UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas

Erika Sofía González Trujillo

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2012

Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas

Erika Sofía González Trujillo

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director (a):

Magister en Matemáticas, Martha Cecilia Moreno Penagos.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2012

Contenido

Introducción

Este trabajo surge de la experiencia en la escuela con los estudiantes de Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Rural La Granja, al observar que existen serias dificultades para comprender y comunicar en lenguaje simbólico. Teniendo en cuenta que uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza del álgebra es que el niño logre comunicar en lenguaje algebraico relaciones, regularidades y procesos en forma general y el uso del lenguaje simbólico; la asimilación y comunicación que debería existir entre el lenguaje natural y simbólico, está asociado a la aplicación fórmulas y algoritmos mas no a la comprensión de las mismas. Como consecuencia de esto, no hay significado en el lenguaje simbólico, sino por el contrario se ha convertido en una búsqueda de algoritmos entre letras.

Para los estudiantes es difícil comprender e identificar de modo flexible y en diversos contextos el concepto de variable, no interpretan sus significados y presentan diversos obstáculos cuando requieren trabajar con ellas. Este trabajo parte de las dificultades que presentan los estudiantes en busca de herramientas que fortalezcan la construcción el lenguaje simbólico en la transición de la aritmética al álgebra.

En el capítulo 1 se hace un recorrido por la historia de la matemática, con el propósito de ver cómo se da el paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico, pasando por las etapas del lenguaje retórico y sincopado, hasta el inicio del lenguaje simbólico. Cada etapa centra su atención en detallar el tipo de lenguaje y/o simbología para referirse a la variable, al igual que los dominios aritméticos, algunos geométricos, aportes a pesar de las limitantes y el contexto motivacional que posibilitan la transición del lenguaje natural al algebraico.
Un paso que en la historia de matemática no se da de la noche a la mañana, ni en un instante, ni en una sola persona; que nace de necesidades inmediatas y motivaciones de

los seres humanos y dura más de un milenio para posicionarse como un lenguaje universal.

En el capítulo 2 se estudia el significado de la variable en el paso del lenguaje natural a la algebraico, en un primer momento se hace un breve estado de arte de la investigación, frente al significado y usos de la variable, posteriormente las dificultades en el contexto escolar con relación al significado de las letras, su interpretación y dificultades en los procesos de generalización, luego se consideran algunos ejemplos que se registran de actividades que fueron aplicadas a estudiantes de Grado Séptimo de Educación Básica Secundaria, en donde se evidencia los distintos usos de la variable ; incógnita, número generalizado y relación funcional a partir de la generalización. Además se hace una revisión en textos escolares de Educación Básica Secundaria de la noción de variable.

Finalmente en el capítulo 3, se plantea una propuesta didáctica que centra su desarrollo en potenciar en los estudiantes los diferentes usos e interpretaciones de la variable a través de procesos de generalización en contextos geométricos y numéricos, propiciando el análisis sobre sus propias concepciones y razonamiento. Ésta una selección de ejercicios propuestos por varios autores[1], pertinentes a dar significado a conceptos fundamentales como el de variable y fortalecer la asimilación y comunicación del lenguaje algebraico, se deja abierta la posibilidad de plantear otros mas y de seguir propiciando elementos de apoyo en la enseñanza del álgebra.

[1] *[28] Zuluaga, Carlos. Proyecto Matemática Recreativa. Colombia Aprendiendo. Año 2010.*
[20] Peña, Antonio. Álgebra en todas partes. Ed. La Ciencia. Fondo de cultura económica.

1. Epistemología del lenguaje algebraico

Buscar la naturaleza y significación del lenguaje matemático en nociones, conceptos y la evolución de los mismos, ha permitido encontrar en la historia de las matemáticas razones para la enseñanza de las mismas. Conceptos que trascienden, fundamentan y transforman el desarrollo del álgebra, dan cuenta de la importancia de la simbolización o el uso del lenguaje simbólico en matemáticas a lo largo de la evolución de las ciencias y al buscar en esa naturaleza propia del conocimiento su desarrollo, aparecen dificultades intrínsecas que posiblemente la historia nos revele.

Es importante analizar cómo se construye la noción de variable a lo largo de la historia, cómo evoluciona el lenguaje simbólico en matemáticas. La mayoría de los estudios en didáctica asocian la noción de variable al símbolo que la representa y parten del paso de la aritmética al álgebra cuya transición introduce literales que posibilitan esa noción y que más adelante se valida o se relaciona con la variación. La epistemología nos dá elementos para analizar cómo nace y se desarrolla el concepto de variable dando un paso obligado por los principales lugares y momentos históricos en el desarrollo del álgebra, en donde el lenguaje juega un papel importante y el uso del simbolismo en matemáticas no es más que otra forma de comunicación. ”Las matemáticas, al igual que cualquier otra actividad humana deben resituarse en sus distintos contextos socio culturales”[2] volver a la historia y encontrar las motivaciones y dificultades de quienes se ven involucrados en el desarrollo del lenguaje algebraico nos proporciona elementos para la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

---

[2] *[22] Radford, Luis G. Incursión histórica por la cara oculta del desarrollo primitivo de las ecuaciones. Revista UNO Didáctica de las matemáticas. N 14. Octubre 1997.p 61-73*

Según Nesselman[3] la construcción de la notación algebraica se concibió en tres momentos los cuales llamaremos etapas de lenguaje algebraico. La primera de ellas: **Etapa retórica o verbal** se desarrolló entre los años 2000 – 250 a.C aproximadamente, las matemáticas surgen junto con la necesidad de comunicarse y allí diversos problemas planteados según el contexto cultural (cuentas diarias, contratos, préstamos) "se remiten al planteamiento y solución en forma verbal, que se centra en describir aspectos procedimentales de los pasos a realizar para resolver el problema"[4] Esta forma de abordar los problemas, es aplicada a situaciones particulares y no en una forma generalizada.

Posteriormente entre los años 250 a.C - 1500 d.C los conocimientos en aritmética se amplían, debido a que la actividad comercial aumenta, los cálculos astronómicos son más complejos e involucran muchas más variables que representaban cantidades desconocidas, surge la necesidad de abreviar el lenguaje en matemáticas que era herramienta indispensable en el planteamiento y solución de problemas que conducían a diversos tipos de ecuaciones (lineales, cuadráticas y cúbicas, determinadas e indeterminadas) y esto da lugar al **Lenguaje sincopado** que lleva a introducir por primera vez abreviaturas usando letras para las incógnitas y sus potencias, en una combinación del lenguaje retórico con abreviaturas, aún en esta fase predominan los cálculos en lenguaje natural.

Para la época del año 1500 d.C en adelante, surgen nuevas necesidades en matemáticas a lo largo de la historia y como consecuencia de ello **el lenguaje simbólico**. El álgebra se pincela al servicio de la utilidad social y económica, a la virtuosidad intelectual, los retos en enigmas geométricos y numéricos, la expansión del comercio y el contacto científico entre distintas culturas amplían los dominios en aritmética y geometría e impulsan el paso a fortalecer la notación del lenguaje algebraico, la solución a los problemas matemáticos se expresa mediante fórmulas, no sólo se introducen símbolos para la incógnita y sus potencias sino también para los coeficientes, esto no se da en

---

[3] *[13] Citado por Malisani. Elsa ,1999. Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Artículo publicado en la "Revista IRICE" del "Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación"*

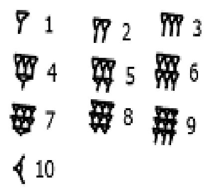
[4] *[12] Morris Klein. El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros día. Alianza universidad.*

breve instante, pasan muchos años para que el hombre extraiga conceptos abstractos. Matemáticos como François Vieta generan el cambio más significativo en el lenguaje algebraico e impulsan a otros a enriquecer la notación simbólica.

Es evidente como la historia nos muestra que el fluir del lenguaje algebraico, no se dá de la noche a la mañana, ni mucho menos en un sólo lugar o de una sola persona, hay que detenerse en el tiempo, donde se sientan las bases de un lenguaje que será universal y trascendental en el nacimiento de la disciplina.

A continuación se muestra la evolución del lenguaje algebraico, describiendo en cada una de sus etapas; retórico, sincopado y simbólico, los elementos que disponen para el avance en matemáticas, haciendo un recorrido histórico, destacando sus principales exponentes, aportes y limitantes, su contexto motivacional y el uso simbólico para la variable.

