UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN EL AULA USANDO EL MÉTODO DE ANÁLISIS Y SÍNTESIS

YAZMÍN VEGA

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2013

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN EL AULA USANDO EL MÉTODO DE ANÁLISIS Y SÍNTESIS

YAZMÍN VEGA

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:

Doctora Clara Helena Sánchez Botero

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2013

A mi mamá por su invaluable apoyo.

La belleza de las matemáticas no reside en los resultados sino en su búsqueda

Albert Einstein

Agradecimientos

A la profesora Doctora Clara Helena Sánchez, Directora de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales por su paciencia y comprensión.

Resumen

Resolución de problemas geométricos en el aula usando el método de análisis y síntesis. Una propuesta de aula que desde la resolución de problemas geométricos usando el método de análisis y síntesis, mejora la comprensión de lo que es área y consolida una estrategia para calcular el área de figuras rectilíneas al *rectangularizarlas.* Rectangularizar es encontrar un rectángulo de igual área que la figura dada. El rectangularizar, nos parece un recurso heurístico más potente que *cuadrar*, método usado antiguamente para calcular el área de figuras, pues es más asequible a los escolares que en general tienen escasa formación geométrica. Esta propuesta aporta elementos conceptuales y procedimentales que posteriormente facilitaran la comprensión del álgebra, la trigonometría y el cálculo infinitesimal

Palabras clave: Resolución, problemas, análisis, síntesis, método, área, descomposición.

Abstract

Solving geometrical problems in the classroom by means of the analysis and synthesis method. Starting from the resolution of geometrical problems and by using the analysis and synthesis method, this classroom proposal allows students to better understand the concept of area while at the same time consolidating a strategy to caculate the area of rectilinear figures by *rectangularizing* them. *Rectangularizing,* i.e., finding a rectangle whose area is equal to the one of the figure given, is a heuristic resource we consider more powerful that *squaring*, the method formerly used to calculate the area of figures, as it is more accessible to students who in general have poor geometrical education. This proposal contributes conceptual and procedural elements that will later on facilitate the comprehension of algebra, trigonometry and inifinitesimal calculus.

Keywords: Resolution, problems, analysis, synthesis, method, field, decomposition.

Contenido

Planteamiento del Problema

En los Lineamientos curriculares de matemáticas[1], se reconoce que “La geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación”. Pese a este reconocimiento, la formación en geometría en la escuela es insuficiente y en algunos casos incluso inexistente.

En mi práctica docente en secundaria a través de los años he observado en los escolares: 1.Ausencia o escaso uso de modelos geométricos para modelar situaciones problema. 2. Insistencia por asociar a problemas propuestos una operación aritmética, generalmente asociada al tema que se esté desarrollando, sin analizar la situación propuesta. 3. Uso de algoritmos como única estrategia para solucionar situaciones problema. 4. Poca atención a los datos del problema y las relaciones entre estos y entre ellos y la incógnita. 5. Olvido de algunas condiciones del problema. 6. Uso de la solución como parte de la estrategia de resolución del problema. 7. Descripción de lo realizado como explicación. 8. Abandono del problema una vez consideran han encontrado la solución, sin analizar está a la luz del enunciado del problema o sin determinar si tiene sentido o no. 9. Reducción del análisis del problema a enunciar la operación u operaciones a realizar. Es posible que los estudiantes enuncien la operación a realizar, sin embargo no la realizan entre las cantidades que se requiere.

---

[1] Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá. Pág. 17.

Las dificultades antes descritas, no las presentan solo mis estudiantes ni están asociadas exclusivamente a mi práctica docente, como se infiere de diversos artículos de investigación en didáctica de las matemáticas que reportan la reiterada aparición de las dificultades antes enunciadas, al tiempo que proponen pautas y actividades que pueden influir positivamente en el aprendizaje de las matemáticas por los escolares.

Sí el profesor conoce y usa variados procedimientos y estrategias en el aula de clase para resolver problemas, los escolares tienen mayor oportunidad de imitar (repetir) los procesos que se le han presentado y usarlos cuando los requieran de manera oportuna y eficaz. Al conocerlos dispondrá de una estrategia más para resolver problemas, es decir contara con más recursos para enfrentar situaciones problema los cuales constituyen contextos significativos para construir y dar sentido al conocimiento matemático, o para usar el conocimiento ya adquirido.

El método de análisis y síntesis, es un método de resolución de problemas matemáticos, en particular de problemas geométricos. Es una de “las primeras estrategias de investigación y deducción documentadas que tienen que ver con la resolución de problemas”[2]. El método de análisis que consiste en, encontrar la solución de un problema partiendo de lo pedido como si ya estuviera dado, e ir encontrando lo que lo haría posible, sigue siendo usado en la resolución de problemas; sin embargo, por la tendencia en matemáticas a presentar los resultados de manera sintética y concisa y por la hegemonía de la deducción se invisibiliza el análisis dejando solo al descubierto la síntesis del proceso que parte de lo dado (hipótesis, axiomas y datos del problema), para deducir lo solicitado.

En este trabajo me propongo diseñar una propuesta didáctica dirigida a los escolares de básica, para mostrar en acción el método de análisis y síntesis en la

[2] Broncano, F. (1984).”El método de análisis y síntesis como lógica del descubrimiento” en Análisis y síntesis. Estudios de Lógica y Filosofía de la Ciencia, II. Ediciones Universidad de Salamanca. Salamanca, pág. 86.

resolución de problemas geométricos en particular en aquellos que requieran encontrar el área de figuras rectilíneas. Con ello se busca que tanto escolares como docentes aprendan a usarlo el método mientras se teje una estrategia para calcular el área de figuras rectilíneas. El uso del método debe mejorar la comprensión de lo que es área, facilitar el aprendizaje de un procedimiento para calcular el área de figuras rectilíneas y la comprensión del método de análisis y síntesis.

La insistencia que se dará al área de los rectángulos reside en que a través de ellos, se puede calcular con alto grado de precisión el área de figuras rectilíneas y permite hacer buenas aproximaciones del área de figuras no rectilíneas. De esta manera se prepara además a los estudiantes para más adelante comprender el concepto de integral. Es decir que la habilidad para calcular el área de figuras rectilíneas al transformar estas en rectángulos, funciona como modelo para el álgebra geométrica y para el cálculo del área bajo una curva, a través del cálculo infinitesimal.

Históricamente el cuadrado ha sido usado como recurso para calcular el área de una figura sea rectilínea o no, proceso denominado “cuadrar” figuras; esto es, hallar un cuadrado de igual área que la figura dada. El más famoso ejemplo de ello es la cuadratura del círculo. El uso del rectángulo lo considero más potente pues si bien toda figura rectilínea es *rectangularizable*[3] y por tanto cuadrable; el rectangularizar constituye un proceso más accesible a los escolares, pues se reduce a encontrar sendos rectángulos de doble área que cada uno de los triángulos en que se descompone la figura rectilínea dada, de tal manera que el área de la figura dada será la mitad de la suma de las áreas de los rectángulos encontrados. Si bien un rectángulo puede ser cuadrable este es un proceso más largo y complejo (proposición 45 del libro I de Los *Elementos* de Euclides).

[3] En este trabajo así denominaremos *rectangularizar* al proceso de descomponer una figura rectilínea en triángulos para luego encontrar sendos rectángulos con igual base y altura que cada triángulo y con doble área que el triángulo dado.

1. EL MÉTODO DE ANÁLISIS Y SINTESIS

Es un método para solucionar problemas, en particular de tipo geométrico. Históricamente ha sido usado con distintas acepciones, algunas de ellas se citarán más adelante. En este trabajo se usará en el sentido propuesto por Polya[4], para quien análisis y síntesis es una estrategia para resolver problemas, consistente en descomponer en problemas más sencillos o en partes los problemas cuya solución no es identificable rápidamente, e ir encontrando la razón de ser de ellos o su solución, trabajando hacia atrás desde lo pedido como si fuera dado (análisis) y avanzando hacia lo dado, para luego sintetizar u ordenar el proceso desde lo dado hasta lo pedido (síntesis).

Una reconstrucción racional[5] del método de análisis y síntesis como lógica del descubrimiento, consistirá en explicitar la lógica subyacente al usar el método, es decir, en explicitar los procesos que intervienen al usar el método. Los procesos inferenciales en el análisis no necesariamente coinciden con los procesos usados en la síntesis.

[4] Polya, en "Como plantear y resolver problemas", propone heurísticas acordes con la estructura de los problemas a resolver, complementando la lista de preguntas que propone al inicio del libro y que asegura ayudan y orientan el proceso de resolver problemas.
[5] Broncano, F. Op. Cit, pág. 81.

1. 1. El Método de análisis y síntesis como lógica del descubrimiento

El intento por explicar o describir el proceso subyacente al descubrimiento de leyes, regularidades, teorías o de la prueba de los hallazgos encontrados, ha conducido a distintos autores entre ellos a Fernando Broncano[6] al rastreo histórico de usos e interpretaciones del método de análisis y síntesis.

Resultado de esta exploración, el trabajo de Broncano se convirtió en una exposición de argumentos para justificar que "el método de análisis constituye un patrón de solución de problemas válido aunque no efectivo"[7], (pues no siempre conduce a la solución de los problemas), e insumo para proponer una lógica del descubrimiento, como alternativa de posibilidad de racionalizar la creatividad puesta en juego en la resolución de problemas.

La investigación científica busca las causas o predecir las consecuencias de situaciones o fenómenos; en la solución de un problema la búsqueda no es ciega ni irracional, sino una actividad creativa y reflexiva que se va reorientando permanentemente. Los hallazgos y el saber previo van determinando paulatinamente las decisiones a tomar, a veces no con absoluta certeza pero si permitiendo vislumbrar y valorar las posibilidades de acción. Se puede concluir entonces que en la acción de resolver un problema van emergiendo reglas para proceder que a su vez se van mejorando en la actividad misma de resolver el problema.

Las estrategias que emergen en la solución de un problema están vinculadas a éste y por tanto no necesariamente son universales. Las estrategias de descubrimiento que emergen en el proceso de indagación de causas y consecuencias de situaciones o fenómenos o en la solución de problemas, no suelen coincidir con los procesos reportados por los científicos, porque casi siempre en sus reportes invisibilizan las fallas, obstáculos y las soluciones

---

[6] Idem.
[7] Broncano, F. Op. Cit, pág. 82.

parciales, dejando al descubierto solo el proceso conciso y exitoso. Así la oculten, al emerger e ir orientando la solución del problema y la búsqueda de causas y consecuencias de situaciones y fenómenos actúan con una lógica que se lama la *lógica del descubrimiento.*

Los procesos usados, por las personas entre ellos los científicos, para solucionar un problema que no necesariamente conducen a la solución sino que orientan la búsqueda de soluciones a problemas, se denominan *Cuasi-algoritmos*[8]. Los cuasi-algoritmos son procesos usados en la indagación que orientan la búsqueda sin garantizar que exista solución.

Los cuasi-algoritmos empleados en la solución de un problema no suelen ser socializados, en general parecieran ser descartados para dar paso a la síntesis: presentación del proceso que conduce a la solución, a partir de la hipótesis o datos del problema. Como si el proceder para encontrar la solución hubiese sido sistemático y determinista.

Razones para ocultar el camino recorrido, al exponer la solución de un problema parecen no faltar, entre ellas puede citarse: Lo larga y desordenada que resultaría la exposición, la falta de rigor, la variedad de alternativas abordadas y descartadas, lo desconcertante de las decisiones y procesos abordados, etc… y por supuesto en matemáticas, la concepción de que un buen proceder matemático es conciso, universal y concluyente. Razones suficientes aparentemente para invisibilizar los caminos transitados y descartados por no conducir directamente a la meta.

[8] Broncano, F. Op. Cit, pág. 84.

1.2. El método de análisis y síntesis en la Escuela

Mostrar y reconocer los fracasos y errores cometidos al solucionar un problema resulta crucial en la formación matemática de los escolares y de los docentes de matemáticas. Permite reconocer las matemáticas como una producción humana cuyos productos no han sido inmediatos, rápidos y obvios, sino producciones que han conllevado mucho tiempo y en las que subyacen dificultades y obstáculos para su comprensión y desarrollo. La conciencia de este transitar puede actuar como semáforo en el proceso de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas pues, al mostrar los procesos de resolución de problemas, según Kuhn[9], se actúa como transmisor de procesos para resolver problemas y al identificar dificultades y obstáculos en la resolución de problemas se pueden tomar decisiones en la planeación del trabajo con los escolares, para que estos superen las dificultades y los obstáculos. También sirve para identificar condiciones a tener en cuenta en la resolución de problemas.

El método de análisis y síntesis incursiona actualmente en la escuela como heurística para la solución de problemas aritméticos. Por ejemplo en el colegio italiano Leonardo Da Vinci de Bogotá desde hace décadas el método es empleado en la resolución de problemas, haciendo énfasis en la identificación y nominación de los datos y dela incógnita y al establecimiento de relaciones entre los datos y entre los datos y la incógnita. Al ser usado el método por los escolares alternada y parcialmente y no sistemáticamente en la solución de problemas como se esperaba, este se convirtió en objeto de estudio “pareciera que el camino que se había seleccionado para orientar la enseñanza en la resolución de problemas, se haya convertido en la meta u objetivo de aprendizaje.” [10] Consideramos que con nuestra propuesta es más plausible propiciar la apropiación y uso del método de análisis y síntesis por los escolares, pues lo

---

[9] Broncano, F. Op. Cit, pág. 84.
[10] Barrios, O.; Guacaneme, A. (2011). Evento: XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas Ponencia: “El método de análisis- síntesis en la aritmética escolar: Cuando el camino se vuelve la meta.

mostramos como heurística para solucionar problemas geométricos donde resulta más natural usarlo basados en investigaciones que reportan que los obstáculos y problemas a los que se han enfrentado los matemáticos y la humanidad en la construcción de conocimiento matemático son los mismos por los que pasan los escolares.

1.3 Rastreo histórico del Método de análisis y síntesis

Pese a que no se suelen difundir los cuasi-algoritmos uno se difundió, el método de análisis y síntesis usado por los antiguos griegos. Por mucho tiempo fue el método por excelencia para solucionar problemas, construir conocimiento y plantear teorías. A continuación se evocan algunos personajes que usaron el método y la acepción con que lo usaron:

- **Pappo (290-350, ac)**, a través de sus Comentarios a los *Elementos* de Euclides contribuyó a la difusión del método. Pappo, diferencia entre el proceso teórico, conducente a establecer la verdad de una proposición y el problemático para establecer lo que se ha solicitado.

  "El análisis parte de lo buscado- como si ya estuviera dado y pasa a través de sus consecuencias hasta algo que es admitido en la síntesis, ya que en el análisis partimos de lo buscado como si estuviera dado ya, e investigamos desde dónde resulta y, de nuevo, cuál es el antecedente de esto último y así hasta que, **trabajando hacia atrás**, llegamos a algo conocido y que es lo primero en el orden. A este método lo llamamos análisis, siendo una solución hacia atrás. Pero en la síntesis, por el contrario, tomamos como dado lo último encontrado en el análisis, siendo una solución y disponiendo en su orden natural lo que antes era antecedentes y encadenándolos sucesivamente unos con otros, llegamos finalmente al descubrimiento de lo buscado."[11].

- **Hipócrates de Cos**, (c. 470). *En Resolution y compositio: Método de la ciencia matemática y experimental,* resuelve problemas retro-ductivamente (retrotrayendo la prueba de unas proposiciones iníciales a la prueba de otras más básicas), al seleccionar proposiciones que fungen como supuestos oportunos para el problema particular a resolver. Este proceder resulta similar a lo que más adelante se denominará "método de análisis" y que se supondrá característico de la investigación geométrica griega".[12] . Hipócrates, al intentar cuadrar el círculo descubrió que podía dibujar dos lunas, cuyas áreas fueran igual al área de un rectángulo, solucionando así un problema de cuadraturas. "Así se denomina el problema de construir un área rectilínea igual a un área limitada por una o varias curvas. La secuela a intentos de este tipo fue la invención del cálculo integral" [13]

- **Descartes, (1596-1650),** introdujo símbolos algebraicos para evocar y operar con objetos geométricos, es decir aritmetizó la geometría; por ejemplo, usó la longitud de segmentos en lugar de los segmentos mismos, con lo que funda la geometría analítica base indiscutible para la invención del cálculo infinitesimal. Descartes, en las respuestas a las segundas objeciones en sus Meditaciones dice: "El análisis muestra el verdadero camino por el que una cosa ha sido metódicamente construida (inventada), y manifiesta cómo los efectos dependen de las causas; de suerte que, si el lector sigue dicho camino, y se fija bien en todo cuanto encierra, entenderá la cosa así demostrada tan perfectamente, y la hará tan suya, como si el mismo lo hubiera demostrado"[14]. Es posible que en razón a esta creencia afirmara que los griegos usaban el

[11] Broncano, Op. Cit, pág. 87.
[12] Vega R. (1991). Introducción a los *Elementos*. Gredos. España. Pág. 31
[13] HERBERT, W. (1994). "Los grandes Matemáticos" en SIGMA El mundo de las Matemáticas. Grijalbo, Barcelona. Pág. 19.
[14] Broncano, Op. Cit, pág.177.

método de análisis en la solución de problemas pero que lo ocultaban dejando solo a la vista la síntesis, pues lo consideraban tan importante que se lo reservaban solo para ellos.

