UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

ESTUDIO DEL CONSUMO DE ENERGÍA EN MOLIENDA HUMEDA DE UN MINERAL CONSIDERANDO REOLOGÍA DE SUSPENSIONES

STUDY OF ENERGY CONSUMPTION IN WET GRINDING OF A MINERAL CONSIDERING RHEOLOGY SUSPENSIONS

Lina Marcela Porras Alzate

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Minas, Departamento de Materiales y Minerales

Medellín, Colombia

2016

ESTUDIO DEL CONSUMO DE ENERGÍA EN MOLIENDA HUMEDA DE UN MINERAL CONSIDERANDO REOLOGÍA DE SUSPENSIONES

Lina Marcela Porras Alzate

Tesis de investigación presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Ingeniería de Recursos Minerales

Director:

Ph.D. Moisés Oswaldo Bustamante Rúa

Línea de Investigación:

Procesamiento de Minerales

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Minas, Departamento de Materiales y Minerales

Medellín, Colombia

2016

A Luciana...

Agradecimientos

A Dios…

A mi hija Luciana, por alegrarme la vida y...

A mamá, a quien le debo mucho de mi formación académica y por su constante motivación.

A Juan Manuel Montoya por su amistad y colaboración incondicional.

A dirección de laboratorios de la universidad, por permitir la gestión y compra del molino para el Instituto de Minerales Cimex.

Al Ingeniero Andrés Rodríguez de la empresa Mina La Margarita por el material de trabajo.

Al profesor Oswaldo Bustamante por su asesoría en la realización de este proyecto.

Al gerente Carlos Salazar de la empresa Cecoltec, por su apoyo en la realización de pruebas de reología.

Al profesor Alexander Correa Espinal por sus enseñanzas.

A Fernando Arenas y Rosa Elena Jurado por su colaboración en las pruebas de laboratorio.

A los Jurados, por el tiempo dedicado a la calificación de este trabajo de investigación.

Resumen

Considerando antecedentes reportados en la literatura, se tiene evidencia que el comportamiento mecánico de las suspensiones influye significativamente en la capacidad de la molienda húmeda de minerales, debido a que estas suspensiones se caracterizan por comportarse como un fluido no newtoniano, y la viscosidad de la pulpa no es constante a diferentes tasas de cizalladura, dada la funcionalidad entre el esfuerzo de cizalladura aplicado el gradiente de velocidad.

En este sentido, esta investigación presenta los resultados obtenidos al estudiar la molienda de un mineral bajo un escenario dinámico de disipación de energía mecánica que varía en función de las granulometrías de los productos. Para ello, se midieron y analizaron parámetros importantes en la molienda como son: concentración de sólidos, tamaño de partícula, distribución del tamaño de partícula, tasa de cizalladura dentro de cámara de molienda, viscosidad de la suspensión y potencia del molino que tienen una influencia significativa en el rendimiento de la molienda.

Se evidencio como el comportamiento reológico de la suspensión podría aumentar el rendimiento de la molienda al disminuir el tamaño de partícula y manteniendo la misma potencia suministrada al molino. Además, se logra explicar los resultados por la interacción de la energía disipada reológicamente y la disminución del tamaño de partícula, encontrando una correlación empírica con un adecuado ajuste ($R^2 > 0.8$) para los resultados de la molienda bajo las condiciones experimentales investigadas. Así mismo, dicha correlación está en función de la fracción volumétrica y viscosidades de las suspensiones.

Palabras clave: molienda en húmedo, reología de la suspensión, viscosidad, disipación de energía, potencia.

Abstract

Considering history reported in the literature, these is evidence that the mechanical behavior of the suspensions significantly influences the ability of wet mineral grinding, because these suspensions are considered a non-Newtonian fluid and the viscosity of the pulp is not constant at different shear rates, given the functionality between the applied shear stress velocity gradient.

In this sense, this research presents the results obtained by studying the grinding of a mineral under dynamic scenario dissipating mechanical energy varies depending on the granulometry of the products. For this, they were measured and analyzed important parameters in milling such as, solids concentration, particle size, distribution of particle size, shear rate, viscosity of the suspension and mill power having a significant influence on the performance of milling.

It was evident how the rheological behavior of the suspension may increase the grinding performance with decreasing particle size and maintaining the same power supplied to the mill. Moreover, it explains the results from the interaction of the energy dissipated rheologically and decreasing particle size, finding an empirical correlation with a good fit ($R^2 > 0.8$) for grinding results under the experimental conditions investigated. Also, this correlation is a function of the volume fraction and slurry viscosities.

Keywords: wet grinding, slurry rheology, viscosity, energy dissipation, power.

Contenido

Pág.

Resumen ..... **IX**

Abstract ..... **X**

Lista de figuras ..... **XIII**

Lista de tablas ..... **XV**

Lista de símbolos y abreviaturas ..... **XVI**

Introducción **1**

Objetivos **4**
Objetivo General 4
Objetivo Específicos 4

1. Fundamentos Teóricos **5**
1.1 Antecedentes 10
1.2 Molienda 13
1.2.1 Cinética de fractura 13
1.2.2 Velocidad de rotación del molino 16
1.2.3 Dimensiones del molino 17
1.2.4 Carga de bolas 18
1.3 Reología 19
1.3.1 Parámetros que afectan la reología de la suspensión al interior de un molino de bolas 20

2. Metodología Experimental **25**
2.1 Diseño del molino piloto 25
2.2 Preparación del mineral de trabajo 26
2.3 Caracterización del mineral de trabajo 27
2.4 Diseño experimental 28
2.5 Pruebas de molienda en húmedo 30
2.5.1 Condiciones de operación del molino 30
2.5.1 Preparación de la suspensión 32
2.5.1 Toma de muestra 34
2.6 Caracterización de los productos del proceso de molienda 34

3. Resultados y Análisis **35**
3.1 Molino 35

3.1.1 Potencia entregada para mover medios moledores 35
3.1.1 Potencia disipada por la suspensión a la tasa de cizalladura dentro del molino 37
3.2 Suspensión 38
3.2.1 Distribución de Tamaños de partícula con el tiempo de molienda y velocidad de fractura 38
3.2.2 Resultados reológicos 40
3.2.3 Variación de la cinética de fractura con la viscosidad 42
3.3 Formulación de la correlación experimental de la potencia disipada por la suspensión 42
3.4 Análisis estadístico del proceso de molienda 45
3.4.1 Verificación de supuestos 47

4. Conclusiones, discusión y recomendaciones 51
4.1 Conclusiones 51
4.2 Discusión 52
4.3 Recomendaciones 53

A. Anexo: Estimación de la tasa de cizalladura al interior de un molino de bolas Movimiento cascada, molienda batch: Modelo Shi y Napier – Munn (1999) 55

B. Anexo: Equipos empleados en la medición de la potencia, distribución de tamaño de partícula y viscosidad 63

C. Distribución de tamaño de partícula de la muestra de trabajo 67

D. Distribución de tamaño de partículas para cada fracción volumétrica 69

Bibliografía 75

Lista de figuras

Pág.
Figura 1-1: Participación energética de diferentes procesos minero-mineralúrgicos 5
Figura 1-2: Esquema de fractura dentro de un molino rotatorio de bolas 6
Figura 1-3. Efecto del control de fractura sobre el parámetro n en la ecuación (1.2) 8
Figura 1-4: (a): Deformación de un sólido elástico y (b): Deformación de una suspensión cizalle-adelgazante con esfuerzo de cedencia 9
Figura 1-5: Molienda de cuarzo de monotamaño de cuarzo 20 X 30 mallas US en un molino de laboratorio de 8 pulgadas de diámetro (U = 0.5; J = 0.2; ϕc = 70% c.s.; bolas de pulgada de diámetro; W = 300 g; mp = 0.013 kW): -, calculado; o, experimental por tamizado; o, experimental por Sedigraph 16
Figura 1-6: Ilustración del movimiento en un molino de bolas a una velocidad normal de operación 17
Figura 2-1: Diseño del molino de bolas..... 26
Figura 2-2: Muestra del mineral de sílice después de clasificación 27
Figura 2-3: Curva de distribución del tamaño de partícula del material 28
Figura 3-1: Variación de la potencia del molino con la variación del tamaño de partícula de la suspensión en el tiempo: molino de laboratorio de 0,6 m de diámetro. 36
Figura 3-2: Costras de la mezcla suspensión – bolas para altas fracciones volumétricas (55 – 60%)..... 36
Figura 3-3: Variación de la energía disipada reológicamente con la variación de la viscosidad en el tiempo: molino de laboratorio de 0.6 m de diámetro a diferentes fracciones volumétricas. 37
Figura 3-4: Curva de variación de la constante de k_{RR} con el tiempo para fracciones volumétricas de: a. 40 – 45 – 50 % y b. 55 - 60 % 40
Figura 3-5: Curva de variación de la viscosidad con el tiempo para fracciones volumétricas de: a. 40 – 45 %, b. 50 - 55 % y c. 60 % 41
Figura 3-6: Curva de variación de la constante de k_{RR} con la viscosidad para fracciones volumétricas de 40 – 45 – 50 - 55 - 60%..... 42
Figura 3-7: Correlación empírica del consumo energético reológico de la suspensión... 43
Figura 3-8: Correlación empírica de la pendiente del consumo energético reológico de la suspensión dependiendo de la fracción volumétrica para fractura normal de la partícula 44
Figura 3-9: Correlación empírica de la fracción volumétrica de la suspensión y la pendiente de correlación del consumo energético reológico de la suspensión 45
Figura 3-10: Grafica de interacción con las variables de respuesta..... 47
Figura 3-11: Grafica de probabilidad de residuos (Normal)..... 48

Figura 3-12: Grafica de residuos versus el orden de observación para las variables de respuestas..... 49
Figura 3-13: Grafica de residuos versus las variables de respuestas; a. Potencia, b. DTP y c. Viscosidad 50

Lista de tablas

Pág.
Tabla 2-1: Análisis químico de la composición del material 27
Tabla 2-2: Factores y niveles de diseño 29
Tabla 2-3: Matriz de diseño experimental 30
Tabla 2-4: Parámetros constantes en las moliendas en húmedo 31
Tabla 2-5: Parámetros del modelo de Shi y Nappier - Munn (1999) para la estimación de la tasa de cizalladura al interior de un molino de bolas 33
Tabla 3-1: Parámetros de distribución de tamaño de partícula analizadas bajo el modelo de Rosin – Rammler de las fracciones volumétricas (φv) de: a. 40–45–50% y b. 55-60% 39
Tabla 3-2: Resultados del diseño experimental 46
Tabla 3-3: Análisis de varianza (ANOVA) 46

Lista de símbolos y abreviaturas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
A	Área de contacto de la bola en la carga activa	m^2	Tabla 2-5 Anexo A, ec.(15)
B	Numero de bolas en la carga activa	und	Tabla 2-5 Anexo A, ec.(14)
$\boldsymbol{B_{i,j}}$	Fracción en peso acumulativa de material fracturado del tamaño j que es menor que el tamaño superior del intervalo de tamaño i	-	Ec. (1.7)
$\mathbf{D_i}$	Diámetro interior del molino	m	Tabla 2-5
$\mathbf{d_b}$	Diámetro de la bola	m	Tabla 2-5
$\boldsymbol{dE}$	Energía disipada		Ec. (1.2)
g	Constante de gravitación universal	m/s^2	Tabla 2-5
h	Altura de caída libre para la bola dentro del molino	m	Figura 1-2
J	Fracción de llenado de bolas	-	Tabla 2-5
$\boldsymbol{K_{RR}(t)}$	Constante de Rosin - Rammler	micrones	Ec. (1.10)
L	Longitud del molino	m	Tabla 2-5
$\mathbf{N_m}$	Tasa de rotación del molino	rpm	Tabla 2-5 Anexo A, ec.(2)
$\boldsymbol{\bar{N}}$	Valor medio de la tasa de rotación de las capas	rpm	Tabla 2-5
$\boldsymbol{\Delta\bar{N}}$	Pérdida promedio de la velocidad de rotación por cada capa	rpm	Tabla 2-5 Anexo A, ec.(1)
$\mathbf{r_m}$	Radio lineal interior del molino	m	Tabla 2-5. Anexo A, figura A-2
$\mathbf{r_i}$	Distancia radial de la carga de la superficie interior desde el eje de rotación	m	Tabla 2-5 Anexo A, figura A-2, ec.(5)
$\boldsymbol{\bar{r}}$	Posición media radial de la carga activa	m	Tabla 2-5. Anexo A, ec.(9)
$\boldsymbol{S_j}$	Velocidad específica de fractura		Ec. (1.9)
$\mathbf{t_c}$	Tiempo tomado por una bola para moverse entre el base y la cresta de la carga	s	Tabla 2-5 Anexo A, ec.(7)

t_f	Tiempo tomado por una bola para moverse entre la cresta y la base	s	Tabla 2-5 Anexo A, ec.(8)
U	Fracción de huecos	-	Tabla 2-5
$\Delta\bar{U}$	Velocidad relativa promedio entre capas	m/s	Tabla 2-5 Anexo A, ec.(12)
V_m	Volumen del molino	m^3	Tabla 2-5
V_c	Velocidad de rotación critica del molino	rpm	Ec. (1.13)
V_s	Volumen neto de suspensión en la carga activa	m^3	Tabla 2-5 Anexo A, ec.(13)
W	Masa disponible para fragmentarse en el molino	kg	Ec. (1.8)
$w_i(t)$	Fracción de tamaño i	-	Ec. (1.8)
$\bar{x}$	Espesor promedio de capa	m	Tabla 2-5 Anexo A, ec.(3)
Δx	Distancia promedio entre capas adyacentes	m	Tabla 2-5 Anexo A, ec.(16)
ξ	Fracción de la carga activa de la carga total	-	Tabla 2-5 Anexo A, ec.(6)
ε	Intersticios de bolas	-	Tabla 2-5
$\dot{\gamma}$	Tasa de cizalladura	s^{-1}	Ec. (1.16). Tabla 2-5 Anexo A, ec.(17)
θ_T	Angulo de la base	rad	Tabla 2-5 Anexo A, figura A-2
θ_S	Angulo de la cresta	rad	Tabla 2-5 Anexo A, figura A-2, ec.(11)
σ	Esfuerzo	Pa	Ec. (1.1)
μ	Viscosidad de la suspensión	Pa.s	Ec. (1.1)
μ_a	Viscosidad aparente	-	Ec. (1.15a)
φ	Fracción de velocidad de rotación	-	Ec. (1.12)
z	Función de llenado del molino	-	Tabla 2-5 Anexo A, ec.(4)
φ_c	Fracción de velocidad teórica critica	-	Tabla 2-5
ϕ	Potencia disipada reológicamente	$Watt/m^3$	Ec.(3.2)
φ_v	Fracción volumétrica de la suspensión	-	Ec (3.3)

Introducción

La molienda es un proceso de reducción de tamaño de consumo intenso de energía en la industria minera y se ha convertido en un indicador de la sostenibilidad de las explotaciones mineras (Bush, 2013); además, la demanda en la producción de minerales relativamente finos se ha incrementado a escala mundial; tanto como para cumplir condiciones de superficie específica o bien para alcanzar grados de liberación de minerales (King, 2012). Por lo tanto, es muy pertinente optimizar el consumo de energía a través de algunas variables del proceso (Breitung – Faes & Kwade, 2013).

De todas las etapas de procesamiento de minerales en planta mineralúrgicas, los molinos rotatorios generan costos de operación estimados entre el 30 a 50% de los costos globales de la planta (Aldrich, 2013); además, se ha encontrado que el tipo de suspensiones, influye en el rendimiento de la molienda y en la eficiencia energética, por lo que se ha sugerido en la literatura modelar lo que puede representar una relación entre reología de la suspensión, los parámetros de molienda, la cantidad y tipo de reactivos para molienda, la eficiencia energética y la caracterización de tamaño de partícula (He *et al*., 2004; He *et al.,* 2007).

Sin embargo, a pesar que se ha estudiado el proceso de molienda durante décadas (Kawatra & Eisele, 1988; Shi & Napier-Munn*,* 1999, 2002; Bazin & Lavoie, 2000; Tangsathitkulchai, 2003; He *et al*., 2004, 2007; Mulenga & Moys*,*2014; Osorio, 2015; entre otros), no se tiene ningún aporte distinto al elaborado por Alfred Bond (1952) para predecir el consumo energético de un molino de bolas, debido a que las teorías clásicas no han involucrado específicamente la disipación de energía mecánica como factor importante en la fragmentación de minerales.

La utilización a escala industrial de la molienda de minerales vía húmeda en molinos de bolas es ampliamente reconocida como una etapa fundamental del proceso global minero por ingenieros de proceso y diseñadores de plantas. Los factores típicos que influyen en

la eficiencia de los circuitos de molienda y que han sido estudiados son: la velocidad de rotación de la molienda (Bazin & Lavoie, 2000), velocidad de rotación y factor de llenado del molino (Mulenga & Moys, 2014), la interacción entre el tipo del clasificador y el molino (Kawatra & Eisele, 1988), efectos químicos que influyen en la reología de suspensiones (He & Forssberg, 2007), el tamaño y la carga de cuerpos moledores, el tamaño de partícula del alimento, la velocidad de alimentación del molino (Aldrich, 2013), y el desgaste de cuerpos moledores de acero en molino rotatorio (Rivera, 2014), entre otros.

Dado que muchas operaciones de molienda en plantas minero - metalúrgicas se efectúan por vía húmeda, donde las fracciones en peso de las suspensiones que se alimentan a los molinos son cercanas a 0.8, implica que la reología de estas suspensiones puede ser un factor importante dentro del contexto energético de la reducción del tamaño de los minerales.

Es por ello, que algunos investigadores (Shi & Napier-Munn, 1999, 2002; Tangsathitkulchai, 2003; He *et al*., 2004, 2007; Mulenga & Moys,2014; Osorio, 2015) han tratado de relacionar los fenómenos viscosos de las suspensiones con los fenómenos de fractura de las partículas dentro de la cámara de molienda, tratando de determinar cuál es impacto de la reología de las suspensiones, tanto de manera directa como indirecta; que afectan diferentes aspectos de la moliendas tales como: consumo energético específico, velocidad de fractura, determinación de tiempos de residencia, desgaste de medios moledores y de forros del molino y costos operacionales de molienda.

De acuerdo a lo anterior, se puede observar que en los últimos años el conocimiento de la reología de la suspensión en molienda como factor energético ha cobrado relevancia (Aldrich, 2013), debido a que la disipación de energía mecánica en la molienda está asociada a la cuantificación de los consumos energéticos en la fractura de minerales. Actualmente la densidad de la suspensión y el tamaño de los cuerpos moledores son probablemente los factores más frecuentemente utilizados para la optimización de estos procesos; así como, la evaluación del escenario mecánico de disipación de energía a través de la tasa de cizalladura efectiva (Shi & Napier - Munn, 1999).

Sin embargo, debe aclararse que la reología de las suspensiones está en principio asociado a la deformación y flujo de las mezclas mineral – fluido (generalmente agua),

mientras que la fractura desde el punto de vista reológico se considera como un proceso terminal de deformación que genera nuevas áreas superficiales y/o reducción de volumen de las partículas sólidas involucradas en el proceso.

Puede notarse, que en el proceso de molienda estarán ocurriendo los dos eventos; deformación y flujo de las suspensiones en la cámara de molienda y fractura de las partículas sólidas, y por lo tanto, es posible plantear que estos dos procesos disipativos estén ligados fenomenológicamente, porque ambos se fundamentan en trasferencia energética de procesos fuertemente disipativos de energía mecánica (Tangsathitkulchai, 2003; Austin & Concha, 1994).

Por lo anterior, esta investigación determino las variables de conminución que están asociadas a parámetros reológicos de la suspensión de un mineral y que afectan substancialmente la disipación de energía mecánica de fractura dentro de un molino rotatorio.

Objetivos

Objetivo General

Estudiar la molienda de un mineral bajo un escenario dinámico de disipación de energía mecánica que varía en función de las granulometrías de los productos.

Objetivo Específicos

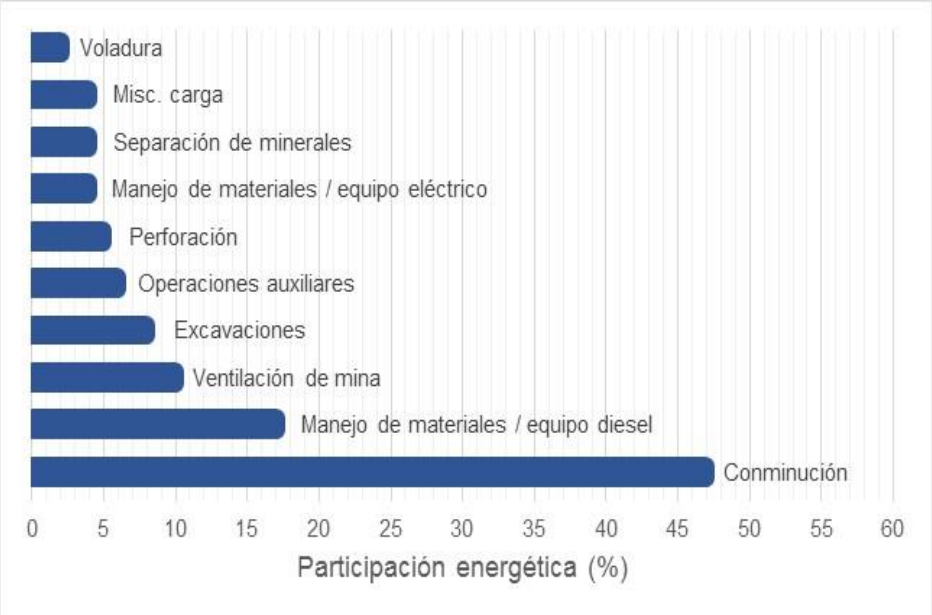
- Evaluar el impacto sobre las principales variables de operación en un proceso de conminución, afectadas directamente por la reología de la suspensión mineral que es sometida a molienda.

- Correlacionar experimentalmente el consumo energético del molino con la variación de los parámetros reológicos de la suspensión.

