



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sobre el buen planteamiento y continuación única para la ecuación $rBOG$

Adriana Leguizamón Mora

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2020



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sobre el buen planteamiento y continuación única para la ecuación $rBOG$

Adriana Leguizamón Mora

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
(Ph.D.) Guillermo Rodríguez Blanco

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias , Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2020

Dedicado a mi madre Yasmyn Mora y a mis hermanos Nathalia, Paula, Sofía y Julian.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia ya que ellos siempre han impulsado mi crecimiento profesional, y gracias a sus palabras y ejemplos, han motivado este paso en mi vida. Mi madre Yasmyn, mis hermanos Nathalia, Paula, Sofía y Julian.

A Carlos Alvarado ya que gracias a el pude encontrar esa fuerza, amor y con quien puedo ser yo, brindandome tranquilidad emocional y un apoyo incondicional.

A mis amigos de lucha, quienes conocieron este proceso el cual se cruzo con una transfiguración sentimental y amarga, a Angela y Marthica, quienes me han dado ejemplo de que si podemos salir adelante ante cualquier obstáculo.

A quienes en el camino se preocuparon por mi en este proceso como mi papá Angel y mis grandes amigos: July, Geidy, Tannia, Alejo, Mauri y María y su familia. Muy feliz con el apoyo de familiares muy especiales T Jairo, Jorgito y Ricardito.

A mis trabajos por que sin ellos no sabría como hubiera sido mi vida en Bogotá.

Resumen

En este trabajo establecemos el buen planteamiento en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ y en los espacios de Sobolev con pesos $\mathfrak{S}_{s,r}$ del problema de Cauchy asociado a la ecuación r-BOg

$$\begin{cases} u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})) \\ u_t + \partial_x u + D^{1+\alpha} u_t + u^{p-1} \partial_x u = 0 \\ u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases}$$

donde $p = 2, 3, 4, \dots$ y $D^{1+\alpha}$ es el operador definido vía la transformada de Fourier

$$\widehat{D^{1+\alpha}}(\xi) := |\xi|^{1+\alpha} \widehat{f}(\xi)$$

para $\xi \in \mathbb{R}$ y $|\cdot|$ la función valor absoluto. También, estableceremos resultados sobre la continuación única, para esta ecuación. [Iório et al., 2001]

Palabras clave: Problema de Cauchy, Ecuación r-BOg, Buen planteamiento local y global.

Abstract

In this work we establish the well-posedness in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$ and in the Sobolev spaces with weights $\mathfrak{S}_{s,r}$ of the Cauchy problem associated to the r-BOg equation

$$\begin{cases} u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})) \\ u_t + \partial_x u + D^{1+\alpha} u_t + u^{p-1} \partial_x u = 0 \\ u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases}$$

where $p = 2, 3, 4, \dots$ and the operator $D^{1+\alpha}$ is defined by means of the Fourier transform for

$$\widehat{D^{1+\alpha}}(\xi) := |\xi|^{1+\alpha} \widehat{f}(\xi)$$

$\xi \in \mathbb{R}$ and $|\cdot|$ absolute value function. Also, we establish results over unique continuation, for this equation.

Keywords: Cauchy problem, r-BOg equation, Local and global well-posedness.

Contenido

| | |
|---|------------|
| Agradecimientos | vii |
| Resumen | ix |
| 1 Introducción | 3 |
| 2 Preliminares | 5 |
| 2.1 Transformada de Fourier | 5 |
| 2.2 Buen Planteamiento | 6 |
| 2.3 Espacios de Sobolev | 7 |
| 3 El Problema Local y Global | 11 |
| 3.2 Existencia | 14 |
| 3.3 Unicidad | 16 |
| 3.4 Dependencia Continua | 16 |
| 3.5 Buen planteamiento local para $s \geq 0$ y $\alpha > \frac{1}{2}$ | 17 |
| 3.6 El Problema Global | 18 |
| 4 Teoría en espacios de Sobolev con pesos | 23 |
| 4.1 Buen planteamiento | 23 |
| 4.2 Continuación única de las soluciones | 30 |
| Bibliografía | 34 |

1 Introducción

Fenómenos que ocurren en Física e Ingeniería, conducen a ecuaciones diferenciales parciales, como es el caso de las ecuaciones no lineales de evolución en donde una de sus variables independientes es el tiempo. Dentro de los casos más representativos de este tipo de ecuaciones encontramos la ecuación Korteweg-de Vries (KDV) deducida en [Korteweg and de Vries, 1895], la ecuación Benjamin-Ono (BO) como se puede ver en [Benjamin., 1967], [Ono., 1975], [Banquet, 2011] y la ecuación de Benjamin- Bona- Mahony (BBM) la cual se introduce de forma clara en [Bona and Mahony., 1972], así como trabajos de [A.Alazmani et al., 2006] y [Chen, 2003]. El estudio de estas ecuaciones es focalizado en cuestiones como buen planteamiento local y global, existencia y estabilidad de las ondas viajeras y principios de continuación única que son de gran importancia dentro de la matemática.

Dentro de mi estudio voy a trabajar el buen planteamiento local y global, además de tratar los principios de continuación única para la ecuación

$$\begin{aligned} u &\in C([0, T], H^s(\mathbb{R})) \\ u_t + \partial_x u + D^{1+\alpha} u_t + u^{p-1} \partial_x u &= 0 \\ u(0) &= u_0 \in H^s(\mathbb{R}), \end{aligned} \tag{1-1}$$

para $s > 1/2$ y $\alpha \geq 0$, $p \geq 2$ entero y donde el operador $D^{1+\alpha}$ en (1-1) es la $(1 + \alpha)$ -ésima derivada en x definida por $\widehat{D_x^{1+\alpha}}(\xi) := |\xi|^{1+\alpha} \widehat{f}(\xi)$, para $\xi \in \mathbb{R}$ y $|\cdot|$ la función valor absoluto. Con este objetivo en mente usaremos la ecuación integral equivalente a 1-1 y vía el teorema del punto fijo de Banach para obtener el buen planteamiento local en $H^s(\mathbb{R})$, para $s > 1/2$, luego probaremos que dicho problema es globalmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{1}{2}$. Los trabajos de [Iório et al., 2001] y [Ponce, 2011] han obtenido resultados importantes sobre la continuación única para la BO y recientemente para la r-BO en el trabajo [Fonseca et al., 2015], por tal razón esperamos obtener resultados similares para esta ecuación. Referentes importantes como [Iório-Jr. and de Magalhães Iório, 1988], [Linares and Ponce, 2009] y [Iório and Nunes, 1991] dan una introducción sólida para el desarrollo del tema.

Notación

Se introducen algunas notaciones básicas.

1. $\mathcal{B}(X, Y)$ es el espacio de todos los operadores lineales acotados de un espacio de Banach X a un espacio de Banach Y .
2. $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$.
3. $C([0, T], X)$ es el espacio de Banach de las funciones continuas de $[0, T]$ en el espacio de Banach X , dotado de la norma $\|u\|_{X, \infty} = \sup_{[0, T]} \|u(t)\|_X$
4. $A^s = (1 - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}}$
5. $L_s^p = L_s^p(\mathbb{R}^n) = \Lambda^{-s} L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\| \cdot \|_{L_s^p} = | \cdot |_{s, p}$
6. $H^s(\mathbb{R})$, espacio de Sobolev de orden s , dotado de la norma $\|f\|_s$, donde $\|\cdot\|_0$ es la norma en $L^2(\mathbb{R})$.

2 Preliminares

En este capítulo se introducirán algunas definiciones, lemas, corolarios y teoremas necesarios para el desarrollo del trabajo, las demostraciones de ellas se dejarán indicando la bibliografía correspondiente.

2.1. Transformada de Fourier

Definición 2.1.1. La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es la función $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ definida por

$$(\mathcal{F}f)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\xi \cdot x} dx$$

Definición 2.1.2. El espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tales que

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty \text{ para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Proposición 2.1.1. El espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un espacio métrico completo, con la métrica,

$$d(\phi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty}{1 + \|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty}$$

Teorema 2.1.1. La transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un isomorfismo y un homeomorfismo.

Demostración. Véase [Iório et al., 2001] Teorema 7.42. □

Definición 2.1.3. Se define \mathcal{S}' , el espacio de las distribuciones temperadas, como el dual topológico de \mathcal{S} .

Teorema 2.1.2. Un funcional lineal f en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pertenece a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si y solo si existen constantes $C \geq 0$ y $l \in \mathbb{N}$, tal queda

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum \|\varphi\|_{\alpha,\beta} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Demostración. Véase [Iório et al., 2001] Teorema 7.7. □

Observación 2.1. En el caso de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, las funciones en L^p definen distribuciones temperadas. En efecto, dada una función en $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, la fórmula

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \quad , \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

define un elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Por supuesto, no todas las distribuciones se definen de esta forma y la δ_x , es un ejemplo de ello. Por simplicidad se escribe $T_f = f$.

Definición 2.1.4. La transformada de Fourier \widehat{f} de una distribución temperada $f \in \mathcal{S}'$ es definida por

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Teorema 2.1.3. La transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es un isomorfismo y un homeomorfismo.