- **Galileo (1564-1576) y Newton (1642-1727)**, emplearon el método de análisis y síntesis en sus investigaciones, por tanto es uno de los métodos de los creadores de la ciencia moderna[15]. Galileo y Newton, para la descripción de fenomenos identificaban todas las variables que afectan e intervienen en los fenoménos, y con una expresión matemática o modelo del fenoméno describian la relación entre las variables, para ello solo consideraban las variables que son susceptibles de ser medidas o contadas. La expresión matemática, así construida no describe un caso o unos casos particulares sino cualquier caso, es decir recoge el fenoméno y no unas manifestaciones particulares del mismo.

  Para identificar las variables que determinan el fenoméno estudiado, es necesario comprenderlo, esa comprensión o aprehensión del fenoméno, pasa por descomponerlo en sus elementos e identificar relaciones entre estos, e identificar condiciones para que se presente, proceder usado en diversos ámbitos, conocido como método de análisis.

- **Polya (1887-1985)**. Polya, propone el método de análisis como heurística para resolver problemas que no se comprenden globalmente, por lo que una opción plausible es descomponerlos en partes, que al ser analizadas separadamente determinan conclusiones y resultados parciales. Al tomar estos resultados parciales y diferenciar entre ellos los que son relevantes de los que no lo son conforme a las condiciones del problema permiten inferir al menos parcialmente la resolución del problema, es decir, que para Poyla, se trata de

[15] Hernández, C. (2004). “Galileo: El Arte de la Ciencia”. UN. Bogotá.

ver un problema complejo como varios problemas más sencillos cuya solución orienta la solución del problema inicial.

- **Lakatos (1922-1974).** Asegura que para solucionar problemas usa el método de análisis al deducir la conjetura inicial por el camino inverso al seguido para ir del dato a la incógnita[16]. Lakatos, coincide con Pappos en como entienden el método y lo expresa de manera similar a como lo citamos en pág.11.

El breve recuento histórico, que hemos hecho, de usos y acepciones del método de análisis y síntesis, se justifica en tanto que reconocer y comprender el desarrollo histórico del conocimiento matemático así como sus avatares para consolidarse como saber permite prever dificultades, obstáculos e interpretaciones que pueden presentar los escolares durante el aprendizaje y aporta contextos que posibiliten la construcción de los significados esperados. Es decir, que reconociendo las dificultades y obstáculos que han enfrentado los matemáticos y la humanidad, al resolver problemas que involucran la medida del área de figuras rectilíneas y al usar el método de análisis y síntesis, se tiene más oportunidad de proponer tareas para ayudar a los escolares a superar esos obstáculos y dificultades y mejorar la comprensión del método de resolución de problemas y de medida de áreas.

Muchas de las dificultades y obstáculos que la humanidad o la comunidad matemática han enfrentado al aprehender los conceptos y procesos coinciden con las dificultades y obstáculos manifiestas en los escolares para comprender esos conceptos o procesos por ello es que la historia se ha convertido en un excelente recurso didáctico. Algunas pautas para aprovechar el conocimiento histórico en el aula, son recogidas en los *Lineamientos curriculares*[17].

---

[16] Lakatos, I. (1981). Matemática, ciencia y epistemología. Alianza. Madrid. Pág. 107.
[17] Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá. Pág. 15.

“Es importante resaltar que el valor del conocimiento histórico al abordar el conocimiento matemático escolar no consiste en recopilar una serie de anécdotas y curiosidades para presentarlas ocasionalmente en el aula. El conocimiento de la historia puede ser enriquecedor, entre otros aspectos, para orientar la comprensión de ideas en una forma significativa, por ejemplo, en lugar de abordar los números enteros desde una perspectiva netamente estructural a la cual se llegó después de trece siglos de maduración, podrían considerarse aquellos momentos culminantes en su desarrollo para proporcionar aproximaciones más intuitivas a este concepto; para poner de manifiesto formas diversas de construcción y de razonamiento; para enmarcar temporal y espacialmente las grandes ideas y problemas junto con su motivación y precedentes y para señalar problemas abiertos de cada época, su evolución y situación actual.”

2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución y planteamiento de problemas es uno de los cinco procesos transversales a los distintos pensamientos y sus respectivos sistemas, propuestos en la reglamentación colombiana para la formación matemática de los escolares[18].

La resolución de problemas como proceso puede usarse de al menos dos maneras: como contexto para construir y desarrollar conocimiento o como escenario de aplicación de conocimiento. Para que estas formas de usar los problemas sean aprehendidas por los escolares Polya sugiere que:

> "El profesor que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas, debe hacerles interesarse en ellos y darles el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica".[19]

La importancia que Polya atribuye a la imitación se explica desde Kuhn, quien plantea que mostrar a otros cómo se resuelven problemas "también sirve de transmisor de patrones de solución de problemas".

Polya, propone una lista de preguntas[20] que debe plantearse quien resuelve problemas para orientar o encaminar los esfuerzos a fin de alcanzar la meta

---

[18] Marco teórico: Propuesta curricular de Matemáticas. (1994), Lineamientos curriculares (1998), Estándares Básicos de competencias en Matemáticas, pág18.
[19] Polya, G. (2002)."Cómo plantear y resolver problemas". Trillas, México, pág 27.

propuesta. También propone que estos interrogantes deben ser interiorizados como estrategias heurísticas, susceptibles de ser usadas cada vez que se requiera para enfrentar, avanzar y desatascarse en los distintos momentos durante la resolución de un problema.

> "Si el maestro quiere desarrollar en sus alumnos el proceso mental que corresponde a las preguntas y sugerencias de nuestra lista, debe emplearlas tantas veces como vengan al caso de un modo natural. Además, cuando el maestro resuelva un problema ante la clase debe "dramatizar" un poco sus ideas y hacer las mismas preguntas que emplea para ayudar a sus alumnos".

Polya, diferencia cuatro momentos en la resolución de un problema y para cada momento enuncia unos interrogantes, que según él guiarán al *resolutor*[21] de problemas.

1. **Comprensión del problema**: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente, insuficiente, redundante o contradictoria, para determinar la incógnita?

2. **Concebir un plan**: ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Se ha enfrentado a un problema ligeramente menos difícil? ¿Podría enunciar el problema de otra manera? ¿Ha empleado todos los datos?

3. **Ejecución del plan**: Al ejecutar el plan, pruebe cada uno de los pasos, ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

---

[20] Las preguntas propuestas por Polya, al inicio de su libro "cómo plantear y solucionar problemas", se retomaran en este trabajo cuando se aborden las fases de resolución de un problema propuestas por el mismo Polya.
[21] Resolutor; es un anglicismo y se usa para referirse a quien está resolviendo un problema.

4. **Visión retrospectiva**: ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el resultado?, ¿Puede obtener el resultado en forma distinta? ¿Puede verlo de golpe?, ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro modo?

Cuando pese a las preguntas no se logra concebir directamente un plan o la manera de ejecutarlo, se puede recurrir a otras estrategias como la analogía, descomposición y composición de problemas, determinación, esperanzas y éxitos, diagnóstico, elaboración de una figura, etc.

En este trabajo solo nos detendremos en la descomposición y composición de problemas, en tanto esta heurística constituye una versión del método de análisis y síntesis estrategia históricamente usada esencialmente para resolver problemas geométricos. Problemas donde se pide construir una figura o razonar sobre figuras geométricas y algunas de sus propiedades.

2.1 Descomposición y Composición de problemas

La comprensión del enunciado de un problema implica la comprensión global del enunciado, es decir distinguir lo dado de lo pedido, reconocer las relaciones entre lo dado y entre lo dado y lo pedido. Concebir un plan, implica un reconocimiento global de qué hacer para llegar a lo pedido usando lo dado. Cuando no se tiene un plan global para la solución de un problema se puede optar por descomponer el problema en partes y ver parcialmente las relaciones entre los datos y entre los datos y la conclusión. Esto es, se reduce el problema a otro u otros que aportan en la solución.

Metafóricamente, el método de descomposición se usa cuando no se puede visualizar el bosque completo sino los árboles. En el caso de los problemas se trata de ver los elementos que lo constituyen e ir discriminando de lo que se ve, qué es relevante y cómo puede usarse para comprender o para solucionar el problema. Para luego componer las partes, no tomándolas todas a la vez sino conforme a las relaciones entre ellas propuestas en el enunciado, o en la descomposición que se hizo, para llegar a la solución del problema.

Estrategias o heurísticas para la resolución de problemas como la mencionada anteriormente recurren a formular problemas similares, enunciar el problema de otra manera, suponer una solución y ver si esta se ajusta a las condiciones del problema y resolver el problema hacia atrás. Es decir, estrategias que proceden de lo pedido a lo dado, de lo que se desea saber a lo que se sabe, ejemplifican el método de análisis, que va inevitablemente vinculado al de síntesis.

2.2 La resolución de problemas en la Escuela

Resolver problemas se aprende resolviendo problemas, viendo como otros resuelven problemas. Los interrogantes propuestos por Polya para cada uno de los momentos de la resolución de problemas nos permiten ampliar el repertorio de procedimientos para lograr el conocimiento matemático.

Al resolver problemas los escolares aprenden contenidos y procesos matemáticos; cultivan su autonomía, autoestima, capacidad de adaptación, creatividad e imaginación. Razones por las cuales en los Lineamientos curriculares[22], citando a Miguel de Guzmán, se propone incentivar que:

- El alumno manipule los objetos matemáticos.
- Active su propia capacidad mental.
- Reflexione sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo conscientemente.
- De ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental.
- Adquiera confianza en sí mismo.
- Se divierta con su propia actividad mental.
- Se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana.
- Se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

De lo anterior se extrapola que la formulación y solución de problemas permite alcanzar metas significativas en el proceso de construcción del conocimiento matemático, tales como:

[22] Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá. Pág. 24.

- Desarrollar habilidad para comunicarse matemáticamente: expresar ideas, interpretar y evaluar, representar, usar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas.
- Estimular procesos de investigación que subyacen al razonamiento matemático; nos estamos refiriendo precisamente a los procesos del pensamiento matemático: la manipulación (exploración de ejemplos, casos particulares); la formulación de conjeturas (núcleo del razonamiento matemático, proponer sistemáticamente afirmaciones que parecen ser razonables, someterlas a prueba y estructurar argumentos sobre su validez); la generalización (descubrir una ley y reflexionar sistemáticamente sobre ella); la argumentación (explicar el porqué, estructurar argumentos para sustentar generalización, someter a prueba, explorar nuevos caminos).

Dado que la resolución de problemas constituye un escenario privilegiado para adquirir significativamente nuevo conocimiento y que es posible descomponer problemas complejos en problemas más sencillos, en la propuesta de aula propondré unos problemas sencillos que contribuyan a que los escolares comprendan el concepto de área y unos problemas un poco más complejos para que identifiquen y se apropien de una estrategia que les permita calcular el área de figuras rectilíneas, a fin de ampliar su conocimiento geométrico y para potenciar el uso de representaciones geométricas para resolver problemas.

3. MÉTODO DE APLICACIÓN DE ÁREAS EN LOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Elementos es un tratado escrito en el año 300 a.c, por Euclides de Alejandría quien según Proclo, comentador del libro I vivió en la época de Tolomeo antes de Arquímedes. Dado que el título *Elementos*, se reserva para designar un grupo selecto de asunciones y proposiciones, las que tienen el estatus de principios dentro de una disciplina y sobre la que se teje la trama deductiva de las demás proposiciones como un cuerpo más o menos sistemático de conocimientos", los principios en los *Elementos* de Euclides son las definiciones, postulados y nociones comunes, y a partir de ellos se deducen las demás proposiciones"[23].

En los *Elementos* de Euclides, encontramos los elementos de la geometría y buena parte de la matemática de la época en que fue escrita. El autor propone unos primeros principios supuestamente irrefutables y aceptados sin discusión denominados nociones comunes, unos postulados o enunciados evidentes en sí mismos de lo que se acepta se puede hacer y unas definiciones que explícitamente indican que se debe entender con lo que se nombra. Enunció proposiciones que demostró a partir de ellos. Estas proposiciones pueden ser de dos clases, <u>teoremas</u> aquellas proposiciones que afirman que algo es de cierta manera y por tanto requieren de una demostración o prueba concluyente de que

[23] Vega R. (1991). Introducción a los *Elementos*. Gredos. España. Pág. 22

ese algo es así y no de otra manera, o problemas, proposiciones donde se pide hacer una construcción dadas unas condiciones[24].

3.1 La demostración en los *Elementos* de Euclides

Los teoremas son afirmaciones cuya veracidad debe ser establecida (demostrada) usando las definiciones, nociones comunes, postulados y las proposiciones anteriormente demostradas. La veracidad de una proposición se establece de manera contundente y universal en el sistema, lo que significa que dadas las condiciones iníciales lo que se concluye se hace de manera universal. Aun cuando los razonamientos casi siempre se hacen sobre una figura, esta figura representa cualquier figura que tenga las condiciones dadas.

Proclo, califica la proposición 1 del libro I, como canon de la demostración en matemáticas, ejemplo indiscutible de cómo establecer la veracidad de una proposición[25] y con base en él "señala una especie de pauta general de prueba de las proposiciones de los *Elementos*" [26] , se retoma en este trabajo este proceder pues sigue siendo el privilegiado por la comunidad matemática para verificar la validez de una proposición.

- Enunciado: Enunciado que declara lo dado y lo que se quiere establecer de manera universal. En el caso del teorema, establecer la veracidad de una afirmación y en el caso de los problemas hacer una construcción.
- Exposición: se presenta lo dado. "**Sea**", a veces usando notaciones para identificar lo dado o sus elementos. Esto dado, si se representa a través de una figura, representa a cualquier figura donde sea aplicable el enunciado.

[24] Vega R. (1991). Introducción a los *Elementos*. Gredos. España.
[25] Sin embargo fue criticada por Hilbert ya que no tenía en cuenta que el espacio es homogéneo. Esta es una de las fallas lógicas encontradas en los *Elementos*.
[26] Vega R. (1991). Introducción a los *Elementos*. Gredos. España. Pág. 35.

- Determinación ó delimitación. En el sentido usado por Hipócrates, para quien la determinación o delimitación, es la identificación de las condiciones bajo las cuales un problema tiene o no solución.

La determinación es la explicitación de lo que se debe hacer. En los problemas diciendo “**lo que se requiere**” y en los teoremas afirmando “**digo que**”. En la determinación se diferencian tres momentos:

a. Preparación. Reconocimiento de las relaciones o conclusiones directas a partir de lo dado.
b. Demostración. Prueba concluyente que algo es el caso. Constituye una cadena de derivaciones concluyentes y universales a partir de lo dado y sustentadas en las definiciones, postulados, nociones comunes y proposiciones anteriores, cuya veracidad se ha establecido previamente.
c. Conclusión; Cierre de la proposición, en los problemas, “**era lo que había que hacer”**, y en los teoremas, “**era lo que había que demostrar”**[27].

3.2 Problemas

Los Problemas son proposiciones en las que se pide construir un objeto geométrico que cumpla unas condiciones dadas, para ello se recurre básicamente a 1. Los postulados que enuncian lo que se puede hacer, sin que garanticen existencia de lo construido o de lo necesario para construirlo, pero que de existir sería de tal o cual manera, 2. Las definiciones para reconocer lo dado o lo construido, 3. Las nociones comunes y proposiciones; para sacar conclusiones. Según Vega Reñon[28],

[27] Vega R. (1991). Introducción a los *Elementos*. Gredos. España. Pág. 35-36.
[28] Vega R. (1991). Introducción a los *Elementos*. Gredos. España. Pág. 19.

> "los métodos utilizados, los más relevantes podrían ser el procedimiento elemental de construcción por "regla y compas", el procedimiento de aplicación de áreas- conocido como "álgebra geométrica"-, y un proceder demostrativo fundado en el principio de continuidad (libro X, por 1)- que, a su vez, se ha visto tildado de "método de exhausción".

De esta afirmación se extrapola que los métodos antes enunciados, son los métodos usados para la solución de problemas en los *Elementos* y por tanto algunos de los métodos usados en la antigüedad para resolver problemas geométricos.

Aparte del valor histórico, otra de las razones por las que son tan importantes los métodos de Euclides reside en que constituyen técnicas que pueden ser empleadas en la solución de variados problemas a diferencia de los "artificios" empleados en un caso o problema particular. Afirmación respaldada en el hecho que Euclides, en otra de sus obras "Los Datos", considerada obra auxiliar de los *Elementos*, trata los temas de los libros I-IV de los *Elementos* "con la práctica del análisis geométrico como vía de resolución de problemas: en el supuesto de que ciertas partes de una figura estén dadas (por lo que se refiere a su magnitud, posición etc.), muestra la manera de determinar otras partes en el mismo respecto.[29]

3.3 Método de Regla y Compás

El método de regla y compás es el más reconocido de los métodos empleados por Euclides. Ha sido tal su importancia que durante mucho tiempo se consideró que lo que podía construirse rigurosamente, era lo que se podía construir con regla y compás euclideanos. Regla, instrumento ideal para trazar rectas de cualquier longitud que al no tener marcas no permitía medir las longitudes

[29] Vega R. (1991). Introducción a los *Elementos*. Gredos. España. Pág. 14.

directamente. Compás, instrumento ideal para trazar círculos de cualquier radio y centro, que luego de usarse se cerraba, por lo que no permitía transferir longitudes.