1. Fundamentos Teóricos

La molienda de minerales orientada a la reducción de tamaño con el fin de lograr la liberación de especie minerales, es en su contexto un proceso de transferencia energética en el cual, se disipa energía mecánica a través de los diferentes eventos de fractura (Austin *et al*., 1984). Sin embargo, la energía entregada al molino que se convierte efectivamente en fractura se ha calculado que es comparativamente más baja que los demás eventos disipativos que también ocurren dentro de la cámara de molienda; a saber: generación de ruido, desgaste de medios moledores, calentamiento, entre otros, que consumen gran cantidad de la energía entregada (Lynch, 1977). La **Figura 1-1**, detalla como la fragmentación de minerales en los procesos de molienda, ocupa más del 45% de la energía total entregada a los proceso minero-mineralúrgicos

Figura 1-1: Participación energética de diferentes procesos minero-mineralúrgicos



Fuente: Tomado de Bush, 2013

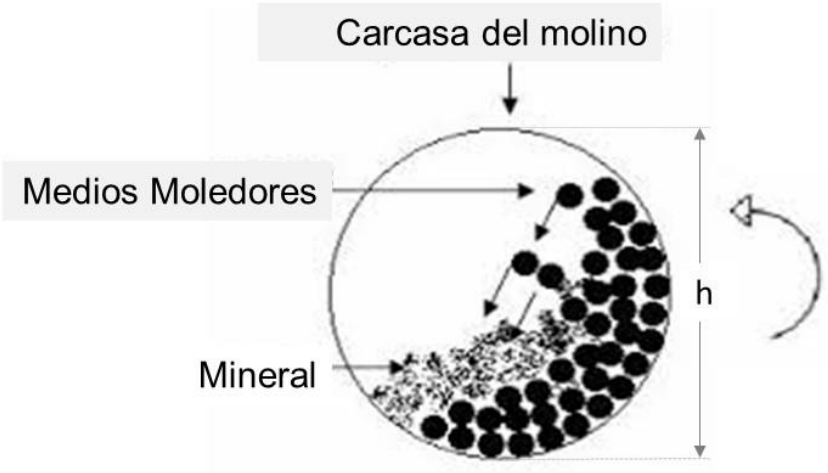
De otro lado, se reconoce que las suspensiones típicas en las operaciones de molienda se comportan como fluidos Newtonianos generalizados (Bustamante, 2002), que se pueden caracterizar por tener una ecuación constitutiva del esfuerzo de cizalladura σ en función de la tasa de deformación $\dot{\gamma}$ de la forma de la ecuación (1.1):

$$\sigma = \mu\gamma^2 \qquad (1.1)$$

Dónde: μ es la viscosidad, es una función escalar de la tasa de deformación $\dot{\gamma}$.

Observando la fragmentación de minerales como un fenómeno esencialmente controlado de transformación energética, la rotación del tambor levanta la carga de bolas a una altura *h (proporcionándoles suficiente energía potencial)*, y estas descienden golpeando sucesivamente a las demás, promoviendo una sucesión de impactos que admite la descarga de energía entre colisión y colisión, lo que finalmente desencadena la fractura de los minerales (ver **Figura 1-2**).

Figura 1-2: Esquema de fractura dentro de un molino rotatorio de bolas



Fuente: Elaboración propia

Puede notarse, que la energía potencial entregada a la carga de bolas mediante la rotación del molino, se disipa en colisiones, las cuales a su vez generan fractura. Esta aproximación ha sido concebida por las aproximaciones clásicas (Austin & Concha, 1994), las cuales

expresan de manera resumida que la energía disipada en fractura se puede aproximar a la ecuación general (1.2):

$$dE = -K(n)\frac{dx}{x^n} \qquad (1.2)$$

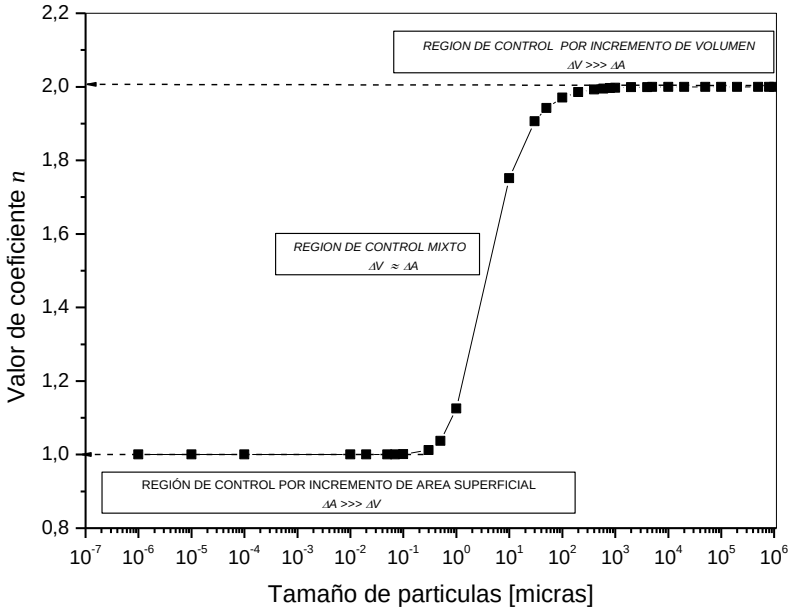
Donde, n es un parámetro que depende fuertemente de la forma como se disipe la energía mecánica en la fractura y $K(n)$ es una constante dependiendo del escenario de fragmentación o aproximación que se emplee, tales como Rittinger (en la cual el tamaño de partícula es definido por la aparición de nueva área en la fractura con *n* igual 2), Kick (en el cual el tamaño es definido por la pérdida de volumen a medida que avanza la fractura, con *n* igual a 1), y Bond (sugerido como un proceso combinado de los dos mecanismos anteriores con *n* igual a 1.5), (Austin & Concha, 1994).

$$n = \begin{cases} 1.0 & \text{(aproximación de Kick)} \\ 1.5 & \text{(aproximación de Bond)} \\ 2.0 & \text{(aproximación de Rittinger)} \end{cases} \qquad (1.3)$$

Puede notarse como las aproximaciones de Rittinger y de Kick son soluciones asintóticas de la ecuación (1.3), mientras que la aproximación de Bond es una aproximación expresa a un control mixto que de alguna manera combina ambas soluciones, como lo expone Bustamante, 2002 (ver **Figura 1-3**).

Sin embargo, es claro que, dentro de la cámara de molienda, además de la fragmentación de minerales; ocurren otros eventos que disipan energía mecánica, tales como generación de ruido, incremento de temperatura desarrollado por proceso de fricción, transporte de masa entre la entrada y salida de la cámara de molienda, astillamiento-abrasión de partículas y desgaste de medios moledores y forros internos del molino (Lynch, 1977; Austin & Concha, 1994; Wills & Napier-Munn, 2011; Rivera, 2014).

Figura 1-3. Efecto del control de fractura sobre el parámetro n en la ecuación (1.2)



Fuente: Tomado de Bustamante, 2012

Por otro lado, la reología de las suspensiones minerales permite cuantificar y relacionar la energía disipada en los eventos de fractura (ver **Figura 1-4** (a)) y en eventos de deformación y flujo (ver **Figura 1-4** (b)), por lo que las modelos clásicos de disipación de energía en la fractura (Rittinger, Bond y Kick, entre otros) no son más que la cuantificación de las áreas bajo la curva esfuerzo - deformación hasta alcanzar la fractura, o bien dicho de otra forma, el área bajo la curva hasta alcanzar la fractura (Austin & Concha, 1994), es la energía E requerida para deformar y reducir de tamaño, lo que puede expresarse como:

$$E_{DEFORMACIÓN} = \begin{cases} \sigma\epsilon & \text{para escenario de carga rápida} \\ \sigma\epsilon/_2 & \text{para escenario de carga lenta} \end{cases} \qquad (1.4)$$

Además de lo anterior, el área bajo la curva esfuerzo-velocidad de deformación (ver **Figura 1-4** (b)), permite determinar la potencia P entregada para dispar la energía mediante deformación permanente, ver ecuación (1.5).

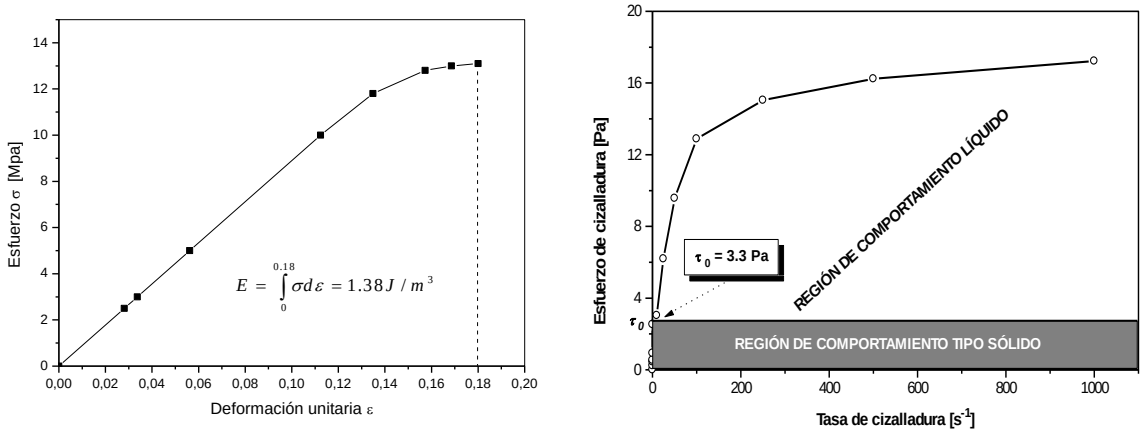
$$P_{DEFORMACIÓN} = \sigma * \dot{\gamma} \qquad (1.5)$$

La relación entre las expresiones de la ecuación (1.4) y de la ecuación (1.5), se puede expresar como:

$$E_{DEFORMACIÓN} = P_{DEFORMACIÓN} * t \qquad (1.6)$$

Dónde: t es tiempo

Figura 1-4: (a): Deformación de un sólido elástico y (b): Deformación de una suspensión cizalle-adelgazante con esfuerzo de cedencia



(a) (b)

Fuente: Tomado de Bustamante, 2004

En este sentido, haciendo una analogía termomecánica, se podrá asumir que de alguna manera la reología de las suspensiones sometidas a molienda podrá generar información relacionada con la fractura de las partículas.

Si consideramos la ecuación (1.1), es suficiente saber las magnitudes de la viscosidad de la suspensión y se requiere determinar el valor del esfuerzo generado dentro de la cámara de molienda o bien la tasa de cizalladura, para poder tener un valor de la energía disipada por deformación de la suspensión.

Por otro lado, no está explícito en la bibliografía de fragmentación de minerales en molinos rotatorios, el efecto de la reología de las suspensiones involucradas específicamente, pues

se debe aclarar que la viscosidad impacta directamente los fenómenos disipativos de flujo y transporte de masa dentro de la cámara de molienda que ocurre a través de los intersticios que deja el lecho poroso de bolas, mientras que la fractura es un evento de disipación de energía mecánica asociado al impacto y/o colisión de los medios moledores de forma repetitiva.

Ahora bien, el escurrimiento de las suspensiones minerales a través del lecho poroso de bolas ocurre simultáneamente con los eventos de fractura de minerales y por lo tanto, el acople de estos dos procesos puede estar mediado por el comportamiento mecánico de las suspensiones, esto es, a la intensidad de la viscosidad, de los esfuerzos de cedencia, y en general de la viscoelasticidad. Sin embargo, se desconoce las relaciones explícitas que permitan modelar la fragmentación versus reología.

Una forma de determinar el efecto de la reología de las suspensiones específicamente sobre los eventos de fractura (y aislando el escurrimiento de mineral a través del lecho poroso de bolas), consiste en efectuar moliendas por lotes a escala de laboratorio (denominadas también *"batch").* De esta manera se minimiza el efecto del movimiento convectivo de los minerales dentro del molino en la dirección del eje de molino y se apreciará la generación de fractura por el movimiento del lecho de bola ocasionado exclusivamente por la velocidad de rotación del molino.

En la cámara de fractura mientras parte de la carga de bolas asciende por acción de la rotación de molino, otra parte de la carga desciende en cascada. Lo cual origina un gradiente de velocidad el cual estará relacionado a una tasa de cizalladura.

1.1 Antecedentes

Las suspensiones minerales sometidas a los procesos de molienda son conocidas por ser no - newtonianas y dependientes de la tasa de cizalladura y, por lo tanto, las propiedades reológicas de éstas son determinantes en este proceso (Shi & Napier - Munn, 1999). Debido a la complejidad del movimiento de la carga de bolas y suspensión al interior del molino, es difícil calcular un valor exacto de la tasa de cizalladura, por ello se relacionan algunos trabajos realizados en este tema y que son de interés en esta investigación, como:

Klimpel, 1984, estimó que los valores de tasa de cizalla se encontraban en un intervalo entre 0 y 0.6 s-1, pero no reportó como fueron calculados.

Mishra, 1991 y Mishra & Rajamani, 1994, emplearon el método de los elementos discretos para simular el movimiento de la carga de bolas al interior del molino; sin embargo, no tomaron en cuenta las características de la suspensión, por lo que los resultados de dicho estudio no se aplicaron para estimar la tasa de cizalladura dentro de un molino.

Shi & Napier - Munn, 1996, desarrollaron un modelo semi - empírico para predecir la reología de la suspensión y demuestra la compleja influencia de las propiedades reológicas en la molienda y en otros procesos. También realizaron un estudio para estimar los gradientes de velocidad al interior de un molino de bolas, para dos movimientos típicos de estos procesos: el movimiento de cascada y el movimiento de catarata, presentando todo el desarrollo matemático y deductivo para hallar la taza de cizalladura dentro de un molino (Shi & Napier - Munn, 1999) y posteriormente (Shi & Napier - Munn, 2002) determinaron el efecto de la reología de la pulpa en una molienda industrial encontrando que el índice de molienda depende de la naturaleza reológica de las suspensiones, bien sea si fuesen dilatantes o bien pseudoplásticas.

Tangsathitkulchai, 2003, estudió el efecto de la reología de la suspensión en la molienda fina en un molino de bolas a nivel de laboratorio, donde determinó que la cinética de la desaceleración de las tasas de rotura para la molienda humedad fina de cuarzo de malla 20 x 30 se produce en cualquier concentración de la suspensión incluso para pulpas de viscosidad baja. Además, el cambio de la concentración de sólidos en la suspensión y la distribución de tamaño de partícula de la fase discreta tienen un efecto directo sobre el carácter reológico de la suspensión y ésta a su vez, altera la trayectoria de la circulación de la carga de bolas y por tanto la interacción entre partícula y medios moledores.

He, Wang & Forssberg, 2004, realizan una revisión bibliográfica en la que analizan que la reología de suspensiones tiene una influencia significativa en los procesos de molienda y depende de varios parámetros tales como, concentración de sólidos, distribución de tamaño de partícula, forma de la partícula, temperatura, velocidad de rotación del molino, pH y uso de dispersante. Concluyendo así que, la optimización del comportamiento reológico de la suspensión en molienda húmeda puede incrementar significativamente el

rendimiento, la eficiencia energética y la finura del producto. además, se encontró que el efecto del uso de un dispersante apropiado en la dosificación correcta puede aumentar el rendimiento de la molienda, aumentando el contenido de sólidos en un 30% en peso, aunque es poco el entendimiento del mecanismo del efecto molecular en peso de un dispersante en el control reológico.

He & Forssberg, 2007, estudiaron la influencia de la reología de la suspensión en molienda ultrafina de cuarzo. Determinaron que el efecto de la combinación del tamaño de grano, velocidad de giro o concentración de solidos es evidente y que la adición de dispersante o la baja concentración mejora el rendimiento de la molienda (ejemplo, alta eficiencia energética y finura del producto) debido al mantenimiento de viscosidades inferiores a velocidades de cizallamiento investigados durante la molienda. Así mismo encontraron que la velocidad de molienda interactúa con la concentración de sólidos y que esto se debe a que el fenómeno observado se explica por la interacción de la reología de la suspensión y de intensidad de tensiones de grano en el proceso de molienda.

Govender, Mangesana, Mainza & Franzidis, 2011, cuantificaron la tasa de cizalladura al interior de un molino haciendo un seguimiento de la trayectoria de la partícula por tomografía por emisión de positrones (PEPT). Usando las distribuciones de velocidad de los trazadores en un tiempo promedio para así derivar la tasa de cizalladura, encontrando así que la tasa de cizalladura decrece con el incremento de la concentración de sólidos en la suspensión a altas o bajas tasas de velocidad del molino y los valores altos de tasa de cizalla son obtenidos a bajas concentraciones o a altas velocidades del molino.

Breitung – Faes & Kwade, 2013, estudian la predicción de consumo de energía bajo algunas condiciones de molienda, con el fin de optimizar el consumo energético. Proponen una intensidad de esfuerzo optimo correlacionada con los esfuerzos a compresión que son dominantes en la molienda. Además, los términos describen las fuerzas de las partículas que son correlacionadas con las propiedades de los materiales (módulo de Young, diámetro de la partícula, alimento, densidad del producto, entre otros). Los cuales pueden ser aplicados para generar procesos de molienda con bajo consumo energético.

Aldrich, 2013, realizan una revisión bibliográfica en la que analizan el consumo de acero en la molienda por representar un alto costos de operación en los circuitos de molienda, los cuales los atribuye a tres mecanismos básicos: impacto, abrasión y corrosión y muestra los diferentes modelos y/o teorías para calcular el desgaste de medios moledores.

Mulenga & Moys, 2014, estudiaron el efecto de la suspensión y la velocidad de molienda en la potencia neta en un molino de bolas en movimiento, empleando el modelo teórico de Morrell's y experimental usando sensores para estudiar el comportamiento de la carga.

Osorio, 2015, en la tesis de doctorado establece la relación de la viscosidad de suspensión que garantiza la máxima velocidad de fractura, mediante un diseño de cinética de fractura experimental con ensayos de monotamaño en seco y en húmedo considerando tres tamaños de partícula; utilizando arenas de sílice, un reactivo como modificador reológico y el valor de la tasa de cizalladura determinado por Shi & Napier - Munn, 1999.

1.2 Molienda

Cuando se dimensiona un molino, el objetivo es dimensionarlo para procesar un determinado flujo másico de minerales, con unas especificaciones granulométricas determinadas por el proceso que va recibir ese producto, además se busca encontrar las condiciones de molienda que permitan minimizar el consumo energético por unidad de producción (Austin & Concha, 1994).

Las variables que son monitoreadas para mantener la eficiencia del molino son la velocidad de rotación óptima, la cantidad y tipo de cuerpos moledores, el volumen efectivo del molino y la moliendabilidad del material. Los tres primeros factores son fácilmente controlables en la operación industrial pero el último, depende de las características mineralógicas del mineral.

1.2.1 Cinética de fractura

La velocidad a la cual pierden tamaño las partículas, configura en sí mismo un concepto cinético de fragmentación, y esto parte de la teoría de balance de población (Austin & Concha, 1994).

Es así que, para comprender el funcionamiento interno de un molino es necesario conocer la distribución de tamaño de la "*progenie"* o fractura primaria, esto es; la distribución de tamaños de las partículas resultantes de la reducción de un fragmento. (Austin & Concha, 1994) definen la fractura primaria de la siguiente manera: "si un material se rompe y los fragmentos producidos se mezclan de nuevo con la masa de polvo en el molino, y si esta distribución de fragmentos pudiese ser medida antes que algunos de ellos sean fracturados, entonces el resultado obtenido sería la distribución de fractura primaria".

Si un material de tamaño j es fracturado, la fracción en peso del producto de tamaño i se denomina $b_{i,j}$, la matriz de estos tamaños describe la fractura de todos los tamaños de interés. En general, las distribuciones de partículas se trabajan de manera acumulada, así $B_{i,j}$ es la fracción en peso acumulativa de material fracturado del tamaño j que es menor que el tamaño superior del intervalo de tamaño i (Austin *et al*., 1994), ver ecuación (1.7):

$$B_{i,j} = b_{n,j} + b_{n-1,j} + b_{i,j} = \sum_{k=i}^{n} b_{kj} \qquad (1.7)$$

Los valores de Bij se determinan mediante pruebas con monotamaños a tiempos de molienda corto y a condiciones de operación normal.

Si se realiza la analogía entre un reactor y un molino, los reactivos son las partículas gruesas que ingresan al molino y los productos son las partículas finas que salen, es decir que la velocidad específica de ruptura de un tamaño es equivalente a una constante de velocidad de reacción química de primer orden (Austin & Concha, 1994). Del mismo modo que en un reactor, si las condiciones de operación del molino cambian (carga de cuerpos moledores, velocidad de rotación, granulometría de alimentación, entre otras), la velocidad de ruptura también cambiará.

La velocidad de desaparición de partículas de determinado tamaño es proporcional a la masa de partículas de ese tamaño presentes en el molino en determinado tiempo. Si se considera W como la cantidad de masa disponible para fragmentarse en el molino y $w_1(t)$ es la fracción de tamaño i, la velocidad de desaparición de la masa de la fracción de tamaño i en un intervalo de tiempo es (Austin *et al*., 1984), (ver ecuación (1.8)):

$$\frac{d[w_1(t)W]}{dt} \quad \alpha \quad -w_1(t)W \qquad (1.8)$$

Como la masa retenida en el molino W constante, es posible plantear la ecuación anterior como (ver ecuación 1.9):

$$\frac{\mathrm{dw_1(t)}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{S_1 w_1(t)} \qquad (1.9)$$

Donde S_1 es la de velocidad específica de fractura y puede ser determinado mediante la técnica de monotamaño para unas condiciones de molienda y un W fijo.

La velocidad de producción de un tamaño es posible representarla en términos de $\mathrm{S_j}$ y $b_{i,j}$, ya que ésta depende de la velocidad de aparición de tamaño i por la fractura de tamaños mayores y de la velocidad de desaparición de los tamaños i por fractura.

La correlación entre las condiciones de operación óptimas y la cinética de fractura permitirán conocer las variables que mayor influencia tienen en el proceso de reducción de tamaño y así, determinar las acciones de control para disminuir la variabilidad del proceso y estabilizar el consumo específico de energía.

Sin embargo, a escala de laboratorio también es posible obtener curvas de distribución de tamaños de partículas (DTP) que conservan los parámetros de distribución (ver **Figura 1-5**).