Demostración. Véase [Iório et al., 2001] Teorema 7.48. □

2.2. Buen Planteamiento

Definición 2.2.1. Sea X, Y espacios de Banach, tales que $Y \hookrightarrow X$. Consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= F(t, u(x, t)) \in X \\ u(x, 0) &= \phi(x) \in Y \end{aligned} \tag{2.1}$$

es localmente bien planteado, LBP en Y si satisface:

1. Existen $T \in (0, T_0]$ y una función $u \in C([0, T]; Y)$ tales que $u(0) = \phi$ y satisface la ecuación diferencial en el siguiente sentido:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t, u(t)) \right\|_X = 0,$$

donde, las derivadas en $t = 0$ y $t = T$ son calculadas por derecha y por izquierda respectivamente.

2. El problema de valor inicial tiene a lo más una solución en $C([0, T]; Y)$.
3. La función $\phi \rightarrow u$ es continua. Es decir, sean $\phi_n \in Y, n = 1, 2, \dots, \infty$ tal que $\phi_n \rightarrow \phi_\infty$ en Y y consideramos $u_n \in C([0, T_n]; Y)$ la solución correspondiente, entonces existe $T \in (0, T_\infty)$ tal que las soluciones u_n están definidas en $[0, T]$ para todo n suficientemente grande y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_Y = 0.$$

Decimos que el problema es globalmente bien planteado y lo notamos como GBP, si el intervalo de existencia $[0, T]$ de la solución u puede ser arbitrariamente grande.

2.3. Espacios de Sobolev

Definición 2.3.1. Sea $s \in \mathbb{R}$. Los espacios de Sobolev (del tipo L^2) en \mathbb{R} son los siguientes subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) / \widehat{\Lambda^s f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Teorema 2.3.1. Sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $H^s(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno

$$(f | g)_s = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi.$$

Además se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^r(\mathbb{R})$ para todo $s \geq r$, donde \hookrightarrow denota contención continua y densa.
2. $(H^s(\mathbb{R}))'$, el dual topológico de $H^s(\mathbb{R})$, es isométricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{R})$ para todo $s \in \mathbb{R}$.
3. $f \in H^m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, si y solo si $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R})$ para todos los multi-índices α tales que $|\alpha| \leq m$. En este caso, las normas

$$\|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \quad y \quad \|f\|_s = \left(\sum_{j=0}^m \|\partial^j f\|_0^2 \right)^{1/2}$$

son equivalentes.

4. El **Lema de Sobolev** se cumple, es decir, $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_\infty(\mathbb{R})$ para todo $s > \frac{n}{2}$, donde $C_\infty(\mathbb{R})$ denota el conjunto de todas las funciones continuas que tienden a cero en el infinito.

Demostración. Véase [Iório et al., 2001] Teorema 7.75. □

Teorema 2.3.2. $H^s(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach para todo $s > \frac{n}{2}$. En particular, existe una constante $c_s \geq 0$ tal que

$$\|fg\|_s \leq c_s \|f\|_s \|g\|_s \quad \forall f, g \in H^s(\mathbb{R}).$$

Demostración. Véase [Iório et al., 2001] Teorema 7.77. □

Definición 2.3.2. Sea H un espacio de Hilbert. Un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro en H es una aplicación $t \in \mathbb{R} \mapsto U(t) \in \mathcal{B}(H)$ tal que:

1. U es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$,
2. $U(t + t') = U(t)U(t')$, para todo $t, t' \in \mathbb{R}$,
3. $\lim_{t \rightarrow t'} \|U(t)\phi - U(t')\phi\|_H = 0$, para todo $t, t' \in \mathbb{R}$, y $\phi \in H$.

Definición 2.3.3. Sea (X, d) un espacio métrico. Una Contracción es una aplicación $T : X \rightarrow X$ tal que: $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$. Si $\lambda < 1$ se dice que T es una contracción estricta.

Teorema 2.3.3 (Teorema del punto fijo de Banach). Sea X un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ es una contracción estricta, entonces T tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $x_0 \in X$ tal que $T(x_0) = x_0$.

Teorema 2.3.4 (Kato-Ponce). Sean $s > 0$ y $1 < p < \infty$, entonces $L_s^p \cap L^\infty$ es un álgebra de Banach. Además

$$|fg|_{s,p} \leq c(\|f\|_{L^\infty} |g|_{s,p} + |f|_{s,p} \|g\|_{L^\infty}).$$

Demostración. Ver [Kato and Ponce, 1988] □

Observación 2.2. Dado que $\|A^s u^n\|_0 = \|A^s u^{n-1} u\|_0 = |u^{n-1} u|_{0,2}$, si hacemos $f = u^{n-1}$ y $g = u$ en el teorema anterior, y lo aplicamos sucesivas veces se obtiene

$$\|A^s u^{n-1} u\|_0 \leq c \|u\|_{L^\infty}^{n-1} \|A^s u\|_0. \quad (2.2)$$

Definición 2.3.4. La derivada de Stein se define para $b \in (0, 1)$ y f medible en \mathbb{R}^n con valores complejos,

$$\mathcal{D}^b f(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+2b}} dy \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

Lema 2.3.1. Si $s \in (0, n/2)$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ está continuamente inmerso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p = \frac{2n}{n-2s}$, es decir $s = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)$. Más aún, para $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in (0, n/2)$

$$|f|_{L^p} \leq C_{n,s} |D^s f|_{L^2} \leq C |f|_s \quad (2.4)$$

donde $D^l = (-\Delta)^{l/2} = ((2\pi|\xi|)^l \widehat{f})^\vee$.

Demostración. Ver Linares–Ponce [Linares and Ponce, 2009] pag, 48. □

Proposición 2.3.1. Sea $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de grado m y n respectivamente con $0 < m < n$, para $b \in (0, 1)$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ y $\frac{P}{Q} \in C(\mathbb{R})$ se tiene:

$$\left\| D_x^b \left(\frac{P}{Q} \cdot \varphi \right) \right\|_0 \leq c(\|\varphi\|_0 + \|\mathcal{D}_x^b \varphi\|_0)$$

Demostración. Ver proposición 2.12 en [Bolaños, 2018] \square

Proposición 2.3.2. *Sea $\chi \in C_0^\infty$, una función tal que $\text{supp } \chi \subseteq [-2, 2]$ y $\chi \equiv 1$ en $(-1, 1)$. Para $b \in (0, 1)$ y $\theta > 0$,*

$$\mathcal{D}^b(|\xi|^\theta \chi(\xi))(\eta) \sim \begin{cases} c|\eta|^{\theta-b} + c_1, & \theta \neq b, \quad |\eta| \ll 1, \\ c(-\ln|\eta|)^{1/2}, & \theta = b, \quad |\eta| \ll 1, \\ \frac{c}{|\eta|^{1/2+b}}, & |\eta| \gg 1, \end{cases}$$

y $\mathcal{D}^b(|\xi|^\theta \chi(\xi))(\cdot)$ continua en $\eta \in \mathbb{R} - \{0\}$. En particular, se tiene que

$$\mathcal{D}^b(|\xi|^\theta \chi(\xi)) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ si y solo si } b < \theta + 1/2. \quad (2.5)$$

Un resultado similar se obtiene para $\mathcal{D}^b(|\xi|^\theta \text{sgn}(\xi)\chi(\xi))$.

Demostración. Ver proposición 2.9 en [Fonseca et al., 2013]. \square

Teorema 2.3.5 (Desigualdad de Young). *Sean $a, b \geq 0$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces se cumple*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración. Ver [Kreyszig, 1978]. \square

En particular si $s = b$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $p = 2$, entonces, en virtud de la desigualdad de Young:

$$\|D^b f\|_{L^2} \leq c(\|f\|_{L^2} + \|Df\|_{L^2}) \text{ para todo } b \in [0, 1] \quad (2.6)$$

Lema 2.3.2. *Sean $b \in (0, 1)$, $\alpha > 0$. Entonces,*

$$\mathcal{D}_x^b(e^{\frac{-itx}{1+|x|^{1+\alpha}}}) \leq C(\alpha, b)t^b \quad (2.7)$$

para todo $t > 0$.

Demostración. Ver proposición 2.13 en [Bolaños, 2018] \square

Teorema 2.3.6 (Desigualdad de Gronwall). *Sea $k \in L^1([a, b])$ con $k \geq 0$ y $f, g \in C([0, T], \mathbb{R})$ tales que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s)f(s)ds, \quad a \leq t \leq b$$

entonces

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s)e^{\left[\int_a^s k(r)dr\right]}g(s)ds, \quad a \leq t \leq b.$$

En particular si g es constante, se tiene:

$$f(t) \leq g(t)e^{\left[\int_a^t k(s)ds\right]}, \quad a \leq t \leq b.$$

Demostración. Ver [Halanay, 1966] \square

3 El Problema Local y Global

En este capítulo se tratará el buen planteamiento local y global en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ del problema de valor inicial (1-1) que por comodidad se escribirá de la siguiente forma

$$\begin{cases} \partial_t u = A(u) + f(u) \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases} \quad (3.1)$$

que es equivalente a la ecuación integral:

$$u(t) = E(t)\varphi + \int_0^t E(t-\tau)f(u(\tau))d\tau, \quad (3.2)$$

donde:

$$A = -\partial_x(1 + D_x^{1+\alpha})^{-1} \quad (3.3)$$

$$f(u) = \frac{1}{p}A(u^p) \quad (3.4)$$

$$E(t)\varphi = e^{At}\varphi = (e^{\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}}t}\widehat{\varphi})^\vee, \quad \varphi \in H^s, t \in \mathbb{R}, \text{ si } s \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

Proposición 3.1.1. Si $\alpha \geq 0$ el operador 3.3 es acotado en $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \|A(\varphi)\|_s^2 &\leq \|-\partial_x(1 + D_x^{1+\alpha})^{-1}\varphi\|_s^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2)^s \left| \frac{i\xi}{1 + |\xi|^{1+\alpha}}\widehat{\varphi} \right|^2 d\xi \quad \text{si } \alpha \geq 0 \text{ tenemos} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2)^s |\widehat{\varphi}|^2 d\xi = \|\varphi\|_s^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

□

Proposición 3.1.2. $E(t) = e^{tA}$ es un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro en $H^s(\mathbb{R})$, con $\alpha \geq 0$.