Este método permite construir a partir de un punto dado rectas de igual longitud que una recta dada[30]. Proceder soportado en el hecho de poder construir circunferencia con radio y centro dado, en que todos los puntos de la circunferencia son equidistantes del centro y en que los triángulos equiláteros tienen sus tres lados iguales. La aplicación sistemática de este método permite operar con cantidades de la misma magnitud, en particular longitudes, adicionarlas, quitarlas, reiterarlas, dividirlas en dos partes iguales o desiguales, y compararlas a fin de determinar si son iguales o desiguales y en caso de ser desiguales determinar cuál es mayor o menor.

A continuación se ilustra geométricamente paso a paso la construcción de la Proposición 2 del libro I, usando el software libre “Regla y Compás”, construcción que se sustenta en la proposición 1, que indica cómo se construyen triángulos equiláteros con un lado determinado y, en los tres primeros postulados: Postulado 1, que postula que se puede trazar una recta para unir dos puntos dados. Postulado 2, que postula que es posible prolongar indefinidamente en línea recta una recta. 3, que postula que es posible construir un círculo con un centro y radio dados. Y en las definiciones de círculo (figura comprendida por una línea en la caen todas las rectas equidistantes de un punto llamado centro) y la definición de triángulo equilátero (triángulo que tiene sus tres lados iguales).

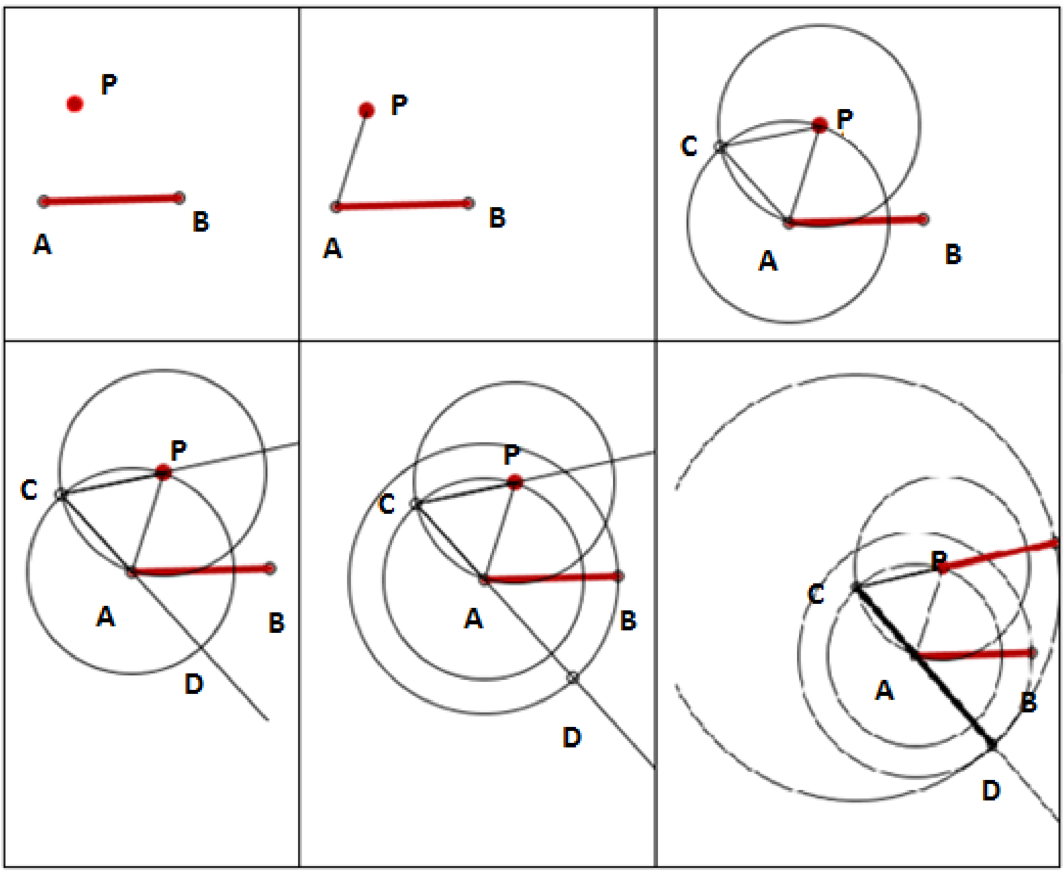
Para cada proposición se ilustrara el paso a paso de la construcción usando el Software libre *Regla y Compás*, y se hará el análisis o la síntesis del proceso

Proposición 2

[30] Proposiciones 2 y 3 del libro I de los *Elementos*

Problema: Poner en un punto dado (como extremo) una recta igual a una recta dada. Parafraseando esta proposición se ilustra el uso del compás Euclideo, para transferir longitudes a un punto dado.

Datos: Una recta (segmento) y un punto exterior a ella



Proposición LI.2. Poner en un punto dado (como extremo) una recta igual a una recta dada

Método: (Síntesis del proceso) Para poner en el punto P una recta igual a la recta dada AB.

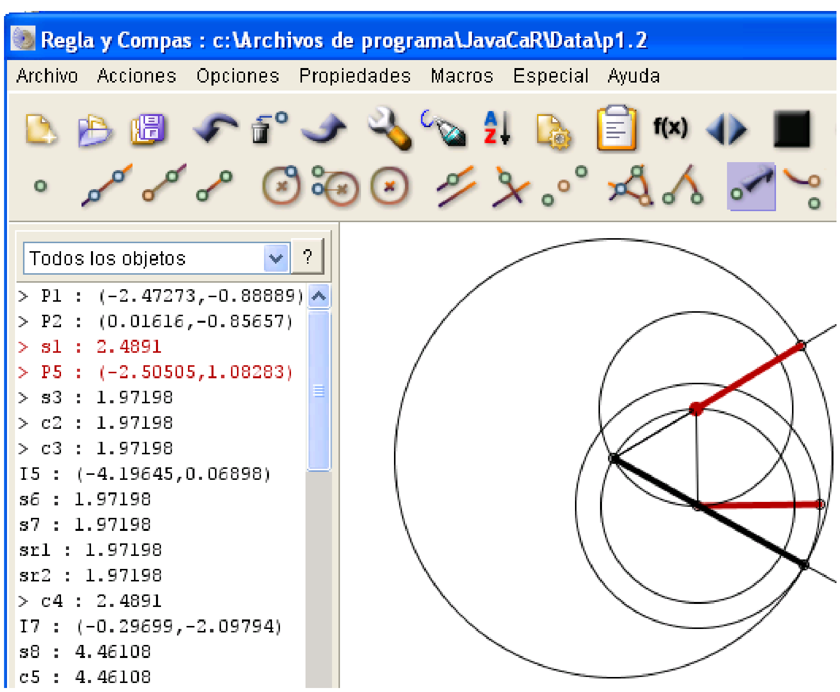
- Trácese una recta desde el punto P hasta el punto A.
- Con la recta trazada constrúyase el triángulo equilátero CAP.

- Prolónguese en línea recta los lados CA y CP del triángulo (lados distintos al lado que unió el punto y la recta dada).
- Trace la circunferencia con centro en A y radio AB.
- Marque la prolongación de la recta CA con la circunferencia trazada en el ítem anterior, llamemos a este punto D
- Construya la circunferencia con centro en C y radio CD
- Marque el punto intercepción entre la circunferencia trazada y la prolongación de CP, esta recta así determinada es igual que la recta CD y si a cada una de ellas le quitamos los lados del triángulo equilátero lo que resulta también son rectas iguales.

Análisis de la Proposición 2. Para trazar en un punto dado una recta de igual longitud que la longitud de una recta dada y que esta recta tenga como uno de sus extremos el punto dado, según la trama deductiva de los *Elementos*; como lo único que permite garantizar que las longitudes sean iguales es que la recta dada y la construida sean lados de un triángulo equilátero o que sean radios de una circunferencia, y como no son lados de un triángulo equilátero, dado que el punto puede estar en cualquier parte y por tanto la distancia de él a la recta no necesariamente coincidirá con la longitud de la recta. Lo que nos queda es construir una circunferencia.

Como no tenemos el centro debemos definirlo, relacionando el punto y la recta dada, para ello se une el punto dado con uno de los extremos de la recta dada, y con la recta así obtenida se arma un triángulo equilátero, como cuando a cosas iguales se le agregan cosas iguales lo que resulta también es igual, a la recta dada se le prolonga en una longitud igual al lado del triángulo. Uno de los radios de la circunferencia pasaran por el punto dado si asumimos que en todas partes hay puntos, a ese radio le quitamos una longitud igual a la del lado del triángulo equilátero obteniéndose así una recta igual a la dada.

La imagen ilustra el historial de la construcción, para que el profesor que quiera y pueda usar este recurso tecnológico, lo incorpore en su quehacer pedagógico para mostrar a los escolares los invariantes de la construcción y de los procesos. Al realizar construcciones con software como Cabri, Geo-gebra o regla y compas entre otros, puede procederse conforme a Euclides, para esto se restringen las herramientas empleadas a las usadas por Euclides, regla y compas, y por su puesto la trama de proposiciones expuesta los *Elementos.*



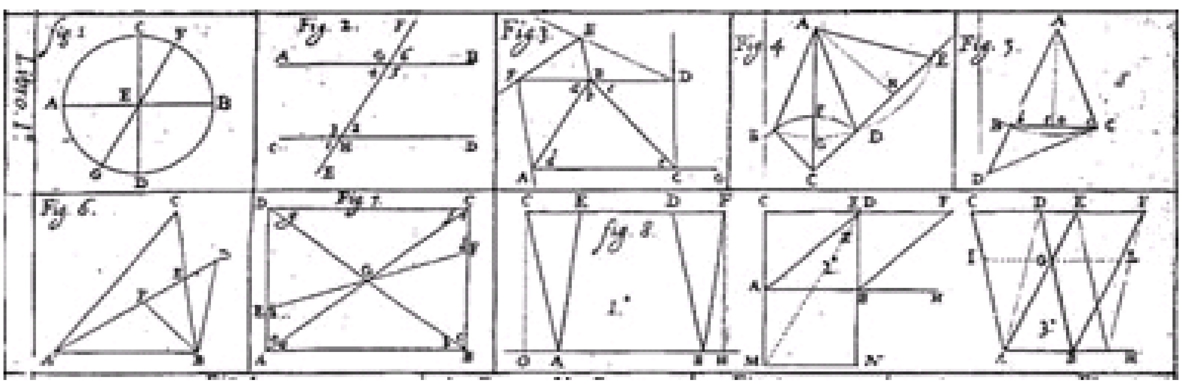
Análisis proposición 2 del libro primero de los *Elementos*

3.4 Método de Aplicación de áreas

El método de aplicación de áreas, consiste en:

1. Construir paralelogramos iguales a triángulos, con ángulo o rectas dadas.
2. Descomponer figuras rectilíneas en triángulos. Y
3. Transformar figuras rectilíneas y compararlas al comparar el área que comprende cada una de ellas.

El método es un método para construir una figura con la misma área que el área de otra figura rectilínea a partir de un punto, recta o ángulo dado, calcular el área de figuras rectilíneas y para comparar figuras rectilíneas[31] desde la comparación de lo que las determina que es lo comprendido, es decir sus áreas. Esto es lo que también se asume en álgebra geométrica.



Proposiciones del libro I de los *Elementos*. Necesarias para llegar a la proposición 42. Construir en un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo. Imagen tomada de DivulgaMAT. Centro de divulgación de las matemáticas

En el caso del método de aplicación de áreas Los *Elementos* no son suficientes para resolver muchos problemas e incluso para comprender completamente las proposiciones que en la misma obra se proponen, pues, entre otras razones Euclides no define paralelogramo, diagonal, lo comprendido, aplicar y mucho

[31] Definición 19 del Libro 1. Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas.

menos define área por lo que para resolver algunos problemas o comprender las proposiciones es necesario salirse de la obra y buscar referentes.

Ejemplos de aplicación de áreas en el libro I de los *Elementos,* son: Proposición 42. Construir un paralelogramo igual a un triángulo dado. Proposición 44. Construir con un lado y un ángulo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado, y Proposición 45. Construir con un ángulo dado un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada. Proposiciones para cuya demostración se requiere de todo el ensamblaje conceptual y procedimental que les precede.

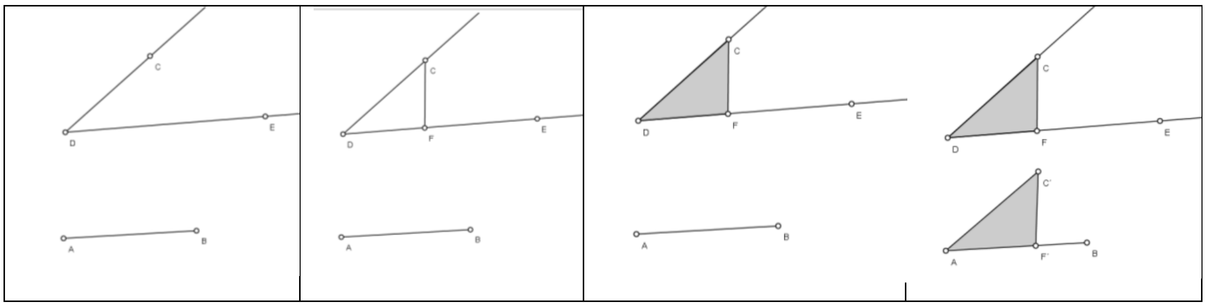
La demostración de cada una de las proposiciones citadas anteriores se sustenta básicamente en la posibilidad de aplicar rectas y ángulos a partir de un punto o recta dada. Proposiciones 2. Poner en un punto una recta igual a una recta dada y proposición 23. Construir en un punto dado y con una recta dada un ángulo igual a otro ángulo dado y en los criterios bajo los cuales dos paralelogramos, dos triángulos o un triángulo y un paralelogramo son iguales, a saber tener la misma base o base igual y estar entre las mismas paralelas, proposiciones y dos paralelogramos son iguales cuando son complemento de los paralelogramos que están en torno a la diagonal.

Que los complementos de los paralelogramos en torno a la diagonal sean iguales, proposición 43 del libro I de los *Elementos* de Euclides, es el resultado más fructífero a mi entender del libro I, incluso más que el teorema de Pitágoras, pues todo cuadrado es un rectángulo y por tanto un paralelogramo, además para construir paralelogramos se requiere menos engranaje conceptual y procedimental, por lo que su construcción es más asequible a los escolares que en general tienen escaza formación en geometría.

Proposición 23.

Construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado, sobre una recta dada y en uno de sus puntos.

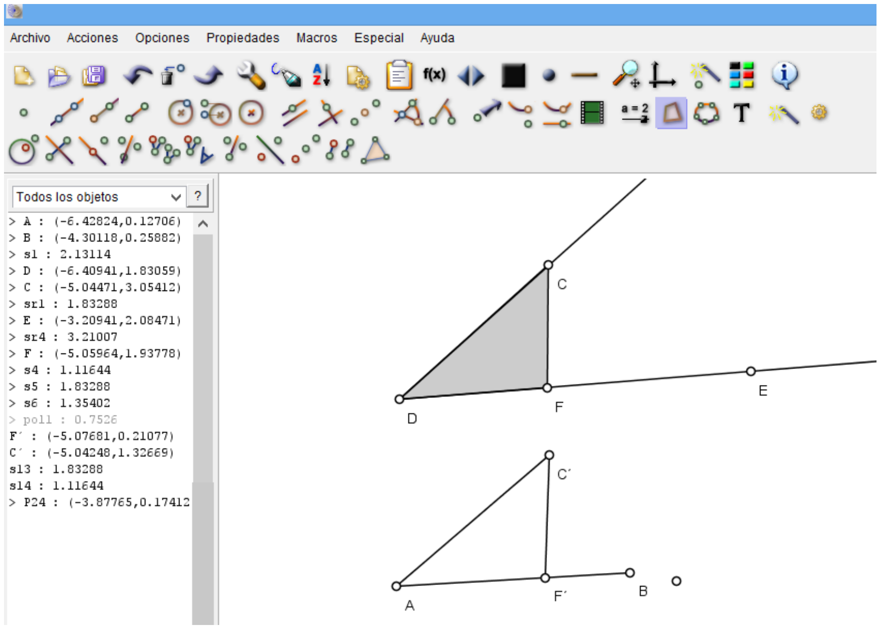
Datos: Un ángulo, una recta y un extremo de la recta.



Procedimiento.

1. Considérese el ángulo dado CDE y la recta dada AB
2. En cada una de las rectas CD y DE que definen el ángulo CDE se toma un punto, sean C y F los puntos tomados sobre las rectas CD y DF respectivamente.
3. Se unen los puntos C y F con una recta, definiendo así el triángulo CDF.
4. Sobre la recta dada AB y a partir de uno de sus extremos, en este caso a partir de A, se pasan las rectas CD y CF. Esto se hace conforme al proceso ilustrado en la proposición 2.
5. Luego se pasa el otro lado del triángulo CF, de tal manera que entre las tres rectas forman el triángulo C´AF´ que es igual al triángulo dado CDF, pues CD es igual a C´A, CF es igual a C´F´ y DF es igual a AF´, es decir los lados correspondientes son iguales y por tanto los ángulos correspondientes también serán iguales. De donde se concluye que el ángulo CDE es igual al ángulo C´AF´.

