



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Oscilaciones de neutrinos en extensiones del modelo con triplete de Higgs

Michael Orlando Ospina

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Física  
Bogotá, Colombia  
2021

# Oscilaciones de neutrinos en extensiones del modelo con triplete de Higgs

Michael Orlando Ospina

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:  
**Magíster en Ciencias - Física**

Director:  
Ph.D. Fredy Alexander Ochoa Perez

Línea de Investigación:  
Física de partículas  
Grupo de Investigación:  
Física teórica de altas energías

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Física  
Bogotá, Colombia  
2021



Este trabajo está dedicado a todas las personas que, de alguna manera u otra, a pesar de todo, no han dejado de creer en mi...

"He is always late on principle, his principle being that punctuality is the thief of time".

The Picture Of Dorian G., Oscar Wilde.

El científico no estudia la naturaleza porque sea útil; la estudia porque se deleita en ella, y se deleita en ella porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera hermosa, no valdría la pena conocerla, y si no valiera la pena conocer la naturaleza, no valdría la pena vivir la vida.

Henri Poincaré



# Agradecimientos

Mis agradecimientos en la parte académica obviamente van principalmente dirigidos al profesor Ph.D. Fredy Ochoa, ante todo por su infinita paciencia para trabajar con un como yo, que en muchas ocasiones dilata mucho las cosas para su culminación o realización debido a los muchos vericuetos que da mi vida cuando emprendo un proyecto de este tipo. Gracias a él, pude en mi concepto personal “sacarle el jugo a la maestría”, ya que se me permitió acercarme de primera mano a un trabajo de investigación serio, riguroso y del cual se obtuvieron resultados muy interesantes, los cuales fueron plasmados (además del presente escrito) en un artículo que reposa en ArXiv (el primer paper con mi nombre incluido) y en un poster presentado en NEUTRINO 2018 realizado en Heidelberg, Alemania. Cosas como las anteriores hacen que no tenga como pagarle por su colaboración y también quisiera pedirle disculpas por no haber tenido el nivel académico requerido en muchas ocasiones.

En la parte de agradecimientos personales entran en primer lugar Luckas y Manu, que como ya se los he hecho saber en ocasiones anteriores, ellos son ese “motorcito” que me ha impulsado a hacer las pocas cosas de las cuales puedo enorgullecerme en los años que llevo de vida (comenzando dicho conteo con ellos obviamente), y más que agradecerles, les pido disculpas por la paciencia que tuvieron por el mucho tiempo que dejamos de compartir mientras me dedicaba a mis estudios de posgrado.

A Clara Carolina, por haber decidido ser partícipe activa de dicho proyecto (y de mi proyecto de vida obviamente), le estoy enormemente agradecido también por escuchar mis monólogos neutrinescos en repetidas ocasiones formulando preguntas al respecto, opinar acerca de mis epifanías posbaño, aguantar mis jornadas de estrés ocasional y de poco sueño, junto con la “corrección de estilo” aportada a este documento. De igual manera, le pido disculpas por todo el tiempo que dejamos de aprovechar juntos mientras me dedicaba a estos menesteres.

A mi familia cercana, mi mamá, por tenerme siempre presente en sus súplicas y oraciones, a Alejandro, Nicole y Valery porque se que en medio de todo hicieron una que otra fuercita para que esto saliera adelante. Económicamente le agradezco a Tatiana Flórez por su ayuda financiera, al comité organizador de NEUTRINO 2018 su apoyo con la inscripción a dicho evento y a la Universidad ECCI por financiarme el viaje a Alemania con el cual pude asistir.



## Resumen

# Oscilaciones de neutrinos en extensiones del modelo con triplete de Higgs

Se propone un mecanismo see-saw para las masas de neutrinos activos ligeros y sus ángulos de mezcla en el contexto de una extensión del espectro de partículas del modelo estándar con la adición de un neutrino derecho y un triplete de Higgs. Se generó una matriz de masa de neutrinos que depende de las constantes de acoplamiento de Yukawa del neutrino derecho y el triplete de Higgs. Alineando los acoplamientos del triplete como el producto de acoplamientos del neutrino derecho, se obtienen neutrinos no masivos. Cuando esta condición de alineamiento es ligeramente perturbada se generan masas pequeñas para los neutrinos activos ligeros y los ángulos de mezcla pueden ser predichos. Dando formas específicas al parámetro de perturbación, se generan matrices bimaximales de forma natural permitiendo el cálculo de los ángulos de mezcla y las diferencias de masa cuadrada con unos pocos parametros libres.

**Palabras clave:** Neutrino, modelo estándar, oscilación de neutrinos, triplete de Higgs, matriz y ángulo de mezcla, matrices bimaximales y tribimaximales.

## Abstract

# Neutrino oscillations in extensions of the model with Higgs triplet

A see-saw mechanism for the masses of the light active neutrinos and their mixing angles is proposed in the context of an extension of the particle spectrum of the standard model. By adding one right-handed sterile neutrino and a Higgs triplet, we generate a neutrino mass matrix that depends on the sterile neutrino and Higgs triplet Yukawa couplings. By aligning the Yukawa triplet coupling as the product of the Yukawa sterile coupling, we obtain exact massless neutrinos. When this alignment condition is slightly disturbed, small masses for the light active neutrinos can be generated, and mixing angles can be predicted. By giving specific forms to the parameter that generates the disturbance, it is observed that bimaximal mass matrices arise in a natural way, allowing the mixing angles and the squares of the mass differences to be calculated with few free parameters.

**Keywords:** Neutrino, standard model, neutrino oscillations, Higgs triplet, mixing angle and matrix, bimaximal and tribimaximal matrix.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>x</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El neutrino en el modelo estándar</b>	<b>4</b>
2.1. El modelo estándar para leptones . . . . .	4
2.2. Mecanismo de Higgs y rompimiento espontáneo de la simetría . . . . .	7
2.3. Surgimiento de las masas de los bosones $W^\pm$ y $Z^0$ . . . . .	9
2.4. Masas de leptones . . . . .	12
2.5. Conservación del número leptónico . . . . .	15
<b>3. Términos de masa para los neutrinos</b>	<b>17</b>
3.1. Neutrinos de Dirac . . . . .	17
3.2. Neutrinos de Majorana . . . . .	18
3.3. Término de masa de Dirac-Majorana . . . . .	22
3.4. Mecanismo seesaw para la generación de masas de neutrinos . . . . .	24
3.4.1. Término de masa de Dirac-Majorana para el caso de una familia de partículas . . . . .	24
3.4.2. Mecanismo seesaw para el caso de una familia de partículas . . . . .	26
3.4.3. Mecanismo seesaw para el caso de tres familias de partículas . . . . .	27
<b>4. Oscilación de neutrinos</b>	<b>29</b>
4.1. Tratamiento teórico de las oscilaciones de neutrinos . . . . .	29
4.1.1. Oscilaciones de neutrinos monoenergéticos . . . . .	29
4.2. Oscilaciones de neutrinos para el caso de dos familias . . . . .	31
4.3. Oscilación de neutrinos para el caso de tres familias . . . . .	32
4.4. Matriz de mezcla . . . . .	32
4.5. Evidencias experimentales . . . . .	33

<b>5. Modelo de alineamiento con triplete de Higgs</b>	<b>37</b>
5.1. Modelo con triplete de Higgs . . . . .	37
5.1.1. $\Phi$ como doblete ( $n = 2$ ) . . . . .	39
5.1.2. $\Phi$ como antidoblete ( $n = 2^*$ ) . . . . .	39
5.1.3. $\Phi$ como antidoblete ( $n = 2 \otimes 2$ ) . . . . .	40
5.1.4. Carga eléctrica e hipercarga para cada representación de $\Phi$ . . . . .	40
5.2. Espectro del modelo del triplete de Higgs . . . . .	41
5.3. Modelo con singlete y triplete de Higgs . . . . .	41
5.4. Condición de alineamiento de los acoplamientos de Yukawa . . . . .	43
5.5. Perturbación de la condición de alineamiento . . . . .	44
5.6. Estructuras de la matriz de masa . . . . .	46
5.6.1. Forma básica bimaximal . . . . .	46
5.6.2. Perturbación a primer orden de la forma bimaximal . . . . .	48
5.6.3. Perturbación a segundo orden de la forma bimaximal . . . . .	50
5.7. Ajustes numéricos . . . . .	51
<b>6. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>A. Diagonalización de la matriz de masa obtenida en el modelo con triplete de Higgs</b>	<b>59</b>
<b>B. Estructuras de la matriz de masa</b>	<b>61</b>
<b>C. Expresiones de los ángulos de mezcla corregidos a segundo orden en función de <math>\alpha</math></b>	<b>63</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

# 1. Introducción

Los neutrinos son partículas eléctricamente neutras, compañeras de los leptones cargados en los multipletes de  $SU(2)$  que debido a su baja probabilidad de interacción son difíciles de detectar y como consecuencia de esto el sector de los neutrinos es el menos conocido en el modelo estándar (ME) de la física de partículas, lo cual, los pone en el centro de muchos esfuerzos teóricos y experimentales en la actualidad.

Los orígenes del neutrino se remontan hacia el año 1930 cuando Pauli lo planteó como un tipo de partícula neutra con masa pequeña para salvaguardar la ley de la conservación de la energía en el decaimiento beta [1]. Por esta época, las únicas partículas conocidas eran el electrón y el protón, por ende, el neutrino (electrónico) es de las primeras partículas fundamentales planteadas teóricamente. Su evidencia experimental se dio a mediados de la década de los años cincuenta con el descubrimiento del antineutrino electrónico [2] sumándose a la de otras partículas como los neutrones, muones, piones, kaones, entre otros. Posteriormente en 1962 se dio el descubrimiento del neutrino muónico [3] y finalmente en el año 2000 con el experimento DONUT en Fermilab se evidenció el último sabor de neutrino conocido: el neutrino tauónico [4]. Cabe recalcar que para el final de la década de los ochenta en los experimentos LEP del CERN ya se había evidenciado que solo existen tres clases de neutrinos ligeros [5].

Es así que el ME de física de partículas incorpora tres sabores de neutrinos,  $\nu_e, \nu_\mu$  y  $\nu_\tau$  los cuales son partículas neutras y hacen parte de un conjunto de 12 fermiones organizados en tres familias según sus masas, junto con los quarks  $u, d, c, s, t, b$  y los leptones cargados  $e^-, \mu, \tau$ . Todos ellos experimentan la interacción electrodébil por medio del intercambio de fotones y bosones vectoriales  $W^\pm$  y  $Z$  [6]. Adicionalmente los neutrinos tienen características especiales que los diferencian de dichos leptones como por ejemplo, el hecho de que la sección eficaz de interacción con la materia ordinaria es de varios ordenes de magnitud menor que la sección eficaz de interacción electromagnética de los leptones cargados [7] o también (esto no contemplado por el ME) que los valores de sus masas son de varios ordenes de magnitud menores que las de sus otros compañeros fermiónicos [8].

El ME que unifica las interacciones débiles y las electromagnéticas no es una teoría definitiva, ya que aspectos como la existencia de la materia oscura o problemas como la jerarquía, de masas de las partículas contempladas en este, dan pie a pensar que hay una teoría más allá

de dicho modelo. La observación del fenómeno de las oscilaciones de neutrinos [9], donde se miden transiciones entre diferentes sabores, establece una evidencia de la existencia de nueva física más allá del ME, ya que se requiere de un mecanismo de generación de masa, y por ende, una extensión del ME. Dicho fenómeno también implica que los estados de sabor de los neutrinos son una superposición de estados con masas definidas, en el cual estos estados se relacionan por medio de una matriz de mezcla unitaria [10] que en el caso de tres neutrinos consta de tres ángulos de mezcla y una fase, muy similar a la mezcla de quarks, con la diferencia de que en esta los ángulos de mezcla son pequeños y satisfacen una jerarquía mientras que en el caso de los neutrinos, dos ángulos son grandes y uno es pequeño pero diferente de cero, según se evidencia en los experimentos Daya Bay, RENO y Double Chooz [11, 12, 13, 14], lo cual podría indicar que las masas de los quarks y los neutrinos tienen orígenes diferentes.

El mecanismo de generación de masas de neutrino más natural y viable hasta el momento es el denominado mecanismo seesaw, el cual, básicamente consiste en la ampliación del espectro del ME que se clasifica en tres tipos básicos: cuando se introduce un singlete fermiónico derecho (tipo I), por la adición de un triplete de Higgs cargado (tipo II) y considerando un triplete fermiónico derecho (tipo III). Adicional a los tres anteriores, está el denominado mecanismo seesaw inverso en el cual se adicionan singletes pesados derechos los cuales generan una pequeña masa de Majorana [15]. También de dicho mecanismo se puede deducir que los valores pequeños de las masas de los neutrinos pueden ser explicados mediante la hipótesis de la violación del número leptónico total a grandes escalas de energía ( $10^{15} - 10^{16}$ )  $GeV$ . Si dicha suposición es correcta, los neutrinos serían partículas de Majorana neutras [16]. Los leptones y los quarks son partículas de Dirac, es decir, las partículas y sus correspondientes antipartículas son diferentes ya que tienen cargas de signo opuesto, mientras que si los neutrinos son partículas de Majorana, estos serían iguales a los antineutrinos. Experimentos de decaimiento beta doble sin neutrinos se están llevando a cabo actualmente para determinar experimentalmente este hecho [17, 18, 19].

Con el fin de dar una explicación a la mezcla de neutrinos, han surgido varios modelos basados en los datos experimentales de oscilaciones de neutrinos solares y atmosféricos, como por ejemplo las matrices de mezcla bimaximales y tribimaximales, en las cuales uno de los ángulos es nulo  $\theta_{13} = 0$  y que usualmente se perturba [20] para que se acerquen más a los resultados experimentales actuales, en los cuales, dicho ángulo es diferente de cero [21, 22, 23].

Adicional a las observaciones de la oscilación de neutrinos junto con la estimación de sus cuatro parámetros de oscilación (dos diferencias cuadradas de masas y dos ángulos de mezcla) [14] y la estimación de cotas para los tiempos de vida media del decaimiento beta doble sin neutrinos para diferentes núcleos atómicos [17] existen otras características por entender, tales como la naturaleza de los neutrinos (Majorana o Dirac), la obtención de mayor precisión

---

en las mediciones de los valores del tercer ángulo de mezcla  $\theta_{13}$ , la existencia de la violación de CP en el sector leptónico, el ordenamiento de las masas de los neutrinos (normal, invertido o cuasidegenerado), la igualdad entre el número de neutrinos masivos y el número de sabores de neutrinos, es decir, la existencia de neutrinos estériles, entre muchas otras cuestiones que actualmente están abiertas y que se intentan resolver con ayuda de varios experimentos, lo cual muestra que la física de neutrinos es un área en la que se trabaja intensamente en la actualidad.

En el presente trabajo se plantea una extensión del ME con un triplete de Higgs, el cual, produce una combinación de mecanismo seesaw tipo I y II para la masa de neutrinos ligeros. Esta combinación elimina las masas de los neutrinos en el límite en que el producto de los acoplos de Yukawa del sector singlete se iguala con los acoplos del sector triplete (límite de alineamiento). Al romper esta condición, es posible obtener un nuevo mecanismo de generación de masa para el sector ligero. A partir de variaciones a la condición de alineamiento, se obtiene una matriz de masa cuasibimaximal en la cual los ángulos de mezcla y las diferencias de masa pueden ser calculados con pocos parámetros libres. Para esto, en el capítulo 2 se inicia con una introducción al ME haciendo énfasis en el sector leptónico y en como entra el neutrino en dicho modelo. En el capítulo 3 se trata el mecanismo seesaw para la generación de masas de neutrinos para una familia y posteriormente el caso de tres familias. En el capítulo 4 se hablará del fenómeno de las oscilaciones de neutrinos realizando un acercamiento teórico y posteriormente se revisarán parámetros experimentales medidos hasta el momento. En el capítulo 5 se hablará del modelo que involucra tripletes de Higgs haciendo especial énfasis en su espectro, lagrangianos y ansatz de alineamiento propuestos junto con un análisis fenomenológico, realizando ajustes con los datos de oscilaciones actuales y, por último, en el capítulo 6 se dan las conclusiones y perspectivas del trabajo realizado.

## 2. El neutrino en el modelo estándar

A finales de los años 60 los físicos Sheldon Glashow, Steven Weinberg y Abdus Salam propusieron de forma independiente una teoría que unificara las interacciones electromagnética y débil, lo cual, actualmente se conoce como modelo estándar (ME). Esta teoría hizo varias predicciones en la física de partículas dentro de las cuales está la existencia de los bosones vectoriales  $W^\pm$  y  $Z^0$  con sus respectivas masas, los cuales fueron descubiertos en el laboratorio por Carlo Rubbia y su equipo en el CERN aproximadamente 20 años después de haber sido predichos [24]. La existencia del bosón de Higgs, planteada por Peter Higgs, Robert Brout y François Englert, fue otra de las predicciones teóricas más importantes del ME, de la cual, se tuvo evidencia experimental en los laboratorios del CERN en el año 2012 [25]. Cabe anotar que ambos descubrimientos experimentales fueron galardonados con premios Nobel junto con el otorgado por la postulación de dicho modelo teórico. Una de las razones para la formulación del ME fue que la teoría que daba cuenta de la interacción débil (V-A) no era renormalizable, por ende, este surgió como un intento de obtener una teoría que diera cuenta de dicha interacción y que cumpliera esta condición ya que la única teoría física conocida renormalizable hasta ese momento era la electrodinámica cuántica. t' Hooft y Veltman probaron que el ME era renormalizable en el año 1971 [26].

Existen tres generaciones de partículas, las cuales, son las constituyentes fundamentales de la materia. Las interacciones entre ellas pueden ser descritas por teorías de campo Gauge, un ejemplo de esto es que la fuerza electromagnética entre dos partículas cargadas se puede explicar con ayuda de los fotones, los cuales, son las partículas mediadoras de dicha interacción, es decir, los bosones gauge de la electrodinámica cuántica basados en el grupo abeliano  $U(1)$ . Para poder dar una descripción detallada del ME hay que tener en cuenta que este está basado en dos aspectos fundamentales: la invariancia local gauge del grupo  $SU(2)$  y el rompimiento espontáneo de la simetría [27].

### 2.1. El modelo estándar para leptones

El modelo estándar (ME) para la parte leptónica está basado en el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  en el cual se asume que las componentes de quiralidad izquierda de los campos leptónicos son dobletes del grupo  $SU(2)$  y las componentes derechas de dichos campos son singletes del

mismo grupo, es decir,

$$\psi_{eL} = \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ e'_l \end{pmatrix}, \quad \psi_{\mu L} = \begin{pmatrix} \nu'_{\mu L} \\ \mu'_l \end{pmatrix}, \quad \psi_{\tau L} = \begin{pmatrix} \nu'_{\tau L} \\ \tau'_l \end{pmatrix}, \quad (2-1)$$

$$l'_R \quad (l = e, \mu, \tau). \quad (2-2)$$

Las componentes derechas de los neutrinos no se tienen en cuenta de entrada, principalmente porque no hay una evidencia experimental de estos [28]. El término cinético del Lagrangiano para la parte leptónica viene dado como

$$\mathcal{L}_k^l = \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_{lL} i \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi_{lL} + \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}'_R i \gamma^\alpha \partial_\alpha l'_R. \quad (2-3)$$

Para asegurar la invariancia de dicho Lagrangiano bajo el grupo gauge local de  $SU(2)$ , la derivada covariante presente en este debe modificarse como

$$\partial_\alpha \psi_{lL} \longrightarrow \left( \partial_\alpha + ig \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\alpha \right) \psi_{lL}, \quad (2-4)$$

donde  $\mathbf{A}_\alpha(x)$  es el campo vectorial gauge. El Lagrangiano de interacción entre los leptones y el campo vectorial es

$$\mathcal{L}_I^l = -g \mathbf{j}_\alpha(x) \mathbf{A}^\alpha(x) \quad (2-5)$$

con

$$\mathbf{j}_\alpha(x) = \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_{lL}(x) \gamma_\alpha \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \psi_{lL}(x). \quad (2-6)$$

La ecuación (2-5) se puede descomponer en dos partes, la parte cargada y la parte neutra, lo cual, permite reescribirla como

$$\mathcal{L}_I^l = \left( -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_\alpha^{CC} W^\alpha + h.c. \right) - g j_\alpha^3 A^{3\alpha}, \quad (2-7)$$

sabiendo que [29]

$$j_\alpha^{CC} = 2j_\alpha^{1+i2} = 2(j_\alpha^1 + i j_\alpha^2) \quad (2-8)$$

$$j_\alpha^i(x) = \bar{\psi}_{lL}(x) \gamma_\alpha \frac{1}{2} \tau_i \psi_{lL}(x). \quad (2-9)$$

Calculando (2-9) con  $i=1,2$  y haciendo uso de (2-1)

$$\bar{\psi}_{lL} \gamma_\alpha \frac{1}{2} \tau_1 \psi_{lL} = \frac{1}{2} \sum_{l=e,\mu,\tau} (\bar{\nu}'_{lL} \gamma_\alpha l'_L + \bar{l}'_L \gamma_\alpha \nu'_{lL}) \quad (2-10)$$

$$\bar{\psi}_{lL} \gamma_\alpha \frac{1}{2} \tau_2 \psi_{lL} = -\frac{i}{2} \sum_{l=e,\mu,\tau} (\bar{\nu}'_{lL} \gamma_\alpha l'_L + \bar{l}'_L \gamma_\alpha \nu'_{lL}), \quad (2-11)$$

obteniendo así para la corriente cargada:

$$j_\alpha^{CC} = 2 \left( \bar{\nu}_{eL} \gamma_\alpha e'_L + \bar{\nu}_{\mu L} \gamma_\alpha \mu'_L + \bar{\nu}_{\tau L} \gamma_\alpha \tau'_L \right). \quad (2-12)$$

El campo de los bosones  $W^\pm$  es:

$$W_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} A_\alpha^{1-i2} \quad (2-13)$$

con

$$A_\alpha^{1\pm i2} = A_\alpha^1 \pm i A_\alpha^2. \quad (2-14)$$

De forma similar la corriente  $j_\alpha^3$  es

$$j_\alpha^3 = \bar{\psi}_{lL}(x) \gamma_\alpha \frac{1}{2} \tau_3 \psi_{lL}(x) \quad (2-15)$$

$$j_\alpha^3 = \frac{1}{2} \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{lL} \gamma_\alpha \nu'_{lL} - \frac{1}{2} \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}_L \gamma_\alpha l_L \quad (2-16)$$

El primer término de (2-7) es el Lagrangiano de corrientes cargadas y el último término de esta guarda cierta similitud con la corriente electromagnética, salvo que en esta última entran campos leptónicos que son la suma de sus quiralidades izquierda y derecha mientras que en los términos de (2-16) solo entran componentes izquierdas, por lo que la interacción débil cargada no puede ser unificada con la interacción electromagnética en la base del grupo local  $SU(2)$ .