1.1 Lenguaje retórico: (~2000 – 250 a.C)

REPRESENTANTES- Y APORTES	ELEMENTOS DE ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA	SIMBOLOGÍA PARA LA INCÓGNITA O VARIABLE
BABILONIOS (~2000 a.C) Plantean y resuelven problemas de manera verbal. Manipulan la incógnita sin usar símbolos especiales. Tipo de Ecuaciones: cuadráticas; método de resolución: completar el cuadrado Pioneros en el sistema de medición del tiempo al introducir el sistema sexagesimal y lo hacen dividiendo el día en 24 horas, cada hora en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Problemas que se reducen a la solución de ecuaciones cuadráticas. Aceptan aproximaciones de números irracionales como soluciones de sus ecuaciones.	Sistema posicional de base 60 y otros sistemas mixtos Símbolos cuneiformes.  La suma y resta consiste en quitar o añadir símbolos. Usan los fraccionarios con único denominador sesenta. Símbolos especiales para algunas fracciones como : ½  1/3  2/3  Hay evidencia de otros sistemas mixtos, usando unidades de diversos ordenes: tales como: 60,24,12,10,6 y 2, éstas se usaron para fechas, áreas , medidas de peso etc, también escribían cosas para representar años como por ejemplo: "***me***" para el 100, luego "***2 me 25***" significaría año 225. "***limu***" para representar 1000, luego "***2 me 1, 100***" representa ***2*100+1*60+10=270*** Construyen tablas para ayudar a calcular: tablas de multiplicar, tablas de cuadrados y cubos o de raíces cuadradas de números.	La incógnita presente en diversos problemas planteados y aunque no utilizan letras para representarlas, si usan terminología geométrica, palabras como: **"us"** (longitud)**"** **"sag"** (anchura) **"asa"** (area) Estas utilizadas en un sentido abstracto y así lo revela el hecho de que sumaran la ***"longitud"*** a un ***"área"*** o el ***"área"*** a un ***"volumen"*** situación que hoy no tendría ninguna sentido con problemas de medida.[5] pero si teórica y llevan a la solución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas, sin embargo la mayor parte de las ecuaciones que se reducen de los problemas son lineales. Se evidencia el uso de la letra para representar números. .

LIMITANTES: No dispusieron de un símbolo para el cero. Su sistema no es del todo posicional, ya que la posición era sólo relativa. (*véase, Historia de la Matemática Carl B Boyer pág. 50).* Desecharon los números negativos, luego nunca consideraron posibles las raíces negativas para ecuaciones de segundo grado.

CONTEXTO MOTIVACIONAL: La construcción de canales, presas y sistema de riego para los cultivos. Cuentas diarias, contratos, préstamos de interés simple compuesto. Acertijos numéricos.

[5] *Vease , [2] Carl B. Boyer. Historia de la Matemática. versión española de Mariano Martínez Pérez . (Pág. 50-59)*

<table>
<tr><th>REPRESENTANTES- Y APORTES</th><th>ELEMENTOS DE ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA</th><th>SIMBOLOGÍA PARA LA INCÓGNITA O VARIABLE</th></tr>
<tr><td>EGIPCIOS (1700 A.C)

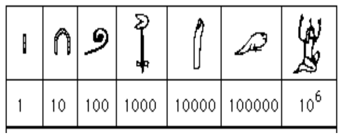
Plantean y resuelven problemas, de manera verbal.

Dominio en el manejo de fracciones empleaban la unidad como numerador.

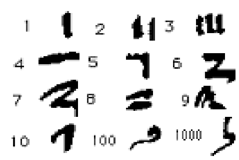
Plantean y resuelven ecuaciones del tipo $ax^2=b$, usando el método de la falsa y doble falsa posición.

Logran calcular la longitud del año solar, a través de sus observaciones astronómicas[6].

.</td><td>Sistema de numeración decimal no posicional, sino aditivo adicionando o cancelando símbolos, con signos distintos para 10, 100, 1000, etc.



Escritura en jeroglífico inicialmente, y posteriormente usaron el sistema hierático.



Para simbolizar la suma y la resta, utilizan el dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas.

Trabajan las cuatro operaciones aritméticas con fracciones utilizando la descomposición en fracciones unitarias.</td><td>A la Incógnita: la llaman

X : “aha” o “montón”

“un montón más un séptimo del mismo montón”

En este momento no existe símbolo para la incógnita.

Posibilitan más de un valor para la incógnita a través de los métodos de resolución de ecuaciones: Método de falsa posición, Método doble falsa posición[7] que consiste básicamente en ensayo y error por tanteo, tomando un valor concreto para la incógnita y verificando si se cumple la igualdad, si no, mediante cálculos se obtenía la solución. Es decir la letra es evaluada</td></tr>
<tr><td colspan="3">LIMITANTES: La naturaleza de los números irracionales no llegó a reconocerse en la aritmética egipcia. Las raíces cuadradas sencillas que aparecían en los problemas se expresaban mediante números enteros y fracciones. La falta de simbolización no permitió el avance en la solución de sistemas de ecuaciones.

CONTEXTO MOTIVACIONAL: Predecir las inundaciones y solucionar el desbordamiento del río Nilo que causaba que los lindes de los campos se borraran. Además de resolver problemas del estado y de los templos, medir áreas de campos para cobro de impuestos, construcción de tumbas pues creían en la inmortalidad, los problemas de la vida diaria, tales como la distribución del pan, granos necesarios para producir cierta cantidad de cerveza, calculo de volumen de graneros etc.</td></tr>
</table>

[6] Véase *[12]* Morris Klein*, El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* pag 35-46

[7] *Véase, [13] Elsa Malisani, Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. Artículo publicado en la” Revista IRICE”del Rosario- Argentina, N 13 de 1999.*

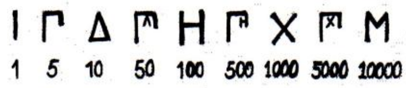
<table>
<tr><th>REPRESENTANTES- Y APORTES</th><th>ELEMENTOS DE ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA</th><th>SIMBOLOGÍA PARA LA INCÓGNITA O VARIABLE</th></tr>
<tr>
<td>Griegos (600-300 a.C)
Período clásico.

EUCLIDES: Expresa la matemática en lenguaje verbal y lenguaje geométrico.

Relación estrecha entre geometría y aritmética, lo que llamaría Zeuthen álgebra geométrica que se encuentra consignada en los libros I y IV de los elementos de Euclides.

Establecen relaciones entre números y sus propiedades.

Resuelven ecuaciones lineales y cuadráticas por métodos geométricos.</td>
<td>Sistema no posicional de base 10.



Inicialmente usan el Sistema Jónico Alejandrino que usa las letras del alfabeto

.

Las letras representan cantidades constantes 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 , múltiplos de 10 hasta 90 y múltiplos de 100 hasta 900, La combinación de estas letras representarían números intermedios. (Morris pág. 98)

Los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones se realizan por medio de construcciones geométricas (Morris Klein)

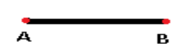
El producto de los números se convierte en el área de un rectángulo, el producto de tres se convierte en volumen.

Usaron las fracciones solamente como razón entre números enteros y no como partes de un todo y las razones se utilizaban sólo para proporciones.(M.Klein pág. 185)</td>
<td>Desarrollan un álgebra de tipo geométrico ya que uso de las letras como variables procede de la geometría griega.

Se establecen relaciones entre magnitudes geométricas .A los entes geométricos les asocian medidas

La variable está presente en las longitudes de segmentos de recta , un área o un volumen Ejemplo:

Postulado 1. Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.

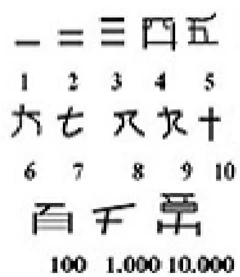


Además la longitud AB representa “a” unidades, lo que quería decir que para cierta unidad de medida esa unidad de medida está contenida “a” veces en el segmento. Representan cantidades geométricas medidas.