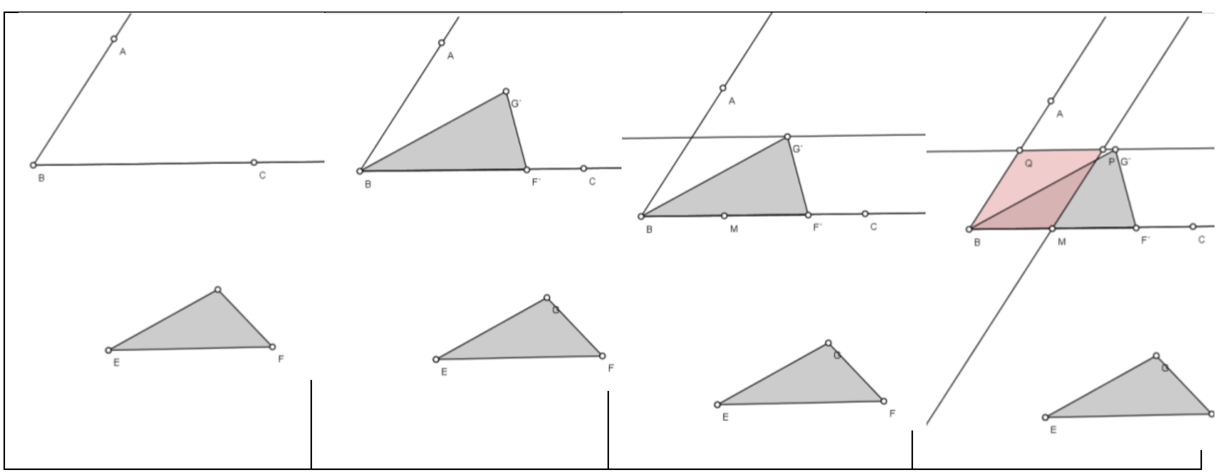
La imagen ilustra el historial de la construcción con el software regla y compas.



Proposición 42

Problema: Construir en un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado.

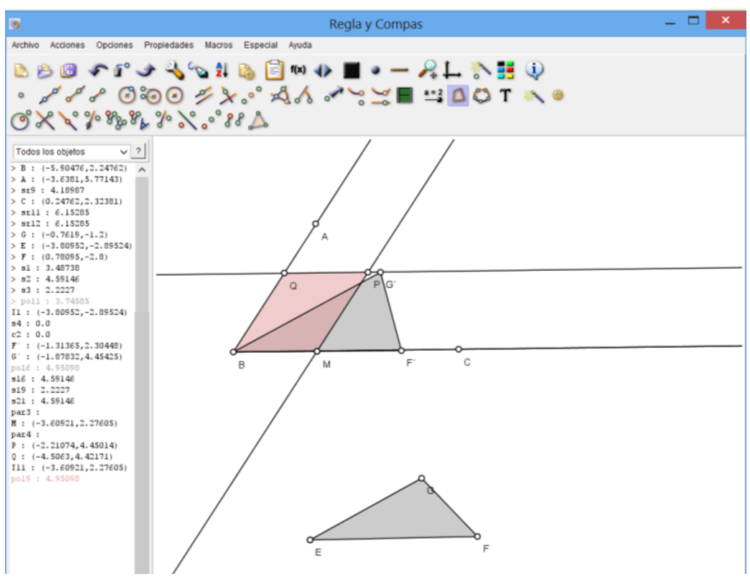
Datos: Un triángulo y un ángulo.



Procedimiento:

1. Se consideran el ángulo dado ABD y el triángulo DEF
2. Se pasa el ángulo dado ABC sobre el lado EF del triángulo dado DEF, conforme al proceso ilustrado en la proposición 23.
3. Se marca el punto M punto medio de la recta EF.
4. Por el punto D se traza una paralela a la recta EF
5. Por el punto M, punto medio de EF se traza una paralela l a la recta EA´.
6. Se prolongan la recta EA´ y la recta l hasta que cada una corte la paralela a EF. Definiéndose así el paralelogramo EFQP con un ángulo igual al ángulo dado y con igual área que él triángulo dado.

La imagen ilustra el historial de la construcción con el software regla y compas.



Proposición 44.

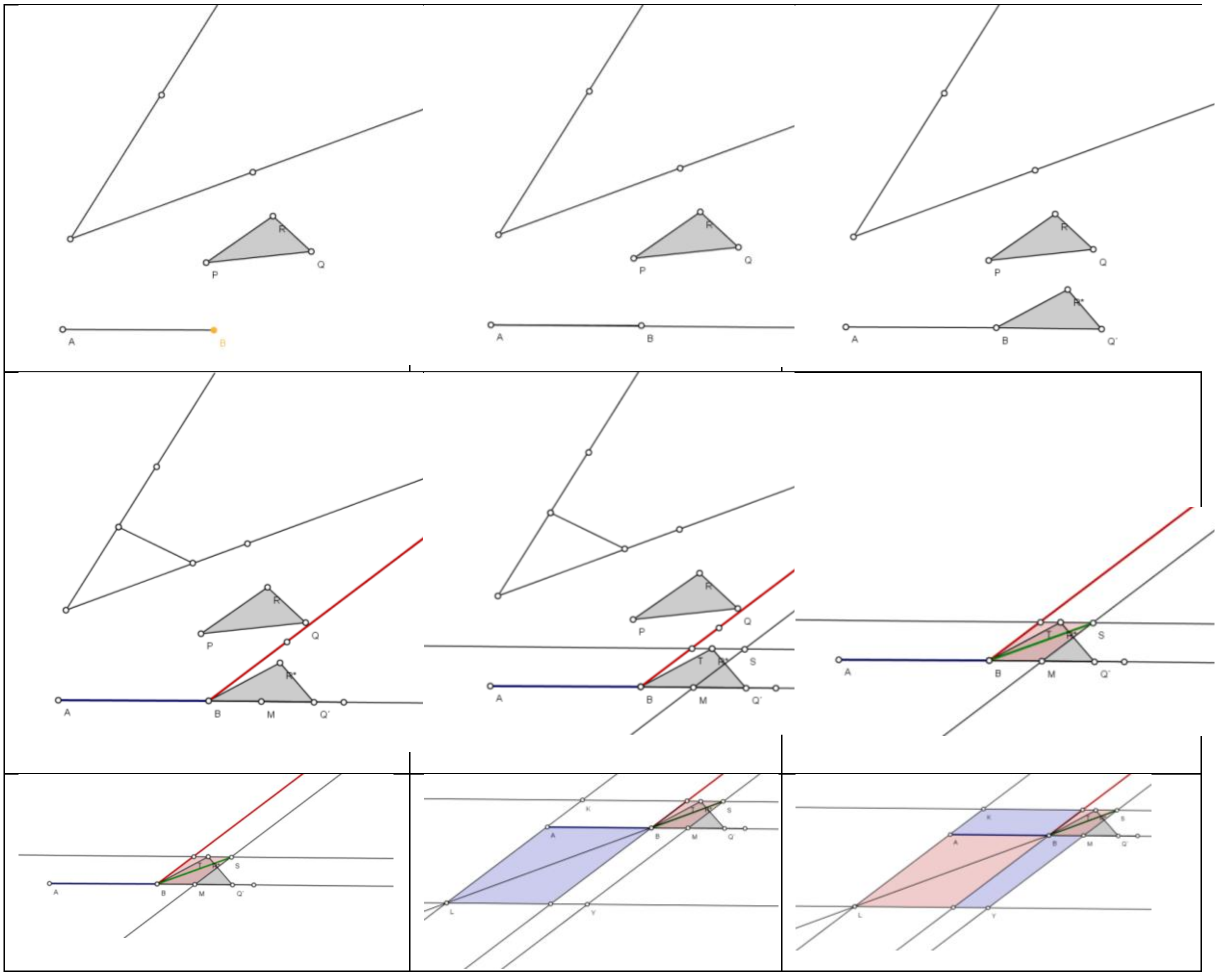
Problemas: Aplicar a una recta dada AB en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado

Datos: Un triángulo, una recta y un ángulo rectilíneo

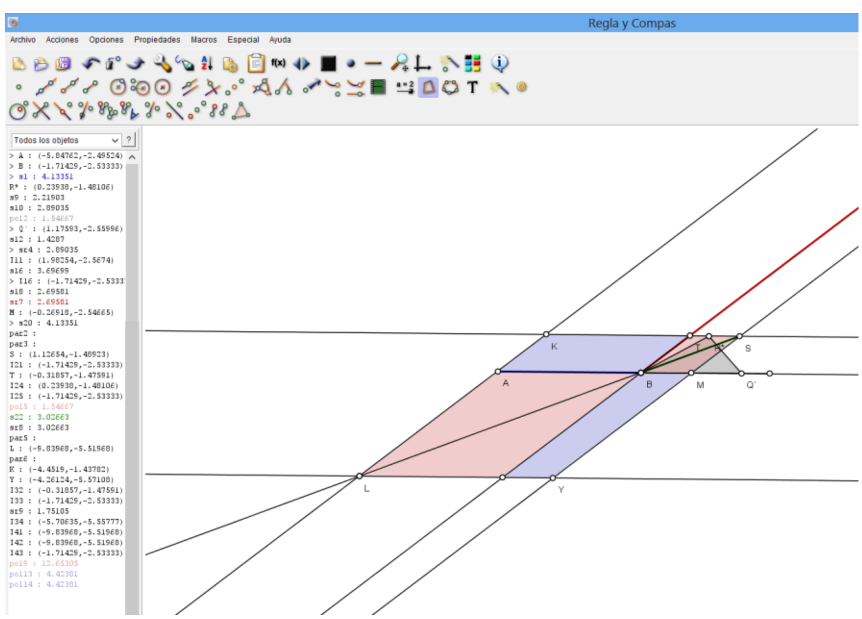
El paralelogramo, cuya construcción se ilustra arriba usando el software “Regla y Compas” es igual al triángulo inicial, respecto a área, pues una figura es lo comprendido por uno o varios límites.

Procedimiento:

1. Como se requiere construir un paralelogramo con una recta y un ángulo dado, en principio se construye un paralelogramo con el ángulo dado y de igual área que el triángulo dado, conforme a la proposición 42. Luego se construye otro paralelogramo igual en área que el paralelogramo construido pero con un lado igual a la recta dada.
2. Para construir el paralelogramo BMST igual al triángulo dado y con el ángulo dado se prolonga en línea recta la recta dada y sobre la parte prolongada se construye el paralelogramo conforme a la proposición 42.
3. Luego desde el punto donde se prolongó la recta dada, se traza la diagonal del paralelogramo.
4. Se prolongan en línea recta los cuatro lados del paralelogramo BMST inicialmente construido.
5. Se traza por el extremo A de la recta dada, una paralela a las otras dos rectas MS y BT. Definiéndose así el paralelogramo YSKL, cuya diagonal contiene a la diagonal del paralelogramo MSTB inicialmente construido.
6. Como los paralelogramos en torno a la diagonal son iguales, y si a cosas iguales le quito cosas iguales lo que queda también es igual, el paralelogramo BTK es igual al paralelogramo BMY y el paralelogramo BTK tiene el ángulo dado y como uno de sus lados la recta dada.



La imagen muestra la síntesis del proceso usando el software Regla y Compás.



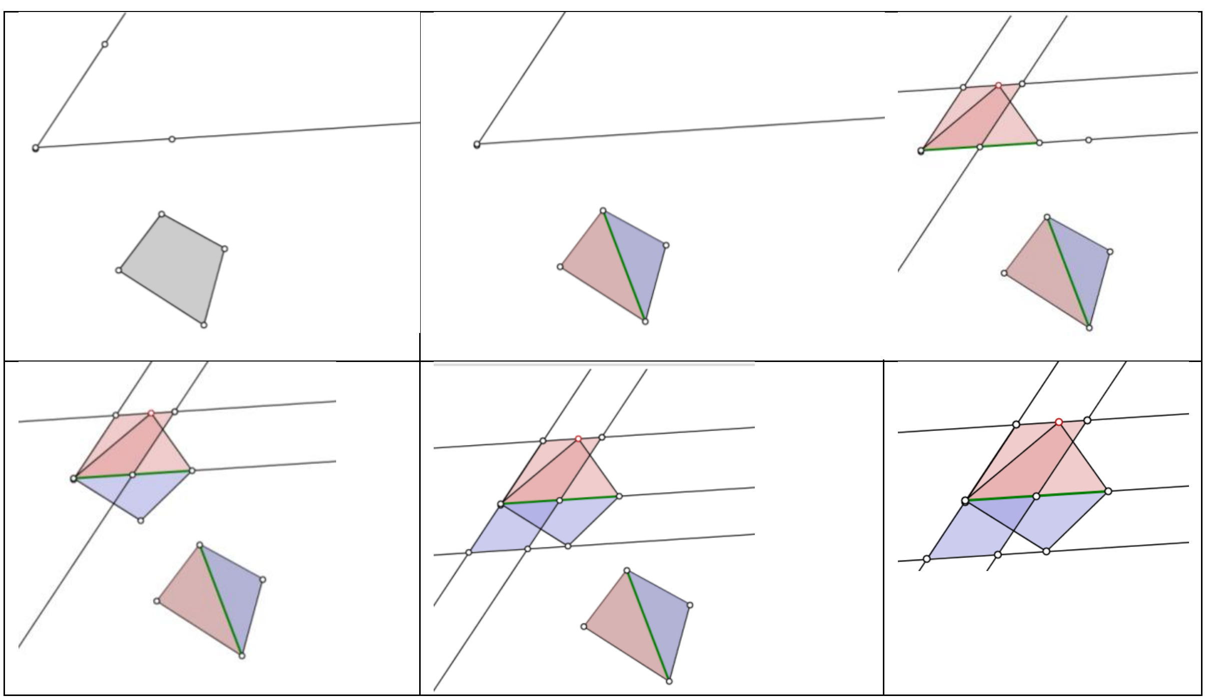
Proposición 45.

Problema: Construir en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una (figura) rectilínea dada

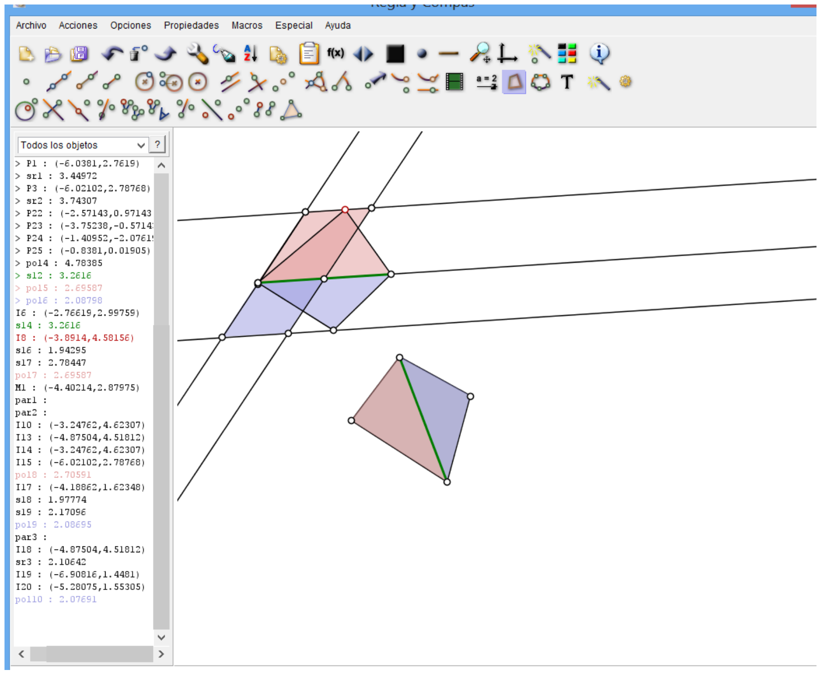
Datos: Un ángulo rectilíneo y una recta.

Procedimiento:

1. Descompóngase la figura en triángulos.
2. Elija uno de los triángulos y construya un paralelogramo igual a él en área y con el ángulo dado.
3. Seleccione uno de los lados de este triángulo y con este lado conforme a la proposición 44 construya un paralelogramo con el ángulo dado y de igual área que el triángulo seleccionado.
4. Reitere el procedimiento para cada triángulo.
5. El paralelogramo que resulte de la última reiteración será igual en área a la figura rectilínea dada.



La imagen de arriba ilustra el paso a paso de la construcción usando el software Regla y Compás.