Para realizar dicha unificación se necesita ampliar el grupo base  $SU(2)$  de forma tal que surja un nuevo Lagrangiano de interacción que tenga en cuenta ambas partes, débil y electromagnética. El grupo minimal que permite hacer lo anterior es el grupo  $SU(2) \times U(1)$  donde  $U(1)$  es el grupo de hipercarga, la cual, está conectada con la carga eléctrica por medio de la relación de Gellmann-Nishijima [30]

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y, \quad (2-17)$$

donde  $Q$  es la carga eléctrica,  $I_3$  es la tercera componente del espín isotópico y  $Y$  es la hipercarga. Sabiendo que las componentes izquierdas de los neutrinos tienen carga eléctrica nula [31] e  $I_3^{\nu} = \frac{1}{2}$ , la hipercarga de estos sería  $Y_L^{\nu} = -1$ , siendo este valor el mismo para los leptones izquierdos, por lo tanto

$$Y_L^l = -1, \quad Y_R^l = -2, \quad (2-18)$$

aquí  $Y_L^l$  es la hipercarga de los dobletes leptónicos izquierdos y  $Y_R^l$  es la hipercarga de los leptones derechos. Para que el Lagrangiano (2-3) sea invariante bajo transformaciones de gauge del grupo  $SU(2) \times U(1)$  se debe exigir que la derivada covariante se transforme en

$$\partial_\alpha \psi_{lL} \longrightarrow \left( \partial_\alpha + ig \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\alpha + ig' \frac{1}{2} Y_L^l B_\alpha(x) \right) \psi_{lL} \quad l = e, \mu, \tau, \quad (2-19)$$

$$\partial_\alpha l'_R \longrightarrow \left( \partial_\alpha + ig' \frac{1}{2} Y_R^l B_\alpha(x) \right) l'_R \quad l = e, \mu, \tau. \quad (2-20)$$

$\mathbf{A}_\alpha$  y  $B_\alpha$  son los campos vectoriales gauge de  $SU(2)$  y  $U(1)$  respectivamente con  $g$  y  $g'$  las correspondientes constantes de acoplamiento. El nuevo Lagrangiano de interacción entre los campos vectoriales y leptónico viene dado como

$$\mathcal{L}_I^l = -g \mathbf{j}_\alpha(x) \mathbf{A}^\alpha(x) - g' \frac{1}{2} j_\alpha^Y B^\alpha, \quad (2-21)$$

aquí el isovector corriente  $\mathbf{j}_\alpha$  viene dado por la ecuación (2-6) y para la hipercorriente  $j_\alpha^Y$  se tiene

$$\frac{1}{2} j_\alpha^Y = \frac{1}{2} Y_L^l \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_{lL} \gamma_\alpha \psi_{lL} + \frac{1}{2} Y_R^l \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}'_R \gamma_\alpha l'_R. \quad (2-22)$$

De la relación de Gellmann-Nishijima (2-17) se deduce que la hipercorriente  $j_\alpha^Y$  está relacionada con la corriente electromagnética y la tercera componente del isovector corriente

$$\frac{1}{2} j_\alpha^Y = j_\alpha^{EM} - j_\alpha^3, \quad (2-23)$$

para el caso leptónico teniendo en cuenta la carga eléctrica nula de los neutrinos, la corriente electromagnética de los leptones cargados toma la forma

$$j_\alpha^{EM} = - \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}'_R \gamma_\alpha l'_R. \quad (2-24)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2-23), el Lagrangiano (2-21) se convierte en

$$\mathcal{L}_I^l = -g \mathbf{j}_\alpha(x) \mathbf{A}^\alpha(x) - g' (j_\alpha^{EM} - j_\alpha^3) B^\alpha. \quad (2-25)$$

## 2.2. Mecanismo de Higgs y rompimiento espontáneo de la simetría

En este punto hay que tener en cuenta que la invariancia del Lagrangiano de interacción entre leptones y los campos vectoriales bajo las transformaciones de gauge local del grupo  $SU(2) \times U(1)$ , se tiene, si los campos vectoriales gauge  $\mathbf{A}_\alpha$  y  $B_\alpha$  son no masivos. Es así que el ME incorpora un rompimiento espontáneo de la simetría a través de campos escalares que tengan ciertas propiedades de transformación que los dejen invariantes ante transformaciones locales del grupo. Para esto se asume un campo escalar de Higgs en la representación de doblete de  $SU(2)$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad (2-26)$$

donde  $\phi_+$  es el campo escalar complejo de partículas con carga eléctrica igual a  $\pm 1$  y  $\phi_0$  es el campo escalar de partículas neutras. De la ecuación (2-17) se deduce que la hipercarga del

campo  $\phi$  es igual a 1 [31].

El lagrangiano del campo de Higgs está dado por

$$\mathcal{L}_H = \partial_\alpha \phi^\dagger \partial^\alpha \phi - V(\phi^\dagger, \phi) \quad (2-27)$$

El potencial del lagrangiano de la ecuación (2-27) se escribe como

$$V(\phi^\dagger, \phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 = \lambda \left( \phi^\dagger \phi - \frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda} \quad (2-28)$$

con  $\lambda$  y  $\mu$  constantes positivas. Para asegurar la invariancia del Lagrangiano (2-27) bajo transformaciones gauge locales, la derivada covariante que aparece en este debe cambiar a

$$\partial_\alpha \phi \longrightarrow \left( \partial_\alpha + ig \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\alpha + ig' \frac{1}{2} B_\alpha \right) \phi, \quad (2-29)$$

de nuevo aquí  $\mathbf{A}_\alpha$  y  $B_\alpha$  son los campos vectoriales gauge de  $SU(2)$  y  $U(1)$  respectivamente. Realizando el cambio propuesto en la ecuación (2-29) el lagrangiano (2-27) se convierte en

$$\mathcal{L}_H = \left[ \left( \partial_\alpha + ig \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\alpha + ig' \frac{1}{2} B_\alpha \right) \phi \right]^\dagger \left( \partial^\alpha + ig \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}^\alpha + ig' \frac{1}{2} B^\alpha \right) \phi - V(\phi^\dagger, \phi). \quad (2-30)$$

El potencial (2-28) toma un mínimo cuando

$$(\phi^\dagger, \phi)_0 = \frac{v^2}{2}, \quad v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (2-31)$$

A raíz de la conservación de la carga eléctrica el valor esperado en el vacío del campo  $\phi_+$  es igual a cero mientras que el valor esperado del campo  $\phi_0$  se puede tomar de acuerdo con la ecuación (2-31) como

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2-32)$$

Escogiendo una parametrización adecuada para el campo  $\phi$  que esté de acuerdo con (2-32):

$$\phi(x) = e^{i\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2-33)$$

en dicha parametrización  $\boldsymbol{\theta}(x)$  y  $H(x)$  son funciones reales y los valores esperados en el vacío de ambas se hacen iguales a cero. Tomando el denominador gauge unitario

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2-34)$$

El Lagrangiano (2-30) debe ser invariante bajo transformaciones locales de gauge de  $SU(2) \times U(1)$ . Usando el gauge unitario en (2-30) y realizando los cálculos correspondientes:

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2} \partial_\alpha H \partial^\alpha H + \phi^\dagger \left( \frac{g}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\alpha + \frac{g'}{2} B_\alpha \right) \left( \frac{g}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}^\alpha + \frac{g'}{2} B^\alpha \right) \phi - V. \quad (2-35)$$

### 2.3. Surgimiento de las masas de los bosones $W^\pm$ y $Z^0$

Para analizar cada uno de los términos de la ecuación (2-35) se realizarán algunas consideraciones previas. Sabiendo que [31]

$$\tau_i \tau_k = \delta_{ik} + \epsilon_{ikl} \tau_l, \quad (2-36)$$

se deduce

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\alpha \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}^\alpha = \mathbf{A}_\alpha \mathbf{A}^\alpha, \quad (2-37)$$

además teniendo en cuenta el campo de los bosones cargados  $W^\pm$  en la ecuación (2-13)

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\alpha \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}^\alpha = 2W_\alpha^\dagger W^\alpha + A_\alpha^3 A^{3\alpha}. \quad (2-38)$$

Por último, considerando el campo  $\phi$  dado por (2-34)

$$\phi^\dagger \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\alpha \phi = -\frac{1}{2}(V + H)^2 A_\alpha^3. \quad (2-39)$$

Si se reemplaza (2-28), (2-34), (2-37), (2-38), (2-39) en el Lagrangiano dado por (2-35) y se realizan los cálculos correspondientes se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \frac{1}{2} \partial_\alpha H \partial^\alpha H + \frac{g^2}{4} (V + H)^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha + \frac{g^2}{8} (V + H)^2 A_\alpha^3 A^{3\alpha} - \frac{gg'}{8} (V + H)^2 A_\alpha^3 B^\alpha \\ & - \frac{gg'}{8} B_\alpha (V + H)^2 A^{3\alpha} + \frac{g'^2}{8} (v + H)^2 B_\alpha B^\alpha - \frac{\lambda}{4} (2vH + H^2)^2. \end{aligned} \quad (2-40)$$

Definiendo  $Z_\alpha$  y  $A_\alpha$  como combinaciones de los campos  $A_\alpha^3$  y  $B_\alpha$

$$Z_\alpha = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\alpha^3 - \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} B_\alpha \quad (2-41)$$

$$A_\alpha = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\alpha^3 - \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} B_\alpha \quad (2-42)$$

y reemplazándolos en (2-40), se obtiene

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2} \partial_\alpha H \partial^\alpha H + \frac{g^2}{4} (v + H)^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha + \frac{g^2 + g'^2}{8} (v + H)^2 Z_\alpha Z^\alpha - \frac{\lambda}{4} (2vH + H^2)^2. \quad (2-43)$$

El Lagrangiano (2-43) contiene los términos de masa de los campos vectoriales  $W^\alpha$  y  $Z^\alpha$  y del campo escalar  $H$ . Formando un lagrangiano de masa con dichos términos se obtendría

$$\mathcal{L}_m = m_W^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\alpha Z^\alpha - \frac{1}{2} m_H^2 H^2, \quad (2-44)$$

donde

$$m_W^2 = \frac{1}{4} g^2 v^2, \quad m_z^2 = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v^2, \quad m_H^2 = 2\lambda v^2 = 2\mu^2, \quad (2-45)$$

es decir, el campo vectorial  $W^\alpha$  después del rompimiento espontáneo de la simetría representa el campo de bosones masivos  $W^\pm$  y el campo  $Z^\alpha$  representa a los bosones masivos  $Z^0$ . Las masas de dichos campos están dadas por las ecuaciones (2-45). El campo  $A^\alpha$  permanece sin masa después de dicho rompimiento.

También se evidencia que el número de grados de libertad es el mismo antes y después del rompimiento espontáneo de la simetría ya que antes de dicho rompimiento se tenían cuatro bosones gauge no masivos, tres representados por  $W^\alpha$  y uno relacionado con  $B^\alpha$ , los cuales, aportan 2 grados de libertad cada uno, también están los bosones escalares relacionados con  $\theta_i, i = 1, 2, 3$  y  $H$ , que también son no masivos y cada uno aporta un grado de libertad para un total de doce. Después del rompimiento espontáneo de la simetría se tienen tres bosones gauge masivos ( $W^\pm$  y  $Z^0$ ), cada uno aportando tres grados de libertad, un boson gauge no masivo  $A^\alpha$  con dos y por último un boson escalar masivo  $H$  con uno, completando así los doce grados de libertad evidenciados también antes de dicho rompimiento.

El Lagrangiano dado en (2-25) debido a las transformaciones aplicadas anteriormente en (2-29) se puede escribir como

$$\mathcal{L}_I^l = \left( -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_\alpha^{CC} W^\alpha + h.c. \right) - \mathcal{L}_0^l, \quad (2-46)$$

siendo el primer término el que da cuenta de las interacciones entre los leptones y los bosones  $W^\pm$  y el segundo término tiene la forma

$$\mathcal{L}_0^l = g j_\alpha^3 A^{3\alpha} - g' \frac{1}{2} j_\alpha^Y B^\alpha, \quad (2-47)$$

y representa las interacciones entre los leptones y los campos vectoriales neutros. Teniendo en cuenta las ecuaciones (2-41), (2-42) y realizando las operaciones pertinentes, se llega a una expresión en función de  $Z^\alpha$  y  $A^\alpha$  para el Lagrangiano  $\mathcal{L}_0^l$ , la cual, toma la forma:

$$\mathcal{L}_0^l = -\frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} j_\alpha^{NC} Z^\alpha - \frac{gg' \sqrt{g^2 + g'^2}}{g^2 + g'^2} j^{EM} A^\alpha. \quad (2-48)$$

Donde

$$j_\alpha^{NC} = \left( 2j_\alpha^3 - \frac{2g'^2}{g^2 + g'^2} j^{EM} \right), \quad (2-49)$$

con  $j^{EM}$  siendo la corriente electromagnética de los leptones dada por (2-24).

El primer término de (2-48) da cuenta de la interacción entre los leptones y los bosones vectoriales neutros  $Z^0$ , este término se conoce como corriente neutra (no cambia la carga de los leptones) y antes de que el ME fuera propuesto no se tenía evidencia de esta, por lo tanto, de la unificación de la corriente cargada débil y la interacción electromagnética

sobre la base del grupo local gauge  $SU(2) \times U(1)$  surge este nuevo tipo de interacción débil, la corriente neutra junto con el boson vectorial neutro masivo que hace parte de esta, es decir,  $Z^0$ . El segundo término de (2-48) representa la interacción de los leptones con el campo vectorial no masivo  $A^\alpha$ , este podría llegar a representar el lagrangiano de la interacción electromagnética si las constantes de acoplamiento  $g$  y  $g'$  satisfacen la siguiente condición:

$$e = \frac{gg'}{g^2 + g'^2}, \quad (2-50)$$

aquí  $e$  es la carga del protón,  $A^\alpha$  es el campo electromagnético, con lo cual, dicha interacción sería invariante bajo transformaciones locales gauge del grupo  $U_{EM}(1)$ .

Introduciendo el ángulo débil  $\theta_W$  de la forma

$$\frac{g'}{g} = \tan \theta_W, \quad (2-51)$$

las ecuaciones (2-41) y (2-42) se convierten en

$$Z_W = A_\alpha^3 \cos \theta_W - B_\alpha \sin \theta_W \quad (2-52)$$

$$A_\alpha = A_\alpha^3 \sin \theta_W - B_\alpha \cos \theta_W. \quad (2-53)$$

Teniendo en cuenta (2-51) la condición de la unificación de las interacciones débil y electromagnética, dada por la ecuación (2-50) asume la forma

$$e = g \sin \theta_W \quad (2-54)$$

y el Lagrangiano (2-46) usando (2-48) es

$$\mathcal{L}_I^l = \left( -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_\alpha^{CC} W^\alpha + h.c. \right) - \frac{g}{2 \cos \theta_W} j_\alpha^{NC} Z^\alpha - e j^{EM} A^\alpha, \quad (2-55)$$

de lo cual, se puede evidenciar que el Lagrangiano de interacción entre leptones cargados y neutrinos con bosones vectoriales masivos  $W^\pm$ ,  $Z^0$  y fotones se puede escribir como la suma de tres términos, un Lagrangiano de corrientes cargadas, otro de corrientes neutras y el último correspondiente al Lagrangiano electromagnético. Recordando que  $j_\alpha^{CC}$  está dada por la ecuación (2-12), esta se puede escribir de forma más compacta como

$$j_\alpha^{CC} = 2 \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}'_{lL} \gamma_\alpha \nu'_{lL}. \quad (2-56)$$

Usando las ecuaciones (2-16) y (2-51) en la expresión para la corriente neutra (2-49)

$$j_\alpha^{NC} = \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}'_{lL} \gamma_\alpha \nu'_{lL} - \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}'_L \gamma_\alpha l'_L - 2 \sin^2 \theta_W j_\alpha^{EM}. \quad (2-57)$$

Cabe también recordar que la corriente electromagnética para la parte leptónica está dada por la ecuación (2-24).

## 2.4. Masas de leptones

Si se considera el término de masa para los leptones, este vendría dado por

$$\mathcal{L}_m = -m_l \bar{l}l = -m_l \bar{l}_L l_R + h.c., \quad (2-58)$$

sabiendo que la componente izquierda de los leptones está dada por dobletes de  $SU(2)$  y las componentes derechas de estos son singletes del mismo grupo, los términos de masa no son invariantes bajo una transformación de gauge local. Las masas de los leptones surgen en el ME debido al rompimiento espontaneo de la simetría y a diferencia de los bosones vectoriales masivos  $W^\pm$  y  $Z^0$  no hay restricciones en sus masas, por ende, las masas de los leptones son parámetros libres.

Considerando ahora el Lagrangiano de Yukawa correspondiente a la interacción entre los leptones y el campo de Higgs invariante bajo el gauge local del grupo  $SU(2) \times U(1)$

$$\mathcal{L}_Y^{lep} = -\frac{\sqrt{2}}{v} \sum_{l,l'} \bar{\psi}_{lL} M_W^{lep} l'_R \phi + h.c., \quad (2-59)$$

donde  $M_W^{lep}$  es una matriz compleja  $3 \times 3$  y  $\phi$  es el doblete del campo de Higgs. Acto seguido, si consideramos el mismo Lagrangiano pero después del rompimiento espontáneo de la simetría usando la ecuación (2-32) para el campo de Higgs

$$\mathcal{L}_Y^l = -\bar{L}'_L M^l L'_R \left(1 + \frac{H}{v}\right) + h.c. \quad (2-60)$$

con

$$L'_{L,R} = \begin{pmatrix} e'_{L,R} \\ \mu'_{L,R} \\ \tau'_{L,R} \end{pmatrix}, \quad (2-61)$$

se puede evidenciar que el primer término de la ecuación (2-60) es el término de masa para los leptones cargados, mientras que el segundo término da cuenta de las interacciones entre leptones cargados y el campo escalar de Higgs. Diagonalizando la matriz  $M^l$  usando una transformación biunitaria

$$M^l = U_L m^l U_R^\dagger, \quad (2-62)$$

en la que las matrices  $U_L$  y  $U_R$  son matrices unitarias  $3 \times 3$  y  $m^l$  es una matriz diagonal con elementos en su diagonal principal positivos. Usando dicha transformación biunitaria (2-62) en el Lagrangiano de Yukawa dado por (2-60)

$$\mathcal{L}_Y^l = -\bar{L}'_L m^l L_R \left(1 + \frac{H}{v}\right) + h.c., \quad (2-63)$$

donde

$$\bar{L}'_L = \bar{L}'_L U_L, \quad L_R = U_R^\dagger L'_R. \quad (2-64)$$

De la ecuación (2-63) se puede observar que el término de masa tiene componentes leptónicas izquierdas y derechas, calculando el hermitico conjugado de este término de masa se obtendría

$$(\bar{L}_L m^l L_R)^\dagger = \bar{L}_R m^l L_L, \quad (2-65)$$

por lo tanto, la ecuación (2-63) quedaría

$$\mathcal{L}_Y^l = - \left(1 + \frac{H}{v}\right) (\bar{L}_L m^l L_R + \bar{L}_R m^l L_L). \quad (2-66)$$

Ahora, si se considera un término con quiralidades iguales del tipo  $\bar{L}_L m^l L_L$  se puede ver que este se anula de la siguiente manera:

$$-\bar{L}_L m^l L_L = -L^\dagger \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)^\dagger \gamma^0 m^l \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) L \gamma^0 \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) = -m^l L^\dagger \left[\frac{1-(\gamma^5)^2}{2}\right] \gamma^0 L = 0. \quad (2-67)$$

Para llegar al anterior resultado se usó la definición de la componente quiral izquierda y la relación de anticonmutación de las matrices de Dirac dadas por

$$L_L = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) L \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0. \quad (2-68)$$

Si a la ecuación (2-66) se le suman dos términos del tipo considerado en (2-67) se llega a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^l &= - \left(1 + \frac{H}{v}\right) (\bar{L}_L m^l L_R + \bar{L}_R m^l L_L + \bar{L}_L m^l L_L + \bar{L}_R m^l L_R) \\ \mathcal{L}_Y^l &= - \left(1 + \frac{H}{v}\right) (\bar{L}_L + \bar{L}_R) m^l (L_L + L_R) \\ \mathcal{L}_Y^l &= - \left(1 + \frac{H}{v}\right) \bar{L} m^l L, \end{aligned} \quad (2-69)$$

con

$$L = L_L + L_R = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}, \quad m^l = \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}. \quad (2-70)$$

También el Lagrangiano (2-69) puede escribirse como

$$\mathcal{L}_Y^l = - \left(1 + \frac{H}{v}\right) \sum_{l=e,\mu,\tau} m^l \bar{l}(x) l(x), \quad (2-71)$$

con  $l(x)$  el campo leptónico con masa  $m^l$  ( $l = e, \mu, \tau$ ). Escribiendo la corriente leptónica cargada (2-56) de forma matricial con ayuda de (2-61)

$$j_\alpha^{CC} = 2\bar{\nu}_L^\dagger(x) \gamma_\alpha L_l(x), \quad (2-72)$$

	$\nu_e, e^-$	$\nu_\mu, \mu^-$	$\nu_\tau, \tau^-$	q, W, Z, $\gamma$
$L_e$	1	0	0	0
$L_\mu$	0	1	0	0
$L_\tau$	0	0	1	0

**Tabla 2-1.:** Números leptónicos de diferentes partículas [30].

teniendo en cuenta que

$$\nu'_L = \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ \nu'_{\mu L} \\ \nu'_{\tau L} \end{pmatrix}. \quad (2-73)$$

Con ayuda de (2-64) la ecuación (2-72) se convierte en

$$j_\alpha^{CC}(x) = 2\bar{\nu}_L(x)\gamma_\alpha L_L(x) = 2 \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{lL}(x)\gamma_\alpha l_L(x) \quad (2-74)$$

y

$$\nu_L = U_L^\dagger \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}. \quad (2-75)$$

Realizando un proceso similar al anterior para la corriente electromagnética (2-24) con ayuda de (2-64) y (2-70)

$$j_\alpha^{EM}(x) = -\bar{L}'(x)\gamma_\alpha L'(x) = -\bar{L}(x)\gamma_\alpha L(x) = - \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}(x)\gamma_\alpha l(x). \quad (2-76)$$

Escribiendo también la corriente neutral (2-57) de forma matricial

$$j_\alpha^{NC}(x) = \bar{\nu}'_L(x)\gamma_\alpha \nu'_L(x) - \bar{L}'(x)\gamma_\alpha L'(x) - 2 \text{sen}^2 \theta_W j_\alpha^{EM}(x), \quad (2-77)$$

que con ayuda de (2-64) y (2-75) se convierte en:

$$j_\alpha^{NC}(x) = \bar{\nu}_L(x)\gamma_\alpha \nu_L(x) - \bar{L}(x)\gamma_\alpha L(x) - 2 \text{sen}^2 \theta_W j_\alpha^{EM}(x)$$

$$j_\alpha^{NC}(x) = \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{lL}(x)\gamma_\alpha \nu_{lL}(x) - \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}_L(x)\gamma_\alpha l_L(x) - 2 \text{sen}^2 \theta_W j_\alpha^{EM}(x) \quad (2-78)$$

donde  $j_\alpha^{EM}(x)$  está dada por la ecuación (2-76).

Por último, se puede reescribir también la parte cinética del Lagrangiano para leptones cargados y neutrinos como

$$\mathcal{L}_k^l = \bar{\nu}_L^l(x) i \gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_L^l(x) + \bar{L}_L^l(x) i \gamma^\alpha \partial_\alpha L_L^l(x)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k^l &= \bar{\nu}_L(x) i\gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_L(x) + \bar{L}_L(x) i\gamma^\alpha \partial_\alpha L_L(x) \\ \mathcal{L}_k^l &= \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{lL}(x) i\gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_{lL}(x) + \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}(x) i\gamma^\alpha \partial_\alpha l(x).\end{aligned}\quad (2-79)$$

En este punto se puede evidenciar que en el Lagrangiano del ME solo entran las componentes izquierdas de los neutrinos, también, debido al caracter de doblete del grupo  $SU(2)$  del campo escalar de Higgs se evidencia la falta de un término de masa para estos, por ende, en el ME los neutrinos son no masivos.

