline b \quad x_1 \quad x_2 \\ \hline e_0 \end{array} \quad P_2 = \begin{array}{c} e_1 \\ \left| \quad \left| \right. \\ b \quad x_1 \quad x_2 \\ \left| \quad \left| \right. \\ e_0 \end{array}$$

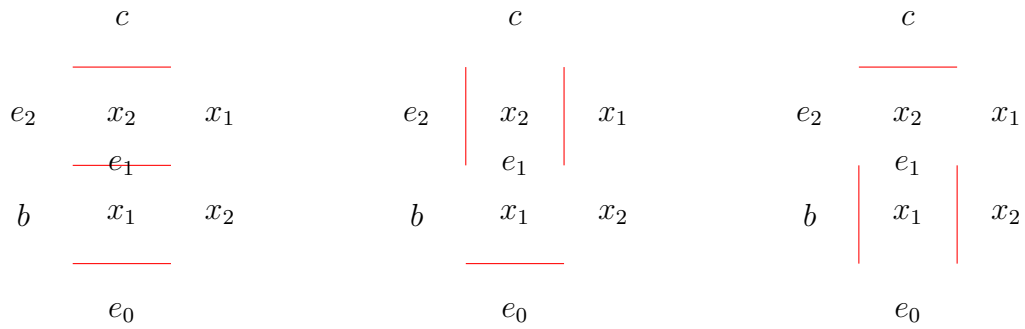
por lo tanto, $x(P_1) = 1$ y $x(P_2) = x_2$, de donde se obtiene la variable de conglomerado

$$x_{\gamma_1} = \frac{1 + x_2}{x_1}.$$

- γ_2 atraviesa a los cuadriláteros que contienen a las diagonales x_1 y x_2 , así, $cross(\mathcal{G}_{\gamma_2}) = x_1x_2$. Su función de signo es $[+, -, -]$, por lo tanto



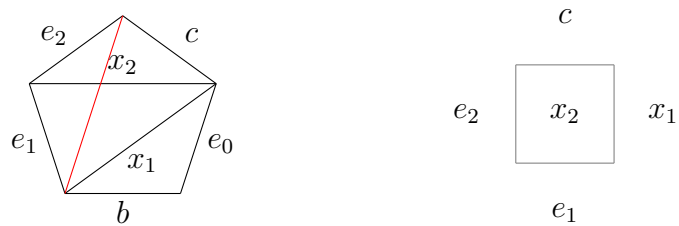
Los emparejamientos perfectos son



por lo tanto, se obtiene

$$x_{\gamma_2} = \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1x_2}.$$

- Para γ_3 se tiene $cross(\mathcal{G}_{\gamma_1}) = x_2$, y su función de signo es $[+, +]$, luego se tiene



Los emparejamientos perfectos son

$$\begin{array}{ccc}
 & c & \\
 \hline
 e_2 & x_2 & x_1 \\
 \hline
 & e_1 & \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & c & \\
 | & & | \\
 e_2 & x_2 & x_1 \\
 | & & | \\
 & e_1 & \\
 \end{array}$$

por lo cual, se obtiene la variable de conglomerado

$$x_{\gamma_3} = \frac{1 + x_1}{x_2}.$$

3 Resultados

3.1. Sucesión Dana Scott y ecuación diofántica

La sucesión Dana Scott está definida recursivamente como

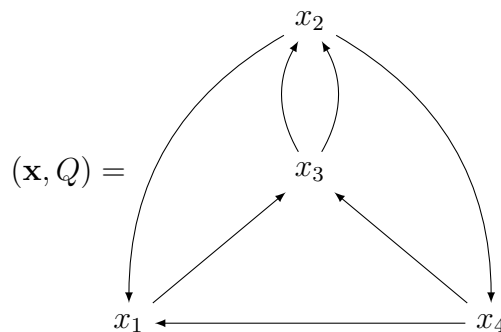
$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}a_{n-3}}{a_{n-4}},$$

donde $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Sus primeros términos son

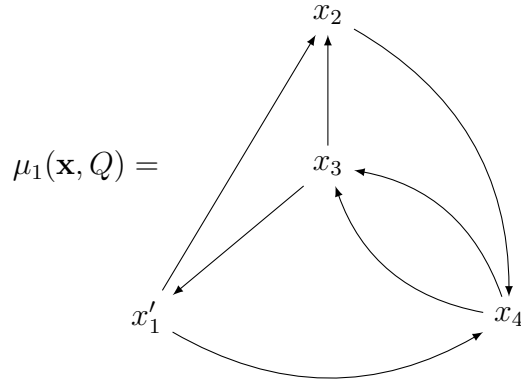
$$\{1, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 13, 22, 41, 111, 191, 361, 982, 1693, \dots\}.$$

Esta sucesión aparece en la OEIS como A048736 y es de interés debido a que, en el 2012, Michael Somos mostró que si a_0, a_1, a_2, a_3 , son variables entonces a_n es una función racional con denominador mónico monomial, es decir, dicha recursión tiene la propiedad de Laurent.

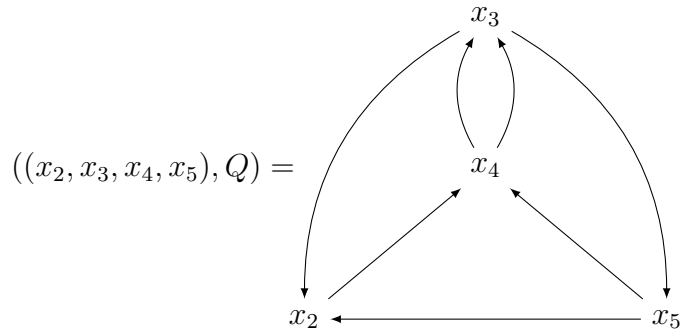
A continuación se definirá una semilla (\mathbf{x}, Q) cuyas variables de conglomerado están asociadas a la sucesión Dana Scott:



Aplicando μ_1 , la mutación de Q con respecto al vértice etiquetado con x_1 , se tiene



Además, la mutación del conglomerado define a x'_1 como $x'_1 = \frac{x_2x_4 + x_3}{x_1}$. Tomando a $x_5 := x'_1$ y reorganizando el cluster $((x'_1, x_2, x_3, x_4), \mu_1(Q))$ como $((x_2, x_3, x_4, x_5), Q)$ se obtiene



Por lo tanto, $Q \cong \mu_1(Q)$, y de esta manera se obtiene la sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ asociada a la anterior semilla, donde la relación de cambio viene dada por

$$x_{i+4}x_i = x_{i+1}x_{i+3} + x_{i+2},$$

la cual coincide con la sucesión de Dana Scott definida al inicio del capítulo. Ahora, como se vio en los ejemplos 2.4.4 y 2.4.3, luego de tener la sucesión asociada al álgebra de conglomerado, se puede intentar encontrar un invariante que permita obtener una ecuación diofántica y sus soluciones.

En este caso, el invariante y la ecuación diofántica obtenidos, respectivamente son:

Teorema 3.1.1. Sea $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la sucesión de variables de conglomerado del álgebra de conglomerado $A(\mathbf{x}, Q)$. La expresión

$$T(i) = \frac{(x_i + x_{i+3})(x_i x_{i+3} + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2) + x_{i+1} x_{i+2} (1 + x_i^2 + x_{i+3}^2)}{x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}}$$

es independiente de $i \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Factorizando de manera adecuada y haciendo uso de la relación de cambio $x_{i+4} x_i = x_{i+1} x_{i+3} + x_{i+2}$, se puede observar que

$$T(i) = \frac{x_{i+4}^2}{x_{i+4}^2} T(i) = T(i+1).$$

□

Teorema 3.1.2. Sea $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la sucesión de variables de conglomerado del álgebra de conglomerado $A(\mathbf{x}, Q)$, y sea $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}) = (a, b, c, d)$. Entonces (a, b, c, d) es solución de la ecuación diofántica

$$(a + d)(ad + b^2 + c^2) + bc(1 + a^2 + d^2) = 9abcd.$$

Demostración. Tomando $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, se tiene que $T(1) = 9$. Como $T(i)$ es invariante de $i \in \mathbb{Z}$, entonces $T(i) = T(1)$, por lo tanto

$$\frac{(x_i + x_{i+3})(x_i x_{i+3} + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2) + x_{i+1} x_{i+2} (1 + x_i^2 + x_{i+3}^2)}{x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}} = 9,$$

de donde

$$(x_i + x_{i+3})(x_i x_{i+3} + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2) + x_{i+1} x_{i+2} (1 + x_i^2 + x_{i+3}^2) = 9x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}.$$

Basta tomar $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}) = (a, b, c, d)$, para ver el resultado enunciado.