Todo número representaba la longitud de un segmento de recta, un área o un volumen, luego el uso del cero como número se hizo más difícil.</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">LIMITANTES: Su avance está limitado por la negación a aceptar y conceptualizar los irracionales como números. El cero no se tenía en cuenta, debido a que todo número representaba la longitud de un segmento, área o volumen. Se avanza lento y con mucha dificultad debido a que se desconoce ciertos conjuntos numéricos.“Se produce un impedimento fuerte para trasladar el uso geométrico de las letras directamente al algebra” ya que en geometría todos los puntos son el mismo, mientras que los números no”[8]

CONTEXTO MOTIVACIONAL: La necesidad de medir, el inquirir por la naturaleza del número.</td></tr>
</table>

[8] *[23] Iniciación al álgebra. Matemática, cultura y aprendizaje. Pág 22*

REPRESENTANTES- Y APORTES	**ELEMENTOS DE ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA**	**SIMBOLOGÍA PARA LA INCÓGNITA O VARIABLE**
Chinos (1200-250 a.C) Solución de ecuaciones de primer y segundo grado. Método de solución con simple falsa posición. Admiten los números negativos, aunque no los aceptan como soluciones de ecuaciones. Números racionales positivos. Reconocen algunos irracionales. Concepto de proporcionalidad directa.	Sistema de numeración decimal posicional.  En principio utilizaron dos sistemas de notación distintas, uno e basaba en el principio multiplicativo y el otro usaba una forma de notación posicional.[9] El sistema de "numerales de varillas" utiliza 18 símbolos alternadamente en las posiciones de derecha a izquierda. El lugar que ocupa el cero se deja en blanco. Boyer, pág. 261. Operan con fracciones ordinarias, establecen analogías con los distintos sexos; llaman al numerador ***"hijo"*** y al denominador ***"madre".*** No son ajenos a los números negativos, ya que representa los números o coeficientes positivos con una varilla de color rojo y los negativos con una de color negro.	Asignan un valor para la incógnita y efectúan los cálculos para obtener el valor exacto. En el libro *Ssu- yuan yu-Chien* o *" Espejo Precioso de los cuatro Elementos" (*四元玉鉴) hace referencia **al cielo, la tierra ,el hombre y la materia,** que representarían las cuatro incógnitas de una ecuación. Se evidencia el uso de la letra como incógnita.
LIMITANTES: No tenían el concepto del cero. Nunca hicieron uso de fracciones sexagesimales. **CONTEXTO MOTIVACIONAL:** Problemas en el calendario, cálculos astronómicos en los negocios, en la medida de las tierras, en la arquitectura, en los archivos gubernamentales y en los impuestos.		

[9] *En el sistema de principio multiplicativo se tienen cifras distintas para los dígitos de 1 a 10 y las potencias de 10, los dígitos que ocupaban una posición impar se multiplicaban por sus sucesores*

1.2 Lenguaje sincopado: El estatuto de la incógnita va a evolucionar rápidamente

REPRESENTANTES- Y APORTES	ELEMENTOS DE ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA	SIMBOLOGÍA PARA LA INCÓGNITA O VARIABLE
GRIEGOS (330 a.C-600 d.C) Período Alejandrino o helenístico. **Diofanto (250 d.C):** Se reconoce en él la figura griega más prominente de la época Alejandrina con respecto al álgebra. Introduce por primera vez abreviaturas, usa letras griegas para las incógnitas y sus potencias. Trabaja ecuaciones de tipos lineales, cuadráticas y cubicas. Ecuaciones determinadas e indeterminadas.[10] Números racionales e irracionales cuadráticos positivos. El tipo de álgebra de Diofanto se suele llamar ***álgebra "numerosa" o "numeral"***, ya que los coeficientes de las ecuaciones siempre son conocidos.[11] Creador del análisis Diofántico.	Sistema no posicional de base 10. α β γ δ ε ς ζ η 1 2 3 4 5 6 7 8 ι κ λ μ ν ξ ο π ϙ 10 20 30 40 50 60 70 80 90 ρ σ τ υ φ χ ψ ω ϡ 100 200 300 400 500 600 700 800 90 La *Aritmética* de Diofanto es una colección de 189 problemas, introduce algunas expresiones y símbolos para representar las incógnitas, las operaciones y las potencias de las incógnitas. Introduce símbolos especiales para algunas operaciones aritméticas como: **Adición*:*** Yuxtaposición de términos, así; $\Delta^{Y}\bar{\gamma}\overset{o}{M}\iota\bar{\beta}$ significa $x^2 \cdot 3 + 12.$ **Sustracción:** $\pitchfork$ así: $x^6 - 5x^4 + x^2 - 3x - 2$ se escribe: $K^{Y}\kappa\bar{\alpha} \pitchfork \Delta^{Y}\Delta\bar{\varepsilon}\varsigma\bar{\gamma}\overset{o}{M}\bar{\beta},$ **Igualdad:** ι^{σ} **El cero** : 0 ▪ ¯ **0, 0** **La unidad: M⁰** además indica que seguido va un número puro que no contiene a la incógnita. **Fracciones*:* *L”*** para ½	Se cree que el símbolo que usaba para la indeterminada era “ς” la llama ***El número del problema,*** la interpreta como una variable numérica, puede haber sido la misma letra griega σ escrita al final de la palabra *arithmos*. . ἀριτμός ésta no representa ningún número del sistema griego. Nuestra x la escribe Δ por ser la primera letra de la palabra *dymanis “potencia” (*δύναμις *).* Uso nombres y símbolos para las potencias, lo que hoy simbolizamos de la siguiente forma sería: Δ *“la potencia”* ***x*** Δ^{Y} *su cuadrado* *x^2* K^{Y} *su cubo* *x^3* $\Delta^{Y}\Delta$ *cuadrado cuadrado* *x^4* ΔK^{Y} *cuadrado cubo* *X^5* $K^{Y}K$ *cubo-cubo* *x^6* Nombres especiales para los inversos de las seis potencias de la incógnita, lo que equivale a nuestras potencias negativas. Los ***coeficientes numéricos*** los escribe después de los símbolos para las respectivas potencias de la incógnita[12]

[10] Determinadas aquellos sistemas en los cuales hay por lo menos tantas ecuaciones como incógnitas. Indeterminados, aquellos sistemas en los cuales hay menos incógnitas que ecuaciones.

[11] [12] En Morris Kline, El pensamiento matemático de la antigüedad en nuestros días.
[12] [2] En el libro de Carl C Boyer, Historia de la matemática amplia esta afirmación.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>No utiliza signos para representar la multiplicación y división.

Obtiene un sistema cerrado para las cuatro operaciones del álgebra, para lo cual establece las leyes de los signos. Por ejemplo: deficiencia por deficiencia permite disponibilidad. Esto es, (-) x (-) = +.

Establece las reglas de que hay que cambiar de signo cuando se cambia de lado de la igualdad y la de que hay que reunir términos semejantes.</td>
<td>Resuelve problemas con varias incógnitas, las cuales las reduce expresando todas las cantidades desconocidas en términos de una sola de ellas. Es decir una reducción de variables</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">LIMITANTES: La falta de aceptación de números negativos, ya que las raíces negativas no las consideraban como solución de una ecuación. Además reconocen solamente soluciones racionales exactas, no acepta aproximaciones de números irracionales como solución de ecuaciones.

CONTEXTO MOTIVACIONAL La comprensión del mundo físico ya que se consideraba que la matemática era la clave para entender los fenómenos naturales. Buscar soluciones exactas, positivas y racionales a ecuaciones determinadas e indeterminadas. Se interesó por los acertijos numéricos.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>REPRESENTANTES- Y APORTES</th><th>ELEMENTOS DE ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA</th><th>SIMBOLOGÍA PARA LA INCÓGNITA O VARIABLE</th></tr>
<tr>
<td>HINDUES (200-1200)

BRAHMAGUPTA. Fue el más grande de los matemáticos hindúes.

Mejoran la notación simbólica creada por Diofanto.

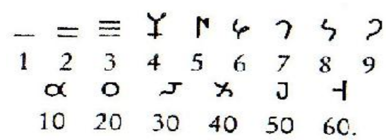
Introduce el cero como número

Números racionales e irracionales cuadráticos. Números negativos.

Tipos de ecuaciones: lineales, cuadráticas, determinadas e indeterminadas, algunas ecuaciones cubicas y cuarticas

Resuelven ecuaciones usando la regla de la falsa posición y el método de completar cuadrado.

Admiten los coeficientes negativos y en algunos casos las raíces negativas.</td>
<td>Sistema de numeración posicional y decimal desde el siglo VIII a.C. Notación Brāhmi. Usan símbolos especiales para los números del 1 al 9.



PAG 248 (MORRIS KLEIN)

Aritmética de los números negativos y el cero.

Simbología en aritmética abreviaturas:

La suma: Indicada por yuxtaposición
La resta: un punto sobre el sustraendo.
La igualdad: escriben los dos miembros en dos líneas consecutivas.
La división: El divisor debajo del dividendo
El producto : bha» de bhavita
La raíz cuadrada : « ka» (de la palabra karana, “irracional”.)
Numero enteros : prefijados por «rū» (de rūpa, ‘el número absoluto’).
La palabra hindú para referirse al cero era śūnya, que significa “vacío”[13]</td>
<td>Simbología para la incógnita:

X “ya” yavattavat (tanto-cuanto)
X^2 “va”
X^3 “gha”
X^4 “vava”
X^9 “ghagha”
$X^{1/2}$ “ka”

Uso de Varias incógnitas
Si el problema a solucionar implicada más de una incógnita, una de ellas se indicada por las sílabas iniciales de palabras de diferentes colores, así una segunda incógnita podía ser denotada por «kā» (de kalaka, (“negro”).