## 2.5. Conservación del número leptónico

El Lagrangiano del ME con neutrinos no masivos es invariante bajo transformaciones globales gauge dadas por

$$\nu'_{lL}(x) = e^{i\Lambda_l} \nu_{lL}(x), \quad l'(x) = e^{i\Lambda_l} l(x), \quad q'(x) \rightarrow q(x), \quad l = e, \mu, \tau, \quad (2-80)$$

con  $\Lambda_l$  una constante arbitraria de fase y  $q(x)$  el campo del  $q$ -quark con masa  $m_q$  ( $q = u, d, c, s, t, b$ ). Debido a la invariancia mencionada en (2-80) se da la conservación de los números leptonicos electrónico  $L_e$ , muónico  $L_\mu$  y tauónico  $L_\tau$  definidos en la tabla 2-1, tal que:

$$\sum L_e = \text{constante}, \quad \sum L_\mu = \text{constante}, \quad \sum L_\tau = \text{constante}. \quad (2-81)$$

Las antipartículas llevan el mismo número leptónico que las partículas pero de signo opuesto. Esta conservación del número leptónico se evidencia, por ejemplo, en los decaimientos de corriente cargada, en los cuales cuando decae un antimuon  $\mu^+$  se produce un antineutrino muónico  $\bar{\nu}_\mu$  o por ejemplo, en un proceso de interacción de corriente cargada, la interacción de un antineutrino electrónico  $\bar{\nu}_e$  produce un positrón  $e^+$  y así sucesivamente. Sin embargo en el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos esta conservación se ve afectada ya que para que se produzcan dichas oscilaciones los neutrinos deben ser masivos originando las transiciones entre diferentes sabores.

En la tabla 2-2 se muestran las masas de las partículas pertenecientes a cada generación, la masa de los neutrinos no se ha podido medir de forma directa pero si hay cotas superiores a dichos valores [14]. En dicha tabla se puede evidenciar que las masas de los quarks y los leptones cargados de una misma familia son aproximadamente del mismo orden de magnitud, caso contrario al de los neutrinos, por ejemplo, para la primera familia el orden de masa del electrón es de los  $MeV$  mientras que para el neutrino es del orden de los  $eV$ , es decir, cinco ordenes de magnitud menor que la del leptón cargado de la misma familia, situaciones similares se presentan en las otras dos generaciones. Dicha diferencia no tiene una explicación en el ME, lo cual da un indicio adicional de que debe haber una teoría más allá de dicho modelo que también de cuenta de estos aspectos. En el próximo capítulo se consideran los aspectos

Familia	Tipo up	Tipo down	Leptón	Neutrino
I	$m_u = 2.16^{+0.49}_{-0.26}$ MeV	$m_d = 4.67^{+0.48}_{-0.17}$ MeV	$m_e = 0.511$ MeV	$m_{\nu_e} < 1.1$ eV
II	$m_c = 1.27 \pm 0.02$ GeV	$m_s = 93^{+11}_{-5}$ MeV	$m_\mu = 105.688$ MeV	$m_{\nu_\mu} < 0.19$ MeV
III	$m_t = 172.76 \pm 0.30$ GeV	$m_b = 4.18^{+0.03}_{-0.02}$ GeV	$m_\tau = 1776.86 \pm 0.12$ MeV	$m_{\nu_\tau} < 18.2$ MeV

**Tabla 2-2.:** Masas de quarks y leptones [14].

teóricos de un mecanismo de generación de masa de neutrinos conocido como seesaw, en el cual surge dicha masa de manera natural.

## 3. Términos de masa para los neutrinos

El término de masa para los neutrinos es parte central de su estudio ya que su determinación podría dar luces acerca de la naturaleza del neutrino (Dirac o Majorana), su masa y la existencia de neutrinos estériles. En el capítulo anterior se pudo evidenciar el surgimiento de términos de masa leptónicos a raíz del rompimiento de simetrías subyacentes. Se usará el hecho de que los productos que aparecen en el término de masa deben ser productos invariantes de Lorentz que involucran las componentes izquierdas y derechas de los campos de neutrino debido a que dichos campos son de espín 1/2. Cabe recordar que las componentes izquierdas y derechas de campos espinoriales  $\psi$  tienen la forma:

$$\psi_L = \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \psi, \quad \psi_R = \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \psi \quad (3-1)$$

y el campo  $\psi$  se escribe como la suma de dichas componentes, es decir,  $\psi = \psi_L + \psi_R$ . Si las ecuaciones (3-1) se multiplican por la izquierda por  $\gamma^5$  se obtiene:

$$\gamma^5 \psi_L = -\psi_L, \quad \gamma^5 \psi_R = \psi_R. \quad (3-2)$$

Las medidas más precisas del número de tipos de neutrinos ligeros vienen de estudios de producción de  $Z^0$  en colisiones  $ee^-$  como los cuatro experimentos localizados en LEP (ALEPH, DELPHI, L3, OPAL) en el CERN, en los cuales, se ha medido el ancho de desintegración invisible de dicho bosón con una precisión inferior al 1%, de lo que se puede inferir la existencia de solo tres tipos de sabores de neutrinos en la naturaleza [32, 33]. Cabe recordar que estos intervienen en procesos de corrientes cargadas y neutras debidas a interacciones electrodébiles mencionadas en las ecuaciones (2-56) y (2-57). Dichos campos de neutrino también deben entrar en los términos de masa teniendo en cuenta que en la estructura de estos se deben tener en cuenta otros campos de neutrino (si los hay) y la conservación del número leptónico total  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ .

### 3.1. Neutrinos de Dirac

Para generar el término de masa de Dirac se tiene en cuenta que además de los campos izquierdos de neutrino  $\nu_{lL}$  (denominados también neutrinos activos ya que hacen parte de corrientes cargadas y neutras) se deben introducir los campos de neutrino con quiralidad derecha  $\nu_{lR}$  o neutrinos estériles (no participan en las corrientes anteriormente mencionadas).

Con esto el término de masa de Dirac toma la forma

$$\mathcal{L}^D(x) = - \sum_{l'l} \bar{\nu}_{l'L}(x) M_{l'l}^D \nu_{lR}(x) + h.c. \quad l, l' = e, \mu, \tau \quad (3-3)$$

y  $M_{l'l}^D$  siendo una matriz compleja  $3 \times 3$ . El término de masa dado anteriormente es invariante bajo transformaciones globales gauge dadas por

$$\nu'_{lL}(x) = e^{i\Lambda} \nu_{lL}(x), \quad \nu'_{lR}(x) = e^{i\Lambda} \nu_{lR}(x), \quad l'(x) = e^{i\Lambda} l(x), \quad (3-4)$$

donde  $\Lambda$  es una constante de fase arbitraria. Gracias a la anterior invariancia el número leptónico total se conserva. La matriz  $M^D$  puede ser diagonalizada usando la transformación biunitaria

$$M^D = U^\dagger m V, \quad (3-5)$$

aquí  $U$  y  $V$  son matrices unitarias,  $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$  y  $m_i > 0$ . De (3-3) y (3-5) se encuentra que

$$\nu_{lL}(x) = \sum_{i=1}^3 U_{li} \nu_{iL}(x) \quad (3-6)$$

$$\nu_{lR}(x) = \sum_{i=1}^3 V_{li} \nu_{iR}(x), \quad (3-7)$$

con  $l$  variando entre los tres sabores leptónicos ( $l = e, \mu, \tau$ ). De acuerdo con (3-6) y (3-7), el término de masa se convierte en

$$\mathcal{L}^D(x) = - \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i(x) \nu_i(x). \quad (3-8)$$

De (3-6) y (3-8) se puede ver que  $\nu_i$  es el campo de neutrino con masas  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  y también que el campo de neutrino con quiralidad izquierda  $\nu_{lL}$  es un campo mezclado, es decir, que se puede escribir como una combinación lineal de los campos  $\nu_{iL}$ . La matriz unitaria  $U$  de dimensión  $3 \times 3$  en (3-6) es conocida como matriz de mezcla de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata. Los neutrinos  $\nu_i$  tienen la misma masa que su correspondiente antipartícula, los antineutrinos. La diferencia entre estos dos radica en el número leptónico, el cual, toma un valor de uno para los neutrinos  $L(\nu_i) = 1$  y menos uno para los antineutrinos  $L(\bar{\nu}_i) = -1$ .

## 3.2. Neutrinos de Majorana

Como se mencionó en la sección anterior, un término de masa es un producto invariante de Lorentz en el que intervienen las componentes izquierdas y derechas de los campos en consideración. Definiendo los campos conjugados de neutrinos como

$$(\nu_{lL})^c = C \bar{\nu}_{lL}^T, \quad (\nu_{lR})^c = C \bar{\nu}_{lR}^T, \quad (3-9)$$

donde  $C$  es la matriz de conjugación de carga que satisface las siguientes relaciones

$$C\gamma_\alpha^T C^{-1} = -\gamma_\alpha, \quad C^T = -C. \quad (3-10)$$

De la ecuación (3-2) se tiene para las componentes quirales de los neutrinos

$$\gamma^5 \nu_{iL} = -\nu_{iL}, \quad \gamma^5 \nu_{iR} = \nu_{iR}. \quad (3-11)$$

Sacando el hermitico conjugado de la primera de las relaciones (3-11) y posteriormente multiplicandola por  $\gamma^0$  a la derecha

$$\bar{\nu}_{iL} \gamma^5 = \bar{\nu}_{iL}. \quad (3-12)$$

Transponiendo la ecuación (3-12) y multiplicando a la izquierda por la matriz  $C$

$$\gamma_5 (\nu_{iL})^c = (\nu_{iL})^c \quad (3-13)$$

Realizando el mismo proceso para la componente derecha de la ecuación (3-11) se obtiene

$$\gamma_5 (\nu_{iR})^c = -(\nu_{iR})^c. \quad (3-14)$$

Comparando (3-13) y (3-14) con (3-11) se puede evidenciar que  $(\nu_{iL})^c$  es la componente derecha del campo del neutrino mientras que  $(\nu_{iR})^c$  es su componente izquierda. De (3-9) y (3-10) se tiene que:

$$\overline{(\nu_{iL})^c} = -\nu_{iL}^T C^{-1}, \quad \overline{(\nu_{iR})^c} = -\nu_{iR}^T C^{-1}. \quad (3-15)$$

Sabiendo que  $(\nu_{iL})^c$  es la componente derecha del campo de neutrino se puede construir un término de masa para este en el cual solo participen las componentes de sabor activas, es decir:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum_{i,l} \bar{\nu}_{iL} M_{il}^M (\nu_{lL})^c + h.c. = -\frac{1}{2} \sum_{i,l} \bar{\nu}_{iL} M_{il}^M C \bar{\nu}_{lL}^T + h.c., \quad (3-16)$$

con  $M^M$  una matriz compleja no diagonal de dimensión  $3 \times 3$ . Escribiendo dicho término de masa en forma matricial

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^c + h.c., \quad (3-17)$$

donde

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}. \quad (3-18)$$

Con ayuda de (3-9) y (3-10) se encuentra

$$\bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^c = \bar{\nu}_L M^M C \bar{\nu}_L^T = -\bar{\nu}_L (M^M)^T C^T \bar{\nu}_L^T = \bar{\nu}_L (M^M)^T (\nu_L)^c, \quad (3-19)$$

aquí se puede observar que  $M^M = (M^M)^T$ , es decir, que  $M$  es una matriz simétrica. Diagonalizando dicha matriz se tiene que

$$M^M = U m U^T, \quad (3-20)$$

de forma similar a la sección anterior  $U$  es una matriz unitaria,  $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$  y  $m_i > 0$ . Usando (3-20) en (3-17), el término de masa se puede escribir como

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L U m U^T (\nu_L)^c + h.c. = -\frac{1}{2} \overline{U^\dagger \nu_L} m (U^\dagger \nu_L)^c - \frac{1}{2} \overline{(U^\dagger \nu_L)^c} m U^\dagger \nu_L. \quad (3-21)$$

Con ayuda de la ecuación (3-21) el término de masa se convierte en

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\nu}^M m \nu^M, \quad (3-22)$$

donde

$$\nu^M = U^\dagger \nu_L + (U^\dagger \nu_L)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (3-23)$$

De (3-22) y (3-23) se puede escribir el término de masa en función de los campos de neutrino  $\nu_i$  con masas  $m_i$  como:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i. \quad (3-24)$$

La ecuación (3-23) también muestra que  $(\nu^M)^c = \nu^M$  con lo que el campo de neutrinos  $\nu_i$  cumple una relación similar, es decir,  $(\nu_i)^c = \nu_i$ .

Considerando un campo de Dirac libre se tiene que su operador de campo viene dado por [34]

$$\psi^D(x) = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2E_p}(2\pi)^3} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left( f_s(p) u_s(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{f}_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ip \cdot x} \right) \quad (3-25)$$

Dicha expresión viene dada en términos del operador  $f_s(p)$  que aniquila un estado de partícula simple de momentum  $p$  y componente de espín  $s$  en la dirección del momentum. Similarmente  $\hat{f}_s^\dagger(p)$  aniquila, es decir,  $\hat{f}_s^\dagger(p)$  crea un estado de antipartícula. Los espinores  $u_s(p)$  y  $v_s(p)$  son las soluciones de onda plana correspondientes a energías positivas y negativas respectivamente. Sabiendo también que la expansión de onda plana del operador de campo de Majorana es

$$\psi^M(x) = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2E_p}(2\pi)^3} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left( f_s(p) u_s(p) e^{-ip \cdot x} + \lambda f_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (3-26)$$

escribiendo la ecuación (3-9) para  $\psi$  como

$$(\psi(x))^c \equiv \gamma_0 C \psi^*(x) \quad (3-27)$$

y reemplazando (3-27) en (3-26)

$$(\psi(x))^c = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2E_p}(2\pi)^3} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \gamma^0 C \left( f_s^\dagger(p) u_s^*(p) e^{ip \cdot x} + \lambda^* f_s(p) v_s^*(p) e^{-ip \cdot x} \right) \quad (3-28)$$

$$\begin{aligned}
(\psi(x))^c &= \lambda^* \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}(2\pi)^3} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} (\lambda f_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ip \cdot x} + f_s(p) u_s(p) e^{-ip \cdot x}) \\
(\psi(x))^c &= \lambda^* \psi(x).
\end{aligned} \tag{3-29}$$

Aquí se ha usado el hecho de que  $|\lambda|^2 = 1$  con las relaciones espinoriales

$$\begin{aligned}
\gamma^0 C u_s^*(p) &= v_s(p) \\
\gamma^0 C v_s^*(p) &= u_s(p),
\end{aligned} \tag{3-30}$$

las cuales pueden ser probadas después de definir  $C$  explícitamente. La ecuación (3-29) indica que el campo  $\psi$  y su campo conjugado  $(\psi(x))^c$  difieren solo en un factor de fase, esto también se evidencia en la ecuación (3-26) ya que el factor  $\lambda f_s^\dagger(p)$  aparece justo donde  $\hat{f}_s^\dagger(p)$  en la expresión para el campo de Dirac, lo cual indica que la antipartícula es lo mismo que la partícula excepto por una fase  $\lambda$ .

El campo  $\nu^M$  es la suma de sus componentes izquierdas y derechas

$$\nu^M(x) = \nu_L^M(x) + \nu_R^M(x), \tag{3-31}$$

si se compara (3-23) y (3-31) se encuentra que

$$\nu_L^M(x) = U^\dagger \nu_L(x), \quad \nu_R^M(x) = (U^\dagger \nu_L(x))^c. \tag{3-32}$$

De lo que se concluye que las componentes izquierdas y derechas del campo de Majorana están conectadas entre sí de la forma

$$\nu_R^M(x) = (\nu_L^M(x))^c. \tag{3-33}$$

Usando la primera de las relaciones (3-1) y (3-9) se puede calcular que

$$(\nu_{iL})^c = \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \nu_i \right)^c = C \left( \left[ \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \nu_i \right]^\dagger \gamma^0 \right)^T = C \left( \nu_i^\dagger \left[ \frac{1 - (\gamma^5)^\dagger}{2} \right] \gamma^0 \right)^T = \nu_{iR} \tag{3-34}$$

La ecuación (3-34) muestra la diferencia entre los campos de Dirac y Majorana, en los primeros, las componentes izquierdas y derechas son independientes entre sí, mientras que los campos quirales de Majorana guardan dicha relación. Considerando la transformación global gauge dada por

$$\nu'_L(x) = e^{i\Lambda} \nu_L(x), \tag{3-35}$$

con  $\Lambda$  una constante arbitraria, se tiene que el conjugado de dicha transformación es

$$(\nu'_L(x))^c = e^{-i\Lambda} (\nu_L(x))^c, \tag{3-36}$$

de lo cual se evidencia que el término de masa dado por (3-17) no es invariante bajo dicha transformación, lo que implica que no hay una conservación del número leptónico total y por lo tanto, no hay una manera de distinguir los neutrinos de los antineutrinos. De (3-23) se encuentra que

$$\nu_L(x) = U\nu_L^M(x), \quad (3-37)$$

con lo cual

$$\nu_{iL}(x) = \sum_{i=1}^3 U_{ii}\nu_{iL}(x). \quad (3-38)$$

De lo anterior se deduce que las componentes izquierdas de los campos de neutrinos que entran en las interacciones de corrientes cargadas y neutras generadas por interacciones electrodébiles están relacionadas con los campos de neutrino de Majorana de la forma mostrada en la ecuación (3-38).

### 3.3. Término de masa de Dirac-Majorana

El término de masa más general que puede ser escrito para los campos de neutrino en el cual intervienen sus componentes izquierdas y derechas es el siguiente:

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{\nu}_L M_L^M (\nu_L)^c - \frac{1}{2}(\nu_R)^c M_R^M \nu_R - \bar{\nu}_L M^D \nu_R + h.c.. \quad (3-39)$$

Donde  $M_L^M$  y  $M_R^M$  son matrices complejas no diagonales y simétricas de dimensión  $3 \times 3$ ,  $M^D$  es una matriz compleja no diagonal de dimensión idéntica a las matrices anteriores,  $\nu_L$  es un vector columna dado por la ecuación (3-18) y  $\nu_R$  toma la forma

$$\nu_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix}. \quad (3-40)$$

El término de masa de la ecuación (3-39) se denomina término de masa de Dirac-Majorana ya que corresponde a la suma de tres términos de masa, dos que contienen a los campos izquierdos y derechos de Majorana y otro que es el término de masa de Dirac. De lo discutido anteriormente se evidencia que dicho Lagrangiano no es invariante bajo una transformación gauge global lo que implica que el número leptónico total no se conserva, debido a esto es de esperar que los campos con masas definidas que se obtienen con dicho Lagrangiano sean campos de Majorana.

Para el proceso de diagonalización del término de masa se escribe (3-39) de forma matricial

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{n}_L M^{D+M} (n_L)^c + h.c., \quad (3-41)$$

con

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} \quad (3-42)$$

y

$$M^{D+M} = \begin{pmatrix} M_L^M & M^D \\ (M^D)^T & M_R^M \end{pmatrix} \quad (3-43)$$

es una matriz simétrica  $6 \times 6$ . Cabe recalcar que para la deducción de la ecuación (3-41) se tuvo en cuenta que

$$\bar{\nu}_L M^D \nu_R = -(\nu_R)^T (M^D)^T (\bar{\nu}_L)^T = \overline{(\nu_R)^c} (M^D)^T (\nu_L)^c. \quad (3-44)$$

La matriz  $M^{D+M}$  se diagonaliza de manera similar a las matrices vistas en secciones anteriores, es decir, esta se puede escribir como

$$M^{D+M} = U m U^T \quad (3-45)$$

con  $U$  siendo una matriz unitaria y  $m$  una matriz diagonal de dimensión  $6 \times 6$  con  $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$ ,  $i, k = (1, 2, 3, \dots, 6)$  y  $m_i > 0$ . Reemplazando la ecuación (3-45) en (3-41)

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \overline{U^\dagger n_L} m (U^\dagger n_L)^c + h.c. = -\frac{1}{2} \bar{\nu}^M m \nu^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 m_i \bar{\nu}_i \nu_i. \quad (3-46)$$

Para obtener la primera igualdad de la ecuación inmediatamente anterior se realizó un proceso similar al desarrollado para la expresión (3-24). También se tomó  $\nu^M$  como

$$\nu^M = \nu_L^M + (\nu_L^M)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_6 \end{pmatrix} \quad (3-47)$$

y

$$\nu_L^M = U^\dagger n_L. \quad (3-48)$$

De (3-47) se deduce

$$(\nu^M)^c = \nu^M, \quad \nu_i^c = \nu_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 6). \quad (3-49)$$

con lo que se puede evidenciar que  $\nu_i$  es el campo de partículas de Majorana con masa  $m_i$ . Adicionalmente la relación entre los campos izquierdos de majorana  $\nu_{iL}$  y los campos  $\nu_{iL}$  y  $(\nu_{iR})^c$  es

$$\nu_{iL}(x) = \sum_{i=1}^6 U_{ii} \nu_{iL}(x), \quad (\nu_{iR}(x))^c = \sum_{i=1}^6 U_{ii} \nu_{iL}(x). \quad (3-50)$$

De lo que se concluye que para el término de masa de Dirac-Majorana los campos de sabor  $\nu_{iL}$  y  $(\nu_{iR}(x))^c$  son combinaciones lineales de seis campos de neutrinos de Majorana  $\nu_i$  con masa  $m_i$ .

### 3.4. Mecanismo seesaw para la generación de masas de neutrinos

El mecanismo seesaw es un mecanismo propuesto a finales de los años setenta con el fin de dar cuenta de la generación de la masa de los neutrinos de manera natural [30]. Para hablar de dicho mecanismo de manera más detallada se tratarán dos casos particulares, el caso para una sola familia de partículas y luego la generalización de este al caso de tres familias. Por último, al lagrangiano del modelo estándar se le adiciona un término efectivo con el fin de describir brevemente los tres tipos de mecanismo seesaw existentes.

