UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Método para elegir una cópula arquimediana óptima

Diana Carolina Moreno Chavarro

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá, Colombia
2012

Método para elegir una cópula arquimediana óptima

Diana Carolina Moreno Chavarro

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Estadística

Directora:
Liliana Blanco Castañeda
DOCTOR RERUM NATURALIUM IN MATHEMATIK

Línea de Investigación:
Procesos estocásticos
Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá, Colombia
2012

Título en español

Método para elegir una cópula Arquimediana óptima

Title in English

Method to choose a Archimedean copula optimal.

Resumen: Actualmente las Cópulas son una herramienta muy fuerte para el modelamiento de datos en los que la dependencia entre variables aleatorias es importante y el supuesto de normalidad no se tiene. Sin embargo, la selección de una cópula adecuada es uno de los grandes retos para el investigador, debido, a que no existe un método estándar para dicha selección. Realizando una comparación entre los métodos de estimación paramétrica, no paramétrica y semiparamétrica se pretende dar una metodología para seleccionar una cópula arquimediana óptima, teniendo en cuenta métodos gráficos y analíticos.

Abstract: Nowdays, copula are every strong tool model data in which dependence among random variable is important and there is an absence of the normality. However, one of the highest changes for a researches is to select the adequate copula since there isn't any standar method to do so. A metodology to select the best archimedean copula is intented to be reached by comparing the methods of nonparametric, parametric and semiparametric estimation taking into account graphic and analytic methods.

Palabras clave: Cópula, marginales, método paramétrico, no paramétrico, semiparamétrico, bondad de ajuste.

Keywords: Copula, uniform distribution, parametric, nonparametrica and semiparametric stimation.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobada

Jurado
Carlos Mario Lopera

Jurado
Edilberto Cepeda Cuervo

Jurado

Director
Liliana Blanco Castañeda

Bogotá, D.C., Septiembre de 2012

Dedicado a

A mi padres,Marina y Rafael,
y a mi hermana Alejandra, por su apoyo incondicional,
a mis amigos y compañeros Andrés y Mafe
por su colaboración.

Agradecimientos

Agradezco ante todo a Dios por permitirme llegar hasta este logro, a mis padres por su apoyo incondicional, a Andrés compañero y amigo por compartir los mejores momentos de la maestría trabajando fuertemente para obtener los mejores resultados en la maestría, a Mafe por sus sabios aportes y consejos, a Gualberto, Diego, Fabián, Alex y todos aquellos amigos y compañeros que de una u otra han contribuido para alcanzar este logro, gracias por su apoyo.

A los profesores José Alberto Vargas, Edilberto Cepeda, Luis Alberto López, Campo Elías Pardo y Álvaro Montenegro, quienes con sus extraordinarias clases hicieron que me sintiera más a gusto con esta decisión de tomar la Maestría en Estadística, y que con cada unas de sus enseñanzas aportaron para la elaboración de este trabajo. Al profesor José Hernán Parra de la universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, por su continuo apoyo y motivación para ingresar a esta excelente maestría.

Al Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales IDEAM por su apoyo con los datos para la aplicación de la teoría expuesta en este trabajo.

Por último, una gran agradecimiento a la excelentísima directora de esta tesis, la profesora Liliana Blanco, por su tiempo, colaboración, disposición y constante apoyo que hizo posible la elaboración completa de este trabajo,simplemente gracias.

Índice general

Índice general **I**

Índice de tablas **IV**

Índice de figuras **V**

Introducción **VI**

1. Marco Teórico **1**

1.1. Conceptos Preliminares 1

1.2. Cópulas y medidas de dependencia 3

1.2.1. Correlación lineal 3

1.2.2. Cópulas 5

1.2.3. Medidas de correlación de rango 11

1.2.4. Coeficiente de dependencia en las colas. 13

1.3. Teoremas y propiedades principales 15

1.4. Clases de Cópulas 16

1.4.1. Cópulas Arquimedianas 17

1.4.1.1. Principales propiedades de las cópulas arquimedianas 18

1.4.2. Cópulas Elípticas 21

1.4.3. Cópula de valor extremo 22

1.5. Cópula Empírica 23

1.6. Métodos gráficos para detectar dependencia: Chi-plot y K-plot 24

1.6.1. Chi-plot 24

1.6.2. K-plot 26

2. Inferencia para cópulas **28**

2.1. Selección de la cópula 28

2.2. Determinación de las distribuciones marginales 29
2.2.1. Estimación a partir de la muestra 29
2.3. Propuesta inicial de un conjunto de Cópulas 29
2.4. Selección de una cópula dentro de una familia 30
2.5. Métodos de estimación del parámetro de dependencia θ 31
2.5.1. Estimación Paramétrica 31
2.5.1.1. Método de Máxima Verosimilitud: 31
2.5.1.2. Inferencia para marginales (IFM) 32
2.5.2. Estimación no paramétrica 34
2.5.2.1. Estimación a través de correlación de rangos (Método de momentos): 34
2.5.3. Estimación semiparamétrica 35
2.5.3.1. Estimación de máxima pseudo-verosimilitud 36
2.5.4. Representación gráfica de la mejor cópula 36
2.5.5. Aproximación analítica de los métodos gráficos 38
2.5.5.1. Chi-Cuadrado 38
2.5.5.2. Kolmogorov-Smirnov 39
2.5.5.3. Criterio de Información de Akaike 39
2.5.5.4. Contraste de Bondad de ajuste 39

3. Simulación **41**
3.1. Simulación 41
3.1.1. Parámetro de dependencia 42
3.1.2. Cópula Clayton 42
3.1.3. Cópula Gumbel 42
3.1.4. Cópula Frank 43
3.1.5. Cópula Joe 44
3.2. Comparación de parámetros 44
3.3. Simulación de datos 48
3.4. Aplicación 52
3.4.1. Análisis de los datos 53

Conclusiones **59**

Trabajo futuro **60**

Código utilizados en esta tesis **61**

Bibliografía **66**

Índice de tablas

1.1. Familia de cópulas arquimedianas. 18

1.2. Familia de cópulas arquimedianas. 21

3.1. estimación del parámetro θ por los tres métodos 45

3.2. Comparación valores de θ para la cópula Clayton mediante los tres métodos expuestos 46

3.3. Comparación valores de θ para la cópula Frank mediante los tres métodos expuestos 46

3.4. Comparación valores de θ para la cópula Gumbel mediante los tres métodos expuestos 47

3.5. Comparación valores de θ para la cópula Joe mediante los tres métodos expuestos 48

3.6. Valores estimados de θ mediante los métodos paramétrico, no paramétrico y semiparamétrico, para cuatro familias de cópulas. 49

3.8. P-valor mediante la prueba χ^2 para el método gráfico 1. 51

3.9. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov para el método gráfico 2. . 51

3.7. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov para el método gráfico 1. . 51

3.10. P-valor mediante la prueba χ^2 para el método gráfico 2. 52

3.11. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov para el método gráfico 3. . 52

3.13. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov y χ^2 para el método gráfico I. 54

3.12. Valores estimados de θ mediante los métodos no paramétrico y semiparamétrico, para cuatro familias de cópulas. 54

3.14. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov y χ^2 para el método gráfico II. 55

3.15. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov para el gráfico tipo III. . . 56

3.16. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov y χ^2 para el método gráfico I. 56

3.17. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov y χ^2 para el gráfico tipo II. 57

3.18. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov para el gráfico tipo III. . . 58

Índice de figuras

1.1. Chi-plot para variables dependientes con $p = 0.95$ 26
1.2. Chi-plot para variables independientes con $p = 0.95$ 26
1.3. K-plot para variables dependientes 27
1.4. K-plot para variables independientes 27

3.1. Parámetro de dependencia cópula Clayton 42
3.2. Chiplots correspondientes a la cópula Clayton 42
3.3. Parámetro de dependencia cópula Gumbel 43
3.4. Chiplots correspondientes a la cópula Gumbel 43
3.5. Parámetro de dependencia cópula Frank 43
3.6. Chiplots correspondientes a la cópula Frank 43
3.7. Parámetro de dependencia cópula Joe 44
3.8. Chiplots correspondientes a la cópula Joe 44
3.9. Chi-plot 49
3.10. K-plot 49
3.11. Estimación paramétrica 50
3.12. Estimación no paramétrica 50
3.13. Estimación semiparamétrica 50
3.14. K-plot para nivel y concentración de la estación Nemizaque 53
3.15. Chi-plot para nivel y concentración de la estación Nemizaque 53
3.16. Estimación no paramétrica, gráfica tipo I 54
3.17. Estimación no paramétrica, gráfica tipo II 55
3.18. Estimación no paramétrica, gráfica tipo III 55
3.19. Estimación semi paramétrica, gráfica tipo I 56
3.20. Estimación semi paramétrica, gráfica tipo II 57
3.21. Estimación semi paramétrica, gráfica tipo III 57

Introducción

La palabra cópula proviene del latín y, según el Diccionario de la Real Academia Española, significa "atadura, ligamento de algo con otra cosa" o, en su sentido gramatical, "término que une el sujeto con el predicado".
Teniendo en cuenta esta definición, se usó este término para definir las cópulas como aplicaciones que *copulan* funciones de distribución multivariada a sus funciones de distribución univariadas, [Nelsen, 2006] y extraen la estructura de dependencia de la función de distribución multivariada.

La historia de las cópulas inicia con el problema expuesto por Fréchet [Fréchet, 1951] sobre la relación entre una función de distribución de probabilidad multidimensional y sus marginales de menor dimensión [Escarela and Hernández, 2009], la solución a este problema fue dada en 1959 por Abel Sklar [Sklar, 1959] quien planteó y estableció el concepto tal y como lo conocemos en la actualidad, y desarrolló gran parte de la teoría, en particular, el teorema que lleva su nombre y que provee un camino para analizar variables aleatorias a partir de su distribución conjunta, sin estudiar las distribuciones marginales [Bouyé, 2000].

Alrededor de los siguientes quince años, todos los resultados concernientes a cópulas fueron obtenidos en el marco de la teoría de espacios métricos de probabilidad [Escarela and Hernández, 2009], sin embargo, a mediados de los 70's el interés de la comunidad estadística por este tema surge cuando Bert Schweizer [Escarela and Hernández, 2009] se da cuenta que él podía construir fácilmente las medidas de dependencia realizadas en el artículo de Rényi [Rényi, 1959], mediante cópulas. Durante varios años más, el capítulo 6 del libro fundamental [Schweizer and Sklar, 1983], dedicado a la teoría de los espacios métricos probabilísticos, publicado en 1983, fue la principal fuente de información básica sobre las cópulas [Escarela and Hernández, 2009].

En 1990 se organiza la primera conferencia dedicada a cópulas y de aquí se derivan una serie de conferencias realizadas en Seatle-1993,Praga-1996, Barcelona-2000, Québec-2004, Tartu-2007 y Sao Paulo en el 2010 [Escarela and Hernández, 2009]. En 1997 Joe publica el libro *Multivariate models and dependence concepts* [Joe, 1997] con un capítulo dedicado a cópulas y en 1999 Nelsen, publica su primera edición del libro *An Introduction to Copulas* [Nelsen, 2006]. Actualmente las Cópulas son una herramienta muy fuerte de modeladamiento de datos en los que la dependencia entre variables aleatorias es importante y el supuesto de normalidad no se tiene. La mayoría de sus aplicaciones se han realizado en el campo financiero, sin embargo hay muchas más ramas en las que ha sido de gran utilidad (ingeniería, medicina, agronomía, actuaría entre otras)[Lopera et al., 2009].

Este trabajo se divide en tres capítulos. En el primero encontramos las definiciones básicas y necesarias para definir una cópula y todo lo concerniente a teoremas, proposiciones y clases de cópulas, en particular las pertenecientes a la clase arquimediana.

En el segundo capítulo se hace referencia a todo lo relacionado con bondad de ajuste para cópulas, en particular la forma de estimar el parámetro de dependencia mediante los métodos paramétrico, no paramétrico y semi-paramétrico, este último es una combinación de los métodos paramétrico y no paramétrico.

En el tercer capítulo realizamos simulaciones en el software R [R Development Core Team, 2007] con el fin de mostrar la parte teórica expuesta a lo largo de este trabajo, por último, realizamos una aplicación a datos reales, obtenidos del IDEAM.

Por último tenemos las conclusiones generales acerca de las formas de seleccionar una cópula mediantes tres métodos gráficos y la respectiva selección analítica.

CAPÍTULO 1

Marco Teórico

1.1. Conceptos Preliminares

A continuación presentamos los conceptos básicos necesarios para la elaboración de este trabajo. Cuando se use el término *función de distribución de una variable aleatoria* hacemos referencia a la función $F_X(x) = P(X \leq x)$ definida sobre $\mathbb{R}$, la cual resulta ser una función continua por derecha, no decreciente y tal que $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$. En el caso n-dimensional utilizaremos vectores aleatorios.

El lector interesado en profundizar más la teoría que se expone en esta sección puede consultar los siguientes textos: Ayyad[Ayyad, 2008], Becerra [Becerra and Melo, 2008], Blanco [Blanco, 2010], Nelsen [Nelsen, 2006] y Quevedo [Quevedo, 2005].

Supongamos que tenemos dos variables aleatorias X e Y entonces si valores 'grandes' (pequeños) de una tienden a estar asociados con valores 'grandes' (pequeños) de la otra diremos que estas variables son concordantes, por otro lado si valores 'grandes' (pequeños) de una tienden a estar asociados con valores 'pequeños' (grandes) de la otra diremos que estas variables son discordantes. A continuación definimos los conceptos de concordancia y discordancia:

Definición 1. Concordancia

Sean (x_i, y_i) y (x_j, y_j) dos observaciones de un vector de variables aleatorias continuas (X, Y) se dice que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son **concordantes** si $x_i < x_j$ y $y_i < y_j$ o $x_i > x_j$ y $y_i > y_j$.

Una forma alterna de presentar la anterior definición es: (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son concordantes si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$.

Definición 2. Discordancia Sean (x_i, y_i) y (x_j, y_j) dos observaciones de un vector de variables aleatorias continuas (X, Y) se dice que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son **discordantes** si $x_i < x_j$ y $y_i > y_j$ o $x_i > x_j$ y $y_i < y_j$.
Una forma alterna de presentar la anterior definición es (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son concordantes si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

Una de las distribuciones más utilizada en estadística es la distribución normal. Como una extensión de esta distribución tenemos la distribución esférica denotada por $N_n(0, I_n)$ y la distribución elíptica denotada por $N_n(\mu, \Sigma)$ que serán definidas a continuación.

Definición 3. Distribución esférica
Un vector aleatorio $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ tiene distribución esférica $S_n(\phi)$ si su función característica $\varphi_X(t)$ satisface:

$$\varphi_X(t) = \phi(t^t t)$$

para alguna función escalar $\phi(\cdot)$, y escribimos $X \sim Sn(\phi)$.

Definición 4. Distribución elíptica Si X es un vector aleatorio n-dimensional y, para algún $\mu \in \mathbb{R}^n$ y Σ una matriz simétrica de dimensión nxn y definida no negativa, la función característica $\varphi_{X-\mu}(t)$ de $X - \mu$ es una función de la forma cuadrática $t'\Sigma t$, esto es:

$$\varphi_{X-\mu}(t) = \phi(t'\Sigma t)$$

entonces decimos que X tiene una distribución elíptica con parámetros μ, Σ y ϕ y se denota $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$

La distribución doble exponencial o de Laplace hace parte de las distribuciones elípticas.

La siguiente proposición es de gran uso en la teoría de cópulas [Yang, 2010]:

Proposición 1. *Si la función de distribución F de una variable aleatoria es continua y estrictamente creciente entonces la variable:*

$$U = F(X) \quad \textit{se distribuye uniformemente en el intervalo} \quad [0, 1]$$

$$y \quad X = F^{-1}(U)$$

Demostración. Para cualquier $t \in (0,1)$ entonces:

$$\begin{aligned} F(t) = P(U \leq t) &= P(F(X) \leq t) \\ &= P(X \leq F^{-1}(t)) \\ &= F(F^{-1}(t)) \\ &= t \end{aligned}$$

□

1.2. Cópulas y medidas de dependencia

A continuación se presentan las medidas de dependencia más destacadas en la literatura, como son el coeficiente de correlación de Pearson, las medidas de correlación de rango, coeficiente de dependencia en colas y se establecerá la relación que presentan las cópulas con las medidas de correlación de rango.

1.2.1. Correlación lineal

El coeficiente de correlación lineal es uno de los más utilizados por su facilidad de cálculo, por su naturalidad como una medida de dependencia en distribuciones normal multivariada.

Definición 5. Coeficiente de correlación de Pearson

Sean X e Y variables aleatorias reales con $0 < var(X) < \infty$ y
$0 < var(Y) < \infty$, el coeficiente de correlación entre X e Y se define como [Blanco, 2010]:

$$\rho(X,Y) := \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)}}$$

donde $Cov(X,Y)$ es la covarianza entre X e Y y $var(X)$, $var(Y)$ son las varianzas de X e Y respectivamente.

Las propiedades del coeficiente de correlación lineal se pueden resumir de la siguiente manera [De Matteis, 2001]:

1. $|\rho(X,Y)| \leq 1$
2. Si X e Y son independientes entonces $\rho(X,Y) = 0$
3. $\rho(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = sgn(\alpha\gamma)\rho(X,Y)\ \forall \alpha, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\},\ \beta, \delta \in \mathbb{R}$
4. En el caso de dependencia lineal perfecta, es decir $Y = aX + b$ para $a \in \mathbb{R}\ a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}$ se tiene $\rho(X,Y) = \pm 1$

Estas propiedades muestran además que la correlación lineal es invariante bajo transformaciones lineales estrictamente crecientes, esto es $\rho(X, f(Y)) = \rho(X,Y)$ cuando $f(Y) = a + bY$ con $b > 0$.

No obstante hay grandes desventajas con el uso de esta medida, a continuación exponemos algunas de ellas [De Matteis, 2001]:

- La varianza de X e Y debe ser finita de lo contrario la correlación lineal no está definida.
- Independencia de dos variables aleatorias implica que no están correlacionadas, es decir $\rho(X,Y) = 0$ pero una correlación de 0 no implica en general independencia, pues esto ocurre solo en el caso de la distribución normal multivariada. A continuación exponemos un ejemplo para el caso bivariado:

Sean X e Y dos variables aleatorias normales con coeficiente de correlación $\rho(X,Y) = 0$, entonces la función de densidad conjunta queda como sigue:

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\exp\left[-\frac{(X-\mu_x)^2}{2\sigma_X^2} - \frac{(Y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right] \\ &= \left\{\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(X-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right]\right\}\left\{\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(Y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]\right\} \\ &= f(X)f(Y) \end{aligned}$$

así cuando $\rho(X,Y) = 0$ $f(X,Y) = f(X)f(Y)$ que es la condición de independencia entre dos variables aleatorias.