Ejemplo: $8xy + \sqrt{10}-7$

es equivalente a:
yā kā 8 bha ka 10 rū 7</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">LIMITANTES: La aceptación de los irracionales permitió un avance significativo en el álgebra ya que hizo posible asignar valores a segmento lineales y figuras de dos, tres dimensiones, sin embargo encuentran dificultades en su aritmética, Su comprensión de la aritmética del cero no era del todo perfecta

CONTEXTO MOTIVACIONAL Los cálculos astronómicos. Calculo de áreas y volúmenes. Las ecuaciones lineales y cuadráticas, determinadas o indeterminadas; las medidas; las progresiones aritméticas y geométricas; y numerosos problemas de naturaleza geométrica y algebraica.</td></tr>
</table>

[13] *[5] Apuntes de Historia de las Matemáticas No. 1, Vol. 2, ENER0 2003 . ÁLGEBRA INDIA Francisco Armando Carrillo Navarro http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-1-1-india.pdf*

<table>
<tr><th>REPRESENTANTES- Y APORTES</th><th>ELEMENTOS DE ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA</th><th>SIMBOLOGÍA PARA LA INCÓGNITA O VARIABLE</th></tr>
<tr><td>ÁRABES (800-1300)

Contribuyen con el nombre de álgebra, proveniente de la palabra “aljabr” que al parecer significa “restauración” o completación” y “muqabalah” probablemente “reducción o compensación” o también según Klein significa “restauración “ “componedor de huesos”

AL-KHOWARIZMI (780-840)
Regresión con respecto a Diofanto. Es un álgebra completamente retórica con una semejanza al estilo de los babilónicos y egipcios.

Solución de ecuaciones indeterminadas de segundo y tercer grado.las cuadráticas las justifican con procesos geométricos.</td><td>Usan y mejoran los símbolos de los indios y su notación posicional. Sistema posicional de base 10.

٠ ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١
0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Números racionales e irracionales cuadráticos. No hacen uso de los números negativos (no aceptados como coeficientes y raíces de ecuaciones).

Los números están escritos con palabras, sin ninguna abreviatura

Se aproxima un poco al trabajo de Diofanto, respecto al tratamiento de varias incógnitas ya que las reduce a una indeterminada y luego las resuelve.
(Morris Klein, I pág. 260)

Relacionan geometría y álgebra para poder complementar sus argumentos.</td><td>Influenciados por los griegos, la variable tiene dimensionalidad, está presente en las longitudes de segmentos de recta, un área o un volumen.

AL-KHOWARIZMI en su libro, llama al lado de un cuadrado “la cosa”, y en la solución a los problemas, hace referencia al producto de la “cosa”, La mitad de las “cosa”.(Véase . Carl Boyer, pág. 303)

Es evidente que la limitante en la obra de Al-khowarizmi es la ausencia de la notación simbólica.</td></tr>
<tr><td>Trattato d Algibra (Anónimo del Siglo XIV).

Introducen nombres especiales para la incógnita y sus potencias.</td><td>Soluciona ecuaciones cúbicas con el uso de intersecciones de cónicas.</td><td>Llama potencia al cuadrado de la incógnita Introducen nombres especiales para la incógnita y sus potencias. Trattato d Algibra
(Anónimo SigloXIV)

X cosa(o chosa)
X^2 censo
X^3 chubo
X^4 censo di censo
X^5 chubo di censi
X^6 censo di chubo</td></tr>
<tr><td colspan="3">LIMITANTES: No hacen uso de los números negativos, no los aceptan como coeficientes ni raíces de ecuaciones. Al-khowarizmi retrocede con respecto a Diofanto ya que no usa ninguna notación simbólica, influenciado por la matemática griega.
CONTEXTO MOTIVACIONAL: En el Siglo VII los árabes invaden India y otras comunidades islámicas y los sistemas matemáticos indios pasan a ser estudiados y adoptados por ellos. Le dieron el nombre de „Al-Jabr‟ que significa „la unión de las partes sueltas‟, puesto que Al significa ‘La’ y Jabr significa ‘reunión’. Los árabes mejoraron las artes y las ciencias que imperaban en las tierras que invadieron durante su gran Jihad.[14]</td></tr>
</table>

[14] *[5] Apuntes de Historia de las Matemáticas, No. 1, Vol. 2, ENER0 2003. ÁLGEBRA INDIA. Francisco Armando Carrillo Navarro*

REPRESENTANTES- Y APORTES	ELEMENTOS DE ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA	SIMBOLOGÍA PARA LA INCÓGNITA O VARIABLE
EUROPA **Leonardo Pisano(1170-1250)** (**Fibonacci)** Introduce el sistema de numeración indo-arábigo usado actualmente. introduce el cero en Europa	Sistema de notación posicional (de base 10, o decimal) y un dígito de valor nulo: el cero Números racionales e irracionales cuadráticos. Números negativos no aceptados como coeficientes y raíces de ecuaciones. Resuelve ecuaciones de segundo grado al estilo de Diofanto y los árabes, encontró la solución con razonamientos geométricos de Euclides.	Usa la simbología Diofanto Δ *"la potencia"* *x* Δ^{γ} *su cuadrado* x^2 K^{γ} *su cubo* x^3 $\Delta^{\gamma}\Delta$ *cuadrado cuadrado* x^4 ΔK^{γ} *cuadrado cubo* X^5 $K^{\gamma} K$ *cubo-cubo* x^6
NICOLAS CHUQUET (1455 a 1488**)** En su obra **Triparti,** Trata : los números, las raíces y la "regla de los primeros" Da un paso decidido en algebra al considerar los números negativos y en usar exponentes e incluir el cero como exponente.	.habla de los números negativos como "absurdos".	Nicolas Chuqet, llama a la incógnita el ***"número primero"*** o ***"primario". Usa la abreviatura "radix"(raíz)*** Rx^1 *Raíz o incógnita* Rx^2 *Raíz cuadrada* Rx^3 *Raíz Cubica.* Usa por primera vez notación exponencial e incluye el cero como exponente.
PACIOLI (1445-1514) SIGLO XVI Números negativos racionales e irracionales cuadráticos. Ecuaciones cubicas y cuarticas en su libro *Summa,* además de conectar la matemática con aplicaciones prácticas.	Simbología en Aritmética: ***p*** ***de pui (mas)*** ***m*** ***de meno (menos)*** ***ae*** ***de equalis (igual)*** ***R2*** ***raíz cuadrada*** ***R3*** ***raíz cubica*** ***m*** ubicada delante de un numero significa que este era negativo	El simbolismo sincopado de Pacioli es mas de abreviaturas. Se referían a la incógnita como ***radix*** o ***res*** (raíz o cosa en latín)" o "cosa" que toma significado según el problema X ***co de cosa*** x^2 ***ce o Z de censo*** x^3 ***cu o C de chubo*** x^4 ***ce ce de censo di cenco*** Usa el principio multiplicativo para la sexta y novena potencia

CARDANO (1501-1576) Resolución de la ecuación cúbica (y cuártica también) escrita en el *Ars Magna* Números irracionales. Números negativos no aceptados como coeficientes y raíces de ecuaciones, llamándolos "ficticios"	Para el año de 1483 aun no existen signos para la multiplicación y la división. La multiplicación dispone formas para el cálculo como la llamada "***de celosía***" o "***de enredado***" Para la división usan una serie de restas repetitivas llamada división ***"a danda"*** otra ***" a galea"*** En su obra Ars Magna Se refiere a la incógnita como "***rem ignotam",*** los términos y notaciones varian enormemente, muchos símbolos se derivaban de abreviaturas. **R** para "raíz cuadrada". **p** para "mas" **M** para "menos"	Se refiere a la incógnita como "***rem ignotam",*** los términos y notaciones varían muchos símbolos se derivaban de abreviaturas. Ejemplo: $X^2 = 4x + 32$ como "***qdratu aeqtur* 4 rebus:32**. Al termino constante 32, lo llama el "***número".*** Símbolo para la incognita. **R** abreviatura de *res.* ***X^2*** es decir la segunda potencia **la simboliza Z y lo llamaba "*quadratum*" o "*censo*"** **X^3 lo escribe C y lo llama "*cubus".***
BOMBELLI(1526-1572) Transforma el lenguaje algebraico. Introduce símbolos especiales para representar la incógnita y sus potencias y relaciones de uso frecuente. Introduce segmentos negativos y áreas negativas o nulas Argumenta combinando con instrumentos Euclides y algebraicos. Analiza la naturaleza y multiplicidad de las raíces. Resuelve ecuaciones de los primeros cuatro grados y su resolución a través de fórmulas.	Números racionales e irracionales cuadráticos. Números negativos Irracionales cúbicos Considera los números complejos en la solución de ecuaciones de tercer grado aunque los llamaba inútiles o "sofísticos" Usa la construcción geométrica Usa la construcción geométrica; partiendo de la resolución algebraica deduce la construcción geométrica.	Transforma la notación algebraica al introducir símbolos para la incógnita y sus potencias, utilizaba la palabra **"*tanto"*** en vez de **"*cosa"*,** Usa una circunferencia sobre la base del número que significaría el exponente de la potencia y emplea un razonamiento usando elementos algebraicos y euclideos Simbología para la incógnita y sus potencias era: ***X 1 tanto.*** ***X^2 2 potenza*** ***X^3 3 cubo*** ***X^4 4 potenza di potenza.*** ***X^5 primo relato*** ***etc.(Morris pag 348)*** ***Asi*** $1 + 3x + 6x^2 + x^3$ *era:* $\mathbf{1p.3^1p.6^2p.1^3.}$