#### 3.4.1. Término de masa de Dirac-Majorana para el caso de una familia de partículas

En este caso vamos a tomar un término de masa del tipo Dirac-Majorana, el cual, para una sola familia de partículas sería

$$\mathcal{L}^{D+M} = \frac{1}{2}m_L\bar{\nu}_L(\nu_L)^c - \frac{1}{2}m_R\overline{\nu_R^c}\nu_R - \bar{\nu}_L m_D \nu_R + h.c., \quad (3-51)$$

aquí,  $m_L$ ,  $m_R$  y  $m_D$  son números reales y se asume la invariancia  $CP$  en el sector leptónico. Escribiendo (3-51) de forma matricial

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{n}_L M^{D+M} (n_L)^c + h.c., \quad (3-52)$$

con

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix}, \quad M^{D+M} = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \quad (3-53)$$

Para ver la equivalencia entre las relaciones (3-51) y (3-52) se usó la ecuación (3-53). Por conveniencia se define la matriz  $M^{D+M}$  como

$$M^{D+M} = \frac{1}{2}\text{Tr}M^{D+M} + M, \quad (3-54)$$

siendo  $M$  una matriz de traza nula que toma la forma

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(m_R - m_L) & m_D \\ m_D & \frac{1}{2}(m_R - m_L) \end{pmatrix}. \quad (3-55)$$

Diagonalizando la matriz  $M$  por medio de la transformación ortogonal

$$M = O\bar{m}O^T, \quad (3-56)$$

aquí  $O$  es una matriz ortogonal que puede tomar la forma conocida

$$O = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3-57)$$

y  $\bar{m}$  es una matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de  $M$ . Para calcular dichos valores propios se halla el polinomio característico de esta  $\text{Det}(M - \bar{m}I)$  y se iguala a cero siendo  $\bar{m}$  sus valores propios:

$$\bar{m}_{1,2} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}. \quad (3-58)$$

Calculando el producto indicado en la relación (3-56)

$$O\bar{m}O^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) & \sin \theta \cos \theta \sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} \\ \sin \theta \cos \theta \sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} & \frac{1}{2} \sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix}. \quad (3-59)$$

Comparando (3-55) y (3-59) se encuentran algunas relaciones para el ángulo  $\theta$

$$\cos 2\theta = \frac{m_R - m_L}{\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}}, \quad \tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L}. \quad (3-60)$$

Hallando los valores propios de  $M^{D+M}$  mediante un proceso similar

$$m'_{1,2} = \frac{1}{2}(m_R + m_L) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} \quad (3-61)$$

Debido a que los valores propios de  $M^{D+M}$  calculados en (3-61) pueden ser negativos

$$m'_i = m_i \eta_i \quad (3-62)$$

donde  $m_i = |m'_i|$  y  $\eta_i = \pm 1$ . Debido a lo inmediatamente anterior

$$M^{D+M} = Om\eta O^T = O\eta^{1/2}m\eta^{1/2}O^T = UmU^T \quad (3-63)$$

con  $U = O\eta^{1/2}$  una matriz unitaria. Reemplazando (3-63) en (3-52):

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{\nu}^M m \nu^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} m_i \bar{\nu}_i \nu_i, \quad (3-64)$$

aquí

$$\nu^M = U^\dagger n_L + (U^\dagger n_L)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (3-65)$$

con  $\nu_1$  y  $\nu_2$  siendo campos de Majorana con masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. De (3-65) también se deduce que

$$\nu_i^c = \nu_i. \quad (3-66)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3-53), (3-57) y (3-65) se tiene:

$$\begin{aligned} \nu_L &= \cos \theta \sqrt{\eta_1} \nu_{1L} + \sin \theta \sqrt{\eta_2} \nu_{2L} \\ (\nu_R)^c &= -\sin \theta \sqrt{\eta_1} \nu_{1L} + \cos \theta \sqrt{\eta_2} \nu_{2L}. \end{aligned} \quad (3-67)$$

De (3-60) y (3-61) se puede evidenciar que el ángulo de mezcla  $\theta$  y las masas de los neutrinos  $m_1$  y  $m_2$  dependen de tres constantes reales  $m_R$ ,  $m_L$  y  $M_D$ . La constante  $\eta_i$  está relacionada con la violación de CP.

### 3.4.2. Mecanismo seesaw para el caso de una familia de partículas

Teniendo en cuenta que para el caso de una familia de partículas desarrollado en el apartado anterior los parametros reales  $m_L$ ,  $m_R$  y  $m_D$  caracterizan a los términos de masa izquierdos y derechos de Majorana junto con el término de masa de Dirac respectivamente, se realizarán las siguientes suposiciones para introducir el mecanismo seesaw:

- El término de masa izquierdo de Majorana no existe, es decir,  $m_L = 0$ .
- El término de masa de Dirac  $m_D$  es generado por un mecanismo estándar de Higgs, dicho de otra manera,  $m_D$  es del orden de la masa del quark o del leptón de la familia considerada.
- El término de masa de Majorana derecho rompe la conservación del número leptónico total por lo que se supondrá que dicho rompimiento lo hace a escalas de energía muy superiores a la escala electrodébil, por lo tanto,  $m_R \equiv M_R \gg m_D$ .

Aplicando los anteriores supuestos en la ecuación (3-61) se obtiene para las masas de los neutrinos

$$m_1 = \left| \frac{1}{2}m_R - \frac{1}{2}\sqrt{m_R^2 + 4m_D^2} \right| \simeq \left| \frac{1}{2}M_R - \frac{1}{2}M_R - \frac{1}{4}M_R \left( \frac{4m_D^2}{M_R^2} \right) \right| \simeq \frac{m_D^2}{M_R}. \quad (3-68)$$

Realizando un proceso similar para  $m_2$

$$m_2 \simeq M_R \gg m_D, \quad (3-69)$$

el ángulo de mezcla es

$$\theta \simeq \frac{m_D}{M_R} \ll 1. \quad (3-70)$$

Tomando  $\eta_1 = -1$  y  $\eta_2 = 1$

$$\begin{aligned} \nu_L &\simeq i\nu_{1L} + \frac{m_D}{M_R}\nu_{2L} \\ (\nu_R)^c &\simeq -i\frac{m_D}{M_R}\nu_{1L} + \nu_{2L}. \end{aligned} \quad (3-71)$$

De (3-68) se puede ver que la masa del neutrino  $\nu_1$  es pequeña debido a la violación del número leptónico que se da a escalas de energía superiores a la escala electrodébil y que es generada por  $M_R$  y se conoce como seesaw. Para evidenciar numericamente lo anterior, si se toma la masa del quark top que aparece en la tabla 2-2 ( $m_t \simeq 170 \text{ GeV}$ ) y la cota superior de la masa del neutrino más ligero ( $m_1 < 0,086 \text{ eV}$ ) [35]:

$$M_R \simeq \frac{m_D^2}{m_1} \simeq 10^{14} \text{ GeV} \quad (3-72)$$

### 3.4.3. Mecanismo seesaw para el caso de tres familias de partículas

Para el caso de tres familias la matriz  $M$  toma la forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ (m_D)^T & M_R \end{pmatrix}, \quad (3-73)$$

con  $m_D$  una matriz  $3 \times 3$  y  $M_R$  una matriz simétrica de la misma dimensión. Introduciendo la matriz  $m$  como

$$m = U^T M U \quad (3-74)$$

y

$$U = \begin{pmatrix} 1 & (m_D^T)^\dagger (M_R^{-1})^\dagger \\ -M_R^{-1} m_D^T & 1 \end{pmatrix} \quad (3-75)$$

es una matriz unitaria  $3 \times 3$  en una aproximación de primer orden del término  $\frac{m_D}{M_R}$ . En dicha aproximación la matriz  $m$  toma la forma

$$m \simeq \begin{pmatrix} -m_D (M_R^{-1})^T m_D^T & 0 \\ 0 & M_R \end{pmatrix}. \quad (3-76)$$

Por lo tanto, la matriz de masa de Majorana viene dada por el primer elemento de la diagonal de (3-76) y la matriz de masa de neutrinos pesados de Majorana es el otro elemento. Los valores de las masas de los neutrinos y sus ángulos de mezcla dependen de las formas explícitas de las matrices  $m_D$  y  $M_R$ . También se puede evidenciar de (3-76) que la masa de los neutrinos es pequeña debido a la aparición de  $M_R$  en el denominador de dicho término. Debido a lo anterior si este mecanismo seesaw se da en la naturaleza se tiene que:

- Los neutrinos son partículas de Majorana.
- Las masas de los neutrinos son mucho menores a las de los quarks y leptones.
- Los compañeros pesados de los neutrinos que surgen del mecanismo en cuestión deben existir.

Otro punto de vista que da cuenta de las masas pequeñas de los neutrinos es el de adicionar al lagrangiano del ME un lagrangiano efectivo no renormalizable

$$\mathcal{L}_e = -\frac{1}{M} \sum_{\nu, l} y_{\nu l} (\psi_{\nu L}^T \sigma_2 \phi) C^{-1} (\phi^T \sigma_2 \psi_{lL}^T) + h.c., \quad (3-77)$$

donde

$$\psi_{lL} = \begin{pmatrix} \nu_{lL} \\ l_L \end{pmatrix}, \quad l = e, \mu, \tau, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (3-78)$$

son los dobletes leptónicos y de Higgs y  $\sigma_2$  la correspondiente matriz de Pauli y el parámetro  $M$  tiene dimensiones de masa. Reemplazando (2-34) en (3-77) para hallar el término de masa después del rompimiento espontáneo de la simetría

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum_{\nu, l} \nu_{\nu L}^T C^{-1} \left( \frac{y_{\nu l} v^2}{M} \right) \nu_{lL} + h.c., \quad (3-79)$$

de la que se deduce que la matriz de masa de Majorana está dada por:

$$M_{\nu l}^M = \frac{y_{\nu l} v^2}{M}. \quad (3-80)$$

Se puede notar que el lagrangiano efectivo  $\mathcal{L}_e$  puede ser generado por extensiones más allá del ME como las siguientes [27]:

- I. Interacciones de leptones y Higgs con un singlete fermiónico pesado  $N_R$  ( $M_N \gg \nu$ ).
- II. Interacciones entre dobletes de Higgs y dobletes leptónicos con un triplete escalar bosónico pesado  $\Delta$ .
- III. Interacciones de leptones y Higgs con un triplete fermiónico pesado  $\Sigma_R$ .

El mecanismo seesaw tratado en este capítulo está contenido en el primer caso y se denomina mecanismo seesaw tipo I, los mecanismos que incluyen las interacciones con el triplete escalar o con el triplete fermiónico son de tipo II y III respectivamente. En el mecanismo seesaw discutido en el presente capítulo aparecen neutrinos estériles pesados que acompañan a los neutrinos activos y que justifican el pequeño valor de sus masas.

La hipótesis de neutrinos estériles no solamente aplica para neutrinos pesados, también teóricamente se pueden implementar neutrinos estériles ultraligeros. En experimentos como MiniBooNE se han obtenido resultados que podrían dar indicios de la existencia de este tipo de neutrinos que no pueden ser producidos ni detectados en procesos que involucran interacciones débiles y que se mezclarían con los neutrinos conocidos actualmente [34, 36]. Para dicha mezcla en el caso más general se tendría

$$\nu_{lL} = \sum_{i=1}^{3+n_s} U_{li} \nu_{iL}, \quad \nu_{sL} = \sum_{i=1}^{3+n_s} U_{si} \nu_{iL}. \quad (3-81)$$

Donde  $U$  es una matriz unitaria de mezcla de dimensión  $(3 + n_s) \times (3 + n_s)$ ,  $l = e, \mu, \tau$  y el índice  $s$  toma los valores  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{n_s}$  siendo  $n_s$  el número de neutrinos estériles.

## 4. Oscilación de neutrinos

En la mayoría de los experimentos realizados con neutrinos, estos intervienen y son producidos en procesos de corrientes cargadas y neutras debidas a interacciones electrodébiles, en las cuales, se generan los diferentes sabores de neutrinos junto con un leptón cargado. A medida que dichas partículas recorren el espacio evolucionan de manera diferente como autoestados de masa, con lo cual, el sabor del neutrino detectado en un instante dado puede ser diferente al generado. Este fenómeno planteado inicialmente por Bruno Pontecorvo basado en la oscilación de los kaones neutros se denomina oscilación del neutrino [9, 37].

Cuando Pontecorvo en 1950 intentó dar una explicación de dicho fenómeno, él postuló el concepto de un neutrino estéril, es decir, un neutrino que no interactuara débilmente. Después del descubrimiento del neutrino muónico, se dedujo que si el neutrino oscilaba, este debía ser masivo. Tiempo después Maki, Nakagawa y Sakata consideraron un modelo matemático para dar cuenta de la mezcla de neutrinos [10]. Con base a este, Pontecorvo dio explicación al problema de neutrinos solares por medio del fenómeno de la oscilación de neutrinos [9].

### 4.1. Tratamiento teórico de las oscilaciones de neutrinos

Se discutirá la teoría relacionada con las oscilaciones de neutrinos ya que a partir de esta se han desarrollado varios experimentos y hay otros tantos planeados para realizarse a futuro [38]. Gracias a estos se ha podido evidenciar dicho fenómeno y medir ciertos parámetros de oscilación con cada vez mayor precisión.

#### 4.1.1. Oscilaciones de neutrinos monoenergéticos

En el capítulo 3 se dedujo que los campos de sabor de neutrino son combinaciones lineales de campos de masa, es decir,

$$|\nu_l\rangle = \sum_{\alpha} U_{l\alpha} |\nu_{\alpha}\rangle, \quad (4-1)$$

Donde  $l = e, \mu, \tau$  indica los autoestados de sabor,  $\alpha$  da cuenta de los autoestados de masa y  $U$  es una matriz unitaria. Como una simplificación al modelo se puede decir que las componentes del estado de sabor tienen el mismo momentum pero ya que tienen diferente

masa su energía también va a ser diferente debido a la dependencia mostrada por la relación energía-momentum relativista

$$E_\alpha = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_\alpha^2}. \quad (4-2)$$

La evolución temporal del autoestado de sabor mencionado en (4-1) es [39]

$$|\nu_l(t)\rangle = \sum_\alpha e^{-iE_\alpha t} U_{l\alpha} |\nu_\alpha\rangle, \quad (4-3)$$

donde cabe aclarar que se está suponiendo que los neutrinos son partículas estables, de otro modo, la formulación que se deducirá sufre cambios notables. Debido a la naturaleza del autoestado dado por (4-1) se puede encontrar la amplitud de probabilidad de que un autoestado de sabor  $\nu_{l'}$  se encuentre en el estado de sabor original  $\nu_l$

$$\langle \nu_{l'} | \nu_l(t) \rangle = \sum_{\alpha, \beta} \langle \nu_\beta | U_{\beta l'}^\dagger e^{-iE_\alpha t} U_{l\alpha} | \nu_\alpha \rangle \quad (4-4)$$

$$\langle \nu_{l'} | \nu_l(t) \rangle = \sum_\alpha e^{-iE_\alpha t} U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^*, \quad (4-5)$$

en este punto se supone que los autoestados de masa son ortonormales:

$$\langle \nu_\beta | \nu_\alpha \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4-6)$$

La probabilidad de encontrar en algún tiempo  $t$  el estado  $\nu_{l'}$  en el haz original de  $\nu_l$  se calcula de la siguiente forma:

$$P_{\nu_l \nu_{l'}}(t) = |\langle \nu_{l'} | \nu_l(t) \rangle|^2, \quad (4-7)$$

escribiendo los términos de la sumatoria en (4-5)

$$\langle \nu_{l'} | \nu_l(t) \rangle = U_{l1} U_{l'1}^* e^{-iE_1 t} + U_{l2} U_{l'2}^* e^{-iE_2 t} + U_{l3} U_{l'3}^* e^{-iE_3 t}. \quad (4-8)$$

Conjugando el término anterior

$$\langle \nu_{l'} | \nu_l(t) \rangle^* = U_{l1}^* U_{l'1} e^{iE_1 t} + U_{l2}^* U_{l'2} e^{iE_2 t} + U_{l3}^* U_{l'3} e^{iE_3 t}. \quad (4-9)$$

Multiplicando las ecuaciones (4-8) y (4-9) se obtiene finalmente:

$$P_{\nu_l \nu_{l'}}(t) = |\langle \nu_{l'} | \nu_l(t) \rangle|^2 = \sum_\alpha U_{l\alpha}^2 U_{l'\alpha}^2 + 2 \sum_{\alpha > \beta} U_{l\alpha} U_{l'\alpha} U_{l\beta} U_{l'\beta} \cos(E_\alpha - E_\beta)t. \quad (4-10)$$

En la práctica los neutrinos son partículas ultrarelativistas, por lo tanto, la ecuación (4-2) se convierte en:

$$E_\alpha \approx |p| + \frac{m_\alpha^2}{2|p|}, \quad (4-11)$$

en consecuencia, la diferencia de energías entre dos componentes del haz es

$$E_\alpha - E_\beta = \frac{\Delta m_{\alpha\beta}^2}{2|p|}, \quad (4-12)$$

con

$$\Delta m_{\alpha\beta}^2 = m_{\alpha}^2 - m_{\beta}^2. \quad (4-13)$$

Reemplazando  $t$  por la distancia  $x$  que viaja el haz en (4-10), escribiendo  $|p| = E$  y reemplazando (4-12) en dicha ecuación:

$$P_{\nu_l\nu_{l'}}(x) = \sum_{\alpha} U_{l\alpha}^2 U_{l'\alpha}^2 + 2 \sum_{\alpha>\beta} U_{l\alpha} U_{l'\alpha} U_{l\beta} U_{l'\beta} \cos\left(\frac{\Delta m_{\alpha\beta}^2}{2E} x\right). \quad (4-14)$$

Definiendo la cantidad

$$L_{\alpha\beta} \equiv \frac{4\pi E}{\Delta m_{\alpha\beta}^2}, \quad (4-15)$$

denominada longitud de oscilación y que da cuenta de la distancia a partir de la cual los efectos de la oscilación son apreciables, la ecuación (4-14) también puede ser escrita de la forma

$$P_{\nu_l\nu_{l'}}(x) = \sum_{\alpha} U_{l\alpha}^2 U_{l'\alpha}^2 + 2 \sum_{\alpha>\beta} U_{l\alpha} U_{l'\alpha} U_{l\beta} U_{l'\beta} \cos\left(\frac{2\pi x}{L_{\alpha\beta}}\right). \quad (4-16)$$

## 4.2. Oscilaciones de neutrinos para el caso de dos familias

Para este caso particular se toma una forma especial de la matriz unitaria  $U$ , la cual, ya se había usado en el capítulo anterior y aparece en la ecuación (3-57). Teniendo en cuenta dicha matriz se calculará la probabilidad de encontrar un estado de sabor, por ejemplo,  $\nu_{\mu}$  en un estado  $\nu_e$ :

$$\begin{aligned} P_{\nu_l\nu_{l'}}(x) &= \sum_1^2 U_{e\alpha}^2 U_{\mu\alpha}^2 + 2 \sum_{\alpha>\beta} U_{e\alpha} U_{\mu\alpha} U_{e\beta} U_{\mu\beta} \cos\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{2E} x\right) \\ P_{\nu_l\nu_{l'}}(x) &= \cos^2 \theta (-\sin \theta)^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \cos \theta (-\sin \theta) \cos\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{2E} x\right) \\ P_{\nu_l\nu_{l'}}(x) &= 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{2E} x\right) \\ P_{\nu_l\nu_{l'}}(x) &= 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left[ 1 - \cos\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{2E} x\right) \right], \end{aligned} \quad (4-17)$$

usando identidades trigonométricas para ángulos dobles y medios, (4-17) se puede escribir como

$$P_{\nu_l\nu_{l'}}(x) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E} x\right). \quad (4-18)$$

### 4.3. Oscilación de neutrinos para el caso de tres familias

Experimentalmente se han evidenciado tres sabores de neutrinos, por lo que el caso anterior puede que no sea muy realista, por ejemplo, podría servir para el caso en el que uno de los neutrinos no se mezcle con los otros dos. En aras de tener un modelo que se ajuste más a la realidad se debe tener en cuenta la mezcla de los tres sabores. Para esto ya se tiene la ecuación general que describe dicho fenómeno (4-14) y en este apartado se analizarán casos especiales de mezcla. Considerando en particular el caso en el que una de las diferencias de masa sea muy pequeña y las otras dos similares, es decir,

$$\frac{\Delta m_{12}^2}{2E}x \ll 1, \quad \Delta m_{31}^2 \simeq \Delta m_{32}^2, \quad (4-19)$$

lo cual es consecuente con un patrón de masas de jerarquía normal (ver figura 4-1) donde  $m_1 \simeq m_2 \ll m_3$  o con un patrón de jerarquía invertida, en el cual,  $m_3 \ll m_1 \simeq m_2$  [40]. Usando dichas condiciones en la ecuación (4-14)

$$P_{\nu_l \nu_l'}(x) = 4 |U_{l3}^2| |U_{l'3}^2| \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{31}^2}{4E}x \right). \quad (4-20)$$

De forma similar también se puede analizar otro caso límite como

$$\frac{\Delta m_{32}^2}{2E}x \ll 1, \quad \frac{\Delta m_{31}^2}{2E}x \ll 1. \quad (4-21)$$

En este caso, la probabilidad de supervivencia para  $\nu_e$  (la probabilidad de encontrar a  $\nu_e$ ) viene dada por:

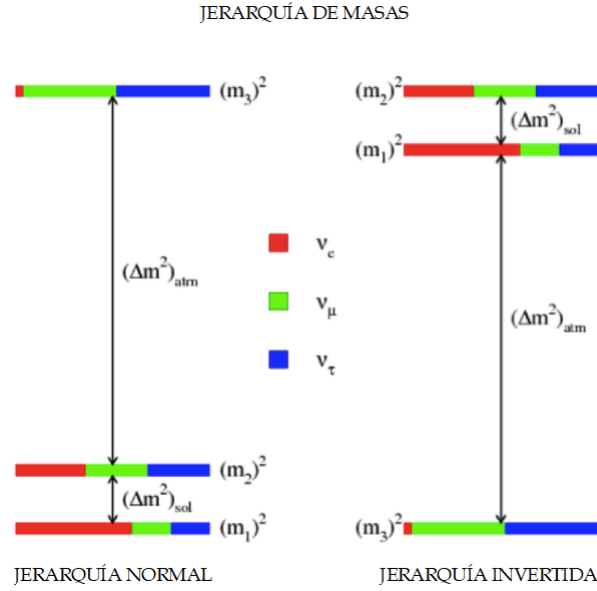
$$P_{\nu_e \nu_e}(x) = \cos^4 \theta_{13} \left[ 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{21}^2}{2E}x \right) \right] + \sin^4 \theta_{13}. \quad (4-22)$$

De la relación (4-22) se puede ver que si  $\theta_{13}$  es pequeño se tiene el resultado obtenido en el caso de oscilaciones de dos sabores de neutrinos.

### 4.4. Matriz de mezcla

La matriz  $U$  de la ecuación (4-1) toma su forma más general siendo la denominada matriz PMNS (Pontecorvo, Maki, Nakagawa, Sakata) [10]. Para los tres sabores de neutrinos conocidos está especificada por tres ángulos de mezcla  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{13}$  y  $\theta_{23}$  con  $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$  y tres fases de violación de CP  $\delta$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  ( $0 \leq \delta, \phi_i \leq 2\pi$ ). Escribiendo dicha matriz como un producto:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_3/2} \end{pmatrix}, \quad (4-23)$$



**Figura 4-1.:** Patrones de masa para los tres neutrinos activos

donde  $c_{ab} = \cos \theta_{ab}$  y  $s_{ab} = \sin \theta_{ab}$ . Las probabilidades de oscilación son independientes de las fases de Majorana  $\phi_2$  y  $\phi_3$  y solo dependen de la fase de Dirac, por ende, para los propósitos de este escrito la matriz PMNS sería

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (4-24)$$

El ángulo de mezcla  $\theta_{23}$  gobierna las oscilaciones de neutrinos atmosféricos,  $\theta_{12}$  las de los neutrinos solares y  $\theta_{13}$  puede ser medida en distancias cortas con neutrinos producidos en reactores.