- La correlación lineal no es invariante bajo transformaciones no lineales estrictamente crecientes $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ya que para dos variables aleatorias de valor real se tiene en general:

$$\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X,Y)$$

Debido a los problemas que presenta el coeficiente de correlación de Pearson, otras medidas de dependencia son utilizadas como los coeficientes ρ de Spearman denotado por ρ_S y el coeficiente τ de Kendall denotado por ρ_τ. Estas medidas se pueden expresar mediante funciones denominadas cópulas y que a continuación exponemos.

1.2.2. Cópulas

Las cópulas han tenido un gran desarrollo en la literatura de los últimos años, debido a que permiten especificar las distribuciones marginales univariadas y su comportamiento conjunto por separado. En esta sección introducimos los principales conceptos y características de la teoría de cópulas necesarias para el desarrollo de este trabajo.

Para empezar esta sección introducimos algunas notaciones. Un rectángulo en $\overline{\mathbb{R}}^2$, ($\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$) es el producto cartesiano de dos intervalos cerrados: $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Los vértices del rectángulo B son los puntos $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1)$ y (x_2, y_2). Una función real bivariada H es una función cuyo dominio, $DomH$ es un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}^2$ y cuyo rango $RanH$, es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Definición 6. Sean S_1 y S_2 subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, sea H una función real tal que $DomH = S_1 \times S_2$, $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ un rectángulo cuyos vértices están en $DomH$, entonces el H-volumen de B está definido por:

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1)$$

Definición 7. La función H dada en la definición 6 es creciente si $V_H(B) \geq 0$ para todo B, cuyos vértices están en el dominio de H.

Como consecuencia de las anteriores definiciones obtenemos el siguiente lema:

Lema 1. *Sean S_1 y S_2 subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y sea H una función creciente bivariada con dominio $S_1 \times S_2$. Sean x_1, x_2 en S_1 con $x_1 \leq x_2$, y_1, y_2 en S_2 con $y_1 \leq y_2$, entonces la función $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ es no decreciente sobre S_1 y la función $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ es no decreciente sobre S_2.*

Del lema 1 tenemos las siguientes propiedades:

1. Suponga que S_1 tiene un mínimo a_1 y S_2 tiene un mínimo a_2. Decimos que una función H de $S_1 \times S_2$ en $\mathbb{R}$ es *fundamentada* si $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$ para todo (x, y) en $S_1 \times S_2$.

2. Suponga que b_1 y b_2 son los elementos máximos de S_1 y S_2 respectivamente,entonces una función H de $S_1 \times S_2$ en $\mathbb{R}$ tiene marginales, y estas marginales son las funciones F y G dadas por:

$$DomF = S_1 \quad \text{y} \quad F(x) = H(x, b_2) \quad \text{para todo} \quad x \in S_1$$
$$DomG = S_2 \quad \text{y} \quad G(y) = H(b_1, y) \quad \text{para todo} \quad y \in S_2$$

Ejemplo 1. El siguiente ejemplo es tomado del libro de Nelsen[Nelsen, 2006]. Sea H una función con dominio $[-1, 1] \times [0, \infty]$, dada por:

$$H(x, y) = \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1}$$

Entonces H es fundamentada porque

$$H(x,0) = \frac{(x+1)(e^0-1)}{x+2e^0-1} = 0$$
$$H(-1,y) = \frac{(-1+1)(e^y-1)}{-1+2e^y-1} = 0$$

con marginales:

$$F(x) = H(x,\infty) = \frac{x+1}{2}$$
$$G(y) = H(1,y) = 1-e^{-y}$$

Ya hemos dado conceptos necesarios para definir formalmente una cópula.

Definición 8. (Cópula)

Una cópula es una función $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que satisface las siguientes condiciones:

- $C(u,1) = u$; $C(1,v) = v$ $u, v \in [0,1]$
- $C(u,0) = 0 = C(0,v)$
- Para todo $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$, tal que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$

$$V_C([u_1,u_2] \times [v_1,v_2]) = C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0 \quad (1.1)$$

Ejemplo 2. Para el caso bidimensional consideremos la función $\prod(u,v) = uv$, veamos que es una cópula. Verificamos que cumpla con las propiedades antes expuestas, en efecto:

i) Para todo $u, v \in [0,1]$,

$$\prod(u,0) = u0 = 0 \quad \prod(0,v) = 0v = 0$$

ii) Para todo $u, v \in [0,1]$,

$$\prod(u,1) = u1 = u \quad \prod(1,v) = 1v = v$$

iii) Para todo $u_1, u_2, v_2, v_1 \in [0,1]$ tal que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$ la propiedad (3) se reduce a:

$$V_H([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \tag{1.2}$$

$$= (v_2 - v_1)(u_2 - u_1) \geq 0 \tag{1.3}$$

Ésta cópula se denomina cópula de independencia.

Teorema 1. ***Cotas de Fréchet-Hoeffding****[Escarela and Hernández, 2009]*

Sea C una cópula entonces para todo $(u_1, u_2) \in DomC$,

$$W(u_1, u_2) = \text{máx}(u_1 + u_2 - 1, 0) \leq C(u_1, u_2) \leq \text{mín}(u_1, u_2) = M(u_1, u_2) \tag{1.4}$$

Nota: $W(u_1, u_2)$ no es una cópula para dimensiones mayores que 2.

El teorema que a continuación presentamos se denomina *Teorema de Sklar* en honor a su creador Abel Sklar [Bouyé, 2000]. Es de gran importancia en la teoría de cópulas, pues establece la relación que existe entre las distribuciones multivariadas y sus marginales univariadas a través de una cópula. Antes introducimos algunos conceptos.

Definición 9. Una función de distribución bivariante es una función $H : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ que cumple con las siguientes propiedades:

1. H es una función no decreciente respecto las dos variables.
2. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ y $H(\infty, \infty) = 1$, donde

$$H(x, -\infty) = \lim_{y \to -\infty} H(x, y)$$

Por tanto, H es *fundamentada* y su dominio es todo $\overline{\mathbb{R}}^2$, H tiene marginales F y G dadas por $F(x) = H(x, \infty)$ y $G(y) = H(\infty, y)$.

Teorema 2. ***Teorema de Sklar***

Sea $H(x, y)$ una función de distribución bivariante con marginales $F(x)$ y $G(y)$ entonces existe una cópula C tal que para todo $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \tag{1.5}$$

Si $F(x)$ y $G(y)$ son contínuas, la cópula $C(u, v)$ es única. Dicho de otro modo, $C(u, v)$ queda determinada de forma única en $RanF \times RanG$, con $RanF$ y $RanG$ el rango de F y G respectivamente.Inversamente, si C es una cópula y F, G son funciones de distribución, entonces H es una función de distribución conjunta con marginales F y G.

Como corolario del teorema de Sklar, se obtiene un método para la construcción de cópulas a partir de la función de distribución conjunta.

Corolario 1. *Sean X e Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H y funciones de distribución marginales continuas F y G respectivamente, entonces para cualquier $u, v \in Dom\ C$,*

$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) \tag{1.6}$$

donde $F^{(-1)}$ es la cuasi-inversa de F, dada por $F[F^{(-1)}(t)] = t$ si $t \in RanF$, o por $F^{(-1)}(t) = \sup\{z|F(z) \leq t\}$ si $t \notin RanF$; $G^{(-1)}$ se define análogamente. Las cuasi-inversas se utilizan para funciones de distribución no estrictamente crecientes.

Realizamos la demostración para el caso en que las funciones de distribución F y G sean estrictamente crecientes.

Demostración. Sean U y V definidas por $U = F(X)$ y $V = G(Y)$. Es claro que U y V son variables aleatorias con distribución uniforme en $(0, 1)$. Entonces:

$$\begin{aligned} C(u, v) &= P(U \leq u, V \leq v) \\ &= P(F(X) \leq u, G(Y) \leq v) \\ &= P(X \leq F^{-1}(u), Y \leq F^{-1}(v)) \\ &= H(F^{-1}(u), F^{-1}(v)) \end{aligned}$$

□

En el siguiente ejemplo tomado de Bianco [Bianco et al., 2010], F y G son estrictamente crecientes.

Ejemplo 3. Sean X e Y variables aleatorias con función de distribución conjunta dada por:

$$\begin{aligned} H(x,y) &= exp\left[-(e^{-\theta x}+e^{-\theta y})^{1/\theta}\right] \quad \theta \geq 1, x, y \in \mathbb{R} \\ F(x) &= exp(-e^{-x}) \\ G(y) &= exp(-e^{-y}) \quad \text{siendo sus funciones inversas} \\ F^{-1}(u) &= -\ln(-\ln(u)) \\ G^{-1}(v) &= -\ln(-\ln(v)) \quad \text{reemplazando en 1.6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(u,v) &= H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \\ &= \exp\left[-(e^{-\theta[-\ln(-\ln u)]}+e^{-\theta[-\ln(-\ln v)]})^{1/\theta}\right] \\ &= \exp\left[-(e^{\ln(-\ln u)^{\theta}}+e^{\ln(-\ln v)^{\theta}})^{1/\theta}\right] \\ &= \exp\left[-((-\ln u)^{\theta}+(-\ln v)^{\theta})^{1/\theta}\right] \end{aligned}$$

A esta familia paramétrica de cópulas se la conoce como **Gumbel-Hougaard.**

Por último introducimos el concepto de función de *densidad de la cópula* que utilizaremos más adelante.

Si F, G y la cópula $C(u,v)$ son diferenciables, la densidad conjunta de (X,Y) correspondiente a la función de distribución conjunta en la ecuación (1.5), es igual a:

$$h(x,y) = f(x)g(y)[c(F(x),G(y))]$$

donde $f(x), g(y)$ son las funciones de densidad marginales de $F(x)$ y $G(y)$ y

$$c(u,v) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u \partial v} \quad (u,v)^T \in [0,1]^2 \tag{1.7}$$

Esta última función se conoce como *densidad de la cópula*.

1.2.3. Medidas de correlación de rango

A continuación se discuten dos importantes medidas de dependencia conocidas como ρ-Spearman y τ de Kendall. Estos coeficientes de correlación de rango miden el grado de dependencia monótona entre dos variables aleatorias, además ofrecen una medida de correlación para variables que no pertenecen a la familia de distribuciones elípticas.
Estas dos medidas son de gran importancia para la teoría de cópulas. Asi en el ejemplo (3) a partir de éstas se puede estimar el parámetro θ el cual mide la estructura de dependencia entre variables aleatorias.

Definición 10. (τ **de Kendall**) Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes e igualmente distribuídos en $\mathbb{R}^2$ con función de distribución común conjunta F, entonces el coeficiente de correlación de rango o τ de Kendall denotado por ρ_τ está definido como la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia. Esto es [Joe, 1997]:

$$\rho_\tau(X, Y) = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0) \tag{1.8}$$

Como τ de Kendall es invariante a transformaciones estrictamente crecientes;el siguiente teorema ofrece una expresión de este coeficiente en términos de cópulas.

Teorema 3. *Sean X e Y variables aleatorias continuas cuya cópula es C. Entonces el coeficiente τ de Kendall para X e Y, $\rho_\tau(X, Y)$ está dado por:*

$$\rho_\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 \tag{1.9}$$

Demostración. De la ecuación 1.8 tenemos:

$$\begin{aligned}
&P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0) \\
&\qquad = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - 1 + P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) \\
&\qquad = 2P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - 1 \\
&\qquad = 2[P((X_1 > X_2), (Y_1 > Y_2)) + P((X_1 < X_2), (Y_1 < Y_2))] - 1 \\
&\qquad = 4[P((X_1 < X_2), (Y_1 < Y_2))] - 1
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\rho_\tau(X,Y) =& 4[P((X_1 < X_2),(Y_1 < Y_2))] - 1\\ =& 4E[P((X_1 < X_2),(Y_1 < Y_2))|X_2, Y_2] - 1\\ =& 4\int\int_{\mathbb{R}^2} P((X_1 < x),(Y_1 < y))dF(x,y) - 1\\ =& 4\int\int_{[0,1]^2} C(F(x),G(y))dC(F(x),G(y)) - 1\end{aligned}$$

haciendo $u = F(x)$ y $v = G(y)$

$$= 4\int\int_{[0,1]^2} C(u,v)dC(u,v) - 1$$

□

Definición 11. **ρ-Spearman** Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y funciones de distribución marginales F y G respectivamente. Se define el coeficiente de correlación de Spearman entre X e Y, $\rho_S(X,Y)$ de la siguiente manera:

$$\rho_S(X,Y) = \rho(F(X),G(Y))$$

donde ρ es el coeficiente de correlación de Pearson.

El siguiente teorema ofrece una expresión del coeficiente de correlación de Spearman en términos de cópulas, para la demostración del teorema utilizamos la fórmula de Höffding [McNeil et al., 2005] dada en el siguiente lema:

Lema 2. *Si (X,Y) tiene función de distribución conjunta H y marginales $F(x)$ y $G(y)$, entonces la covarianza entre X e Y $cov(X,Y)$, cuando es finita, está dada por:*

$$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(H(x,y) - F(x)G(y))dxdy \tag{1.10}$$

Teorema 4. *Sean X e Y variables aleatorias absolutamente continuas con marginales $F(x)$ y $G(y)$ respectivamente y cópula asociada C entonces el coeficiente de correlación de*

Spearman para X e Y $\rho_S(X,Y)$, está dado por:

$$\rho_S(X,Y) = 12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv - 3$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\rho_S(X,Y) &= \frac{Cov(F(X),G(Y))}{\sqrt{Var(F(X))}\sqrt{Var(G(Y))}} \\
&= \frac{Cov(F(X),G(Y))}{\sqrt{1/12}\sqrt{1/12}} \\
&= 12Cov(F(X),G(Y)) \quad \text{haciendo uso de (1.10), tenemos} \\
&= 12\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(C(F(X),G(X)) - F(X)G(Y))dxdy \\
&= 12\int_0^1\int_0^1 (C(u,v) - uv)dudv \\
&= 12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv - 12\int_0^1\int_0^1 uvdudv \\
&= 12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv - 3
\end{aligned}$$

$Var(F(X)) = \frac{1}{12}$ pues $F(X) \sim U(0,1)$ □

1.2.4. Coeficiente de dependencia en las colas.

Otra medida de dependencia que se puede expresar mediante cópulas, es el coeficiente de dependencia en colas. Estos coeficientes están definidos en términos del límite de la probabilidad condicional como se muestra a continuación.

Definición 12. Sean X y Y dos variables aleatorias continuas con funciones de distribución F,G respectivamente, el coeficiente de dependencia λ_U en la cola superior es el límite (si existe)de la probabilidad condicional de que Y es mayor que el 100 t-ésimo percentil de G dado que X es mayor que el 100t-ésimo percentil de F cuando t tiende a 1, es decir,

$$\lambda_U = \lim_{t\to 1^-} P(Y > G^{-1}(t)|X > F^{-1}(t)) \tag{1.11}$$

Similarmente, el coeficiente de dependencia λ_L en la cola inferior es el límite (si existe) de la probabilidad condicional de que Y es menor o igual que el 100 t-ésimo percentil de G dado que X es menor o igual que el 100 t-ésimo percentil de F cuando t tiende a 0, es decir,

$$\lambda_L = \lim_{t\to 0^+} P(Y \leq F_2^{-1}(t) | X \leq F_1^{-1}(t))$$

Los anteriores coeficientes son no paramétricos, por tanto dependen únicamente de la cópula C de X e Y como se muestra a continuación.

Teorema 5. *Sean X e Y, variables aleatorias continuas con marginales F,G respectivamente, coeficiente en las colas λ_U y λ_L y C la cópula de X e Y, si los límites anteriores existen, entonces:*

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t\to 1^-} \frac{1 - C(t,t)}{1-t}$$
$$\lambda_L = \lim_{t\to 1^-} \frac{C(t,t)}{t}$$

Demostración. De la ecuación (1.11), tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= \lim_{t\to 1^-} P(Y > G^{-1}(t) | X > F^{-1}(t)) \\
&= \lim_{t\to 1^-} \frac{P(Y > G^{-1}(t), X > F^{-1}(t))}{P[X > F^{-1}(t)]} \\
&= \lim_{t\to 1^-} \frac{\bar{C}(t,t)}{1-t} \\
&= \lim_{t\to 1^-} \frac{2 - 2t + C(t,t)}{1-t} \\
&= 2 - \lim_{t\to 1^-} \frac{1 - C(t,t)}{1-t}
\end{aligned}$$

donde $\bar{C}(u,u)$ es la función de distribución conjunta de supervivencia para dos variables aleatorias distribuidas uniformemente en $(0,1)$, dada por $\bar{C}(u,v) = P(U < u, V < v) = 1 - u - v + C(u,v)$. □

Con el siguiente ejemplo ilustramos el anterior teorema.

Ejemplo 4. Se desea calcular λ_U para la cópula Gumbel. Esto es relativamente sencillo si consideramos la regla de L'Hôpital. La cópula Gumbel tiene la forma:

$$C(u,v) = \exp\left[-((-log(u))^\theta + (-log(v))^\theta)^{1/\theta}\right]$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= 2 - \lim_{t\to 1^-} \frac{1-C(t,t)}{1-t} \\
&= 2 - \lim_{t\to 1^-} \frac{1-\exp\left[-((-\log t)^\theta + (-\log t)^\theta)^{1/\theta}\right]}{1-t} \\
&= 2 - \frac{0}{0} \quad \text{aplicando L'hôpital, tenemos} \\
&= 2 - \frac{dC(t,t)/dt}{d(1-t)/dt} \\
&= 2 - 2^{1/\theta}
\end{aligned}$$

Para $\theta > 1$.

1.3. Teoremas y propiedades principales

A continuación se presentan las definiciones, teoremas y las principales propiedades que hacen importante la utilización de cópulas.

Dentro de las principales propiedades de las cópulas se encuentran [De Matteis, 2001]:

- **Invarianza** las cópulas son invariantes ante transformaciones estrictamente crecientes de las variables aleatorias X e Y, como se expone en la siguiente proposición.

  Proposición 2. *Sean X e Y variables aleatorias continuas con cópula C. Si α y β son estrictamente crecientes sobre RangX y RangY respectivamente, entonces* $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$

  Demostración. Sean F_1, F_2, G_1 y G_2 las funciones de distribución de X, $\alpha(X)$, Y y $\beta(Y)$ respectivamente. Como α y β son estrictamente crecientes,

$$\begin{aligned}
F_2(x) =& P[\alpha(X) \le x] = P[X \le \alpha^{-1}(x)] = F_1(\alpha^{-1}(x)) \\
G_2(y) =& P[\beta(Y) \le y] = P[Y \le \beta^{-1}(y)] = F_1(\beta^{-1}(y))
\end{aligned}$$

por tanto, para cualquier x, y en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\ &= P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= C_{XY}(F_2(x), G_2(y)) \end{aligned}$$

como X e Y son continuas $RangF_2$ y $RangG_2 = [0,1]$ por lo cual se tiene que $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$ sobre $[0,1] \times [0,1]$ □

- **Continuidad** Las cópulas son uniformemente continuas en todo su dominio.