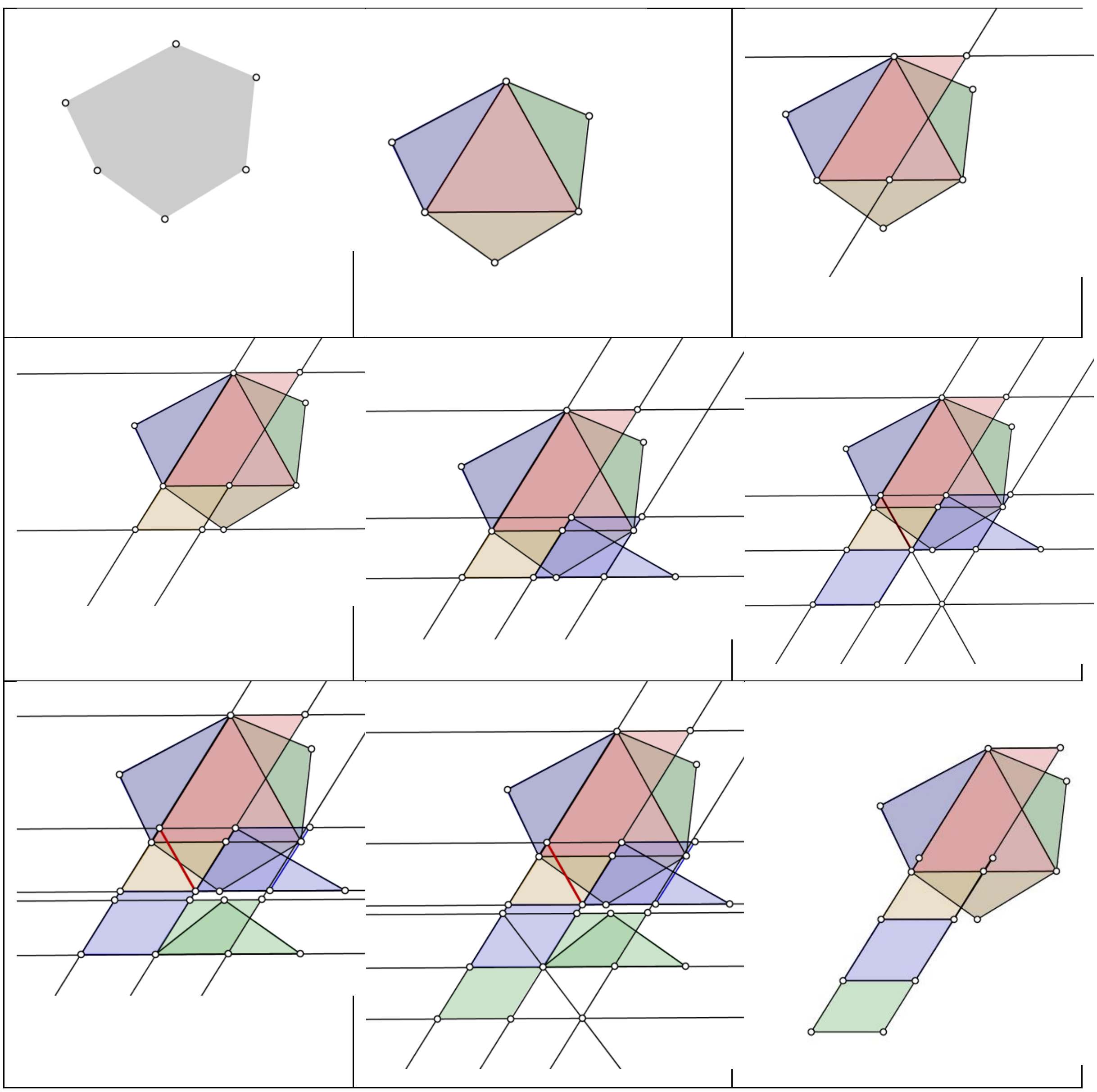


Síntesis del Método para construir paralelogramos iguales a figuras dadas.

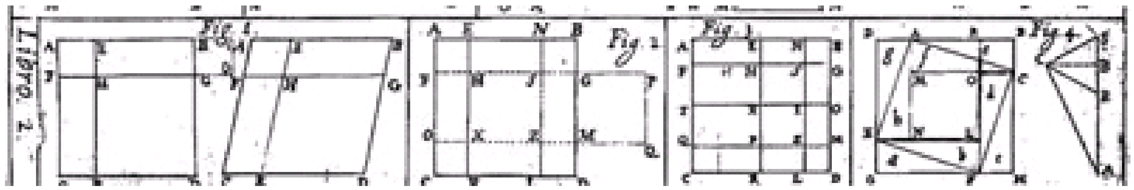
1. Descomponer la figura dada en triángulos.
2. Tomar uno de los triángulos y sobre uno de sus lados y desde uno de sus vértices construir un paralelogramo igual al triangulo.
3. Tomando uno de los lados del paralelogramo y con uno de sus ángulos se construye un paralelogramo igual a otro de los triángulos en que se descompuso. Juntando los dos paralelogramos se ha formado un solo paralelogramo igual a los dos triángulos tomados hasta ahora.
4. Se sigue procediendo de la misma manera hasta agotar todos los triángulo y siempre tomando la misma longitud sobre la que se construye cada paralelogramo.

La construcción de paralelogramos iguales a figuras rectilíneas, resulta de la posibilidad de construir paralelogramos iguales a triángulos con un ángulo dado o con un ángulo y recta dada. Esto es se arman una hilera con paralelogramos con un mismo ángulo y un mismo ángulo.

En la secuencia se ilustra el proceso para cómo construir un paralelogramo de igual área que una figura dada.



Este proceso es usado recurrentemente en el libro II de los Elementos de Euclides para el desarrollo de álgebra geométrica.



Proposiciones del libro I de los Elementos. Proposiciones en particular las necesarias para llegar a la proposición 42. Imagen tomada de DivulgaMAT. Centro de divulgación de las matemáticas.

3.5.Teorema de Pitágoras.

Pitágoras de Samos (569-500 ac), al disertar públicamente sobre filosofía y matemáticas fue ganando adeptos que con el tiempo conformaron la orden pitagórica, una orden más religiosa que política dedicada al estudio particularmente de la teoría de números y al cálculo de áreas y volúmenes. Los resultados obtenidos en la congregación se le atribuyen al propio Pitágoras.

El más famoso aporte atribuido a Pitágoras, es el teorema que lleva su nombre el cual corresponde a la proposición 47 de los *Elementos*, que dice: En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto. Parafraseando; En los triángulos rectángulos el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual en área a los cuadrados construidos sobre los catetos. La Proposición 48, dice: Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto. Parafraseando; Si en un triángulo el cuadrado sobre el lado mayor es igual a los cuadrados sobre los otros lados del triángulo el triángulo es rectángulo.

El libro primero Euclides sienta las bases de lo que hoy se denomina la magnitud longitud y la magnitud superficie. En tanto, se teje una trama deductiva que permite adicionar longitudes, compararlas, dividirlas en dos partes iguales o desiguales, reiterarlas un número determinado de veces, dotando así a las longitudes de las operaciones con sus respectivas propiedades que la hacen magnitud. De manera análoga se hace con las superficies, se comparan superficies, se dividen en partes iguales o desiguales, se reiteran un número determinado de veces y se adicionan, dotando así a las superficies de operaciones y propiedades que hacen de las superficies una magnitud.

La adición de la medida de dos superficies en el libro primero de los *Elementos* es requerida en particular en la Proposición 45. Construir en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una (figura) rectilínea dada. Proceso en el que se descompone la figura en triángulos y para cada uno de ellos se construye un paralelogramo de igual área, estos paralelogramos se construyen todos con un mismo ángulo para con todos conformar un paralelogramo cuya área será el área de la figura dada. Y en la proposición 47.

Dado que el cuadrado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual en área a los cuadrados construidos sobre los catetos, este resultado puede usarse para adicionar el área de dos figuras rectilíneas, para ello bastará con cuadrar, proceso para encontrar un cuadrado de igual área al área de una figura rectilínea dada, cada una de las figuras, a fin de construir un triángulo rectángulo, tomando el lado de cada cuadrado construido como cateto del triángulo, así el cuadrado sobre la hipotenusa será igual en área a las dos figuras dadas. Resultados fuertemente sustentados en la Proposición 43. En todo paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí.

Adicionar superficies a la luz de los *Elementos*, implica construir un cuadrado con todo el ensamblaje deductivo que ello implica y que puede ser estudiado por el lector en ¿Cómo se construye un cuadrado? O la síntesis de un proceso euclideano, de la profesora Clara Helena Sánchez[32]. En el artículo se hace el análisis de la Proposición 46. Construir un cuadrado, para ello se supone que el cuadrado ya ha sido construido y se va develando que hizo posible construirlo según la trama tejida por Euclides en sus *Elementos*, donde solo muestra la síntesis del proceso. De allí se infiera lo complejo del proceso de cuadrar, por lo que con la propuesta didáctica que propongo en este trabajo, busco tener el mismo alcance que el libro primero de los *Elementos*, pero solo *rectangularizando* las figuras rectilíneas a fin que sea un proceso realizable y comprensible por los escolares que generalmente no tienen una buena formación en geometría.

3.6 Métodos de la geometría euclidiana en el desarrollo del pensamiento matemático en particular del geométrico

Sí el profesor conoce, usa y enseña procedimientos y estrategias a los escolares, estos tienen mayor oportunidad de aprehenderlos y usarlos cuando los requieran de manera oportuna y eficaz. Una forma de aprender es la imitación de tal manera que los métodos al igual que los algoritmos, al ser usados reiteradamente por el maestro delante de sus alumnos, se convierten en patrones que pueden ser imitados por estos y con el tiempo ser interiorizados. Quedando así disponibles para cuando se requieran para construir y dar sentido al conocimiento matemático, o para usar el conocimiento ya adquirido.

Otro valor agregado de incentivar el uso de métodos en particular en geometría, y que justifican este trabajo, es que los procedimientos constituyen herramientas para elaborar modelos geométricos de situaciones problema o de fenómenos, sobre los que se puede razonar y operar y por tanto funcionan como escenarios para comprender y dar sentido a los fenómenos y problemas, representar relaciones entre las cantidades y determinar condiciones de solución.

[32] Sánchez, C,H. (2006). ¿Cómo se construye un cuadrado? O la síntesis de un proceso euclideano, En Lecturas Matemáticas, vol. 27. Pág. 29-44.

En particular el método de aplicación de áreas resulta útil para: construir figuras geométricas con condiciones dadas, calcular el área de cualquier figura rectilínea, calcular aproximadamente el área de figuras no rectilíneas y operar entre superficies. Cuatro tareas que facilitarán la comprensión y operatividad del álgebra escolar, la trigonometría y el cálculo, en tanto se aporta un método para construir representaciones geométricas de situaciones o de problemas.

Representaciones sobre las que visualmente se puede reconocer relaciones entre los elementos que las constituyen y razonar sobre ellas a fin de sacar conclusiones. Para lograr esto si se hace conforme al proceder euclideo, sería necesario haber transitado por los dos primeros libros de los *Elementos* y haber adquirido los conceptos y procedimientos que en ellos se construyen. Los escolares de grados octavo y noveno, que no suelen tener mayor formación en geometría, los puedan usar por ejemplo para construir rectángulos de igual área que cada triángulo en que se descomponga una figura rectilínea. Esta forma de proceder les permitirá resolver problemas e ir ampliando el conocimiento geométrico y mejorando el razonamiento matemático.

En el libro I, como vemos, se sientan las bases de cómo debe procederse en geometría. Se construyen ángulos, triángulos, paralelogramos dados puntos, rectas o ángulos y se adiciona, quita, divide y comparan objetos de la misma magnitud

En el libro II, se opera básicamente sobre rectángulos, se descomponen o componen en rectángulos y se comparan esas partes y las partes con el todo. Los rectángulos se dividen con rectas que al no tener anchura, sino longitud, no alteran el área de la figura es decir esta sigue siendo lo comprendido por los límites que originariamente la comprendían.

El trabajo escolar fundamentado en los *Elementos* de Euclides forma a los escolares para alcanzar los logros propuestos por el Ministerio[33] en cuanto a la construcción del concepto de magnitud, como lo que se puede medir:

- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto".
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medición.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición.

Sin embargo, para que estos objetivos se alcancen, es necesario un trabajo previo para mejorar la comprensión lo que es área, su conservación, medida y estimación, conocimientos básicos para el desenvolvimiento personal y laboral de todo individuo en la sociedad actual, según se infiere en el informe Cockcroft [34] (1982), que respecto de la medida afirma:

> "…justifica su importancia tanto desde las necesidades de la vida adulta, debido a la cantidad de mediciones que realizamos cotidianamente, como desde las necesidades del mundo del trabajo; las tareas de estimación, mediciones, uso correcto de las unidades métricas, así como desde las necesidades matemáticas de cada a la enseñanza superior".

---

[33] Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá. Pág. 63.
[34] Citado en Superficie y volumen, ¿ Algo más que el trabajo con fórmulas?. Pág. 11.

Para potenciar la comprensión de los procesos de medición y conservación del área, en “Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?”[35] , los autores proponen un tratamiento de las magnitudes, que se retomará en este trabajo, en tanto resulta coherente con los otros fundamentos tomados para el diseño de las actividades.

3.7. Medida del área de una superficie

En adelante se entenderá “la medida” como un proceso que va desde la constitución de la magnitud y se completa con la medición y la estimación de la misma”[36]. Una forma de propiciar la constitución de la magnitud, es a través del reconocimiento del atributo medible, es decir, desde la percepción y discriminación de lo medible de entre otras cualidades de los objetos. La comparación entre objetos usando los términos “tanto como”, “menos que”, “más que”, para que desde el “tanto que”, emerja el sentido de ser iguales respecto de algo, sustento de la relación de equivalencia, con la cual se define la cantidad de una magnitud. Luego a la cantidad de magnitud, se la asigna un número; para ello se escoge una unidad de medida y ésta se reitera, sin solapar ni dejar huecos, sobre el objeto a medir, tantas veces como sea necesario hasta que el objeto quede cubierto exactamente por la unidad. La medida corresponderá al número de veces que se reiteró la unidad o número de unidades requeridas para cubrir el objeto. La unidad debe ser de la misma naturaleza de lo medido, y una vez elegida se fija en términos de ella se expresa la medida del objeto. Cuando se cambia la unidad de medida, cambia el valor que da cuenta de la medida del objeto pero el objeto sigue siendo el mismo. Estas diferencias no son obvias para los escolares por lo que se requiere que en el proceso de enseñanza se haga énfasis en la diferencia entre objeto a medir, su medida, la unidad con la que se mide y el instrumento de medida.

[35] Olmo, M.; Moreno, M.; Cuadra, F. (1993). “Superficie y Volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas”. Síntesis. Madrid.
[36] Idem, pág. 13.

Para la percepción de la magnitud los autores mencionados proponen una aproximación fenomenológica, desde el reconocimiento y descripción de hechos cotidianos y fenómenos reales que doten de sentido al área y se diferencie de su superficie. Esto se hace identificando palabras usadas para referir, por ejemplo, la superficie, pasando por modelos y contextos, comparación de distintas cantidades de la misma magnitud, en contextos significativos, en situaciones donde el área representa un hueco, una marca o la extensión de un cuerpo.

Según Freudenthal[37], citado en "Superficie y Volumen" entre las tareas que contribuyen a comprender el concepto de área, están 1. Repartir equitativamente, (aprovechando regularidades, por estimación y por medida). 2. Comparar y Reproducir, (Por inclusión, por transformación rompiendo y rehaciendo, por estimación, por medida y por medio de funciones o fórmulas). 3. Medir, (Por exhausción, por acotamiento entre un valor superior y uno inferior, por transformaciones de romper y rehacer y por medio de relaciones geométricas generales).

En la propuesta que se diseñará, las actividades se proponen en contextos significativos y las tareas buscan ejercitar a los escolares en cada una de las acciones sugeridas por Freudenthal, para mejorar la comprensión, medida y conservación del área de figuras rectilíneas.

[37] Olmo, M.; Moreno, M.; Cuadra, F. (1993). "Superficie y Volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas". Síntesis. Madrid. Pág. 19.

4. CURRIÍCULO DE MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA

4.1 Marco Legal

Los documentos oficiales *Lineamientos curriculares*, *estándares básicos de competencias,* no proponen explícitamente temas a desarrollar sino actividades que el estudiante debe estar en capacidad de realizar, y que demostrarán aprehensión de los objetos y procesos matemáticos. Los cinco procesos que están inmersos en toda actividad matemática, y por tanto son transversales al currículo de matemáticas, son:

a.) Razonar, según los lineamientos curriculares es "la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión" [38]. Cuando se trata de resolver o plantear un problema, el razonamiento es heurístico. Este está constituido por las estrategias para enfrentar el problema, recurriendo a problemas relacionados, explorando analogías, casos particulares, reformulando el problema, proponiendo posibles soluciones y estudiando cómo se comportan éstas en el marco de las condiciones del problema, o *trabajando hacia atrás*. Estas estrategias se implementan generalmente recurriendo al uso de distintas representaciones.

[38] Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá. Pág. 54.

Razonar en matemáticas según el mismo documento tiene que ver con:[39]

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

b.) La comunicación con uno mismo y con los otros de una actividad matemática, dada la naturaleza de los objetos matemáticos que no son aprehensibles directamente se da a través de sus representaciones. Cada representación evoca unos rasgos distintivos del objeto, y ellas junto a la habilidad para transformar una representación de un sistema de representación en otra representación del mismo sistema (tratamiento) o a otra representación de otro sistema (conversión) dan sentido al objeto matemático.

c.) Ejercitación de procedimientos evidenciados en la apropiación y ejercitación de algoritmos, (procedimientos rutinarios), desarrollo de cálculos o estrategias para resolver situaciones problema o desarrollar tareas.