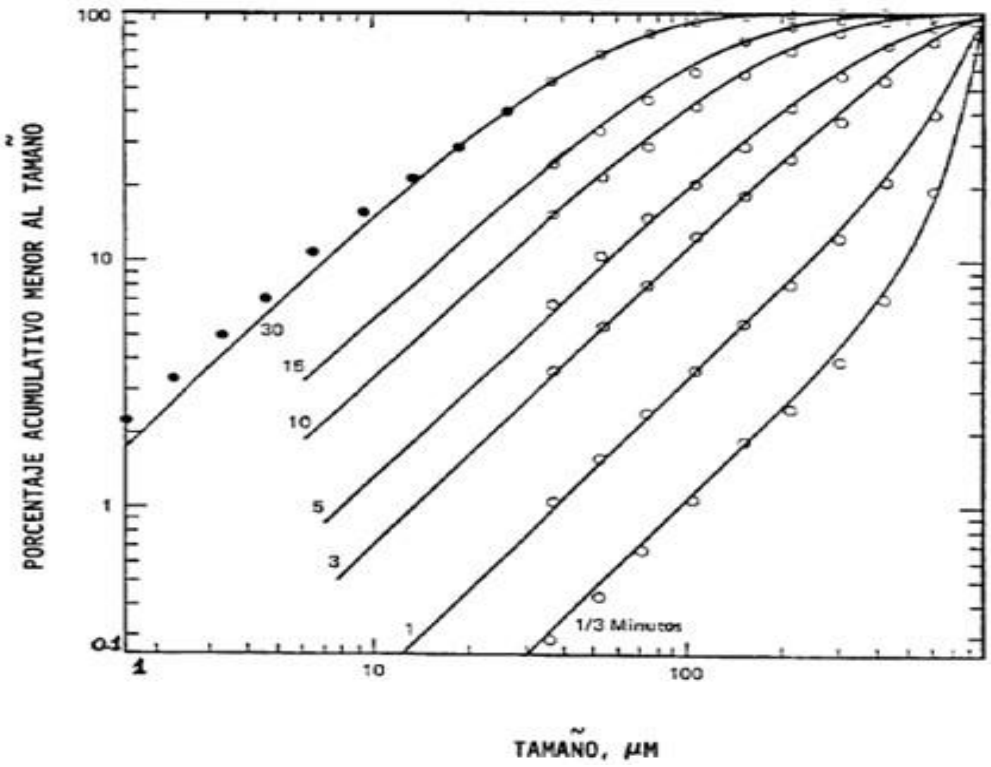
Esto implica que se caracteriza la DTP por una ecuación empírica tipo Rosin - Rammler, según ecuación (1.10).

$$F(x,t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{K_{RR}(t)}\right)^m\right] \qquad (1.10)$$

Es así donde, la cinética se puede calcular a partir de las relaciones entre los parámetros de la ecuación (1.11), y obtener la información de la reducción de tamaño del mineral.

$$\frac{K_{RR}(t)}{K_{RR}(0)} \; vs \; t \qquad (1.11)$$

Figura 1-5: Molienda de cuarzo de monotamaño de cuarzo 20 X 30 mallas US en un molino de laboratorio de 8 pulgadas de diámetro (U = 0.5; J = 0.2; ϕc = 70% c.s.; bolas de pulgada de diámetro; W = 300 g; mp = 0.013 kW): -, calculado; o, experimental por tamizado; o, experimental por Sedigraph



Fuente: Tomado de Austin & Concha, 1994.

1.2.2 Velocidad de rotación del molino

La velocidad de rotación del molino de bolas suele expresarse como una fracción de la velocidad de rotación critica φ, ver ecuación (1.12):

$$\varphi = \frac{V_{actual}}{V_c} \qquad (1.12)$$

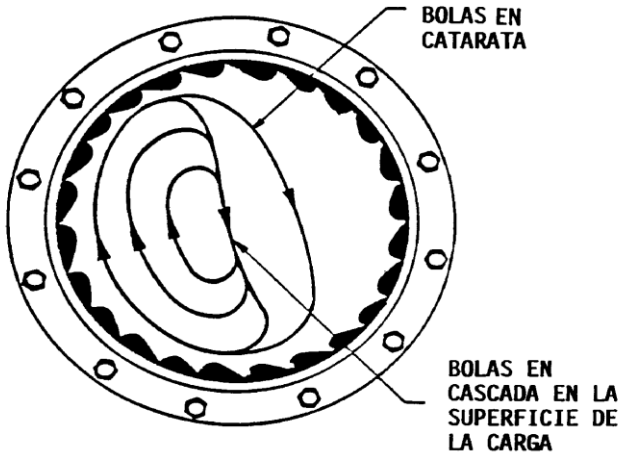
Donde V_{actual} es la velocidad de rotación del molino y V_c se calcula empleando la ecuación (1.13) (Austin & Concha, 1994).

$$V_c = \frac{42{,}2}{\sqrt{D_m - d_b}}\ rpm; D_m\,, d_b\ en\ metros \qquad (1.13)$$

Dónde, D_m : diámetro interior del molino, d_b : diámetro máximo de la bola.

Para analizar la velocidad rotacional de un molino de bolas, deben considerarse dos tipos de movimiento al interior de éste, un movimiento de cascada que es el que analizaremos en esta investigación y un movimiento de catarata (Ver **Figura 1-6**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).

Figura 1-6: Ilustración del movimiento en un molino de bolas a una velocidad normal de operación



Fuente: Tomado de Austin & Concha, 1994

En régimen de cascada en un molino de las bolas genera la fractura a través de colisiones continuas de las bolas, las cuales son levantadas por la rotación del tambor. En régimen de catarata de bolas tiene una velocidad de rotación más alta y una cantidad mayor de bolas son lanzadas de la superficie en lo alto del molino (Austin & Concha, 1994).

1.2.3 Dimensiones del molino

El diámetro del molino es uno de los factores que más influye sobre la capacidad del molino, determina la velocidad crítica de rotación del molino; mientras que la razón L/D_m

(largo de molino/diámetro interior del molino) controlan el transporte de mineral y por ende los tiempos de residencia (Austin *et al*., 1984).

El movimiento de cascada produce la acción normal de fractura de minerales dentro del molino y el número promedio de bolas que suben y voltean ***por revolución del molino*** y por unidad de volumen es constante independiente del diámetro del molino, pero el número promedio de ***impactos*** que una bola efectúa cuando cae en cascada en la carga del molino es proporcional a D_i. Sin embargo, a una determinada fracción de velocidad crítica el número de revoluciones del molino ***por unidad de tiempo*** es proporcional a $1/\sqrt{D_m}$ (Austin & Concha, 1994).

1.2.4 Carga de bolas

El consumo de bolas varía considerablemente con su aplicación y depende de factores tales como la dureza del material, el tamaño de la alimentación y del producto deseado (Austin & Concha, 1994).

Por otro lado, los diámetros de las bolas, debe ser tal que provoque fracturas en la región normal, y esto depende estrechamente de la relación entre tamaño de la partícula y el tamaño de bola (Austin & Concha, 1994), puesto que mientras más grandes sean las partículas con respecto al diámetro de bola, menores serán las velocidades de fractura específica; sin embargo, a medida que las partículas llegan al tamaño de la bola, los trozos de material empezarán a actuar como un medio de molienda haciendo que las partículas sufran astillamiento mientras esperan un impacto fuerte que las fracture. (Austin *et al*., 1984).

De otra forma, cuando el tamaño de partícula decrece considerablemente respecto al tamaño de bola, puede presentarse una acumulación de finos en el interior del molino lo que puede provocar un recubrimiento de las bolas y por ende amortiguar la acción de fractura. En resumen, este concepto puede ser cuantificado mediante la ecuación empírica (ver ecuación (1.14)):

$$x_m \propto d^{N3} \qquad (1.14)$$

Donde x_m es nuevamente el tamaño al cual ocurre el valor máximo de S (para un determinado conjunto de condiciones) y d es el diámetro de la bola. El valor de N_3 no es fácil de obtener experimentalmente debido a la interferencia producida por la ruptura de orden distinto del primero en la región de ruptura anormal.

Un método para evitar la incertidumbre en cuanto al efecto del tamaño de las bolas sobre los parámetros de ruptura y la aditividad de las mezclas de bolas, es determinar los parámetros S y B en un molino conteniendo exactamente la distribución de bolas que se usará en la práctica. Esto no se puede realizar en un molino de tamaño reducido y se recomienda que los ensayos discontinuos se hagan en un molino de por lo menos 0.6m de diámetro, si las bolas a usar son de 60mm de diámetro como máximo (Austin & Concha, 1994).

La potencia del molino no varía mucho con el tamaño de las bolas, de modo que una mala elección del tamaño de bola conduce a un bajo valor de S_i dando como resultado una ***ineficiencia directa***. Además, una carga de bolas demasiado pequeñas produce deslizamiento de la carga y por lo tanto una caída en el consumo de potencia y un excesivo consumo de acero. La selección óptima de tamaño de las bolas depende claramente de la distribución granulométrica de la alimentación y del producto deseado y del balance entre el costo de la energía y el consumo de medios moledores y recubrimientos por desgaste.

1.3 Reología

La reología de la suspensión permitirá estudiar la deformación y el flujo de los materiales sometidos a fuerzas de contacto, y analizar la relación existente entre las variables esfuerzo (σ), y la velocidad de deformación $(\dot{\gamma})$ donde:

- σ: Representa las fuerzas de contacto
- $\dot{\gamma}$: Representa la tasa de deformación igual a $\frac{d\gamma}{dt}$, siendo t el tiempo de deformación

Dependiendo de cómo sean estas relaciones las suspensiones presentan comportamientos reológicos diferentes y la caracterización reologica permite determinar cómo fluirá dentro de un molino rotatorio una suspensión mineral y los tiempos de

residencia. Por otro lado, el comportamiento reológico de un material puede relacionarse con su microestructura, para lo cual son de gran utilidad las técnicas viscoelásticas.

1.3.1 Parámetros que afectan la reología de la suspensión al interior de un molino de bolas

La suspensión en una molienda es considerada un fluido no newtoniano donde la viscosidad de la pulpa no es fija, porque es función del gradiente de velocidad. Sin embargo, esta tarea es compleja debido a que el procesamiento de la suspensión depende de las condiciones del proceso.

La reología de una suspensión mineral es compleja depende de varios parámetros tales como: contenido de sólidos, tamaño de partícula, la distribución del tamaño de partícula, forma de la partícula, valor de pH, tasa de deformación, temperatura, que tienen una influencia significativa sobre la reología de la suspensión en la molienda húmeda (He *et al.,* 2004).

- **Contenido de sólidos de la suspensión**:

Una suspensión consiste en un sistema compuesto por partículas discretas distribuidas aleatoriamente en un fluido. Generalmente se puede dividir las suspensiones en tres categorías: partículas sólidas en un fluido (suspensión o dispersión), gotas de fluido dentro de un medio liquido inmiscible (emulsión) y burbujas de gas dispersas en un líquido (espuma).

Si se observa el comportamiento reológico de un fluido al cual se le han agregado partículas, se puede verificar fácilmente que la presencia de éstas modifica substancialmente la disipación de energía mecánica a medida que se deforman permanentemente los fluidos a una tasa de cizalladura determinada. (Bustamante, 2009).

Las modificaciones del comportamiento reológico se las suspensiones llegan a ser tan abruptas que, a bajas concentraciones de sólidos en la suspensión, esta puede ser newtoniana con la viscosidad independiente de la tasa de cizalladura. A medida que aumenta la concentración, llegara a ser progresivamente más pseudoplástica con una viscosidad aumentando a medida que la tasa de cizalladura disminuye, lo que significa la

posible aparición de un campo de esfuerzos y una notable cizalla- adelgazante (shear - thinning) característica más de las velocidades de cizallamiento intermedios (He *et al,* 2004).

- **Tiempo de relajación** (t_R) **y la memoria en suspensiones minerales**

Cuando una suspensión es deformada permanentemente a una determinada tasa de cizalladura y se detiene súbitamente la deformación, retirando la carga instantáneamente, se puede medir un campo de esfuerzos de cizalladura que se va atenuando con el tiempo. Este campo de esfuerzos, es un campo de esfuerzos residuales que puede ser caracterizado por un tiempo de relajación (Bustamante, 2009).

- **Distribución de tamaño de partícula:**

El tamaño de las partículas en la alimentación es un parámetro importante en una molienda, de él depende la selección del tamaño de los cuerpos moledores y la obtención de un determinado producto, ésto a su vez se relaciona con el consumo energético.

Tamaños de alimento muy grande en comparación con la carga de cuerpos moledores, producen fenómenos de abrasión y astillamiento antes de que ocurra fractura, lo que hace que se pierda energía en un proceso ineficiente y para tamaños de alimentación muy pequeña comparada con los cuerpos moledores genera perdida de energía por la baja posibilidad de captura entre bolas, (Austin *et al*., 1984).

- **Viscosidad**

Se define como viscosidad (μ) es un parámetro que representa la disipación de energía mecánica de un fluido al ser deformado permanentemente (Bustamante, 2002) y si el resto de factores se mantienen fijos, es proporcional a la velocidad de deformación. De este modo, se establece la proporcionalidad existente entre el esfuerzo por unidad de área (F/A) necesario para producir un gradiente de velocidades en un fluido, siendo la constante de proporcionalidad un factor que describe "la capacidad de deslizamiento de un fluido", dicha constante de proporcionalidad es conocida como viscosidad

De acuerdo a las características que presentan los fluidos cizalle-adelgazantes, como es el caso de las suspensiones minerales, se observa que la viscosidad aparente es definida por la ecuación (1.15) (Bustamante, 2004):

$$\mu_a = \frac{\hat{o}}{\tilde{a}} \qquad (1.15a)$$

Es muy grande cuando la tasa de cizalladura $(\dot{\gamma})$ tienda a cero, lo que se puede expresar como:

$$\mu_a \Big|_{\dot{\gamma} \to 0} = \mu_o \to \infty \qquad (1.15b)$$

Por lo tanto, cómo μ_0 será la pendiente de la curva de flujo en las cercanías del origen. Ahora bien, cuando los valores de m_0 son extremadamente grandes, la pendiente se confunde con el eje del esfuerzo de cizalladura *t* al inicio de la curva de flujo, lo cual suele reportarse como un Esfuerzo de Cedencia t_0, aunque éste necesariamente no exista.

- **Tasa de cizalladura**

La tasa de cizalladura es la velocidad a la cual está ocurriendo la deformación en el fluido, una gran cantidad de fluidos, casi todos de interés industrial, presentan desviaciones de la ley de Newton al ser su viscosidad una función de la tasa de cizalladura aplicada.

La tasa o velocidad de cizalladura en un molino depende de su velocidad de rotación, sin embargo, en la actualidad algunos autores aseguran que no hay un método preciso para determinarlas (He *et al.,* 2004), no obstante, Shi & Napier - Munn (1999), han propuesto un modelo (ver **Anexo A**) para hacer un estimativo de dicho parámetro en la cámara de molienda y presenta las etapas básicas del cálculo. La identificación de dichas tasas de cizalladura propone todo un reto, debido a que son las que controlan fuertemente la magnitud de la viscosidad dentro del proceso, afectando la reducción de tamaño y por tanto la eficiencia de la molienda.

Finalmente, la tasa de cizalladura $\dot{\gamma}$ para el movimiento en cascada considerando una molienda batch, está dada por la ecuación (1.16):

$$\dot{\gamma} = \frac{\Delta \overline{U}}{\Delta x} \qquad (1.16)$$

Donde: $\Delta \overline{U}$ = velocidad relativa, Δx = área sujeta a la acción de cizalla.

- **Forma de la partícula (morfología de los cristales)**

El efecto de la forma de la partícula en el comportamiento reológico de suspensión para la molienda húmeda no ha sido muy estudiado, pero en algunos estudios de molienda ultrafina se encontró que la esfericidad muestra menor viscosidad que una partícula laminar. Los resultados demuestran la importancia de la forma de la partícula que afectan a la reología de la suspensión (He *et al.,* 2004).

- **Temperatura y pH**

En los procesos de molienda, ocurre un aumento de la temperatura debido a la deformación y a la fricción que se produce con cada impacto, la suma de todos los impactos, produce un aumento de temperatura global en el sistema (Lefebvre *et al*, 2012).

La temperatura afecta fuertemente la viscosidad aparente de una suspensión, normalmente en una molienda la viscosidad disminuye con un incremento en la temperatura. Por otro lado, el esfuerzo de fluencia puede presentar valores altos a bajas temperaturas esto significa que sustancialmente la pulpa tomará un comportamiento de transición entre cizallo adelgazante y cizallo espesante (He *et al*., 2004).

En cuanto al pH se ha establecido que el esfuerzo de fluencia depende fuertemente de su valor para algunas suspensiones minerales ultrafinas, donde las propiedades superficiales son fundamentales. El máximo valor de esfuerzo de fluencia ocurre en la región de valor de pH cercano al punto isoeléctrico (He *et al*, 2004).

2. Metodología Experimental

Con base en la revisión de la literatura y al mineral elegido, se desarrolló la siguiente metodología:

- Diseño del molino piloto.
- Preparación del mineral de trabajo.
- Caracterización físico - química del mineral de trabajo por distribución de tamaño de partícula y análisis químico.
- Diseño experimental.
- Pruebas de molienda.
- Caracterización de los productos del proceso de molienda a diferentes tiempos; potencia, granulometría y reología.
- Propuesta de la correlación experimental que relaciona el consumo energético reológico al interior del molino de bolas.

2.1 Diseño del molino piloto

Con el objetivo de medir el consumo energético y estudiar la suspensión mineral, se diseña un molino de bolas a escala de laboratorio con las siguientes dimensiones:

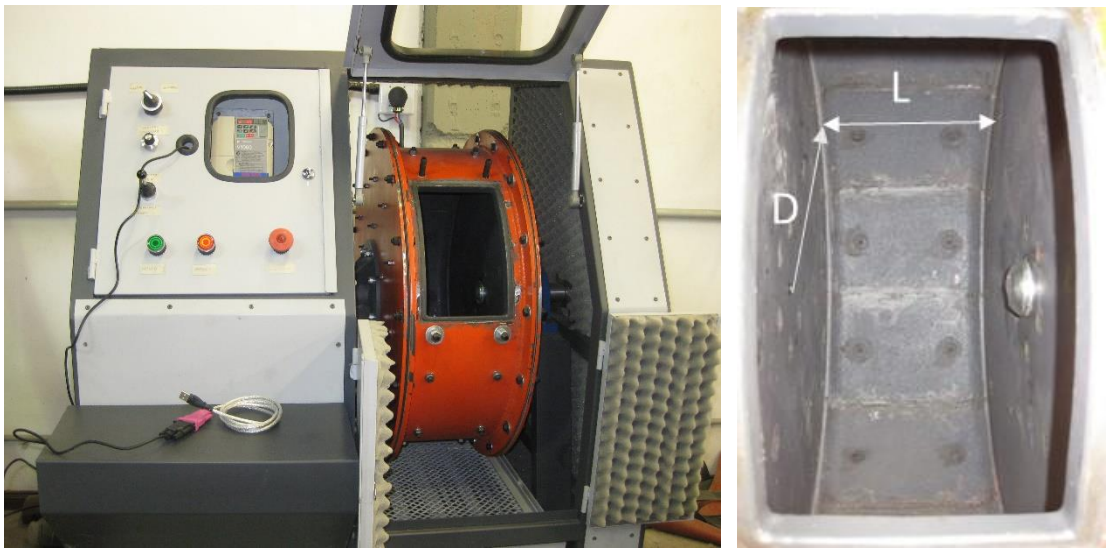
- Diámetro interno: 0.6 m
- Razón L/D: 0.37 m

El diseño del molino de bolas se basó en la teoría presentada por los autores Austin *et al*., (1994), donde exponen y recomiendan que para ensayos discontinuos se hagan en un molino de por lo menos 0,6 m de diámetro que permiten extrapolar e inferir resultados a molinos industriales.

Teniendo en cuenta la anterior teoría se diseña el molino de bolas; el cual, fue posteriormente fabricado en una carcasa de acero torneada y balanceada con cubierta

interna en placas de fundición blanca alto cromo (resistente al desgaste), con moto-reductor, variador de velocidad con software Drive Wizard® y aislamiento acústico. Las dimensiones del molino son 0.6 m de diámetro y 0.22 m de largo (medidas internas), que se observa en la **Figura 2-1**.

Figura 2-1: Diseño del molino de bolas



Fuente: Elaboración propia

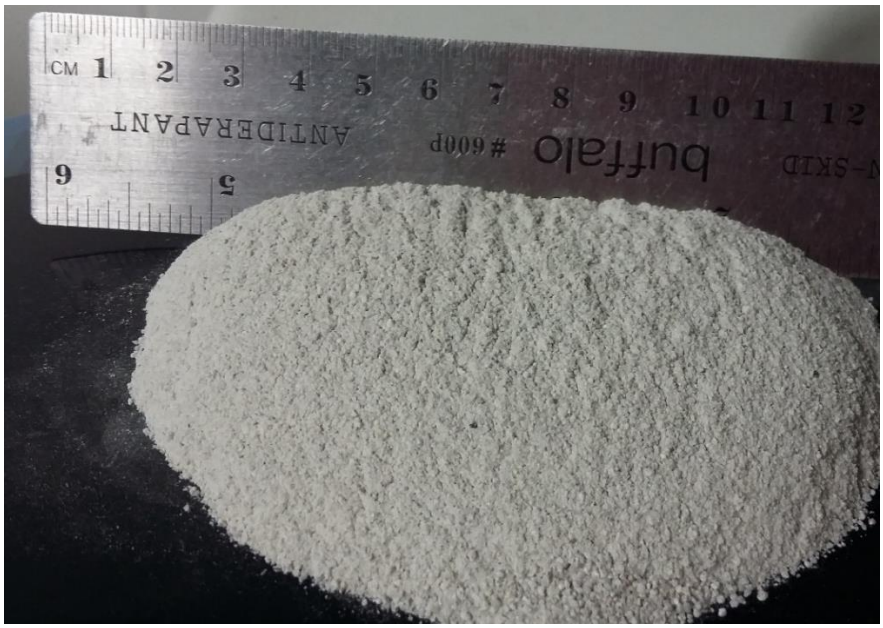
2.2 Preparación del mineral de trabajo

Se trabajó con un mineral de sílice (> 90 % de SiO2), proveniente del suroeste del departamento de Antioquia, Titiribí, de propiedad de la Mina La Margarita.

Se tomó aproximadamente 0.7 toneladas de la arena silícea y se clasificaron en una malla de la serie ASTM - E-11 # 20 (850 µm), la muestra de interés es todo el material que pasa la malla (0.5 toneladas), tamaño máximo que debe tener el mineral y que es condicionado por la reología.

En la **Figura 2-2** se muestra el material de sílice resultante del proceso de clasificación con una densidad real de 2530 kg/m^3 (Densidad medida por picnómetro) y usada para la molienda experimental en esta investigación.