  Proposición 3. *Sea C una cópula. Entonces para todo $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$, $u_1 < u_2$ y $v_1 < v_2$*

  $$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_2| + |v_2 - v_1|$$

- **Diferenciabilidad**

  Proposición 4. *Sea C una cópula. Para cualquier v en $[0,1]$, la derivada parcial $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ existe para casi todo u, y además se tiene que,*

  $$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1$$

  Similarmente, para cualquier u en $[0,1]$, la derivada parcial $\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ existe para casi todo v, y además se tiene que,

  $$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1$$

1.4. Clases de Cópulas

En la literatura existen diferentes clases de cópulas, un criterio de agrupación se encuentra asociado con la forma funcional de la cópula, entre las que tenemos: las *explícitas* que son las que se pueden expresar a través de una forma funcional cerrada como por ejemplo la cópula de independencia. Las cópulas *implícitas* son derivadas de funciones de

distribución multivariada conocidas como, por ejemplo, las derivadas de la distribución normal y t multivariada.

Otro criterio de agrupación es aquel que depende directamente de las características particulares de las cópulas, en este caso se tienen cuatro grupos, las arquimedianas, las elípticas y las de valor extremo.

1.4.1. Cópulas Arquimedianas

Las cópulas arquimedianas tienen un gran campo de aplicación por numerosas razones, entre las que tenemos:

- facilidad con la que pueden ser construidas.
- La mayoría de familias de cópulas paramétricas pertenecen a esta clase [De Matteis, 2001].
- Pueden describir una gran diversidad de estructuras de dependencia [Lopera et al., 2009].

Definición 13. Una cópula C es llamada *Arquimediana* si existe una función continua, estrictamente decreciente y convexa $\phi : [0,1] \to [0,\infty]$ con $\phi(1) = 0$ tal que C puede escribirse de la siguiente manera:

$$C(u,v) = \phi^{[-1]}\left(\phi(u) + \phi(v)\right) \tag{1.12}$$

donde $\phi^{[-1]}$ es la pseudo inversa de ϕ definida por:

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0 & \phi(0) \leq t \leq +\infty \end{cases}$$

La función ϕ es llamado el generador arquimediano de la cópula C.

Ejemplo 5. Cópula Gumbel

Sea $\phi(t) = (-log(t))^{\theta}$ con $\theta > 1$
$\phi(1) = 0$,$\phi(0) = \infty$, estrictamente decreciente en $[0,1]$ pues $\phi'(t) = \frac{-\theta(-\ln t)^{\theta-1}}{t} < 0$.

$\phi''(t) \geq 0$ en $[0,1]$, por lo que ϕ es convexa, así la cópula C está dada por:

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)) \\ &= exp(-[(-\ln u)^{\theta}+(-\ln v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}) \end{aligned}$$

En general existen cerca de 22 familias, pero para este trabajo solo utilizaremos las 4 más utilizadas que se relacionan en la tabla 1.1. Cada una de estas cópulas conforman una familia parametrizada por θ. La notación $C(u,v,\theta) = C(u,v)$ se usará para cópulas paramétricas y llamaremos a θ el parámetro de dependencia. Recordemos que la importancia de θ está en que éste mide el grado de dependencia entre variable aleatorias. Más adelante mostraremos las diferentes formas de estimación para θ.

TABLA 1.1. Familia de cópulas arquimedianas.

Familia	$\phi(\mathbf{t})$	$C(u,v)$	valores de θ
Clayton	$\frac{1}{\theta}\left(t^{-\theta}-1\right)$	$\text{máx}\left((u^{-\theta}+v^{-\theta}-1),0\right)^{-1/\theta}$	$(0,\infty)$
Frank	$-\ln\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$	$-\frac{1}{\theta}\ln\left[1+\frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right]$	$(0,\infty)$
Gumbel	$(-\ln t)^{\theta}$	$\exp\left(-[(-\ln u)^{\theta}+(-\ln v)^{\theta}]\right)$	$[1,\infty)$
Joe	$-\ln(1-(1-t)^{\theta})$	$1-[(1-u)^{\theta}+(1-v)^{\theta}-(1-u)^{\theta}(1-v)^{\theta}]^{1/\theta}$	$[1,\infty)$

1.4.1.1. Principales propiedades de las cópulas arquimedianas

Estas cópulas poseen las siguientes propiedades:

Teorema 6. *Sea C una cópula Arquimediana con generador ϕ, entonces:*

a) C es simétrica, es decir $C(u,v) = C(v,u) \quad \forall u,v \in [0,1]$

b) C es asociativa, es decir $C(C(u,v),w) = C(u,C(v,w)) \quad \forall u,v,w \in [0,1]$

c) Si $k > 0$ es una constante y ϕ el generador, entonces $k\phi$ es también un generador de C

Demostración. Suponga que $u, v, w \in [0,1]$, entonces

a) $C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)) = \phi^{-1}(\phi(v) + \phi(u)) = C(v,u)$

b)

$$\begin{aligned} C(C(u,v),w) =& \phi^{-1}(\phi[\phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))] + \phi(w)) \\ =& \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v) + \phi(w)) \\ =& \phi^{-1}(\phi(u) + \phi[\phi^{-1}(\phi(v) + \phi(w))]) \\ =& C(u, C(v,w)) \end{aligned}$$

c) Se tiene que la inversa de $y = k\phi$ es $\phi^{-1}(\frac{1}{k}y)$, sean $C_{k\phi}(u,v)$ y $C_{k\phi}(u,v)$ las cópulas generada por $k\phi$ y ϕ respectivamente, por tanto

$$\begin{aligned} C_{k\phi}(u,v) &= \phi^{-1}\left(\frac{1}{k}[k\phi(u) + k\phi(v)]\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\frac{1}{k}[k\left\{\phi(u) + \phi(v)\right\}]\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\phi(u) + \phi(v)\right) \\ &= C_{\phi}(u,v) \end{aligned}$$

□

Como ya hemos expuesto anteriormente las cópulas arquimedianas son fáciles de trabajar por gozar de buenas propiedades, por otro lado la facilidad de cálculo del coeficiente τ de Kendall las hacen aún más importantes ya que a partir de éste se puede calcular el parámetro de dependencia θ. A continuación exponemos un teorema y una proposición que nos servirán para demostrar la forma de calcular el coeficiente τ de Kendall ρ_τ para esta familia.

Teorema 7. *Sea C una cópula arquimediana generada por el generador ϕ. Si $K_C(t)$ indica la C-medida del conjunto $\left\{(u,v) \in [0,1]^2 | \phi(u) + \phi(v) \geq \phi(t)\right\}$,esto es:*

$$K_C(t) = P(C(u,v) \leq t) \tag{1.13}$$

entonces para cualquier $t \in [0,1]$

$$K_C(t) = t - \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} \tag{1.14}$$

Demostración. La prueba de este teorema se puede encontrar en [Cao, 2004]. □

Proposición 5. *Sean* U *y* V *variables aleatorias uniformes cuya función de distribución conjunta es la cópula arquimediana* C *generada por* ϕ*. Entonces la función* K_C *dada en el teorema anterior es la función de distribución de la variable aleatoria* $C(U,V)$*.*

La siguiente proposición dada por Genest [De Matteis, 2001] nos muestra una de las razones por las que es importante trabajar con cópulas arquimedianas. Más adelante mostraremos como a partir del coeficiente τ de Kendall podemos estimar el parámetro θ.

Proposición 6. *Sean* X *e* Y *variables aleatorias con una cópula arquimediana* C *con generador* ϕ*. La versión* τ *de Kendall* ρ_τ *para* X *e* Y *está dado por:*

$$\rho_\tau = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(u)}{\phi'(u)}du \tag{1.15}$$

Demostración. Sean U y V variables aleatorias uniformes en $(0,1)$ con distribución conjunta C y K_C la función de distribución de $C(U,V)$, entonces

$$\begin{aligned}
\rho_\tau =& 4E(C(u,v)) - 1 \\
=& 4\int_0^1 t dK_C(t) - 1 \\
=& 4\left([tK_C(t)]_0^1 - \int_0^1 K_C(t)dt\right) - 1 \quad \textit{integración por partes} \\
=& 3 - 4\int_0^1 K_C(t)dt
\end{aligned}$$

como la función de distribución de $C(U,V)$ está dada por 1.14, entonces:

$$\rho_\tau = 3 - 4\int_0^1 \left(t - \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}\right)dt = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}$$

□

En la tabla 1.2 relacionamos el correspondiente coeficiente $\tau-$ Kendall para cada una de las familias arquimedianas estudiadas.

TABLA 1.2. Familia de cópulas arquimedianas.

Familia	τ-Kendall
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Frank	$1-\frac{4}{\theta}[D_1(\theta)-1]$
Gumbel	$1-\frac{1}{\theta}$
Joe	No tiene forma cerrada

con

$$D_1(\theta)=\frac{1}{\theta}\int_0^1 \frac{t}{e^t-1}dt \quad \text{y} \quad D_1(-\theta)=D_(\theta)+\frac{\theta}{2}$$

1.4.2. Cópulas Elípticas

Las cópulas elípticas son simplemente las cópulas de las distribuciones elípticas, en este caso mencionaremos la gaussiana y la t-student.

a. gaussiana

La cópula gaussiana es una extensión de la distribución normal.

Definición 14. Sea Φ_2 la función de distribución conjunta de una normal bivariada con media $(0,0)^t$ y matriz de covarianza R con diagonal $diagR=1$. La cópula gaussiana bivariada está definida de la siguiente forma:

$$C(u,v)=\Phi_\rho(\Phi^{-1}(u),\Phi^{-1}(v))$$

b. t-Student

Definición 15. Sea R una matriz simétrica definida positiva, con $diagR=1$ y $T_{R,v}$ la distribución Student bivariada estandarizada con v grados de libertad y con matriz de

correlación ρ. La cópula t-student bivariada está definida de la siguiente forma:

$$C(u,v) = t_{v,R}(t_v^{-1}(u), t_v^{-1}(v))$$

con t_v^{-1} la inversa de la distribución t-student.

1.4.3. Cópula de valor extremo

Estas cópulas se derivan de la estructura de dependencia de la distribución generalizada de valor extremo multivariada. Son de gran utilidad para representar relaciones que ponen mayor énfasis entre los sucesos extremos de las distribuciones marginales. La siguiente es una forma de expresar esta cópula:

Definición 16. Una cópula de valor extremo C satisface la siguiente relación:

$$C(u,v) = \exp\left\{\ln(uv)A\left(\frac{\ln v}{\ln(uv)}\right)\right\}$$

donde $A : [0,1] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ es convexa y verifica que:

$$\max\{t, 1-t\} \leq A(t) \leq 1 \quad \text{para todo} \quad t \in [0,1]$$

Ejemplo 6. Consideremos la función de dependencia $A(t) = \min\{\theta_1 t, \theta_2(1-t)\}$ con $0 < \theta_1 < 1$ y $0 < \theta_2 < 1$,

$$\begin{aligned}\ln(uv)A\left(\frac{\ln v}{\ln(uv)}\right) &= \ln(uv)\left[1 - \min\left(\theta_1\left[\frac{\ln v}{\ln(uv)}\right], \theta_2\left[1 - \frac{\ln v}{\ln(uv)}\right]\right)\right] \\ &= \ln(uv)\left[1 - \min\left(\theta_1\left[\frac{\ln v}{\ln(uv)}\right], \theta_2\left[\frac{\ln u}{\ln(uv)}\right]\right)\right]\end{aligned}$$

así la cópula $C(u,v)$ está dada por:

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \exp\left\{\ln(uv)A\left(\frac{\ln v}{\ln(uv)}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\ln(uv) - \text{mín}\left\{\ln v^{\theta_1}, \ln u^{\theta_2}\right\}\right\} \\ &= uv\,\text{mín}(v^{\theta_1}, u^{\theta_2}) \end{aligned}$$

Conocida como la familia de Marshall-Olkin.

1.5. Cópula Empírica

Las cópulas empíricas fueron estudiadas por Deheuvels en 1969 [Bouyé, 2000], la idea consiste en construir una función cópula a partir de valores muestrales recolectados de las variables aleatorias, sin establecer dependencia de ningún parámetro. Esta cópula es de gran importancia en la selección de cópulas dentro de una familia candidata.

Definición 17. Cópula Empírica Sea $\aleph = (x_k, y_k)_{k=1}^n$ una muestra de tamaño n obtenida a partir de una distribución bivariante. La cópula empírica es la función C_n dada por:

$$C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(x_k \leq x_{(i)}, y_k \leq y_{(j)}) \quad i,j = 1,...,n \tag{1.16}$$

donde $I(A)$ es la función característica del conjunto A dada por:

$$I(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y $x_{(i)}$ e $y_{(j)}$ $1 \leq i \leq j \leq n$ son las estadísticas de orden de la muestra.

Esta cópula empírica converge uniformemente a la cópula verdadera cuando el tamaño de muestra crece [del Rio R. and Quesada, 2007]. Este resultado implica que cuando la cópula verdadera es desconocida, un criterio de selección puede ser el comparar cada una de las cópulas candidatas con la empírica.

1.6. Métodos gráficos para detectar dependencia: Chi-plot y K-plot

Las herramientas gráficas que presentamos en esta sección nos ayudan a realizar un primer estudio sobre la posible dependencia funcional de dos variables aleatorias. Estas herramientas son recientes en la literatura y se denominan Chi-plot y K-plot.

1.6.1. Chi-plot

El Chi-plot fué propuesto originalmente por Fisher y Switzer [Genest and Favre, 2007] y la construcción de esta herramienta se basa en el estadístico chi-cuadrado. Para calcular los chi-plots se procede de la siguiente manera [del Rio R. and Quesada, 2007]:

Sea $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria de una función de distribución conjunta y continua H de la variable aleatoria (X, Y), y sea $I(A)$ la función característica del suceso A. Para cada observación (x_i, y_i) se desarrollan los siguientes procedimientos:

- Calcular H_i, F_i y G_i como se muestra a continuación:

$$H_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} I(X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i) \tag{1.17}$$

$$F_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} I(X_j \leq X_i)$$
$$G_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} I(Y_j \leq Y_i)$$
$$S_i = sign \left\{ \left(F_i - \frac{1}{2} \right) \left(G_i - \frac{1}{2} \right) \right\}$$

- Calcular λ_i y χ_i de la siguiente forma:

$$\lambda_i = 4 S_i \, \text{máx} \left\{ \left(F_i - \frac{1}{2} \right)^2, \left(G_i - \frac{1}{2} \right)^2 \right\}$$
$$\chi_i = \frac{H_i - F_i G_i}{\sqrt{F_i(1 - F_i) G_i (1 - G_i)}}$$

El Chi-plot es un diagrama de dispersión de los pares $(\lambda_i, \chi_i)_{i=1,\dots,n}$, donde λ_i es una medida de la distancia de la observación (X_i, Y_i) al centro de los datos.

Según [del Rio R. and Quesada, 2007], todos los valores de λ_i deben estar en el intervalo $[-1, 1]$. En caso de que los datos constituyan una muestra bivariente con marginales continuas independientes, los valores de λ_i se distribuyen uniformemente. Sin embargo, si X e Y están asociadas, los valores de λ_i se presentarán formando agrupaciones, en particular, valores positivos de λ_i indican que X_i e Y_i son relativamente grandes (a la vez) o relativamente pequeñas (a la vez) respecto a sus medianas, mientras que λ_i negativos corresponden a X_i e Y_i situados en lados opuestos respecto a sus medianas.

En cada observación muestral, χ_i se puede interpretar como el coeficiente de correlación asociado a $(n-1)$ pares (X_{ij}, Y_{ij}), dicotomizados de la siguiente forma [del Rio R. and Quesada, 2007]:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad X_j \leq X_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad Y_j \leq Y_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para todo $j \neq i$. Así $-1 \leq \chi_i \leq 1$, para todo $i = 1 \cdots n$, además, según [del Rio R. and Quesada, 2007] $\sqrt{n\chi_i}$ es la raíz cuadrada del estadístico chi-cuadrado utilizado tradicionalmente para contrastar la independencia en la tabla de contingencia generada por los puntos de corte (X_i, Y_i).

- Representar los pares de puntos $(\lambda_i, \chi_i) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$

De acuerdo a [Ayyad, 2008], para evitar observaciones engañosas, Fisher y Switzer recomiendan representar los pares que cumplan:

$$|\lambda_i| < 4\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\right)^2$$

Como queremos contrastar las hipótesis H_0 : Las variables son independientes frente a H_1 : Las variables no son independientes, los valores χ_i que estén 'muy lejos' de cero nos darán evidencia estadística para poder rechazar la hipótesis nula. Para hacer referencia al término 'muy lejos', Fisher y Switzer [Ayyad, 2008] nos proponen unos límites de control dados por $\pm c_p\sqrt{n}$ donde c_p se selecciona de modo que aproximadamente el $100p\,\%$ de los pares (λ_i, χ_i) se sitúen entre estos dos límites, p es equivalente al nivel de confianza y se suele escoger $p = 0.9$, $p = 0.95$, $p = 0.99$.

A continuación realizamos una representación de un chi-plot para variables dependientes de la siguiente manera, generamos 100 muestras de una variable Poisson $X \sim Po(3)$ e $Y = \frac{1}{1+X^3}$ y lo que obtenemos son puntos alejados de los límites dados por $\pm c_p\sqrt{n}$ $(p = 0.95)$, como se muestra en la gráfica 1.1.