## 4.5. Evidencias experimentales

El objetivo de los experimentos de oscilaciones de neutrinos es encontrar dicho fenómeno cuando el valor de  $x$  en (4-16) no es un múltiplo entero de  $L_{\alpha\beta}$ . En este punto se encuentran dos posibilidades, la primera consiste en la desaparición de un sabor en el haz viajero, es decir,

$$P_{\nu_l\nu_l}(x) < 1. \quad (4-25)$$

En este caso se plantean experimentos que intentan dar cuenta de dicha pérdida, a estos se les conoce como experimentos de desaparición, los cuales consisten en hacer incidir un haz de antineutrinos  $\hat{\nu}_e$  contra un blanco y medir el número de positrones  $e^+$  que surgen de este

gracias a un proceso de decaimiento beta inverso

$$\hat{\nu}_e + X \rightarrow e^+ + Y, \quad (4-26)$$

donde  $X$  y  $Y$  son núcleos atómicos. Dicho flujo de positrones se puede calcular, si el experimento arroja un número menor de estos, implica que parte de los antineutrinos electrónicos que impactaron el blanco desaparecieron, es decir, se transformaron a otro estado de sabor:

$$P_{\nu_l \nu_{l'}}(x) > 0, \quad l' \neq l. \quad (4-27)$$

La otra clase de experimentos se denominan de aparición, en estos, un haz de antineutrinos (por ejemplo  $\hat{\nu}_\mu$ ), se hacen chocar contra un blanco y se mide el flujo de positrones  $e^+$  que surge de esta reacción. Si dicho flujo es nulo se tiene que no hay oscilación ya que con neutrinos no masivos dicha reacción es imposible, si se tiene lo contrario es porque los antineutrinos han oscilado a otro estado de sabor. Los experimentos de aparición solo permiten evidenciar oscilaciones por un solo canal, es decir, solo permite ver las oscilaciones hacia un solo sabor, tales como,  $\hat{\nu}_\mu$  oscilando a  $\hat{\nu}_e$  o hacia cualquier otro sabor, mientras que los experimentos de desaparición solo permiten ver si se registra una oscilación pero no permiten dilucidar hacia que sabor se realizó. En resumen, se puede decir que un experimento de aparición mide oscilaciones para neutrinos específicos  $\nu_l \rightarrow \nu_{l'}$  mientras que uno de desaparición registra oscilaciones del tipo  $\nu_l \rightarrow \nu_X$ , donde  $\nu_X$  puede ser cualquier sabor de neutrino, incluyendo neutrinos estériles, por ejemplo, para la detección de estos últimos se usan experimentos de desaparición, ya que la sección eficaz de interacción para la producción de un leptón cargado es extremadamente pequeña.

Teniendo en cuenta que no se tiene un control sobre parámetros como las masas de los neutrinos y los elementos de la matriz  $U$  que hacen parte del lagrangiano del ME pero si sobre la distancia que el haz de partículas recorre en un experimento y la energía con la que estas viajan, se define una cantidad denominada figura de mérito para medir la sensibilidad del experimento en cuestión, esta tiene la forma

$$\bar{m}^2 \equiv \frac{E}{x}. \quad (4-28)$$

Usando (4-28) en (4-14)

$$P_{\nu_l \nu_{l'}}(x) = \sum_{\alpha} U_{l\alpha}^2 U_{l'\alpha}^2 + 2 \sum_{\alpha > \beta} U_{l\alpha} U_{l'\alpha} U_{l\beta} U_{l'\beta} \cos \left( \frac{\Delta m_{\alpha\beta}^2}{2\bar{m}^2} \right). \quad (4-29)$$

Se puede observar que para que el experimento considerado pueda registrar oscilaciones de neutrinos, la figura de mérito debe cumplir la siguiente condición:

$$\bar{m}^2 \leq |\Delta m_{\alpha\beta}^2| \quad (4-30)$$

Fuente	Valores Típicos		
	$x(\text{cm})$	$E$ (MeV)	$\bar{m}^2$ (eV <sup>2</sup> )
reactor	$10^2$	1	$10^{-2}$
Fabrica de mesones	$10^2$	10	$10^{-1}$
LBL	$10^7$	10	$10^{-6}$
Aceleradores	$10^3$	$10^3$	1
Atmosféricos	$10^7$	$10^4$	$10^{-3}$
Solares	$10^{11}$	1	$10^{-11}$

**Tabla 4-1.:** Valores de  $\bar{m}^2$  para diferentes experimentos de oscilación [34].

En la tabla 4.1 [34] se muestran valores típicos de  $\bar{m}^2$  para las diferentes clases de experimentos incluyendo neutrinos atmosféricos y solares.

El primer experimento en reportar el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos fue el denominado LSND [41], en el cual, protones con una energía de  $800 \text{ MeV}$  bombardearon un blanco produciendo así  $\pi^+$ . Gracias a la conservación de la energía, estos piones decaen en  $\mu^+$  y a su vez estos decaen en  $e^+$ , dichas reacciones son las siguientes:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \hat{\nu}_\mu. \quad (4-31)$$

De las anteriores reacciones se evidencia que en dicho experimento se tienen dos clases de neutrinos y una de antineutrinos, todas en la misma cantidad pero con distribuciones de energía diferentes. En LSND se realizaron dos tipos de búsquedas (ambos experimentos de aparición), en la primera de estas se rastrearon oscilaciones del tipo  $\hat{\nu}_\mu \rightarrow \hat{\nu}_e$  con ayuda de los decaimientos mencionados anteriormente. En la segunda búsqueda se tuvo en cuenta el decaimiento de los piones a medida que estos viajaban hacia el blanco y se investigaron las oscilaciones de tipo  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  [42]. Para dichos experimentos se obtuvieron probabilidades de conversión de  $(3.1_{-1.0}^{+1.1} \pm 0.5) \times 10^{-3}$  y  $(2.6 \pm 1.0 \pm 0.5) \times 10^{-3}$  respectivamente, con lo cual, se evidencia una consistencia entre los dos resultados. LSND no puede medir valores de  $\Delta m^2$  menores a  $10^{-2} \text{ eV}$ , mientras que los experimentos de neutrinos solares y atmosféricos si pueden trabajar en estos rangos de valores. De acuerdo con (4-28) para poder medir tales diferencias de masa se pueden generar neutrinos con energías bajas (unos pocos  $\text{MeV}$ ) como los generados en experimentos con fuentes nucleares o también se puede aumentar el valor de  $x$  tomando una distancia lo suficientemente grande entre la fuente y el detector, tales experimentos se conocen como LBL (Long Base Line Experiments).

Un experimento que se puede tomar como ejemplo al momento de tener en cuenta ambos factores (energía y distancia fuente-detector) es Kamland, el cual usa un haz de  $\hat{\nu}_e$  que se genera de diversos reactores y este recorre una distancia de  $200 \text{ km}$  hasta el detector. En dicho experimento se observa una disminución del flujo de neutrinos de aproximada-

Parámetro	$1\sigma$	$2\sigma$	$3\sigma$
$\Delta m_{21}^2 [10^{-5} \text{ eV}^2]$	$7.55^{+0.20}_{-0.16}$	7.20-7.94	7.05-8.14
$\Delta m_{31}^2 [10^{-3} \text{ eV}^2]$	$2.50 \pm 0.03$	2.44-2.57	2.41-2.60
$\text{sen}^2 \theta_{12} / 10^{-1}$	$3.20^{+0.20}_{-0.16}$	2.89-3.59	2.73-3.79
$\text{sen}^2 \theta_{13} / 10^{-2}$	$2.160^{+0.083}_{-0.069}$	2.03-2.34	1.96-2.41
$\text{sen}^2 \theta_{23} / 10^{-1}$	$5.47^{+0.20}_{-0.30}$	4.67-5.83	4.45-5.99

**Tabla 4-2.:** Parámetros de oscilación de neutrinos [43]

mente 34 % lo que indica una evidencia de oscilación [44]. Para el tratamiento de neutrinos atmosféricos se deben tener en cuenta las diversas reacciones producidas en la atmósfera debido a la interacción de los núcleos atómicos que la componen y los protones de los rayos cósmicos del exterior. Las reacciones mencionadas anteriormente son

$$p + X \rightarrow \pi^\pm + Y \rightarrow \mu^\pm + \text{"}\nu_\mu\text{"} + Y \rightarrow e^\pm + \text{"}\nu_e\text{"} + \text{"}\nu_\mu\text{"} + Y, \quad (4-32)$$

donde las comillas indican que no se han distinguido neutrino y antineutrino en el fenómeno, así como tampoco en el experimento. De la relación (4-32) se puede inferir que la razón de eventos de tipo  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  debe ser de 0.5. Contando los anteriores eventos se puede construir la cantidad

$$R \equiv \frac{(\mu/e)}{(\mu/e)_{MC}}, \quad (4-33)$$

donde  $MC$  indica predicciones de Monte-Carlo. El denominador de (4-33) indica la razón de eventos en el caso en que los neutrinos sean no masivos, es decir, acordes con el ME, si dicha suposición fuera correcta (lo que implica que no se pueden dar oscilaciones de neutrinos) el valor de (4-33) debería ser 1. Un experimento que ha realizado medidas de dicha razón es Super-Kamiokande, el cual, ha tomado datos desde finales de los años noventa y se ha podido evidenciar que dicho valor es  $(0,638^{+0,016}_{-0,016} \pm 0,50)$  [45], lo que indica que es significativamente menor a 1. Para concluir este capítulo en la tabla 4-2 [46] se anexan los valores de los diferentes parámetros de oscilación medidos hasta el momento.

## 5. Modelo de alineamiento con triplete de Higgs

En cualquier extensión al ME, se debe asegurar que el sector escalar respete el rompimiento espontáneo de la simetría, es decir, que satisfaga ciertas relaciones de conmutación con los generadores del grupo de forma adecuada, que dote a las partículas nuevas de masa y que reproduzca las masas que ya se tienen en las correspondientes familias del modelo. La introducción de términos de masa de forma directa en el Lagrangiano afecta la invarianza gauge además que impide su renormalización (términos de la forma  $m\bar{\psi}\psi$  para fermiones y  $\frac{1}{2}m^2T_\mu T^\mu$  para bosones). Para evitar lo inmediatamente anterior, en el capítulo 2 se planteó el mecanismo que permite la aparición de dichos términos (como debe ser, ya que experimentalmente se ha evidenciado que varias partículas del ME tienen masa) y que no afectan la invarianza, denominado mecanismo de Higgs, en el cual, se introduce un campo escalar  $\phi$  que interactúa con los bosones gauge y los fermiones y en el que su estado de vacío evidencia dos situaciones, la primera se da antes del rompimiento espontáneo de la simetría, donde las partículas aparecen sin masa y el estado de vacío tiene la misma invarianza que el lagrangiano. El otro escenario se tiene después del rompimiento espontáneo de la simetría, en el cual, el vacío se degenera dándole masas a las partículas conocidas.

### 5.1. Modelo con triplete de Higgs

En el grupo del ME, el rompimiento de simetría ocurre según el esquema  $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow SU(3)_c \otimes U(1)_Q$ , es decir, que si se asocia el rompimiento de una simetría a la adquisición de masa de una partícula se ve que los gluones y los fotones siguen careciendo de ella, debido a que la única simetría que permanece intacta es  $SU(3)_c \otimes U(1)_Q$ . Podría decirse que en algún momento el universo estaba regido por  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  la cual se rompió quedando lo que se observa actualmente, es decir, la simetría  $U(1)_Q$ . Como se había mencionado anteriormente, el estado de vacío es el que está directamente relacionado con el rompimiento de la simetría, lo cual, indica que antes de este los generadores del grupo conmutan con el valor esperado en el vacío del campo [47], es decir:

$$\begin{aligned} [T_\alpha^{SU(2)}, \langle \Phi \rangle_0] &= 0 \\ [\hat{Y}, \langle \Phi \rangle_0] &= 0. \end{aligned} \tag{5-1}$$

Gracias al rompimiento de la simetría,  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  se transforma en  $U(1)_Q$ , por ende, el generador correspondiente a  $U(1)_Q$  conmuta con el operador de campo mientras que  $\hat{T}_1$ ,  $\hat{T}_2$  y el generador ortogonal  $\hat{T}_3 - \hat{Y}$  no conmutan, es decir:

$$\begin{aligned} [\hat{Q}, \langle \Phi \rangle_0] &= 0 \\ [\hat{T}_1, \langle \Phi \rangle_0] &\neq 0 \\ [\hat{T}_2, \langle \Phi \rangle_0] &\neq 0 \\ [\hat{T}_3 - \hat{Y}, \langle \Phi \rangle_0] &\neq 0, \end{aligned} \tag{5-2}$$

lo cual, implica que hay tres bosones masivos (tres generadores que no conmutan) y un bosón sin masa, estableciéndose así la correspondencia con los bosones masivos ( $W^\pm$ ,  $Z^0$ ) y el fotón. El mecanismo del rompimiento espontáneo de la simetría usa términos de Yukawa para asignarle masa a los fermiones, estos dan cuenta de las interacciones entre campos escalares y fermiónicos adquiriendo la forma:

$$\bar{\psi}\psi\Phi + \bar{\psi}(\psi)^c\Phi + (\bar{\psi}^c)\psi\Phi^\dagger + (\bar{\psi}^c)(\psi)^c\Phi^\dagger, \tag{5-3}$$

donde el superíndice  $c$  representa la conjugación de la carga. Escribiendo los campos en sus componentes quirales  $\psi_L$  y  $\psi_R$  y usando la relación (3-1), se generan los siguientes términos de Yukawa:

$$\bar{\psi}_L\psi_R\Phi + \bar{\psi}_L(\psi_L)^c\Phi + (\bar{\psi}_R)(\psi_R)^c\Phi + (\bar{\psi}_R)^c(\psi_L)^c\Phi + h.c., \tag{5-4}$$

donde  $h.c.$  es el hermítico conjugado. Cada campo  $\psi$ , dependiendo de su quiralidad, debe tener una representación determinada ya sea singlete o doblete y además de eso cada término de (5-3) debe ser un singlete ya que tienen que ser invariantes bajo  $SU(2)_L$ , siendo  $\hat{\psi}_L^i$  un doblete en representación  $\mathbf{2}$ ,  $\hat{\psi}_{iL}$  un doblete en representación  $\mathbf{2}^*$  y  $\hat{\psi}_R$  un singlete en representación  $\mathbf{1}$ . Dichos términos aceptarán representaciones  $\mathbf{n}$  de  $\Phi$  de forma tal que produzca singletes. Debido a lo anterior se tiene para cada uno:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L^i\psi_R\Phi &: & \mathbf{2}^* \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{n} &\Rightarrow \mathbf{n=2} \\ \bar{\psi}_L^i(\psi_L^j)^c\Phi &: & \mathbf{2}^* \otimes \mathbf{2}^* \otimes \mathbf{n} &\Rightarrow \mathbf{n=2} \otimes \mathbf{2} \\ (\bar{\psi}_R)(\psi_R)^c\Phi &: & \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{n} &\Rightarrow \mathbf{n=1} \\ (\bar{\psi}_R)^c(\psi_L^i)^c\Phi &: & \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{n} &\Rightarrow \mathbf{n=2}^*. \end{aligned} \tag{5-5}$$

De (5-5) se observa que además de las representaciones que se habían mencionado anteriormente surge una nueva:  $\mathbf{n=2} \otimes \mathbf{2}$ . Cabe recalcar que cualquier representación que se escoja para  $\Phi$  debe satisfacer las ecuaciones (5-1) y (5-2) y además los terminos de Yukawa deben ser invariantes en cuanto al grupo  $U(1)_Y$ , lo cual se traduce en:

$$[\hat{Y}, \text{Termino Yukawa}] = 0. \tag{5-6}$$

En este punto se realizará un análisis breve de la forma que adquieren cada una de las representaciones del campo escalar  $\Phi$  para después deducir el espectro del modelo con triplete de Higgs.

### 5.1.1. $\Phi$ como doblete ( $n = 2$ )

En esta representación  $\Phi$  adquiere la forma:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (5-7)$$

este es el caso que se tiene en el modelo estandar ya que este doblete consta de cuatro componentes (dos en  $\Phi^1$  y dos en  $\Phi^2$ ) las cuales están asociadas a cuatro bosones (tres gauge masivos y uno sin masa el cual es el boson de Higgs). El valor esperado en el vacío de dicho campo escalar tiene la forma:

$$\langle \Phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (5-8)$$

Sabiendo que un campo  $\hat{\psi}^i$  transforma segun  $\mathbf{n}$  como [47]:

$$[\hat{T}_\alpha, \hat{\psi}^i] = -(\hat{T}_\alpha)_j^i \hat{\psi}^j, \quad (5-9)$$

aplicando dicho resultado a cada uno de los componentes de (5-7), se obtiene que una de las componentes de este valor esperado es igual a cero, tomando la forma:

$$\langle \Phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^0 \end{pmatrix}. \quad (5-10)$$

### 5.1.2. $\Phi$ como antidoblete ( $n = 2^*$ )

La representación antidoblete  $2^*$  viene dada por:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (5-11)$$

realizando el mismo proceso que para el doblete, se tiene que:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix}. \quad (5-12)$$

Este antidoblete también puede relacionarse con la segunda matriz de Pauli como  $\tilde{\phi} = i\tau_2\phi^*$  con  $\phi$  el campo dado por la ecuación (5-7).

### 5.1.3. $\Phi$ como antidoblete ( $n = 2 \otimes 2$ )

En esta representación  $\Phi$  es una matriz en la cual sus componentes (que por lo general son complejas) vienen dadas por:

$$\Phi = \Delta = \begin{pmatrix} \Delta^{11} & \Delta^{12} \\ \Delta^{21} & \Delta^{22} \end{pmatrix}, \quad (5-13)$$

el valor esperado de esta representación sería:

$$\langle \Delta \rangle_0 = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix}. \quad (5-14)$$

Se sabe que  $\psi_{ij}$  transforma según  $n^* \otimes n$  de la forma [47]:

$$[\hat{T}_\alpha, \hat{\psi}^{ij}] = -[(T_\alpha)_k^i \delta_j^l + \delta_k^i (T_\alpha)_l^j] \hat{\psi}^{kl}, \quad (5-15)$$

usando (5-1) junto con (5-5) para cada una de las componentes de  $\langle \Delta \rangle_0$ :

$$\langle \Delta \rangle_0 = \begin{pmatrix} V_\Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5-16)$$

y para el campo  $\Delta$ :

$$\Phi = \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\Delta^0 & \Delta^- \\ \Delta^- & \sqrt{2}\Delta^{--} \end{pmatrix}. \quad (5-17)$$

De (5-17) se puede ver que surgen tres componentes diferentes para la matriz, un bosón neutro ( $\Delta^0$ ), un bosón cargado ( $\Delta^-$ ) y un bosón doblemente cargado ( $\Delta^{--}$ ). Debido a lo anterior  $\Delta$  también recibe el nombre de triplete de Higgs, el cual, expande el sector de Higgs y por ende, el ME, originando un modelo conocido como modelo con triplete de Higgs. La representación de  $\Phi$  como singlete anula todos los conmutadores en (5-1) por definición, lo cual implica que el mecanismo de Higgs no podría ser generado.

### 5.1.4. Carga eléctrica e hipercarga para cada representación de $\Phi$

De la relación de Gellmann-Nishijima [30] se tiene que  $Q = T_3 + Y$ , y por las propiedades de los conmutadores:

$$[Q, \Phi] = [T_3, \Phi] + [Y, \Phi]. \quad (5-18)$$

Dependiendo de la representación usada se obtienen los siguientes valores para la carga de las diferentes representaciones de  $\Phi$ :

$$Q_\Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_\Phi^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5-19)$$

Mientras que para la hipercarga se tiene:

$$Y_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y_\Phi^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y_\Delta = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5-20)$$

## 5.2. Espectro del modelo del triplete de Higgs

Teniendo en cuenta lo dicho en este capítulo, hasta el momento se puede esquematizar el espectro de partículas producido por el modelo del triplete de Higgs, el cual se muestra a continuación:

$$\text{Fermiones} \left\{ \begin{array}{l} l_L^{(n)} = \begin{pmatrix} \nu^{(n)} \\ e^{(n)} \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\ e & \mu & \tau \end{pmatrix}_L : \left( \mathbf{2}, -\frac{1}{2} \right) \\ e_R^{(n)} = e_R, \mu_R, \tau_R : (\mathbf{1}, -1) \\ q_L^{(n)} = \begin{pmatrix} u^{(n)} \\ d^{(n)} \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} u & c & t \\ d & s & b \end{pmatrix}_L : \left( \mathbf{2}, -\frac{1}{6} \right) \\ q_R^{(n)} = u_R, c_R, t_R, d_R, s_R, b_R : (\mathbf{1}, -1) \end{array} \right. \quad (5-21)$$

$$\text{Bosones Escalares} \left\{ \begin{array}{l} \text{Doblete:} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H+i\zeta) \end{pmatrix} : \left( \mathbf{2}, -\frac{1}{2} \right); \text{ con } \langle \Phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \\ \text{Triplete:} \quad \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\Delta^0 & \Delta^- \\ \Delta^- & \sqrt{2}\Delta^{--} \end{pmatrix} : (\mathbf{3}, -1); \text{ con } \langle \Delta \rangle_0 = \begin{pmatrix} V_\Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (5-22)$$

$$\text{Bosones Vectoriales } \{W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, B_\mu\}. \quad (5-23)$$

## 5.3. Modelo con singlete y triplete de Higgs

El modelo que se utilizará en este trabajo corresponde al espectro usual del ME con la adición de un neutrino derecho  $N_R$  y un triplete de Higgs  $\Delta$  con valor esperado en el vacío  $\langle \Delta \rangle = v_\Delta$ . Dicho triplete tiene una representación en el grupo  $(SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y)$  de forma matricial dada por

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}v_\Delta + \Delta^0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta^+ & \Delta^{++} \end{pmatrix}. \quad (5-24)$$

El lagrangiano de Yukawa renormalizable y compatible con la simetría del grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  más general en este modelo se puede escribir de la siguiente manera:

$$-\mathcal{L}_Y = -\mathcal{L}_{SM} + f_i \bar{l}_L^i \tilde{\phi} N_R + \frac{1}{2} M_R \bar{N}_R^c N_R + \frac{1}{2} \Gamma_{ij} \bar{l}_L^{ic} \Delta l_L^j + h.c., \quad (5-25)$$

con  $f_i$  y  $\Gamma_{ij}$  las constantes de acoplamiento,  $\phi$  el doblete de Higgs mencionado en (2-26) y  $\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^*$ . Calculando cada uno de los términos de masa para el sector neutro:

$$\begin{aligned} \langle f_i \bar{l}_L^i \tilde{\phi} N_R \rangle &= f_i \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^i & \bar{e}_L^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} N_R \\ \langle f_i \bar{l}_L^i \tilde{\phi} N_R \rangle &= f_i \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L^i N_R \end{aligned} \quad (5-26)$$

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_{ij} \bar{l}_L^{ic} \Delta l_L^j \rangle &= \Gamma_{ij} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^{ic} & \bar{e}_L^{ic} \end{pmatrix} v_\Delta \begin{pmatrix} \nu_L^j \\ e_L^j \end{pmatrix} \\ \langle \Gamma_{ij} \bar{l}_L^{ic} \Delta l_L^j \rangle &= \Gamma_{ij} v_\Delta \bar{\nu}_L^{ic} \nu_L^j + \Gamma_{ij} v_\Delta \bar{e}_L^{ic} e_L^j \\ \langle \Gamma_{ij} \bar{l}_L^{ic} \Delta l_L^j \rangle &= \Gamma_{ij} v_\Delta \bar{\nu}_L^{ic} \nu_L^j. \end{aligned} \quad (5-27)$$

Escribiendo el lagrangiano de masa correspondiente

$$-\langle \mathcal{L}_0 \rangle = f_i \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L^i N_R + \frac{1}{2} \Gamma_{ij} v_\Delta \bar{\nu}_L^{ic} \nu_L^j + \frac{1}{2} M_R \bar{N}_R^c N_R + h.c. \quad (5-28)$$

Escribiendo (5-28) de forma matricial

$$-\langle \mathcal{L}_0 \rangle = \bar{\chi}_L M \chi_R + h.c., \quad (5-29)$$

donde

$$\bar{\chi}_L = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^i & \bar{N}_R^c \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} v_\Delta \Gamma_{ij} & v f_i \\ v f_j & \sqrt{2} M_R \end{pmatrix}, \quad \chi_R = \begin{pmatrix} \nu_L^{jc} \\ N_R \end{pmatrix}. \quad (5-30)$$

De (5-30) se observa que  $\Gamma_{ij}$  es una matriz  $3 \times 3$  y  $f_i$  es un vector tridimensional.  $M$  en general es una matriz compleja. Con el fin de garantizar masas reales, se calcula su cuadrado, obteniendo:

$$M^2 = M M^\dagger = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} v_\Delta^2 \Gamma_{ik} \Gamma_{jk}^* + v^2 f_i f_j^* & v_\Delta v \Gamma_{ik} f_k^* + \sqrt{2} v f_i M_R^* \\ v_\Delta v f_k \Gamma_{jk}^* + \sqrt{2} v M_R f_j^* & v^2 |f|^2 + 2 |M_R|^2 \end{pmatrix}, \quad (5-31)$$

con el índice  $k = 1, 2, 3$  y  $|f|^2 = \sum_i |f_i|^2$ , siendo la magnitud del acoplamiento  $\nu_L - N_R$ .