LIMITANTES: El simbolismo que usa Pacioli, presenta ambigüedad en el sentido de "Radix" a veces significa incógnita otras raíz o solución de la ecuación , a veces cualquier extracción de raíz. Cardano opera formalmente con números negativos y complejos, sin embargo se resiste aceptar que sean soluciones de raíces.

CONTEXTO MOTIVACIONAL: Las condiciones económicas y sociales de la época, se disponen para recibir a los grandes algebristas del Renacimiento**.** La circulación de las aritméticas impresas, la difusión de la ***Summa*** de Pacioli, ofrecen condiciones de bases científicas para el desarrollo de la matemática.[15]

El álgebra que se desarrolló en la edad media se enfocó en la resolución de enigmas geométricos y numéricos, tal dominio reflejaba virtuosismo y respeto en las clases económicas y sociales.

---

[15] [27] Véase, El Álgebra Renacentista, Carlos E Vasco. pág. 61.

1.3 Lenguaje simbólico: 1500 en adelante.

<table>
<tr><th>REPRESENTANTES- Y APORTES</th><th>ELEMENTOS DE ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA</th><th>SIMBOLOGÍA PARA LA INCÓGNITA O VARIABLE</th></tr>
<tr><td>FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603), Francés.

Viete se da cuenta que la incógnita no necesita ser un número o un segmento geométrico. Inicia la generalización a la expresión algebraica.

Escribe las magnitudes conocidas “parámetros” como consonantes (B, D, etc.) y las magnitudes desconocidas “incógnitas” como vocales.

Propuso un nuevo enfoque de la resolución de la cúbica.

Facilitó el estudio de ecuaciones de grado 2, 3 y 4.

Distingue algunas relaciones entre las raíces y coeficientes de una ecuación algebraica.

Concibe la matemática como una forma de razonamiento.</td><td>Números racionales e irracionales cuadráticos.

Números complejos. Viete descarta enteramente los Números negativos.
Irracionales cúbicos.
Números imaginarios

Simbología en aritmética:

“in” multiplicación “l” división. “aequalis” igualdad.

Introduce una nueva incógnita para la solución de ecuaciones cúbicas.

Establece un diferencia entre álgebra y aritmética. Llama “logística speciosa” al álgebra como método de operar con formas o cosas.</td><td>Se concibe la distinción entre parámetro e incógnita. Símbolos diferentes para parámetros e incógnitas.

No es del todo simbólico, se usan aun abreviaturas. Ej :

A^2 “A 19uadrates”

A^3 “A cubus”

“B in A quadratum, plus D plano in A, aequari

$$A^2 + B^3C^2 + DE = F^2H$$
la escribía así:

Aq + Bc in Cq + Dpl in E ae. Fq in H

La expresión $a - b$ la utilizaba en el sentido “$a\ mayor\ que\ b$”, y la notación $a = b$ quería decir “$a\ menor\ que\ b$</td></tr>
<tr><td colspan="3">LIMITANTE: No admitir coeficientes ni raíces negativas, ni las imaginarias, esto le impidió avanzar en las funciones simétricas de las raíces en la teoría de ecuaciones[16] Su notación era todavía complicada y se alternaba con palabras en abreviatura e incluso no abreviadas.

La influencia de la geometría sobre el álgebra era todavía muy fuerte y se nota en la forma de expresar las potencias sucesivas. Las letras representaban solamente números positivos y esas letras correspondían a magnitudes geométricas. (Morris Klein, pág 351).

CONTEXTO MOTIVACIONAL: Europa es sacudida por influencias revolucionarias, cambios políticos tras incesantes guerras; acontecimientos que alteran drásticamente las perspectivas intelectuales y con ello la actividad matemática.</td></tr>
</table>

[16] *Véase, [2] Historia de la matemática. Carl B Boyer pág. 398*

A partir de la introducción de un mejor simbolismo dado por Viete se enriquece el avance del álgebra, con el aporte además de grandes matemáticos como Descartes, Steven, Oughtred, Harriot, Chuquet quienes introducen nuevos símbolos para las operaciones, desigualdades y notación para exponentes como consecuencia de la creciente demanda científica que se ejercía sobre ellos; tal vez muchos de ellos no llegaron a percibir lo que el simbolismo podría significar a favor del álgebra. Muchos cambios en los símbolos se efectuaron por accidente, el uso de símbolos para las incógnitas tuvo un ascenso lento, la historia nos muestra que se relacionan dos estadios del símbolo; cómo número o soporte para organizar un sistema de numeración y otro como incógnita (número o algo abstracto). Pasaron muchos años para que el hombre extrajera conceptos abstractos; los orígenes del concepto de variable y variación están en la necesidad de representar magnitudes físicas y su cambio con respecto al tiempo.

Este recorrido por la evolución del lenguaje algebraico, desde el planteamiento y solución en forma verbal, a las abreviaturas de algunas palabras y la incursión del símbolo para representar la incógnita y sus potencias fue realmente lento y lleno de limitantes, tardaron siglos para usar el simbolismo y enriquecerlo, sin embargo a pesar de las limitaciones, sentaron las bases y construyen poco a poco lo que hoy se conoce como lenguaje algebraico.

La historia revela la búsqueda de sistemas de representación más eficaces que permitieron solucionar muchos problemas de tipo geométrico y numérico, de ahí que la perspectiva histórica del desarrollo del lenguaje algebraico sirve para elaborar una propuesta didáctica que presente al álgebra como una herramienta poderosa para solucionar problemas aritméticos, geométricos y de otras disciplinas.

2. Del lenguaje natural al lenguaje algebraico

2.1 De la psicología del aprendizaje

Encontramos en el marco de la psicología cognitiva pautas del desarrollo del conocimiento de los estudiantes que se vinculan con sus desarrollos en matemáticas y en particular con el álgebra.

Notables psicólogos y pedagogos han demostrado que el conocimiento se construye y que hay un camino en el desarrollo del pensamiento del niño, marcados por unas etapas o estadios que según Piaget, que sin estar sujetos a la edad precisamente presentan unas características en el desarrollo del pensamiento que van cambiando gradualmente en un tiempo determinado integrándose a nuevas formas de estructuras del pensamiento.

Piaget distingue tres estadios del desarrollo cognitivo cada uno cualitativamente diferente.

I. Estadio Sensoriomotor

Se desarrolla desde el momento de nacer hasta los dos primeros años de vida, el niño no es capaz de representar sus acciones, hay ausencia operacional de símbolos, carencia en el dominio del lenguaje, es más una etapa de desarrollo sensorial.

II. Operaciones concretas, de los 2 a los 11 años aproximadamente, se subdivide en dos sub estadios:

a) Periodo pre operacional (2 a 7 años): Se desarrolla una representación significativa ya sea a través del lenguaje, imágenes mentales, juegos simbólicos. Sin embargo razonar lógicamente es bastante limitado.

b) Periodo operacional concreto (7 a 11 años): Mejora su capacidad de pensamiento lógico sin embargo está limitado a cosas concretas en lugar de ideas, distingue propiedades de los objetos (número, cantidad) a través de los cambios de otras propiedades. Es capaz de retener mentalmente dos o más variables cuando estudia los objetos. Ejemplo: Al observar el crecimiento de una planta, el niño es capaz de identificar que a medida que transcurre el tiempo, dicha planta sufre cambios en su tamaño y forma.

III. Estadio de operaciones formales de 11 a los 15 años, su pensamiento va mas allá de lo concreto, su nivel lógico se fortalece, piensa teóricamente sobre las consecuencias de los cambios y sucesos. Analiza, conjetura acerca de las combinaciones de las variables en un problema. Se va consolidando el pensamiento variacional.