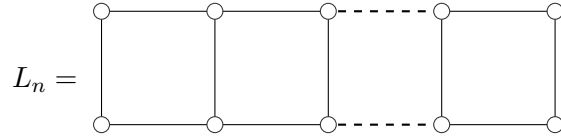
□

3.2. Emparejamientos perfectos en grafos escalera

3.2.1. Relación con los números de Fibonacci

Se tiene particular interés en el estudio de los emparejamientos perfectos de los grafos definidos a continuación

Definición 3.2.1 (Grafos Escalera). Una escalera $L_n = (V, E)$ es un grafo tal que $|V| = 2n$, $|E| = 3n - 2$, para $n \geq 1$, y tiene la siguiente forma



Antes de realizar la descripción del conteo en estos grafos, se va a definir el siguiente conjunto de sucesiones que permitirá caracterizar los emparejamientos perfectos de una manera muy conveniente.

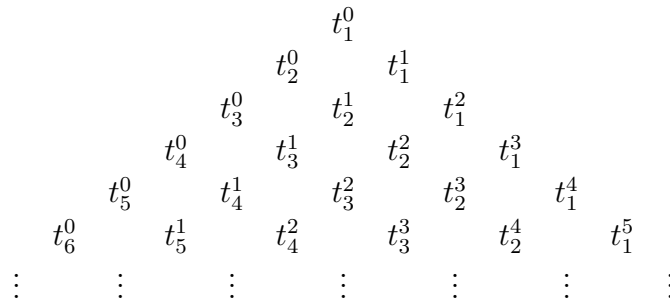
Definición 3.2.2. La sucesión $(t_k^d)_{k \in \mathbb{N}}$ es la sucesión de los números triangulares d -dimensionales definida por

$$t_k^d = \sum_{i=1}^k t_i^{d-1},$$

donde $t_k^0 = 1$, para todo $k \geq 1$.

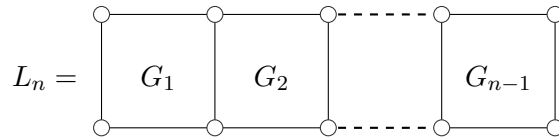
La anterior definición nace con el ánimo de generalizar la relación existente entre los números triangulares y piramidales, dado que, se está diciendo que el k -ésimo número triangular d -dimensional es la suma de los primeros k números triangulares $(d - 1)$ -dimensionales.

Estas sucesiones se pueden ver en el Triángulo de Pascal de la siguiente manera



Definidos ya los elementos t_k^d , se procede a realizar el conteo asociando un vector a cada representación gráfica del emparejamiento perfecto de L_n .

De esta manera, para cada emparejamiento perfecto del grafo

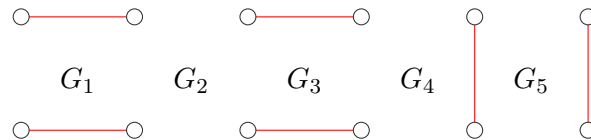


se define un vector $p = (p_1, \dots, p_{n-1})$ con $n - 1$ coordenadas (una por cada tesela G_i en el grafo L_n), de la siguiente manera:

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{si } G_i = \begin{array}{c} \circ - \circ \\ \circ - \circ \end{array} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \tag{3.2.1}$$

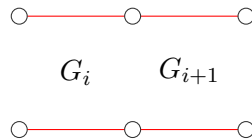
para efectos de no confundir este vector con otro que se definirá más adelante, se va a nombrar este como el **vector binario asociado al emparejamiento perfecto del grafo L_n** .

Ejemplo 3.2.3. Para L_6 se escoge el siguiente emparejamiento perfecto



como en las teselas G_1 y G_3 se tienen las aristas horizontales, entonces su vector binario asociado es $p = (1, 0, 1, 0, 0)$.

Nota 3.2.4. Es claro de la definición de p , que no existe $i \in [n - 2]$ tal que $p_i = p_{i+1} = 1$, puesto que esto implicaría que las teselas G_i y G_{i+1} tendrían aristas horizontales, y esto no correspondería a un emparejamiento perfecto:



Así, se busca contar el número de vectores con coordenadas 0 o 1, de manera tal que no queden dos 1 consecutivos.

Teorema 3.2.5. El número de vectores $p = (p_1, \dots, p_{n-1})$ con k coordenadas iguales a 1 donde no hay dos 1's seguidos es t_{n+1-2k}^k , para $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Demostración. (**Inducción sobre k .**) Para $k = 0$, se tiene a $\underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}$ como único vector con una cantidad 0 de unos, esto es $t_{n+1}^0 = 1$. Para $k = 1$, se tiene $t_{n-1}^1 = n-1$ vectores con exactamente una coordenada igual a 1. Supongamos que se cumple para $k = j$, y veamos que se tiene también para $k = j + 1$. Si el primer 1 aparece en la posición i , entonces de los $n - 1$ espacios totales hay $i + 1$ que no están disponibles para colocar los j unos restantes, entonces por hipótesis de inducción, hay $t_{n+1-(i+1)-2j}^j = t_{n-i-2j}^j$. Adicionalmente, como el primer 1 puede estar desde la posición $i = 1$ hasta la posición $i = n - 1 - 2j$, la cantidad de vectores con $j + 1$ unos es

$$\sum_{i=1}^{n-1-2j} t_{n-i-2j}^j = \sum_{i=1}^{n-1-2j} t_i^j = t_{n-1-2j}^{j+1} = t_{n+1-2(j+1)}^{j+1}$$

Así, el número de vectores $p = (p_1, \dots, p_{n-1})$ con k coordenadas iguales a 1 es t_{n+1-2k}^k , para $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ □

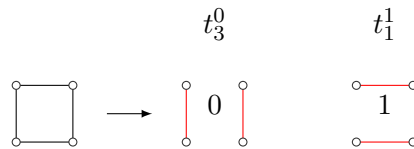
Corolario 3.2.6. Si $m(L_n)$ denota la cantidad de emparejamientos perfectos en L_n , entonces

$$m(L_n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} t_{n+1-2i}^i.$$

Ejemplo 3.2.7. Para $n = 2$, se tiene

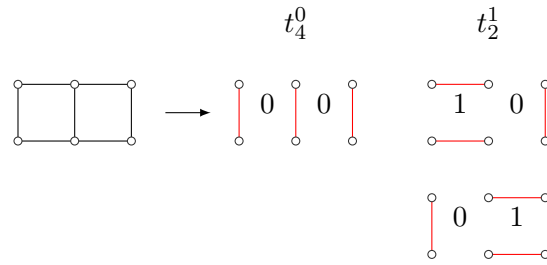
$$m(L_2) = \sum_{i=0}^1 t_{3-2i}^i = t_3^0 + t_1^1 = 2.$$

Sus emparejamientos perfectos son



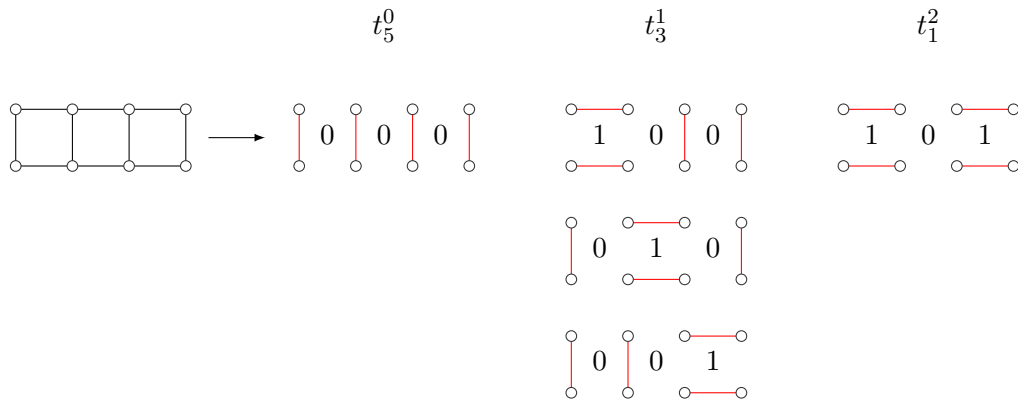
Ejemplo 3.2.8. Para $n = 3$,

$$m(L_3) = \sum_{i=0}^1 t_{4-2i}^i = t_4^0 + t_2^1 = 3.$$



Ejemplo 3.2.9. Para $n = 4$, se tiene

$$m(L_4) = \sum_{i=0}^2 t_{5-2i}^i = t_5^0 + t_3^1 + t_1^2 = 5.$$



1, 2, 3, 5, . . . , en general, el número de emparejamientos perfectos en las escaleras viene dado por la siguiente proposición.

Teorema 3.2.10. $m(L_n) = F_{n+1}$, donde F_{n+1} es el $(n + 1)$ -ésimo número de Fibonacci.