Demostración. Sea $b(\xi) = \frac{-i\xi}{1 + |\xi|^{1+\alpha}}$, entonces,

$$E(t) = e^{tA}\varphi = (e^{b(\xi)t}\widehat{\varphi})^\vee$$

$E(t)$ cumple con las siguientes condiciones:

1. $E(t)$ es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\|e^{tA}\varphi\|_s = \|(e^{b(\xi)t}\widehat{\varphi})^\vee\|_s = \|\varphi\|_s \quad (3.7)$$

2.

$$\begin{aligned} E(t+t')\varphi &= e^{(t+t')A'}\varphi \\ &= e^{tA+t'A}\varphi \\ &= e^{tA}e^{t'A}\varphi \\ &= E(t)E(t')\varphi \end{aligned} \quad (3.8)$$

entonces $E(t+t') = E(t)E(t')$.

3. La aplicación $t \in \mathbb{R} \mapsto E(t)\varphi$ es uniformemente continua con respecto a la norma H^s . En efecto,

$$\begin{aligned} \|E(t)\varphi - E(t')\varphi\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s |e^{tb(\xi)} - e^{t'b(\xi)}|^2 |\widehat{\varphi}|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s |e^{(t-t')b(\xi)} - 1|^2 |\widehat{\varphi}|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por el teorema del valor medio se tiene que,

$$|e^{(t-t')b(\xi)} - 1| \leq |b(\xi)e^{\tau b(\xi)}| |t - t'| = \frac{|\xi|}{1 + |\xi|^{1+\alpha}} |t - t'| \leq |t - t'|,$$

para algún τ entre t y t' . Entonces

$$|e^{(t-t')b(\xi)} - 1| \leq |t - t'|.$$

Así que,

$$\begin{aligned} \|E(t)\varphi - E(t')\varphi\|_s^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s |t - t'|^2 |\widehat{\varphi}|^2 d\xi \\ &\leq |t - t'|^2 \|\varphi\|_s^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Haciendo $t \rightarrow t'$ en (3.10) se tiene que $\|E(t)\varphi - E(t')\varphi\|_s \rightarrow 0$.

□

Proposición 3.1.3. Si $s > 1/2$, (3.4) satisface la condición de lipschitz local, es decir,

$$\|f(u) - f(v)\|_s \leq C_p L(\|u\|_s, \|v\|_s) \|u - v\|_s. \quad (3.11)$$

para todo $u, v \in H^s(\mathbb{R})$, donde $L(\|u\|_s, \|v\|_s) = \|u\|_s + \|v\|_s$ y $p \geq 2$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
f(u) &= \frac{1}{p}A(u^p) \\
f(u) - f(v) &= \frac{1}{p}A(u^p - v^p) \\
\|f(u) - f(v)\|_s &\leq \frac{1}{p}\|(u^p - v^p)\|_s \\
&= \frac{1}{p}\|(u - v) \sum_{j=0}^{p-1} u^{p-1-j}v^j\|_s \\
&\leq \frac{1}{p}\|(u - v)\|_s \left\| \sum_{j=0}^{p-1} u^{p-1-j}v^j \right\|_s \\
&\leq \frac{C_s}{p}\|(u - v)\|_s \sum_{j=0}^{p-1} \|u\|_s^{p-1-j} \|v\|_s^j \\
&= C_{s,p}\|u - v\|_s L(\|u\|_s, \|v\|_s)
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.4. *Sea $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}))$ con $s > \frac{1}{2}$, una solución de (3.1), entonces u satisface (3.2). Recíprocamente, si $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}))$ es una solución de (3.2), entonces $u \in C^1([0, T], H^s(\mathbb{R}))$ y satisface (3.1) con derivada*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - Au - f(u) \right\|_s = 0 \quad (3.12)$$

Demostración. Si u satisface (3.1), por el método de variación de parámetros se tiene que u satisface (3.2).

Recíprocamente, sea u tal que satisface (3.2). Derivando a ambos lados con respecto al tiempo se tiene

$$\partial_t u(t) = Ae^{tA}\varphi + \partial_t \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau)) d\tau. \quad (3.13)$$

Consideremos la integral de el lado derecho de (3.13)

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau)) d\tau &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_0^{t+h} e^{(t+h-\tau)A} f(u(\tau)) d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau)) d\tau \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_0^t \left[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A} \right] f(u(\tau)) d\tau + \int_t^{t+h} e^{(t+h-\tau)A} f(u(\tau)) d\tau \right\}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

observe que,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \int_t^{t+h} e^{(t+h-\tau)A} f(u(\tau)) d\tau - f(u(t)) \right\|_s = 0. \quad (3.15)$$

y que,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^t \left[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A} \right] f(u(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^t \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A} \right] f(u(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^t \partial_t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^t A e^{(t-\tau)A} f(u(\tau)) d\tau \\ &= A \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Las ecuaciones (3.14),(3.15) y (3.16), implican

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) &= A e^{tA} \varphi + A(u(t) - e^{tA} \varphi) + f(u(t)) \\ \partial_t u(t) &= A u(t) + f(u(t)). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Haciendo $t = 0$ en (3.2), se tiene que $u(0) = \varphi$. Se concluye entonces que u satisface (3.1). \square

3.2. Existencia

Proposición 3.2.1. *Para $M > 0$ el conjunto*

$$\mathfrak{X}_s(T, M) = \{u \in C([0, T], H^s) / \|u(t) - e^{tA} \varphi\|_s \leq M, \text{ para } t \in [0, T]\}$$

con la métrica

$$d_{s,T}(u, v) = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - v(t)\|_s = \|u(t) - v(t)\|_{s, \infty}.$$

es un espacio métrico completo.

Demostración. El conjunto $\mathfrak{X}_s(T, M)$ es un subconjunto cerrado de $C([0, T], H^s(\mathbb{R}))$ el cual es completo con la métrica $d_{s,T}$, que es precisamente la inducida por la norma $\|u\|_{s, \infty}$. Por lo tanto $(\mathfrak{X}_s, d_{s,T})$ es un espacio métrico completo. \square

Teorema 3.2.1. *La función definida por*

$$F(u)(t) := u(t) = e^{tA} \varphi + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau)) d\tau, \quad (3.18)$$

es una contracción en $\mathfrak{X}_s(T, M)$ para algún $T > 0$ y $s > \frac{1}{2}$.

Demostración. La idea es aplicar el principio de contracción de Banach a la función definida en (3.18) en el espacio de la proposición 3.2.1. Teniendo en cuenta lo anterior, sean $M \geq 0$, y $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, entonces,

$$\begin{aligned} \|F(u)(t) - E(t)\varphi\|_s &\leq \int_0^t \|e^{(t-\tau)A} f(u)\|_s d\tau \\ &\leq \int_0^t \|f(u)\|_s d\tau \\ &\leq \int_0^t L(\|u\|_s, 0) \|u(\tau)\|_s d\tau \quad , \text{ por (3.11)} \end{aligned}$$

si $u \in \mathfrak{X}_s(T, M)$, por (3.7)

$$\|u(\tau)\|_s \leq \|u(\tau) - e^{\tau A}\varphi\|_s + \|e^{\tau A}\varphi\|_s \leq M + \|\varphi\|_s$$

Luego, si $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|F(u)(t) - e^{tA}\varphi\|_s &\leq L(\|u\|_s, 0) (M + \|\varphi\|_s)t \\ &\leq L(M + \|\varphi\|_s, 0)(M + \|\varphi\|_s)T \end{aligned}$$

Sea $\alpha(M, \|\varphi\|_s) = [L(M + \|\varphi\|_s, 0)(M + \|\varphi\|_s)]^{-1}M$. Si $0 < T < \alpha(M, \|\varphi\|_s)$, entonces se tiene

$$\|F(u)(t) - e^{tA}\varphi\|_s \leq M \tag{3.19}$$

es decir, $F(u) \in \mathfrak{X}_s(T, M)$

Veamos ahora que F es una contracción. Dados $u, v \in \mathfrak{X}_s$

$$\begin{aligned} \|F(u)(t) - F(v)(t)\|_s &\leq \int_0^t \|e^{(t-\tau)A}(f(u) - f(v))\|_s d\tau \\ &\leq \int_0^t \|f(u) - f(v)\|_s d\tau \\ &\leq L(\|u\|_s, \|v\|_s) \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \\ &\leq L(M + \|\varphi\|_s, M + \|\varphi\|_s) d_{S,T}(u, v) T \end{aligned}$$

Sea $\beta(M, \|\varphi\|_s) = [L(M + \|\varphi\|_s, M + \|\varphi\|_s)]^{-1}$. Si se tienen las opciones

$$0 < T < \alpha(M, \|\varphi\|_s) < \beta(M, \|\varphi\|_s) \quad \acute{o}$$

$$0 < T < \beta(M, \|\varphi\|_s) < \alpha(M, \|\varphi\|_s)$$

en cualquier caso se cumple que

$$0 < L(M + \|\varphi\|_s, M + \|\varphi\|_s) T < 1.$$

Si hacemos $\lambda = L(M + \|\varphi\|_s, M + \|\varphi\|_s)T$ y $\tilde{T} = \tilde{T}(M, \|\varphi\|_s) = \min(\alpha, \beta)$, se cumple que

$$d_{s, \tilde{T}}(F(u)(t), F(v)(t)) \leq \lambda d_{s, \tilde{T}}(u, v), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Por lo tanto, F es una contracción. Aplicando el Teorema del punto fijo de Banach, existen $T > 0$ y $u \in \mathfrak{X}_s(T, M)$ solución de (3.2). \square

El teorema anterior garantiza la existencia de solución para el problema de Cauchy (3.1).