Para el aprendizaje de la matemática hay unos aspectos relacionados que se desprenden de estos estadios y que fueron analizados por Collis y Chelsea[17], que señalan un camino del estadio operacional concreto al estadio operacional formal en el siguiente orden: (0)preoperatorio (4 a 6 años), (1)temprano de operaciones concretas (7 a 9 años), (2)final de operaciones concretas (10 a 12 años), (3)de generalización concreta (13 a 15 años), (4)de operaciones formales (16 años en adelante).

Lo que podría esperarse en cada estadio respecto al aprendizaje en matemáticas sería que cada etapa propicie y fundamente el desarrollo del pensamiento abstracto, de generalización y simbolización para el inicio de la enseñanza del álgebra que viene dándose alrededor de los 12 a 15 años de edad cuando el niño cursa grado octavo de Educación Básica Secundaria y en efecto Collis y Chelsea contemplan en el estadio (1) temprano de operaciones concretas (7 a 9 años), que el niño está en capacidad de trabajar operaciones simples con elementos concretos, es decir trabaja las cuatro operaciones aritméticas por separado y las relaciona con su mundo físico familiar; sin embargo aún no está en capacidad para construir un sistema matemático[18]. En el estadio 2 puede desarrollar sistemas matemáticos simples dando inicio a una estructura más concreta para formar un sistema lógico concreto, en el estadio 3 de generalización concreta esta estructura se hace más compleja abriendo paso a trabajar en un sistema formal abstracto que indicaría que tiene un desarrollo de pensamiento formal, luego su pensamiento está preparado y dispuesto para apreciar las relaciones, expresiones y abstracciones en el álgebra.

---

[17] *[6] Kevin F Collis. La matemática escolar y los estadios de desarrollo". Artículo de revista infancia y aprendizaje 1982,19- 20, 39. 74*

[18] *"entiéndase un sistema matemático como una estructura lógica de relaciones cuya base formada por un conjunto definido de elementos y un método claramente definido para operar con ellos" Véase , La matemática escolar y los estadios de desarrollo" [6] Kevin F Collis. Artículo de revista infancia y aprendizaje 1982,19- 20, 39. 74*

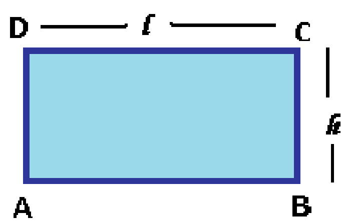
2.2 Desde el contexto escolar

Si tomamos como referencia la psicología del aprendizaje dentro del contexto escolar, los niños que cursan séptimo grado de Educación Básica Secundaria oscilan entre 12 y 14 años de edad, su pensamiento va mas allá de lo concreto, su nivel lógico se fortalece cada día, luego podríamos decir que en este momento el estudiante está a puertas de iniciar un curso de álgebra, sin embargo, no podemos desconocer que en esta etapa el estudiante ha trabajo en aritmética y en geometría, algunos elementos que le han propiciado un acercamiento al concepto de variable y al manejo de símbolos.

Con respecto al significado de la variable, el estudiante se ha encontrado con situaciones de cambio y variación que ha descrito cualitativamente en un lenguaje natural. En otras ocasiones a partir de dibujos o gráficos dados; ha descrito e interpretado algunas variaciones, por ejemplo cuando observa y registra con dibujos, gráficos o en un tabla el crecimiento de una planta en un tiempo determinado o el cambio de temperatura durante el día. Además ha trabajado identificando regularidades por ejemplo, en secuencias, ya sean numéricas y/o de figuras geométricas, para el caso de las secuencias numéricas el niño ha utilizado propiedades de los números (ser par, ser impar), algunas relaciones entre ellos(ser mayor que, ser menor que, o igual, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) analizado de qué forma cambia, aumentan o disminuye, la secuencia y en el caso de las secuencias de figuras geométricas ha observando propiedades o atributos, (forma, longitudes, distancia, área, volumen, etc.) que se puedan medir y posteriormente haciendo conjeturas sobre valor o la forma siguiente en la secuencia.

Otro tipo de acercamiento al lenguaje simbólico ha sido en contextos geométricos, como por ejemplo, el uso de las letras al denotar algunos elementos básicos como: punto, recta, semirrecta, o al denotar los vértices de un polígono, la base o la altura de un rectángulo, allí, ha trabajado algunas expresiones generalizadas para hallar áreas, perímetros, volúmenes.

Ejemplo: Para hallar el perímetro de la figura 1, inicialmente los niños interpretan que hallar el perímetro es sumar las longitudes de los segmentos que componen la figura, para lo cual las longitudes de dichos segmentos los podrá denotar así: "ℓ" representa a la medida de la longitud de los segmentos AB y DC ya que tienen la misma longitud, y "h" representa a la medida de la longitud de los segmentos CB y DA que tienen la misma longitud.



P= $\ell + h + \ell + h$

P= $2\ell+2h$

P= $2(\ell+h)$

Figura 1.

Este es tanto un primer acercamiento a las letras como a la generalización, en este momento el niño ya se ha dado cuenta que si las longitudes de los segmentos varían (cambian su tamaño), el valor asignado a estas letras también varía, observando que estas letras no toman valores fijos, que dependen de los cambios que sufra la figura, igualmente ha podido concluir que el perímetro depende de esos cambios.

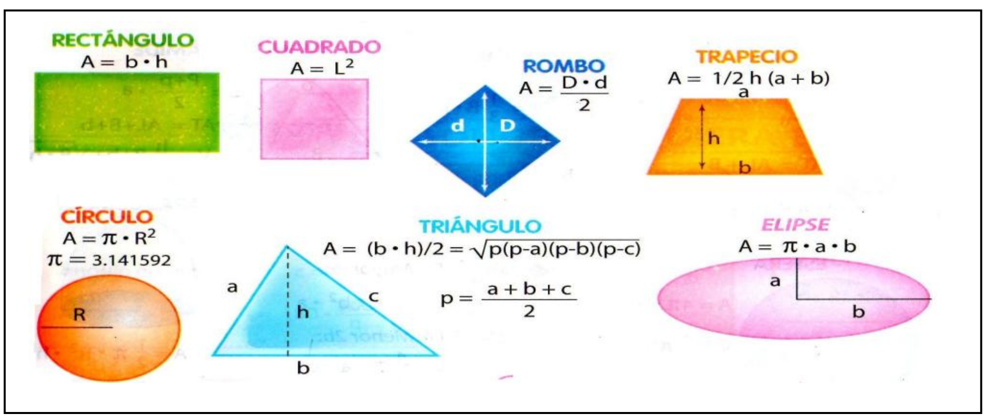
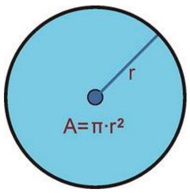


Figura 2

El estudiante ha usado las letras al trabajar con fórmulas y ha percibido que estas pueden tomar diferentes valores, ya que dependen de las dimensiones de la figura, es decir que estas letras representan variables, que sus valores dependen de las dimensiones de la figura.

En situaciones similares ha tenido acercamiento al uso de la letra como constante, por ejemplo para calcular el perímetro y área para círculo y circunferencia, en donde el literal π, lo ha tomado como un único valor, además con un valor aproximado de 3,14.



$$A = \pi r2$$

$$P = 2\pi r$$

Figura 3

Otro tipo de acercamiento a las letras se da cuando el niño trabaja el sistema métrico decimal, por ejemplo: al diferenciar correctamente entre un "***m"*** y "***mm"***, comprendiendo que estas letras están simbolizando o representado un patrón de unidad de longitud diferente.

En otro contexto aritmético el estudiante ha trabajado problemas que requieren del planteamiento y solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. También ha estudiado situaciones de tipo económico en donde hay una relación de dependencia entre cantidades que cambian o varían en el tiempo con cierta regularidad, así mismo situaciones de proporcionalidad que involucran magnitudes directa e inversamente proporcionales.

Pero en aritmética el manejo de los símbolos ha sido de tipo operacional y relacional, por ejemplo cuando se enuncian las propiedades de las operaciones.

Dados, ejemplo la suma de números naturales:

- $Propiedad\ asociativa\ de\ la\ suma: m,\ n, p\ \in N\ \rightarrow (m + n) + p = m + (n + p).$
- $Propiedad\ conmutativa\ de\ la\ suma:\ m,\ n,\ \in N\ \rightarrow m + n = n + m.$
- $Propiedad\ clausurativa: m, n\ \in\ N\ entonces\ \ m + n\ \in N$
- $Propiedad\ modulativa: m,\ n\ \in\ Nm + 0 = 0 + m$

Estas siempre están seguidas de un ejemplo donde el niño realiza un proceso de verificación a través de la sustitución. Sin embargo esto no significa que exista la comprensión de esas leyes.