Estos tres procesos, transversales al currículo de matemáticas, constituyen destrezas necesarias para el desenvolvimiento comprensivo y eficiente de los

[39] IDEM, pág. 54.

individuos en la sociedad, principal objetivo de la educación matemática; en particular de la escolar.

> "Por otra parte, hay acuerdos en que el principal objetivo de cualquier trabajo en matemáticas es ayudar a las personas a dar sentido al mundo que les rodea y a comprender los significados que otros construyen y cultivan. Mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino que, al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma, para actuar en y para ella"[40].

Para contribuir a que los escolares alcancen este objetivo, en este trabajo se propondrá la ejercitación del método de análisis como procedimiento para la resolución de problemas, en particular de los geométricos, y del método de aplicación de áreas como algoritmo para modelar y resolver problemas geométricos.

En 1623, Galileo Galilei en "El Ensayor"[41] escribió: "El universo está escrito en lenguaje matemático, y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra". Concepción de las matemáticas y del mundo, vigente aún hoy en día.

Efectivamente en los Lineamientos curriculares de matemáticas, se plantea que "La geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de

[40] Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá. Pág. 35.
[41] Galileo. (1984)."El ensayador". Sarpe. España.

argumentación" [42]. Con estas dos citas se resalta el poder de la geometría para justificar la importancia de mostrar cómo funciona la estrategia para resolver problemas geométricos y un proceso para matematizar situaciones, fenómenos y problemas modelables con figuras rectilíneas.

Para que la geometría sea aprendida como herramienta para modelar el mundo y lo que en él hay, en la escuela se debe desarrollar la percepción espacial, promover la intuición sobre las figuras, el uso comprensible de propiedades de las figuras y de las relaciones entre ellas; así como el reconocimiento de los invariantes a través de transformaciones, mediante la observación de regularidades, que permiten a su vez; plantear conjeturas y generalizaciones, la resolución de situaciones problemas, analítica, sintética y transformacionalmente. A fin de que el escolar explore, comprenda y manipule el espacio, imaginándolo y representándolo en el plano.

Para potenciar el desarrollo del pensamiento métrico en los escolares en la escuela se les debe proponer continuamente tareas que estimulen el desarrollo del pensamiento métrico, mostrar cómo se resuelven y presentarlas en contextos que permitan dotar de significado lo que se está haciendo. Tareas que:

1. Exijan el reconocimiento de: atributos medibles, como; longitud, peso, volumen, etc…,
2. Pongan en juego procesos de conservación o invarianza de los atributos medibles.
3. Exijan distinción entre patrón y unidad de medida.
4. Comprensión y uso de procesos de medición.
5. Sentido de medición; es decir la habilidad para hacer estimaciones.

[42] Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá. Pág. 17.

6. Destrezas para seleccionar y usar instrumentos de medición y aspectos geométricos para hacer mediciones indirectas.
7. Habilidades numéricas para asignar medida.

El desarrollo y producción de la actividad matemática no es exclusiva de un pensamiento ni se da aislada o espontáneamente. Para ilustrar esta interrelación e interdependencia en el cuadro anexo 1, se sintetizan los estándares que describen las competencias que inciden directamente en el cálculo de área de figuras planas. En él se diferencian dos momentos: un primer momento de reconocimiento de los objetos en juego y la ejercitación de algoritmos o implementación de procedimientos sobre los objetos a fin de realizar una tarea determinada, y un segundo momento para validar o justificar los procesos y algoritmos en juego en la realización de la tarea.

4.2 Enseñanza de las matemáticas escolares

Bishop reporta, producto de investigaciones, que todos los grupos humanos practican y han conceptualizado actividades como contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar; actividades universales que no conocen fronteras de tiempo y espacio, y que además constituyen un lenguaje universal, y Romberg, justifica la formación matemática escolar, en la necesidad de enculturizar en matemáticas, es decir en la necesidad de transmitir y preservar las producciones matemáticas y culturales de los pueblos y de la comunidad matemática, es necesario que las propuestas de trabajo para el aula se fundamenten en las actividades universales y que se consideren tres componentes[43]:

[43] Bishop, A. (1999). "Enculturación Matemática". Paidos. España.

- *Simbólico,* basado en los proyectos, entendidos como parte de una investigación personal con algunos materiales de referencia y del cual se presenta un informe.
- *Comunicación, basado en informes como mecanismo para comunicar el trabajo realizado*
- *Cultural,* que sugiere trabajar desde la investigación, (indagación) pues en ella se debe buscar que el aprendiz, imite el trabajo del matemático, generando espacios que le permitan general conocimientos matemáticos, los que se debe plasmar en la escritura de un informe como debe hacer un investigador para compartir sus hallazgos.

Siguiendo con Bishop[44] (pág. 20)

> Educar matemáticamente a las personas es mucho más que enseñarles simplemente algo de matemáticas. Es mucho más difícil de hacer y los problemas y las cuestiones pertinentes son un reto mucho mayor. Requiere una conciencia fundamental de los valores que subyacen a las matemáticas y un reconocimiento de la complejidad de enseñar estos valores a estos niños. No basta con enseñarles simplemente matemáticas: también debemos educarles acerca de las matemáticas, mediante las matemáticas y con las matemáticas.

Atendiendo a Bishop la formación matemática debe hacerse en contextos que doten de sentido el hacer matemático, rescatándolo como herramienta para proceder y conceptualizar. Pues las matemáticas al ser parte de la riqueza cultural también deben ser trasmitidas reconociendo las aplicaciones que de esta se den en el entorno (ambiente que afecta de alguna manera el proceso de aprendizaje), o desde referentes concretos para conseguir la abstracción que

[44] Citado en Alcalá, M. (2002). Biblioteca uno: “La construcción del Lenguaje matemático”. Grao. Barcelona. Pág. 14

sustenta las matemáticas, abstracciones que no dependen del entorno ni del grupo humano que las utilice.

Bajo estas premisas los contextos y tareas que propone el profesor, así como la forma en que hace protagonista al escolar de su propio aprendizaje determinan qué matemáticas se aprenden y el sentido que se le da a estás.

4.3 Representaciones semióticas

Una representación según Duval[45], es el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto. Las representaciones pueden ser mentales o semióticas. Las representaciones mentales, constituyen esquemas, interiores del individuo, que cumplen la función de organizar y estructural las informaciones e interpretaciones que devienen del mundo, y que pueden ser comunicadas o exteriorizadas a través de las representaciones semióticas.

Una representación semiótica es la representación constituida por signos, del lenguaje natural, notaciones de números, gráficos, tablas, etc. Usada para exteriorizar las representaciones mentales y/ o comunicar sus comprensiones.

En general:

- Las representaciones semióticas están constituidas por símbolos. Sirven para exteriorizar o comunicar las representaciones mentales, en tanto las hacen visibles a otros y a uno mismo.
- Las representaciones mentales son esquemas que estructuran y organizan las percepciones e imágenes que tenemos de los objetos reales o abstractos o bien la interiorización de procesos.

[45] Duval, R. (1999). “ Semiosis y Pensamiento Humano”. Peter Lang. Cali.

En la actividad matemática, al darse sobre objetos que no son aprehensibles por vía directa sino a través de sus representaciones, son inseparables los procesos de semiosis y noesis. Procesos que al ser necesarios para la aprehensión conceptual determinan cómo debe entenderse y como debe propiciarse el aprendizaje de las matemáticas, en palabras de Duval[46]

> "El análisis de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas y de los obstáculos a los cuales se enfrentan regularmente los alumnos, conducen a que detrás de la segunda hipótesis se reconozca una ley fundamental del funcionamiento cognitivo del pensamiento; no hay noesis sin semiosis, es decir, sin el recurso de la pluralidad al menos potencial de sistemas semióticos; recurso que implica la coordinación de esos sistemas semióticos por parte del mismo sujeto."

Registros semióticos. Conjunto de signos de la misma naturaleza, junto con sus reglas de composición y de trasformación. Los registros semióticos usados en matemáticas son Figuras, Gráficas cartesianas, Escritura simbólica (sistemas de escritura de números, escritura algebraica, lenguas formales). La diversidad de registros semióticos usados en matemáticas se justifica en tanto cada uno destaca aspectos particulares de los objetos que representa y posibilitan tratamientos distintos. El empleo de diversos registros semióticos, la elección del más adecuado a la situación a representar y el tránsito entre ellos son requisitos para toda actividad matemática. Un registro permite tres actividades: 1. *Formación de una representación identificable como representación de un registro dado*. Selección de rasgos y contenido a representar en función de las unidades y reglas de composición del sistema donde se hará el registro. 2. *Tratamiento,* transformación de una representación de un registro en otra representación del mismo registro. Para nuestro caso, transformar una figura rectilínea en otra figura rectilínea, en un rectángulo. 3. *Conversión,* trasformación

[46] Duval, R. (1999). "Semiosis y Pensamiento Humano". Peter Lang. Cali. Pág. 16.

de una representación de un registro en una representación de otro registro, conservando parte o la totalidad de la información. Para nuestro caso, describir en lenguaje natural y matemático las relaciones, transformaciones e invariantes en las figuras rectilíneas.

Registro de representaciones usadas en matemáticas

Sistema semiótico	**Representaciones**	**Reglas**	**Tratamientos**	**Conversiones**
Lenguaje natural	Palabras, Frase	Gramática y sintaxis	Paráfrasis inferencias	Ilustraciones
Lenguaje simbólico	Fórmula Número (Representación; decimal, fraccionaria, porcentual) Representaciones con exponentes; notación científica, expresiones polinómicas Letra; interpretada como: incógnita, Objeto, número generalizado, y variable	Reglas de formación	Cálculos; numéricos, algebraicos, proporcional	Traducción lectura en lenguaje natural a representaciones algebraicas y de las expresiones algebraicas al lenguaje natural
Lenguaje figural	Figuras geométricas	Reglas de construcción	Reconstrucción Anamorfosis (representación figural)	Descripción lingüística Expresión algebraica de propiedades y relaciones geométricas

Como los objetos matemáticos no son aprehensibles directamente sino a través de sus representaciones, en la medida que los escolares usen diversas representaciones, entre ellas las representaciones geométricas, de situaciones y objetos tendrán mayor oportunidad de comprender y resolver problemas en particular de los geométricos.

5. PROPUESTA DE AULA

Esta propuesta de aula, constituye una secuencia de tareas en las que se usa el método de análisis y síntesis como estrategia de resolución de problemas geométricos para aportar a los escolares un procedimiento para calcular el área de figuras rectilíneas. Las tareas propuestas evocan las actividades fundamentales que todo ser humano realiza, y van posibilitando desde el uso del método de análisis y síntesis la apropiación conceptual de lo que es área, necesaria para el cálculo del área de rectángulos, y de cualquier figura rectilínea al *rectangularizarla.*[47]

Las tareas recrean distintas acepciones históricas del método para potenciar el aprendizaje de los escolares de conceptos, descomponiendo las tareas e induciendo al escolar a ver, describir usando distintas representaciones, discriminar y explicar sus actuaciones, decisiones y conclusiones.

El método de análisis y síntesis se usa para identificar los principios necesarios para calcular el área de figuras rectilíneas. Algunas de las acepciones o interpretaciones que históricamente se le han atribuido al método de análisis y síntesis, sustentan la estructura y función de las tareas propuestas, a la par que

[47] Rectangularizar, es como se denomina en esta propuesta a la descomposición de cualquier figura rectilínea en triángulos cuya área se calcula en relación al rectángulo que tiene su misma base y altura.

se va mostrando el uso del método, para que en otras tareas sea usado por los escolares para resolver problemas.

No se planteó una situación problema y se esperó a ver como procedían los escolares, pues no se pretende reconocer si usan el método, y cómo lo usan, sino se irá mostrando cómo actúa, así no se diga explícitamente que se está usando. Se inicia con tareas para posibilitar la comprensión de lo que es área, diferenciar entre superficie y su medida, con qué se mide y cómo se expresa la medida.

Esta propuesta de aula, complementa lo que se hace en los *Elementos* de Euclides, marco de referencia de este trabajo, en tanto incluye el camino a recorrer para comprender área, que en los *Elementos* se da por sentado que se tiene. Los *Elementos* se han considerado un manual para instruir, es un texto autosuficiente, a no ser que se considere que el área de una figura necesita definirse y requiere de procesos para ser comprendida. Algunas investigaciones y la propia práctica docente evidencian la necesidad de trabajar en la escuela para posibilitar la comprensión de qué se puede medir, cómo se mide y cómo se expresa lo medido. Así que esta propuesta intenta responder a esta necesidad en el caso particular del área.

Los actividades que componen está unidad didáctica avanzan desde actividades para el reconocimiento de la superficie como magnitud, su medida y estimación e involucran actividades que posibilitan la comprensión y cálculo del área de figuras rectilíneas. El siguiente cuadro, si se mira de arriba hacia abajo, muestra el análisis que hemos hecho y de abajo hacia arriba la síntesis o camino seguido para el objetivo propuesto.

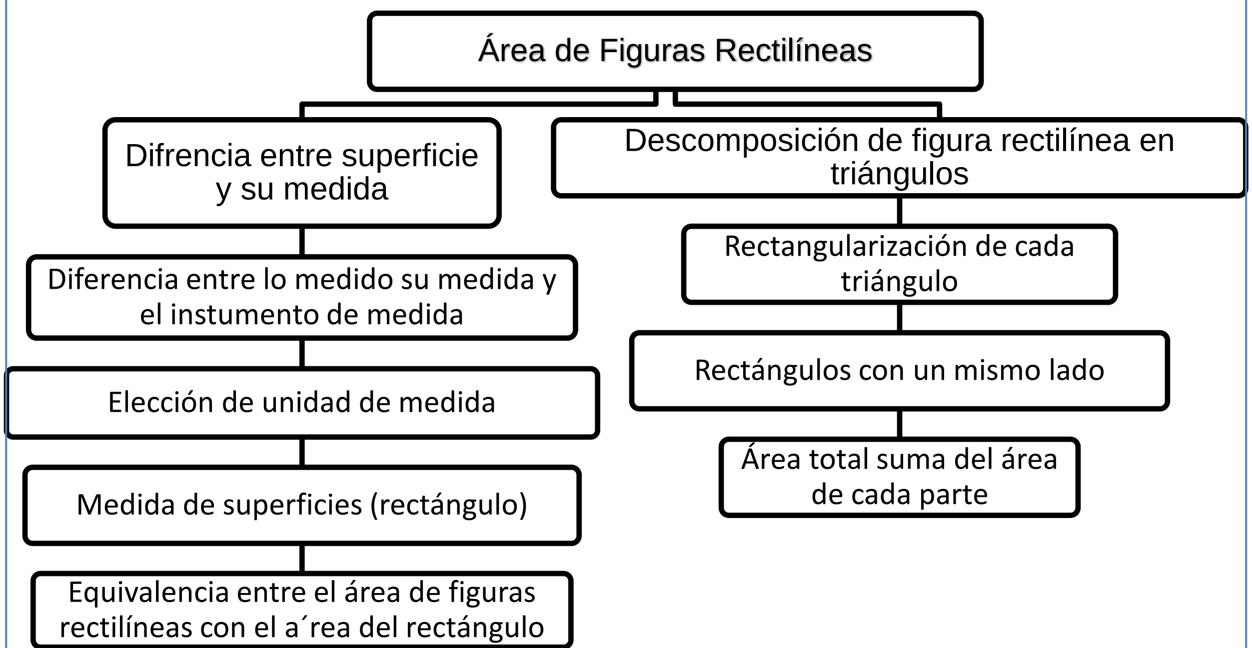


Ilustración 1. Ánalisis y Síntesis de la medida del área de una figura rectilínea

Se proponen actividades para construir la magnitud superficie, medirla en contextos reales (determinar su área), y realizar estimaciones.

<u>Primera actividad</u>

Objetivo: Se busca que los estudiantes de grados octavo y noveno reconozcan la magnitud superficie, la diferencien de su medida, calculen su medida en contextos reales y realicen estimaciones. Para esto se sugiere que el maestro presente la situación a los estudiantes les permita reflexionar individualmente para luego socializar en pequeños grupos sacando conclusiones que podrán socializar posteriormente con todo el grupo.

I. La familia García va a remodelar su casa. Para que la plata les alcance ellos mismos harán algunos de los arreglos y comprarán sólo la cantidad de material requerido para no desperdiciar material.

1. En cada caso, di cuál es la mínima información que cada miembro de la familia debe conocer para comprar justo lo que necesita.

- **a.** Pedro, el hijo mayor de la familia, quiere cubrir una pared completa con un poster de su equipo de fútbol favorito.
- **b.** El señor García va a comprar la puerta del patio.
- **c.** La señora García desea ponerle un vidrio a su mesa del comedor, que es redonda.
- **d.** Pedro va a embaldosinar el piso de la sala.
- **e.** Adriana, la hija menor de la familia, quiere imprimir una fotografía de la familia para colocarla en un hermoso porta-retrato que hay sin usar en su casa.
- **f.** El señor García va a embaldosinar el mesón de la cocina que tiene empotrado un platero y una estufa.