## 5.4. Condición de alineamiento de los acoplamientos de Yukawa

A pesar de que inicialmente no hay una relación entre  $v$  y  $v_\Delta$ , se puede hacer una suposición razonable donde la escala de  $v_\Delta$  es del orden de la escala electrodébil suprimida por  $M_R$ . Además de lo anterior, proponiendo un factor de supresión  $\mu$ , se tiene:

$$v_\Delta = \mu \frac{v^2}{\sqrt{2}M_R}. \quad (5-32)$$

Haciendo  $M_R \sim 1 \text{ TeV}$  (3-87) y  $v_\Delta \lesssim 7 \text{ GeV}$ , obteniéndose así  $\mu \lesssim 0.16$ . Se define también:

$$\epsilon = \frac{v}{M_R}. \quad (5-33)$$

Usando (5-32) y (5-33) se calcula una nueva forma para la matriz (5-31):

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} v^2 f_i f_j^* + \left(\frac{\mu v^2}{\sqrt{2}M_R}\right)^2 \Gamma_{ik} \Gamma_{jk}^* & \sqrt{2} v M_R f_i + \frac{\mu v^2}{\sqrt{2}M_R} (v \Gamma_{ik} f_k^*) \\ \sqrt{2} v M_R f_j^* + \frac{\mu v^2}{\sqrt{2}M_R} (v \Gamma_{jk}^* f_k) & \frac{2v^2 M_R^2}{v^2} + v^2 |f|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \left[ v^2 f_i f_j^* + \frac{v^2}{2} \mu^2 \Gamma_{ik} \Gamma_{jk}^* \left(\frac{v^2}{M_R^2}\right) \right] & \frac{1}{8} \left[ \left(\frac{v^2 \sqrt{2}}{M_R}\right) f_i + \frac{v^2 \sqrt{2}}{2} \mu \Gamma_{ik} f_k^* \left(\frac{v}{M_R}\right) \right] \\ \frac{1}{8} \left[ \left(\frac{v^2 \sqrt{2}}{M_R}\right) f_j^* + \frac{v^2 \sqrt{2}}{2} \mu \Gamma_{jk}^* f_k \left(\frac{v}{M_R}\right) \right] & \frac{1}{8} \left[ \frac{2v^2}{\left(\frac{v}{M_R}\right)^2} + v^2 |f|^2 \right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{v^2}{8} f_i f_j^* + \frac{v^2}{16} \mu^2 \Gamma_{ik} \Gamma_{jk}^* \epsilon^2 & \frac{v^2 \sqrt{2}}{8\epsilon} f_i + \frac{v^2 \sqrt{2}}{16} \mu \Gamma_{ik} f_k^* \epsilon \\ \frac{v^2 \sqrt{2}}{8\epsilon} f_j^* + \frac{v^2 \sqrt{2}}{16} \mu \Gamma_{jk}^* f_k \epsilon & \frac{v^2}{4\epsilon^2} + \frac{v^2 |f|^2}{8} \end{pmatrix} \\ &= \frac{v^2}{16\epsilon^2} \begin{pmatrix} (2f_i f_j^* + \mu^2 \Gamma_{ik} \Gamma_{jk}^* \epsilon^2) \epsilon^2 & \sqrt{2} (2f_i + \mu \Gamma_{ik} f_k^* \epsilon^2) \epsilon \\ \sqrt{2} (2f_j^* + \mu \Gamma_{jk}^* f_k \epsilon^2) \epsilon & 2(2 + |f|^2 \epsilon^2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5-34)$$

O en forma compacta

$$M^2 = \frac{v^2}{16\epsilon^2} \begin{pmatrix} A_{ij} & B_i \\ B_j^* & C \end{pmatrix}. \quad (5-35)$$

El determinante de (5-35) es

$$\text{Det} [M^2] = \frac{v^2}{16\epsilon^2} C \text{Det} [A_{ij} - B_i B_j^* C^{-1}]$$

$$\text{Det} [M^2] = \frac{1}{8} \nu^2 \epsilon^2 \text{Det} \left[ |\mu\Gamma - ff|_{ij}^2 + \frac{1}{2} (|f|^2 |\mu\Gamma|_{ij}^2 - |\mu\Gamma f|_{ij}^2) \right], \quad (5-36)$$

donde para mayor facilidad se han escrito los productos tensoriales como:

$$\begin{aligned} |\mu\Gamma - ff|_{ij}^2 &= (\mu\Gamma_{ik} - f_i f_k)(\mu\Gamma_{kj} - f_k f_j)^* \\ |\mu\Gamma|_{ij}^2 &= \mu^2 \Gamma_{ik} \Gamma_{kj}^* \\ |\mu\Gamma f|_{ij}^2 &= \mu^2 \Gamma_{ik} f_k^* f_l \Gamma_{lj}^*, \end{aligned} \quad (5-37)$$

y se asume que en (5-37) hay sumatoria sobre índices repetidos. Cabe recalcar que si el determinante (5-36) se hace igual a cero, debido a que este es proporcional al producto de sus valores propios, se podría obtener por lo menos un neutrino no masivo. En particular, se observa que si ambos acoplamientos de Yukawa ( $\Gamma$  y  $f$ ) se alinean exactamente como:

$$\mu\Gamma_{ij} = f_i f_j, \quad (5-38)$$

entonces de la ecuación (5-37), se obtiene que:

$$\begin{aligned} |\mu\Gamma - ff|_{ij}^2 &= 0 \\ |f|^2 |\mu\Gamma|_{ij}^2 &= |\mu\Gamma f|_{ij}^2, \end{aligned} \quad (5-39)$$

por lo que (5-36) se anula, obteniendo un valor propio igual a cero y de multiplicidad tres, por lo que en el alineamiento exacto los tres neutrinos activos ligeros son no masivos. Así este modelo sugiere que la naturaleza cumple aproximadamente esta condición, y su perturbación puede dar cuenta de la masa de los neutrinos activos y los ángulos de mezcla.

## 5.5. Perturbación de la condición de alineamiento

Antes de implementar la condición de alineamiento, se requiere diagonalizar la matriz de masa (5-34). Para esto se usa el método especificado en [48] y resumido en el anexo 1. Se observa que dicha matriz se puede escribir en potencias del parámetro  $\epsilon$  como:

$$M^2 = \frac{\nu^2}{16\epsilon^2} \begin{pmatrix} (A_2 + A_4)_{ij} & (B_1 + B_3)_i \\ (B_1 + B_3)_j^* & C_0 + C_2 \end{pmatrix}, \quad (5-40)$$

donde cada componente de (5-40) es

$$(A_2)_{ij} = 2f_i f_j^* \epsilon^2, \quad (A_4)_{ij} = \mu^2 \Gamma_{ik} \Gamma_{jk}^* \epsilon^4, \quad (B_1)_i = 2\sqrt{2} f_i \epsilon, \quad (5-41)$$

$$(B_3)_i = \sqrt{2} \mu \Gamma_{ik} f_k^* \epsilon^3, \quad C_0 = 4, \quad C_2 = 2|f|^2 \epsilon^2.$$

De (5-40) se evidencia la siguiente estructura jerárquica con relación al factor  $\epsilon$ :

$$(A_2)_{ij} \ll (B_1)_i \ll C_0. \quad (5-42)$$

Diagonalizando por bloques la matriz de masa (5-34) con ayuda del anexo 1 en una matriz  $3 \times 3$  para los neutrinos activos ligeros y una masa asociada al neutrino pesado, se tiene:

$$V^T M^2 V = \begin{pmatrix} m_\nu^2 & 0 \\ 0 & m_R^2 \end{pmatrix}. \quad (5-43)$$

La matriz de neutrinos ligeros se puede expandir como

$$m_\nu^2 \approx m_\nu^2(\epsilon^2) + m_\nu^2(\epsilon^4), \quad (5-44)$$

con

$$m_\nu^2(\epsilon^2) = \frac{v^2}{16\epsilon^2} a(\epsilon^4), \quad m_\nu^2(\epsilon^4) = \frac{v^2}{16\epsilon^2} a(\epsilon^6). \quad (5-45)$$

Aquí,  $a(\epsilon^4)$  y  $a(\epsilon^6)$  vienen dados por (A-10). Teniendo en cuenta lo anterior, el cálculo para  $m_\nu^2(\epsilon^2)$  sería:

$$\begin{aligned} a(\epsilon^4) &= \mu^2 \Gamma_{ik} \Gamma_{jk}^* \epsilon^4 - \frac{(2\sqrt{2}f_i \epsilon)(\sqrt{2}\mu \epsilon^3 f_k \Gamma_{ik}^*)}{4} - \frac{(\sqrt{2}\mu \Gamma_{ik} f_k^* \epsilon^3)(2\sqrt{2}\epsilon f_j^*)}{4} \\ &+ \frac{(2\sqrt{2}f_i \epsilon)(2|f|^2 \epsilon^2)(2\sqrt{2}\epsilon f_j^*)}{16} - \frac{1}{2} \frac{(2f_i f_j^* \epsilon^2)(2\sqrt{2}f_i \epsilon)(2\sqrt{2}\epsilon f_j^*)}{16} - \\ &\frac{1}{2} \frac{(2\sqrt{2}f_i \epsilon)(2\sqrt{2}\epsilon f_j^*)(2f_i f_j^* \epsilon^2)}{16} + \frac{(2\sqrt{2}f_i \epsilon)(2\sqrt{2}\epsilon f_j^*)(2\sqrt{2}f_i \epsilon)(2\sqrt{2}\epsilon f_j^*)}{64} \\ &= \mu^2 \Gamma_{ik} \Gamma_{jk}^* \epsilon^4 - \mu f_i f_k \Gamma_{ik}^* \epsilon^4 - \mu \Gamma_{ik} f_k^* f_j^* \epsilon^4 + f_i f_j^* |f|^2 \epsilon^4 - f_i f_j^* f_i f_j^* \epsilon^4 + f_i f_j^* f_i f_j^* \epsilon^4 \\ &= (\mu^2 \Gamma_{ik} \Gamma_{jk}^* - \mu f_i f_k \Gamma_{ik}^* - \mu \Gamma_{ik} f_k^* f_j^* + f_i f_j^* |f|^2 - f_i f_j^* f_i f_j^* + f_i f_j^* f_i f_j^*) \epsilon^4 \\ a(\epsilon^4) &= |\Gamma - ff|_{ij}^2 \epsilon^4, \end{aligned}$$

obteniendo las siguientes componentes de masa:

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{ij} = \frac{v^2}{16} |\mu \Gamma - ff|_{ij}^2 \epsilon^2. \quad (5-46)$$

Realizando un proceso similar para  $M_\nu^2(\epsilon^4)$  se obtiene

$$\begin{aligned} (m_\nu^2(\epsilon^4))_{ij} &= -\frac{v^2}{64} (|\mu \Gamma - ff|_{il}^2 f_l f_j^* + 2(\mu \Gamma - ff)_{ik} f_k^* f_l (\mu \Gamma - ff)_{lj}^* \\ &+ f_i f_k^* |\mu \Gamma - ff|_{kj}^2) \epsilon^4, \end{aligned} \quad (5-47)$$

donde se asume que se suma sobre los índices repetidos  $l$  y  $k$ . Si la condición de alineamiento dada por (5-38) se usa en (5-46) y (5-47) se puede observar que estas se anulan, comprobando

de nuevo el caso de tres neutrinos activos ligeros no masivos que se había discutido anteriormente. Para generar la masa de dichas partículas, se producen perturbaciones inducidas por pequeñas desviaciones del alineamiento de los acoplamientos de Yukawa, para lo cual se usa un parámetro tensorial complejo  $\varepsilon_{ij}$  de la siguiente forma:

$$\mu\Gamma_{ij} = (1 + \varepsilon_{(ij)})f_i f_j, \quad (5-48)$$

donde se debe tener en cuenta que la notación dentro de los paréntesis usada para los índices del tensor indica que no se debe sumar sobre estos. Dicha cantidad se puede parametrizar como:

$$\varepsilon_{ij} = |\varepsilon_{ij}|e^{i\phi_{ij}}. \quad (5-49)$$

Reemplazando (5-48) en (5-46) y (5-47) se tendría para los factores de masa

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{ij} = \frac{v^2}{16}(\varepsilon_{(i)k}f_k)(f_k^*\varepsilon_{(j)k}^*)\epsilon^2 f_i f_j^* \quad (5-50)$$

$$(m_\nu^2(\epsilon^4))_{ij} = -\frac{v^2}{64} [(\varepsilon_{(i)k}f_k)(f_k^*\varepsilon_{kl}^*f_l^*)f_l + 2(\varepsilon_{(i)k}f_k)(f_k^*f_l)(f_l^*\varepsilon_{l(j)}^*) + f_k^*(f_k\varepsilon_{kl}f_l)(f_l^*\varepsilon_{l(j)}^*)]\epsilon^4 f_i f_j^*, \quad (5-51)$$

donde, de nuevo, se tiene suma sobre los índices repetidos  $k$  y  $l = 1, 2, 3$ .

## 5.6. Estructuras de la matriz de masa

Para evaluar la concordancia del modelo con las observaciones experimentales es necesario establecer estructuras específicas de la matriz de masa. Para esto, primero se harán ciertas consideraciones sobre el tensor  $\varepsilon_{ij}$  de forma tal que se obtenga una matriz de masa bimaximal (ver anexo B) con jerarquía normal y a orden  $\epsilon^2$ , según la ecuación (5-50). Posteriormente se perturbarán a primer y segundo orden dichas consideraciones y se analizarán los resultados obtenidos.

### 5.6.1. Forma básica bimaximal

Para reproducir dicha forma de acuerdo a la ecuación (B-3) del anexo B, en el modelo planteado en este trabajo, se harán las siguientes suposiciones básicas:

1. Se normalizan los acoplamientos de Yukawa  $f_i$  iguales a la unidad, de forma tal que los acoplamientos  $\Gamma$  dados por (5-48) solo dependan del tensor  $\varepsilon_{ij}$ .
2. Se anulan las componentes fuera de la diagonal  $\varepsilon_{12}$  y  $\varepsilon_{13}$  ( $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = 0$ ).
3. La otra componente fuera de la diagonal,  $\varepsilon_{23}$ , es diferente de cero, tal que reproduzca la condición  $(m_\nu^2)_{22} = -(m_\nu^2)_{23}$  para los términos dominantes.

4. La componente  $\varepsilon_{11}$  se hace igual a cero mientras que las otras componentes son perturbadas en la misma cantidad, es decir,  $|\varepsilon_{22}| = |\varepsilon_{23}| = |\varepsilon_{33}| = |\varepsilon_0|$ .

Una forma de lograr lo mencionado en el numeral 3 es que la componente  $\varepsilon_{23}$  en (5-49) tenga una fase relativa de  $\pi$  con relación a las componentes de la diagonal  $\varepsilon_{22}$  y  $\varepsilon_{33}$ , es decir:

$$\phi_{22} - \phi_{23} = \phi_{23} - \phi_{33} = \pi. \quad (5-52)$$

Calculando los términos  $(m_\nu^2)_{22}$  y  $(m_\nu^2)_{23}$  con ayuda de (5-50)

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{22} = \frac{v^2}{16} (|\varepsilon_{21}|^2 + |\varepsilon_{22}|^2 + |\varepsilon_{23}|^2) \epsilon^2 \quad (5-53)$$

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{23} = \frac{v^2}{16} (\varepsilon_{21}\varepsilon_{31}^* + \varepsilon_{22}\varepsilon_{32}^* + \varepsilon_{23}\varepsilon_{33}^*) \epsilon^2.$$

Aplicando la condición mencionada en el numeral 3 y realizando el cálculo correspondiente:

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{16} (|\varepsilon_{21}|^2 + |\varepsilon_{22}|^2 + |\varepsilon_{23}|^2) \epsilon^2 &= \frac{v^2}{16} (\varepsilon_{21}\varepsilon_{31}^* + \varepsilon_{22}\varepsilon_{32}^* + \varepsilon_{23}\varepsilon_{33}^*) \epsilon^2 \\ |\varepsilon_{22}|^2 + |\varepsilon_{23}|^2 &= -(\varepsilon_{22}\varepsilon_{32}^* + \varepsilon_{23}\varepsilon_{33}^*) \\ &= -[|\varepsilon_{22}||\varepsilon_{32}|e^{i(\phi_{22}-\phi_{32})} + |\varepsilon_{23}||\varepsilon_{33}|e^{i(\phi_{23}-\phi_{33})}] \\ &= |\varepsilon_{22}||\varepsilon_{23}| + |\varepsilon_{23}||\varepsilon_{33}| \\ |\varepsilon_{22}|^2 - |\varepsilon_{22}||\varepsilon_{23}| &= |\varepsilon_{23}||\varepsilon_{33}| - |\varepsilon_{23}|^2 \\ |\varepsilon_{22}|(|\varepsilon_{22}| - |\varepsilon_{23}|) &= |\varepsilon_{23}|(|\varepsilon_{33}| - |\varepsilon_{23}|). \end{aligned} \quad (5-54)$$

Usando las suposiciones enumeradas anteriormente junto con las relaciones de la ecuación (5-53) y reemplazandolas en (5-50), se puede realizar el cálculo de los elementos de la matriz de masa como se ilustra a continuación:

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{11} = \frac{v^2}{16} \varepsilon_{1k}\varepsilon_{1k}^* \epsilon^2 = \frac{v^2}{16} (|\varepsilon_{11}|^2 + |\varepsilon_{12}|^2 + |\varepsilon_{13}|^2) \epsilon^2 = 0 \quad (5-55)$$

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{12} = \frac{v^2}{16} \varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k}^* \epsilon^2 = \frac{v^2}{16} (\varepsilon_{11}\varepsilon_{21}^* + \varepsilon_{12}\varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}^*) \epsilon^2 = 0 \quad (5-56)$$

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{13} = \frac{v^2}{16} \varepsilon_{1k}\varepsilon_{3k}^* \epsilon^2 = \frac{v^2}{16} (\varepsilon_{11}\varepsilon_{31}^* + \varepsilon_{12}\varepsilon_{32}^* + \varepsilon_{13}\varepsilon_{33}^*) \epsilon^2 = 0 \quad (5-57)$$

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{21} = \frac{v^2}{16} \varepsilon_{2k}\varepsilon_{1k}^* \epsilon^2 = \frac{v^2}{16} (\varepsilon_{21}\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}\varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{23}\varepsilon_{13}^*) \epsilon^2 = 0 \quad (5-58)$$

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{22} = \frac{v^2}{16} (|\varepsilon_0|^2 + |\varepsilon_0|^2) \epsilon^2 = \frac{v^2}{16} (2|\varepsilon_0|^2) \epsilon^2 = \frac{v^2}{8} |\varepsilon_0|^2 \epsilon^2 \quad (5-59)$$

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{23} = \frac{v^2}{16} (|\varepsilon_{22}|e^{i\phi_{22}}|\varepsilon_{32}|e^{-i\phi_{32}} + |\varepsilon_{23}|e^{i\phi_{23}}|\varepsilon_{33}|e^{-i\phi_{33}}) \epsilon^2 = -\frac{v^2}{8}|\varepsilon_0|^2\epsilon^2 \quad (5-60)$$

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{31} = \frac{v^2}{16}\varepsilon_{3k}\varepsilon_{1k}^*\epsilon^2 = \frac{v^2}{16}(\varepsilon_{31}\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{32}\varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{33}\varepsilon_{13}^*)\epsilon^2 = 0 \quad (5-61)$$

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{32} = \frac{v^2}{16} (|\varepsilon_{32}|e^{i\phi_{32}}|\varepsilon_{22}|e^{-i\phi_{22}} + |\varepsilon_{33}|e^{i\phi_{33}}|\varepsilon_{23}|e^{-i\phi_{23}}) \epsilon^2 = -\frac{v^2}{8}|\varepsilon_0|^2\epsilon^2 \quad (5-62)$$

$$(m_\nu^2(\epsilon^2))_{33} = \frac{v^2}{16}\varepsilon_{3k}\varepsilon_{3k}^*\epsilon^2 = \frac{v^2}{16}(|\varepsilon_0|^2 + |\varepsilon_0|^2) \epsilon^2 = \frac{v^2}{8}|\varepsilon_0|^2\epsilon^2. \quad (5-63)$$

Usando las ecuaciones (5-55) a (5-63) se puede escribir la matriz de masa a orden  $\epsilon^2$  como

$$m_\nu^{2(0)} = \frac{v^2}{8}|\varepsilon_0|^2\epsilon^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5-64)$$

donde el supraíndice 0 indica el modelo que cumple exactamente todas las condiciones 1 a 4 al inicio de la sección. Realizando un proceso similar al de (3-67) se hallan los valores propios de la matriz inmediatamente anterior, obteniendo:

$$m_1^{(0)} = 0, \quad m_2^{(0)} = 0, \quad m_3^{(0)} = \frac{v^2}{8}|\varepsilon_0|^2\epsilon^2. \quad (5-65)$$

De los vectores propios se puede evidenciar, tomando en consideración la ecuación (4-24) que dos ángulos de mezcla son nulos ( $\theta_{12}^{(0)} = \theta_{13}^{(0)} = 0$ ) y el otro es maximal ( $\theta_{23}^{(0)} = \pi/4$ ).