Todas estas situaciones a lo largo de la etapa escolar le han dispuesto a un acercamiento al uso de las letras y símbolos sin embargo no todos los problemas que se trabajan muestran la letra como variable. En el manejo de letras muchos estudiantes no logran diferenciar ni flexibilizar la simbología de cada contexto, de ahí la importancia de suministrar un sin número de situaciones que permitan una discusión de cada elemento que se trabaje en determinada situación.

2.3 Del propósito en la enseñanza del álgebra

Partiendo de la base que las situaciones consideradas en la sección anterior le han proporcionado al estudiante un acercamiento al uso de letras, y la experiencia de las actividades aplicadas y modelos de principales pedagogos podemos concluir que el propósito de introducirlo a trabajar con el álgebra en el grado séptimo de Educación Básica Secundaria es:

- Que el niño logre traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico y viceversa.
- Que descubra en el lenguaje simbólico una potente herramienta que le permite encontrar no sólo respuestas numéricas particulares, como solía hacer en aritmética, sino deducir procedimientos, relaciones y patrones.
- Que logre “expresar” o comunicar a través del lenguaje simbólico relaciones y procesos en forma general.
- Que el niño alcance la destreza suficiente de manipular expresiones simbólicas, para obtener otras equivalentes, útiles para lograr generalizar y modelar matemáticamente situaciones de la vida cotidiana.

Además el lenguaje algebraico busca no sólo el manejo de los símbolos de tipo operacional y de algunas relaciones como se hace en aritmética, sino también ampliarse con sentido ya que son de distinta naturaleza, en elementos abstractos que se están representando a través de letras, esto no quiere decir que dar significado a estos consista en limitarse a sustituir números por letras, sino números por variables; de esta forma lograr plantear y resolver problemas de distintos ámbitos: aritméticos, geométricos, combinatorios etc.

2.3.1 De las dificultades en la enseñanza del álgebra.

La experiencia en la escuela con los estudiantes de Grado Séptimo de Educación Básica Secundaria(E.B.S) nos muestra que existen serias dificultades para comprender y comunicar el lenguaje simbólico; esto no permite avanzar en la medida que se pretende que el estudiante logre plantear y resolver problemas usando ecuaciones, entienda generalidades, logre establecer relaciones entre una o varias magnitudes, etc, dado que el puente que debería existir entre el lenguaje natural y simbólico no se ha construido con solidez.

El aprendizaje del lenguaje simbólico hasta este nivel (7º de E.B.S) está asociado exclusivamente a la aplicación de fórmulas y algoritmos para resolver cierto tipo de problemas y no a la comprensión de las mismas, es importante reconocer que la forma de argumentar es lo que da la estructura a la matemática y para ello se requiere comprender el significado de las variables y relaciones, presentadas en un lenguaje simbólico.

Existen dificultades al comprender y usar el concepto de variable adecuadamente, los estudiantes no interpretan sus significados y presentan diversas dificultades cuando requieren trabajar con ellas, por ejemplo: ignoran la variable, la asumen como un objeto, no pueden modelar problemas, operan con las expresiones algebraicas como operan con las expresiones numéricas. Los estudiantes se quedan con el uso sin significado de las letras y eso explica la dificultad a la hora de resolver problemas, pues no encuentran en el lenguaje simbólico las herramientas para el establecimiento de una relación o el planteamiento de una ecuación necesaria para entender, interpretar y trabajar con una determinada situación.

Las dificultades que presentan los niños son de distinta naturaleza, según Socas (1996)[19] pueden estar motivadas por varios factores; factores de tipo cognitivo, de tipo actitudinal, de tipo didáctico y de la misma complejidad del álgebra; estas se verificaron en la actividad que se aplicó[20] con estudiantes de grado séptimo de Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Rural La Granja; generalmente al iniciar el curso de álgebra se indaga en los estudiantes sobre sus expectativas frente a lo que creen vamos a desarrollar, la mayoría suponen de antemano que el álgebra es difícil, que se usan letras y se operan con ellas y que de hecho muchos estudiantes no son promocionados al año siguiente a causa del álgebra entendiéndose ésta como una dificultad de tipo actitudinal, posteriormente se diseñó y aplicó un diagnóstico escrito para el estudiante con el fin de determinar sus dominios y habilidades aritméticas, este nos llevó a concluir que no todos los estudiantes que inician el aprendizaje del álgebra han desarrollado las mismas habilidades y dominios en aritmética, es decir presentan dificultades de tipo cognitivo, otras dificultades son las de tipo didáctico, estas se refieren a los métodos de enseñanza, a la forma como el profesor aborda o desarrolla una temática, por último encontramos la dificultad que genera la misma complejidad de los procesos de pensamiento algebraico, ya que se generan rupturas cuando se requiere pasar de manejar objetos concretos a objetos abstractos.

Los cambios anteriormente mencionados y necesarios se convierten en dificultades dentro del proceso de aprendizaje del álgebra y digo necesarios por que históricamente el concepto de variable sienta las bases de la evolución de las matemáticas, así mismo en la escuela fundamenta la transición de la aritmética al álgebra,[21] sin embargo este concepto es poco significativo para el estudiante.

---

[19] *[23] Socas, Robayna. Iniciación al álgebra. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Ed Síntesis S.A Febrero de 1996.*

[20] *Véase anexos.*

[21] *Véase, [19]La adquisición del lenguaje algebraico. NÚMEROS. Revista Didáctica de las Matemáticas. Vol 40.*

2.4 De la investigación sobre el concepto de variable

En las investigaciones realizadas de tipo didáctico en Matemática educativa que buscan identificar como se construye el concepto de variable en niños escolares se han determinado algunas causas frente a las dificultades en la interpretación del concepto de variable, investigaciones como las de Kuchemann, D.(1981), Collis, K. (1982)[22] reportan problemas que presentan los estudiantes con el paso del número a la letra, entre ellos: dificultad para comprender lo que es una variable y una constante, fallas en la utilización de los signos de agrupación, poca asimilación y comunicación del lenguaje algebraico y el nivel sintáctico asociado exclusivamente al uso de la notación formal, afirman además que un niño logrará comprender perfectamente el uso de los símbolos literales en álgebra cuando comprenda el concepto de variable y trabaje la “letra como variable”.

Lozano,1998, Trigueros, Ursini y Lozano (1999)[23] analizaron la evolución del concepto de variable en Educación Básica Secundaria y observaron que los estudiantes no desarrollan una conceptualización de los distintos usos de la variable: la variable como incógnita, la variable como número generalizado y la variable en una relación funcional, impidiendo integrarlos y darle un carácter multifacético a este concepto.

También a nivel universitario (Trigueros,1999) encontró que los estudiantes presentan dificultades para la comprensión del concepto de variable, al expresar propiedades matemáticas en forma simbólica y generalizar, ya que suponen que el uso de las letras está asociado exclusivamente a la representación de incógnitas; la comprensión de la variable como relación funcional no se evidencia cuando se esperaría que los estudiantes universitarios tuviesen un manejo sólido y flexible de la variable.

---

[22] *[16] Citado en el Articulo de “MORALES PERAL, Lina y DÍAZ GÓMEZ , José Luis. Concepto de variables .Dificultades de uso a nivel universitario.pag 110-113*

[23] *[25] Véase, Trigueros M, Ursini S. (1999) La Conceptualización de la Variable en la Enseñanza Media, Articulo de Investigación.*

También se ha investigado sobre el uso de las nuevas tecnologías en la transición de la aritmética al álgebra [24], los resultados demuestran que la implementación de actividades diseñadas específicamente a la enseñanza del lenguaje algebraico, produce un mejoramiento significativo en el dominio del mismo, otras investigaciones como la de Gómez Otero[25] recomiendan que dichas actividades no sólo sean diseñadas para la Educación Básica Secundaria sino por el contrario que la noción de muchos conceptos en matemáticas entre ellos el de variable, se construye desde la infancia con actividades en donde los niños centren la atención en dos objetos cambiantes, el autor considera que la construcción de la noción variable no se realiza de manera aislada y propone presentar experiencias como: llenar de un líquido un recipiente gradualmente y observar el volumen de líquido con respecto al tiempo, el alargamiento de un resorte respecto al peso y realizar algunas variantes de manera que los niños puedan manipular los objetos cambiantes.