Demostración. Debido a que $t_n^k = \binom{n+k-1}{k}$ y por el corolario 3.2.6, se tiene que

$$m(L_n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1-2i+i-1}{i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i}.$$

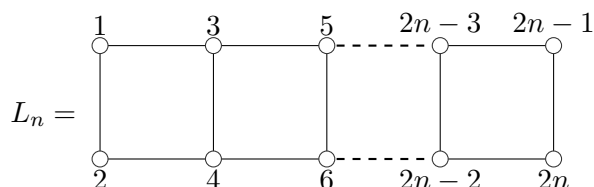
De lo anterior, y gracias a [15, Teorema 12.4], se concluye lo que se quería mostrar. □

3.2.2. Relación con las triangulaciones

La siguiente relación entre los emparejamientos perfectos y las triangulaciones, es en realidad un conjunto de relaciones entre distintos objetos combinatorios. La primera relación se establece se hace entre los emparejamientos perfectos y las Tablas de Young. La segunda es entre las Tablas de Young y, los caminos de Dyck y su partición. Para finalizar, se tiene una relación entre una partición y una triangulación.

Emparejamientos perfectos y Tablas de Young

Inicialmente se etiquetan los vértices del grafo de la siguiente forma



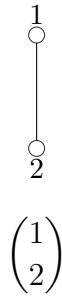
Luego, se escoge un emparejamiento perfecto de L_n y se define el bloque $\begin{pmatrix} e_i \\ e_{n+i} \end{pmatrix}$, si la arista del vértice e_i al vértice e_{n+i} está en el emparejamiento escogido y $e_i < e_{n+i}$. Por la forma de L_n , se van a tener siempre n bloques,

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} & e_n \\ e_{n+1} & e_{n+2} & \cdots & e_{2n-1} & e_{2n} \end{pmatrix}$$

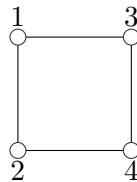
los cuales se organizarán de manera que $e_i < e_{i+1}$, para $i \in [n-1]$.

Definición 3.2.11 ([22]). Una **Tabla de Young estándar de tamaño (n, n)** (abreviada SYT), es un arreglo de números de tamaño $2 \times n$, en donde están organizados los números del conjunto $\{1, \dots, 2n\}$ de tal manera que, cada número aparece exactamente una vez y los números de cada fila y columna se encuentran de manera creciente.

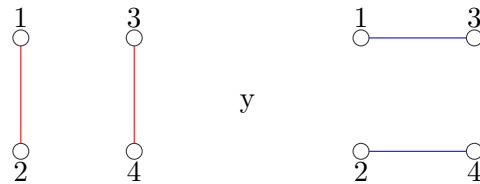
Ejemplo 3.2.12. Para L_1 se tiene un único emparejamiento perfecto y, por lo tanto, una única Tabla de Young estándar de tamaño $(1, 1)$



Ejemplo 3.2.13. Para L_2 se tiene el siguiente etiquetamiento,



Adicionalmente, L_2 tiene dos emparejamientos perfectos:



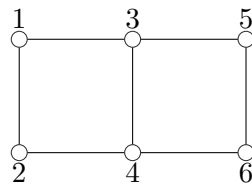
Para el primero, cuyas aristas son rojas, se tiene la siguiente SYT de tamaño $(2, 2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

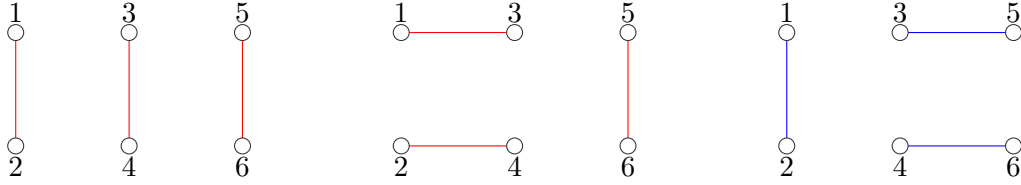
y para el otro, con aristas azules, se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.2.14. Para L_3 se tiene,



L_3 cuenta con 3 emparejamientos perfectos:



Para los que se tiene las siguientes SYT de tamaño $(3, 3)$, respectivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.2.15. *Cada emparejamiento perfecto de L_n tiene asociada una Tabla de Young estándar de tamaño (n, n) .*

Demostración. (**Inducción fuerte sobre n**) Supongamos que cada emparejamiento perfecto de L_n tiene asociada una Tabla de Young, para $n \in [k - 1]$, y veamos que se cumple para $n = k$. Se pueden tener dos casos

- **Caso 1.** Supongamos que el emparejamiento perfecto P , tiene la arista comprendida entre los vértices $2k - 1$ y $2k$. En este caso, las otras $k - 1$ aristas restantes forman un emparejamiento perfecto para L_{k-1} , por lo tanto se tiene la siguiente tabla

$$Y(P) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} & 2k - 1 \\ e_k & e_{k+1} & \cdots & e_{2k-2} & 2k \end{pmatrix}$$

en donde, por hipótesis de inducción, se tiene que $e_i < e_j$, $e_{k-1+i} < e_{k-1+j}$ y $e_i < e_{k+i}$, para todo $1 \leq i < j \leq k - 1$. Además, $e_t < 2k - 1 < 2k$, para todo $t \in [2k - 2]$, por lo tanto $Y(P)$ es una Tabla de Young.

- **Caso 2.** Supongamos ahora que el emparejamiento perfecto P , tiene la arista comprendida entre los vértices $2k - 2$ y $2k$ y por tanto, también tiene la arista que va del vértice $2k - 1$ y $2k - 3$. En este caso, las $k - 2$ aristas restantes forman un emparejamiento perfecto para L_{k-2} , por lo tanto se tiene la siguiente tabla

$$Y(P) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-2} & 2k - 3 & 2k - 1 \\ e_{k-1} & e_k & \cdots & e_{2k-4} & 2k - 2 & 2k \end{pmatrix}$$

por un argumento similar al caso anterior se concluye que $Y(P)$ es una Tabla de Young.

□

Nota 3.2.16. En la demostración anterior queda implícito que el número de emparejamientos perfectos en el grafo escalera L_n satisface la siguiente relación de recurrencia

$$m(L_n) = m(L_{n-1}) + m(L_{n-2}), \quad \text{donde } m(L_1) = 1 \quad \text{y} \quad m(L_2) = 2,$$

que no es más que la relación de recurrencia para la sucesión de los números de Fibonacci.

Tablas de Young, caminos de Dyck y particiones

Para la siguiente relación se define el siguiente vector $(f(1), f(2), \dots, f(2n))$, donde

$$f(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{si } n+1 \leq i \leq 2n \end{cases}$$

esto no es más que colocar un 1 en la posición k -ésima si el número $k \in [2n]$ está en la fila superior de la tabla, o se coloca 0 si este se encuentra en la fila inferior. Teniendo en cuenta lo anterior, se construye el camino de Dyck asociado a la Tabla de Young, colocando en el i -ésimo paso: Norte si $f(i) = 1$ y Este si $f(i) = 0$.

A su vez, a cada camino de Dyck se le puede asociar una partición de una manera muy natural, la cual consiste en observar el diagrama de Young (Ferrers) que se forma arriba del camino después del primer paso Norte.

Ejemplo 3.2.17. En L_1 se tiene

$$(f(1), f(2)) = (1, 0)$$

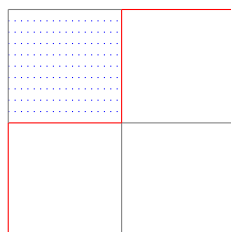
lo cual equivale a dar un paso al Norte y luego uno al Este.



Ejemplo 3.2.18. Para L_2 se obtuvieron dos Tablas de Young estándar $(2, 2)$. Para la primera,

$$(f(1), f(2), f(3), f(4)) = (1, 0, 1, 0)$$

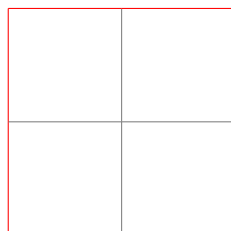
lo cual es



De donde se obtiene el vector partición (1) . Para la segunda,

$$(f(1), f(2), f(3), f(4)) = (1, 1, 0, 0)$$

lo cual equivale a dar dos pasos al Norte y dos al Este.

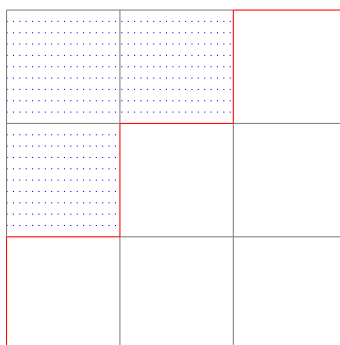


En este caso se obtiene la partición (0) .