Figura 2-2: Muestra del mineral de sílice después de clasificación



Fuente: Elaboración propia

2.3 Caracterización del mineral de trabajo

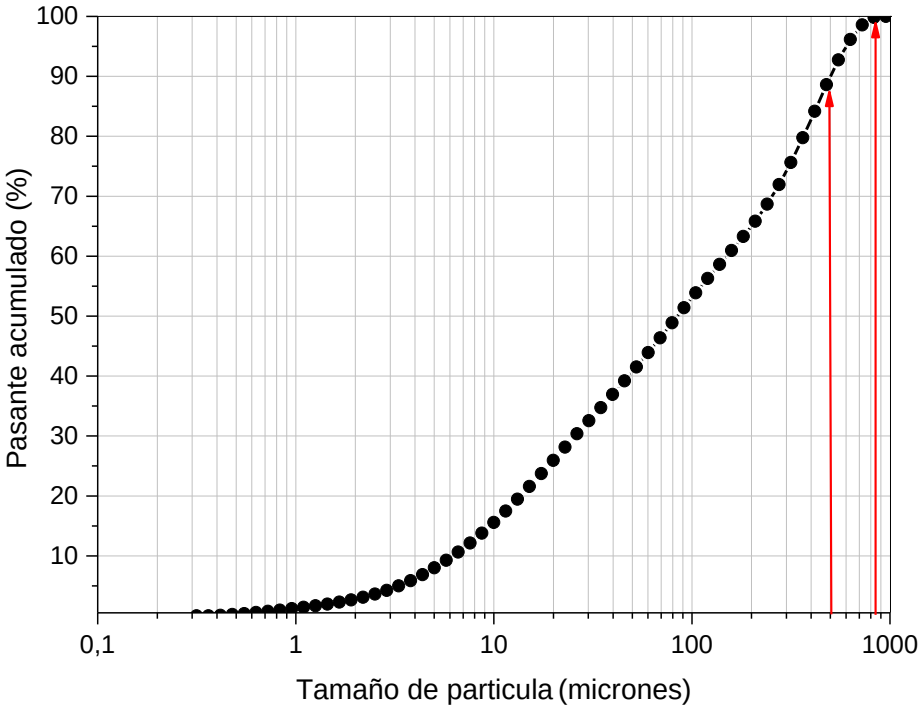
El mineral de trabajo fue analizado granulométricamente en el Mastersizer 2000 Hydro 2000MU® para corroborar que el tamaño fuera inferior a 850 µm y se realizó análisis químico para verificar que su contenido de sílice fuera mayor a 90% de pureza del mineral principal y la lectura de otros elementos presentes por adsorción atómica con el equipo AA Spectrometer iCE 300 Series Thermo Scientific® en el Instituto de Minerales CIMEX de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín.

El análisis químico del material y el tamaño de distribución de partícula se presentan en la **Tabla 2-1** y **Figura 2-3**.

Tabla 2-1: Análisis químico de la composición del material

SiO_2 (%)	Al_2O_3 (%)	Fe_2O_3 (%)	CaO (%)	MgO (%)
91.33	5.29	0.21	0.07	0.02

Figura 2-3: Curva de distribución del tamaño de partícula del material



Fuente: Elaboración propia

De la curva granulométrica (ver **Figura 2-3**) se concluye que el 99,8% del material es de tamaño inferior a 850 µm que es el tamaño máximo para realizar pruebas reológicas y el 90% del material es de tamaño inferior a 500 µm.

2.4 Diseño experimental

El diseño factorial es un procedimiento matemático y estadístico útil que permite realizar comparaciones entre tratamientos que se vean afectados de manera sustancial por las condiciones en las que ocurren. Este diseño produce experimentos más eficientes, pues cada observación proporciona información sobre todos los factores, y es factible ver las respuestas de un factor en diferentes niveles de otro factor en el mismo experimento (Montgomery, 2013).

Es así, como una representación con un modelo de regresión del experimento factorial de dos factores podría escribirse por la ecuación (2.1).

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1,2, \dots, b \\ k = 1,2, \dots, n \end{cases} \quad (2.1)$$

Donde μ es el efecto promedio global, τ_i es el efecto del nivel i-ésimo del factor A, β_j es el efecto del nivel j-ésimo del factor B, $(\tau\beta)_{ij}$es el efecto de la interacción entre τ_i y β_j,y ε_{ijk} es un componente del error aleatorio. Se supone que ambos factores son fijos, y los efectos de los tratamientos se definen como desviaciones de la media global. De manera similar, los efectos de las interacciones son fijos. Puesto que hay n réplicas del experimento, hay abn observaciones en total (Montgomery, 2013).

Los factores son los tipos de tratamiento tales como la fracción volumétrica de la suspensión y el tiempo de molienda, y las distintas categorías de un factor son sus niveles, es decir, para la fracción volumétrica, son 40, 45, 50, 55 y 60% y para el tiempo de molienda son los minutos transcurridos.

Para determinar el efecto de la fracción volumétrica de la suspensión y el tiempo de molienda en el consumo energético reológico de la suspensión, se plantea un diseño factorial general completo (Montgomery, 2013). Las variables de respuesta serán potencia consumida por el molino, tamaño de partícula del mineral y viscosidad de la suspensión mineral.

Con base en pruebas preliminares se determinó que los tiempos a evaluar son 1, 3, 5, 10 y 15 minutos y fracción volumétricas de 40, 45, 50, 55 y 60%. Los factores y niveles estudiados en el proceso de molienda y la matriz de diseño experimental se resumen en la **Tabla 2-2** y **Tabla 2-3**.

Tabla 2-2: Factores y niveles de diseño

Factores	**Niveles**				
Fracción volumétrica (%)	40	45	50	55	60
Tiempo de molienda (min)	1	3	5	10	15

Fuente: Elaboración propia

Tabla 2-3: Matriz de diseño experimental

# Prueba	Variables Naturales					
	Fracción volumétrica (%)	Tiempo (min)				
1	50	1	3	5	10	15
2	45	1	3	5	10	15
3	40	1	3	5	10	15
4	60	1	3	5	10	15
5	55	1	3	5	10	15
6	40	1	3	5	10	15
7	55	1	3	5	10	15

Fuente: Elaboración propia

Una prueba consiste en obtener datos en los 5 tiempos de molienda lo que constituye un experimento correspondiente a una cinética, por tanto, cada experimento constaba de moliendas en 5 tiempos diferentes que finalmente se desglosan en 5 muestras que son analizadas en 3 variables de respuesta obteniendo como resultado 15 lecturas en total por prueba, para un total de 7 pruebas con 105 lecturas, las lecturas se realizaron por duplicado.

2.5 Pruebas de molienda en húmedo

Para el desarrollo del proceso de molienda del mineral de trabajo el procedimiento experimental a seguir se dividió en las siguientes etapas:

1. Condiciones de operación del molino
2. Preparación de la suspensión
3. Toma de muestras

2.5.1 Condiciones de operación del molino

El molino requiere de variaciones típicas de la potencia neta que se requiere para girar un molino como función de la velocidad de rotación (Austin *et al*., 1994). El rango se encuentra entre 65 a 85% de la velocidad crítica para movimiento de cascada. La velocidad teórica crítica del molino que se empleó en las pruebas experimentales fue del 75%, un rango usual en la industria, con una carga completa de bolas (J = 0.3). La óptima fracción de llenado experimental encontrada por Mulenga & Moys (2014), se encuentra entre 1 a 1.2 por no tener efecto en la velocidad de rotación del molino, para las pruebas experimentales

se emplea U = 1.1, siendo U el factor definido por Austin *et al*., 1994, como factor de llenado de mineral en los intersticios del lecho poroso de bolas.

En esta etapa se fijan las condiciones de operación del molino, como velocidad crítica, factor de llenado, diámetro de bola, número de bolas, entre otros. Los parámetros que se mantuvieron constantes son descritos en la **Tabla 2-4**.

Tabla 2-4: Parámetros constantes en las moliendas en húmedo

Molino	
Diámetro interno (m)	0.6
Largo interno (m)	0.22
Volumen interno (m^3)	0.062
Velocidad critica (rpm)	56.4
Fracción de velocidad critica (φ_c)	0.75
Fracción de huecos (U)	1.1
Porosidad del lecho	0.4
Medios moledores	
Carga activa	bolas de aleación de acero al manganeso
Fracción de llenado de bolas (J)	0.3
Diámetro (m)	0.0381
Numero de bolas (und)	323
Densidad (kg m^{-3})	7.8 x 10^3
Peso total de bola (kg)	81.8
Mineral	
Material	Sílice
Densidad (kg m^{-3})	2.53 x 10^3
Tamaño de partícula	pasante malla 20 (850 µm)

Fuente: Elaboración propia

El cálculo de la tasa de cizalladura teórica fue realizado utilizando el modelo propuesto por Shi & Nappier - Munn, (1999) (ver **Anexo A**), como la ecuación (2.2):

$$\dot{\gamma} = \frac{\Delta \bar{U}}{\Delta x} \qquad (2.2)$$

Donde, la distancia promedio entre las capas adyacentes en la carga activa, Δx, esta dada por la ecuación (2.3 a):

$$\Delta x = \frac{V_s}{A} \qquad (2.3\ a)$$

Donde V_s es el volumen de la suspensión (m^3), mientras $\Delta\overline{U}$ = velocidad relativa promedio entre capas en m/s, expresada por la ecuación (2.3 b).

$$\Delta\overline{U} = 2\pi\left(\frac{r_m+r_i}{2}\right)\left(\frac{\Delta\overline{N}}{60}\right) \qquad (2.3\ b)$$

Considerando únicamente el régimen tipo cascada (debido a la fracción de velocidad critica usada) y descartando el cálculo de velocidad relativa entre capas adyacentes para la zona de rebalse, puesto que no se trabaja en continuo, para esto es necesario cuantificar algunos parámetros al interior del molino de bolas, estos parámetros se muestran en la **Tabla 2-5**. Con dicho modelo, se determinó el número de bolas en la carga activa, 323 bolas de 0.0381m de diámetro y el valor de la tasa de cizalla de $24.3s^{-1}$ para una velocidad de rotación del molino de 42.3rpm y un diámetro de 0.6m.

2.5.1 Preparación de la suspensión

El mineral de trabajo es un material fino de distribución de tamaño inferior a 850 µm, debidamente homogenizado con el fin de garantizar una distribución de tamaño similar en la alimentación al molino.

La suspensión (sílice – agua), se preparó para predeterminadas concentraciones de sólidos, cada muestra se pesó y marco; los pesos oscilan entre 6.3 y 9.5 kg de mineral seco que representa la masa de mineral necesario para preparación de una suspensión de relleno U = 1.1 y la masa de agua añadida al mineral seco oscila entre 3.7 y 2.5 kg para suspensiones con fracciones volumétricas de 40 a 60%. La suspensión se agitó cuando se añade el agua al mineral seco, y la agitación continuó por 5 min después de añadir el mineral seco para hacer uniforme la suspensión.

Alrededor de 200 ml de suspensión era tomado a diferentes tiempos de molienda para cada muestra (< 2% del volumen total de la suspensión inicial), que se utilizó para analizar la distribución de tamaño de partícula y medir el comportamiento reológico de la suspensión, 35 muestra fueron tomadas; es decir 25 muestra se utilizaron para realizar las mediciones iniciales y 10 muestras se utilizaron como réplica de los ensayos.

Tabla 2-5: Parámetros del modelo de Shi y Nappier - Munn (1999) para la estimación de la tasa de cizalladura al interior de un molino de bolas

Parámetros	unidad	abreviatura	valor
Calculo de la velocidad relativa			
Pérdida promedio de la velocidad de rotación por cada capa	rpm	$\Delta\bar{N}$	3.85
Tasa de rotación del molino	rpm	N_m	42.3
Fracción de llenado de bolas	-	J	0.3
Fracción de huecos	-	U	1.1
Función de llenado del molino	-	z	0.85
Diámetro de la bola	m	d_b	0.0381
Espesor promedio de capa	m	$\bar{x}$	0.021
Diámetro interior del molino	m	D_i	0.6
Radio lineal interior del molino	m	r_m	0.3
Largo del molino	m	L	0.22
Volumen del molino	m^3	V_m	0.062
Fracción de velocidad teórica critica	-	φ_c	0.75
Distancia radial de la carga de la superficie interior desde el eje de rotación	m	r_i	0.21
La fracción de la carga activa de la carga total, que se relaciona con el tiempo tomado por una bola para moverse entre el dedo del pie y el hombro de la carga	-	ξ	0.83
Tiempo tomado por una bola para moverse entre el dedo del pie y el hombro de la carga	s	t_c	1.38
Valor medio de la tasa de rotación	rpm	$\bar{N}$	21.16
Tiempo tomado por una bola para moverse entre el hombro y el dedo del pie	-	t_f	0.27
Constante de gravitación universal	m/s^2	g	9.8
Posición radial de la carga activa	m	$\bar{r}$	0.24
Constante de calculo que depende de J	-	$\emptyset$	1.072
Angulo del dedo del pie	rad	θ_T	4.05
Angulo de hombro	rad	θ_S	0.83
Promedio de la velocidad relativa entre cascaras	m/s	$\Delta\bar{U}$	0.10
Calculo de la distancia entre carcasas adyacentes			
Intersticios de bolas	-	ε	0.4
Volumen neto de suspensión en la carga activa (sin volumen de drenado porque es en batch)	m^3	V_s	0.00623
# de bolas en la carga activa	und	B	323
Área de contacto de la bola en la carga activa	m^2	A	1.47
Distancia promedio entre capas adyacentes	m	Δx	0.004
Calculo de la tasa de cizalla para el movimiento de cascada			
Tasa de cizalladura	s^{-1}	$\dot{\gamma}$	24.3

2.5.1 Toma de muestra

Las suspensiones fueron retiradas del molino en su totalidad y homogenizadas para cada tiempo de molienda con el fin de extraer una muestra de 200 ml (2% del volumen de la suspensión inicial) y llenar nuevamente el molino con la suspensión hasta completar la prueba.

2.6 Caracterización de los productos del proceso de molienda

Para cada prueba de molienda se tomaron diferentes muestras del proceso a diferentes tiempos, registrado su potencia y analizando la distribución de tamaño de partícula y viscosidad.

La potencia se registró directamente del variador del molino de trabajo, la granulometría se realiza en el Mastersizer 2000® Hydro 2000MU y la viscosidad por reología en un Reómetro Kinexus® (ver **Anexo B**).

3. Resultados y Análisis

3.1 Molino

3.1.1 Potencia entregada para mover medios moledores

En las pruebas experimentales fue registrada la potencia entregada a lo largo del tiempo de molienda para las diferentes fracciones volumétricas de suspensión (40, 45, 50, 55, 60%).

Debido a la complejidad de este análisis teórico la medición se basó en lo encontrado experimentalmente, donde igualmente se corrobora la teoría de Austin *et al*., (1994) y lo encontrado experimentalmente por Tangsathitkulchai (2003); es decir, en la **Figura 3-1** se muestra que en las fracciones volumétricas 40, 45 y 50% la potencia es constante (aproximadamente 0.59 kw equivalente a 94 kw/m^3 en términos de potencia especifica entregada) y la masa de bolas forma una superficie libre que recibe el nombre de cascada produciendo fractura normal en la cámara de molienda, en las fracciones 55 y 60% la potencia tiende a disminuir (aproximadamente a 0.2 kw equivalente a 39 kw/m^3 en términos de potencia especifica entregada) y algunas bolas son proyectadas en el espacio interior del molino en una trayectoria parabólica que recibe el nombre de catarata y/o las bolas se centrifugan a las paredes del molino, en este caso desaparece la fractura normal en la cámara de molienda.

En el movimiento de cascada hay una molienda eficiente y una disminución del tamaño de partícula, al contrario de lo que ocurre con el movimiento de aglomeración y adhesión al revestimiento interno del molino donde la fractura prácticamente desaparece.

Se observa experimentalmente que para altas fracciones volumétricas y a cortos tiempos de molienda se produce un fenómeno de formación de costras de la mezcla suspensión –

bolas, adheridas a la pared del molino, lo que induce una disminución de la potencia entregada al mantener constante la fracción de velocidad del molino y detiene la fractura de las partículas, ver **Figura 3-2**. Este fenómeno establece una condición límite de operación en el proceso de molienda en el cual la fractura es nula; resultando de la disminución de impactos de la bola a la partícula, reduciendo así la transmisión de la eficiencia de energía de la bola a la fractura de partícula.

Figura 3-1: Variación de la potencia del molino con la variación del tamaño de partícula de la suspensión en el tiempo: molino de laboratorio de 0,6 m de diámetro.

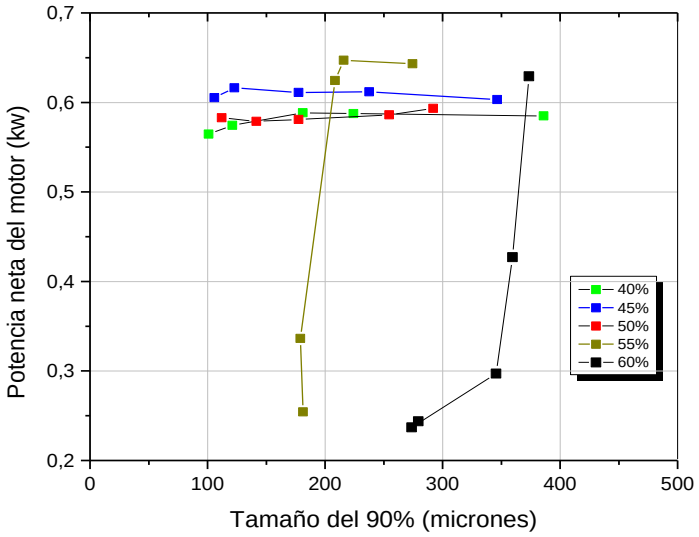


Figura 3-2: Costras de la mezcla suspensión – bolas para altas fracciones volumétricas (55 – 60%)

3.1.1 Potencia disipada por la suspensión a la tasa de cizalladura dentro del molino

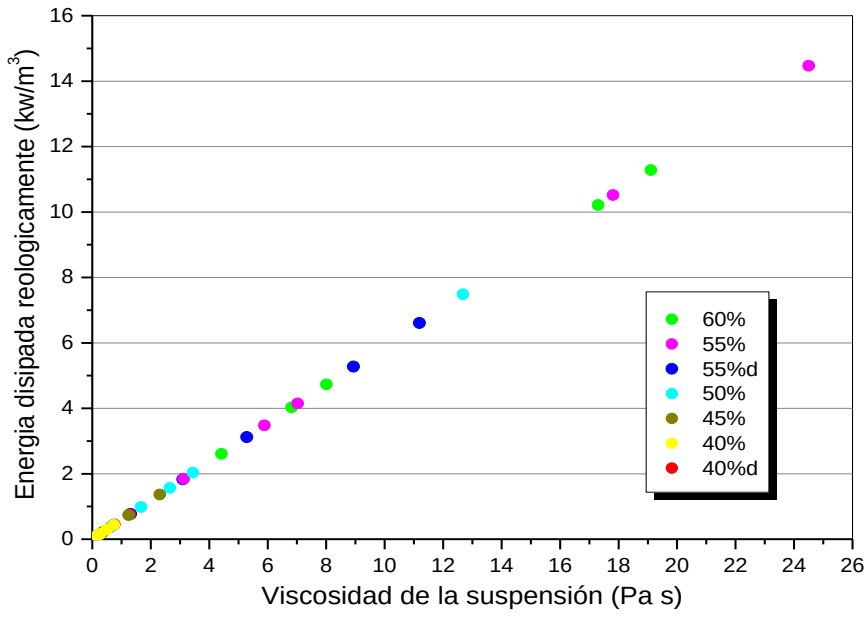
La energía disipada reológicamente por la suspensión a la tasa de cizalladura fija que se impone en la cámara de molienda debida a la velocidad de rotación del tambor dependerá de la viscosidad de la suspensión. Dado que las suspensiones minerales se pueden considerar dispersiones newtonianas generalizadas, se cuantifica con la ecuación (3.1).

En la **Figura 3-3** se muestra que es directamente proporcional a la viscosidad, aumentando a medida que esta aumenta.

$$\phi = \mu\,\dot{\gamma}^2 \qquad (3.1)$$

Dónde: μ : Viscosidad de la suspensión, Pa s, $\dot{\gamma}$: Tasa de cizalladura calculada por el modelo de Shi y Napier-Munn (1999), s^{-1}.

Figura 3-3: Variación de la energía disipada reológicamente con la variación de la viscosidad en el tiempo: molino de laboratorio de 0.6 m de diámetro a diferentes fracciones volumétricas.



Encontrando experimentalmente que la energía disipada reológicamente representa máximo el 15% de la potencia entregada para mover el molino para un tiempo de 15 minutos. Igualmente, esta aumenta directamente proporcional al aumentar la viscosidad de la suspensión y el tiempo de molienda.

3.2 Suspensión

3.2.1 Distribución de Tamaños de partícula con el tiempo de molienda y velocidad de fractura

Se analiza la disminución del tamaño de partícula (DTP) usando la aproximación empírica de Rosin – Rammler, ver ecuación (3.2)

$$F(x,t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{K_{RR}(t)}\right)^{m}\right] \qquad (3.2)$$

Donde, m es el parámetro de distribución para el material de sílice y K_{RR} es el parámetro de tamaño de partícula. Los valores m y K_{RR} para diferentes valores de producto de molienda a diferentes valores de fracción volumétrica de sólidos en las suspensiones introducidas al molino, cuando el tiempo de molienda se mantuvo constante (ver **Tabla 3-1** y **Figura 3-4)**, y en el **Anexo C** se puede observar las curvas de distribución de tamaño de partícula generadas por la molienda, para cada fracción volumétrica de la suspensión que se alimentó al proceso. El parámetro de distribución permanece constante, mientras que a medida que aumenta el tiempo de molienda disminuye el parámetro de tamaño K_{RR}.

Si calculamos la variación del parámetro K_{RR}, ver ecuación (3.3), es posible identificar una expresión de la cinética de fractura, la cual da razón de la pérdida de tamaño representado por el parámetro en los productos de la molienda respecto al alimentado al molino y el cual, en este caso, va a ser exclusivamente dependiente del tiempo t, así que $K_{RR}(t)$ es una función cinética. Es así donde, la cinética se puede calcular a partir de las relaciones entre los parámetros de la ecuación (3.3), y obtener la información de la reducción de tamaño del mineral.

$$\frac{K_{RR}(t)}{K_{RR}(0)} \; vs \; t \qquad (3.3)$$

Tabla 3-1: Parámetros de distribución de tamaño de partícula analizadas bajo el modelo de Rosin – Rammler de las fracciones volumétricas (φ_v) de: a. 40–45–50% y b. 55-60%

φ_v (%)	Tiempo (min)	m	$k_{RR}(t)$ (micras)	$k_{RR}(t)/K_{RR}(0)$	R^2
40	0	0.8	144.9	1.0	0.98
40	1	0.8	118.6	0.8	0.99
40	3	0.9	73.9	0.5	0,99
40	5	0.9	60.6	0.4	0,99
40	10	0.9	43.7	0.3	0.99
40	15	0.9	38.1	0.3	0.99
45	**0**	**0.8**	**143.2**	**1.0**	**0.98**
45	**1**	**0.8**	**102.7**	**0.8**	**0.99**
45	**3**	**0.8**	**74.6**	**0.6**	**0.99**
45	**5**	**0.9**	**59.1**	**0.4**	**0,99**
45	**10**	**0.9**	**43.5**	**0.3**	**0,99**
45	**15**	**0.8**	**37.4**	**0.3**	**0.99**
50	0	0.8	144.2	1.0	0.98
50	1	0.8	78.1	0.6	0.98
50	3	0.8	78.6	0.6	0,99
50	5	0.9	57.3	0.4	0,99
50	10	0.9	47.1	0.3	0.99
50	15	0.8	37.6	0.3	0.99

a.