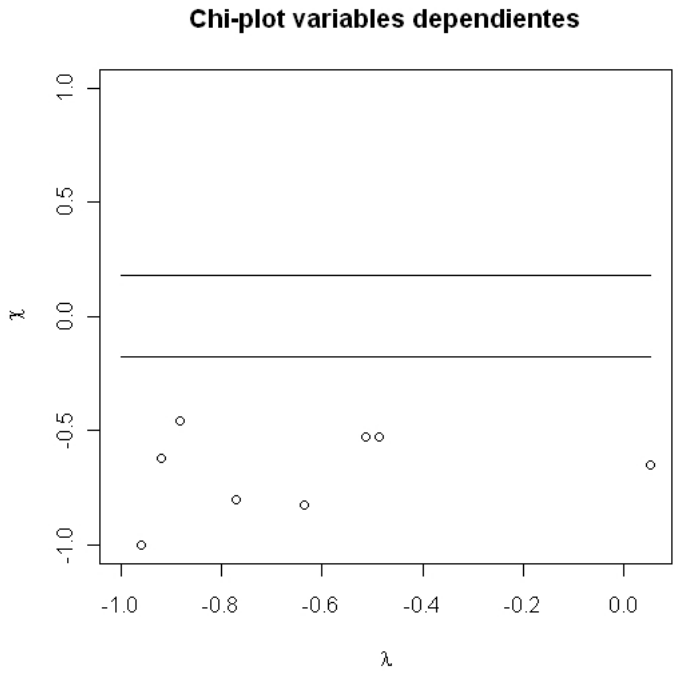

FIGURA 1.1. Chi-plot para variables dependientes con $p = 0.95$

Si por el contrario realizamos el mismo procedimiento para dos variables independientes, lo puntos caen sobre los límites dados por $\pm c_p\sqrt{n}$. Para este caso generamos 100 muestras de las variables aleatorias independientes X e Y con $X \sim N(0, 1)$ $Y \sim Po(3)$ y obtenemos la siguiente gráfica:

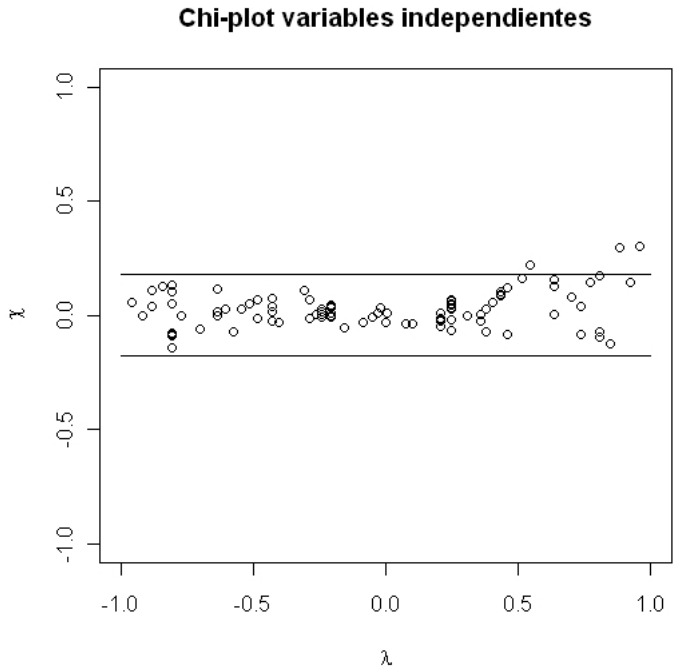

FIGURA 1.2. Chi-plot para variables independientes con $p = 0.95$

1.6.2. K-plot

Los k-plot (forma abreviada de Kendal-plot) fueron creados por Genest y Boies [del Rio R. and Quesada, 2007], esta herramienta también se construye sobre los rangos de las observaciones utilizando la transformación integral de probabilidades multivariantes, produciendo un gráfico similar al QQ-plot convencional.

Sea $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria de una función de distribución conjunta y continua H de la variable aleatoria (X, Y), para construir el K-plot se procede de la siguiente manera:

a) Para cada $1 \leq i \leq n$ se calcula H_i como en (1.17).

b) Se ordenan los valores H_i de tal forma que $H_{(1)} \leq ... \leq H_{(n)}$.

c) Se representan los pares $(W_{i:n}, H_{(i)})$, donde $W_{i:n}$ representa la esperanza del estadístico de orden i-ésimo en una muestra de tamaño n, calculado de la siguiente manera:

$$W_{i:n} = n\binom{n-1}{i-1}\int_0^1 w[K_0(w)]^{i-1}[1 - K_0(w)]^{n-i}dK_0(w)$$

con

$$K_0(w) = w - w\log(w) \quad 0 \leq w \leq 1$$

A medida que la representación $H_{(i)}$ contra $W_{i:n}$ se vaya desviando con respecto a la diagonal, se puede ir asumiendo dependencia funcional entre las dos variables involucradas. Para ilustrar este método consideremos 100 muestras de las variables X, Y, con $Y = X^3$ y $X \sim N(0,1)$, lo que obtenemos es una nube de puntos por encima de la diagonal, como se muestra en la gráfica (1.3).

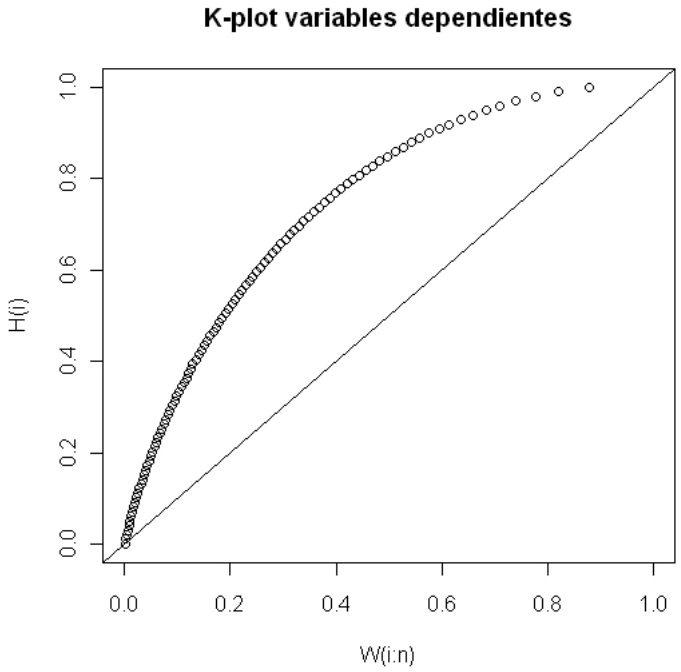

FIGURA 1.3. K-plot para variables dependientes

los K-plots detectan dependencia funcional positiva acentuando la concavidad de la nube de puntos respecto la diagonal, cuando las variables son independientes la gráfica se concentra en la diagonal [Ayyad, 2008]. En la figura 1.4 ilustramos un K-plot para dos variables independientes $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim Po(3)$.

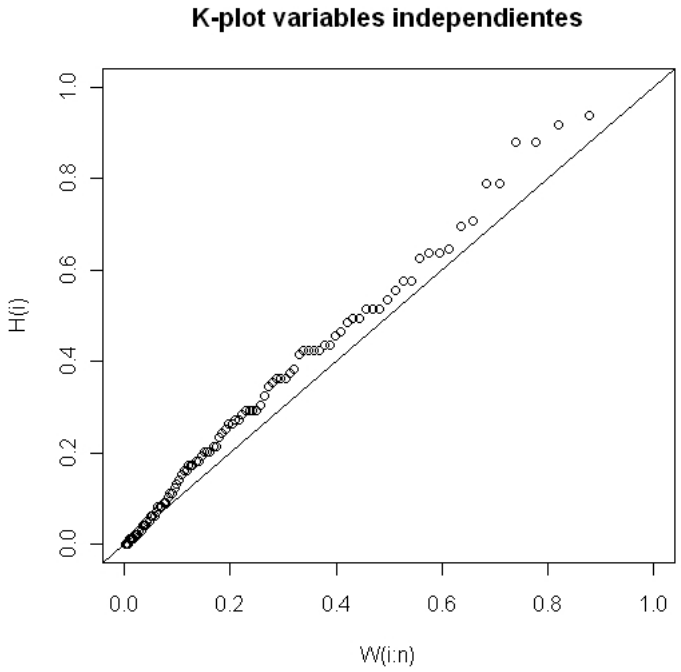

FIGURA 1.4. K-plot para variables independientes

CAPÍTULO 2

Inferencia para cópulas

2.1. Selección de la cópula

En la sección 2.5 se exponen los distintos procedimientos para estimar los parámetros de una cópula, sin embargo,como se observará más adelante, estos procedimientos suponen que se conoce de antemano el tipo de cópula que describe la estructura de dependencia para ajustar un conjunto de datos dado, en general este supuesto no se cumple, pues de hecho se convierte en uno de los problemas más importantes en la teoría de cópulas, hasta tal punto que no existe un método que la comunidad estadística use rutinariamente [Escarela and Hernández, 2009].

En los últimos años se han propuesto diferentes procedimientos para la selección de una cópula particular. Dentro de estos procedimientos tenemos los paramétricos, no paramétricos y la combinación de ambos. Todas las cópulas que pertenecen a una misma familia, presentan una misma estructura (o ecuación) que puede depender de uno o varios parámetros (o también de ninguno, si hablamos de cópulas no paramétricas), de forma que, para cada uno de los valores del espacio paramétrico de definición, se obtendrá un miembro de esa familia [Vélez, 2007].

Las etapas para el proceso de selección de cópulas son las siguientes [Vélez, 2007]:

1. Determinación de las distribuciones marginales asociadas a cada una de las variables en función de las muestras de datos disponibles.

2. Propuesta de un conjunto inicial de familias de cópulas candidatas, que por sus características son adecuadas para describir la relación existente entre las variables.

3. Selección de una cópula dentro de una familia.

4. Elección de la cópula de entre todas las que representan a cada una de las familias candidatas.

2.2. Determinación de las distribuciones marginales

2.2.1. Estimación a partir de la muestra

Los modelos de cópulas semiparamétricos son aquellos que están construidos con cópulas paramétricas, para los que las marginales han sido estimadas por métodos no paramétricos. Una forma de estimar estas marginales desconocidas es por medio de la estimación no paramétrica a partir de la muestra [Ayyad, 2008].

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x)$$
$$\widehat{G}_n(y) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} I(Y_i \leq y)$$

donde I es la función indicadora.

2.3. Propuesta inicial de un conjunto de Cópulas

Este paso depende del investigador, pues a partir del conocimiento de las propiedades que caracterizan a las familias, propone un conjunto de familias iniciales que describan la posible relación que existe entre las variables. Sin embargo, esta propuesta inicial suele ser afectada cuando el analista encuentra más de una familia que describe la relación de las variables y no sabe cual de ellas es la más apropiada.

2.4. Selección de una cópula dentro de una familia

Si bien el analista puede proponer una familia inicial de cópulas, el problema surge cuando se tiene un amplio número de familias y no se puede determinar la que mejor se ajuste a los datos. Por eso exponemos la forma de determinar a qué familia pertenece C, para el caso de las cópula arquimediana se determina por medio de la forma del generador ϕ como se muestra a continuación.

Inicialmente suponemos que se tiene una muestra aleatoria bivariante de n elementos, es decir, $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$, que ha sido generada por una distribución bivariante desconocida $H(x, y)$, con marginales continuas $F(x)$ y $G(y)$ y cópula arquimediana $C(u, v)$, con $u = F(x)$ y $v = G(y)$ variables aleatorias distribuidas $U(0, 1)$[Vélez, 2007].

Buscamos una estimación de la función de distribución univariante:

$$K(w) = P[C(u, v) \leq w] = P[H(x, y) \leq w]$$

para esto se define la variable aleatoria $W = \hat{H}(x, y)$ con $\hat{H}$ la estimación empírica de la distribución bivariante H, luego determinar la estimación empírica de la distribución W,

$$W_i = \hat{H}(x_i, y_i) = \frac{Card\{(x_j, y_j) : x_j < x_i, y_j < y_i\}}{n - 1}$$

Donde $Card$ denota el cardinal del conjunto. Entonces, un estimador no paramétrico de $K(w)$ viene dado por:

$$K_n(w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \{i : 1 \leq i \leq n, w_i \leq w\}$$

y consideramos la estimación paramétrica dada por:

$$K_{\phi_n} = w - \frac{\phi(w)}{\phi'(w)}$$

Para llevar a cabo la selección de la cópula dentro de una familia necesitamos estimar el parámetro θ que mide la estructura de dependencia, como se muestra en la siguiente sección.

2.5. Métodos de estimación del parámetro de dependencia θ

El parámetro θ de la cópula captura la dependencia que existe entre las variables aleatorias,(en el caso multiparamétrico θ es un vector) este parámetro puede ser estimado por métodos paramétricos, no paramétricos y semiparamétricos. A continuación se presentan las metodologías que se necesitan para el desarrollo de este trabajo.

2.5.1. Estimación Paramétrica

Entre los métodos paramétricos contamos con el de Máxima Verosimilitud que denotaremos ML y el método de inferencia para marginales que denotaremos IFM.

2.5.1.1. Método de Máxima Verosimilitud:

Este método se puede aplicar a cualquier familia de cópulas, ya que se obtiene la estimación de los parámetros de la cópula a través de la maximización de su función de log-Verosimilitud. Denotaremos el estimador de máxima verosimilitud como MLE, por sus siglas del inglés [Cherubini and Vecchiato, 2004].

Definición 18. La verosimilitud para la observación t, considerada como una función de θ se denota por $L_t(\theta)$ y la log-verosimilitud de $L_t(\theta)$ se denotará por $l_t(\theta)$. Dadas T observaciones la función de log-verosimilitud está dada por:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{T} l_i(\theta) \tag{2.1}$$

$\widehat{\theta}_{MLE}$ es el estimador de Máxima Verosimilitud si

$$l(\widehat{\theta}_{MLE}) \geq l(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta \tag{2.2}$$

en otras palabras,

$$\widehat{\theta}_{MLE} = \underset{\theta \in \Theta}{\text{máx}}\, l(\theta)$$

Con Θ el espacio paramétrico. El estimador $\widehat{\theta}_{MLE}$ tiene la propiedad de **normalidad asintótica**, esto es,

$$\sqrt{(T)}(\widehat{\theta}_{MLE} - \theta_0) \to N(0, \Im^{-1}(\theta_0))$$

con $\Im^{-1}(\theta_0)$ la matriz de información de Fisher y θ_0 un valor verdadero. Aplicando la ecuación (1.5), la función de log-verosimilitud queda de la siguiente manera:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \ln c(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t})) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{2} \ln f_i(x_{it}) \tag{2.3}$$

con c la función de densidad de la cópula C dada por:

$$c(F_1(x_1), F_2(x_2)) = \frac{\partial^2(C(F_1(x_1), F_2(x_2)))}{\partial F_1(x_1) \partial F_2(x_2)}$$

2.5.1.2. Inferencia para marginales (IFM)

El método de máxima verosimilitud, que se expuso anteriormente, puede ser muy costoso en términos computacionales especialmente para grandes dimensiones. Sin embargo la representación cópula divide los parámetros en los parámetros *específicos* para las distribuciones marginales y parámetros *comunes* para la estructura de dependencia α. La log-verosimilitud (2.3) se puede ver como:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \ln c(F_1(x_{1t}; \theta_1), F_2(x_{2t}; \theta_2)) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{2} \ln f_i(x_{it}; \theta_i) \tag{2.4}$$

donde $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Por esta razón, se propone estimar este conjunto de parámetros en dos pasos:

1. Realizar las estimaciones de las distribuciones marginales, esto es

$$\widehat{\theta_i} = \arg\max \sum_{t=1}^{T} \ln f_2(x_{it}; \theta_i) \tag{2.5}$$

2. Estimar α luego de hacer las estimaciones anteriores, es decir:

$$\widehat{\alpha} = \arg\max \sum_{t=1}^{T} \ln c(F_1(x_{1t}; \hat{\theta}_1), F_2(x_{2t}; \hat{\theta}_2)) \tag{2.6}$$

donde $\arg\max f(x) := \{x | \forall y : f(y) \leq f(x)\}$

A continuación presentamos un ejemplo a manera de ilustración, tomado de Ayyad [Ayyad, 2008].

Ejemplo 7. Sean X e Y variables aleatorias con las siguientes funciones de distribución y cópula que las relaciona:

- F_X normal con parámetros $\delta = (\mu, \sigma^2)$
- G_Y gamma con parámetros $\eta = (\alpha, \lambda)$
- $C \in C_\theta = \{C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] / \quad C(u,v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v) \quad |\theta| < 1\}$, la familia de cópulas bivariantes Farlie-Gumbel-Morgenstern.

Se estima δ y η por separado es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} ln f_\delta(x_i) \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} \ln g_\eta(y_i)$$

con f_δ y g_η las funciones de densidad asociadas a F_X y G_Y respectivamente. Luego se escoge la estimación buscada $\hat{\alpha}$, como el valor del parámetro α que hace máxima la función objetivo:

$$l(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left\{ c(F_{\hat{\delta}}(x_i), G_{\hat{\eta}}(y_i)) \right\}$$

por tanto el estimador queda definido:

$$\widehat{\alpha} = \arg \max_{\alpha \in \Theta} l(\alpha)$$

Este método es fácil de implementar, sin embargo una inadecuada selección de las distribuciones marginales puede afectar la estimación del parámetro θ.

2.5.2. Estimación no paramétrica

Para esta sección hacemos referencia al método de momentos.

2.5.2.1. Estimación a través de correlación de rangos (Método de momentos):

Este tipo de metodología se basa en las relaciones existentes entre dos medidas no paramétricas como el coeficiente de correlación de Spearman, el tau de Kendall y las cópulas. Tiene como ventaja no necesitar información acerca de las distribuciones marginales de los datos.

La ecuación 1.15 proporciona la manera como se debe estimar el coeficiente τ de Kendall, para las familia de cópulas arquimedianas. A continuación se presenta la estimación del parámetro θ para algunas de las cópulas más representativas de esta clase [Cao, 2004]:

a. **Gumbel**

Sea $\phi(u) = (-\ln u)^\theta$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(u)}{\phi'(u)} &= \frac{u \ln u}{\theta} \\ \rho_\tau(X,Y) &= 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(u)}{\phi'(u)} du \\ &= \frac{\theta - 1}{\theta} \quad \text{entonces} \\ \theta &= \frac{1}{1 - \rho_\tau(X,Y)} \end{aligned}$$

por tanto, el método de estimador de momentos de θ es

$$\begin{aligned} \widehat{\theta} &= \frac{1}{1 - \widehat{\rho_\tau}(X,Y)} \quad \text{donde} \\ \widehat{\rho_\tau}(X,Y) &= \frac{2K}{n(n-1)} \end{aligned}$$

con K definido de la siguiente manera:

$$K = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Q((x_i, y_i), (x_j, y_j))$$

y Q es

$$Q((x_i, y_i), (x_j, y_j)) = \begin{cases} 1 & si(x_i, y_i), (x_j, y_j) > 0 \\ 0 & si(x_i, y_i), (x_j, y_j) = 0 \\ -1 & si(x_i, y_i), (x_j, y_j) < 0 \end{cases}$$

b. **Clayton** Sea $\phi(u) = \frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1)$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(u)}{\phi'(u)} &= -\frac{u(1-u^{\theta})}{\theta} \\ \rho_{\tau}(X,Y) &= 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(u)}{\phi'(u)} du \\ &= \frac{\theta}{\theta+2} \quad \text{entonces} \\ \widehat{\theta} &= \frac{2\widehat{\rho_{\tau}}(X,Y)}{1-\widehat{\rho_{\tau}}(X,Y)} \end{aligned}$$

2.5.3. Estimación semiparamétrica

El método semiparámetrico SP permite que las distribuciones marginales tengan diferentes formas funcionales arbitrarias y desconocidas [Kim et al., 2007]. La estimación se lleva en dos etapas igual que en el método IFM, pero a diferencia de este las distribuciones marginales son estimadas de forma no paramétrica por su distribución empírica muestral. El siguiente método que exponemos se denomina estimación de máxima pseudo-verosimilitud y requiere la utilización de pseudo observaciones $\hat{u}_i$ están expresadas de la siguiente manera:
Sean $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria de (X, Y) entonces:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= (\hat{u}_{i,1}, \hat{u}_{i,2}), \quad \text{donde} \\ \hat{u}_{i,1} &= \frac{R_i}{n+1} \quad \text{y} \qquad \hat{u}_{i,2} = \frac{S_i}{n+1} \end{aligned}$$

donde R_i representa el rango de X_i entre $X_1, ..., X_n$ y S_i representa el rango de Y_i entre $Y_1, ..., Y_n$.