Ejemplo 3.2.19. Ahora, para L_3 hay tres Tablas de Young estándar $(3, 3)$. Para la primera,

$$(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)) = (1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

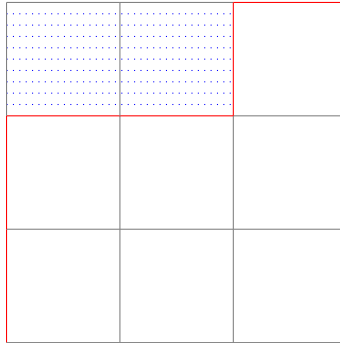
de donde se tiene el siguiente camino de Dyck



y la partición $(2, 1)$. Para la segunda,

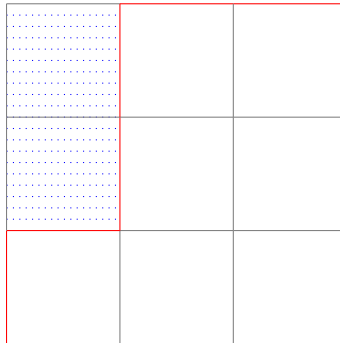
$$(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)) = (1, 1, 0, 0, 1, 0),$$

lo cual equivale a la partición $(2, 0)$



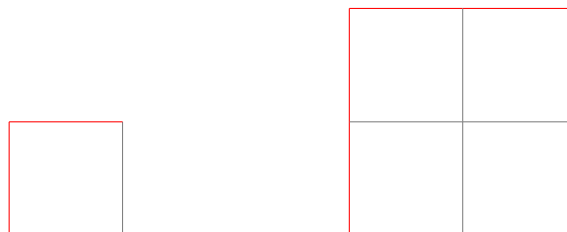
y, para la tercera y última,

$$(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)) = (1, 0, 1, 1, 0, 0),$$



que no es más que la partición $(1, 1)$.

Teorema 3.2.20. *Los caminos de Dyck obtenidos de los emparejamientos perfectos del grafo escalera L_n son los construidos a partir de la concatenación de caminos de la forma*



Nota 3.2.21. Cabe resaltar que, la manera recursiva de ver los emparejamientos perfectos induce una recursividad en los vectores partición obtenidos. El caso 1 de la proposición 3.2.15, correspondiente a los emparejamientos perfectos de L_n que contienen a la arista con vértices $2n - 1$ y $2n$, dan lugar a vectores de la forma

$$(n - 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}),$$

donde $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$ es un vector partición de L_{n-1} . Por otra parte, los emparejamientos del caso 2 generan vectores

$$(n - 2, n - 2, \lambda'_1, \dots, \lambda'_{n-3}),$$

donde $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{n-3})$ es un vector partición de L_{n-2} .

Particiones y triangulaciones

Sea $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ el vector partición asociado a un emparejamiento perfecto de L_n tal que $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, para $i \in [n - 2]$. Por cada componente se va a escoger una diagonal en un polígono, esto implica que, al tener $n - 1$ componentes, el polígono generado será P_{n+2} . Los vértices de dicho polígono se van a etiquetar con los números del 0 al $n + 1$ en orden contrario a las manecillas del reloj.

La manera de construir la triangulación sigue la misma línea trabajada hasta el momento, en el sentido que también está dividida en dos casos y se hace de manera recursiva. Como se vio en la nota 3.2.21, los vectores partición asociados a un emparejamiento perfecto de L_n solo pueden empezar de dos maneras diferentes.

- **Caso 1.** En caso de tener el vector

$$(n - 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}),$$

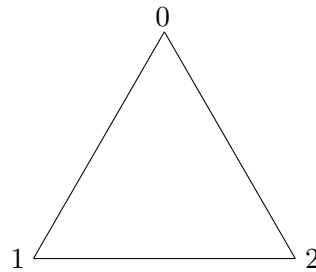
donde $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$ es un vector partición de L_{n-1} , entonces en el polígono se dibuja la diagonal que va del vértice $n - 1$ hasta $n + 1$. De esta manera, el polígono P_{n+2} queda dividido en dos polígonos: el primero es P_3 , formado por los vértices $n - 1$, n y $n + 1$, y el otro es P_{n+1} , cuyos vértices son los vértices de P_{n+2} quitando el vértice n . Para P_{n+1} se usa la triangulación que resulta de las $n - 2$ coordenadas restantes del vector inicial.

- **Caso 2.** Si por el contrario, se tiene el vector

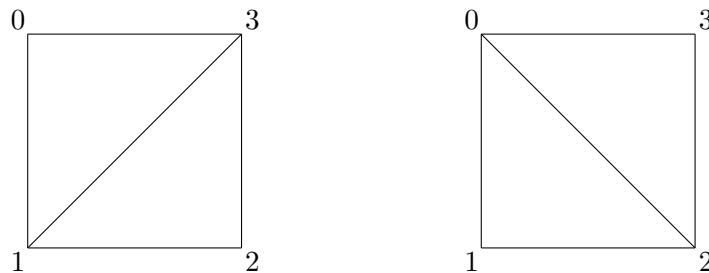
$$(n - 2, n - 2, \lambda'_1, \dots, \lambda'_{n-3}),$$

donde $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{n-2})$ es un vector partición de L_{n-2} , entonces se dibujan dos diagonales, una que va del vértice $n - 2$ al vértice n , y la otra que va del vértice $n - 2$ al vértice $n + 1$. En este caso, se obtiene un polígono P_n el cual será triangulado por las $n - 3$ coordenadas restantes.

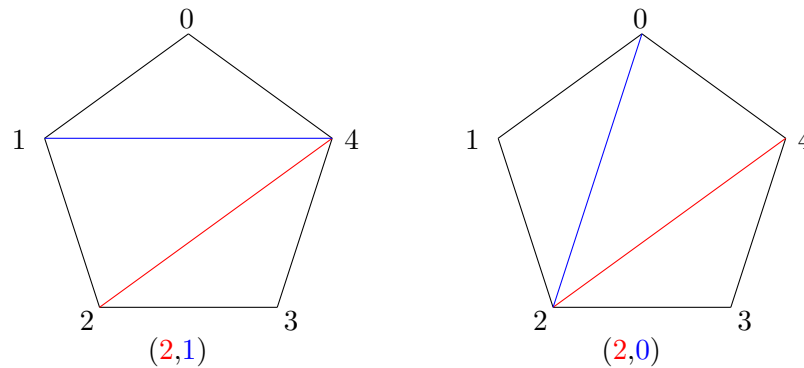
Ejemplo 3.2.22. L_1 tiene un polígono con 0 diagonales, así se tiene



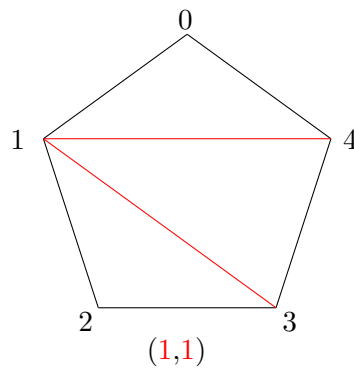
Ejemplo 3.2.23. En L_2 se tienen los vectores (1) y (0), entonces el polígono asociado es P_4 , y las triangulaciones resultantes son



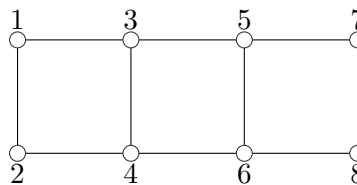
Ejemplo 3.2.24. El polígono asociado a L_3 es P_5 , y se tienen las particiones $(2, 1)$, $(2, 0)$ y $(1, 1)$. Para las dos primeras particiones, se tiene el caso 1, es decir, se une primero el vértice 2 con el vértice 4, y en el polígono restante P_4 , se usa las triangulaciones vistas en el ejemplo 3.2.23 para L_2 . Así, las triangulaciones resultantes son



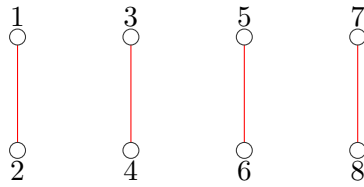
Ahora, para la otra partición se tiene el caso 2, entonces se une el vértice 1 con el 3, y el vértice 1 con el 4. Y en el polígono resultante, en este caso P_3 , se triangula como en el ejemplo 3.2.22



Ejemplo 3.2.25. Explicado ya cada uno de los pasos para relacionar un emparejamiento perfecto y una triangulación, veamos ahora el procedimiento de manera completa para L_4 : Dado el siguiente etiquetamiento



se tienen los siguientes 5 emparejamientos perfectos:



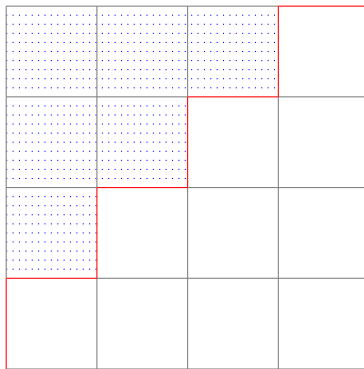
↓

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

↓

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

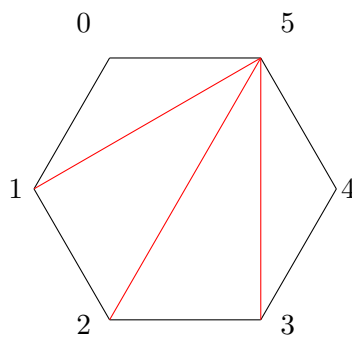
↓

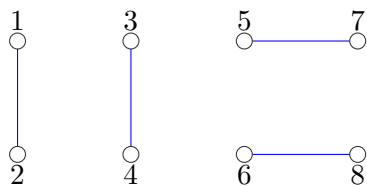


↓

$$(3, 2, 1)$$

↓

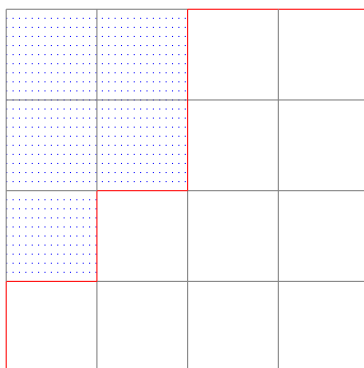




↓

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

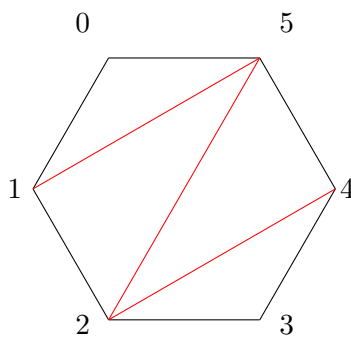
↓

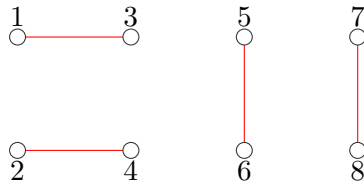


↓

$$(2, 2, 1)$$

↓

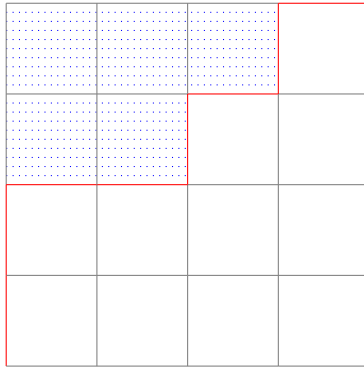




↓

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

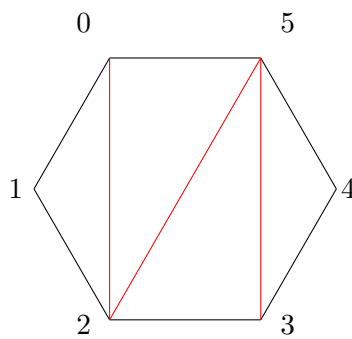
↓



↓

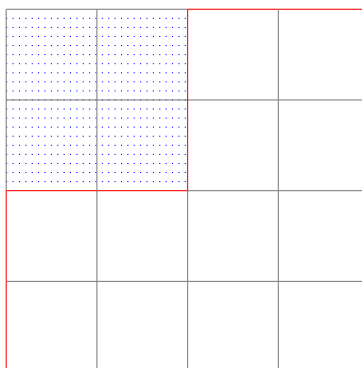
$$(3, 2, 0)$$

↓

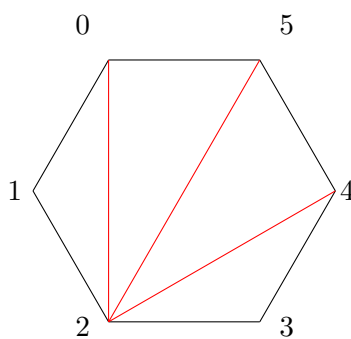


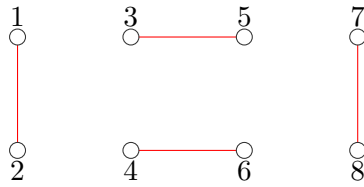
 \Downarrow

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

 \Downarrow  \Downarrow

$$(2, 2, 0)$$

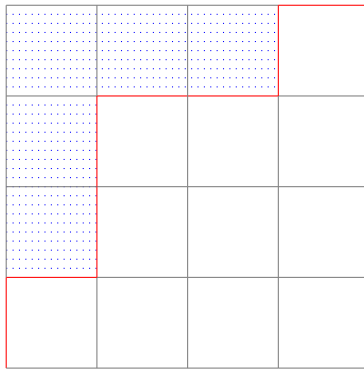
 \Downarrow 



↓

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

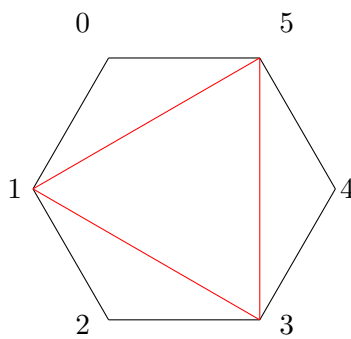
↓



↓

$$(3, 1, 1)$$

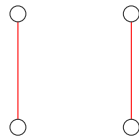
↓



Relación entre las particiones asociadas a emparejamientos perfectos de escaleras y el Triángulo de Pascal

Anteriormente, se vio una manera de asociar particiones a emparejamientos perfectos por medio de los caminos de Dyck subyacentes a estos. Si bien es interesante el uso que se dio a estas particiones para encontrar una triangulación asociada, también lo es el estudio de las características de las particiones que están resultando.

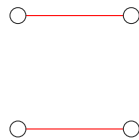
De los ejemplos trabajados anteriormente se puede observar que, un fragmento de un emparejamiento perfecto dispuesto de la siguiente manera



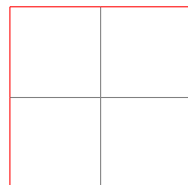
da a lugar a un fragmento de camino de Dyck de la forma



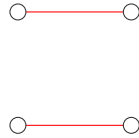
Por otra parte, a un fragmento



se asocia



Lo anterior implica que, la suma de las componentes de los vectores partición define el mismo número si, los emparejamientos de los que provienen tienen la misma cantidad de teselas de la forma



y debido a la asignación dada anteriormente en la definición 3.2.1 para definir los vectores binarios asociados al emparejamiento perfecto, se tiene que hay una relación entre el número de particiones de un número con ciertas características, y un número triangular n -dimensional, y por ende, con el triángulo de Pascal. Además, los números resultantes de la partición, también están en relación con los números triangulares.

Teorema 3.2.26. *El vector partición $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ asociado a un emparejamiento perfecto m de L_n , corresponde al número t_{n-1-k} , donde $k = \sum_{i=1}^{n-1} p_i$, para p_i la i -ésima componente del vector binario asociado a m .*

Corolario 3.2.27. *El número de particiones de t_{n-1-k} , con a lo más $n-1$ partes menores o iguales a $n-1$, es t_{n+1-2k}^k .*

Demostración. Por la proposición 3.2.5, el número de vectores binarios con k uno's es t_{n+1-2k}^k , lo cual corresponde al número de particiones de t_{n-1-k} , con un máximo de $n-1$ partes menores o iguales a $n-1$. \square

3.2.3. Determinante de una familia de matrices

Anteriormente se vio una manera encontrar el determinante de Catalán por medio del lema de Lindstrom-Gessel-Viennot. En esta oportunidad, se quiere calcular el determinante de la siguiente familia de matrices

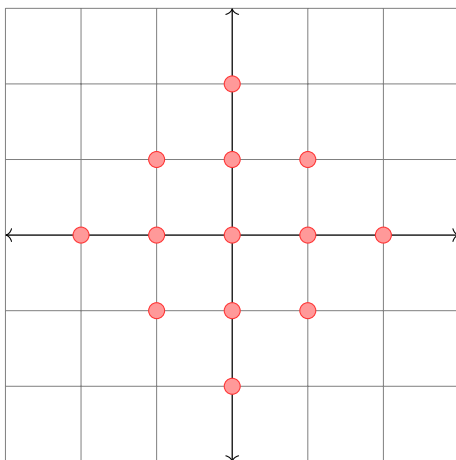
$$M_n = \begin{pmatrix} C_0 + C_1 & C_1 + C_2 & \cdots & C_{n-1} + C_n \\ C_1 + C_2 & C_2 + C_3 & \cdots & C_n + C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} + C_n & C_n + C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} + C_{2n-1} \end{pmatrix}$$

Para ello, se hará uso de una familia de regiones planas definida en [5].

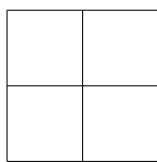
Diamantes Azteca y caminos de Schröder

Definición 3.2.28. El diamante Azteca $Az(n)$, se define como la unión de todos los cuadrados unitarios cuyas esquinas tienen coordenadas enteras (x, y) que satisfacen $|x| + |y| \leq n + 1$. Un dominó es un rectángulo de tamaño 1 por 2 o 2 por 1 con esquinas con coordenadas enteras. Un mosaico de dominó de una región R , es un conjunto de dominós no superpuestos cuya unión es R .