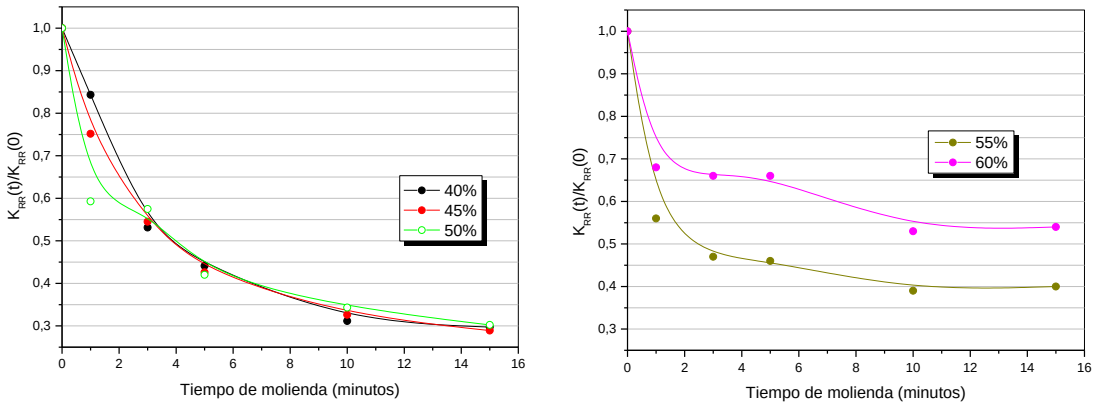
φ_v (%)	Tiempo (min)	m	$k_{RR}(t)$ (micras)	$k_{RR}(t)/K_{RR}(0)$	R^2
55	0	0.8	144.2	1.0	0.98
55	1	0.8	76.0	0.6	0.99
55	3	0.9	63.9	0.5	0,99
55	5	0,9	62.5	0.5	0,99
55	10	0.9	53.7	0.4	0.99
55	15	0.9	54.1	0.4	0.99
60	**0**	**0.8**	**144.2**	**1.0**	**0.98**
60	**1**	**0.8**	**92.9**	**0.7**	**0.98**
60	**3**	**0.8**	**89.6**	**0,7**	**0.98**
60	**5**	**0.8**	**89.7**	**0.7**	**0.98**
60	**10**	**0.9**	**71.8**	**0.5**	**0.98**
60	**15**	**0.8**	**73.4**	**0.5**	**0.98**

b.

El análisis se divide en dos grupos de fracciones volumétricas, uno para las suspensiones de fracciones volumétricas 40 – 45 – 50 % (ver **Tabla 3-1** (a)) y el otro grupo para las suspensiones de fracciones 55 – 60%, (ver **Tabla 3-1** (b)).

En el primer grupo (fracciones volumétricas 40 – 45 y 50 %) se evidencia el fenómeno de fractura normal donde hay una disminución del tamaño de partícula con el tiempo, el cual es limitante en la molienda porque después de tiempos largos no hay disminución del tamaño de partícula, en la **Figura 3-4 (a)** se puede ver como no hay cambio del k_{RR} se vuelve constante después de 10 minutos de molienda.

Figura 3-4: Curva de variación de la constante de k_{RR} con el tiempo para fracciones volumétricas de: a. 40 – 45 – 50 % y b. 55 - 60 %



a. b.

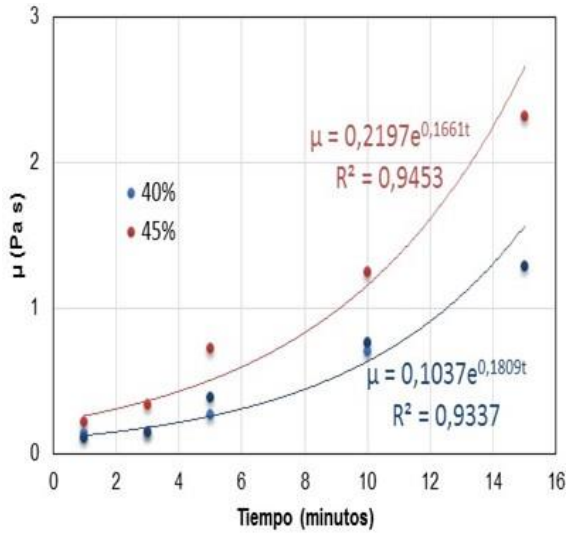
En el segundo grupo (fracciones volumétricas 55 -60 %) se evidencia que rápidamente el proceso de fractura normal se detiene, ocasionado por la centrifugación de la suspensión – bolas, encontrando una pequeña disminución del tamaño de partícula con el tiempo y en la **Figura 3-4 (b)** se puede ver como el cambio del k_{RR} es muy inferior al del grupo anterior y se vuelve poco significativo a partir del primer minuto de molienda.

3.2.2 Resultados reológicos

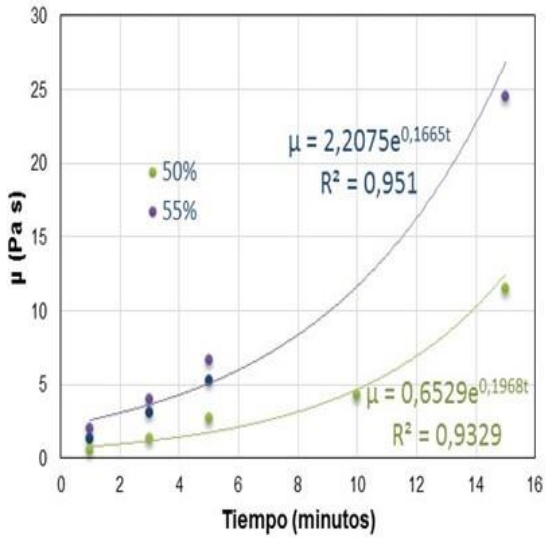
Las viscosidades experimentales encontradas se modelaron en función del tiempo de molienda con una curva exponencial con un alto coeficiente de regresión ($R^2 > 0.9$). El análisis se divide en tres grupos de fracciones volumétricas, un grupo son las suspensiones

de fracciones volumétricas 40 – 45 %, otro grupo las suspensiones de fracciones 50 – 55 % y otra es la fracción volumétrica de 60%, ver **Figura 3-5.**

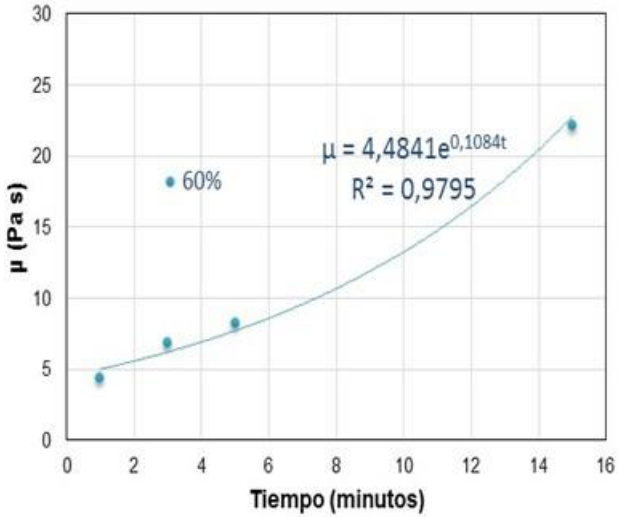
Figura 3-5: Curva de variación de la viscosidad con el tiempo para fracciones volumétricas de: a. 40 – 45 %, b. 50 - 55 % y c. 60 %



a.



b.



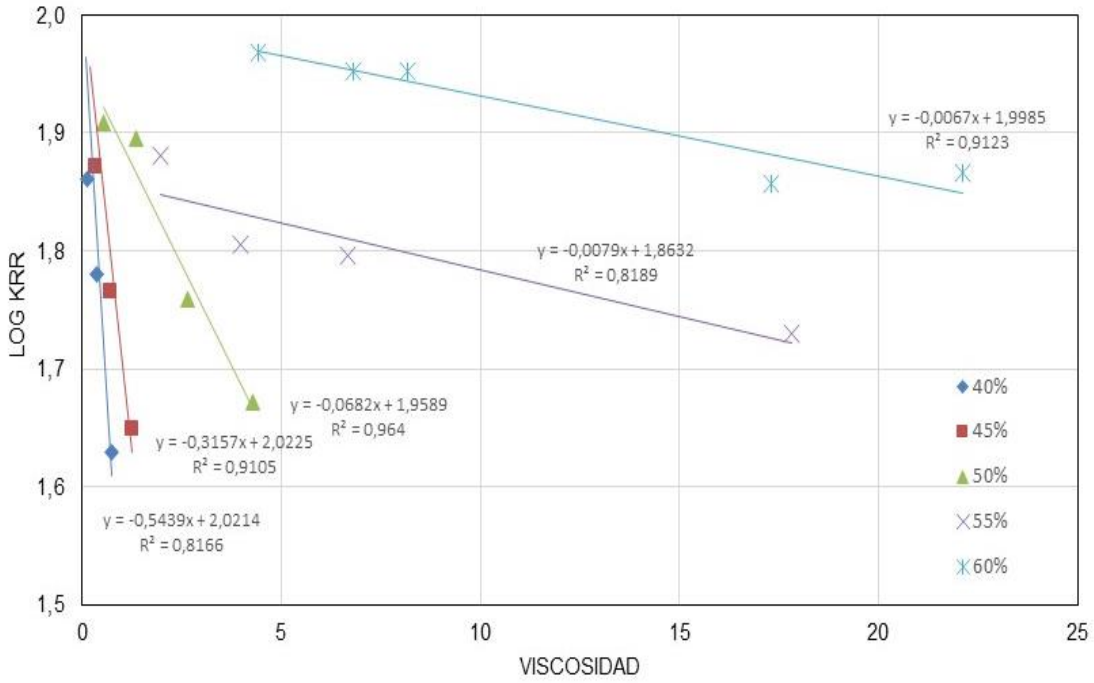
c.

Como se encontró experimentalmente en las pruebas, la viscosidad de la suspensión mineral aumenta exponencialmente con el tiempo de molienda, siendo un parámetro dinámico y significativo en el consumo energético y en la optimización del proceso.

3.2.3 Variación de la cinética de fractura con la viscosidad

Al analizar la disminución del parámetro del tamaño de partícula en el tiempo de molienda (denominado k_{RR}) con la viscosidad de la suspensión en un tiempo determinado de molienda se evidencia experimentalmente que hay una región de fractura normal en la molienda con fracciones volumétricas de 40 – 45 y 50% donde al disminuir k_{RR} aumenta la viscosidad a medida que aumenta el tiempo de molienda y en las fracciones volumétricas 55 y 60%, k_{RR} es aproximadamente constante y la viscosidad aumenta significativamente a medida que aumenta el tiempo de molienda porque la fractura de la partícula es poco o nula, ver **Figura 3-6**.

Figura 3-6: Curva de variación de la constante de k_{RR} con la viscosidad para fracciones volumétricas de 40 – 45 – 50 - 55 - 60%



3.3 Formulación de la correlación experimental de la energía disipada por la suspensión

Se encuentra experimentalmente una relación lineal en un plano log – log en función de la energía disipada reológicamente (ϕ) y el parámetro de tamaño de partícula (k_{RR}) con un coeficiente de regresión (> 0.88), permitiendo calcular indirectamente la viscosidad de la

suspensión a una tasa de cizalladura y fracción volumétrica determinada, ver **Figura 3-7**. La ecuación sugerida es de la forma (ver ecuación (3.4)):

$$log\ (\phi) = -(\frac{1}{n})\ \log(\frac{k_{RR}(t)}{k_{RR}(0)}) + (\frac{1}{n})\ \log(\lambda) \qquad (3.4)$$

De donde se expresa, $\phi = \left(\frac{\lambda * k_{RR}(0)}{k_{RR}(t)}\right)^{(\frac{1}{n})}$

Donde:

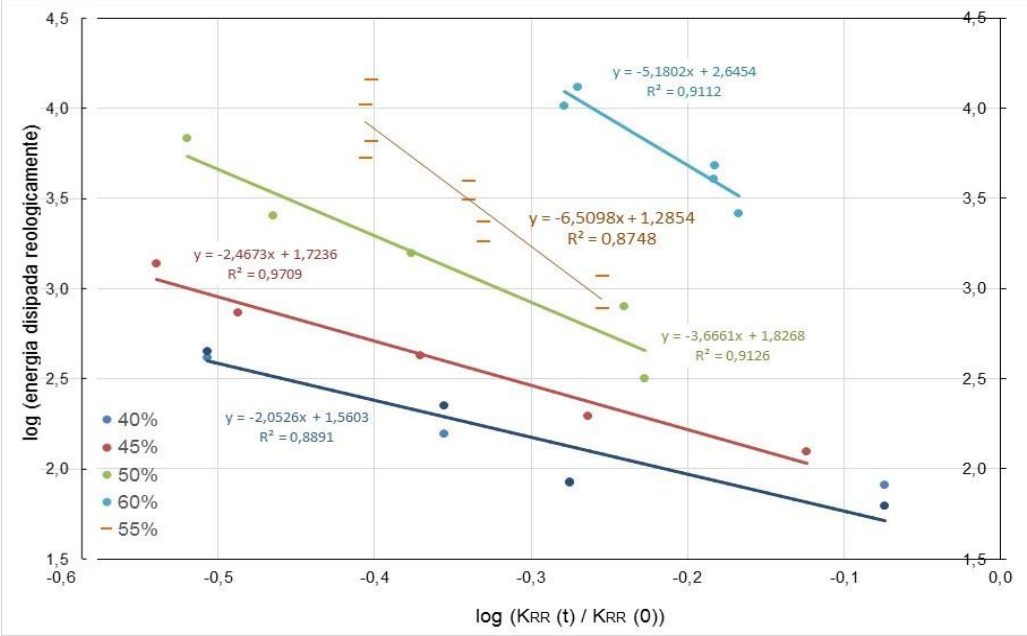
k_{RR} : Parámetro de tamaño de partícula de Rosin – Rammler, micrones.

ϕ : energía disipada reológicamente, watt/m^3.

n : Pendiente de la ecuación lineal, adimensional

λ : Constante, adimensional

Figura 3-7: Correlación empírica del consumo energético reológico de la suspensión



La correlación empírica encontrada experimentalmente se plantea para las fracciones volumétricas de suspensiones donde las partículas dentro de la cámara de molienda muestren fractura normal, con el fin de obtener una molienda eficiente y optimizar al máximo los parámetros que influyen en el proceso (potencia consumida, cinética de

fractura de la partícula y viscosidad de la suspensión). Por lo tanto, en la **Figura 3-7,** se puede observar todas las fracciones volumétricas probadas experimentalmente, pero aclarando que para las fracciones volumétricas de la suspensión de 55 y 60% estas solo tienes fractura normal dentro de los primeros minutos, ver nuevamente **Figura 3-4.**

El parámetro de la pendiente de la ecuación $(1/n)$, se modelo en función de la fracción volumétrica con un coeficiente de regresión (> 0.99) para fracciones volumétricas donde hay fractura normal de la partícula en la cámara de molienda, ver **Figura 3-8** y ecuación (3.5). En la **Figura 3-9** se observa que coincide la región de fractura normal y el parámetro $1/n$ en relación lineal con fracción volumétrica, mientras que en la región donde desaparece la fractura por apelmazamiento por alta viscosidad la fractura es mínima o nula, así mismo se observa que la fracción volumétrica de 55% es un punto de inflexión donde ocurre fractura normal de la partícula y apelmazamiento de la suspensión.

$$\frac{1}{n} = -2{,}3\varphi_v + 1{,}4 \qquad (3.5)$$

Donde: φ_v : Fracción volumétrica de la suspensión.

Figura 3-8: Correlación empírica de la pendiente del consumo energético reológico de la suspensión dependiendo de la fracción volumétrica para fractura normal de la partícula

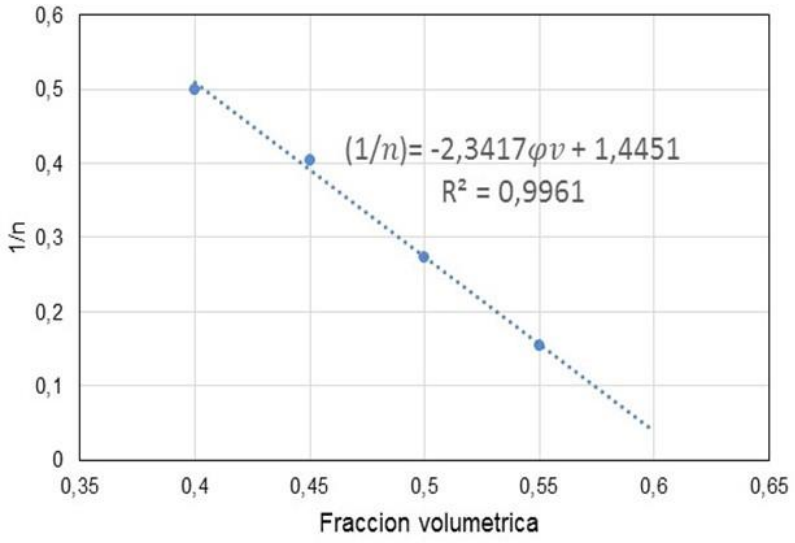
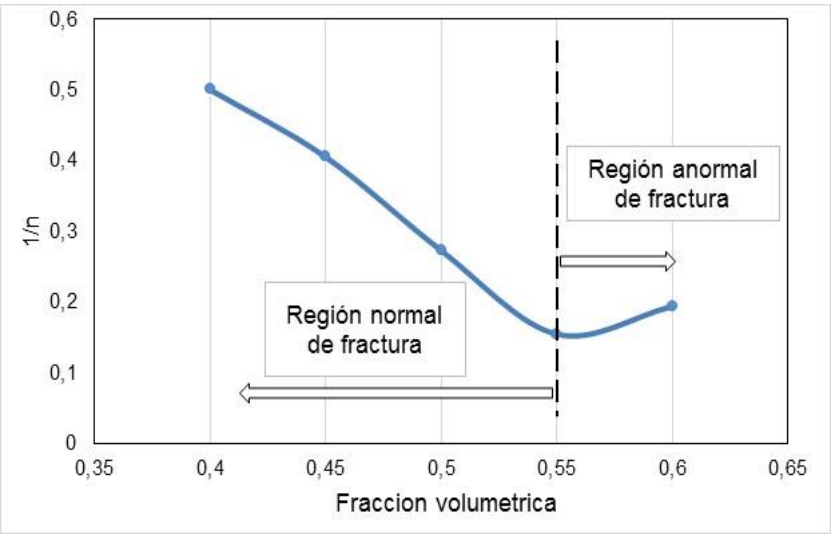


Figura 3-9: Correlación empírica de la fracción volumétrica de la suspensión y la pendiente de correlación del consumo energético reológico de la suspensión



3.4 Análisis estadístico del proceso de molienda

En total se realizaron siete pruebas experimentales aleatoriamente, ver **Tabla 2-3**, pero debido a la complejidad del proceso de molienda se realizaron dos pruebas con réplica, las que son analizadas estadísticamente con el software Minitab®16, bajo el análisis de diseño factorial general completo para dos factores, uno con dos niveles y el otro con cinco niveles (Montgomery, 2013).

En la **Tabla 3-2** se muestran los resultados de las pruebas experimentales desarrolladas según el diseño de experimentos.

En la **Tabla 3-3** se presenta el análisis de varianza (ANOVA) para el experimento. Considerando un α=0,05; es así, como se puede ver que los efectos de los factores (fracción volumétrica y tiempo), son significativos, es decir, tienen un valor P<0,05. Además, se obtuvo un coeficiente de determinación ajustado($R^2_{ajustado}$) igual a 93,14%, de lo cual se concluye que los factores considerados explican de manera satisfactoria el proceso de molienda, ya que el 93% de la variabilidad es considerada por el modelo propuesto.