2.5.3.1. Estimación de máxima pseudo-verosimilitud

El método de máxima pseudo-verosimilitud requiere que la cópula C sea absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue con densidad c y pretende maximizar el logaritmo de la verosimilitud basada en rangos, el cual tiene la siguiente expresión:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{n} ln \left\{ c \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) \right\} \tag{2.7}$$

Genest et al.[Genest et al., 1995] mostraron que bajo ciertas condiciones de regularidad el estimador $\hat{\theta}_n = \arg\max l(\theta; n)$ es asintóticamente normal, es decir

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \approx N(0, v^2) \quad \text{para algún} \quad v^2$$

2.5.4. Representación gráfica de la mejor cópula

Luego de tener la estimación de θ, se debe examinar cuál cópula se ajusta a los datos. El método gráfico ofrece muchas posibilidades de escogerla, sin embargo en algunas ocasiones no es sencillo determinarla.

- **Aproximación utilizando la función de distribución condicional** $Y|X$ (Método gráfico 1)

  Sea n observaciones bivariadas, $((X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n))$ que han sido generadas de una función de distribución conjunta $H(x, y)$ con marginales continuas $F(x)$ y $G(y)$ y cópula arquimediana $C(F(x), G(y))$, de 1.7la función de densidad bivariante $h(x, y)$ asociada a $H(x, y)$ está dada por

$$h(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C(F(x), G(y)) \qquad f(x)g(y)c(F(x), G(y))$$

Por otro lado la función de distribución condicional de $Y|X = x$ con $C_1(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}C(u,v)$ es:

$$H_{Y|X}(x,y) = \frac{C_1(F(x),G(y))}{C_1(F(x),1)} = C_1(F(x),G(y))$$

debido a que

$$\frac{\partial}{\partial u}C(u,1) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{C(u+\Delta u,1) - C(u,1)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta u} = 1$$

$H_{Y|X}(x,y)$ se distribuye uniformemente [De Matteis, 2001], por tanto un gráfico QQ-plot de $H_{Y|X}(x,y)$ aplicado sobre los datos observados x e y contra los quantiles de una uniforme-estándar debe dar una línea recta si la cópula aplicada se ajusta al modelo adecuadamente.

- **Aproximación utilizando la función de distribución de la cópula**(Método gráfico 2)

  La función de distribución univariada está dada por:

$$K_C(t) = P[C(U,V) \leq t] = t - \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}$$

  con ϕ el generador de una cópula arquimediana. Un QQ-plot de $K_{(F(x),G(y))}(t)$ contra los quantiles de la uniforme-estándar se puede establecer el contraste observando si el resultado se aproxima a una línea recta.

- **Comparación entre cópulas paramétricas y la cópula empírica.**(Método gráfico 3)

  Otra criterio para seleccionar una cópula es la comparación entre cópulas paramétricas y la cópula empírica, como se muestra a continuación:

  Sea $\{C_k\}\, 1 \leq k \leq K$ el conjunto de cópulas a seleccionar, se escoge aquella cópula que minimice la siguiente distancia d_n [Romano, 2002]:

$$d_n(\widehat{C}, C_k) = \sqrt{\sum_{t_1=1}^{n}\sum_{t_d=1}^{n}\left(\widehat{C}\left(\frac{t_1}{n},\frac{t_2}{n}\right) - C_k\left(\frac{t_1}{n},\frac{t_2}{n}\right)\right)^2} \tag{2.8}$$

con C_k la cópula teórica estimada y $\widehat{C}$ la cópula empírica. Para las cópulas arquimedianas esta medida está expresada como sigue[Frees, 1998]:

$$\int [K_{\phi_n}(w) - K_n(w)]^2 dK_n(w) \tag{2.9}$$

donde

$$K_n(w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \{i : 1 \leq i \leq n, w_i \leq w\}$$
$$K_{\phi_n} = w - \frac{\phi(w)}{\phi'(w)}$$

Se realiza un QQ-plot de las dos distribuciones estimadas. Si la elección del estimador es buena, este gráfico debería dar una línea recta.

2.5.5. Aproximación analítica de los métodos gráficos

Las gráficas dadas anteriormente pueden dar una buena aproximación para seleccionar la mejor cópula, sin embargo la subjetividad del analista puede generar problemas. Para solucionar este inconveniente se proponen dos contrastes clásicos de bondad de ajuste, contraste Chi-Cuadrado y Kolmogorov-Smirnov que presentamos a continuación [De Matteis, 2001].

2.5.5.1. Chi-Cuadrado

Se utiliza el siguiente test estadístico:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{[f_i - np(x_i)]^2}{np(x_i)}$$

con k el número de clases, f_i es la frecuencia absoluta de los datos en la clase i y $np(x_i)$ es la frecuencia teórica de los datos para cada clase i.

2.5.5.2. Kolmogorov-Smirnov

Tiene la ventaja que es un test no paramétrico. En muestras pequeñas revela la discrepancia entre una distribución empírica y una teórica. Como prueba estadística utiliza el máximo de la diferencia entre la función de distribución empírica acumulada y la teórica, por lo tanto

$$T = \text{máx}\left\{|\hat{F}(x) - F(x)|\right\} \tag{2.10}$$

Utilizamos este test para los gráficos presentados en la anterior sección, donde se prueba si las distribuciones son uniformes o no.

A continuación presentamos otros criterios con los cuales podemos seleccionar la mejor familia de cópulas.

2.5.5.3. Criterio de Información de Akaike

Este criterio se utiliza cuando realizamos estimación paramétrica de máxima verosimilitud. Esta medida proporciona un criterio natural para ordenar alternativas de modelos estadísticos para los datos. El Criterio de Información de Akaike AIC está dado por la siguiente expresión:

$$AIC = -2L + 2n_p \tag{2.11}$$

con n_p el número de parámetros del modelo. El valor de AIC contiene la información del estimador que mejor ajusta. Así se comparan varias cópulas y se selecciona aquella que tenga el menor valor AIC.

2.5.5.4. Contraste de Bondad de ajuste

El siguiente método dado en Vélez [Vélez, 2007] considera $C(u, v)$ como una cópula desconocida asociada a la variable aleatoria bidimensional (X, Y) y contrasta si esta cópula pertenece a una familia paramétrica conocida $C(u, v, \theta)$ con $\theta \in \Theta$, por tanto se propone

probar la siguiente hipótesis:

$$H_0 : C(u, v) = C(u, v, \theta) \quad \text{para algún} \qquad \theta \in \Theta \tag{2.12}$$

Es decir la cópula desconocida $C(u, v)$ es un miembro de la familia paramétrica.

CAPÍTULO 3

Simulación

3.1. Simulación

En esta sección presentamos la simulación de variables aleatorias y procedemos a seleccionar la mejor cópula a través de los procedimientos expuestos anteriormente. En esta parte proponemos un valor del parámetro y mediante la selección de una tamaño de muestra realizamos la selección de la familia que mejor se ajuste por medio del error cuadrático medio, de la siguiente manera:

1. Generar variables aleatorias.
2. Determinar la distribuciones marginales.
3. Estimar el parámetro θ por medio de Máxima Verosimilitud ML, método de momentos y de forma semiparamétrica SP, para este caso utilizamos pseudo observaciones.
4. Realizar la representación gráfica y proponer las posibles cópulas candidatas que se ajustan a los datos.
5. Realizar las pruebas para las gráficas realizadas en el punto anterior a saber, Kolmogorov-Smirnov y la prueba Chi-cuadrado.

3.1.1. Parámetro de dependencia

En esta subsección realizaremos la extracción de 1000 pares de observaciones de cada una de las cópulas arquimedianas que hemos expuesto a lo largo de este trabajo, a saber, Clayton, Gumbel, Frank y Joe, con diferentes valores del parámetro de dependencia θ, $\theta = 1, \theta = 5, \theta = 10, \theta = 20$, esto con el fin de observar gráficamente que sucede a medida que aumenta el valor de θ, además utilizamos gráficas chi-plot para observar el grado de dependencia entre las variables.

3.1.2. Cópula Clayton

Extraemos 1000 pares de observaciones de una cópula Clayton para diferentes valores de θ expuestos anteriormente. Como se puede observar en la figura 3.1, a medida que el valor del parámetro de dependencia θ se aleja de cero las variables aleatorias tienden a tener una mayor dependencia, en otras palabras se van acercando más a la diagonal $u = v$, además la figura 3.2 nos confirma que a medida que los valores del parámetro θ aumenta mayor es la dependencia entre las variables, pues la nube de puntos está fuera de los límites de control expuestos en la sección 1.6.

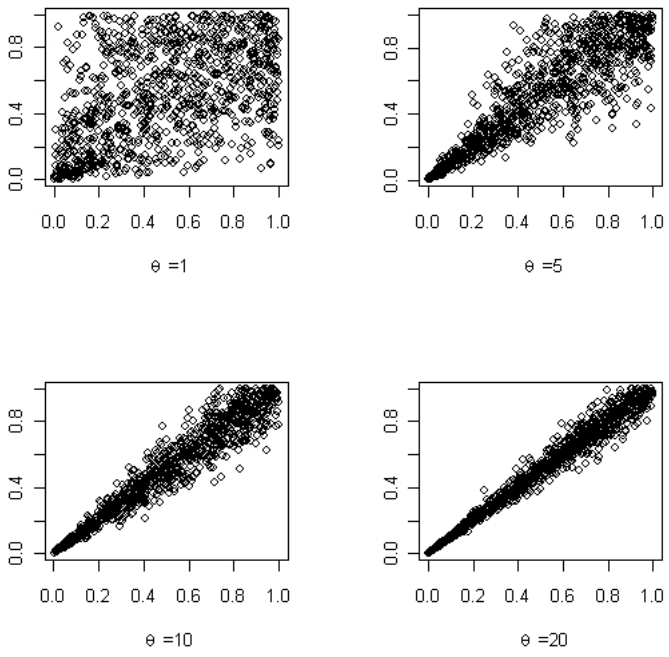

FIGURA 3.1. Parámetro de dependencia cópula Clayton

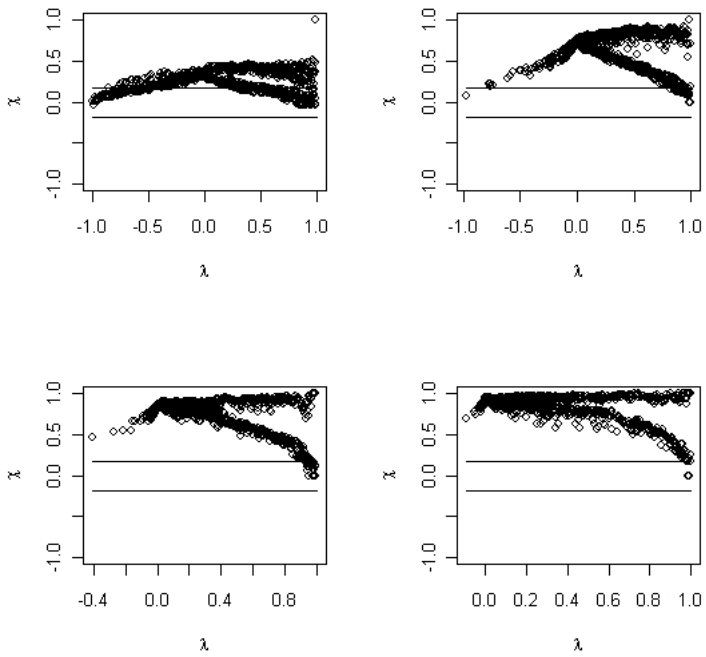

FIGURA 3.2. Chiplots correspondientes a la cópula Clayton

3.1.3. Cópula Gumbel

Extraemos 1000 pares de observaciones de una cópula Gumbel para diferentes valores de θ expuestos anteriormente, como se puede observar en la figura 3.3 a medida que el valor del parámetro de dependencia θ se aleja de cero las variables aleatorias tienden a tener una mayor dependencia, en otras palabras se van acercando más a la diagonal $u = v$, a diferencia de la cópula Clayton la cópula Gumbel tiende a mostrar el nivel de dependencia entre las variables aleatorias más rápido a medida que θ crece y esto se refleja en la figura 3.4 nos confirma que para $\theta = 5$ la nube de puntos está fuera de los límites de control.

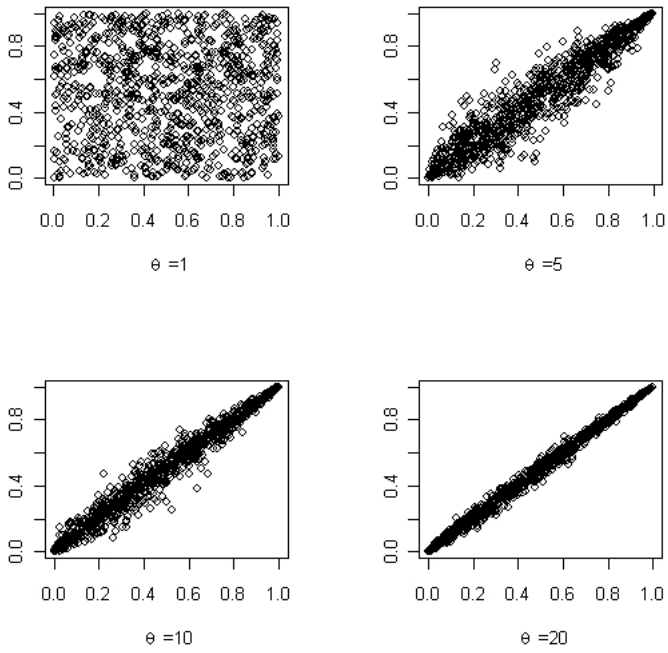

FIGURA 3.3. Parámetro de dependencia cópula Gumbel

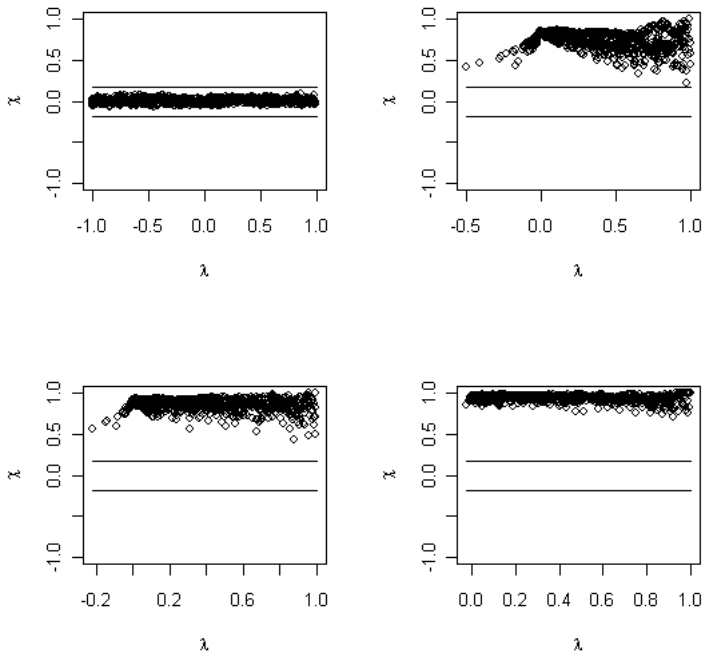

FIGURA 3.4. Chiplots correspondientes a la cópula Gumbel

3.1.4. Cópula Frank

Extraemos 1000 pares de observaciones de una cópula Gumbel para diferentes valores de θ expuestos anteriormente,como se puede observar en la figura 3.5 a medida que el valor del parámetro de dependencia θ se aleja de cero las variables aleatorias tienden a tener una mayor dependencia, en otras palabras se van acercando más a la diagonal $u = v$, a diferencia de la cópula Clayton y Gumbel la cópula Frank tiende a mostrar el nivel de dependencia más lentamente entre las variables aleatorias a medida que θ crece y esto se refleja en la figura 3.6 nos confirma que para $\theta = 20$ aún parte de la nube de puntos está dentro de los límites de control.

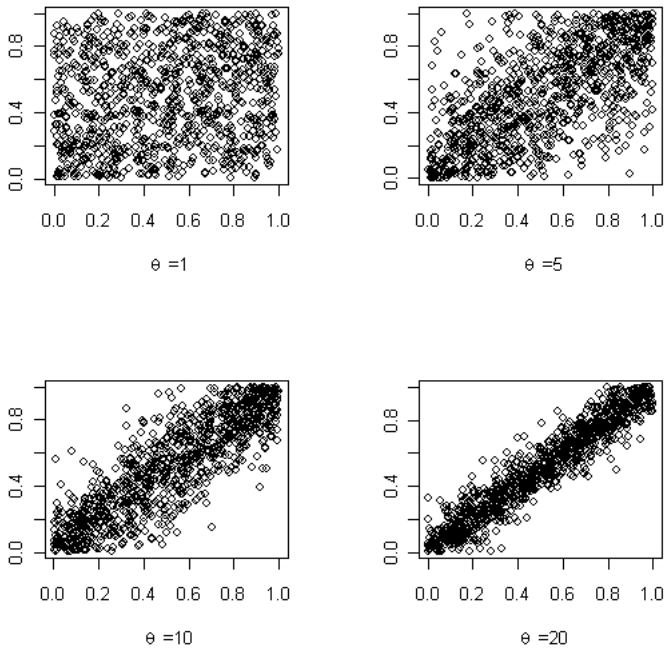

FIGURA 3.5. Parámetro de dependencia cópula Frank

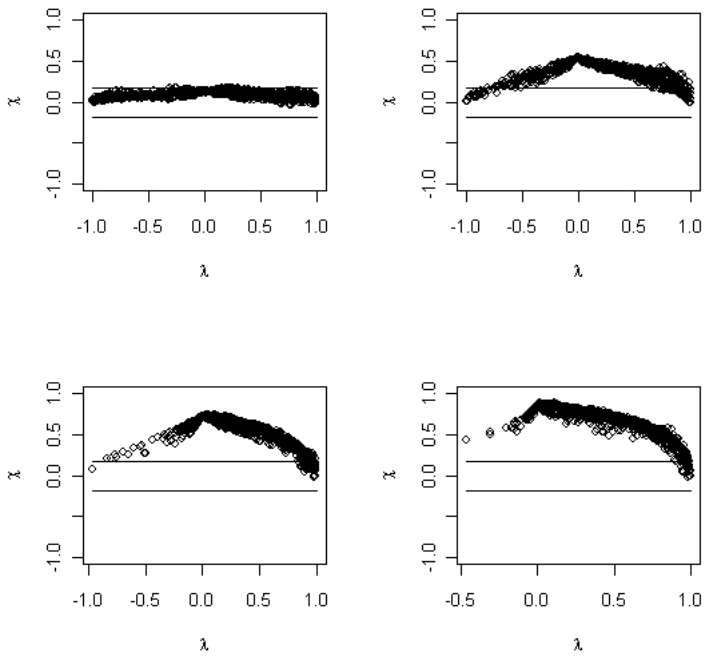

FIGURA 3.6. Chiplots correspondientes a la cópula Frank

3.1.5. Cópula Joe

Extraemos 1000 pares de observaciones de una cópula Joe para diferentes valores de θ expuestos anteriormente. Como se puede observar en la figura 3.7 a medida que el valor del parámetro de dependencia θ se aleja de cero las variables aleatorias tienden a tener una mayor dependencia, en otras palabras se van acercando más a la diagonal $u = v$. Esta cópula parece tener un comportamiento muy parecido a la cópula Clayton.