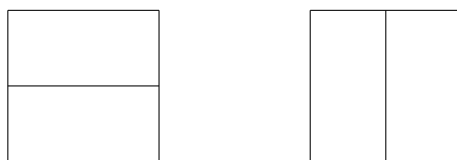
Ejemplo 3.2.29. El conjunto de coordenadas enteras (x, y) tales que $|x| + |y| \leq 2$ es



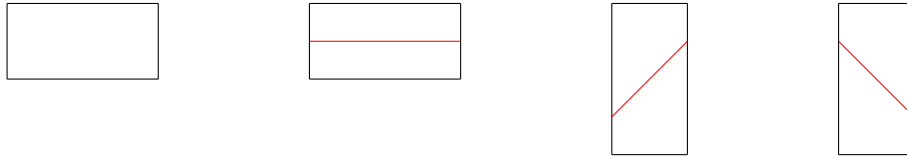
Por lo tanto, $Az(1)$ es



y los mosaicos de dominó de $Az(1)$ son

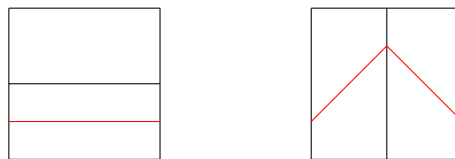


Para asociar estos diamantes con los caminos de Schröder definidos en el ejemplo 2.1.9, se toman los siguientes dominós



Así, dado un mosaico de dominios $Az(n)$, se va colocando alguno de los 4 dominós escogidos de tal manera que resulten recorridos que comienzan en el borde suroeste del diamante, y sigan una línea recta que sale en el lado sureste, a la misma altura donde comenzó. En [6] se muestra de hecho que esta correspondencia es una biyección.

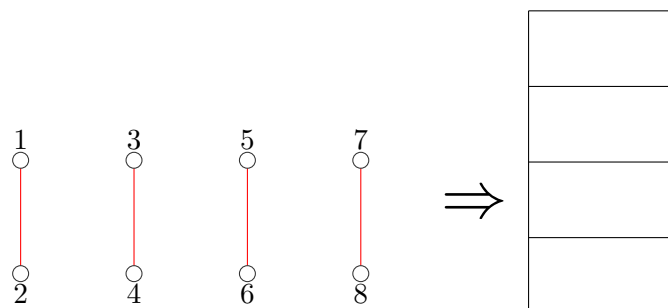
Ejemplo 3.2.30. Para $Az(1)$ se tienen 2 rutas

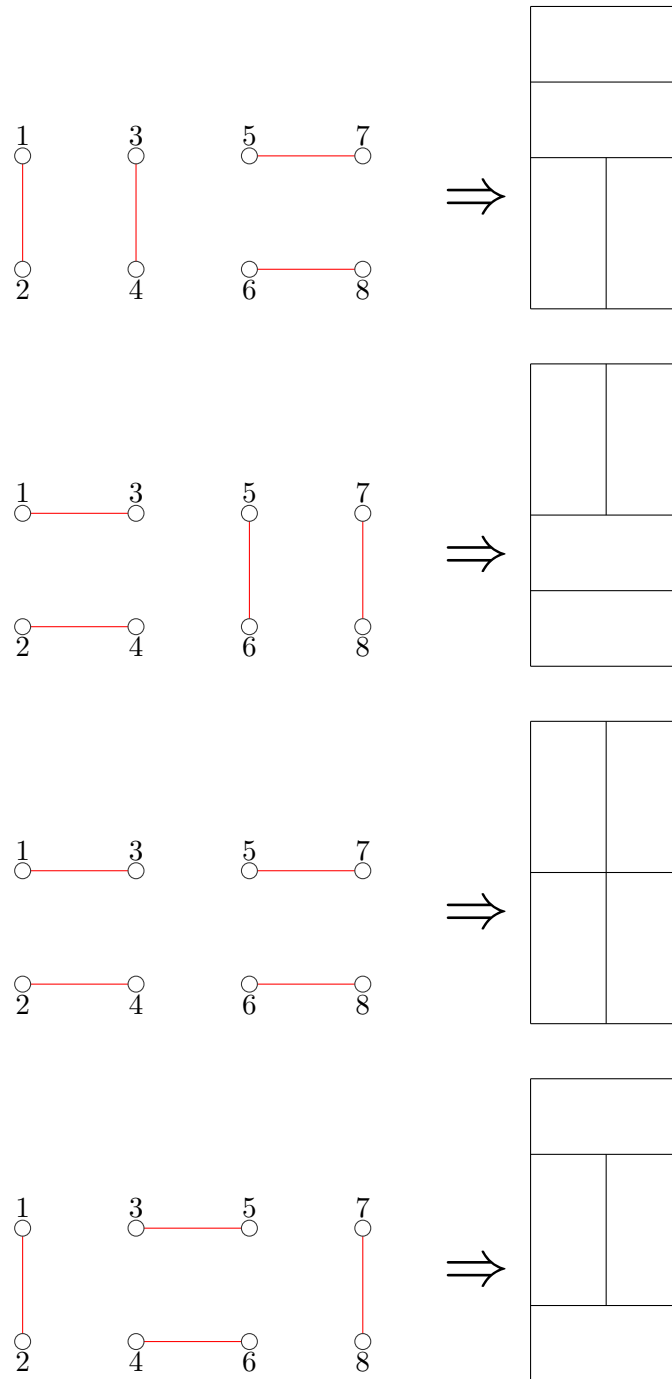


Diamantes Aztecas y emparejamientos perfectos en grafos escalera

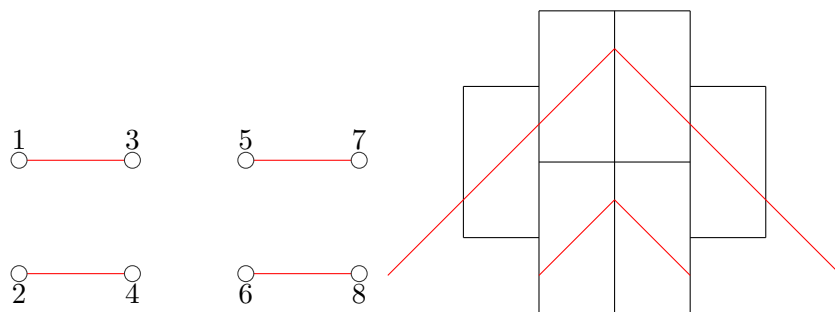
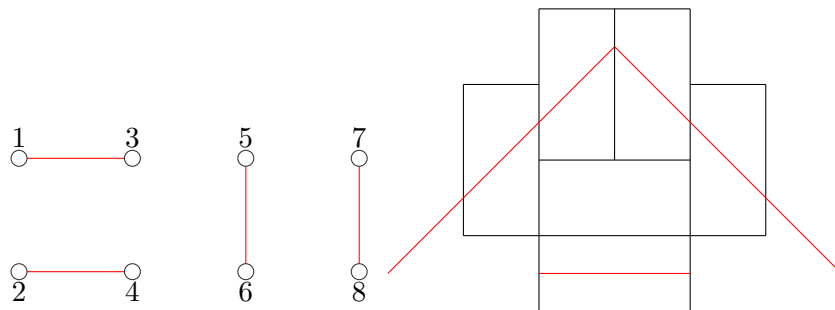
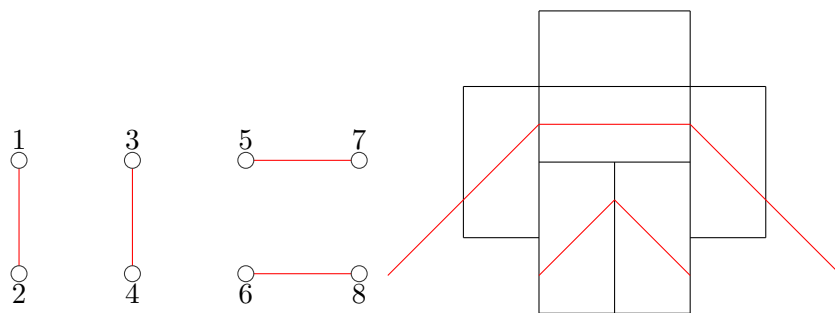
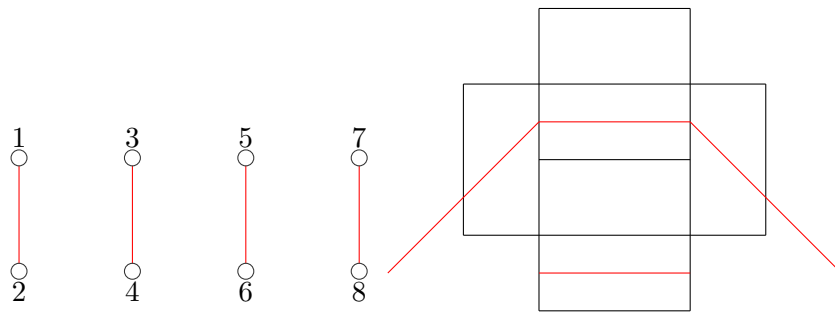
A continuación, se va a definir una correspondencia entre los emparejamientos perfectos de un grafo escalera y un subconjunto de los Diamantes Aztecas. Esta relación y el lema 2.1.15, permitirán encontrar el número de rutas que hay en un grafo dirigido muy específico. Antes de enunciar el teorema asociado al hecho anterior, veamos un ejemplo de cómo se está manejando la correspondencia.