3.3. Unicidad

Teorema 3.3.1. *La función definida en (3.2) es la única solución al problema (3.1).*

Demostración. Supóngase que u y v son soluciones del problema de Cauchy (3.1) con condiciones iniciales φ y ψ respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_s &\leq \|\varphi - \psi\|_s + \int_0^t \|f(u(\tau)) - f(v(\tau))\|_s d\tau \\ &\leq \|\varphi - \psi\|_s + L(\|u\|_s, \|v\|_s) \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \end{aligned}$$

luego por la desigualdad de Gronwall

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq \|\varphi - \psi\|_s e^{L(\|u\|_s, \|v\|_s)t}. \quad (3.20)$$

Entonces si $\varphi = \psi$ se tiene que $u = v$ y por lo tanto la unicidad. \square

3.4. Dependencia Continua

Teorema 3.4.1. *La función $\varphi \in H^s(\mathbb{R}) \mapsto u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ es continua.*

Demostración. Sea $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ tal que cada φ_n es una condición inicial del problema de Cauchy (3.1) y además $\varphi_n \xrightarrow{H^s} \varphi$. Sea también $u_n \in C([0, \tilde{T}_n], H^s(\mathbb{R}))$ la solución correspondiente a φ_n , donde $\tilde{T}_n = \tilde{T}(M, \|\varphi_n\|_s)$.

Como \tilde{T} es continua como función de $\|\varphi\|_s$ y $\tilde{T}_\infty = \tilde{T}(M, \|\varphi\|_s)$, tenemos que si $0 < T < \tilde{T}$, $u_n \in C([0, T], H^s)$, para n suficientemente grande, por lo tanto $u_n \in \mathfrak{X}_s(T, M)$ y

$$\|u_n(\tau)\|_s \leq M + \|\varphi_n\|_s \leq M + K, \quad \text{donde } K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_s, \quad 0 < \tau < T.$$

Sea u_∞ la solución correspondiente a φ , entonces

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_s + \int_0^t \|f(u_n(\tau)) - f(u_\infty(\tau))\|_s d\tau \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_s + L(\|u_n\|_s, \|u_\infty\|_s) \int_0^t \|u_n - u_\infty\|_s d\tau \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_s + L(M_s(u_n, u_\infty), M_s(u_n, u_\infty)) \int_0^t \|u_n - u_\infty\|_s d\tau, \end{aligned}$$

donde,

$$M_s(u_n, u_\infty) = \max \left\{ \sup_{[0, T]} \|u_n(t)\|_s, \sup_{[0, T]} \|u_\infty(t)\|_s \right\} \leq M + K$$

por tanto,

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \leq \|\varphi_n - \varphi\|_s + L(M + K, M + K) \int_0^t \|u_n - u_\infty\|_s d\tau.$$

La desigualdad de Gronwall, implica que,

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_s e^{L(M+K, M+K)t} \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_s e^{L(M+K, M+K)T}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sup_{n \in N} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_s e^{L(M+K, M+K)T} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n \in N} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s &= 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

□

3.5. Buen planteamiento local para $s \geq 0$ y $\alpha > \frac{1}{2}$.

Lema 3.5.1. Si $s \geq 0$, $u, v \in H^s(\mathbb{R})$, entonces

$$\left\| \frac{\partial_x}{1 + D_x^{1+\alpha}}(u, v) \right\|_s \leq \|u\|_s \|v\|_s,$$

con $\alpha > \frac{1}{2}$.

Demostración: Para $u, v \in H^s(\mathbb{R})$ y $w \in H^{-s}(\mathbb{R})$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \widehat{uv} \overline{\widehat{w}(\xi)} d\xi \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi|}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \langle \xi \rangle^s |\widehat{uv}(\xi)| \frac{1}{\langle \xi \rangle^s} |\overline{\widehat{w}(\xi)}| d\xi \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi_1 \rangle^s |\widehat{u}(\xi_1)| \langle \xi - \xi_1 \rangle^s |\widehat{v}(\xi - \xi_1)| d\xi_1 \right) \frac{|\xi|}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \frac{\widehat{w}(\xi)}{\langle \xi \rangle^s} d\xi \\
&\leq \|u\|_s \|v\|_s \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|w(\xi)|}{\langle \xi \rangle^s} \frac{|\xi|}{1+|\xi|^{1+\alpha}} d\xi \right) \\
&\leq \|u\|_s \|v\|_s \|w\|_{-s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^{2+2\alpha}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_\alpha \|u\|_s \|v\|_s \|w\|_{-s}
\end{aligned}$$

□

El lema 3.5.1, la ecuación integral 3.2 y el teorema del punto fijo de Banach 2.3.3 implican:

Teorema 3.5.1. *Si $s \geq 0$, $p = 2$ y $\alpha > \frac{1}{2}$ el problema de valor inicial (3.1) es localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$.*

3.6. El Problema Global

El objetivo ahora es conocer el buen planteamiento global del problema de Cauchy (1-1), para ello usaremos una estimativa de tipo Brezis-Gallouet [Gallouet, 1980]. Pero antes consideremos la siguiente proposición.

Proposición 3.6.1. *Suponga $\varphi \in H^s$ con $s > \frac{1}{2}$ y sea $u \in C([-T, T], H^s)$ la correspondiente solución del problema de Cauchy (1-1) entonces*

$$\|u(t)\|_{\frac{1+\alpha}{2}} = \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}}$$

Demostración. De la ecuación (1-1) se tiene que

$$\partial_t(1 + D_x^{1+\alpha})u = -\partial_x \left(u + \frac{1}{p}u^p \right)$$

que al tomar el producto interno con u permite obtener,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(1 + D^{1+\alpha})^{1/2} u\|_0 &= \int_{\mathbb{R}} dx \partial_t(1 + D_x^{1+\alpha})u u = \int_{\mathbb{R}} -\partial_x \left(u + \frac{1}{p}u^p \right) u dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(u + \frac{1}{p}u^p \right) u_x dx, \text{ para } s > \frac{1}{2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\frac{u^2}{2} + \frac{1}{p(p+1)}u^{p+1} \right) u_x dx \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Ya que cada uno de los miembros del lado derecho de (3.22) son iguales a cero y esto finaliza la demostración. \square

Lema 3.6.1. (*Brezis-Gallouet*). Sea $f \in H^s(\mathbb{R})$, con $s > \frac{1}{2}$ entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|f\|_\infty \leq C(1 + \sqrt{\log(1 + \|f\|_s)})\|f\|_{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Sea $R > 0$, donde R será seleccionado más adelante de manera adecuada, tenemos entonces que

$$|f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi = \int_{|\xi| < R} \frac{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^{\frac{1}{2}}}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^{\frac{1}{2}}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi + \int_{|\xi| \geq R} \frac{(1 + |\xi|)^s}{(1 + |\xi|)^s} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \quad (3.23)$$

Por la desigualdad de Cauchy- Schwartz

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left(\int_{|\xi| < R} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|\xi| < R} (1 + |\xi|) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_{|\xi| \geq R} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|)^{2s}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|\xi| \geq R} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Como $s > \frac{1}{2}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $2(s - \epsilon) > 1$ de donde;

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \sqrt{2} \sqrt{\log(1 + R)} \|f\|_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{(R + 1)^\epsilon} \left(\int_{|\xi| \geq R} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|)^{2(s-\epsilon)}} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_s \\ &= \sqrt{2} \sqrt{\log(1 + R)} \|f\|_{\frac{1}{2}} + \frac{C_0}{(R + 1)^\epsilon} \|f\|_s \end{aligned}$$

Seleccionando $R = (1 + \|f\|_s)^{\frac{1}{\epsilon}} - 1$, se obtiene

$$\|f\|_\infty \leq C_1 \epsilon^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\log(1 + \|f\|_s)} \|f\|_{\frac{1}{2}} + \frac{C_0 \|f\|_s}{1 + \|f\|_s},$$

lo cual finaliza la demostración. \square

Teorema 3.6.1. *El problema de Cauchy asociado a (1-1) está globalmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{1+\alpha}{2}$, $\alpha \geq 0$ y $p = 2$.*

Demostración. Sea $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$. Tomando la norma $\|\cdot\|_s$ en (3.2), la desigualdad triangular implica que,

$$\|u(t)\|_s \leq \|\varphi\|_s + \int_0^t \|\partial_x (1 + D_x^{1+\alpha})^{-1} (u^p)\|_s dt'.$$

Aplicando el teorema 2.3.4 al integrando de la desigualdad anterior,

$$\|u(t)\|_s \leq \|\varphi\|_s + \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} \int_0^t \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_s dt'$$