### 5.6.2. Perturbación a primer orden de la forma bimaximal

El resultado obtenido anteriormente nos lleva a la predicción de un neutrino masivo y un ángulo de mezcla. Para poder generar una predicción que se ajuste a los datos de oscilaciones de neutrinos, y aún manteniendo el orden  $\epsilon^2$ , se puede perturbar ligeramente uno de los términos del tensor  $\varepsilon_{ij}$  modificando la forma de la matriz de masa obtenida en la sección anterior, por ejemplo, si se considera un leve incremento de la componente  $\varepsilon_{22}$  tal que:

$$\varepsilon_{11} = |\varepsilon_{22}| - |\varepsilon_{23}| > 0, \quad \phi_{11} = \phi_{22}. \quad (5-66)$$

Tomando en cuenta (5-65), la ecuación (5-53) se transforma en

$$|\varepsilon_{33}| - |\varepsilon_{23}| = \left(1 + \frac{\varepsilon_{11}}{|\varepsilon_{23}|}\right) \varepsilon_{11}. \quad (5-67)$$

Para simplicidad en los próximos cálculos se definen las cantidades

$$\lambda = \frac{\varepsilon_{11}}{|\varepsilon_{23}|}, \quad m_0^2 = \frac{v^2}{8} |\varepsilon_{23}|^2 \epsilon^2, \quad (5-68)$$

con las cuales se hallan los elementos de la matriz de masa como se hizo en (5-55) a (5-63) al orden  $\epsilon^2$  con ayuda de (5-50) obteniendose

$$m_\nu^{2(1)} = m_0^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & p(\lambda) & -p(\lambda) \\ 0 & -p(\lambda) & p(\lambda)[q(\lambda) - 1] \end{pmatrix}, \quad (5-69)$$

donde

$$p(\lambda) = 1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2, \quad q(\lambda) = 2 + \lambda^2, \quad (5-70)$$

con autovalores y autovectores mostrados en el anexo C, donde el supraíndice (1) indica que es la perturbación (5-66) y a orden  $\epsilon^2$ . Sabiendo que las diferencias de masa cuadrada se calculan como:

$$\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2, \quad (5-71)$$

obteniendo para este caso particular que:

$$\begin{aligned} \Delta m_{21}^{2(1)} &= \frac{1}{2} m_0^2 [p(\lambda)(q(\lambda) - r(\lambda)) - \lambda^2] \\ \Delta m_{31}^{2(1)} &= \frac{1}{2} m_0^2 [p(\lambda)(q(\lambda) + r(\lambda)) - \lambda^2] \\ \Delta m_{32}^{2(1)} &= m_0^2 p(\lambda) r(\lambda), \end{aligned} \quad (5-72)$$

con

$$r(\lambda) = \sqrt{4 + \lambda^4}. \quad (5-73)$$

Al calcular de nuevo, los vectores propios, y al construir la matriz de rotación según la parametrización (4-24), se obtiene para el ángulo  $\theta_{23}$  que:

$$s_{23}^{(1)} = \frac{r(\lambda) - \lambda^2}{\sqrt{2} \sqrt{4 - \lambda^2(r(\lambda) - \lambda^2)}}. \quad (5-74)$$

Sin embargo, los otros dos ángulos de mezcla siguen siendo iguales a cero por lo que hay que considerar el orden  $\epsilon^4$  de la ecuación (5-51), el cual se tratará como una perturbación a segundo orden de la matriz (5-69), como se muestra en la próxima sección.

### 5.6.3. Perturbación a segundo orden de la forma bimaximal

Realizando un cálculo similar al de las ecuaciones (5-55) a (5-63) con ayuda de la contribución al orden  $\epsilon^4$  de la ecuación (5-51), se obtiene que la corrección a segundo orden es

$$\delta m_\nu^2 = -\frac{1}{2}m_0^2\lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2\lambda}{|\lambda|}\right) & \frac{1}{4}\left[3 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} + 2(\lambda + |\lambda|) + \lambda^2\right] \\ * & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(4 + 4\lambda + \lambda^2) \\ * & * & \frac{1}{2}(3 + 4\lambda + 2\lambda^2) \end{pmatrix}, \quad (5-75)$$

la cual puede ser vista como la corrección de la matriz de masa “no perturbada”  $m_\nu^{2(1)}$  dada en (5-69). Utilizando el mismo método de perturbaciones a segundo orden de la mecánica cuántica, los valores y vectores propios vienen dados por:

$$m_i^{2(2)} = m_i^{2(1)} + \epsilon^2 \left( \psi_i^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_i^{(1)} \right) \quad (5-76)$$

$$\psi_i^{(2)} = \psi_i^{(1)} + \epsilon^2 \sum_{j \neq i} \left( \frac{\psi_j^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_i^{(1)}}{\Delta m_{ij}^{2(1)}} \right) \psi_j^{(1)}, \quad (5-77)$$

donde  $m_i^{2(1)}$  y  $\psi_i^{(1)}$  son los autovalores y autovectores de la matriz de masa corregida a primer orden (5-69) y las diferencias de masa cuadrada dadas por (5-71). Dichas cantidades toman los valores

$$\psi_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_{23}^{(1)} \\ s_{23}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \psi_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -s_{23}^{(1)} \\ c_{23}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (5-78)$$

con  $s_{23}^{(1)} = \sin \theta_{23}^{(1)}$  dado en (5-74) y

$$\begin{aligned} m_1^{2(1)} &= \frac{1}{2}m_0^2\lambda^2 \\ m_2^{2(1)} &= \frac{1}{2}m_0^2p(\lambda)(q(\lambda) - r(\lambda)) \\ m_3^{2(1)} &= \frac{1}{2}m_0^2p(\lambda)(q(\lambda) + r(\lambda)). \end{aligned} \quad (5-79)$$

La corrección a segundo orden de las diferencias de masa es

$$\Delta m_{ij}^{2(2)} = \Delta m_{ij}^{2(1)} + \epsilon^2 \Delta_{ij}, \quad (5-80)$$

aquí  $\Delta m_{ij}^{2(1)}$  esta dada por (5-72) y:

$$\Delta_{ij} = \left( \psi_i^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_i^{(1)} - \psi_j^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_j^{(1)} \right). \quad (5-81)$$

Reemplazando (5-78) en (5-77), considerando que  $V_{ij} = \left(\psi_i^{(2)}\right)_j$  e identificando a  $V_{ij}$  con las componentes de la matriz PMNS, se obtienen las siguientes expresiones para las correcciones a segundo orden de los ángulos de mezcla:

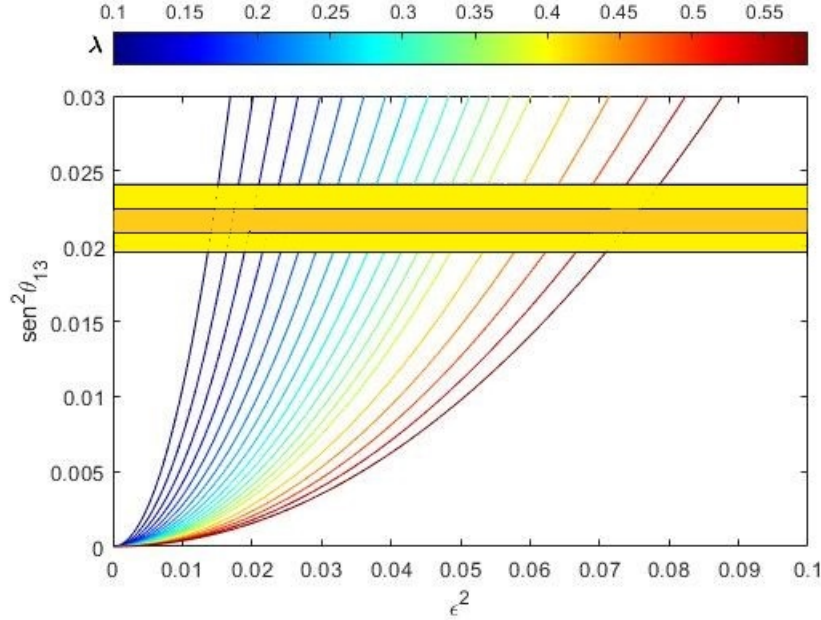
$$\begin{aligned}
 s_{13}^{(2)} &= \left(\psi_1^{(2)}\right)_3 \\
 s_{12}^{(2)} &= \frac{(\psi_1^2)_2}{\sqrt{1 - \left(s_{13}^{(2)}\right)^2}} \\
 s_{23}^{(2)} &= \frac{(\psi_2^2)_3}{\sqrt{1 - \left(s_{13}^{(2)}\right)^2}},
 \end{aligned} \tag{5-82}$$

los cuales se pueden escribir de forma explícita como:

$$\begin{aligned}
 s_{13}^{(2)} &= \epsilon^2 \sum_{j \neq 1} \left( \frac{\psi_j^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_1^{(1)}}{\Delta m_{1j}^{2(1)}} \right) \left(\psi_j^{(1)}\right)_3 \\
 s_{12}^{(2)} &= \frac{\epsilon^2}{\sqrt{1 - \left(s_{13}^{(2)}\right)^2}} \sum_{j \neq 1} \left( \frac{\psi_j^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_1^{(1)}}{\Delta m_{1j}^{2(1)}} \right) \left(\psi_j^{(1)}\right)_2 \\
 s_{23}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(s_{13}^{(2)}\right)^2}} \left[ s_{23}^{(1)} + \epsilon^2 \sum_{j \neq 2} \left( \frac{\psi_j^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_2^{(1)}}{\Delta m_{2j}^{2(1)}} \right) \left(\psi_j^{(1)}\right)_3 \right].
 \end{aligned} \tag{5-83}$$

## 5.7. Ajustes numéricos

Para comparar los resultados obtenidos con el modelo trabajado y los datos experimentales actuales, se realizaron gráficas de los parámetros de oscilación encontrando regiones permitidas para las cantidades  $\lambda$  y  $\epsilon$  dadas por (5-68) y (5-33) respectivamente, en las cuales, hay una concordancia con dichos datos. De la primera de las ecuaciones (5-83) se tiene que  $s_{13}$ , el cual es un observable, es función de  $\lambda$  y de  $\epsilon$  (ver anexo C), los cuales son parámetros libres. Teniendo en cuenta que dicho observable toma valores a  $1\sigma$  y  $3\sigma$  como se muestra en la tabla 4-2, se elaboró una gráfica de este respecto a  $\epsilon^2$  asignando diferentes valores a  $\lambda$  con el fin de obtener las regiones de valores posibles. En la figura 5-1 se muestra la grafica de  $s_{13}$  para un rango de  $\lambda$  que está entre 0.1 y 0.58, donde se observa que valores que quedan dentro de las franjas amarillas ( $3\sigma$ ) y naranja ( $1\sigma$ ) corresponden a aquellos que caen dentro de los valores experimentales. En este caso se puede apreciar de (5-1) que para  $\epsilon^2 = 0.014$  le corresponde  $\lambda = 0.1$ , mientras que con  $\epsilon^2 = 0.079$  se tiene  $\lambda = 0.58$ .



**Figura 5-1.:** Regiones permitidas para  $\epsilon$  y  $\lambda$  compatibles con  $\theta_{13}$  a  $1\sigma$  y  $3\sigma$ .

Repitiendo el mismo análisis para  $s_{23}$  (5-83), se observa la figura (5-2) en la cual se puede apreciar que el ancho de valores permitidos es mayor que en (5-1) lo cual amplía el rango de valores que pueden tomar los parámetros. Para este caso, dichos valores están entre  $0 - 0.1$  y  $0.1 - 0.5$  para  $\epsilon^2$  y  $\lambda$  respectivamente, quedando así por fuera las curvas que se observan en la parte inferior correspondientes a  $\lambda > 0.5$ . Para  $s_{12}$  se observa que a pesar de que la franja de valores permitidos es más amplia que, por ejemplo, la de la figura (5-1), esta es más restrictiva frente a los valores de  $\lambda$ , teniendo a estos en un rango de  $0.1$  a  $0.16$  con  $\epsilon^2$  variando entre  $0.058$  y  $0.1$ . Llevando a cabo un análisis global de cada uno de los rangos obtenidos anteriormente se observa que si  $\epsilon^2$  y  $\lambda$  están en dentro de los rangos  $0.057 - 0.079$  y  $0.1 - 0.16$  respectivamente, se puede ajustar la totalidad de los ángulos de mezcla, teniendo de esta manera un modelo que puede ajustar dichos datos experimentales con tan solo dos parámetros libres.

En las figuras (5-1) a (5-3) se observa también que los valores permitidos para los ángulos de mezcla se encuentran con valores de  $\epsilon^2$  del orden de  $10^{-1}$  y  $10^{-2}$ , lo cual, con ayuda de (5-33) permite inferir que la masa del neutrino derecho oscila entre  $0.8 - 2.6 \text{ TeV}$ . Observando el parámetro  $\lambda$  de las gráficas se tiene para los tres ángulos de mezcla que los valores acorde a los resultados experimentales actuales se obtienen cuando  $\lambda < 1$ , lo que está de acuerdo con la naturaleza perturbativa del método teniendo en cuenta la definición de dicho parámetro dada por la primera de las ecuaciones (5-68). Por último, analizando el caso límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , se tiene que los resultados son consistentes con la forma bimaximal básica (anexo 2) en la que  $s_{12}^2 = s_{13}^2$  y  $s_{23}^2 = 0.5$ , es decir,  $\theta_{23} = \pi/4$ .

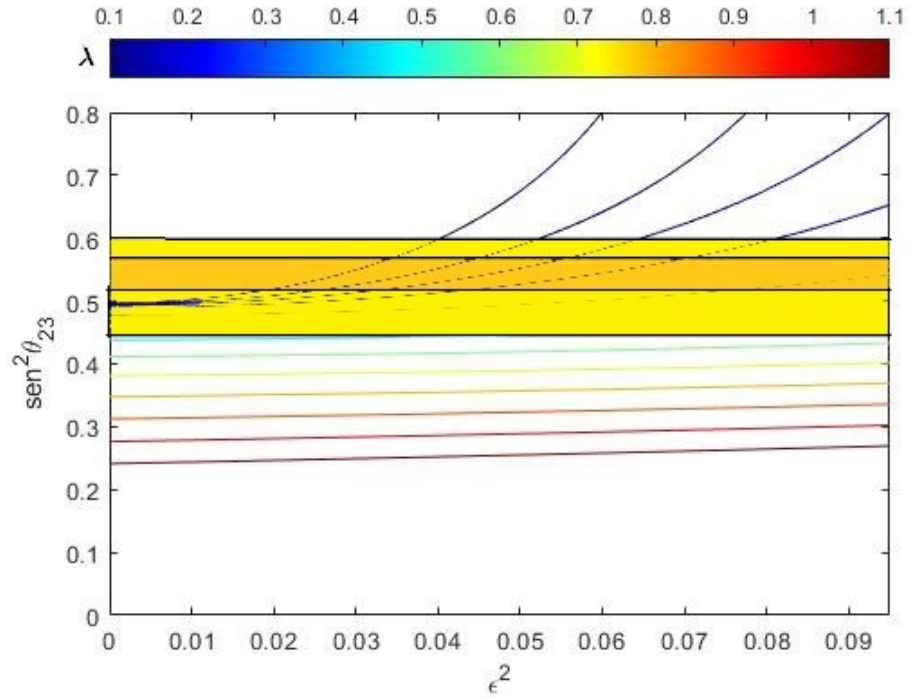


Figura 5-2.: Regiones permitidas para  $\epsilon$  y  $\lambda$  compatibles con  $\theta_{23}$  a  $1\sigma$  y  $3\sigma$ .

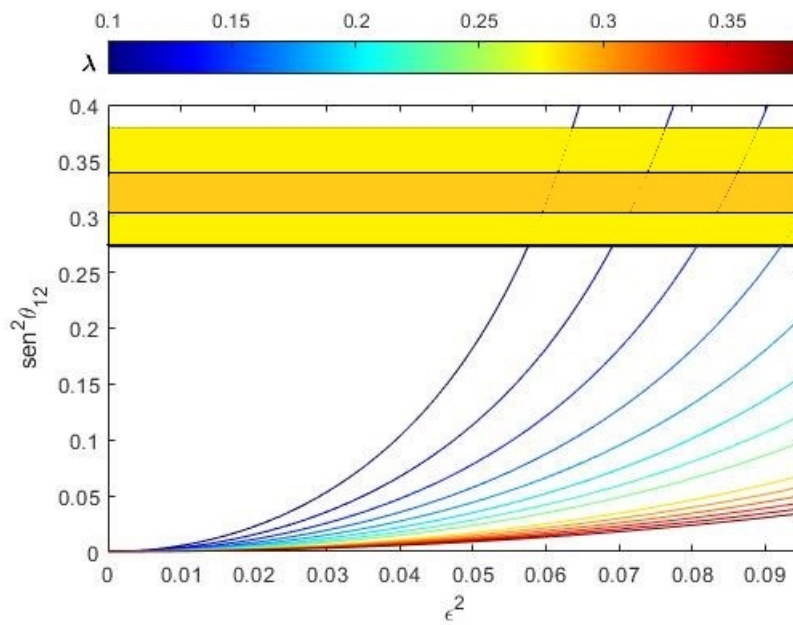
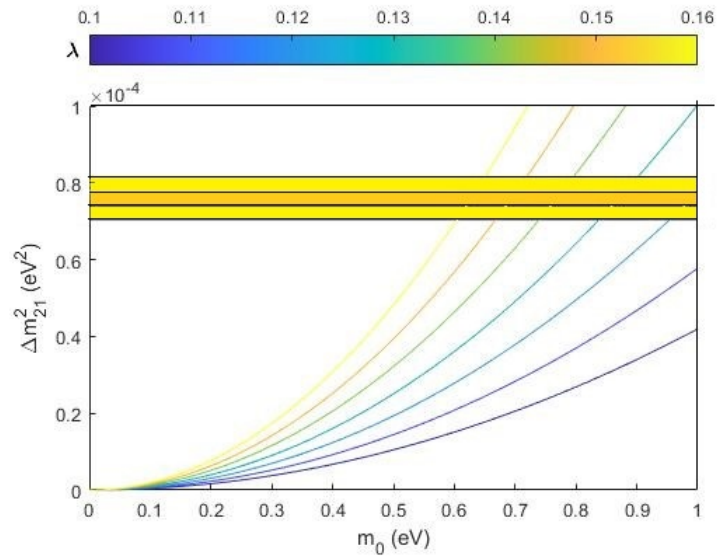


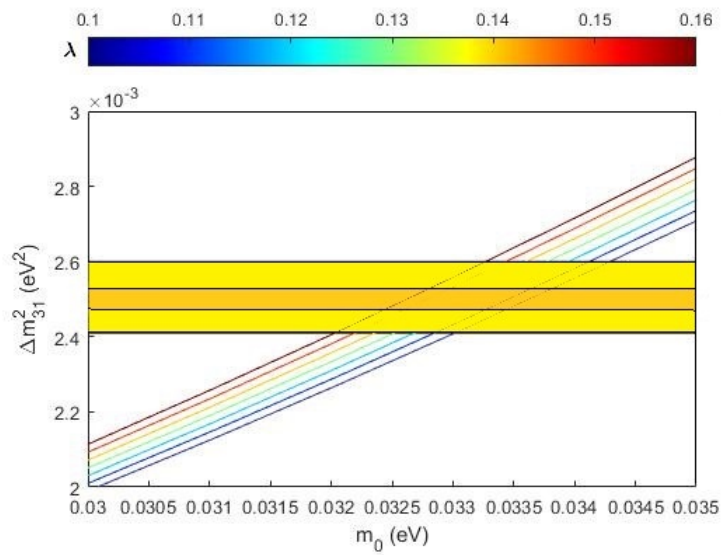
Figura 5-3.: Regiones permitidas para  $\epsilon$  y  $\lambda$  compatibles con  $\theta_{12}$  a  $1\sigma$  y  $3\sigma$ .

Con el fin de dar un rango de valores permitidos de  $m_0$  dado por la segunda de las ecuaciones (5-68), se realizaron gráficas de las diferencias de masas cuadradas contra dicho parámetro, teniendo en cuenta el rango de valores para  $\epsilon^2$  y  $\lambda$  que ajustan la totalidad de los ángulos de mezcla. En la ecuación (5-80) se puede apreciar que  $\Delta m_{ij}^{2(2)}$ , el cual es un observable, depende de la corrección a primer orden de la diferencia de masa cuadrada dada por las ecuaciones (5-72) y del producto de  $\epsilon^2$  con  $\Delta_{ij}$  dado por (5-81). Debido a las definiciones hechas en (5-70), (5-73), a la forma que asumen los elementos de la matriz (5-75) y a la corrección a primer orden de los vectores propios de la matriz de masa dados por (5-78), se tiene que  $\Delta m_{ij}^{2(2)}$  depende de tres parámetros  $\epsilon^2$ ,  $\lambda$  y  $m_0$ .

Teniendo en cuenta que el observable toma valores a  $1\sigma$  y  $3\sigma$  como se muestra en la tabla (4-2) se elaboró una gráfica de este respecto a  $m_0$  tomando un rango para  $\epsilon^2$  entre  $0.057 - 0.079$  y para  $\lambda$  entre  $0.1 - 0.16$  ya que como se mencionó anteriormente en el presente análisis, dichos rangos de valores son los que ajustan la totalidad de los ángulos de mezcla. En la figura (5-4) se muestra la gráfica de  $\Delta m_{21}^2$  contra  $m_0$  donde se observa que aquellos valores que quedan dentro de las franjas amarillas ( $3\sigma$ ) y naranja ( $1\sigma$ ) corresponden a aquellos que caen dentro de los valores experimentales. En este caso se puede apreciar que el rango permitido para  $m_0$  va desde  $0.601$  hasta  $1 eV$ . Repitiendo el mismo análisis para  $\Delta m_{31}^2$  se observa de la figura (5-5) que este observable es mucho más restrictivo para los valores de  $m_0$  obteniéndose para este un rango entre  $0.032$  y  $0.034 eV$ , rango que se repite para  $\Delta m_{32}^2$  en la figura (5-6). También se puede observar que el rango de  $m_0$  en la figura (5-4) es del orden de  $10^{-1} eV$  mientras que en las figuras (5-5) y (5-6) es del orden de  $10^{-2} eV$ , lo cual no resta validez al mecanismo, al contrario insta a explorar otros esquemas perturbativos diferentes a (5-66) que permitan optimizar de una mejor forma los datos experimentales.



**Figura 5-4.:** Región permitida para  $m_0$  compatible con  $\Delta m_{21}^2$  a  $1\sigma$  y  $3\sigma$ .



**Figura 5-5.:** Región permitida para  $m_0$  compatible con  $\Delta m_{31}^2$  a  $1\sigma$  y  $3\sigma$ .

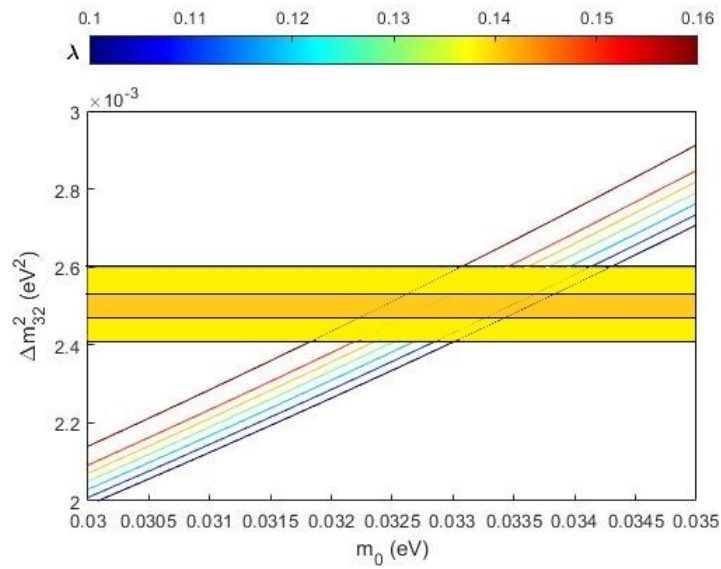


Figura 5-6.: Regi3n permitida para  $m_0$  compatible con  $\Delta m_{32}^2$  a  $1\sigma$  y  $3\sigma$ .