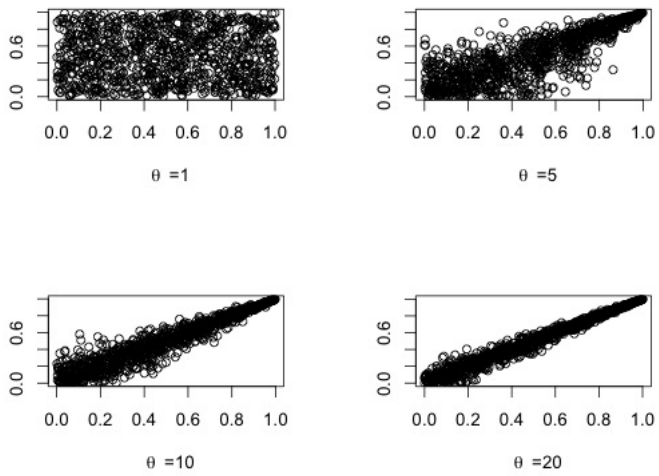

FIGURA 3.7. Parámetro de dependencia cópula Joe

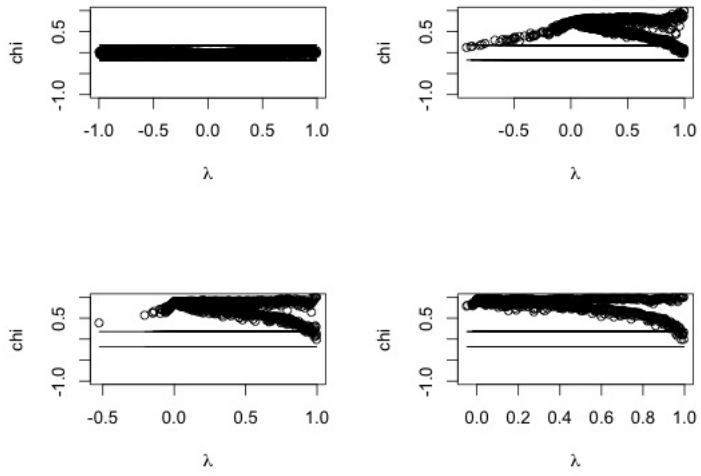

FIGURA 3.8. Chiplots correspondientes a la cópula Joe

3.2. Comparación de parámetros

A continuación realizamos la estimación del parámetro θ por tres métodos diferentes, expuestos anteriormente:

1. Método paramétrico: ML (Máxima verosimilitud)

2. Método semiparamétrico: PML (pseudo-máxima verosimilitud)

3. Método no paramétrico: Método de momentos,τ de Kendall

en este caso tomamos $\theta = 3$ y simulamos 1000 pares de observaciones para cada una de las cópulas de interés y siguiendo a Ayyad [Ayyad, 2008] estimamos 100 veces el parámetro para cada uno de los tres métodos expuestos anteriormente y tomamos el parámetro representativo θ^* como la media de las repeticiones de cada simulación. Por último hallamos el sesgo, la desviación típica, y el error cuadrático medio que se presentan en la tabla.

1. Sesgo

$$\textbf{sesgo} = \theta - \theta^*$$

2. Desviación típica

$$DT(\theta_i^*) = \sqrt{\sum_{i=1}^{100} \frac{(\theta_i^* - \theta)^2}{100}}$$

3. Error cuadrático medio

$$ECM(\theta_i^*) = \frac{\sum_{i=1}^{100} |\theta_i^* - \theta|^2}{100}$$

En la tabla 3.1 se presentan cada una de las estimaciones del parámetro θ para cada una de las cópulas estudiadas, recordemos que el valor de θ verdadero es 3. Para las cópulas Gumbel y Joe se puede observar que mediante los tres métodos el sesgo es negativo, esto se debe a que no hay tanta precisión de la estimación del parámetro, por otro, lado el error cuadrático medio es mayor en el método semiparamétrico. El método paramétrico presenta el menor ECM y el menor sesgo.

Para la cópula Clayton podemos observar que presenta la estimación más baja mediante el método paramétrico, mientra que la cópula Frank presenta estimaciones por debajo del valor verdadero.

En la tabla 3.2 podemos observar que a medida que el parámetro de dependencia aumenta el error cuadrático medio se eleva, además, podemos decir que el método más preciso para la estimación del parámetro de dependencia θ es el método paramétrico,

Cópula		Método Paramétrico	Semiparamétrico	No paramétrico
Frank	Estimación	2.97	2.90	2.98
	Sesgo	0.03	0.10	0.01
	DT	0.20	0.21	0.21
	ECM	0.02	0.04	0.03
Clayton	Estimación	2.85	3.00	3.00
	Sesgo	0.15	-0.00	-0.00
	DT	0.25	0.24	0.28
	ECM	0.01	0.03	0.04
Gumbel	Estimación	3.00	3.00	3.01
	Sesgo	-0.00	-0.00	-0.01
	DT	0.13	0.23	0.30
	ECM	0.00	0.04	0.01
Joe	Estimación	3.00	3.01	3.00
	Sesgo	-0.00	-0.01	-0.00
	DT	0.12	0.31	0.24
	ECM	0.01	0.01	0.01

TABLA 3.1. estimación del parámetro θ por los tres métodos

pues presenta un error cuadrático medio bajo para los cuatro valores del parámetro de dependencia dados.

En la tabla 3.3 podemos observar que el método semiparamétrico para las estimaciones de $\theta = 3$ y $\theta = 5$ presentan el error cuadrático medio más bajo en comparación con los otros dos métodos. Para la cópula Frank nuevamente observamos que a medida que aumenta el parámetro de dependencia el error cuadrático medio se eleva.

Método		$\theta = 3$	$\theta = 5$	$\theta = 10$	$\theta = 20$
Paramétrico	Estimación	3.00	5.01	10.02	20.09
	Sesgo	-0.00	-0.01	-0.02	-0.09
	DT	0.22	0.37	0.73	2.03
	ECM	0.01	0.03	0.08	0.33
Semi paramétrico	Estimación	3.00	5.02	9.89	19.57
	Sesgo	-0.00	-0.02	0.11	0.43
	DT	0.21	0.54	0.49	0.95
	ECM	0.03	0.06	0.24	0.90
No paramétrico	Estimación	3.00	5.04	10.05	20.02
	Sesgo	-0.00	-0.04	-0.05	-0.02
	DT	0.28	0.69	1.10	1.29
	ECM	0.04	0.06	0.27	1.03

TABLA 3.2. Comparación valores de θ para la cópula Clayton mediante los tres métodos expuestos

Método		$\theta = 3$	$\theta = 5$	$\theta = 10$	$\theta = 20$
Paramétrico	Estimación	3.01	5.01	10.01	20.09
	Sesgo	-0.01	-0.01	-0.01	-0.09
	DT	0.29	0.44	0.52	1.92
	ECM	0.04	0.07	0.12	0.28
Semi paramétrico	Estimación	2.99	5.03	10.00	20.03
	Sesgo	0.01	-0.03	-0.00	-0.03
	DT	0.06	0.57	0.47	1.18
	ECM	0.04	0.06	0.13	0.33
No paramétrico	Estimación	3.02	5.03	9.99	20.00
	Sesgo	-0.02	-0.03	0.01	0.00
	DT	0.43	0.60	0.07	0.70
	ECM	0.05	0.06	0.11	0.41

TABLA 3.3. Comparación valores de θ para la cópula Frank mediante los tres métodos expuestos

Método		$\theta = 3$	$\theta = 5$	$\theta = 10$	$\theta = 20$
Paramétrico	Estimación	3.00	5.02	10.03	20.07
	Sesgo	0.00	-0.02	-0.02	-0.07
	DT	0.13	0.47	0.83	1.80
	ECM	0.01	0.02	0.07	0.30
Semi paramétrico	Estimación	2.99	4.99	9.90	19.37
	Sesgo	0.01	0.01	0.10	0.63
	DT	0.10	0.13	0.40	0.93
	ECM	0.01	0.03	0.12	0.91
No paramétrico	Estimación	3.01	5.01	10.05	20.07
	Sesgo	-0.01	-0.01	0.05	-0.07
	DT	0.23	0.29	1.10	1.89
	ECM	0.01	0.02	0.14	0.68

En la tabla 3.4 podemos observar que el método semiparamétrico presenta el error cuadrático medio más elevado cuando $\theta = 20$, para $\theta = 3$ y $\theta = 5$ los tres métodos tienen un valor pequeño del error cuadrático medio.

Método		$\theta = 3$	$\theta = 5$	$\theta = 10$	$\theta = 20$
Paramétrico	Estimación	3.01	5.01	10.02	20.05
	Sesgo	-0.01	-0.01	-0.02	-0.05
	DT	0.24	0.37	0.71	1.50
	ECM	0.01	0.03	0.07	0.28
Semi paramétrico	Estimación	3.01	5.00	9.83	19.60
	Sesgo	-0.01	0.00	0.17	0.40
	DT	0.26	0.07	0.43	0.90
	ECM	0.02	0.05	0.22	0.81
No paramétrico	Estimación	3.01	5.00	10.02	20.07
	Sesgo	-0.01	0.00	-0.02	-0.07
	DT	0.29	0.27	0.80	1.89
	ECM	0.01	0.06	0.30	0.91

TABLA 3.5. Comparación valores de θ para la cópula Joe mediante los tres métodos expuestos

En la tabla 3.5 podemos observar que el método no paramétrico presenta el error cuadrático medio más elevado cuando $\theta = 10$ y cuando $\theta = 20$, para $\theta = 3$ y $\theta = 5$ encontramos los valores más bajos del error cuadrático medio para los tres métodos.

3.3. Simulación de datos

Para esta sección hemos generado 1000 muestras de dos variables aleatorias dependientes X y Y, siguiendo la propuesta expuesta en [Lopera et al., 2009].

1. Realizamos los gráficos K-plot y Chi-plot para observar el posible grado de dependencia entre las dos variables.

2. Hallamos el coeficiente de correlación ρ_τ para estas dos variables.

3. Hallamos el parámetro de dependencia para cada una de las familias de cópulas, mediante los métodos paramétrico, no paramétrico y semiparamétrico.

4. Realizamos las representaciones gráficas expuestas en el capítulo 2, para la selección de la familia de cópulas que mejor se ajusta a los datos.

5. Realizamos el análisis de la selección de la familia de cópulas mediante las pruebas de Kolmogorov-Smirnov y χ cuadrado.

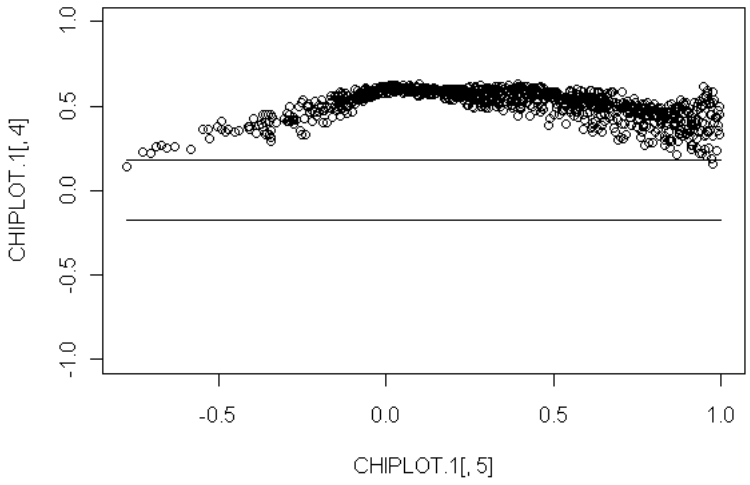

FIGURA 3.9. Chi-plot

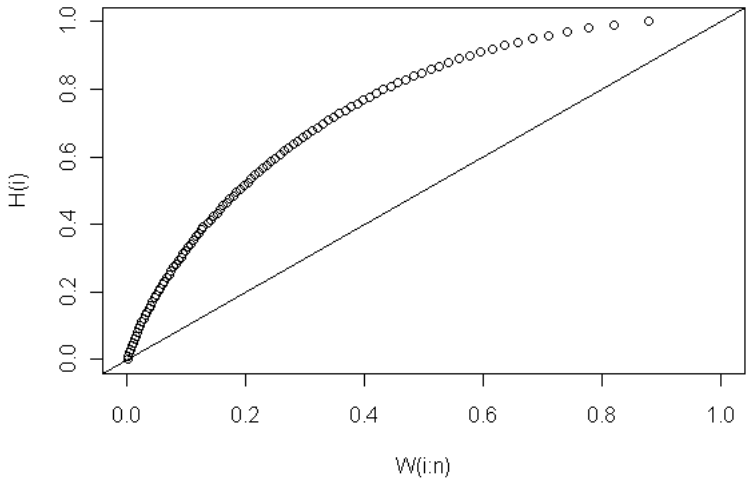

FIGURA 3.10. K-plot

De las figuras 3.9 y 3.10 podemos asumir que hay dependencia entre X y Y, debido a que en la figura 3.9 los puntos de las variables caen por fuera de las bandas y en la figura 3.10 los puntos se alejan de la diagonal.

El coeficiente de correlación ρ_τ para estas variables es de 0.602995. A partir de este coeficiente estimamos los parámetros para cada una de las cópulas.

Método	Familia			
	Clayton	Gumbel	Frank	Joe
Paramétrico	1.748	2.385	8.25	2.834
No paramétrico	3.225	2.613	8.408	4.047
Semiparamétrico	1.768	2.396	8.26	2.851

TABLA 3.6. Valores estimados de θ mediante los métodos paramétrico, no paramétrico y semiparamétrico, para cuatro familias de cópulas.

Con las gráficas que se presentan a continuación se pretende seleccionar la familia cópula que mejor se ajuste a los datos. Se realizan las gráficas tipo I, II y III pero para este trabajo solo aparecerá la gráfica tipo I, debido a que mostraremos estás en la aplicación; además incluimos la correspondiente selección analítica para los tres métodos gráficos.

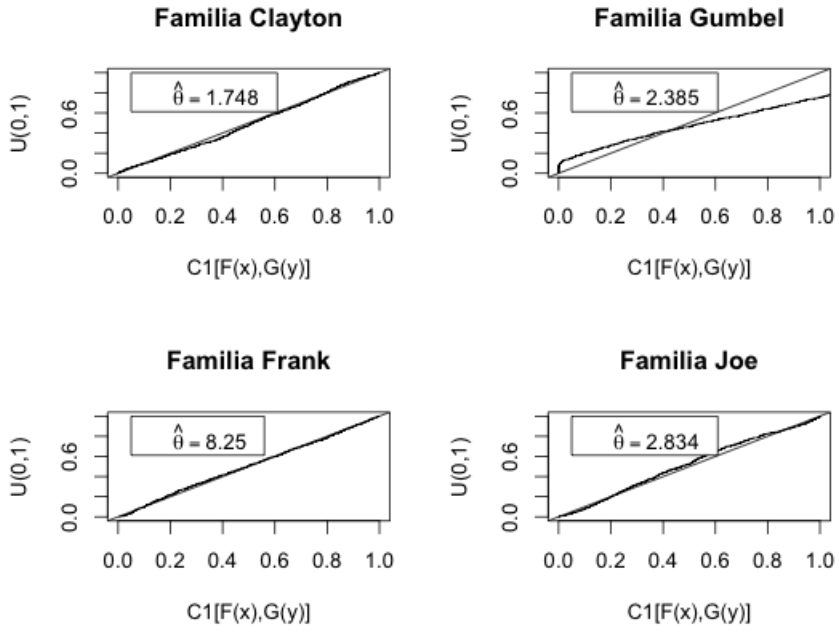

FIGURA 3.11. Estimación paramétrica

En la figura 3.11 se presentan las gráficas correspondientes a la estimación paramétrica de $\hat{\theta}$ mediante máxima verosimilitud. Se puede observar como las familias Clayton, Frank y Joe son las que mejor se ajustan al conjunto de datos, pues están más próximas a la línea recta. Mientras que la familia Gumbel es la que más se aleja.

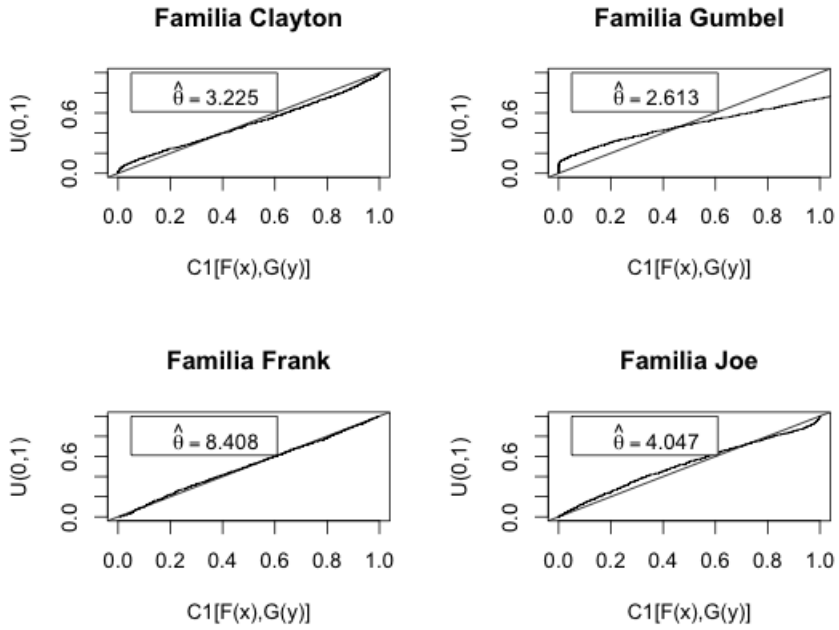

FIGURA 3.12. Estimación no paramétrica

En la figura 3.12 se presentan las gráficas correspondientes a la estimación no paramétrica de $\hat{\theta}$ mediante máxima pseudo verosimilitud. Se puede observar como las familias Clayton y Frank son las que mejor se ajustan al conjunto de datos, pues están más próximas a la línea recta. La familias Gumbel y Joe se alejan de la línea recta, en particular la familia Gumbel quien parece ser la que menos ajusta a los datos.