Si $p = 2$

$$\|u(t)\|_s \leq \|\varphi\|_s + \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} \int_0^t \|u\|_s \|u\|_{L^\infty} dt'$$

de esta manera usando el lema anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_s &\leq \|\varphi\|_s + \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} \int_0^t \|u\|_s (1 + \sqrt{\log(1 + \|u\|_s)}) \|u\|_{\frac{1}{2}} dt' \\ &\leq \|\varphi\|_s + \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} \int_0^t \|u\|_s (1 + \sqrt{\log(1 + \|u\|_s)}) dt' = \Psi(t) \end{aligned}$$

Aplicando la derivada

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} \|u\|_s (1 + \sqrt{\log(1 + \|u\|_s)}) \\ &\leq \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} (1 + \sqrt{\log(1 + \|u\|_s)}) \Psi(t) \\ &\leq \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} (1 + \sqrt{\log(1 + \Psi(t))}) \Psi(t) \\ &\leq c \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} (1 + \log(1 + \Psi(t))) \Psi(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)} &\leq \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} (1 + \log(1 + \Psi(t))) \\ (1 + \Psi(t))' &\leq \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} (1 + \log(1 + \Psi(t))) (1 + \Psi(t)) \\ \frac{(1 + \Psi(t))'}{1 + \Psi(t)} &\leq \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} (1 + \log(1 + \Psi(t))) \\ \frac{d}{dt} \log(1 + \Psi(t)) &\leq \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} (1 + \log(1 + \Psi(t))) \end{aligned}$$

donde $f(t) = (1 + \log(1 + \Psi(t)))$, luego

$$f'(t) \leq \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} f(t)$$

$$f(t) \leq 1 + \log(1 + \|\varphi\|_s) + \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} \int_0^t f(t') dt' \quad (3.24)$$

aplicando la desigualdad de Gronwall 2.3.6 tenemos,

$$\log(1 + \Psi(t)) \leq \log(1 + \|\varphi\|_s) e^{\|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} t}$$

$$\|u\|_s \leq \Psi(t) \leq 1 + \Psi(t) \leq e^{\log(1 + \|\varphi\|_s) e^{\|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} t}} \quad (3.25)$$

Luego, $\|u\|_s \leq e^{\log(1 + \|\varphi\|_s) e^{\|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} t}}$. En particular $\|u\|_s$ sigue siendo acotada en cada intervalo de tiempo finito y la solución puede extenderse a todo \mathbb{R} . \square

4 Teoría en espacios de Sobolev con pesos

4.1. Buen planteamiento

En este capítulo trataremos el buen planteamiento para el problema de valor inicial (1-1) en los espacios de Sobolev con pesos $\mathfrak{S}_{s,r} = H^s(\mathbb{R}) \cap L_r^2(\mathbb{R})$, donde $L_r^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / |x|^r f \in L^2(\mathbb{R})\}$, $r \geq 0$, con la norma $\|f\|_{L_r^2} = \|f\|_0 + \||x|^r f\|_0$. Para esto basta con acotar el operador $A = -\partial_x(1 + D^{1+\alpha})^{-1}$ y el grupo $E(t) = \left(e^{\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}}t} \widehat{\varphi} \right)^\vee$ en $\mathfrak{S}_{s,r}$. Para tal fin, empezaremos por calcular las derivadas parciales de $F(\xi, t)$.

Lema 4.1.1. *Sea $F(\xi, t) = e^{b(\xi)t}$ donde $b(\xi) = \frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}}$. Entonces,*

$$\begin{aligned} \partial_\xi F(\xi, t) &= \frac{-i(1 - \alpha|\xi|^{1+\alpha})t}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^2} F \\ \partial_\xi^2 F(\xi, t) &= \left(\frac{-i\alpha(1 + \alpha)|\xi|^{2\alpha+1} \operatorname{sgn}(\xi)t}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} + \frac{i(1 + \alpha)(2 + \alpha)|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)t}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} + \frac{(1 - \alpha|\xi|^{1+\alpha})^2 t^2}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^4} \right) F \\ \partial_\xi^3 F(\xi, t) &= \left(\frac{i\alpha(1 + \alpha)(2 + \alpha)|\xi|^{1+3\alpha}t}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^4} - \frac{i(1 + \alpha)(4\alpha^2 + 8\alpha + 6)|\xi|^{2\alpha}t}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^4} \right. \\ &\quad + \frac{i\alpha(1 + \alpha)(2 + \alpha)|\xi|^{\alpha-1}t}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^4} - \frac{\alpha(1 + \alpha)(1 - \alpha|\xi|^{1+\alpha})|\xi|^{2\alpha+1} \operatorname{sgn}(\xi)t^2}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^5} \\ &\quad + \frac{(1 + \alpha)(2 + \alpha)(1 - \alpha|\xi|^{1+\alpha})|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)t^2}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^5} - \frac{2\alpha(1 + \alpha)(1 - \alpha|\xi|^{1+\alpha})|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)t^2}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^4} \\ &\quad \left. - \frac{4(1 + \alpha)(1 - \alpha|\xi|^{1+\alpha})^2|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)t^2}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^5} + \frac{i(1 - \alpha|\xi|^{1+\alpha})^3 t^3}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^6} \right) F \end{aligned}$$

Proposición 4.1.1. *El operador $A = -\partial_x(1 + D^{1+\alpha})^{-1}$ es un operador acotado en $\mathfrak{S}_{s,r}(\mathbb{R})$ para $0 \leq r \leq 5/2 + \alpha < 3$.*

Demostración.

$$\|A\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}} = \|A\varphi\|_s + \|A\varphi\|_{L_r^2}$$

El primer sumando se acota de forma similar a la proposición 3.1.1, para el segundo sumando suponemos que $r = 2$,

$$\begin{aligned}
\|A\varphi\|_{L^2_0} &= \left\| \partial_\xi^2 \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq \left\| \partial_\xi^2 \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + 2 \left\| \partial_\xi \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \right) \partial_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \right) \partial_\xi^2 \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq \left\| \frac{\alpha(1+\alpha)|\xi|^{2\alpha+1} \operatorname{sgn}(\xi) i}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) i}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\quad + 2 \left\| \frac{(-1+\alpha|\xi|^{1+\alpha}) i}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^2} \partial_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \right) \partial_\xi^2 \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq c \left(\|\widehat{\varphi}\|_0 + \|\partial_\xi \widehat{\varphi}\|_0 + \|\partial_\xi^2 \widehat{\varphi}\|_0 \right) \leq c \|\varphi\|_{L^2_{2,0}}.
\end{aligned}$$

El teorema de interpolación, de Stein-Weiss (ver teorema 5.4.1 en [Bergh and Löfström, 1976]) junto con la desigualdad anterior nos permite concluir $\|x^r A\varphi\|_0 \leq \|x^r \varphi\|_0$ para $0 \leq r \leq 2$. Para el caso $2 < r < \frac{5}{2} + \alpha < 3$, sea $r = 2 + b$ con $0 < b < 1$ y $b < 1/2 + \alpha$.

$$\begin{aligned}
\|A\varphi\|_{L^2_{r_1,0}} &= \|x^{r_1}(A\varphi)\|_0 \\
&= \left\| D_\xi^b \left(\partial_\xi^2 \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \widehat{\varphi} \right) \right) \right\|_0^2 \\
&\leq \left\| D_\xi^b \left(\partial_\xi^2 \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \widehat{\varphi} \right) \right) \right\|_0 + 2 \left\| D_\xi^b \left(\partial_\xi \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \right) \partial_\xi \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\quad + \left\| D_\xi^b \left(\left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \right) \partial_\xi^2 \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq \left\| D_\xi^b \left(\frac{\alpha(1+\alpha)|\xi|^{2\alpha+1} \operatorname{sgn}(\xi) i}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| D_\xi^b \left(\frac{(1+\alpha)(2+\alpha)|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) i}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\quad + 2 \left\| D_\xi^b \left(\frac{(-1+\alpha|\xi|^{1+\alpha}) i}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^2} \partial_\xi \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| D_\xi^b \left(\left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \right) \partial_\xi^2 \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq c \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^{2\alpha+1} \operatorname{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + c \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\quad + c \left\| D_\xi^b \left(\frac{-1+\alpha|\xi|^{1+\alpha}}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^2} \partial_\xi \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| D_\xi^b \left(\left(\frac{\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \right) \partial_\xi^2 \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&= A_1 + A_2 + A_3 + A_4
\end{aligned}$$

Para acotar A_2 definimos la función de corte:

$$\chi = \chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ tal que } \chi \equiv 1 \text{ en } (-1, 1) \text{ y } \operatorname{supp} \chi \subseteq [-2, 2], \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 & (4.2) \\
&= \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) (1 - \chi)}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right) \cdot \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right) D_\xi^b \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\quad + \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) (1 - \chi)}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq A_{2,1} + A_{2,2} + A_{2,3}
\end{aligned}$$

Antes de acotar los tres términos anteriores, definamos

$$g(\xi) = \frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3}$$

y veamos que $D_\xi^b g(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$, para esto usamos la proposición 2.3.1 y la proposición 2.3.2, es importante decir que para usar proposición 2.3.2, debemos poner la condición que $b < 1/2 + \alpha$

$$\begin{aligned}
\|D_\xi^b(g(\xi))\|_0 &= \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right) \right\|_0 \\
&= c \left(\| |\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi) \|_0 + \| \mathcal{D}_\xi^b(|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)) \|_0 \right) \\
&\leq K \quad \text{si } b < \alpha + 1/2.
\end{aligned}$$