Tabla 3-2: Resultados del diseño experimental

# Prueba	Variables Naturales		Variables Respuesta		
	$\boldsymbol{\varphi_v}$ (%)	**t (min)**	**Potencia (kw)**	**DTP d90 (micras)**	**Viscosidad (Pa s)**
1	40	1	0,59	386,09	0,14
		3	0,59	224,11	0,14
		5	0,59	181,04	0,27
		10	0,57	121,08	0,70
		15	0,56	100,97	1,20
2	55	1	0,60	274,55	1,98
		3	0,60	215,95	3,98
		5	0,58	208,54	6,67
		10	0,32	178,99	17,81
		15	0,25	181,35	24,5
3	40	1	0,56	386,09	0,11
		3	0,57	224,11	0,14
		5	0,57	181,04	0,38
		10	0,57	121,08	0,76
		15	0,57	100,97	1,28
4	55	1	0,60	274,55	1,31
		3	0,60	215,95	3,10
		5	0,60	208,54	5,28
		10	0,44	178,99	8,94
		15	0,30	181,35	11,19

Fuente: Elaboración propia

Tabla 3-3: Análisis de varianza (ANOVA)

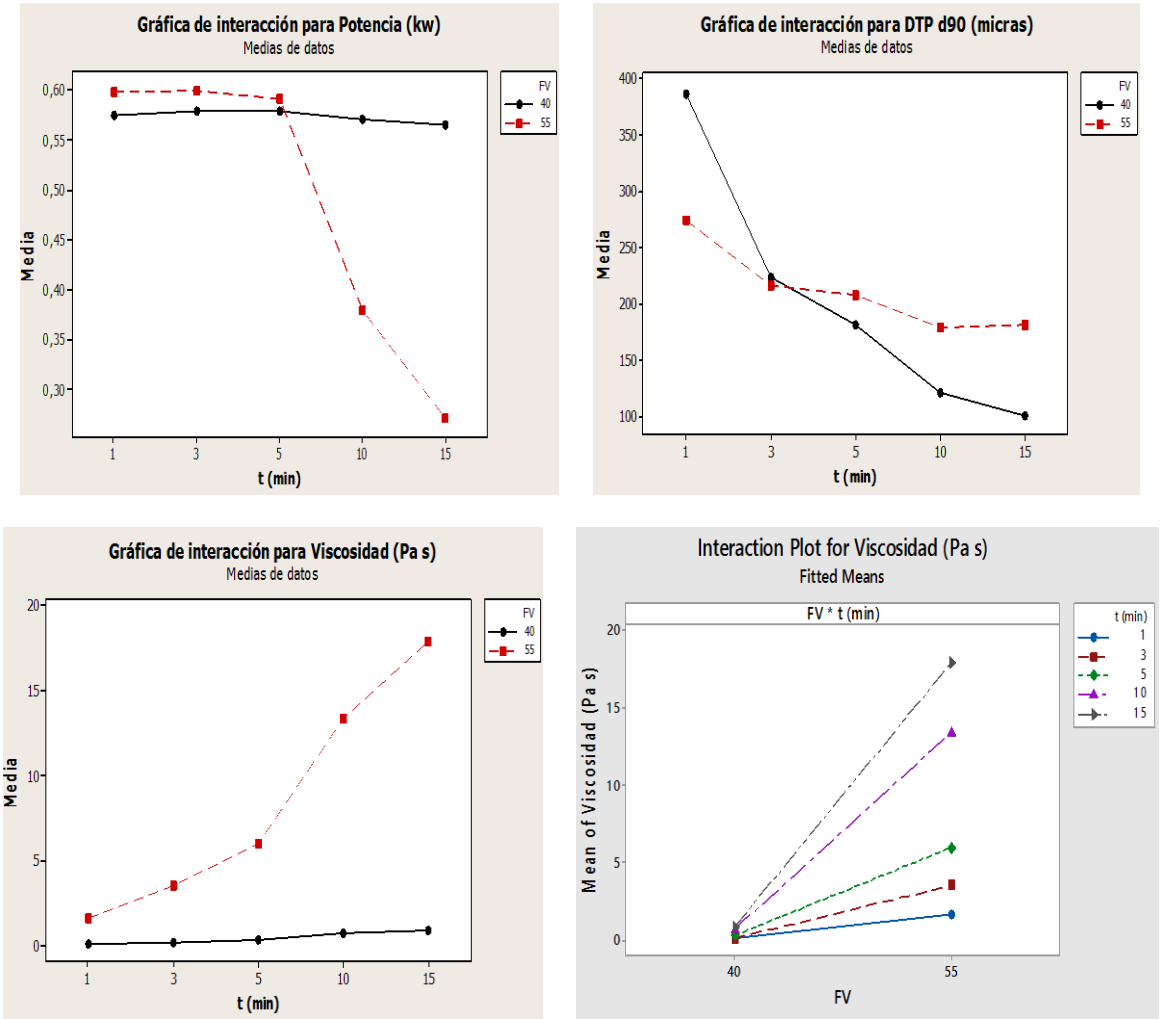
	SC	**GL**	**MC**	**F**	**P**
Modelo	0,224088	9	0,024899	29,65	0,0
Efectos principales	0,137279	5	0,027456	32,69	0,0
$\boldsymbol{\varphi_v}$ (%)	0,036654	1	0,036654	43,64	0,0
$\boldsymbol{t}$ $(\boldsymbol{min})$	0,100625	4	0,025156	29,95	0,0
Interacciones	0,086809	4	0,021702	25,84	0,0
$\boldsymbol{\varphi_v * t}$	0,086809	4	0,021702	25,84	0,0
Error	0,008398	10	0,000840		
Total	0,232486	19			

S=0,029, R^2=93,14% y $R^2_{ajustado} = 93{,}14\%$

Fuente: Elaboración propia con ayuda del software MInitab® 16.

Igualmente, en la gráfica de interacciones con cada variable de respuesta corroboramos el análisis anteriormente realizado en el numeral 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3, ver **Figura 3-10**.

Figura 3-10: Grafica de interacción con las variables de respuesta



Fuente: Elaboración propia con ayuda del software MInitab® 16.

3.4.1 Verificación de supuestos

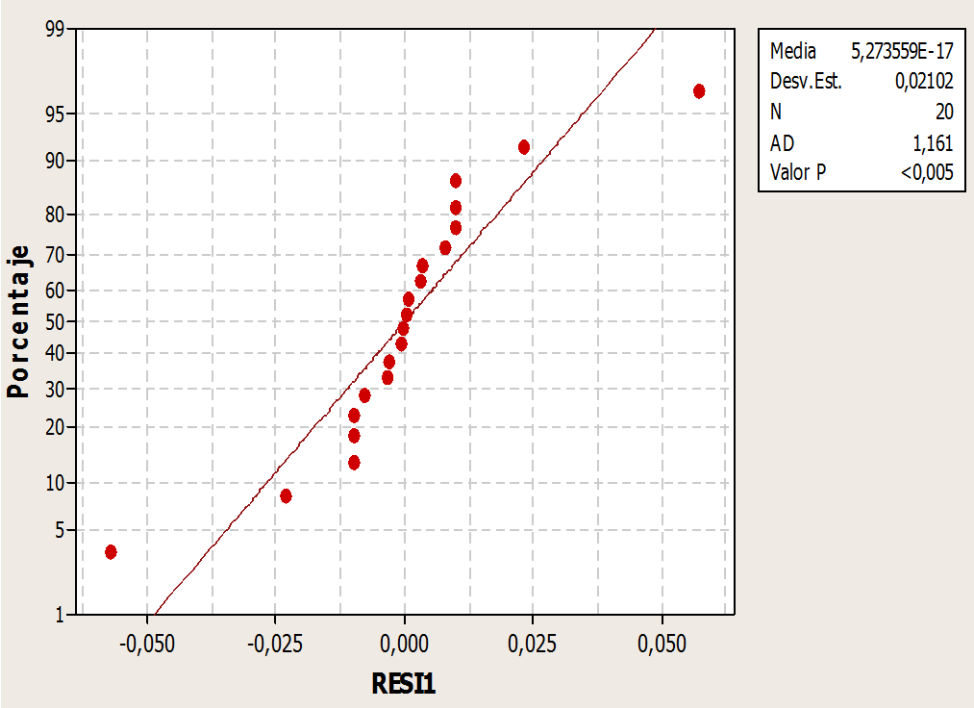
Para que las observaciones dadas a partir del análisis de varianza sean estadísticamente válidas, se debe probar que los errores siguen una distribución normal e independiente, con media cero y varianza constante, lo cual se puede hacer mediante el examen de los residuales (Montgomery, 2013).

- Normalidad

De la gráfica de probabilidad normal, ver **Figura 3-11**, se puede observar que los residuos no cumplen los supuestos de normalidad dado que el valor P<0,05, pero como lo encontrado experimentalmente representa de manera adecuada el fenómeno estudiado podemos considerar este modelo como adecuado.

Según lo reportado por Montgomery, 2013, esto puede ocurrir al trabajar con muestras pequeñas, ocurren fluctuaciones significativas, por lo que la aparición de una desviación moderada de la normalidad no implica necesariamente una violación seria de los supuestos. Además, esto también se genera por un punto atípico, que puede introducir serias distorsiones en el análisis de la varianza, que en nuestro caso esta respuesta atípica es un valor particularmente deseable (baja potencia y alta viscosidad), siento esto informativo, porque, es cuando el proceso de molienda pasa de tener una región de fractura normal a una región de fractura anormal.

Figura 3-11: Grafica de probabilidad de residuos (Normal)

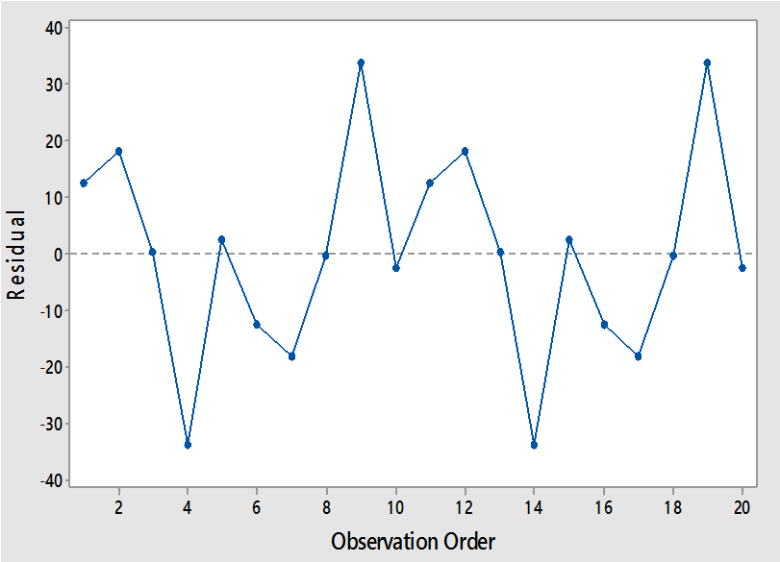


Fuente: Elaboración propia con ayuda del software MInitab® 16.

- Independencia

En la **Figura 3-12**, se presenta el grafico de residuos contra el orden de observación. Como se puede observar no hay un patrón definido en los datos, se interpreta que los errores observados son independientes, cumpliéndose así el supuesto de independencia.

Figura 3-12: Grafica de residuos versus el orden de observación para las variables de respuestas

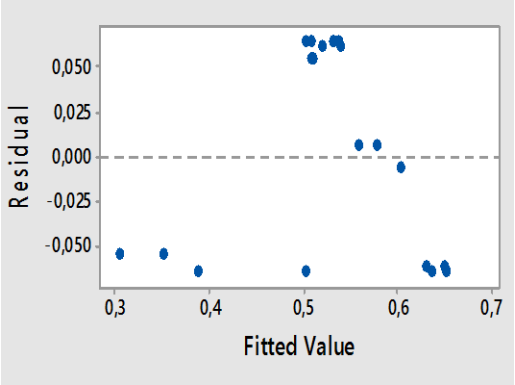


Fuente: Elaboración propia con ayuda del software MInitab® 16.

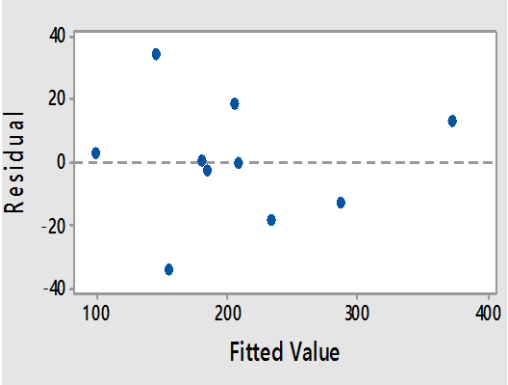
- Varianza constante o homocedasticidad

De las gráficas de residuos versus factores estudiados y valor ajustado de la variable respuesta, ver **Figura 3-13**, se determina que la varianza es constante, pues no se observa que los datos sigan algún patrón definido en las gráficas.

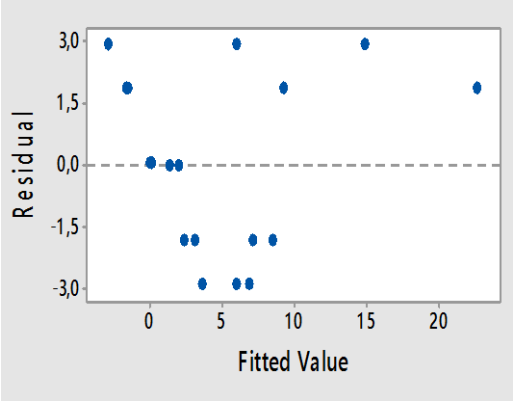
Figura 3-13: Grafica de residuos versus las variables de respuestas; a. Potencia, b. DTP y c. Viscosidad



a.



b.



c.

Fuente: Elaboración propia con ayuda del software MInitab® 16.

Es así que, al realizar la comprobación de los supuestos del modelo se evidencia el cumplimiento de dos de los supuestos (independencia y homocedasticidad), aunque el supuesto de normalidad no se cumple, dada las respuestas del modelo y que los factores considerados explican de manera satisfactoria el proceso de molienda, en un 93%, se acepta el modelo planteado (Montgomery, 2013)

4. Conclusiones, discusión y recomendaciones

4.1 Conclusiones

- Al evaluar el impacto que tenía cada uno de los parámetros de molienda (fracción de velocidad crítica del molino, tasa de cizalladura, DTP de alimento y producto, fracción volumétrica de la suspensión mineral) sobre la eficiencia energética del proceso, se evidenció que la viscosidad de la suspensión influye significativamente en la fragmentación de las partículas.

- Se observó, en primera instancia, durante la realización de las pruebas, cómo la potencia consumida del motor del molino tenía cambios significativos dependientes de las fracciones volumétricas de las suspensiones minerales a medida que el tiempo de molienda avanzaba, encontrando que esto es una consecuencia de la influencia que tiene la viscosidad de la suspensión en el proceso de molienda. En este sentido, el parámetro de viscosidad se ajusta perfectamente a una función exponencial (ver **Figura 3-5**); lo cual hace que aumente rápidamente a medida que avanza en el tiempo el proceso de molienda y como consecuencia reduce la eficiencia de la fragmentación de la partícula.

- Se determinó una correlación para calcular con adecuado ajuste ($R^2 > 0.88$) la energía disipada reológicamente por la suspensión a una tasa de cizalladura impuesta dentro de la cámara de molienda, para un parámetro de tamaño de partícula (k_{RR}) para cada tipo de suspensión según la fracción volumétrica. Es así, como se puede modelar la cinética de fractura normal relacionada a la disipación de potencia mecánica por la reología de la suspensión de la forma de la ecuación (3.4).

- La aplicación del modelo propuesto permite calcular la energía disipada reológicamente por la suspensión y evaluar si el proceso está siendo óptimo en fractura de

la partícula. Indirectamente se valida la teoría, que, a tiempos largos de molienda, el proceso puede alcanzar un equilibrio, generando la desaparición de la fractura de los minerales. Para tiempos de molienda mayores a 10 minutos, la molienda del mineral de sílice no muestra resultados significativos en el aumento de la fragmentación normal de la partícula, pero si aumenta su viscosidad. El modelo proporciona una herramienta que puede ser usada en la optimización de la molienda, desde el punto de vista del consumo potencia disipado reológicamente y su relación a la cinética de fractura

- La utilidad práctica de la correlación desarrollada (ver ecuación 3.4), puede resumirse en dos aspectos:

a) Puede usarse para planear y controlar la operación de los molinos con relación al contenido de sólidos y consumo de energía.
b) Además se puede usar en combinación con un simulador de la molienda para optimizar la eficiencia energética y la productividad.

4.2 Discusión

El efecto de la reología de las suspensiones en la molienda húmeda es un tema complejo, dado que la deformación y flujo de las suspensiones y los fenómenos de fractura de los minerales no están ligados explícitamente. Sin embargo, es claro que ambos fenómenos; el de fractura de los minerales y la reología de las suspensiones minerales expresan intercambios disipativos energéticos dentro de la cámara de molienda y dentro de este escenario deben estar relacionados.

En este sentido, una de las características del ambiente de molienda es la colisión repetitiva de las bolas en su descenso en cascada, lo cual, obliga que la disipación de la energía potencial de las bolas en sus impactos sea atenuada por fenómenos viscosos de las suspensiones. Esto quiere decir, que a medida que se incremente la viscosidad las partículas en la suspensión disminuyen su difusión, lo que permite el atrapamiento de partículas sólidas dentro del lecho de bolas y lograr un efecto de la molienda.

Se tiene evidencia (Tangsathikulchai, 2003), que al disminuir la viscosidad de las suspensiones se genera un incremento en la velocidad de desgaste de los medios

moledores dentro de la cámara de molienda; lo que significa que es necesario mantener un adecuado nivel de viscosidad de la suspensión, con el fin de lograr alcanzar un nivel de disipación de potencia viscosa para configurar adecuadamente un escenario de fractura. Por otra parte, incrementar la viscosidad exageradamente hace que ocurra un apelmazamiento en la cámara de molienda, evidenciándose en la disminución de la potencia entregada al molino y la desaparición de la fractura.

El modelo propuesto (ver ecuación (3.4)) es válido dentro del intervalo de trabajo de la experimentación realizada, y se deberán efectuar otras investigaciones para consolidar una teoría general acerca del tema. Esto permitirá tener una consolidación de datos experimentales que mejoren el rango de exactitud y genere repetitividad de los resultados, sin ignorar el rango de incertidumbre implícito por la complejidad de la toma de muestra y tiempo que implica la realización de las pruebas.

Por último, consideramos que el modelo es escalable a condiciones de planta, dado que la potencia disipada reológicamente (ϕ) en el modelo es función de la viscosidad y la tasa de cizalladura; la primera depende directamente del proceso de molienda (fracción de volumen de la suspensión mineral y tiempos de molienda), y la segunda depende directamente de las dimensiones del molino (diámetro y largo) y de las condiciones operacionales del molino (velocidad de rotación, potencia del motor y factor de llenado de bolas).

4.3 Recomendaciones

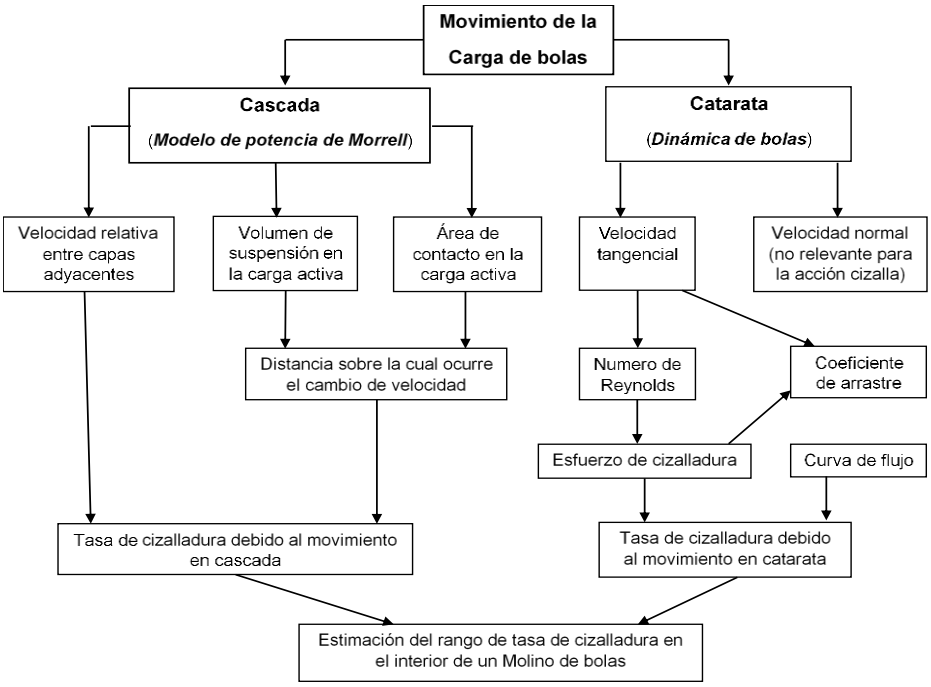
Realizar una aplicación de las pruebas experimentales a escala piloto para verificar si la dinámica que se observa, continúa siendo válida en suspensiones No Newtonianas con comportamiento pseudo-plastico.

Realizar un análisis de diseño factorial sin replicas, asumiendo como estimación del error los efectos de las interacciones de orden tres o superiores; es decir, para estimar un diseño factorial general replicado.

A. Anexo: Estimación de la tasa de cizalladura al interior de un molino de bolas Movimiento cascada, molienda batch: Modelo Shi y Napier – Munn (1999)

Se consideran dos tipos de movimiento de las bolas para determinar la tasa de cizalla: cascada y catarata. En cascada se refiere a la condición que los medios moledores tienden a rodar hacia abajo hasta la punta de la carga, mientras en catarata los medios moledores se proyectan a la carcasa para describir una serie de parábolas antes de aterrizar en o alrededor de la punta de la carga.

Figura A-1: Enfoque general para la estimación de la tasa de cizalladura al interior de un molino de bolas



Como se ilustra en la **Figura A-1**, para el movimiento de cascada se partió del modelo propuesto por Morrell (Morrell, 1993, 1996). En este modelo la carga del molino se analiza como “capas” con una medida de ancho característico del tamaño de distribución de la carga. La velocidad relativa entre las capas adyacentes se calcula partir de las dimensiones del molino y condiciones de operación. Esta velocidad relativa resulta en una acción de cizallamiento entre las capas. Para determinar la tasa de cizalla es necesario determinar la distancia sobre el cambio que produce la velocidad. La distancia se puede determinar del volumen de suspensión que llena los intersticios de la “carga activa” (definida a continuación) y el contacto del área entre la suspensión y la superficie de las bolas en la carga activa.

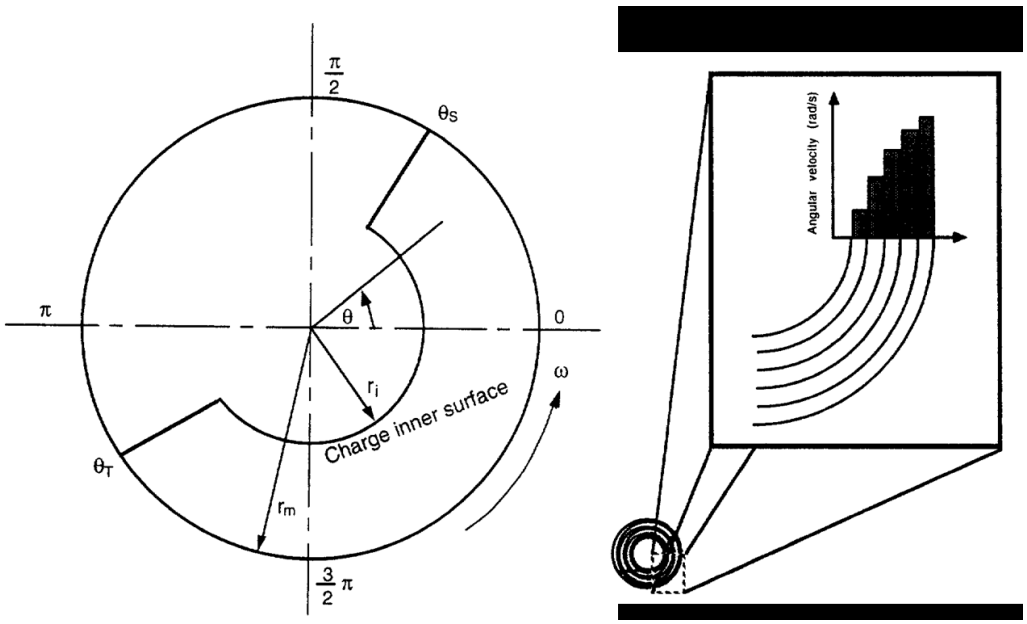
- Movimiento de la carga activa de bolas

En la modelación del consumo de energía de los medios moledores en húmedo Morrell (1993,1996) argumento que las partes de la carga en vuelo libre y en el “riñón” pueden ser ignoradas porque tienen poco efecto. El resto de la carga de la molienda tiene una masa en forma de media luna que se llama “carga activa”, ver **Figura A-2.**

Los límites de la carga activa se definen por radios con desplazamientos angulares de ϴS y ϴT y su intersección con el cilindro del molino y un círculo que describe el límite entre el riñón y la carga activa. Este último tiene un radio ri y se refiere como la superficie interior de la carga. Los ángulos ϴS y ϴT describen la localización del punto de la carga conocida, respectivamente, como el “hombro” y “dedo”.