2. Menciona otras dos situaciones donde se requiera el mismo tipo de información.

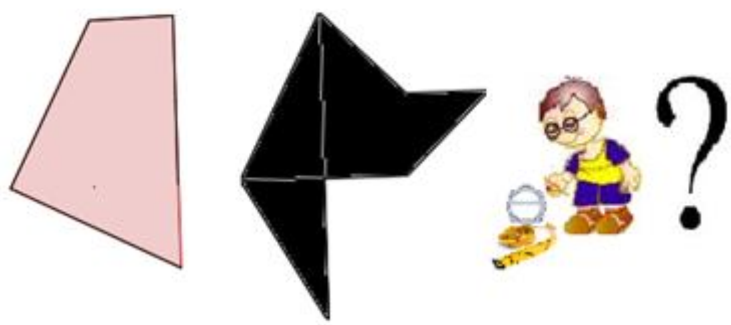
3. Si la escalera de la casa está embaldosinada qué información se necesitó para adquirir justo el material necesario.

4. Cómo ubicarían los baldosines para embaldosinar la escalera.

Segunda actividad

Objetivo: Se pretende presentar contextos significativos para comparar superficies y motivar la búsqueda de estrategias para medir y comparar el tamaño de superficies. Se sugiere que el docente invite a los escolares a ser recursivos, usar distintos materiales y estrategias.

II. El líquido requerido para limpiar manchas en tapetes es muy costoso. El señor García encontró una persona que le ofrece que por cada dos manchas que deba quitar del tapete, le cobra sólo lo de la primera mancha que quite. Si el cobro depende de lo grande que sea la mancha, ayúdale al señor García a decidir cuál de las dos manchas debe mandar a quitar primero.



1. ¿Qué necesita saber la familia para aprovechar al máximo la promoción?

2. Ayúdale a la familia García a obtener la información necesaria para aprovechar la oferta.

a. Recuerdas situaciones similares, ¿cómo se resolvían?
b. ¿Podría el señor García usar esas soluciones en este caso?
c. Se puede enunciar el dilema del señor García de otra manera.
d. Qué información ayudaría al señor García a reconocer más fácilmente cuál es la mancha más pequeña.

<u>Tercera actividad</u>

Objetivo: Se pretende presentar contextos significativos de reparto para inducir la búsqueda de distintas estrategias que garanticen repartos equitativos.

III. Debes dividir en tres partes iguales cada uno de estos objetos:

a. Una chocolatina Jet.

b. Una hoja de cuaderno.

c. El tablero de tu salón.

1. Describe como dividirías en las tres partes iguales solicitadas cada objeto.

2. ¿En qué son iguales las partes obtenidas a partir de cada objeto?

3. ¿Cómo puedes ratificar que efectivamente son iguales?

4.Justifica que la comparación realizada fue adecuada.

5. Puedes usar este método en otras situaciones, ¿En qué situaciones?

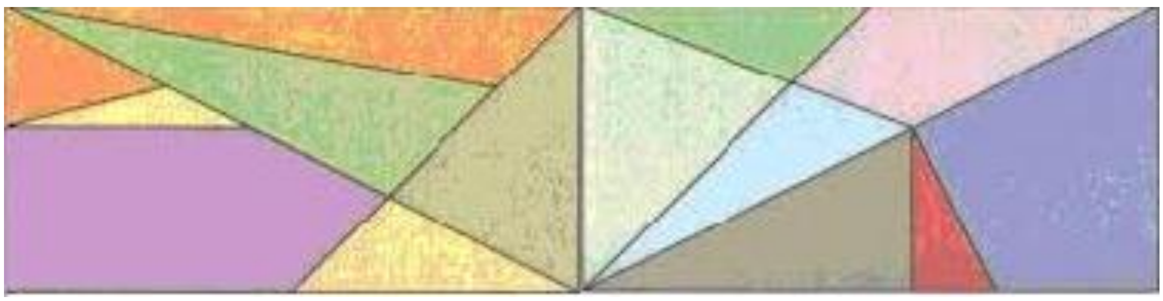
<u>Cuarta actividad</u>

Objetivo: Se pretende presentar contextos significativos de comparación de superficies ya sea por inclusión o rompiendo y rehaciendo superficies para poder compararlas y asignar la medida.

IV. El gran matemático griego Arquímedes de Siracusa diseñó el Stomachion un rompecabezas de 14 piezas. Un experto en informática diseñó un programa de computador para determinar de

cuántas maneras distintas puede armarse un cuadrado con las 14 piezas del stomachion y encontró que hay 536 maneras distintas de hacerlo.

1. El rectángulo de la figura se armó con las 14 piezas del Stomachion. Qué requieres para armar con ellas uno de los 536 cuadrados que se pueden armar con ellas.



2. Recorta las piezas y con ellas arma uno de los 536 cuadrados posibles.

3. Compara el tamaño del cuadrado que obtuviste con el tamaño del rectángulo que contiene las piezas del Stomachion ¿Qué puedes concluir?

4. Escribe tres formas de verificar tu conclusión.

a.

b.

c.

5. Selecciona dos piezas del Stomachion que tienen la misma forma. Di tres maneras de verificar qué una es más grande que la otra pieza.

a.

b.

c.

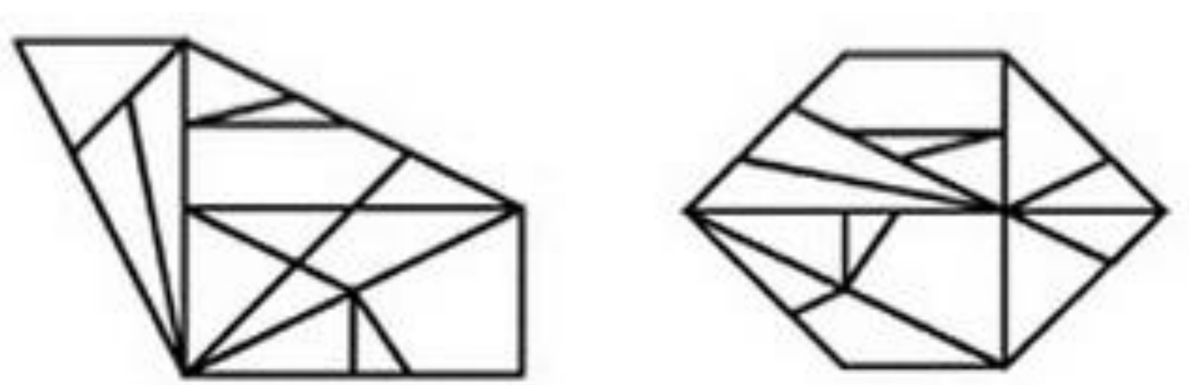
6. Di cuál es el tamaño de cada una de las piezas del rompecabezas que estás comparando.

7. Pega en tu cuaderno el cuadrado que armaste con las 14 piezas del Stomachion.

8. Enumera las piezas; coloca el número 1 a la pieza más pequeña, 2 a la que le sigue en tamaño y continua de esta manera hasta colocar a la pieza más grande el número más grande.

9. Compara con otro compañero los números que asignaste a cada pieza. Si tienen respuestas distintas analicen las respuestas y lleguen a un acuerdo de cuál es la respuesta adecuada y justifiquen la conclusión a la que llegaron.

10.¿Cada figura se construyó con el Stomachion?



11. Con que información cuentas para saber si cada figura se construyó con el Stomachion.

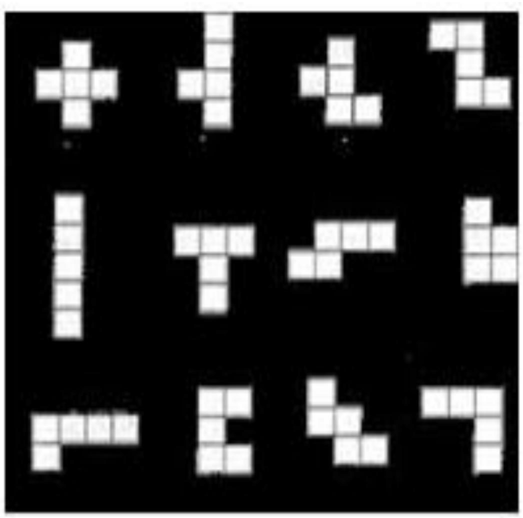
a. ¿Cuál es la incógnita en la situación?.

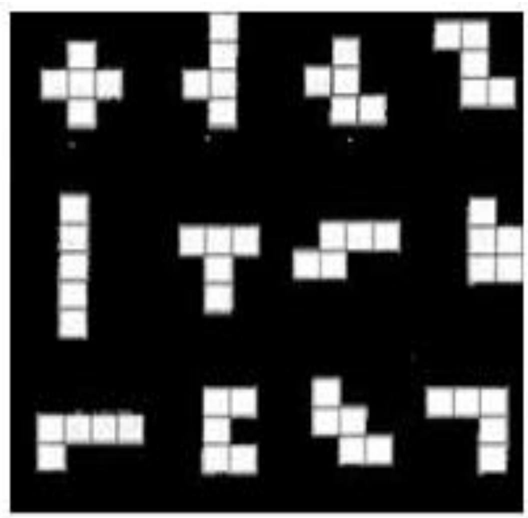
b. Si el Stomachion es un rompecabezas qué condiciones hay que cumplir para armar figuras con él.

Quinta actividad

Objetivo: Se pretende presentar contextos significativos de medida de superficies para reconocer el uso de la unidad de medida y para encontrar relaciones geométricas con las cuáles calcular el área de algunas superficies.

v. Otro rompecabezas famoso es el pentomino, sus fichas están en blanco en la figura. Hay dos copias de las fichas del pentomino por si necesitas recortar las fichas del pentomino para poder usarlas.





1. Dibuja una figura que no esté en el dibujo y que pueda ser pieza del pentomino. ¿Qué tuviste en cuenta para que la pieza que dibujaste sirva como pieza del pentomino?

2. Con las 12 piezas del pentomino se puede armar un rectángulo.

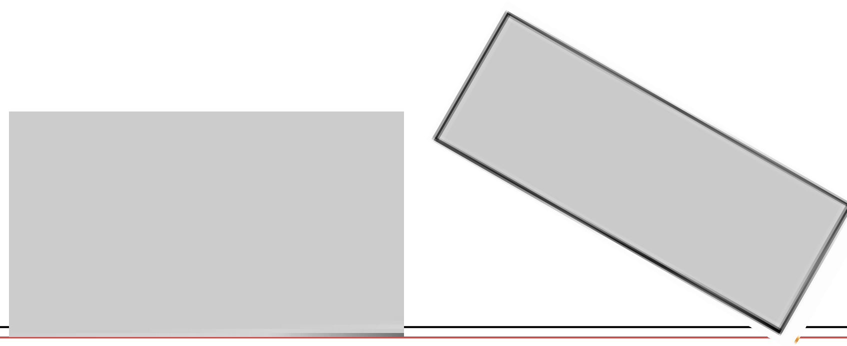
3. Halla el tamaño del rectángulo que obteviste.

4. Describe con tus palabras o con dibujos cómo podrías saber el tamaño del rectángulo sin armarlo.

5. ¿Se pueden obtener otros rectángulos? Si tu respuesta es sí, di la medida de los lados para cada rectángulo que se pueda obtener.

6. Recuerdas situaciones similares donde se requiere saber si con unas piezas puedes armar o cubrir una superficie sin tener la superficie o sin tener las piezas físicas. ¿Qué situaciones, y cómo se procede en esos casos?

7. Escribe con tus palabras como calculas el tamaño de cada uno de los siguientes rectángulos.



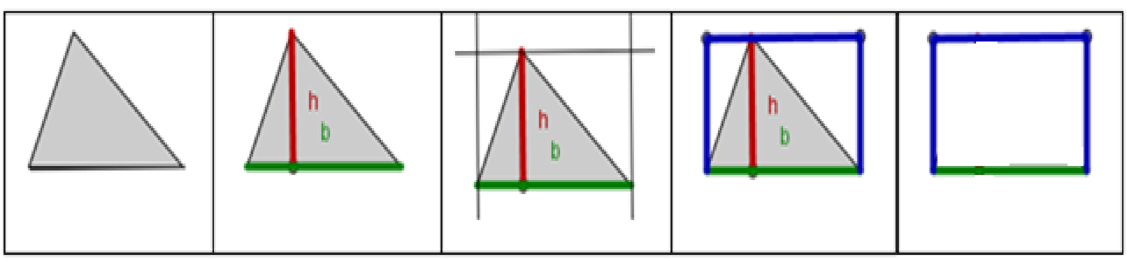
<u>Área</u>[1] es la medida de la superficie ocupada por la figura. Esta medida corresponde a un número positivo[1] que indica la cantidad de unidades de medida requeridas para cubrir completamente la superficie, sin dejar huecos, ni sobreponer, ni sobrepasar la figura a medir.

8. Escribe una expresión para calcular el área de un rectángulo.

Sexta actividad

Objetivo: Se proponen tareas conducentes a presentar la descomposición de figuras poligonales en triángulos y la transformación de estos en rectángulos, como estrategia viable a nivel escolar para el cálculo del área de cualquier figura poligonal.

1. Observa que se le va haciendo al triángulo**.**

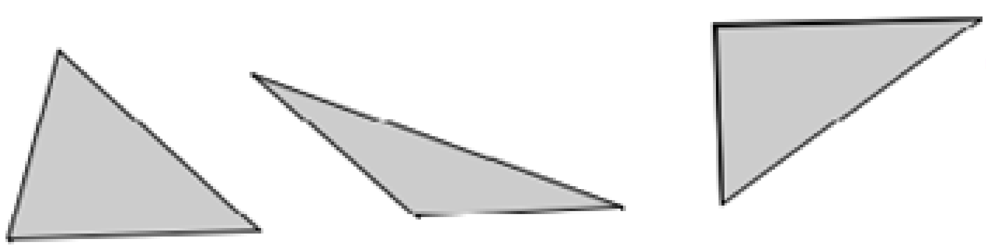


a. La figura inicial es un ___________ y la última figura es un ___________

b. Describe con tus palabras como se obtiene la figura final a partir de la figura inicial.

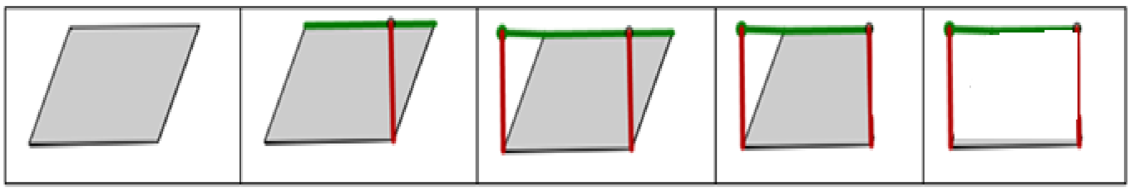
c. Compara el tamaño de la figura inicial con el tamaño de la figura obtenida al final del proceso.

d. Calcula el área de cada triángulo.



e. Escribe una expresión para calcular el área de un triángulo teniendo en cuenta el proceso ilustrado en la secuencia.

2. Observa que se le va haciendo al paralelogramo.

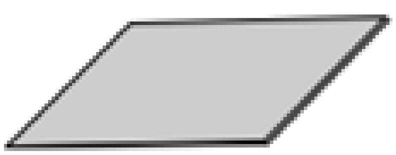


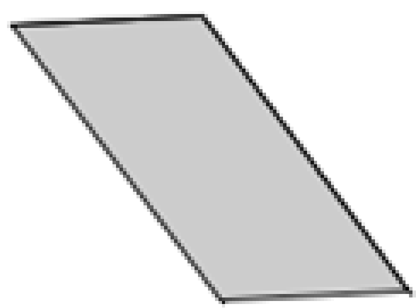
a. La figura inicial es un ___________ y la última figura es un ___________.

b. Describe con tus palabras como se obtiene la figura final a partir de la figura inicial.

c. Compara el tamaño de la figura inicial con el tamaño de la figura obtenida

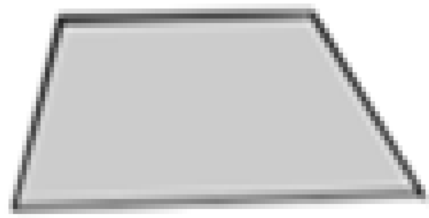
d. Calcula el área de cada paralelogramo.





f. Escribe una expresión para calcular el área de un paralelogramo teniendo en cuenta el proceso ilustrado en la secuencia.

3. Calcula el área del trapecio.



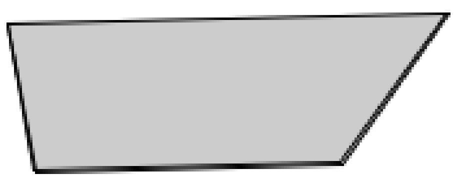
a. Qué información conoces que puedas usar para calcular el área del trapecio, de esa información cuál está dada en la situación.

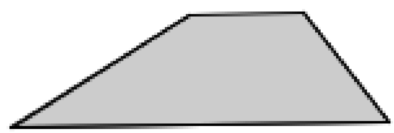
b. En las actividades anteriores para calcular el área del triángulo y el paralelogramo se les asignó a cada uno un rectángulo y se expresó el área de cada figura en términos del área del rectángulo.