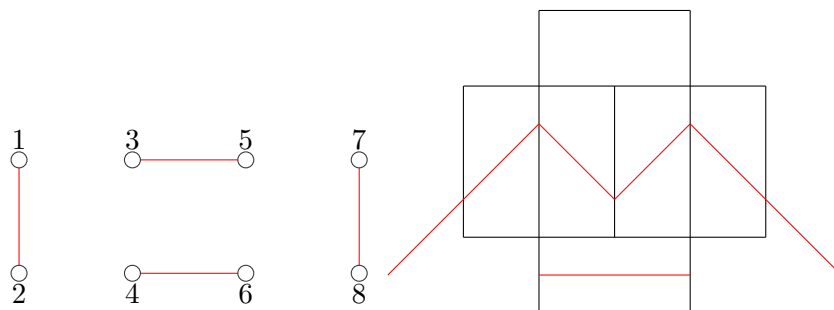
Ejemplo 3.2.31. Para L_4 se tiene



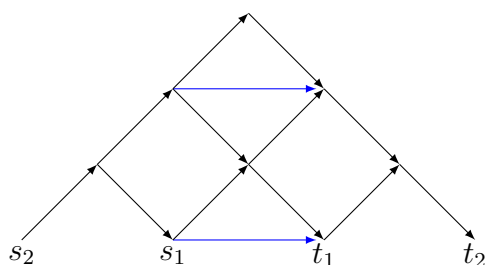


Por lo tanto, agregando un dominó vertical a cada lado de los mosaicos anteriores y dibujando el camino correspondiente se tiene que





Por lo tanto, se construye el siguiente grafo dirigido acíclico superponiendo todas y cada una de las rutas obtenidas anteriormente



Se hace la distinción de colores en la superposición pues se va a agrupar el conteo de estas, dependiendo de si algún camino hace uso de las aristas azules o no. Si se quiere ver los caminos del vértice s_i al vértice t_j , entonces se puede ver que la cantidad de caminos que hacen uso de una arista azul es C_{i+j-2} , y la cantidad de caminos que no hacen uso de esas aristas azules es C_{i+j-1} . Por lo tanto, la matriz de rutas es

$$M_2 = \begin{pmatrix} C_0 + C_1 & C_1 + C_2 \\ C_1 + C_2 & C_2 + C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

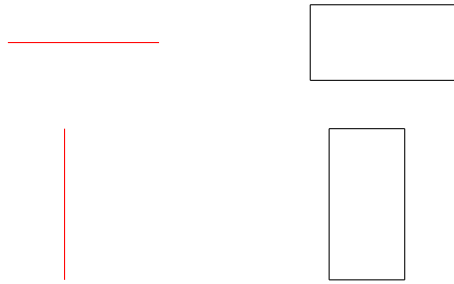
donde fácilmente se puede corroborar que $\det(M_2) = 5$.

La correspondencia mostrada anteriormente viene dada de manera muy natural y se describe a continuación mediante el siguiente algoritmo

De esta manera, para un grafo escalera L_n , se obtiene un mosaico rectangular de tamaño $n \times 2$, el cual se puede asociar con un Diamante Azteca al agregar una serie de dominós verticales a los lados.

Algoritmo 3.2.32 (Diamantes Aztecas provenientes de un grafo escalera). *Dado un grafo escalera L_n , se construye un Diamante Azteca $Az(n-1)$ de la siguiente manera:*

1. *Primero, se construye un mosaico rectangular de tamaño $2 \times n$, de manera que por cada arista del emparejamiento se tenga un dominó asociado, esto es, a una arista vertical del emparejamiento perfecto escogido se le asocia un dominó vertical, y a una arista horizontal del emparejamiento perfecto se le asigna un dominó horizontal.*



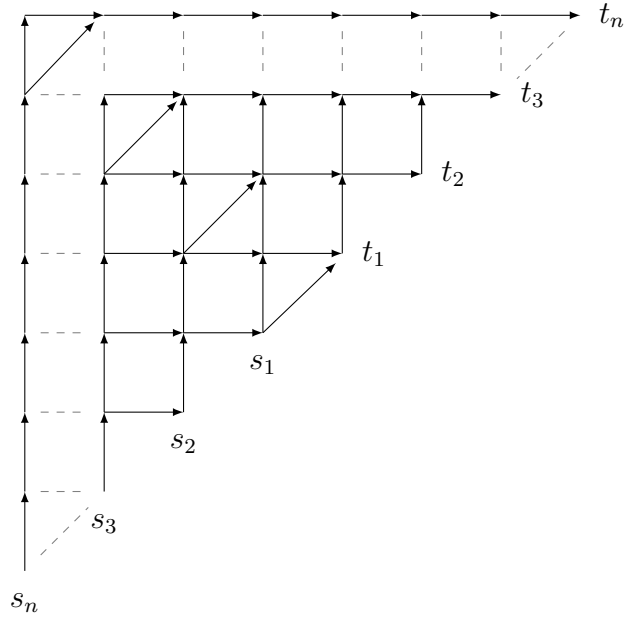
2. *Al mosaico obtenido anteriormente, se le realiza una rotación de 90° en el sentido de las manecillas del reloj. Esta rotación tiene como único fin poder dibujar los caminos de Schröder tal cual como se definieron en el ejemplo 2.1.9, esto permitirá posteriormente realizar la asociación de manera más clara al tener un mosaico de tamaño $n \times 2$.*
3. *Por último, se completa el mosaico con dominós verticales, teniendo en cuenta que debe cumplirse la condición de la definición 3.2.28.*

Teorema 3.2.33. *Si C_n es el n -ésimo número de Catalán, y F_n es el n -ésimo número de Fibonacci, entonces se tiene la siguiente relación*

$$\begin{vmatrix} C_0 + C_1 & C_1 + C_2 & \cdots & C_{n-1} + C_n \\ C_1 + C_2 & C_2 + C_3 & \cdots & C_n + C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} + C_n & C_n + C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} + C_{2n-1} \end{vmatrix} = F_{2n+1}.$$

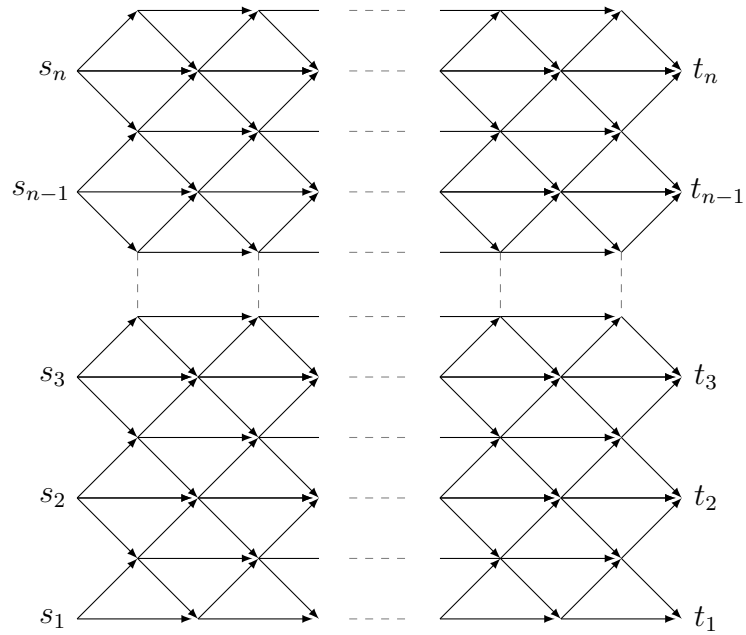
Demostración. La idea de la demostración es encontrar un grafo adecuado que permita hacer uso del lema 2.1.15, para que el determinante pedido sea igual al número de rutas en dicho grafo. Se puede observar que cada componente de la

matriz cuenta el número de caminos reticulares en \mathbb{Z}_2 que comienzan en $(0, 0)$ y finalizan en $(2n, 0)$, junto a la cantidad de caminos reticulares que comienzan en $(0, 0)$ y finalizan en $(2n + 2, 0)$, así, para que de un vértice s_i hasta un vértice t_j hayan $C_{i+j-2} + C_{i+j-1}$ caminos se considera el siguiente grafo:



Por lo tanto, el cálculo del determinante pedido es equivalente al número de rutas en el grafo definido anteriormente. Debido a que estas rutas están en correspondencia con los Diamantes Aztecas definidos en 3.2.32, y estos a su vez, están asociados a los emparejamientos perfectos, entonces el resultado se concluye por la proposición 3.2.10. \square

Para finalizar este trabajo, se quiere dejar el siguiente problema planteado: debido a que para un grafo cuadrícula se puede hacer una asociación similar a la vista en el algoritmo 3.2.32, la idea es buscar una fórmula cerrada para la cantidad de emparejamientos perfectos en este tipo de grafos usando el lema 2.1.15. Se pudo observar que para los grafos cuadrícula $G_{n,n}$ de tamaño $n \times n$, bastaría con contar el número de rutas de un grafo del siguiente estilo



En un trabajo futuro se explicaría a detalle la obtención de este grafo a partir de un mosaico relacionado a los emparejamientos perfectos, y además, se intentará calcular el número de rutas.