El movimiento de la carga activa se considera para ser impartida a través de la carcasa del molino y sea posteriormente transferido al cuerpo de la carga a través de contactos sucesivos entre partículas contiguas. Como consecuencia de la fricción entre las partículas de este mecanismo da como resultado una pérdida de la tasa de rotación (velocidad angular, rad/s) del cilindro del molino al centro o del riñón de la carga. Esto se ilustra esquemáticamente en la **Figura A-2**. Obviamente existe acción de cizallamiento entre las capaz adyacentes de las capas en el movimiento de la carga activa. Por lo tanto, la velocidad de cizallamiento puede estimarse a partir de las velocidades relativas entre capas de la carga y de la distancia sobre la que se produce este cambio en la velocidad.

Figura A-2: Movimiento de la carga al interior del molino de bolas



- Calculo de la velocidad relativa

Ahora se discuten las ecuaciones fundamentales en el modelo de Morrell. La pérdida media o promedio de la velocidad de rotación por la carcasa ($\Delta\overline{N}$) está dado por la ecuación (1):

$$\Delta\overline{N} = \frac{N_m z\bar{x}}{r_m - z r_i} \qquad (1)$$

$\Delta\overline{N}$ = perdida promedio de la tasa de rotación por cada capa (rev/min), N_m = tasa de rotación del molino (rev/min), calculada como, ver ecuación (2):

$$N_m = \emptyset \frac{42{,}3}{\sqrt{Dm}} \qquad (2)$$

D_m, r_m = diámetro y radio lineal interior del molino (m), $\emptyset$ = fracción teórica de la velocidad critica a la cual gira el molino, $\bar{x}$ = espesor promedio de las capas (m), el cual se asume como función de la distribución de la partícula de la carga, en el caso de un molino de bolas, es calculado por el máximo tamaño de bola, ver ecuación (3):

$$\bar{x} = 0{,}556 d_b \qquad (3)$$

d_b= diámetro del tamaño máximo de bola (m), z = función del llenado del molino, la cual es calculada como, ver ecuación (4):

$$z = (1 - J_t)^{0,4532} \qquad (4)$$

J_t = fracción de llenado del molino por volumen, r_i = distancia radial desde la superficie de la carga hasta el eje de rotación (m), está dado por, ver ecuación (5):

$$r_i = r_m \left(1 - \frac{2\pi\xi J_t}{2\pi + \Theta_S - \Theta_T}\right)^{0,5} \qquad (5)$$

ξ = fracción de carga activa de la carga total, que se relaciona con el tiempo tomado por una bola para moverse entre el dedo del pie y el hombro en la carga, tc, y entre el hombro y el dedo del pie en vuelo libre, tf, por lo tanto, ver ecuación (6, 7 y 8):

$$\xi = \frac{t_c}{t_f + t_c} \qquad (6)$$

$$t_c \cong \frac{2\pi + \theta_S - \theta_T}{\frac{2\pi\bar{N}}{60}} \qquad (7)$$

$$t_f \cong \left[\frac{2\bar{r}\,(sin\ \theta_S - sin\ \theta_T)}{g}\right]^{0,5} \qquad (8)$$

$\bar{N}$= valor medio de la tasa rotación de las capas (rev/min), que se aproxima a Nm/2. $\bar{r}$ = posición media radial de la carga activa (m), dada por la ecuación (9):

$$\bar{r} = \frac{r_m}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{2\pi J_t}{2\pi + \Theta_S - \Theta_T}\right)^{0,5}\right] \qquad (9)$$

θ_T = ángulo de la base (rad), se calcula según la referencia de la Figura 3-9.

$$\theta_T = 2,5307(1,2796 - J_t)\{1 - exp[-19,42(\phi_c - \phi)]\} + \frac{\pi}{2} \qquad (10)$$

Donde:

$$\phi_c = \begin{cases} \phi, & \phi > 0,35(3,364 - J_t) \\ 0,35(3,364 - J_t), & \phi \leq 0,35\ (3,364 - J_t) \end{cases}$$

θ_S = ángulo del hombro (rad), se calcula según la referencia de la Figura 3-9

$$\theta_S = \frac{\pi}{2} - [(0{,}3386 + 0{,}10041\phi) + (1{,}54 - 2{,}5673\phi)J_t]\left(\theta_T - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (11)$$

ϕ_c = fracción de la velocidad critica a la que la mayoría de la carga es centrifugada. La pérdida promedio de la tasa de rotación por vuelta $\Delta\overline{N}$calculada a partir de la ecuación (1) puede estar convertida en una velocidad relativa:

$$\Delta\overline{U} = 2\pi\left(\frac{r_m + r_i}{2}\right)\left(\frac{\Delta\overline{N}}{60}\right) \qquad (12)$$

Donde $\Delta\overline{U}$ = velocidad relativa promedio entre capas en m/s.

- Calculo de la distancia promedio entre capas adyacentes

Una vez que la velocidad relativa se determina a partir del modelo de energía de Morrell, el principal reto ahora es encontrar la distancia a la que se produce este cambio en la velocidad. Un planteamiento se adoptó para calcular el volumen total de la suspensión que tuvo lugar en la carga activa y el área de contacto entre la suspensión y las bolas que comprenden la carga activa, a partir del cual, la distancia media entre las capas adyacentes está listo para ser estimado.

Para calcular el volumen de la suspensión presente en la carga activa, desarrollo un modelo de la suspensión en el hold-up por el autor Shi, 1994. Como solo el volumen de la suspensión presente en la carga activa es considerado y el modelo fue simplificado y se ilustra en la **Figura A-2**.

A medida que la carga de bolas se eleva hasta el cilindro del molino, el hold-up de la suspensión en este caso consiste en dos partes distintas: la suspensión del hold – up por debajo del nivel de la descarga de la región I y por encima la región II. Se supone que la suspensión se mantiene en el hold – up en los intersticios de las bolas en la carga activa. Dado que la fracción del volumen total de la carga de bolas es generalmente conocida y la fracción de las bolas se estima según se dijo anteriormente, el volumen de la carga activa se puede calcular, por lo tanto, la suspensión del hold – up en los intersticios de las bolas

se determina, sin tener en cuenta el volumen de drenado por ser una prueba experimental en batch. Así el volumen de la suspensión se da por la ecuación (13):

$$V_s = \varepsilon \xi J_t \pi r_m^2 L_m \qquad (13)$$

Donde V_s = volumen neto de suspensión en la carga activa (m3), ε = intersticios de las bolas, se asume un valor de 0,4 y ξ = fracción de la carga activa del total de las bolas, calculado por la ecuación (6).

El área total de contacto en la carga activa puede ser calculada con el número de bolas en la carga activa, por la ecuación (14):

$$B = \frac{(1-\varepsilon)\xi J_t \pi r_m^2 L_m}{\frac{\pi d_b^3}{6}} \qquad (14)$$

Donde B = número de bolas en la carga activa, entonces el área de bolas en contacto con la carga activa, A, está dado por la ecuación (15):

$$A = \pi d_b B \qquad (15)$$

La distancia promedio entre las capas adyacentes en la carga activa, Δx, esta dada por la ecuación (16):

$$\Delta x = \frac{V_s}{A} \qquad (16)$$

Donde V_s es el volumen de la suspensión (m3).

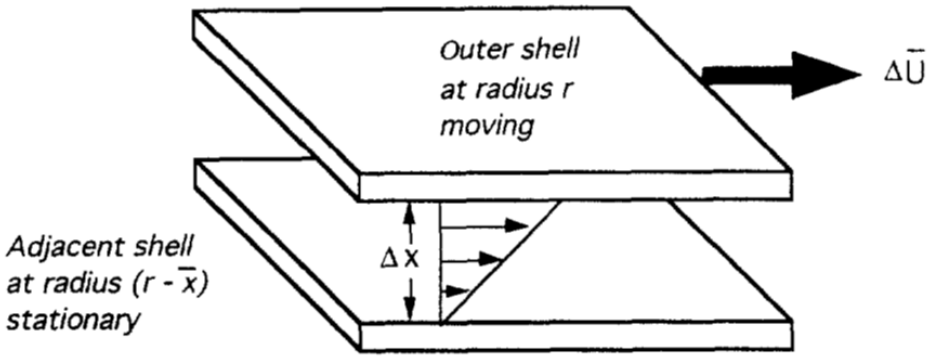
- Calculo de la tasa de cizalladura

A medida que la capa exterior del radio r se mueve con una velocidad relativa $\Delta\overline{U}$ con respecto a la capa adyacente al radio $r - \bar{x}$, el gap en la suspensión, Δx, está sujeta a una acción de cizalla, ver **Figura A-3**. Así, la tasa de cizalladura, definida como el gradiente de velocidad, son fácilmente calculado por la relación de la velocidad relativa, $\Delta\overline{U}$, a la distancia de las capas adyacentes, sobre las que el cambio de velocidad se produce.

Finalmente, la tasa de cizalladura $\dot{\gamma}$ para el movimiento en cascada considerando una molienda batch, está dada por:

$$\dot{\gamma} = \frac{\Delta \bar{U}}{\Delta x} \qquad (17)$$

Figura A-3: Tasa de cizalladura entre capas adyacentes

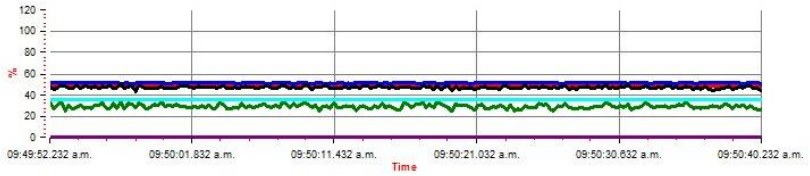


B. Anexo: Equipos empleados en la medición de la potencia, distribución de tamaño de partícula y viscosidad

- Potencia

El variador de velocidad marca Yaskawa America modelo V1000 CIMR-V*2*0012*** con software Drive Wizard versión 1022, registra cerca de 250 datos de potencia del motor por minuto, obteniendo un dato único promediado para análisis de la investigación. En la **Figura B-1** podemos ver el tipo de reporte obtenido.

Figura B-1: Imagen del reporte con software Drive Wizard



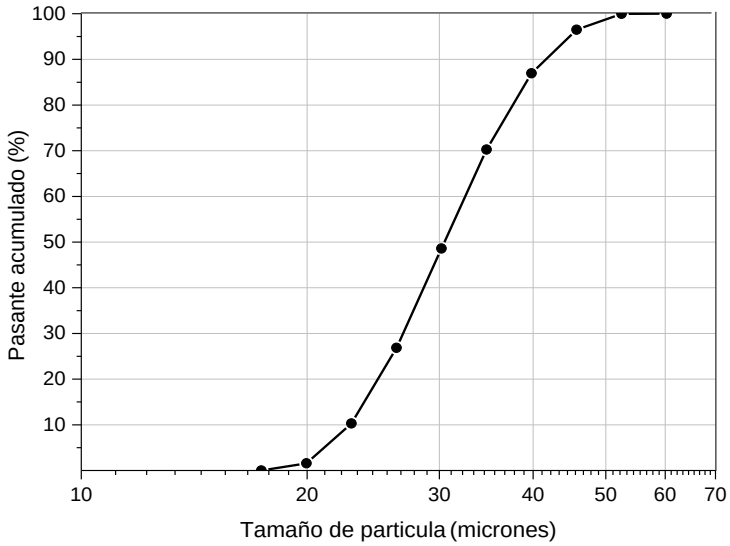
Trend Signals	Value	Signal Scaling
1: U1-01 Frequency reference	1: 42,3	100% = 86,0
2: U1-02 Output frequency	2: 42,9	100% = 86,0
3: U1-03 Output current	3: 5,30 A	100% = 12,00 A
4: U1-08 Output power	4: 0,53 kW	100% = 2,00 kW
5: U4-10 Output power lower 4 digits	5: 0,8 kWH	100% = 6553,0 kWH
6: U4-08 Cooling fin temperature	6: 29 deg	100% = 80 deg

- Distribución de tamaño de partícula

El mineral de trabajo fue analizado granulométricamente en el Mastersizer 2000 Hydro 2000MU marca Malvern, ver **Figura B-2**. El equipo fue previamente calibrado con el estándar 00DE000E2X de KNAUER, en la **Figura B-3** se observa la curva de calibración del equipo.

Figura B-2: Mastersizer 2000 Hydro 2000MU marca Malvern

Figura B-3: Curva de calibración del Mastersizer 2000 Hydro 2000MU



- Viscosidad de la suspensión

En el reómetro Kinesus se utilizó para la determinación de las viscosidades de las suspensiones. Empleando dos geometrías: una geometría cilíndrica corrugada (C25 DIN Splined: PC25 DIN AL) para mejora la adición de interface garantizando que el fluido de la interface bobina - fluido tenga la misma velocidad tangencial de la bobina y garantizar que la velocidad interface suspensión copa es cero y la otra geometría plato – plato (PU 40 SR

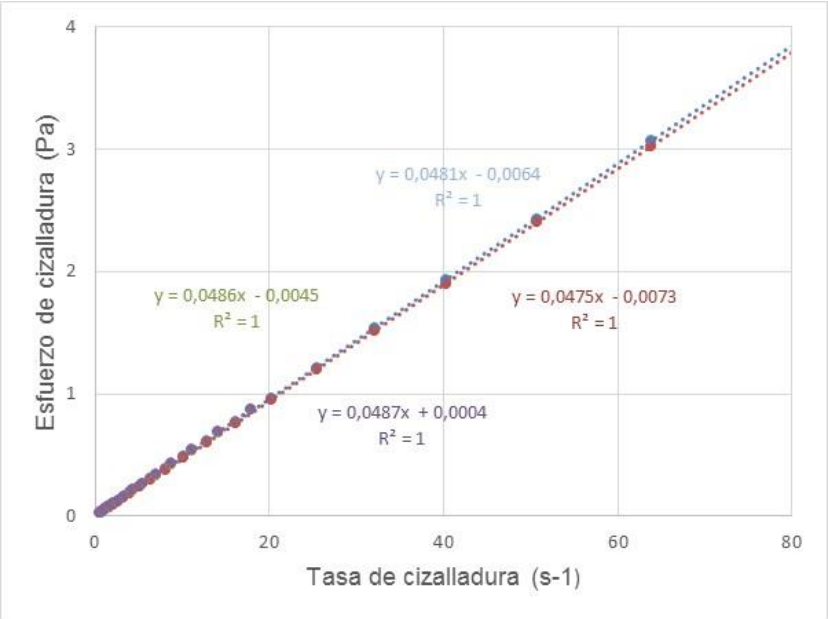
1142 SS) con gap de 3 mm, empleada en las suspensiones con alta viscosidad como las fracciones volumétricas 55 y 60%.

Las mediciones se realizaron registrando los valores de viscosidad en un rango de tasa de cizalladura de 0 a 200 s^{-1} en 80 segundos seguida de un rango de tasa de cizalladura de 0 a 50 s^{-1} en 40 segundos para cada medición. Cada muestra se midió dos o tres veces para observar la repetitividad de los resultados obtenidos, el valor de viscosidad requerido para cada fracción volumétrica a un tiempo determinado y una tasa de cizalladura constante se obtuvieron realizando una regresión lineal.

Para probar la buena calibración del reómetro rotacional Kinesus se selecciona un fluido con comportamiento Newtoniano, se utilizó aceite cristal, se emplea la geometría cilíndrica corrugada (C25 DIN Splined: PC25 DIN AL).

Las mediciones se realizaron registrando los valores de viscosidad en un rango de tasa de cizalladura de 0 a 80 s^{-1} en 80 segundos. La muestra se midió cuatro veces para observar la duplicidad en los resultados. La curva de fluidez se presenta en la **Figura B-4**.

Figura B-4: Curva de viscosidad para el fluido de calibración: aceite cristal



C. Distribución de tamaño de partícula de la muestra de trabajo

Tabla C-1: Distribución tamaño de partícula del material inicial obtenido en el Mastersizer

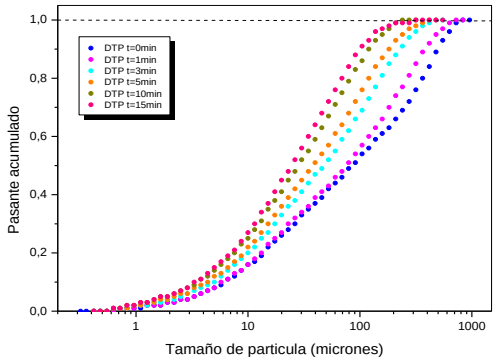
Tamaño (µm)	Pasante Acumulado (%)
954,99	100,00
831,76	99,82
724,44	98,59
630,96	96,16
549,54	92,74
478,63	88,62
416,87	84,18
363,08	79,77
316,23	75,63
275,42	71,93
239,88	68,68
208,93	65,84
181,97	63,30
158,49	60,94
138,04	58,63
120,23	56,29
104,71	53,89
91,20	51,40
79,43	48,88
69,18	46,37
60,26	43,90
52,48	41,50
45,71	39,19
39,81	36,94
34,67	34,73
30,20	32,55
26,30	30,36
22,91	28,15
19,95	25,94
17,38	23,74
15,14	21,57
13,18	19,47
11,48	17,47
10,00	15,57
8,71	13,80
7,59	12,15
6,61	10,64
5,75	9,26
5,01	8,00
4,37	6,87
3,80	5,87
3,31	5,00
2,88	4,25
2,51	3,62
2,19	3,09

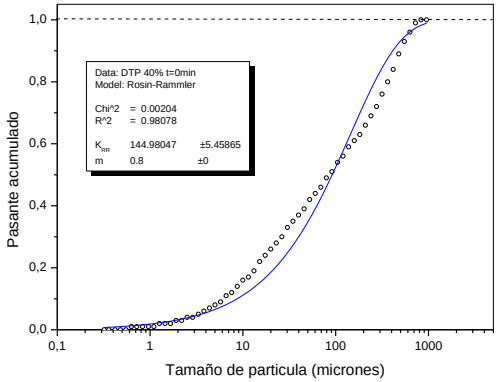
1,91	2,65
1,66	2,28
1,45	1,96
1,26	1,68
1,10	1,43
0,96	1,19
0,83	0,96
0,72	0,75
0,63	0,55
0,55	0,36
0,48	0,21
0,42	0,09
0,36	0,01
0,32	0,00

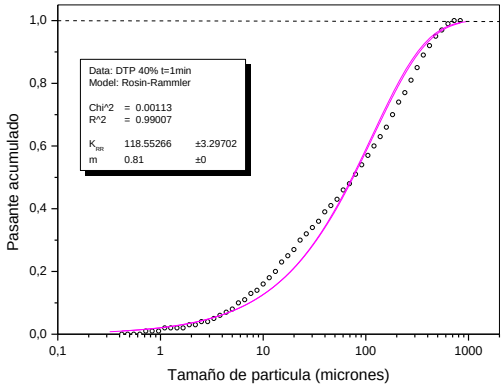
D. Distribución de tamaño de partículas para cada fracción volumétrica

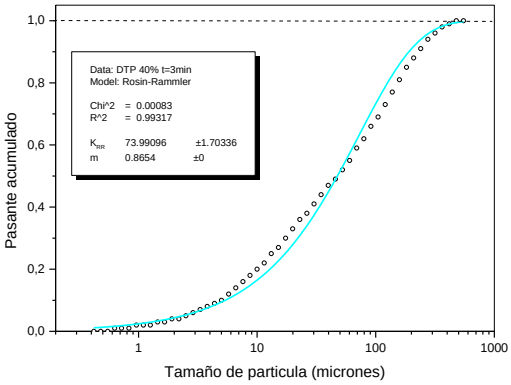
Curvas de distribución del tamaño de partícula con el modelo de Rosin – Rammler, para las suspensiones con diferente fracción volumétrica.