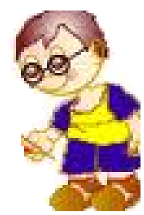
c. Puedes asociado un rectángulo al trapecio, si lo puedes lograr dibuja el rectángulo asociado al trapecio.

d. Si asociaste un rectángulo al trapecio expresa el área del trapecio en términos del área del rectángulo.

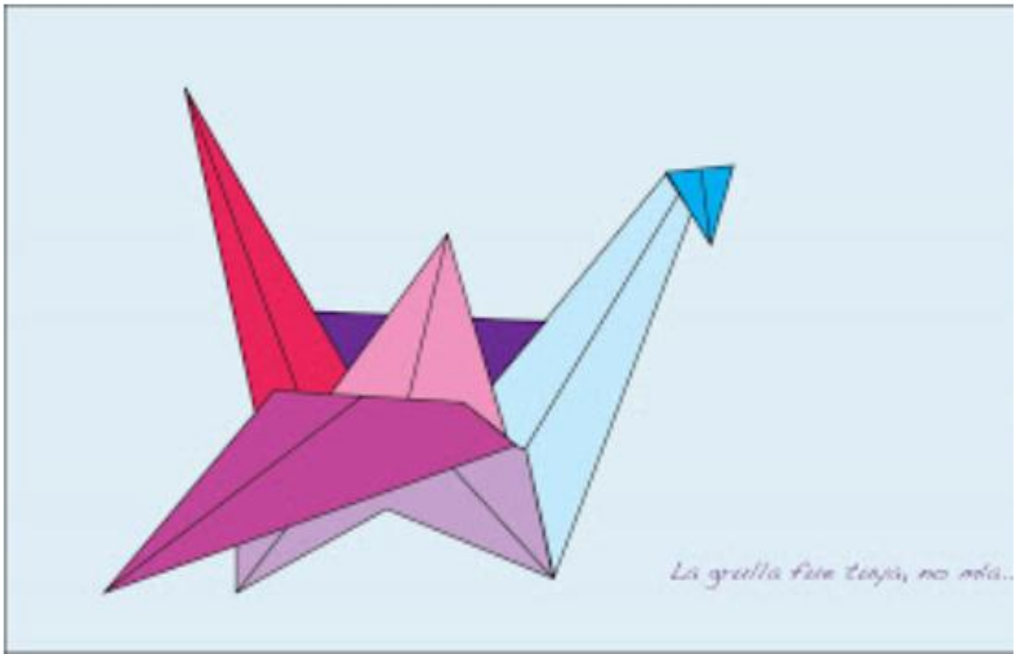
e. Calcula el área de cada trapecio.





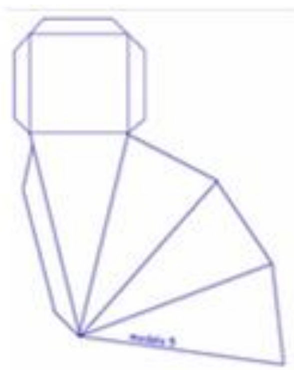


4. Calcula el área de la superficie de esta hermosa Grulla.

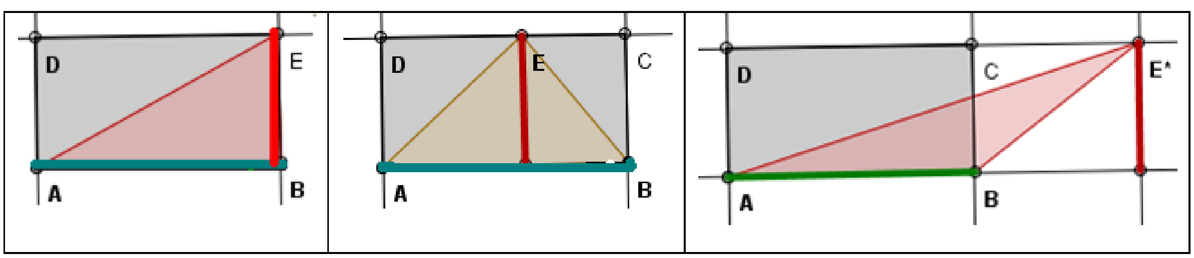


- **a.** Puedes calcular el área de la silueta de la Grulla a simple vista.
- **b.** Piensa en una problema similar pero más sencillo de solucionar, ¿puedes emplear en este caso la solución del otro problema?, ¿Cómo?
- **c.** Aprovechando lo trabajado anteriormente piensa si a la silueta de la Grulla le puedes asociar un rectángulo y expresar el área de ella en términos del área del rectángulo. Explica tu respuesta.
- **d.** Puedes dividir toda la silueta solo usando rectángulos.
- **e.** Puedes dividir la silueta solo usando triángulos.
- **f.** Alguna de esas descomposiciones de la silueta te sirven para calcular el área de la Grulla, ¿Cómo lo harías?
- **g.** ¿La estrategia empleada para transformar triángulos, paralelogramos y trapecios en rectángulos, es posible usarla para conocer el área de otras figuras rectilíneas?. Si la respuesta es sí, describe cómo hacerlo.y si no por qué no.
- **h.** El 6 de agosto personas de todo el mundo que conocen la historia de Sadoko, envían Grullas de origami a Hiroshima. Averigua la historia y anímate a realizar 1000 grullas, por la paz de Colombia.

5. Calcula la cantidad de cartón que necesitarías para sorprender a alguien muy especial con un detallito empacado en esta hermosa caja que tú mismo realizaste

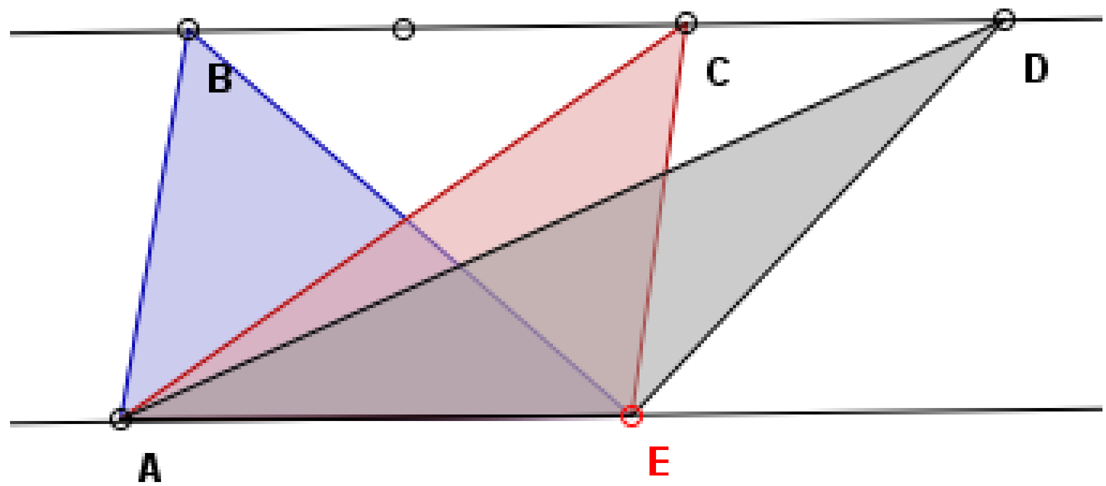


6. Si en todas las figuras se utilizó el mismo rectángulo. Explica qué significa que “usé el mismo rectángulo”.



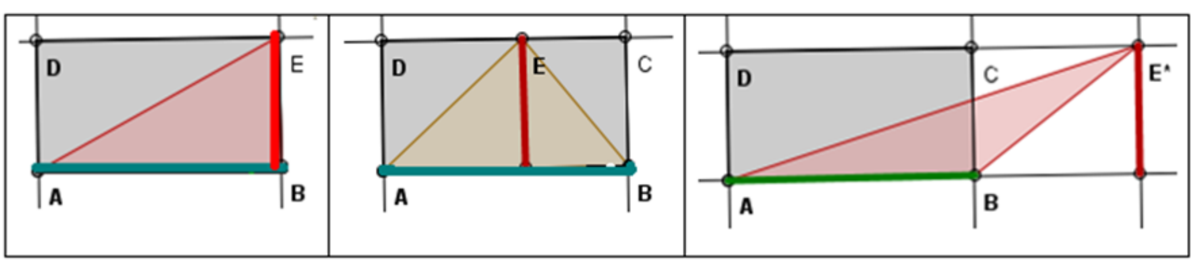
a. En cada una de las tres figuras, el rectángulo es el doble de grande que el triángulo ABE, verifica esta afirmación.
b. En cada triángulo se coloreó de rojo una de sus alturas y de verde una de sus bases. Observa las figuras del punto 4 y escribe una frase para describir la relación entre el tamaño de un triángulo con el tamaño del rectángulo, si las dos figuras están entre las mismas paralelas.

7. Verifica que los triángulos, ABE, ADE, ACE, de la figura son iguales en área.



Dibuja en la misma figura otros triángulos iguales en área a los tres triángulos de la figura dada. ¿Qué tuviste en cuenta para garantizar que sean iguales?

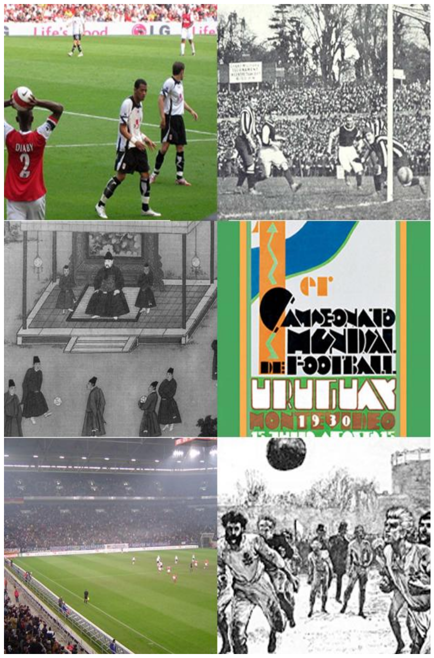
Los tres rectángulos ABCD de la figura son iguales



8. En cada una de los tres casos anteriores a partir del rectángulo puedes encontrar el triángulo del que se obtuvo el respectivo rectángulo.

Hemos recurrido a asociar rectángulos a figuras para calcular el área de las figuras. En este sentido responde:

a. ¿Toda figura rectilínea se puede descomponer completamente en rectángulos o en triángulos?



b. Para qué sirve que toda figura se pueda descomponer completamente en __________.

c. En la figura cada rectángulo tiene asociado un triángulo. Y cada triángulo con su respectivo rectángulo comparten la misma base, y la misma altura. Qué puedes decir respecto a sus tamaños.

<u>Séptima actividad</u>

Objetivo: Se propone un problema en un contexto significativo donde es posible aplicar los conceptos, procesos y método usado en las anteriores actividades.

LA PASIÓN DEL FÚTBOL

El fútbol históricamente ha apasionado a hombres de distintas culturas. Incluso los Mayas tenían su versión, lo llamaban el juego de la pelota. Para los Mayas no era solo un juego, era un ritual en el que dos equipos se enfrentaban durante días para rendir con sus destrezas físicas individuales y grupales tributo a los dioses.

Tan apasionado era el juego que el equipo perdedor perdía la cabeza, no es que enloquecieran, sino que eran decapitados para ofrecerle la cabeza a los jugadores del equipo ganador. Afortunadamente hoy solo se quitan la camiseta para ofrecérsela a los jugadores del otro equipo.
Los equipos mayas tenían hinchas que los animaban con suaves murmullos que se confundían con el viento. Un tanto distinto al cántico de las barras bravas que hacen vibrar el campo de juego, emocionar al equipo apoyado e intimidan a los contendientes y sus hinchas.

El balón con el que jugaban los mayas era una pesada pelota de hule, mientras el balón aceptado por la FIFA es una pelota liviana de cuero. La pelota es un icosaedro truncado, figura poliédrica conformada por 12 pentágonos y 20 hexágonos que al ser inflada toma la forma redondeada. Esta figura ha sido cambiada por el poliedro conformado por 20 triángulos, 30 cuadrados y 12 pentágonos que al ser inflada queda más redondeada.

Observa un balón de fútbol y calcula cuánto cuero se requirió para elaborarlo.

Conclusiones y recomendaciones

6.1. Conclusiones

La resolución de problemas constituye un contexto para adquirir y aplicar conocimiento.

Emplear representaciones geométricas en el trabajo hace que el estudiante las reconozca como representaciones de problemas sobre las que puede razonar y comunicar lo que comprende.

La rectangularización, de figuras rectilíneas es una herramienta heurística potente para calcular el área de figuras rectilíneas, resolver problemas geométricos y aportar las bases que permitan una mejor comprensión del álgebra, la trigonometría y el cálculo.

El análisis y síntesis constituye una heurística natural para la resolución de problemas geométricos y para que los escolares se atrevan a resolver problemas complejos descomponiéndolos en unos más sencillos.

6.2Recomendaciones

Al maestro que quiera implementar la propuesta de aula aquí presentada le recomendamos dar tiempo a los escolares para desarrollar las actividades, permitirles colaborarse y comunicarse en torno a las tareas propuestas y al finalizar cada tarea socializar los procesos y las respuestas para institucionalizar lo que éste claro y aclarar los aspectos, conceptos y procesos que requieran mayor claridad. Siempre motivar a los escolares a expresar lo realizado o comprendido con sus propias palabras verbalmente y luego sí emplear expresiones matemáticas. Propiciar que las expresiones matemáticas incorporadas realmente expresen algo al escolar.

De ser posible contar con Software, como el empleado para hacer las representaciones geométricas usadas en todo el trabajo, hacerlo propiciando la identificación de los invariantes de los objetos y de los procesos y destacar las propiedades de los objetos y las relaciones entre ellos.

A. Anexo: Estándares que inciden directamente en el cálculo de área de figuras planas

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICO	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
1-3 Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, … Comparo y ordeno objetos respecto a atributos medibles. Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto. 4-5 Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, … Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones. 6-7 Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos. 8-9 Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos. 8-9 Generalizo procedimientos de	1-3 Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia. Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o fi guras geométricas bidimensionales Represento el espacio circundante para establecer relaciones espaciales. 4-5 Construyo y descompongo fi guras y sólidos a partir de condiciones dadas. 6-7 8-9 Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos. 10-11	1-3 Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros). Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas. 4-5 Represento y relaciono patrones Numéricos con tablas y reglas verbales. Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos 6-7 Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).

cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y … Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. 10-11 Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos	Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).	
1-3 Analizo y explico sobre la pertinencia de patrones e instrumentos en procesos de medición. 4-5 Justifico relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos. Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas. 6-7 Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud. 8-9 Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias. 10-11 Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición	1-3 4-5 Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños. 6-7 Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. 8-9 Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre fi guras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.	1-3 4-5 Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. 6-7 Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). 8-9 Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. 10-11

Bibliografía

BARRIOS, O. y GUACANEME, E. (2011). *El método de análisis-síntesis en la aritmética escolar: cuando el camino se vuelve meta*. En: Colombia. 2011. *Evento:* XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas *Ponencia:* El método análisis-síntesis en la aritmética escolar: cuando el camino se vuelve la meta *Libro:, , p.* - , v. <, fasc.

BELTRAMETTI, María C. – ESQUIVEL, Mónica L. - FERRARRI, Elvira E, (2005). *Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes del Profesorado en Matemática*. Universidad Nacional del Noreste, Comunicaciones Científicas y Tecnológicas.

EUCLIDES, (1996). *Elementos.* (Libros I-VI), España, Planeta De Agostini.

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposición didáctica*. Madrid, AIQUE.

GODINO J.D. (1993). En significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Quadrante, Vol 2, nº 2, pp. 69-79 (Revista Teórica e de Investigaçao; Associaçao de Professores de Matemática, Lisboa).

GODINO. J. ALFONSO, J, ROMERO. R. VASQUEZ. M (1919). *Área de conocimiento didáctica de la matemática*. Madrid. Síntesis.

GIL, F. RICO, L. (2003). *Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Investigación didáctica, 32-34.

HALLIDAY. M.A.K. (1998). *El lenguaje como semiótica social, la interpretación social del lenguaje y del significado*. Colombia. Fondo de Cultura Económico.
LAKATOS, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid, Alianza Universidad.

LAKATOS, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid, Alianza Universidad.

PIAGET. E. (1994). *La formación del símbolo en el niño*. Colombia. Fondo de Cultura Económica.

PIMM. D. (1990). *El lenguaje Matemático en el aula*. Madrid, Morata.

POLIA, G. (2002). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.

PUIG, L., CERDAN, F. (1990). *Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales,* Segundo simposio Internacional de Educación Matemática. Cuernavaca, México.

DUVAL, R. (1999). *SEMIOSIS Y PENSAMIENTO HUMANO, Registros semióticos y aprendizaje intelectuales*. Cali Colombia. Peter Landg. Universidad del Valle.

SANTALÓ, LLINARES, S. SANCHEZ. V, HOZ. A. (1999). *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia*. Madrid. Rialp. S.A

SCHOENFELD, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical*, Behavior.

VEGA, REÑON, L. (1990). *La trama de la demostración (Los griegos y la razón tejedora de pruebas)*. Madrid, Alianza Editorial.

VEGA, REÑON, L. (1994). *La demostración* “more geometrico”: notas para la historia de una extrapolación. Mathesis 10, -México, UNAM.