4 Conclusiones y recomendaciones

4.1. Conclusiones

Personalmente, creo que una de las conclusiones más importantes de este trabajo es el hecho de que las distintas áreas de la matemática no están tan separadas como muchas personas lo piensan. Es muy agradable encontrar un tema de la matemática como lo es las álgebras de conglomerado, pues en su estudio se puede encontrar diversidad de herramientas del álgebra, de la combinatoria, de la geometría, de la teoría de números, entre otras.

También se puede observar lo rica que es la teoría de álgebras de conglomerado, pues para ser un área relativamente nueva, se encuentra una gran variedad de artículos de diversos autores y haciendo uso de distintas herramientas. Además, su desarrollo y estudio tiene una gran importancia no solo para los investigadores en matemáticas, sino también para personas en otras áreas, al contar con diversas aplicaciones.

Por otra parte, muchos consideran que el conteo es simplemente un juego divertido en donde se ponen en biyección diferentes objetos de la matemática, en el cual, después de encontrar la fórmula general no hay mucho más por hacer, lo cual es una visión algo superficial de los alcances de la combinatoria. Creo que la combinatoria va mucho más allá de encontrar fórmulas cerradas, pues por ejemplo, en este trabajo se ve la importancia del conteo de los emparejamientos perfectos con respecto a las variables de conglomerado de un álgebra dada, y sus relaciones intermedias con fracciones continuas y grafos serpiente. En general, la combinatoria es un área que nos permite tener otra perspectiva de problemas en otras áreas de la matemática.

Adicionalmente, la forma natural como se relacionan muchos de los conceptos y objetos aquí mostrados es realmente majestuoso, pues a pesar de que

el lenguaje matemático usado en algunas ocasiones no esté al alcance de personas que no estudian matemáticas, seguramente la parte gráfica y las ideas originales mostradas sin uso de tanto formalismo pueden ser entendidas por cualquier curioso que intente ver la forma en que ocurren los patrones y relaciones.

En cuanto al conteo de emparejamientos perfectos, se evidencia la gran dificultad de esta tarea para grafos en general, aún así, para algunas familias es posible realizar estos conteos de manera sencilla y novedosa, como por ejemplo en los grafos serpiente, en donde se hizo uso del algoritmo de la división.

4.2. Recomendaciones - Trabajo futuro

En primer instancia, en este trabajo solamente se estudiaron las álgebras de conglomerado de dimensión finita del tipo \mathbb{A}_n , cuyas mutaciones están asociadas a las triangulaciones de polígonos regulares de dos dimensiones. Por lo anterior, el estudio se redujo a un estudio combinatorio de unas álgebras de conglomerado en específico.

Por esta razón, y debido a que toda superficie compacta admite una triangulación y se puede asociar un grupo de álgebras a cualquier superficie con frontera y puntos marcados, un trabajo a realizar será involucrar no solo el aspecto combinatorio sino también geométrico para estudiar otro tipo de álgebras, como por ejemplo, las álgebras de tipo \mathbb{D}_n .

Adicionalmente, se hará uso de la relación encontrada entre Diamantes Aztecas y emparejamientos perfectos para intentar encontrar una fórmula cerrada para el número de emparejamientos perfectos de un grafo cuadrícula. Creo que es muy valioso ver como las relaciones en matemáticas se pueden usar de manera bidireccional. Esto lo menciono en relación al ejemplo 2.1.16, al teorema 3.2.33 y a este trabajo futuro, debido a que, en el ejemplo y el teorema se observa que, encontrando el número de rutas en un grafo se puede calcular cierto determinante, pero en el caso de los grafos cuadrícula, lo que se quiere intentar es calcular el número de a partir del determinante de un grupo de matrices en especial.

Por otra parte, la manera de encontrar sucesiones y ecuaciones diofánticas a partir de un álgebra de conglomerado es un poco rudimentaria, así que, un trabajo

interesante a realizar es encontrar de una manera más mecánica carcajes que sean isomorfos a su primera mutación con respecto a algún vértice. Otro, sería encontrar un método que permita encontrar invariantes a partir de la relación de cambio.

Bibliografía

- [1] F. Ardila, *Algebraic and Geometric Methods in Enumerative Combinatorics*. Boca Raton, CRC Press: Handbook of enumerative combinatorics, 09 2015.
- [2] I. Assem, D. Simson, and A. Skowróski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Vol. 1: Techniques of Representation Theory*. Cambridge University Press, Cambridge: London Mathematical Society Student Texts, 02 2006.
- [3] I. Assem and S. Trepode, *Homological Methods, Representation Theory, and Cluster Algebras*. Springer International Publishing, 04 2018.
- [4] P. Caldero, F. Chapoton, and R. Schiffler, “Quivers with relations arising from clusters (\mathbb{A}_n case),” *Transactions of the A.M.S.*, vol. 154, 01 2006.
- [5] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, and J. Propp, “Alternating sign matrices and domino tilings,” *arXiv Mathematics e-prints*, 06 1991.
- [6] S.-P. Eu and T.-S. Fu, “A simple proof of the aztec diamond theorem,” *Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 12, 01 2005.
- [7] S. Fomin and N. Reading, “Root systems and generalized associahedra,” *arXiv Mathematics e-prints*, 10 2005.
- [8] S. Fomin, M. Shapiro, and D. Thurston, “Cluster algebras and triangulated surfaces. part i: Cluster complexes,” *arXiv Mathematics e-prints*, 08 2006.
- [9] S. Fomin, L. Williams, and A. Zelevinsky, “Introduction to cluster algebras. chapters 1-3,” *arXiv Mathematics e-prints*, 2017.
- [10] S. Fomin and A. Zelevinsky, “Cluster algebras i: Foundations,” *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 15, 05 2001.

-
- [11] —, “Cluster algebras ii: Finite type classification,” *Inventiones mathematicae*, vol. 154, 01 2003.
- [12] I. Gessel and X. Viennot, “Determinants, paths, and plane partitions,” *De Mathematiques, Departement*, 09 2000.
- [13] P. W. Kasteleyn, “The statistics of dimers on a lattice i. the number of dimer arrangements on a quadratic lattice,” *Physica*, vol. 27, p. 1209–1225, 1961.
- [14] B. Keller, “Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories,” *arXiv Mathematics e-prints*, 07 2008.
- [15] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. New York: Pure and applied mathematics: a Wiley-Interscience series of texts, monographs, and tract, 2001.
- [16] P. Lampe, *Cluster Algebras*. United Kingdom: Department of Mathematical Sciences, Durham University, 2013.
- [17] L. Lovász and M. D. Plummer, *Matching Theory*. Rutgers University, New Brunswick, NJ, U.S.A: North-Holland Mathematics Studies, 1986.
- [18] J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press: Springer International Publishing, 2009.
- [19] R. Schiffler, “A geometric model for cluster categories of type \mathbb{D}_n ,” *arXiv Mathematics e-prints*, 08 2008.
- [20] —, *Quiver Representations*. Canadian Mathematical Society-Department of Mathematics University of Connecticut, CMS Books in Mathematics, Springer International Publishing, 2014.
- [21] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume 2*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 62, Cambridge University Press: Cambridge, 1999.
- [22] —, *Enumerative Combinatorics, Volume 1*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press: Cambridge, 2012.

- [23] —, *Catalan Numbers*. Cambridge University Press, 2015.
- [24] L. Vermani, *An Elementary Approach to Homological Algebra*. Chapman & Hall/CRC, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 2003.
- [25] I. Çanakçı and R. Schiffler, “Snake graph calculus and cluster algebras from surfaces,” *arXiv e-prints*, vol. 154, 09 2012.
- [26] —, “Cluster algebras and continued fractions,” *arXiv e-prints*, 08 2016.