## 6. Conclusiones

Los neutrinos juegan un rol importante dentro de varias ramas de la física, estos existen en todo el universo y se consideran "mensajeros misteriosos" de la naturaleza, son partículas neutras que debido a su baja probabilidad de interacción es muy difícil detectarlas y como consecuencia de esto es el sector menos conocido en el ME de la física de partículas, lo cual, lo pone en el centro de muchos esfuerzos teóricos y experimentales en la actualidad. Dicho modelo también plantea que existen tres sabores de neutrinos no masivos que acompañan a tres leptones cargados con los cuales forman una estructura de doblete de  $SU(2)$ .

El hecho de que los neutrinos sean partículas neutras deja abierta la cuestión de si son partículas de Dirac o de Majorana, si hacen parte del primer grupo como los leptones cargados y los quarks, ellos deben ser distinguibles de sus antipartículas debido a la conservación del número leptónico, mientras que si hacen parte del segundo, por definición, serían su propia antipartícula. Muchos teóricos actualmente creen que los neutrinos son partículas de Majorana y el origen de sus masas debe ser diferente a la de los fermiones cargados. La evidencia de que dichas partículas son masivas se obtuvo gracias al fenómeno de la oscilación de neutrinos, en el cual, a medida que neutrinos de un sabor determinado recorren el espacio, estos evolucionan de manera diferente como autoestados de masa, con lo cual, el sabor del neutrino detectado en un instante puede ser diferente al inicial (teniendo en cuenta que los estados de sabor son combinaciones lineales de los autoestados de masa).

Dentro de los escenarios de generación de masa de neutrinos, los mecanismos seesaw son los más usados para dar cuenta de la existencia de dicha masa y de las diferencias tan marcadas entre estos valores y los de las masas de los otros fermiones y quarks que aparecen en el ME. El punto clave de dichos mecanismos radica en atribuirle la pequeñez de la masa del neutrino a la existencia de nuevos grados de libertad más pesados que la escala de Fermi  $v \simeq 246 \text{ GeV}$ , por ejemplo, nuevas partículas escalares, neutrinos estériles o fermiones cargados. La escala de energía a la cual trabajan dichos mecanismos es de suma importancia ya que esto determina si surgen de manera natural y son verificables experimentalmente. Cabe anotar que en varios modelos las nuevas partículas están restringidas a tener valores de masa muy elevados que no son verificables en los aceleradores de partículas existentes actualmente o los acoplamientos de Yukawa están sujetos a condiciones no naturales para obtener valores producidos por los experimentos.

Este trabajo fue basado en los mecanismos seesaw tipo I y II, en los cuales, debido a la adición de un neutrino derecho y un triplete de Higgs, los valores pequeños de las masas de los neutrinos activos y los ángulos de mezcla pudieron ser reproducidos de acuerdo con los valores experimentales, con la masa del neutrino pesado en un rango de  $0.8 - 2.6 \text{ TeV}$  y los acoplamientos de Yukawa con las partículas del SM siendo del orden de la unidad. Para esto, en este trabajo se plantea un nuevo mecanismo en donde los acoplamientos de Yukawa se alinean exactamente, tal que los acoplamientos del triplete de Higgs sean proporcionales al producto de los acoplamientos del singlete, reproduciendo el caso límite de masa nula para los tres neutrinos activos independientemente de la masa del neutrino pesado. Esta situación se tiene para cualquier expansión perturbativa de la matriz de masa a menos que este alineamiento se rompa. Al momento de perturbar la condición de alineamiento a un primer orden, se obtiene el caso básico bimaximal, y a segundo orden se da el surgimiento de valores para las masas y los ángulos de mezcla en concordancia con las observaciones experimentales, siendo así el rompimiento de la condición de alineamiento el mecanismo generador de las masas de neutrinos activos y de la masa del neutrino pesado.

En este trabajo se consideró un ejemplo de como romper el alineamiento y generar parámetros susceptibles a ajustes a partir de los datos experimentales. Sin embargo, como perspectiva, se plantea un enfoque más general para las desviaciones y que permita ajustar de mejor manera los datos. Igualmente, desde el punto de vista teórico, se puede explorar una base más fundamental de este mecanismo de alineamiento planteado a partir de conceptos de simetrías y su rompimiento, lo que motiva el desarrollo de una investigación más profunda en el futuro.

# A. Diagonalización de la matriz de masa obtenida en el modelo con triplete de Higgs

Tomando una matriz de dimensión 4 de la forma:

$$\hat{M}^2 = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\dagger & C \end{pmatrix}, \quad (\text{A-1})$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son submatrices de dimensión  $3 \times 3$ ,  $3 \times 1$  y  $1 \times 1$  respectivamente, también dichas componentes satisfacen la relación

$$A \ll B \ll C, \quad (\text{A-2})$$

ya que  $A \sim M_R^{-2}$ ,  $B \sim M_R^{-1}$  y  $C \sim 1$ . La matriz (A-1) puede ser diagonalizada por medio de una rotación unitaria [48]:

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - FF^\dagger} & F \\ -F^\dagger & \sqrt{1 - F^\dagger F} \end{pmatrix}, \quad (\text{A-3})$$

con  $F$  una pequeña subrotación menor que 1 y

$$V^T \hat{M}^2 V = \hat{m}^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad (\text{A-4})$$

una matriz diagonal por bloques. Usando (A-3) en (A-4) se calculan cada una de las componentes de  $\hat{m}^2$

$$\hat{m}^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - FF^\dagger} & -F \\ F^\dagger & \sqrt{1 - F^\dagger F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^\dagger & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - FF^\dagger} & F \\ -F^\dagger & \sqrt{1 - F^\dagger F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

obteniéndose así para los elementos de la diagonal principal:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{1 - FF^\dagger} A \sqrt{1 - FF^\dagger} - F B^\dagger \sqrt{1 - FF^\dagger} - \sqrt{1 - FF^\dagger} B F^\dagger + F C F^\dagger \\ b &= F^\dagger A F + \sqrt{1 - F^\dagger F} B^\dagger F + F^\dagger B \sqrt{1 - F^\dagger F} + \sqrt{1 - F^\dagger F} C \sqrt{1 - F^\dagger F} \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

y para los que están fuera de la diagonal:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - FF^\dagger} A F + \sqrt{1 - FF^\dagger} B \sqrt{1 - F^\dagger F} - F B^\dagger F - F C \sqrt{1 - F^\dagger F} &= 0 \\ F^\dagger A \sqrt{1 - FF^\dagger} + \sqrt{1 - F^\dagger F} B^\dagger \sqrt{1 - FF^\dagger} - F^\dagger B F^\dagger \sqrt{1 - F^\dagger F} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

Expandiendo potencias inversas de  $M_R$  con  $F_n \sim M_R^{-n}$ :

$$\sqrt{1 - FF^\dagger} = 1 - \frac{1}{2}FF^\dagger - \frac{1}{8}FF^\dagger FF^\dagger - \frac{1}{16}FF^\dagger FF^\dagger FF^\dagger - \dots \quad (\text{A-7})$$

Para encontrar la forma de  $F = \sum_n F_n$  se debe reemplazar (A-7) en la primera de las ecuaciones (A-6) obteniéndose así expresiones para los ordenes de  $F$  como lo son

$$\begin{aligned} F_1 &= BC^{-1} \\ F_2 &= 0 \\ F_3 &= ABC^{-2} - \frac{3}{2}BB^\dagger BC^{-3} \\ F_4 &= 0 \\ F_5 &= A^2 BC^{-3} - \left[ \frac{5}{2}ABB^\dagger + \frac{3}{2}BB^\dagger \left( A + \frac{1}{3}A^\dagger \right) \right] BC^{-4} + \frac{31}{8}BB^\dagger BB^\dagger C^{-5}. \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

Introduciendo (A-7) y (A-8) en la solución para  $a$  que se halló en la primera de las ecuaciones (A-5) se puede obtener dicho valor hasta un orden  $M_R^{-6}$  siendo

$$\begin{aligned} a &= A - |B|^2 C^{-1} - \frac{1}{2} (A|B|^2 + |B|^2 A) C^{-2} - \frac{1}{2} (A^2 |B|^2 + |B|^2 A^\dagger A - 2|B|^4) C^{-3} \\ &+ \frac{1}{2} \left( |B|^2 A^\dagger |B|^2 - |B|^4 A^\dagger + \frac{7}{4} A |B|^4 + \frac{11}{4} |B|^4 A + \frac{3}{2} |B|^2 A |B|^2 \right) C^{-4} - 2|B|^6 C^{-5}, \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

con  $|B|^2 = BB^\dagger$ . Si los componentes de la matriz (A-1) son de la misma forma que los de (5-40) la ecuación (A-9) sigue vigente y se pueden escribir sus componentes en función de  $\epsilon \sim M_R^{-1}$ , separando los términos de  $a$  conforme a su dependencia con  $\epsilon$  se tiene:

$$\begin{aligned} a(\epsilon)^2 &= 0 \\ a(\epsilon)^4 &= A_4 - B_{13}C_0^{-1} + |B_1|^2 C_0^{-2} - \frac{1}{2} \{A_2, |B_1|^2\} C_0^{-2} + |B_1|^4 C_0^{-3} \\ a(\epsilon)^6 &= -|B_3|^2 C_0^{-1} + B_{13}C_2 C_0^{-2} - \frac{1}{2} \{A_2, B_{13}\} C_0^{-2} - \frac{1}{2} \{A_4, |B_1|^2\} C_0^{-2} - |B_1|^2 C_2^2 C_0^{-3} \\ &+ \{B_{13}, |B_1|^2\} C_0^{-3} + \{A_2, |B_1|^2\} C_2 C_0^{-3} - \frac{1}{2} \{A_2^2, |B_1|^2\} C_0^{-3} - 3|B_1|^4 C_2 C_0^{-4} \\ &+ \frac{7}{8} \{A_2, |B_1|^4\} C_0^{-4} + \frac{5}{4} |B_1|^2 A_2 |B_1|^2 C_0^{-4} - 2|B_1|^6 C_0^{-5}, \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

con  $B_{13} = B_1 B_3^\dagger + B_3 B_1^\dagger$ .

## B. Estructuras de la matriz de masa

Los datos de oscilaciones de neutrinos solares y atmosféricos (Super-K) muestran matrices de mezcla de forma bimaximal ( $\theta_{13} = 0$ ,  $\theta_{12} = \theta_{23} = \frac{\pi}{4}$ ). Teniendo en cuenta lo anterior, la matriz PMNS queda de la siguiente manera:

$$V_{PMNS} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{B-1})$$

Cabe anotar que la ecuación (B-1) muestra la ausencia de violación CP ya que  $V_{e3} = 0$ . Para calcular la matriz de masa en la base de sabor se sabe que sus componentes vienen dadas por:

$$M_{ab} = \sum_j m_j V_{aj} V_{bj}^* \quad (\text{B-2})$$

Calculando cada componente se obtiene una forma general para dicha matriz de mezcla bimaximal:

$$M = m \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \alpha \\ \beta & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \right] \quad (\text{B-3})$$

Donde:

$$m = \frac{m_3}{2}, \quad \alpha = \frac{m_1 + m_2}{4m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2}(m_1 - m_2)}{4m}. \quad (\text{B-4})$$

En particular,  $|\beta|, \alpha \ll 1$  para un esquema de jerarquía normal,  $\alpha \gg 1$  para jerarquía invertida y  $|\beta| \ll \alpha \approx 1$  en el caso cuasidegenerado. El resultado obtenido en KamLAND para el ángulo de mezcla 12 es

$$\sin^2 2\theta_{12} \leq 0,95 \quad (\text{B-5})$$

a  $3\sigma$  [20], el cual descarta el modelo anterior. Para intentar solucionar la discrepancia con el experimento, se plantean otros modelos teóricos, algunos de ellos toman  $\theta_{23} = \pi/4$  haciendo variar  $\theta_{12}$ . Como ejemplo de lo anterior surge un esquema denominado tribimaximal con

$\theta_{23} = \pi/4$ ,  $\tan \theta_{12} = \sqrt{2}/2$  y  $\theta_{13} = 0$  donde la matriz PMNS sería

$$V_{PMNS} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{B-6})$$

El valor predicho para  $\theta_{12}$  es  $35.3^\circ$  que es cercano al dato experimental  $\theta_{12} = (34.1_{-0.8}^{+1.2})^\circ$  [20]. En dicho modelo, la forma más general para la matriz de masa de neutrinos es

$$M = m \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (\text{B-7})$$

con

$$m = \frac{m_3}{2}, \quad \alpha = \frac{m_1 + 2m_2}{6m}, \quad \beta = \frac{(m_1 - m_2)}{3m}. \quad (\text{B-8})$$

Donde los esquemas de jerarquías de masas son idénticos a los del caso bimaximal.

## C. Expresiones de los ángulos de mezcla corregidos a segundo orden en función de $\alpha$

Para generar las gráficas mostradas en el capítulo 6 se obtuvieron expresiones para los ángulos de mezcla en función de la cantidad  $\alpha$  descrita en la primera ecuación de (5-67). En este anexo se elaborará de forma detallada el cálculo para  $s_{13}$  con el fin de ilustrar el proceso. Desarrollando la sumatoria dada en la primera de las ecuaciones (5-75)

$$s_{13}^{(2)} = \epsilon^2 \left( \frac{\psi_2^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_1^{(1)}}{\Delta m_{12}^{2(1)}} [\psi_2^{(1)}]_3 + \frac{\psi_3^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_1^{(1)}}{\Delta m_{13}^{2(1)}} [\psi_3^{(1)}]_3 \right). \quad (\text{C-1})$$

Calculando el numerador de la primera fracción de (D-1):

$$\begin{aligned} \psi_2^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_1^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & c_{23}^{(1)} & s_{23}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\delta m_\nu^2)_{11} & (\delta m_\nu^2)_{12} & (\delta m_\nu^2)_{13} \\ (\delta m_\nu^2)_{21} & (\delta m_\nu^2)_{22} & (\delta m_\nu^2)_{23} \\ (\delta m_\nu^2)_{31} & (\delta m_\nu^2)_{32} & (\delta m_\nu^2)_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_2^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_1^{(1)} &= c_{23}^{(1)} (\delta m_\nu^2)_{21} + s_{23}^{(1)} (\delta m_\nu^2)_{31}. \end{aligned} \quad (\text{C-2})$$

Donde  $(\delta m_\nu^2)_{ij}$  son los elementos de la matriz dada por (C-1),  $s_{23}$  dado por (5-72) y

$$c_{23}^{(1)} = \frac{\sqrt{8 + \lambda^4 - r^2}}{\sqrt{2}\sqrt{4 - \lambda^2(r - \lambda^2)}}. \quad (\text{C-3})$$

Reemplazando lo mencionado anteriormente en (D-2):

$$\begin{aligned} \psi_2^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_1^{(1)} &= \left( -\frac{1}{2} m_0^2 \lambda^2 \right) \frac{\sqrt{8 + \lambda^4 - r^2}}{4\sqrt{2}\sqrt{4 - \lambda^2(r - \lambda^2)}} \left( 1 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} \right) + \\ &\left( -\frac{1}{2} m_0^2 \lambda^2 \right) \frac{r - \lambda^2}{4\sqrt{2}\sqrt{4 - \lambda^2(r - \lambda^2)}} \left[ 3 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} + 2(\lambda + |\lambda|) + \lambda^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{C-4})$$

Realizando un proceso similar para el numerador de la segunda fracción de (D-1)

$$\begin{aligned} \psi_3^{(1)T} \delta m_\nu^2 \psi_1^{(1)} &= \left( \frac{1}{2} m_0^2 \lambda^2 \right) \frac{r - \lambda^2}{4\sqrt{2}\sqrt{4 - \lambda^2(r - \lambda^2)}} \left( 1 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} \right) - \\ &\left( \frac{1}{2} m_0^2 \lambda^2 \right) \frac{\sqrt{8 + \lambda^4 - r^2}}{4\sqrt{2}\sqrt{4 - \lambda^2(r - \lambda^2)}} \left[ 3 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} + 2(\lambda + |\lambda|) + \lambda^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{C-5})$$

Calculando  $s_{13}^2$ :

$$\begin{aligned}
 s_{13}^{(2)} = & \frac{2\epsilon}{m_0^2[p(q-r) - \lambda^2]} \frac{r - \lambda^2}{\sqrt{2}\sqrt{4 - \lambda^2(r - \lambda^2)}} \left( \frac{1}{2} m_0^2 \lambda^2 \right) \left( \frac{\sqrt{8 + \lambda^4 - r^2}}{4\sqrt{2}\sqrt{4 - \lambda^2(r - \lambda^2)}} \left( 1 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} \right) + \right. \\
 & \left. \frac{r - \lambda^2}{4\sqrt{2}\sqrt{4 - \lambda^2(r - \lambda^2)}} \left[ 3 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} + 2(\lambda + |\lambda|) + \lambda^2 \right] \right) - \\
 & \frac{2\epsilon}{m_0^2[p(q+r) - \lambda^2]} \frac{\sqrt{8 + \lambda^4 - r^2}}{\sqrt{2}\sqrt{4 - \lambda^2(r - \lambda^2)}} \left( \frac{1}{2} m_0^2 \lambda^2 \right) \left( \frac{r - \lambda^2}{4\sqrt{2}\sqrt{4 - \lambda^2(r - \lambda^2)}} \left( 1 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} \right) - \right. \\
 & \left. \frac{\sqrt{8 + \lambda^4 - r^2}}{4\sqrt{2}\sqrt{4 - \lambda^2(r - \lambda^2)}} \left[ 3 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} + 2(\lambda + |\lambda|) + \lambda^2 \right] \right).
 \end{aligned} \tag{C-6}$$

Usando (5-71) en (D-6) y simplificando:

$$\begin{aligned}
 s_{13}^{(2)} = & \frac{-\epsilon^2 \lambda^2}{8[4 - \lambda^2(\sqrt{4 + \lambda^4} - \lambda^2)]} \left[ \frac{\sqrt{4 + \lambda^4} - \lambda^2}{\lambda^2 - (1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2)(2 + \lambda^2 - \sqrt{4 + \lambda^4})} \right. \\
 & \left( 2 \left( 1 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} \right) + (\sqrt{4 + \lambda^4} - \lambda^2) \left[ 3 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} + 2(\lambda + |\lambda|) + \lambda^2 \right] \right) - \\
 & \frac{2}{\lambda^2 - (1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2)(2 + \lambda^2 + \sqrt{4 + \lambda^4})} \left( (\sqrt{4 + \lambda^4} - \lambda^2) \left( 1 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} \right) \right. \\
 & \left. \left. - 2 \left[ 3 + \frac{2\lambda}{|\lambda|} + 2(\lambda + |\lambda|) + \lambda^2 \right] \right) \right].
 \end{aligned} \tag{C-7}$$

# Bibliografía

- [1] W. Pauli, *Writings on Physics and Philosophy*, Springer, Berlin Heidelberg, 1994.
- [2] C. Cowan et al., *Science*. **124**, 103 (1956), DOI: 10.1126/science.124.3212.103.
- [3] G. Danby et al., *Phys. Rev. Lett.* **9**, 36 (1962).
- [4] T. Patzak, (DONUT), *EuroPhys.News* **32**, 56 (2001).
- [5] S. Mele, *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* **23**, 89 (2015).
- [6] G. Altarelli, *Encyclopedia of Mathematical Physics*, Elsevier, 2005, arXiv:hep-ph/0510281.
- [7] T. Katori and M. Martini, *J. Phys.* **G45** (2018), arXiv:1611.07770.
- [8] A. de Gouvea et al., (2013), arXiv:1310.4340.
- [9] B. Pontecorvo, *Sov. Phys. JETP* **6**, 429 (1957).
- [10] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28**, 870 (1962).
- [11] F. An et al., *Phys. Rev. Lett.* **108**, 171803 (2012).
- [12] J. Ahn et al., *Phys. Rev. Lett.* **108**, 191802 (2012).
- [13] Y. Abe et al., *Phys. Rev. D* **86**, 052008 (2012).
- [14] P. Zyla et al., (Particle Data Group), *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020**, 083C01 (2020).
- [15] S. Ray, *Int. J. Mod. Phys A* **25**, 4339 (2010), arXiv:1005.1938.
- [16] A. Moreno and C. Quimbay, *Momento* **28**, 15 (2004).
- [17] S. Cebrian, *Prog. Part. Nucl. Phys* **114**, 103807 (2020), arXiv:2008.06426.
- [18] I. Ostrovskiy and K. O'Sullivan, *Mod. Phys. Lett.* **A31**, 1630017 (2016), arXiv:1605.00631.
- [19] K. Zuber, *Pramana* **79**, 781 (2012), arXiv:1201.4665.

- 
- [20] V. Barger, S. Pakvasa, T. Weiler, and K. Whisnant, *Phys. Lett. B* **437**, 107 (1998), arXiv:9806387.
- [21] J. Cao and K. Luk, *Nucl. Phys.* **B908**, 62 (2016), arXiv:1605.01502.
- [22] S. Kim, (RENO), *Nucl. Phys.* **B908**, 94 (2016).
- [23] F. Suekane and T. Bezerra, (Double Chooz), *Nucl. Phys.* **B908**, 74 (2016), arXiv:1601.08041.
- [24] G. Lubkin, *Phys. Today* **1**, 17 (1985), <https://doi.org/10.1063/1.2813695>.
- [25] V. Khachatryan et al., *Phys. Lett. B* **716**, 30 (2012), arXiv:1207.7235.
- [26] G. t'Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys. B* **44**, 189 (1972), [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(72\)90279-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(72)90279-9).
- [27] Z. Xing and S. Zhou, *Neutrinos in Particle Physics, Astronomy and Cosmology*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2011.
- [28] T. Xin, *Observing Muon Neutrino to Electron Neutrino Oscillations in the NO $\nu$ A Experiment*, Doctoral Thesis, Iowa State University, 2016.
- [29] S. Bilenky, *Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos*, Springer, Berlin Heidelberg, 2010.
- [30] C. Giunti and C. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*, Oxford, New York, 2007.
- [31] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-VCH, Weinheim, 2008.
- [32] S. Eidelman et al., (Particle Data Group), *Phys. Lett. B* **1**, 592 (2004).
- [33] M. Aguilar, *Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente*, Ediciones El País, España, 1996.
- [34] R. Mohapatra and P. Pal, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, World Scientific, Singapore, 2004.
- [35] A. Loureiro et al., *Phys. Rev. Lett.* **123**, 8 (2019).
- [36] A. Aguilar-Arevalo et al., MiniBooNE Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 22 (2018).
- [37] V. Gribov and B. Pontecorvo, MiniBooNE Collaboration, *Phys. Lett.* **B28**, 493 (1969).
- [38] O. Miranda et al., *Phys. Rev. Lett.* **117**, 061804 (2016).
- [39] D. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson Education International, New Jersey, 2005.

- 
- [40] E. Akhmedov, *Lectures Given at ICTP Summer School in Particle Physics*, ICTP, Trieste, 1999.
- [41] C. Athanasopoulos et al., LSND Colaboration, Phys. Rev. Lett. **77**, 3082 (1996).
- [42] C. Athanasopoulos et al., LSND Colaboration, Phys. Rev. Lett. **81**, 1774 (1998).
- [43] P. Salas et al., Phys. Lett. B **782**, 633 (2018).
- [44] K. Eguchi et al., KamLAND Colaboration, Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003).
- [45] Y. Fukuda et al., Super-Kamiokande Collaboration, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998).
- [46] M. Tanabashi et al., Particle Data Group, Phys. Rev. D **98**, 030001 (2018).
- [47] J. Rubio, *Generación de Masa de Neutrinos por Mecanismo Seesaw Tipo II*, Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, 2011.
- [48] W. Grimus and L.Lavoura, J. High Energy Phys. **11**, 042 (2000).