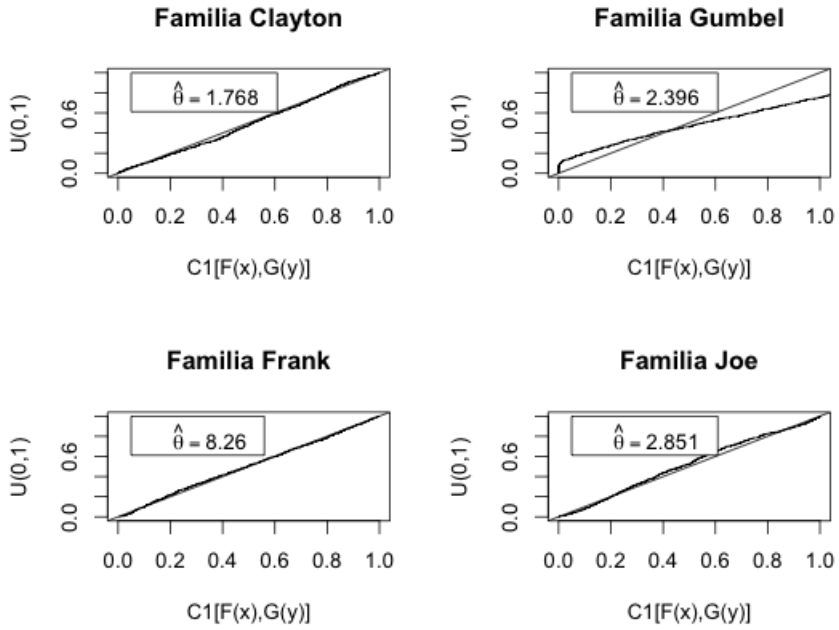

FIGURA 3.13. Estimación semiparamétrica

En la figura 3.13 se presentan las gráficas correspondientes a la estimación semi paramétrica de $\hat{\theta}$. Se puede observar que la familia Gumbel no se ajusta al conjunto de datos, pues están más alejada de la línea recta. A diferencia de los otros métodos de estimación del parámetro, este hace un poco más difícil la selección.

Debido a que la selección mediante los métodos gráficos es un poco engañosa, procedemos a realizar bondad de ajuste para decidir cuál familia de cópulas ajusta mejor a los datos. En las siguiente tablas contienen el p-valor para las pruebas de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov y χ^2.

	χ^2		
	Método		
Familia	Paramétrico	No paramétrico	Semi-paramétrico
Clayton	0.2289	0	0.2565
Gumbel	0	0	0
Frank	0.457	0.5330	0.4355
Joe	0.002	0	0.005

TABLA 3.8. P-valor mediante la prueba χ^2 para el método gráfico 1.

	Kolmogorov-Smirnov		
	Método		
Familia	Paramétrico	No paramétrico	Semi-paramétrico
Clayton	0.010	0.1743	0.011
Gumbel	0.72	0.9758	0.733
Frank	0.93	0.88	0.932
Joe	0.028	0.2162	0.028

TABLA 3.9. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov para el método gráfico 2.

	Kolmogorov-Smirnov		
	Método		
Familia	Paramétrico	No paramétrico	Semi-paramétrico
Clayton	0.028	0	0.032
Gumbel	0	0	0
Frank	0.329	0.2368	0.329
Joe	0.003	0.001	0.003

TABLA 3.7. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov para el método gráfico 1.

De las tablas 3.7 y 3.8 la familia de cópulas que mejor se ajusta a nuestro conjunto de datos, por tener un p-valor alto es la familia Frank. Sin embargo la familia Clayton no puede ser descartada, debido a que la prueba de bondad de ajuste χ^2 para los métodos paramétrico y semi-paramétrico la toma como una posible familia candidata.

	χ^2		
	Método		
Familia	Paramétrico	No paramétrico	Semi-paramétrico
Clayton	0	0.100	0
Gumbel	0.712	0.778	0.573
Frank	0.285	0.187	0.207
Joe	0.018	0.152	0.025

TABLA 3.10. P-valor mediante la prueba χ^2 para el método gráfico 2.

	Kolmogorov-Smirnov		
	Método		
Familia	Paramétrico	No paramétrico	Semi-paramétrico
Clayton	0.108	0.017	0.164
Gumbel	0.042	0.148	0.287
Frank	0.287	0.033	0.104
Joe	0.007	0.219	0.011

TABLA 3.11. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov para el método gráfico 3.

De las tablas 3.9 y 3.10 la familia de cópulas que mejor se ajustan a nuestro conjunto de datos, por tener un p-valor alto son la familia Frank y Gumbel. Notemos que para el método gráfico 2 la selección de la familia se hace un poco tediosa, debido a que las familias Gumbel Frank y Joe parecen ajustar bien al conjunto de datos. La familia Clayton es la que menos se ajusta al conjunto de datos en estás pruebas.

De la tabla 3.11 la familia Frank es la que mejor ajusta con los métodos de estimación paramétrico y semiparamétrico, mientras que la familia Joe es la que mejor ajusta mediante el método no paramétrico.

3.4. Aplicación

En ésta sección se presenta la aplicación de la metodología anteriormente expuesta a datos de hidrología, suministrados por el Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales IDEAM, que corresponden a la medición de los valores medios de nivel dada en cms y la concentración media diaria de sedimentos en suspensión medida en Kg/m^3. Los datos corresponden a la cuenca del río Fonce, la cual cuenta con seis estaciones y de

las cuales haremos la aplicación con la estación Nemizaque, ubicada en el municipio de Charalá del departamento de Santander.

Los datos fueron analizados de la siguiente manera, debido a la ausencia de datos, hemos seleccionado el periodo comprendido entre 1991 y 2010. Tomamos el promedio mensual para cada una de las variables y luego formamos las parejas nivel versus concentración, obteniendo así una matriz con 228 filas y dos columnas.

3.4.1. Análisis de los datos

Para iniciar realizamos un análisis descriptivo sobre el conjunto de datos,donde notamos Niveles por NV y Concentración con SD.

	NV	SD
Mínimo	59.06	0.003
Mediana	110.62	0.016
Media	112.52	0.023
Máximo	173.57	0.111
Desv. Están.	0.0857	0.0004

Ahora deseamos ver qué tan alto es el grado de dependencia entre las variables. Para ello realizamos los gráficos K-plot y Chi-plot, expuestos en el capítulo 1.

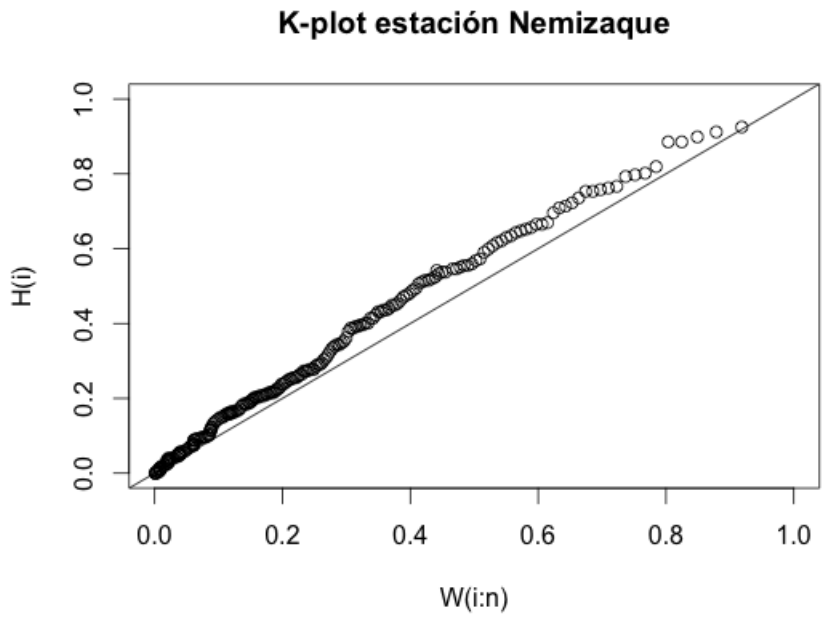

FIGURA 3.14. K-plot para nivel y concentración de la estación Nemizaque

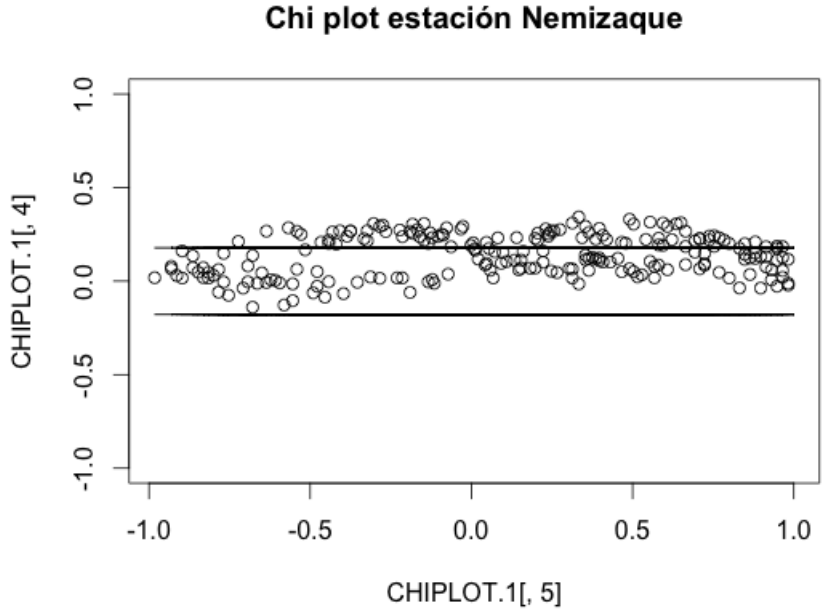

FIGURA 3.15. Chi-plot para nivel y concentración de la estación Nemizaque

Como se puede observar de las figuras 3.14 y 3.15 parece existir cierta relación entre las variables Nivel y Concentración, por lo que realizamos una prueba de independencia

para cópulas mediante la función $BiCopIndTest$ del paquete CDVine de R y obtenemos un p-valor de 0.00013, sí podemos concluir que sí hay relación entre las variables.

Debido a que no conocemos las distribuciones de cada una de las variables, aplicamos los métodos no paramétrico y semiparamétrico para seleccionar la cópula que mejor se ajuste a este conjunto de datos. Para el método no paramétrico el coeficiente de correlación τ de Kendall es de 0.1698.

Método	Familia			
	Clayton	Gumbel	Frank	Joe
No paramétrico	0.4091	1.2045	1.5651	1.3615
Semiparamétrico	0.3261	1.1467	1.4343	1.1567

TABLA 3.12. Valores estimados de θ mediante los métodos no paramétrico y semiparamétrico, para cuatro familias de cópulas.

1. **Gráficas para la estimación no paramétrica**

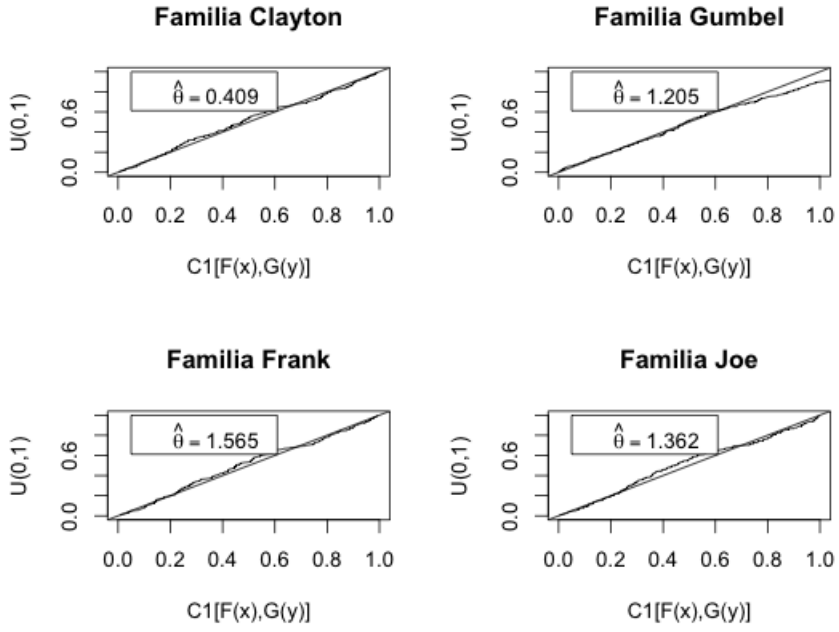

FIGURA 3.16. Estimación no paramétrica, gráfica tipo I

De la figura 3.16 podemos observar que las familias Clayton, Frank y Joe son las que se están ajustando mejor al conjunto de datos, mientras que la cópula Gumbel es la

	Método no paramétrico	
Familia	Kolmogorov-Smirnov	χ^2
Clayton	0.6138	0.4723
Gumbel	0.0193	0.000
Frank	0.3935	0.4615
Joe	0.1665	0.3136

TABLA 3.13. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov y χ^2 para el método gráfico I.

que más se aleja de la línea recta lo que nos lleva en primera instancia a descartarla. Realizando el análisis con el P-valor mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov y χ^2, obtenemos los resultados de la tabla 3.13:

Como podemos observar en la tabla 3.13 la familia que menos se ajusta a nuestro conjunto de datos es la familia Gumbel. Las familias que ajustan mejor son la Clayton y Frank.

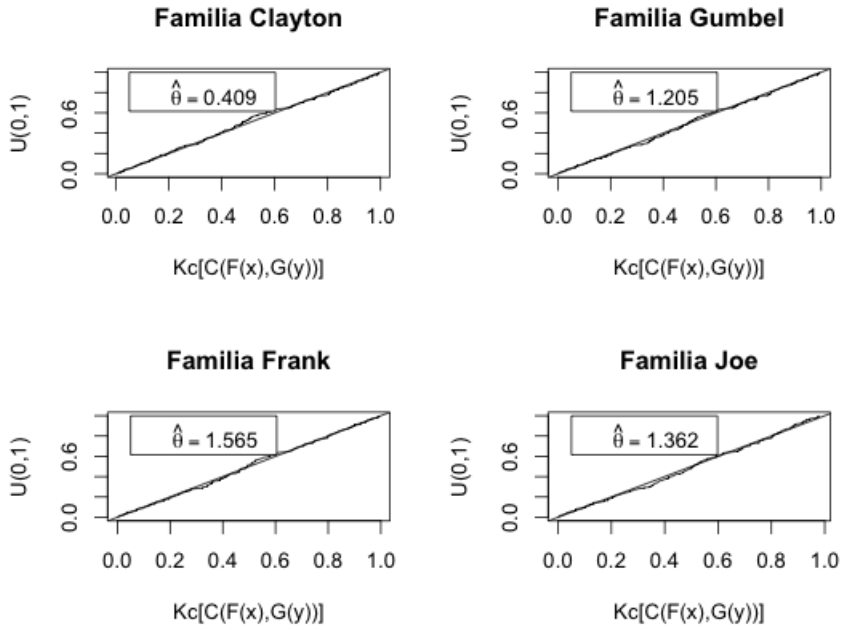

FIGURA 3.17. Estimación no paramétrica, gráfica tipo II

De la figura 3.17 podemos observar que la familia que parece alejarse un poco de la línea recta es la Clayton, pues a diferencia del gráfico tipo I aquí se hace más compleja la selección visual de la familia que mejor se ajuste a los datos.Realizando

	Método no paramétrico	
Familia	Kolmogorov-Smirnov	χ^2
Clayton	0.6571	0.8189
Gumbel	0.7956	0.4615
Frank	0.8653	0.8279
Joe	0.6654	0.6296

TABLA 3.14. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov y χ^2 para el método gráfico II.

el análisis con el P-valor mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov y χ^2, obtenemos los resultados de la tabla 3.14.

La selección mediante el gráfico tipo II (tabla 3.14) es un poco más compleja, pero tanto en la prueba Kolmogorov-Smirnov como en la prueba χ^2, la familia Frank es la que mejor ajusta.

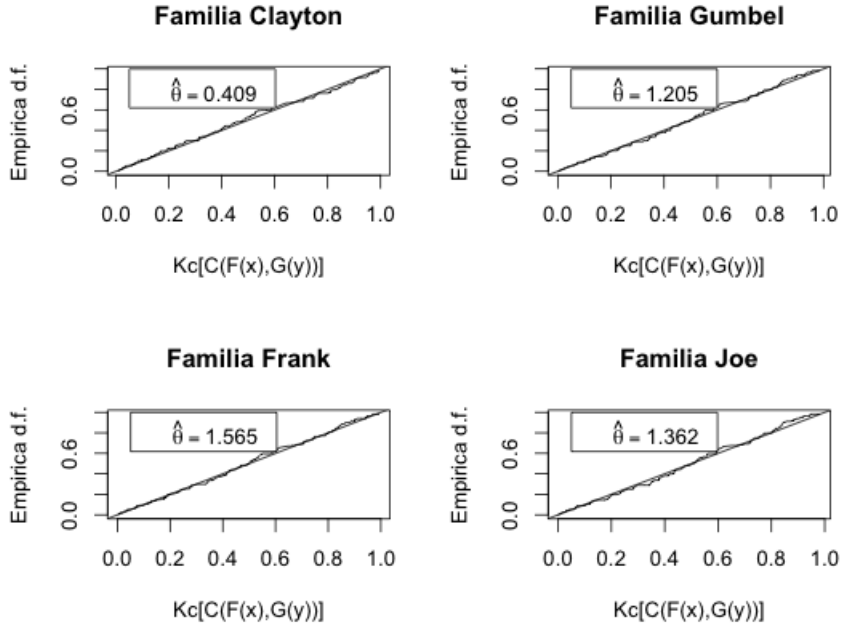

FIGURA 3.18. Estimación no paramétrica, gráfica tipo III

De la figura 3.18 podemos observar que la selección de la familia que mejor se ajusta es más complicada, pues visualmente la que menos se aleja de la línea recta es la familia Frank, sin embargo, se debe tener cuidado con estas conclusiones, pues el observador puede equivocarse.

Método no paramétrico	
Familia	Kolmogorov-Smirnov
Clayton	0.6284
Gumbel	0.9807
Frank	0.8524
Joe	0.9807

TABLA 3.15. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov para el gráfico tipo III.

Por último en la gráfica tipo III 3.15 la familia Gumbel y Joe son las que mejor se ajustan al conjunto de datos.

2. **Gráficas para la estimación semi paramétrica**

En las gráficas que se realizan a continuación, el parámetro de dependencia es estimado mediante el método semiparamétrico.