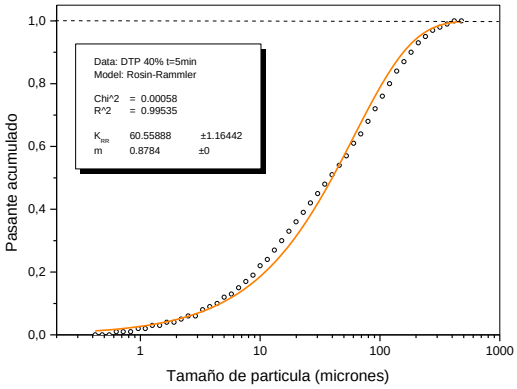
- Fracción volumétrica de 40%

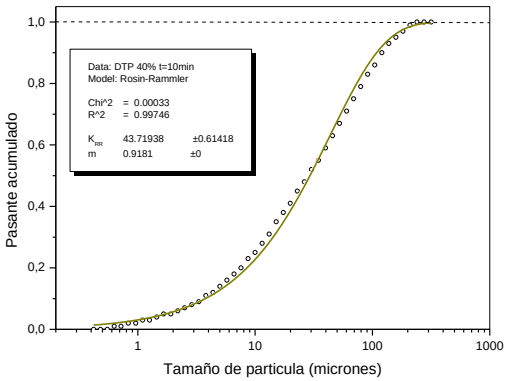


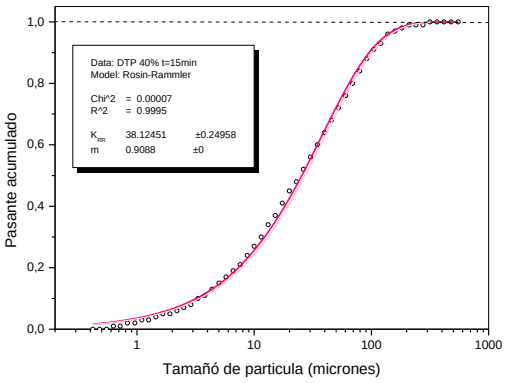




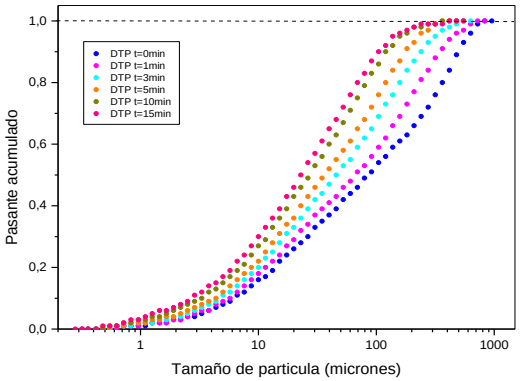


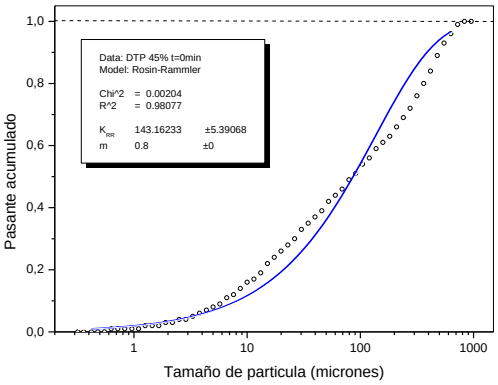


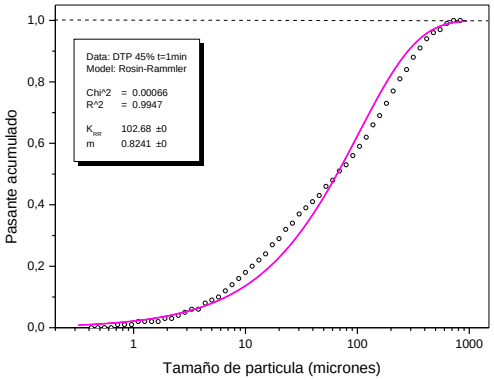


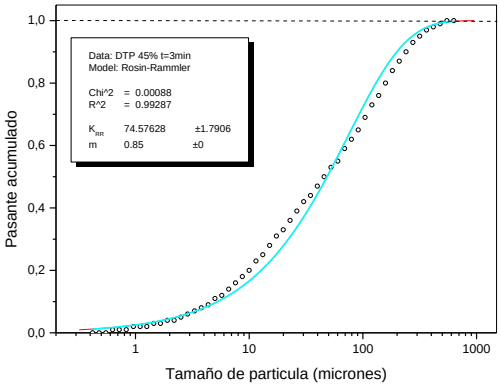


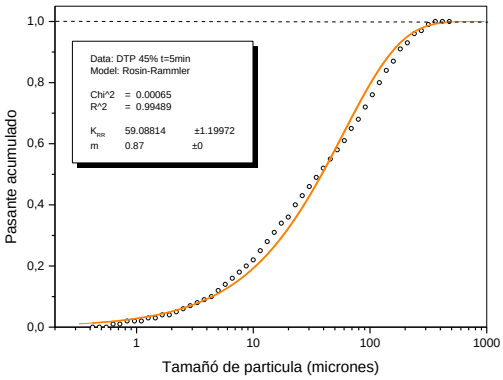
- Fracción volumétrica de 45%

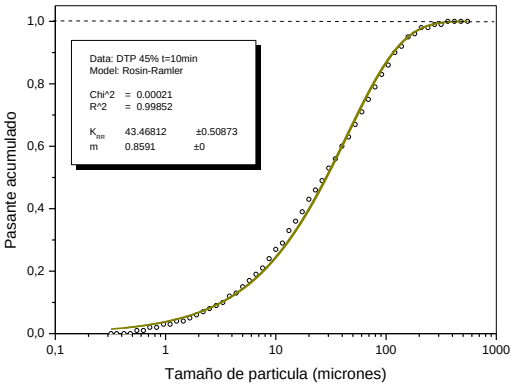


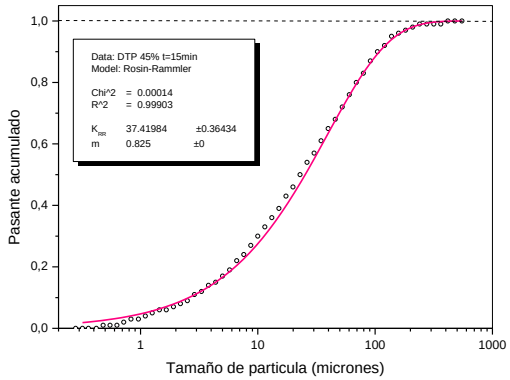




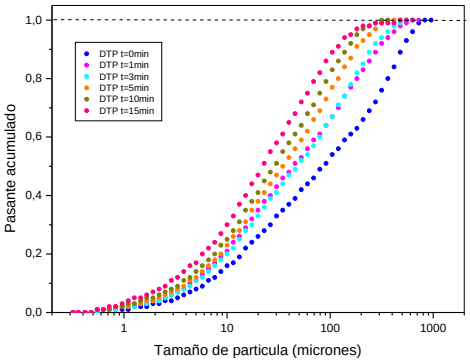


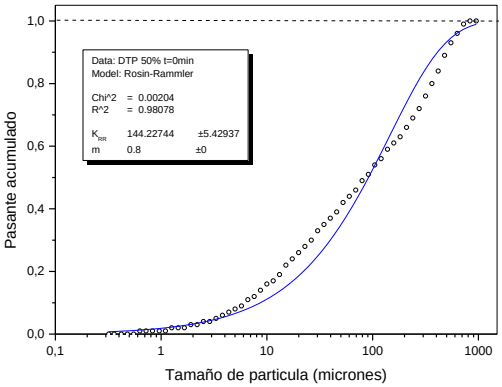


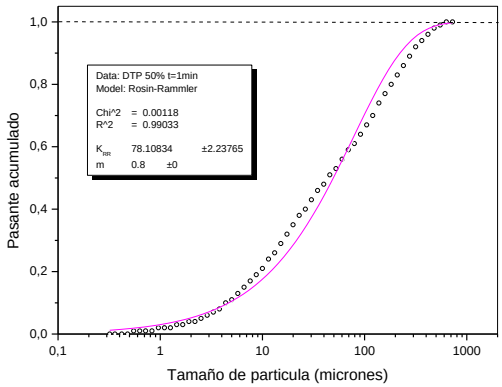


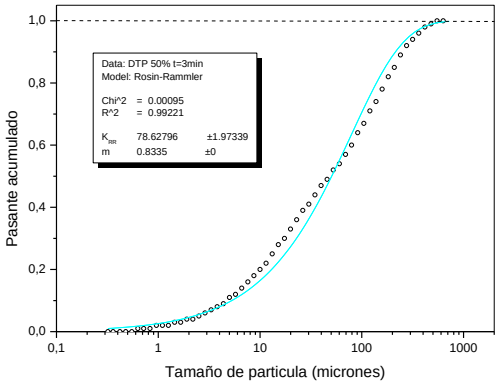


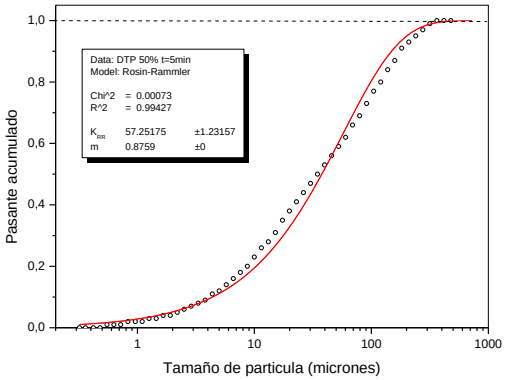
- Fracción volumétrica de 50%

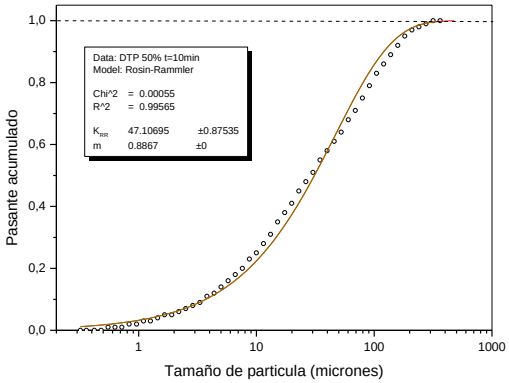


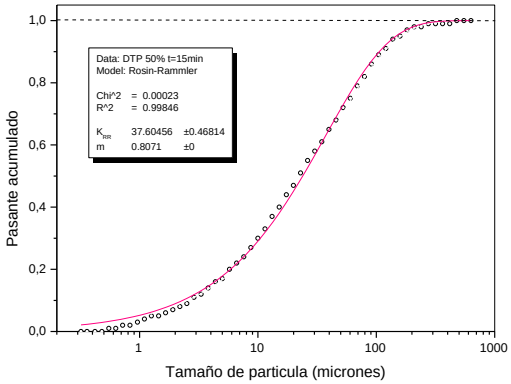




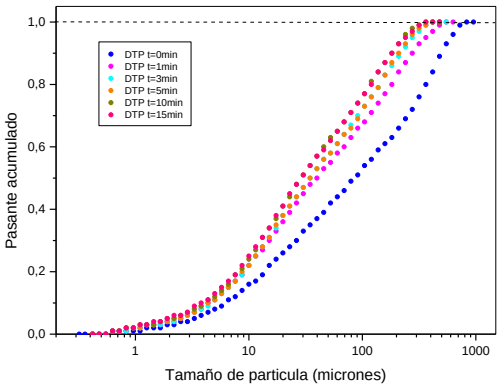


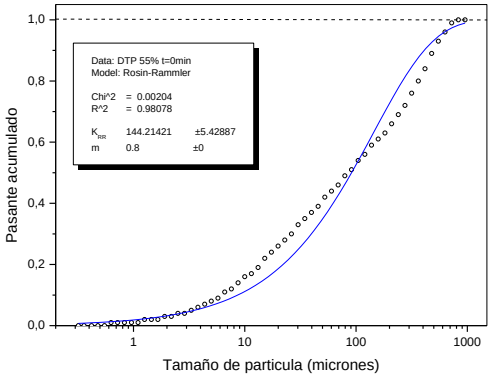


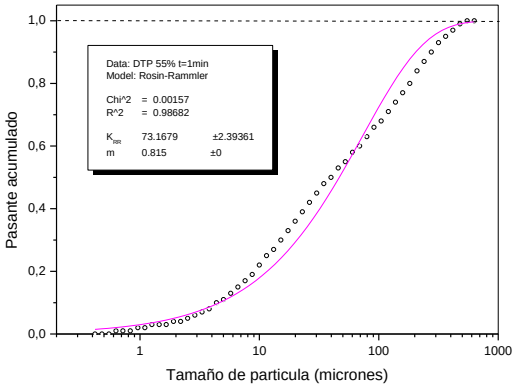


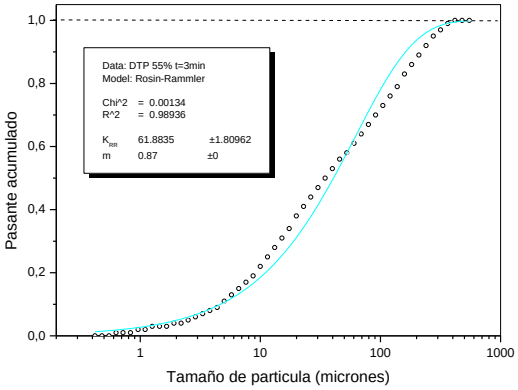


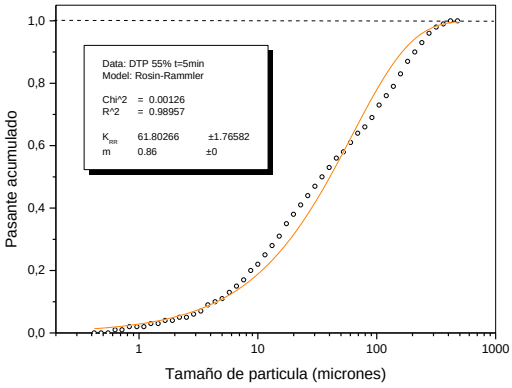
- Fracción volumétrica de 55%

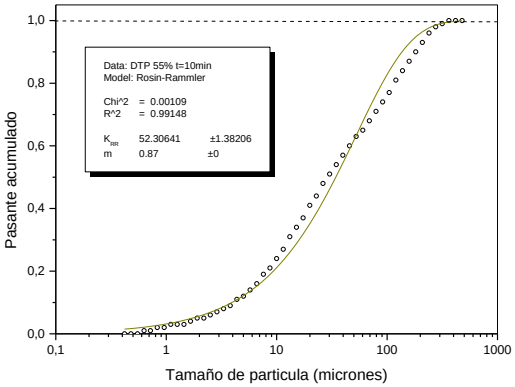


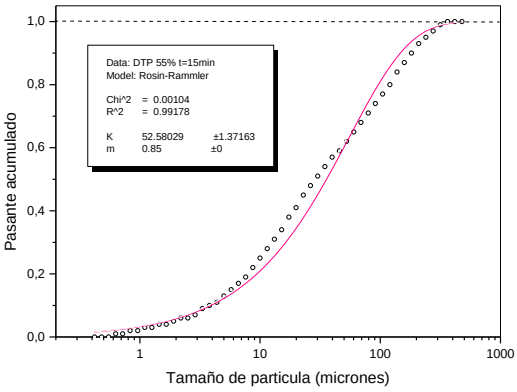




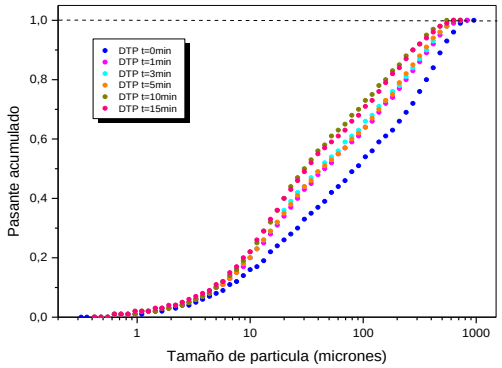


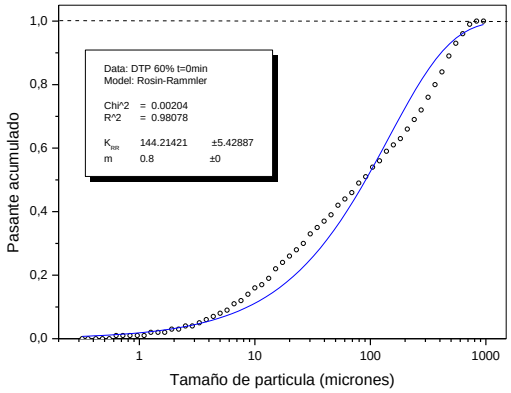


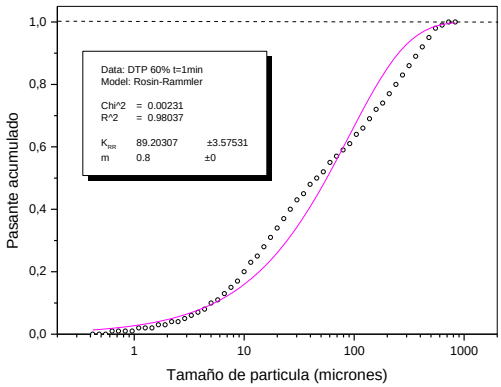


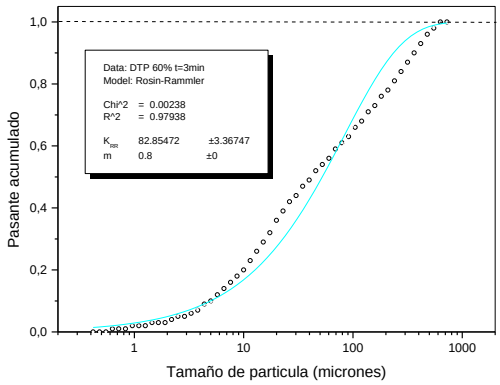


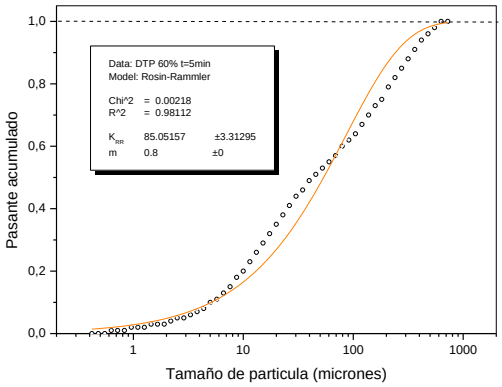
- Fracción volumétrica de 60%

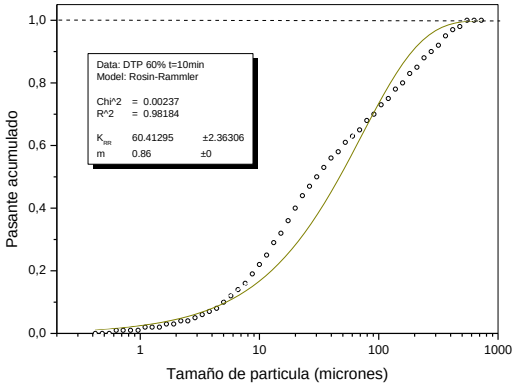


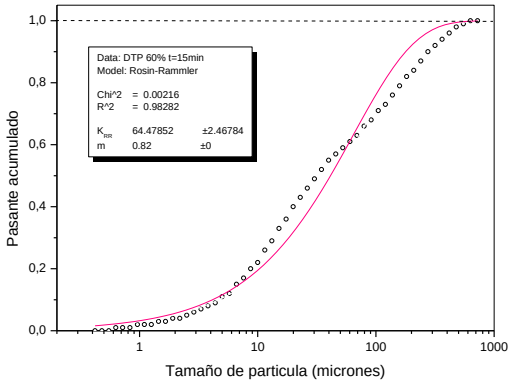












Bibliografía

Aldrich, Chris. (2013). Consumption of steel grinding media in mills – A review. Minerals Engineering, (49), 77-91.

Austin, L.G., Klimpel, R.R., Luckie, P.T. (1984). Process engineering of size reduction: ball milling. Society of Mining Engineers, New York: SME/AIEM.

Austin, Leonard. Concha, Fernando. (1994). Diseño y simulación de circuitos de molienda y clasificación. Programa Iberoamericano de Ciencia y Tecnología Para el Desarrollo. Concepción – Chile: Taller Multimedia Universidad Técnica Federico Santa María.

Bazin, C. Lavoie, G. (2000). Ball mill rotation speed and rate of particle breakage: results a full - scale unit. Mineral Processing & Extractive Metallurgy: Transactions of the Institution of Mining & Metallurgy, Section C, (109), 161-164.

Breitung – Faes, S., Kwade, A. (2013). Prediction of energy effective grinding conditions. Minerals Engineering, (43-44), 36-43.

Bush, Victor. (2013). Integrated sustainable energy management in mining operations. Mining engineering, Sustainable Energy, 41-43.

Bustamante, M.O. (2002). Modelación matemática del tensor esfuerzo y la viscosidad de una suspensión mineral. Tesis de Doctorado en Ciencia de la Ingeniería. Universidad de Concepción, Chile.

Bustamante, M.O. (2004). Una aproximación a la modelación del esfuerzo de cedencia en suspensiones minerales. Universidad Nacional de Colombia. Medellín

Bustamante, M.O. (2009). Viscosidad de suspensiones y pastas bajo una aproximación termomecánica. Universidad Nacional de Colombia. Medellín.

Bustamante, M.O. (2012). Notas de clase de mineralurgia. Universidad Nacional de Colombia. Medellín.

Cabrera, S., Irigaray, R., Míguez, D. (2010). Estudio comparativo de la determinación del tamaño de partícula por dos métodos: tamizado en seco y difracción láser. Revista del laboratorio tecnológico del Uruguay, (5), INN TEC-23.

Govender, I., Mangesana, N., Mainza, A.N., Franzidis J.-P. (2011). Measurement of shear rates in a laboratory tumbling mill. Minerals Engineering, (24), 225–229.

He, Mingzhao, Wang, Yanmin, Forssberg, Eric. (2004). Slurry rheology in wet ultrafine grinding of industrial minerals: a review. Powder Technology, (147), 94-112.

He, Mingzhao & Forssberg, Eric. (2007). Influence of slurry rheology on stirred media milling of quartzite. Int. J. Miner. Process, (84), 240–251.

Kawatra, S.K. Eisele, T.C. (1988). Rheological effects in grinding circuits. Minerals Processing, (22), 251-259.

Klimpel, R.R. (1984). Influence of material breakage properties and associated slurry rheology on breakage rates in wet grinding of coal/ores in tumbling media mills. Reagents in the Mineral Industry, ed. M.J.Jones and R. Oblatt, IMM.,London, 265-270.

King, Peter. (2012). Modeling of Simulation of Mineral Processing Systems. 2ND edition SME.

Lefebvre, A., Lanzetta, F. Lipinski, P. and Torrance, A.A. (2012). Measurement of grinding temperatures using a foil/workpiece thermocouple. International Journal of Machine Tools & Manufacture, (58), 1–10.

Lynch, A.J. (1977). Mineral crushing and grinding circuits: Their simulation, optimization and control. Elsevier scientific publishing company. 340pp.

Mishra, B.K., (1991). Study of media mechanics in tumbling mills by the discrete element method. PhD thesis, The University of Utah.

Mishra, B.K., and Rajamani, R. K. (1994). Simulation of charge motion in ball mills: numerical simulations, International Journal of Mineral Processing, 40 (1994) 187-197.

Montgomery, D.C., 2013. Diseño y análisis de experimentos, 2nd ed. Limusa Wiley, México.

Mulenga, Francois. Moys, Michael. (2014). Effects of slurry and mill speed on the net power draw of a tumbling ball mil. Minerals Engineering, (56), 45-56.

Osorio, A.M, Menéndez - Aguado, J.M, Bustamante, O, Restrepo, G.M. (2014). Fine grinding size distribution analysis using the Swrebec funtion. Powder Technology, (258), 206-208.

Osorio, Adriana. (2015). Efecto del escenario reológico en la cámara de molienda sobre la cinética de fractura en un Molino de bolas. Tesis de doctorado. Facultad de Ingeniería. Universidad de Antioquia. Medellín.

Rivera, Ismael. (2014). Balance poblacional en un molino de bolas para una ley de desgaste de tipo exponencial e hiperbólico en tiempo largos. Tesis de doctorado. Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia. Medellin.

Sepúlveda, Jaime E. (2004). Methodologies for the evaluation of grinding media consumption rates at full plant scale. Minerals Engineering, (17), 1269-1279.

Shi, F.N., Napier-Munn, T.J. (1996). A model for slurry rheology. International journal of mineral processing, (47), 103-123.

Shi, F.N.,Napier-Munn, T.J. (1999). Estimation of shear rates inside a ball mill. International journal of mineral processing, (57), 167-183.

Shi, F.N., Napier-Munn, T.J. (2002). Effects of slurry rheology on industrial grinding performance. International journal of mineral processing, (65), 125-140.

Tangsathikulchai, C. (2003). The effect of slurry rheology on fine grinding in a laboratory ball mill. International journal of mineral processing, (69), 29-47.

Will, B.A. (2011). Will's Mineral Processing technology. Seventh edition. Editor Tim Napier – Nunn.