Retomando, acotemos $A_{2,1}$

$$(A_{2,1})^2 = \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right) \widehat{\varphi} \right\|_0^2 \quad (4.3)$$

$$= \|D_\xi^b(g(\xi)) \widehat{\varphi}\|_0^2 \quad (4.4)$$

$$\leq \|\widehat{\varphi}\|_\infty^2 \|D_\xi^b(g(\xi))\|_0^2$$

$$= K^2 \|\widehat{\varphi}\|_{L^1}^2$$

$$\leq K^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |(1+x^2)^{r/2} \widehat{\varphi}(x) \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{r/2}}| dx \right)^2$$

$$\leq K^{1/2} \left(\left(\int_{\mathbb{R}} |(1+x^2)^{r/2} \widehat{\varphi}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^r} dx \right)^{1/2} \right)^2$$

$$\leq c \|\varphi\|_0^2 + c \|\varphi\|_{L^2}^2$$

la acotación del término $A_{2,2}$ es inmediata, con $A_{2,3}$ es más sencillo ya que estamos sobre el dominio de la función $(1 - \chi(\xi))$:

$$\begin{aligned}
A_{2,3} &= \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)(1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)(1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right) \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)(1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} D_\xi^b \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)(1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right) \right\|_\infty \|\widehat{\varphi}\|_0 + \left\| \frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)(1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right\|_\infty \|D_\xi^b \widehat{\varphi}\|_0 \\
&\leq \left(\left\| \frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)(1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right\|_\infty + \left\| \partial_\xi \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)(1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right) \right\|_\infty \right) \|\widehat{\varphi}\|_0 + \|D_\xi^b \widehat{\varphi}\|_0 \\
&\leq c \|\varphi\|_0 + c \|\varphi\|_{L_{r_1,0}^2}
\end{aligned}$$

Para acotar A_1 se hace de forma similar que A_2 con la diferencia que la condición de acotación es $b < (2\alpha + 1) + 1/2$, la cual se cumple para todo $0 < \alpha < 1$.

Para A_3 usamos la proposición 2.3.1

$$\begin{aligned}
A_3 &= \left\| D_\xi^b \left(\frac{-1 + \alpha|\xi|^{1+\alpha}}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^2} \partial_\xi \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq c \left(\|\partial_\xi \widehat{\varphi}\|_0 + \|\mathcal{D}_\xi^b(\partial_\xi \widehat{\varphi})\|_0 \right) \\
&\leq c \|x\varphi\|_0 + \| |x|^{1+b} \varphi \|_0
\end{aligned}$$

La acotación del término A_4 es similar al término A_3 . □

El siguiente paso es acotar el grupo $E(t)\varphi = \left(e^{\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}}t} \widehat{\varphi} \right)^\vee = \left(F(\xi, t)\widehat{\varphi} \right)^\vee$ en los espacios con pesos \mathcal{F}_{sr} , los siguientes tres resultados están enfocados en pesos enteros.

Proposición 4.1.2. Sean $E(t) = \left(e^{\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}}t} \widehat{\varphi} \right)^\vee$.

Si $r = 1, r = 2$ entonces

$$\|E(t)\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}} \leq P_r(t) \|\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}}$$

donde $P_r(t)$ es un polinomio de grado r .

Demostración. Si $r = 1$

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{s,1}} &= \|E(t)\varphi\|_s + \|E(t)\varphi\|_{L_1^2} \\
&\leq \|\varphi\|_s + \|x(E(t)\varphi)\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \|\partial_\xi(F\widehat{\varphi})\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \|\partial_\xi F\widehat{\varphi}\|_0 + \|F\partial_\xi \widehat{\varphi}\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \left\| \frac{i(1 - \alpha|\xi|^{1+\alpha})t}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^2} F\widehat{\varphi} \right\|_0 + \|x\varphi\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + t\|\widehat{\varphi}\|_0 + \|x\varphi\|_0 \\
&\leq P_r(t) \|\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,1}}
\end{aligned}$$

Si $r = 2$

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{s,2}} &= \|E(t)\varphi\|_s + \|E(t)\varphi\|_{L^2} \\
&\leq \|\varphi\|_s + \|x^2 E(t)\varphi\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \|\partial_\xi^2(F\widehat{\varphi})\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \|\partial_\xi^2 F\widehat{\varphi}\|_0 + 2\|\partial_\xi F\partial_\xi \widehat{\varphi}\|_0 + \|F\partial_\xi^2 \widehat{\varphi}\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \left\| \frac{i\alpha(1+\alpha)|\xi|^{2\alpha+1}\text{sgn}(\xi)t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F\widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\quad + \left\| \frac{i(1+\alpha)(2+\alpha)|\xi|^\alpha\text{sgn}(\xi)t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F\widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \frac{(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})^2 t^2}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^4} F\widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\quad + \left\| \frac{i(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^2} F\partial_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 + \|\partial_\xi^2 \widehat{\varphi}\|_0 \\
&\leq c \left(\|\varphi\|_s + t\|\widehat{\varphi}\|_0 + t^2\|\widehat{\varphi}\|_0 + t\|\partial_\xi \widehat{\varphi}\|_0 + \|\partial_\xi^2 \widehat{\varphi}\|_0 \right) \\
&\leq P_r(t)\|\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,2}}
\end{aligned}$$

□

A continuación acotaremos el grupo $E(t)$ en los espacios con peso $\mathfrak{S}_{s,r}(\mathbb{R})$ donde r es un número real no entero, para ello usaremos la derivada de Stein definida en 2.3.

Proposición 4.1.3. Sean $E(t) = \left(e^{\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}}t} \widehat{\varphi} \right)^\vee$, $0 \leq r < 5/2 + \alpha < 3$.

Entonces,

$$\|E(t)\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}} \leq C(t)\|\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}},$$

donde $C(t)$ es una función continua y creciente en t .

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}} &= \|E(t)\varphi\|_s + \|E(t)\varphi\|_{L^2_r} \\
&\leq \|\varphi\|_s + \||x|^r E(t)\varphi\|_0
\end{aligned}$$

supongamos que $r = b$ con $0 < b < 1$, de las propiedades de la derivada de Stein y el lema 2.3.2, tenemos:

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}} &= \|\varphi\|_s + \||x|^b E(t)\varphi\|_0 \\
&= \|\varphi\|_s + \|\mathcal{D}_\xi^b(F\widehat{\varphi})\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \|\mathcal{D}_\xi^b F \cdot \widehat{\varphi}\|_0 + \|F \cdot \mathcal{D}_\xi^b \widehat{\varphi}\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \|c(\alpha, b)t^b \widehat{\varphi}\|_0 + \|\mathcal{D}_\xi^b \widehat{\varphi}\|_0 \\
&\leq C(t)\|\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}}
\end{aligned}$$

ahora hagamos que $r = 1 + b$ con $0 < b < 1$ y la proposición 2.3.1 tenemos

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}} &= \|\varphi\|_s + \||x|^{1+b}E(t)\varphi\|_0 \\
&= \|\varphi\|_s + \|D_\xi^b \partial_\xi(F\widehat{\varphi})\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \|D_\xi^b(\partial_\xi F \cdot \widehat{\varphi})\|_0 + \|D_\xi^b(F \cdot \partial_\xi \widehat{\varphi})\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \left\| D_\xi^b \left(\frac{-i(1+\alpha|\xi|^{1+\alpha})t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^2} F \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + \|\mathcal{D}_\xi^b F \cdot \partial_\xi \widehat{\varphi}\|_0 \\
&\quad + \|F\|_\infty \|\mathcal{D}_\xi^b(\partial_\xi \widehat{\varphi})\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + ct(\|F\widehat{\varphi}\|_0 + \|\mathcal{D}_\xi^b(F\widehat{\varphi})\|_0) + \|c(b)t^b \partial_\xi \widehat{\varphi}\|_0 \\
&\quad + \|\mathcal{D}_\xi^b(\partial_\xi \widehat{\varphi})\|_0 \\
&\leq c(t) (\|\varphi\|_s + \|F\mathcal{D}_\xi^b \widehat{\varphi}\|_0 + \|\mathcal{D}_\xi^b F \widehat{\varphi}\|_0 + \|\partial_\xi \widehat{\varphi}\|_0 + \|\mathcal{D}_\xi^b \partial_\xi \widehat{\varphi}\|_0) \\
&\leq c(t) (\|\varphi\|_s + \||x|^b \varphi\|_0 + \||x|\varphi\|_0 + \||x|^{1+b}\varphi\|_0) \\
&\leq C(t)\|\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Ahora supongamos que $r = 2 + b$, con $0 < b < 1$ y $b < 1/2 + \alpha$