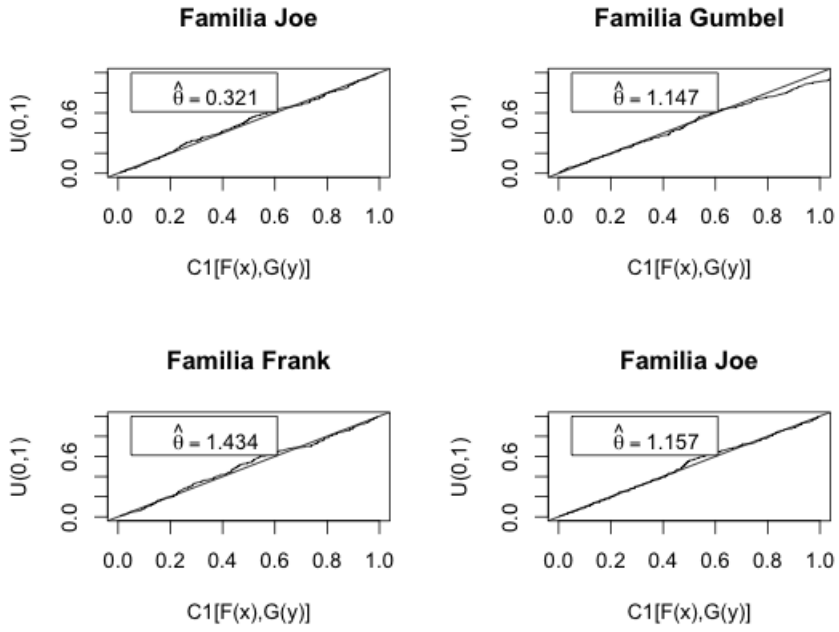

FIGURA 3.19. Estimación semi paramétrica, gráfica tipo I

Podemos observar en la figura 3.19 que la familia que se desvía un poco de la línea recta es la Gumbel, mientras que las otras tres familias, Clayton, Frank y Joe se ajustan mejor al conjunto de datos.

	Método semi paramétrico	
Familia	Kolmogorov-Smirnov	χ^2
Clayton	0.6647	0.4723
Gumbel	0.0598	0.068
Frank	0.4063	0.2334
Joe	0.4776	0.6409

TABLA 3.16. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov y χ^2 para el método gráfico I.

De la tabla 3.16 podemos descartar a la familia Gumbel, ya que esta es la que tiene el p-valor más bajo para las pruebas de Kolmogorov-Smirnov y χ^2. Mientras que en la prueba Kolmogorov Smirnov la familia que mejor ajusta es la Clayton, en la prueba χ^2 lo hace la familia Joe.

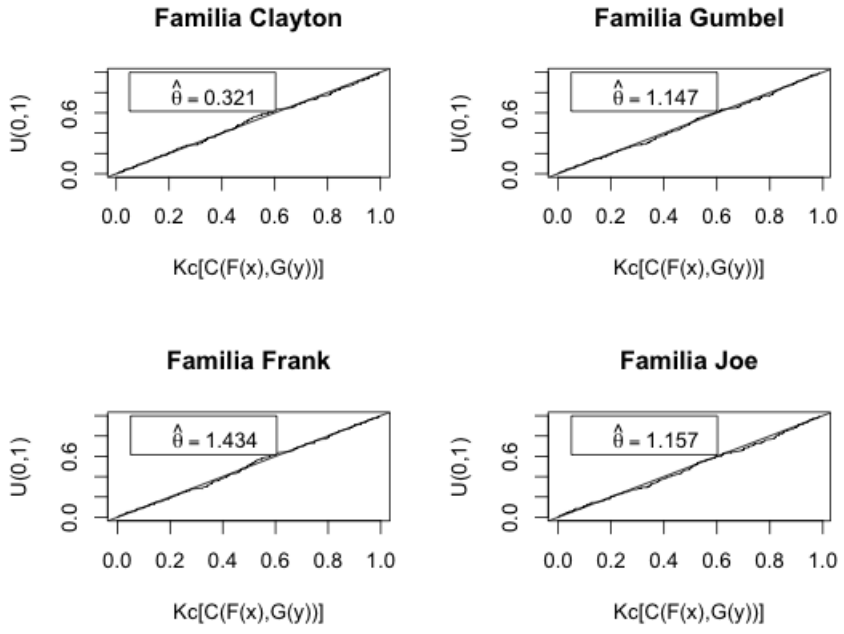

FIGURA 3.20. Estimación semi paramétrica, gráfica tipo II

Podemos observar en la figura 3.20 que las cuatro familias se ajustan bien al conjunto de datos, pues no se ve que alguna se aleje de la línea recta, lo que hace difícil la selección de la familia de manera gráfica.

	Método no paramétrico	
Familia	Kolmogorov-Smirnov	χ^2
Clayton	0.8439	0.7397
Gumbel	0.7622	0.8096
Frank	0.8455	0.7706
Joe	0.771	0.8279

TABLA 3.17. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov y χ^2 para el gráfico tipo II.

De la tabla 3.17 la familia que mejor se ajusta, según la prueba Kolmogorov Smirnov es Frank mientras que con la prueba χ^2 la que mejor ajusta es la familia Joe.

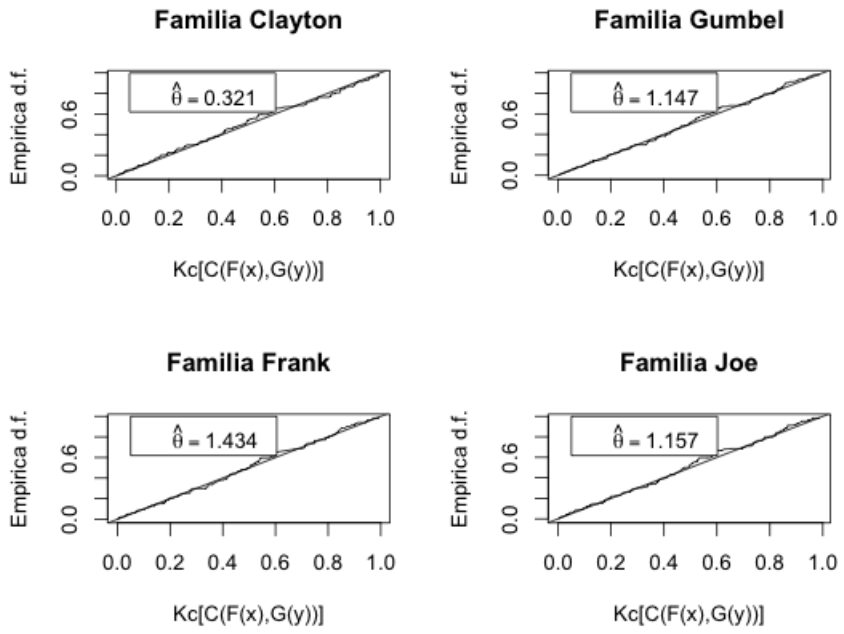

FIGURA 3.21. Estimación semi paramétrica, gráfica tipo III

Método semi paramétrico	
Familia	Kolmogorov-Smirnov
Clayton	0.9534
Gumbel	0.8524
Frank	0.9103
Joe	0.6284

TABLA 3.18. P-valor mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov para el gráfico tipo III.

De la tabla 3.18 la familia que mejor se ajusta, según la prueba Kolmogorov Smirnov es la Clayton y la Familia Frank.

Para esta aplicación vemos lo difícil que es seleccionar una familia que se ajuste a los datos, pues aunque en comienzo en la gráfica tipo I la familia Gumbel era la que menos se ajustaba a los datos, resultó ser una de las más opcionadas para este conjunto de datos. Si bien el grado de dependencia τ de Kendall entre el nivel y la concentración no es alta, podemos ver que los datos se pueden ajustar a una de las familias arquimedianas expuestas en este trabajo. Por tanto si escogemos la familia Frank, el modelo queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C(u,v) &= -\frac{1}{\theta}\ln\left[1+\frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{(e^{-\theta}-1)}\right] \\ &= -\frac{1}{1.565}\ln\left[1+\frac{(e^{-1.565u}-1)(e^{-1.565v}-1)}{(e^{-1.565}-1)}\right] \end{aligned}$$

siendo $\theta = 1.565$ la estimación mediante el método no paramétrico.

Conclusiones

- A través de los tres métodos de estimación del parámetro de dependencia θ, se obtienen posibles valores para cada una de las diferentes cópulas y a partir de estos se pueden hacer comparaciones y decidirse por el que tenga el mejor ajuste a una determinada familia.

- Los tres métodos gráficos, ayudan al investigador a seleccionar la familia cópula que mejor se ajusta a los datos, sin embargo en algunos casos puede ser muy engañosa, por lo que se hace necesario aplicar pruebas de bondad de ajuste.

- Aunque las pruebas de bondad de ajuste ayudan a resolver la selección de la cópula mediante el p-valor, no se puede siempre decidir por una sola familia y no existe aún una forma de llegar a concluir cual es la más adecuada.

Trabajo futuro

- Implementar una prueba analítica que permita la elección adecuada de la cópula arquimediana.
- Realizar una prueba que luego de seleccionar la familia, se pueda decidir cuál de los tres valores estimados del parámetro θ es el adecuado.

APÉNDICE

Código utilizados en esta tesis

Algunos de los códigos que a continuación se relacionan han sido modificado de los expuestos en las tesis de [De Matteis, 2001] y [Ayyad, 2008].

1. **Estimación parámetro θ**

```
library(CDVine)

####    método no paramétrico  ##########
#################################################
tau1<-cor(Emp.x1,Emp.y1,,method="kendall")
# inversion of empirical Kendallâ??s tau

alpha3<-BiCopEst(Emp.x1,Emp.y1,family=3,method="itau")$par#clayton
alpha4<-BiCopEst(Emp.x1,Emp.y1,family=4,method="itau")$par#gumbel
alpha5<-BiCopEst(Emp.x1,Emp.y1,family=5,method="itau")$par#frank
alpha6<-BiCopEst(Emp.x1,Emp.y1,family=6,method="itau")$par#joe
cbind(alpha3,alpha4,alpha5,alpha6)

####   gráfica tipo I  ########

par(mfrow=c(2,2))
plotmet1(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha3,nr=1)#gr?fica para el m?todo no param?trico
plotmet1(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha4 ,nr=4)#gr?fica para el m?todo no param?trico
plotmet1(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha5,nr=5)#gr?fica para el m?todo noparam?trico
plotmet1(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha6,nr=6)
```

```
####     método paramétrico   ##########
#####################################################

alpha3_mle<-BiCopEst(Emp.x1,Emp.y1,family=3,method="mle")$par#clayton
alpha4_mle<-BiCopEst(Emp.x1,Emp.y1,family=4,method="mle")$par#gumbel
alpha5_mle<-BiCopEst(Emp.x1,Emp.y1,family=5,method="mle")$par#frank
alpha6_mle<-BiCopEst(Emp.x1,Emp.y1,family=6,method="mle")$par#joe

cbind(alpha3_mle,alpha4_mle,alpha5_mle,alpha6_mle)

par(mfrow=c(2,2))
plotmet1(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha3_mle,nr=1)#gr?fica para el m?todo no param?trico
plotmet1(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha4_mle,nr=4)#gr?fica para el m?todo no param?trico
plotmet1(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha5_mle,nr=5)#gr?
plotmet1(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha6_mle,nr=6)#gr?

####     método semiparametrico  P-seudo Maxima verosimilitud ##########
#####################################################

alpha3_PML<-BiCopEst(F1,F2,family=3,method="mle")$par#clayton
alpha4_PML<-BiCopEst(F1,F2,family=4,method="mle")$par#gumbel
alpha5_PML<-BiCopEst(F1,F2,family=5,method="mle")$par#frank
alpha6_PML<-BiCopEst(F1,F2,family=6,method="mle")$par#joe
cbind(alpha3_PML,alpha4_PML,alpha5_PML,alpha6_PML)


par(mfrow=c(2,2))
plotmet1(data1=F1 ,data2=F2,alpha=alpha3_PML,nr=1)#gr?fica para el m?todo no param?trico
plotmet1(data1=F1 ,data2=F2,alpha=alpha4_PML,nr=4)#gr?fica para el m?todo no param?trico
plotmet1(data1=F1 ,data2=F2,alpha=alpha5_PML,nr=5)#gr?
plotmet1(data1=F1 ,data2=F2,alpha=alpha6_PML,nr=6)#gr?


####    métodotipo II  ########
#####################################################


####    método paramétrico   ##########
#####################################################
```

```
par(mfrow=c(2,2))
plotmet2(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha3,nr=1)#clayton
plotmet2(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha4,nr=4)#gumbel
plotmet2(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha5,nr=5)#frank
plotmet2(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha6,nr=6)#joe


####     método paramétrico   ##########
#################################################
par(mfrow=c(2,2))
plotmet2(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha3_mle,nr=1,Clayton)#clayton
plotmet2(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha4_mle,nr=4)#gumbel
plotmet2(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha5_mle,nr=5)#frank
plotmet2(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,alpha=alpha6_mle,nr=6)#joe

####     gráfica tipo III ########
#################################################


####    método  no paramétrico   ##########
#################################################

par(mfrow=c(2,2))
plotmet3(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,z,alpha=alpha3,nr=1)#clayton
plotmet3(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,z,alpha=alpha4,nr=4)#gumbel
plotmet3(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,z,alpha=alpha5,nr=5)#frank
plotmet3(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,z,alpha=alpha6,nr=6)#joe

####    método no paramétrico   ##########
#################################################

par(mfrow=c(2,2))
plotmet3(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,z,alpha=alpha3,nr=1)#clayton
plotmet3(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,z,alpha=alpha4,nr=4)#gumbel
plotmet3(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,z,alpha=alpha5,nr=5)#frank
plotmet3(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,z,alpha=alpha6,nr=6)#joe
####     método paramétrico   ##########
#################################################
par(mfrow=c(2,2))
plotmet3(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,z,alpha=alpha3_mle,nr=1)#clayton
```

```
plotmet3(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,z,alpha=alpha4_mle,nr=4)#gumbel
plotmet3(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,z,alpha=alpha5_mle,nr=5)#frank
plotmet3(data1=Emp.x1 ,data2=Emp.y1,z,alpha=alpha6_mle,nr=6)#joe
```

2. **Código para hallar la cópula**

```
#-----cópula clayton--------------------
copula.1<-function(data1,data2,alpha){
n<-length(data1)
Cl<-numeric(n)
for(i in 1:n){
  Cl[i]<-max(1/(((data1[i]^(-alpha))+(data2[i]^(-alpha))-1)^(1/alpha)),0) }
return(Cl)
}
#-----cópula gumbel--------------------
copula.4<-function(data1,data2,alpha){
n<-length(data1)
Gum<-numeric(n)
for(i in 1:n){
  Gum[i]<-exp(-((-log(data1[i]))^(alpha)+(-log(data2[i]))^(alpha))^(1/alpha))
}
return(Gum)
}
```

```
#-----cópula frank-------------------
copula.5<-function(data1,data2,alpha){
n<-length(data1)
Fra<-numeric(n)
b<-numeric(n)
c<-numeric(n)
for(i in 1:n){
  a<- -(1/alpha)
  b[i]<-(exp(-alpha*data1[i])-1)
  c[i]<-(exp(-alpha*data2[i])-1)
  d<-(exp(-alpha)-1)
  Fra[i]<-a*log(1+((b[i]*c[i])/d))
}
return(Fra)
}
```

```
#-----cópula joe-------------------

copula.6<-function(data1,data2,alpha){
  n<-length(data1)
  joe<-numeric(n)
  a<-numeric(n)
  b<-numeric(n)
  c<-numeric(n)
  for(i in 1:n){
    a[i]<-(1-data1[i])^alpha
    b[i]<-(1-data2[i])^alpha
    c[i]<-a[i]*b[i]
  joe[i]<-1-(a[i]+b[i]-c[i])^(1/alpha)
  }
  return(joe)
}
```

Bibliografía

Ayyad, C. [2008]. Inferencia y modelización mediante cópulas, *Trabajo de investigación*, Universitat Jaume, Departamento de Matemáticas, Castellón.

Becerra, O. and Melo, L. [2008]. Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones, *Borradores de Economía, Banco de la República, Bogotá-Colombia* **489**: 1–96.

Bianco, J., Casparri, M. and García, J. [2010]. Nota Introductoria al concepto de Cópula y la problemática de riesgos extremos, *Serie de documentos de trabajo:Aspectos financieros de la mitigación del cambio global-Universidad de Buenos Aires* pp. 1–9.

Blanco, L. [2010]. *Probabilidad*, segunda edn, Unibiblos, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Bouyé, E. [2000]. Copulas for Finance,A Reading Guide and Some Applications, *Financial Econometrics Research Centre* .

Cao, J. [2004]. *Nonparametric estimation of copulas*, A Thesis submitted, B.Sc. Nankai University, Department of statistics and applied probability,National University of Singapore, Singapore.

Cherubini, U.and Luciano, E. and Vecchiato, W. [2004]. *Copula Methods in Finance*, J. Wiley & Sons Ltd, Chichester.

De Matteis, R. [2001]. *Fitting Copulas to Data*, Diploma thesis, Institute of Mathematics of the University of Zurich.

del Rio R., C. and Quesada, P. [2007]. *Teoría de Cópulas y control de Riesgo Financiero*, Tesis de Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Matemáticas. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Madrid.

Escarela, G. and Hernández, A. [2009]. Modelado de parejas aleatorias usando cópulas, *Revista Colombiana de Estadística* **32**: 33–58.

Frees, E.W., V. E. [1998]. Understanding Relationships Using Copulas, *N Am Actuar* **J2**: 1–25.

Fréchet, M. [1951]. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, *Ann. Univ. Lyon.* **14**: 53–77.

Genest, C. and Favre, A. [2007]. Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask., *Journal of Hydrologic Engineering* **12**(4): pp. 347–368.

Genest, C., Ghoudi, K. and Rivest, L.-P. [1995]. A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions, *Biometrika* **82**(3): 543–552.

Joe, H. [1997]. *Multivariate models and dependence concepts*, Vol. 73 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*, Chapman & Hall, London.

Kim, G., Silvapulle, M. and Silvapulle, P. [2007]. Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas, *Computational Statistics & Data Analysis* **51**(6): 2836–2850.

Lopera, C., Jaramillo, M. and Arcila, L. [2009]. Selección de un modelo cópula para el ajuste de datos bivariados dependientes, *Dyna, Universidad Nacional de Colombia* **76**(158): 253–263.

McNeil, A., Frey, R. and Embrechts, P. [2005]. *Quantitative Risk Management:Concepts, Techniques, and Tools*, Series in Finance, Princeton University Press, New Jersey.

Nelsen, R. B. [2006]. *An Introduction to Copulas*, Series in Statistics, Springer, New York.

Quevedo, A. [2005]. Dependencia entre activos financieros:un ejemplo para la relación tes - dólar más allá de los supuestos, *odeon-Universidad Externado de Colombia* (002): 161–176.

R Development Core Team [2007]. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0. **URL:** *http://www.R-project.org*

Romano, C. [2002]. Calibrating and simulating copula functions: an application to the italian stock market, *Working Paper CIDEM* (12).

Rényi, A. [1959]. On measures of dependence, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* **10**: 441–451.

Schweizer, B. and Sklar, A. [1983]. *Probabilistic metric spaces*, North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics, North-Holland Publishing Co., New York.

Sklar, A. [1959]. Fonctions de répartition á n dimensions et leurs marges., *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris* **8**: 229–231.

Vélez, D. [2007]. *Teoría de Cópulas Aplicada a la Predicción*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Matemáticas. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Madrid.

Yang, D. [2010]. *Copula and Default Correlation*, Master thesis, Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College.