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}} &= \|\varphi\|_s + \||x|^{2+b}E(t)\varphi\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \|D_\xi^b \partial_\xi^2(\widehat{\varphi})\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \|D_\xi^b(\partial_\xi^2 F \cdot \widehat{\varphi})\|_0 + \|D_\xi^b(\partial_\xi F \cdot \partial_\xi \widehat{\varphi})\|_0 + \|D_\xi^b(F \cdot \partial_\xi^2 \widehat{\varphi})\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^{2\alpha+1} \text{sgn}(\xi)t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \text{sgn}(\xi)t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\quad + \left\| D_\xi^b \left(\frac{(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})^2 t^2}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^4} F \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| D_\xi^b \left(\frac{(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^2} F \partial_\xi \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\quad + \|D_\xi^b(F \cdot \partial_\xi^2 \widehat{\varphi})\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_s + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Primero acotemos B_2 , donde usamos la función de corte $\chi(\xi)$ definida en 4.1:

$$\begin{aligned}
B_2 &= \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) t}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} F \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} t F \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) (1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} t \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq t \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} F \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + t \left\| \frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} D_\xi^b(F \widehat{\varphi}) \right\|_0 \\
&\quad + t \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) (1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} F \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq C(t) \left(\left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right) \widehat{\varphi} \right\|_0 + \|D_\xi^b(F \widehat{\varphi})\|_0 + \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) (1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} F \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \right) \\
&\leq c(t)(B_{2,1} + B_{2,2} + B_{2,3})
\end{aligned}$$

el término $B_{2,1}$ se acotó en la ecuación 4.3 y el termino $B_{2,2}$ fue acotado en la ecuación 4.5, para $B_{2,3}$ tenemos presente que estamos sobre el dominio de la función $1 - \chi(\xi)$

$$\begin{aligned}
B_{2,3} &= \left\| \mathcal{D}_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) (1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} F \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \tag{4.7} \\
&\leq \left\| \frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) (1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right\|_\infty \| \mathcal{D}_\xi^b(F \widehat{\varphi}) \|_0 + \left\| \mathcal{D}_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) (1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right) F \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq c \| \mathcal{D}_\xi^b(F \widehat{\varphi}) \|_0 + \left(\left\| \frac{|\xi|^\alpha (1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right\|_\infty + \left\| \partial_\xi \left(\frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) (1 - \chi(\xi))}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^3} \right) \right\|_\infty \right) \| F \widehat{\varphi} \|_0 \\
&\leq c B_{2,2} + c \| \widehat{\varphi} \|_0
\end{aligned}$$

B_1 se acota de manera similar a B_2 pero con la condición de $b < (2\alpha + 1) + 1/2$, la cual se cumple para todo $0 < \alpha < 1$. Para acotar B_3 usamos el lema 2.3.2 y la proposición 2.3.1:

$$\begin{aligned}
B_3 &= \left\| D_\xi^b \left(\frac{(1 - \alpha |\xi|^{1+\alpha})^2 t^2}{(1 + |\xi|^{1+\alpha})^4} F \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq c(t) \left(\| F \widehat{\varphi} \|_0 + \| \mathcal{D}_\xi^b(F \widehat{\varphi}) \|_0 \right) \\
&\leq c(t) (\| \widehat{\varphi} \|_0 + B_{2,2})
\end{aligned}$$

El término B_4 se acota de forma similar al término B_3 , para finalizar acotemos B_5 :

$$\begin{aligned}
B_5 &= \| D_\xi^b(F_\alpha \partial_\xi^2 \widehat{\varphi}) \|_0 \\
&\leq c \left(\| F \partial_\xi^2 \widehat{\varphi} \|_0 + \| F \|_\infty \| \mathcal{D}_\xi^b(\partial_\xi^2 \widehat{\varphi}) \|_0 + \| \mathcal{D}_\xi^b F \cdot \partial_\xi^2 \widehat{\varphi} \|_0 \right) \\
&\leq c(t) (\| |x|^2 \varphi \|_0 + \| |x|^{2+b} \varphi \|_0 + \| t^b |x|^2 \varphi \|_0) \\
&\leq c(t) \| \varphi \|_{L^2_{s,2+b}}
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.1. *Si $\varphi \in \mathfrak{S}_{s,r}(\mathbb{R})$ con $s > 1/2$ y $0 \leq r < 5/2 + \alpha < 3$, entonces existen un $T = T(\|\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}}, M) > 0$ y una única función $u \in C([0, T]; \mathfrak{S}_{s,r})$ que satisface la ecuación integral 3.2, además la función $\varphi \rightarrow u$ asociada a la ecuación 1-1 es continua.*

Demostración. Por las proposiciones 4.1.1 y 4.1.3 donde acotamos respectivamente el operador A y el grupo $E(t)$ en $\mathcal{F}_{s,r}(\mathbb{R})$ y siguiendo las mismas ideas de la teoría en $H^s(\mathbb{R})$ se obtiene el buen planteamiento local. □

4.2. Continuación única de las soluciones

Teorema 4.2.1. *Si $\varphi \in \mathfrak{S}_{s,r}(\mathbb{R})$ con $s > 1/2$ y $0 \leq r \leq 5/2 + \alpha < 3$, donde se satisfacen las condiciones del teorema 4.1.1 de buen planteamiento local, sea $u \in C([0, T]; \mathfrak{S}_{s,r})$ la solución del problema de valor inicial 1-1, con $u(0) = \varphi$, tal que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \leq 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$, si para dos tiempos $t_1 = 0 < t_2 < T$ se tiene que $u(t_j) \in \mathfrak{S}_{5/2+\alpha,0}^{s_1,s_2}$ para $j = 1, 2$ entonces $u \equiv 0$.*

Demostración. Sea $u \in C([0, T]; \mathfrak{S}_{s,r})$ la solución 1-1, y multiplicando x^2 por la ecuación integral 3.2 tenemos:

$$x^2 u = x^2 E(t) \varphi + x^2 \int_0^t E(t - \tau) A(u^p(\tau)) d\tau$$

analizaremos la derivada $D_\xi^{1/2+\alpha}$ en ambos lados de la igualdad para $0 \leq \alpha < 1/2$. Aplicando la transformada de Fourier al primer término tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_\xi^2(F\hat{\varphi}) &= \partial_\xi^2 F(t, \xi) \hat{\varphi} + 2\partial_\xi F(t, \xi) \partial_\xi \hat{\varphi} + F(t, \xi) \partial_\xi^2 \hat{\varphi} \\ &= \frac{-i\alpha(1+\alpha)|\xi|^{2\alpha+1} \operatorname{sgn}(\xi)t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F(t, \xi) \hat{\varphi} + \frac{i(1+\alpha)(2+\alpha)|\xi|^{\alpha+1} \operatorname{sgn}(\xi)t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F(t, \xi) \hat{\varphi} \\ &\quad - \frac{1-\alpha|\xi|^{1+\alpha}t^2}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^4} F(t, \xi) \hat{\varphi} + \frac{2i(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^2} F(t, \xi) \partial_\xi \hat{\varphi} + F(t, \xi) \partial_\xi^2 \hat{\varphi} \\ &= C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Las cotas que tenemos en 4.6 para $0 < b < 1$ son:

$$\begin{aligned} \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^{2\alpha+1} \operatorname{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} t F(y, \xi) \hat{\varphi} \right) \right\|_0 &\leq c(t) \|\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,3}} \\ \left\| D_\xi^b \left(\frac{(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})^2}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} t^2 F(y, \xi) \hat{\varphi} \right) \right\|_0 &\leq c(t) \|\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,3}} \\ \left\| D_\xi^b \left(\frac{1-\alpha|\xi|^{1+\alpha}}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^2} t F(y, \xi) \partial_\xi \hat{\varphi} \right) \right\|_0 &\leq c(t) \|\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,3}} \\ \|D_\xi^b(F(t, \xi) \partial_\xi^2 \hat{\varphi})\|_0 &\leq c(t) \|\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,3}} \end{aligned}$$

Por lo tanto $D_\xi^{1/2+\alpha}C_i \in L^2(\mathbb{R})$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ para acotar C_2 usaremos la función de corte 4.1 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{i(1+\alpha)(2+\alpha)|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F(t, \xi) \widehat{\varphi} \\ &= \frac{K_\alpha |\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F(t, \xi) \widehat{\varphi} + \frac{K_\alpha |\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)(1-\chi(\xi))}{(1+|\xi|^{1+\theta})^3} F(t, \xi) \widehat{\varphi} \\ &= C_{2,1} + C_{2,2} \end{aligned}$$

donde $K_\alpha = -i(1+\alpha)(2+\alpha)$

Por la ecuación 4.7 tenemos que $D_\xi^{1/2+\alpha}C_{2,2} \in L^2(\mathbb{R})$. Para el término $C_{2,1}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} C_{2,1} &= K_\alpha \frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F(t, \xi) \widehat{\varphi} \\ &= K_\alpha |\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)t \widehat{\varphi} \left(\frac{F(t, \xi)}{(1+|\xi|^{1+\theta})^3} - 1 \right) + K_\alpha |\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)t \widehat{\varphi} \\ &= D_1 + D_2 \end{aligned}$$

como $D_\xi^{1/2+\alpha} \in L^2(\mathbb{R})$ y además

$$(x^2 E(t_2) \varphi)^\wedge = C_1 + D_1 + D_2 + C_{2,2} + C_3 + C_4 + C_5$$

entonces

$$D_\xi^{1/2+\alpha}((x^2 E(t) \varphi)^\wedge - D_2) \in L^2(\mathbb{R})$$

lo que indica que :

$$D_\xi^{1/2+\alpha}((x^2 E(t) \varphi)^\wedge - K_\alpha |\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)t \widehat{\varphi}(\xi)) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (4.9)$$

Para el término de la integral tomemos $u^p = v$ y por Plancherel se tiene:

$$\|x^2 E(t) A(v)\|_0 = \left\| \partial_\xi^2 \left(F \frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \widehat{v} \right) \right\|_0,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\partial_\xi^2 \left(F \frac{-i\xi}{1+|\xi|} \widehat{v} \right) &= \partial_\xi^2 F \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \widehat{v} \right) + 2\partial_\xi F \partial_\xi \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \widehat{v} \right) + F \partial_\xi^2 \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \widehat{v} \right) \\
&= \left(\frac{i\alpha(1+\alpha)|\xi|^{2\alpha+1} \operatorname{sgn}(\xi)t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} - \frac{i(1+\alpha)(2+\alpha)|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} - \frac{(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})^2 t^2}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^4} \right) F \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|} \widehat{v} \right) \\
&\quad + \frac{2i(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^2} F \left(\frac{-i(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^2} \widehat{v} + \frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \partial_\xi \widehat{v} \right) \\
&\quad + F \left(\frac{-i\alpha(1+\alpha)|\xi|^{2\alpha+1} \operatorname{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{v} + \frac{i(1+\alpha)(2+\alpha)|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} \widehat{v} + \frac{-2i(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^2} \partial_\xi \widehat{v} \right) \\
&\quad + F \left(\frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \partial_\xi^2 \widehat{v} \right) \\
&= \frac{\alpha(1+\alpha)|\xi|^{2\alpha+2} t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^4} F \widehat{v} - \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^4} F \widehat{v} + \frac{i(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})^2 \xi t^2}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^5} F \widehat{v} \\
&\quad + \frac{2(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})^2 t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^4} F \widehat{v} + \frac{2(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha}) \xi t}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F \partial_\xi \widehat{v} + \frac{-i\alpha(1+\alpha)|\xi|^{2\alpha+1} \operatorname{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F \widehat{v} \\
&\quad + \frac{i(1+\alpha)(2+\alpha)|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F \widehat{v} + \frac{-2i(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^2} F \partial_\xi \widehat{v} + \frac{-i\xi}{1+|\xi|^{1+\alpha}} F \partial_\xi^2 \widehat{v} \\
&= E_1 + E_2 + \dots + E_9
\end{aligned}$$

$$D_\xi^{1/2+\alpha} E_i \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R})), \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, 9 \quad i \neq 7$$

Haremos la acotación de E_3 en detalle, los demás términos se acotan de forma similar. Para mayor comodidad sea $d = 1/2 + \alpha$ y de la proposición 2.3.1 y la desigualdad 4.5 tenemos:

$$\begin{aligned}
\|D_\xi^d E_3\|_0 &= \left\| D_\xi^d \left(\frac{i(1-\alpha|\xi|^{1+\alpha})^2 \xi t^2}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^5} F \widehat{v} \right) \right\|_0 \\
&\leq c(t) \left(\|F \widehat{v}\|_0 + \|\mathcal{D}_\xi^d(F \widehat{v})\|_0 \right) \\
&\leq c(t) \|\varphi\|_{\mathfrak{S}_{s,r}}
\end{aligned}$$

El problema esta en el término E_7 , lo reescribimos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
E_7 &= \frac{i(1+\alpha)(2+\alpha)|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F \widehat{v} \\
&= -K_\alpha \frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)(1-\chi(\xi))}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F \widehat{v} - K_\alpha \frac{|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)\chi(\xi)}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} F \widehat{v} \\
&= E_{7,1} - K_\alpha |\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)\chi(\xi) \left(\frac{F}{(1+|\xi|^{1+\alpha})^3} - 1 \right) \widehat{v} - K_\alpha |\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi)\chi(\xi) \widehat{v} \\
&= E_{7,1} + E_{7,2} + E_{7,3}
\end{aligned}$$

como $D_\xi^{1/2+\alpha} E_{7,1}, D_\xi^{1/2+\alpha} E_{7,2} \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$ por lo tanto

$$D_\xi^{1/2+\alpha} \left((x^2 E(t) A(v))^\wedge - E_{7,3} \right) \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \quad (4.10)$$

de las ecuaciones 4.9 y 4.10, tenemos:

$$D_\xi^{1/2+\alpha} \left((x^2 u(t))^\wedge - K_\alpha |\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi) t \widehat{\varphi}(\xi) + K_\alpha |\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi) \int_0^t \widehat{v}(\tau, \xi) d\tau \right) \in L^2(\mathbb{R})$$

para todo $t \in [0, T]$, por hipótesis existe t_2 tal que $u(t_2) \in \mathfrak{S}_{s, 1/2+\alpha}$, por lo tanto

$$D_\xi^{1/2+\alpha} \left(|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi) \left(\int_0^{t_2} \widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{v}(\tau, \xi) d\tau \right) \right) \in L^2(\mathbb{R}). \quad (4.11)$$

Para mayor comodidad sea $\widehat{h}(\xi) = \left(\int_0^{t_2} \widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{v}(\tau, \xi) d\tau \right)$, por lo tanto:

$$D_\xi^{1/2+\alpha} (|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi) \widehat{h}(\xi)) \in L^2(\mathbb{R})$$

reescribiendo al anterior ecuación:

$$D_\xi^{1/2+\alpha} \left(|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi) (\widehat{h}(\xi) - \widehat{h}(0)) + |\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi) \widehat{h}(0) \right) \in L^2(\mathbb{R})$$

como:

$$D_\xi^{1/2+\alpha} \left(|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi) (\widehat{h}(\xi) - \widehat{h}(0)) \right) \in L^2(\mathbb{R})$$

entonces

$$D_\xi^{1/2+\alpha} \left(|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi) \widehat{h}(0) \right) \in L^2(\mathbb{R})$$

pero la proposición 2.3.2 dice que $D_\xi^b (|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi)) \in L^2(\mathbb{R})$ si y solo si $b < 1/2 + \alpha$, entonces

$$D_\xi^{1/2+\alpha} \left(|\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) \chi(\xi) \widehat{h}(0) \right) \notin L^2(\mathbb{R})$$

a menos que $\widehat{h}(0) = 0$, es decir

$$\int_0^{t_2} \widehat{\varphi}(0) - \widehat{v}(\tau, 0) d\tau = 0$$

es decir,

$$\int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(x) - v(\tau, x)) dx d\tau = 0$$

y como $v = u^p$, tenemos

$$\int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(x) - u^p(\tau, x)) dx d\tau = 0$$

por hipótesis $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \leq 0$ entonces $u^p = 0$, con valores de p pares, tenemos que $u \equiv 0$. \square

Bibliografía

- [A.Alazmani et al., 2006] A.Alazmani, Albert, P., Bona, J. L., Chen, M., and Wu, J. (2006). Comparisons between the BBM equation and a boussinesq system. Adv. Differential Equations 11, 2 edition.
- [Banquet, 2011] Banquet, J. A.-M. S.-C. (2011). The regularized Benjamin Ono and BBM equations: Well-posedness and nonlinear stability. Journal of Differential Equations, 250 edition.
- [Benjamin., 1967] Benjamin., T. (1967). Internal waves of permanent form in fluids of great depth. Journal of fluid Mechanics.
- [Bergh and L fstr m, 1976] Bergh, J. and L fstr m, J. (1976). Interpolation spaces: an introduction. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag.
- [Bolaños, 2018] Bolaños, J. F. (2018). El problema de Cauchy asociado a una generalizaci n de la ecuación ZK-BBM. Doctorado thesis, Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá.
- [Bona and Mahony., 1972] Bona, T. B. J. and Mahony., J. J. (1972). Models equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.
- [Chen, 2003] Chen, J. L. B.-H. (2003). Local and global well-posedness results for generalized BBM-type equations. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 234, dekker, new york edition.
- [Fonseca et al., 2013] Fonseca, G., Linares, F., and Ponce, G. (2013). The IVP for the dispersion generalized benjamin-ono-equation in weighted sobolev spaces. a. In Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis, pages 763-790. Elsevier.
- [Fonseca et al., 2015] Fonseca, G., Rodriguez, G., and W. Sandoval, F. (2015). Well-Posedness and Ill-Posedness Results for the Regularized Benjamin-Ono Equation in Weighted Sobolev Spaces. 14. Communications on Pure and Applied Analysis, 4 edition.
- [Gallouet, 1980] Gallouet, H. B.-T. (1980). Nonlinear Schrödinger evolution equations. Non-linear Anal. 4 (4), 4 edition.

- [Halanay, 1966] Halanay, A. (1966). Differential equations: Stability, oscillations, time lags. Academic press, 23 edition.
- [Íório et al., 2001] Íório, R. J., Jr., and de Magalhães Íório, V. (2001). Fourier Analysis and Partial Differential Equations. Cambridge studies in advanced mathematics, 70 edition.
- [Íório and Nunes, 1991] Íório, R. J. and Nunes, W. V. L. (1991). Introdução às equações de Evolução não Lineares. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA., 18° edition.
- [Íório-Jr. and de Magalhães Íório, 1988] Íório-Jr., R. J. and de Magalhães Íório, V. (1988). Equações diferenciais parciais: Uma introdução. Projeto Euclides, IMPA/CNPq.
- [Kato and Ponce, 1988] Kato, T. and Ponce, G. (1988). Commutator estimates and the euler and navier-stokes equations. 891-907. Communications and pure and applied mathematics, 41(7) edition.
- [Korteweg and de Vries, 1895] Korteweg, D. D. J. and de Vries, D. G. (1895). XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, volume 39. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.
- [Kreyszig, 1978] Kreyszig, E. (1978). Introductory functional analysis with applications. Jhon Wiley & Sons.
- [Linares and Ponce, 2009] Linares, F. and Ponce, G. (2009). Introduction to nonlinear dispersive equations. Springer-Verlag.
- [Ono., 1975] Ono., H. (1975). Algebraic solitary waves in stratified fluids. Journal of the Physical Society of Japan.
- [Ponce, 2011] Ponce, G. F.-G. (2011). The IVP for the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces. J. Funct. Anal., 2 edition.