La investigación también ha sido dirigida a profesores con el fin de indagar en ellos su comprensión e interpretación del concepto de variable (Juarez, 2011)[26] además sobre sus creencias frente al desarrollo del pensamiento algebraico (Nathan y Koedinger, 2000)[27], partiendo que se cree que el profesor de Educación Básica Secundaria debe dominar los contenidos que enseña, sin embargo la investigación de Juárez (2010) concluye que en los profesores de Educación básica Secundaria la interpretación de variable como relación funcional, es la que registra mayores desaciertos, en especial cuando se trata de determinar intervalos de variación y de reconocer la variación conjunta, por lo que una de las posibles causas de la dificultad en los estudiantes de no dar múltiples significados a la variable, pueda referirse en parte a la poca comprensión que tiene el profesor y que es trasmitida a sus estudiantes.

---

[24] *[21] "El uso de nuevas tecnologías en la transición de la aritmética al álgebra".* José Puerto Monterroza.

[25] *[9] La construcción de la noción de variable Enrique Javier Gómez Otero, México, d.f., Octubre de 2008*

[26] *[11]* JUAREZ, José. *Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de Matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV.* Revista Números. Vol 76. Marzo de 2011, pag 83,103.

[27] *[17] Nathan,. J. y Koedinger, K. R. (2000). Teachers' and Researchers' Beliefs about the development of algebraic reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 168-190*.

2.5 Del significado de las letras, de su interpretación y dificultades en los procesos de generalización.

En el contexto escolar se detectan dificultades muy comunes con respecto al uso de las letras, son pocas las veces en que los niños identifican la letra como representante de un conjunto de valores o de una relación de correspondencia entre valores de la variable y eso no les permite encontrar en la simbolización la forma de comunicar regularidades observadas en dichos fenómenos o plantear ecuaciones. Pero adicionalmente otro problema es el manejo de símbolos operacionales que se viene trabajando en aritmética y que son fundamentales en el manejo de la generalización para la comprensión del lenguaje algebraico. Veamos algunas clases:

2.5.1 El signo igual

Hay dificultades en el manejo aritmético y su interpretación. Algunos errores típicos que cometen los niños: $(8-2)-4x3 = 8-2 = 6-4 = \ 2\,x\,3 = \ 6$ analizando cada acción del estudiante con respecto al uso e interpretación del signo igual y la forma en que el niño desarrolla el ejercicio, notamos que lee en un sólo sentido, olvidando su carácter simétrico y reflexivo[28], simplemente el niño va resolviendo y añadiendo partes en el mismo sentido, olvidando además la jerarquía de las operaciones.

Pero además del uso e interpretación del signo igual por parte del niño es importante también el concepto de igualdad, en el sentido en que hay dificultades para que logre diferenciar entre lo que es una expresión como $4x-8 = x+10$ y una expresión como $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; ya que aquí se expresan dos igualdades, pero es importante que entienda el concepto de igualdad, ya que la letra que representa la variable en estas dos igualdades no representa lo mismo, en la expresión $4x-8 = x+10$ la variable representa un valor particular que satisface para que se cumpla la igualdad, mientras que

---

[28] Véase, *[23]* Martin M. Socas Robayna.M[a] Mercedes Palarea. *"Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar"*

en la expresión $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ la variable puede tomar cualquier valor en algún subconjunto de números reales.

2.5.2 Los símbolos operacionales $(+,-,/,\boldsymbol{x})$

Los niños interpretan los signos operacionales en aritmética como una acción que ha de ejecutarse entre números, dando como resultado otro número.

Ejemplo***:*** $\mathbf{6+10}$; $\mathbf{10/2}$;

Posteriormente, cuando se enfrentan a expresiones como: $\boldsymbol{5+a}$*,* los estudiantes buscan ejecutar la acción para dar significado; muchos preguntan:

- *¿a que es igual esta expresión?*
- *¿Cuánto vale a?*

Otros manifiestan *¡está incompleto el ejercicio!,* esto demuestra que buscan casi siempre el cierre de la operación, algunos lo intentan igualando la expresión a cero, argumentando que cero no aumenta ni disminuye; es decir no encuentran expresada una relación entre dos conjuntos de valores, uno representado por a y otro por $5 + a$.

Lo símbolos operacionales amplían su significado en el lenguaje simbólico, por ejemplo: el producto de dos números sean *"k" y "g"* lo podemos denotar como kg*,* $(k)(g)$*,* $k \text{ x } g$*,* $k(g)$, $k * g$, nótese que la primera notación da lugar a que el niño la interprete como la abreviación del término kilogramo, o podría pensar en el número que tiene k decenas y g unidades, ahora pensar en dos variables o mas variables que operan y se relacionan entre sí, es para él aún más complejo.

2.5.3 Los símbolos literales

Algunas dificultades o errores comunes con respecto al manejo con letras, suceden por el uso inapropiado de algoritmos aritméticos, a veces las dificultades que se dan en álgebra refieren problemas de la aritmética que quedaron sin corregir y se suman a la falta de significado y sentido del mismo lenguaje simbólico, muchas veces el niño considera que lo que es válido para un caso particular, es válido para otros; entonces encontramos errores frecuentes que se originan como falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números, por ejemplo, cuando no se tiene claro las propiedades de linealidad, veamos:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$
$$\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$1/(x+y) = 1/x + 1/y$$

En casos muy elementales como:

$$(0+1)^2 = 1$$
$$(0^2 + 1^2)^2 = 1$$

Uno de los inconvenientes en los procesos de generalización es que, en no toda la expresión a la que el niño llegue es válida para todo valor de la variable, es decir puede cumplirse para los primeros casos y no ser válida para el resto.

En este sentido también se evidencia dificultades como consecuencia de la falta de dominios en aritmética que se trasladan al álgebra cuando no se tiene claro la simplificación y operaciones con fracciones. Veamos algunos:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2+3}$ $\qquad$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ $\qquad$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x+y}$

En otros casos es común que los estudiantes extiendan la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición o sustracción al caso particular en la multiplicación. Ejemplo:

$a(b+c) = ab + bc$ de la forma $a(b * c) = ab * ac$

Más adelante al trabajar con expresiones algebraicas, suelen generalizar cosas como:

$2^{a+b} = 2^a * 2^b$ generalizan a $2^{ab} = 2^a + 2^b$

$2(a+b) = 2a + 2b$ generalizan a $2^{a+b} = 2^a + 2^b$

También la sustitución formal, se considera un elemento valioso en álgebra sin embargo ésta mal usada puede llevarnos a interpretaciones erróneas.

Muchas más investigaciones referencian obstáculos y dificultades que presentan los estudiantes en el manejo del lenguaje simbólico, con respecto al uso de las letras en las ecuaciones, plantean la dualidad entre los símbolos literales como números y los símbolos literales como letras; la interpretación de la "x" como número generalizado carente de otros significados y del signo igual (kieran 1990)[29].

Sin embargo este trabajo centra la atención en la dificultad de poder entender e interpretar el significado de la letra como variable en la transición de la aritmética al álgebra, donde se origina el cambio de lenguaje natural al lenguaje algebraico en el contexto escolar, ya que esta precede a la noción de función y posteriormente abre el camino para aprendizaje del cálculo, sin olvidar mencionar algunas situaciones que se evidencian en el contexto escolar y que parecen sumarse a la dificultad de los niños para hacer uso de un lenguaje simbólico con significado.

2.6 De la letra como variable

Es fundamental en la enseñanza del álgebra la comprensión de conceptos básicos en especial del significado del concepto de variable, este ha sido objeto de estudios y de investigaciones desde diversas perspectivas, que apuntan a la construcción de la noción de variable (Gómez Otero, 2008).

Hasta el nivel de Séptimo de Educación Básica Secundaria, el niño solamente ha usado las letras cuando se ha referido a situaciones ejemplo; la "t" para representar temperatura, la "l" para representar la longitud o el largo, la "m" como símbolo de unidad patrón de medida y en la utilización de fórmulas, sin embargo estas situaciones no le llevan a comprender que el valor de una variable es totalmente independiente de la letra que la representa o del valor de la posición en el alfabeto o de la inicial de una palabra, ya que no siempre el primer número o la primera cantidad será representada por la letra "a" ni el siguiente con la letra "b", ahora pensemos en una situación distinta que requiera de la simbolización, ejemplo: vamos a simbolizar 40 niños del aula de clase, tendremos entonces que no podremos asignarle a cada uno una letra del alfabeto porque estas no alcanzarían, no podemos asignarle a cada uno la letra de la inicial del nombre porque muy probablemente se repetiría y no los podríamos distinguir, el problema se extiende y

[29] *Véase, [9] "La construcción de la noción de variable". Enrique Javier Gómez Otero 2008, México*

una solución sería pensar en la posibilidad de tomar una variable y asignar un subíndice ejemplo: a_1 , a_2 , $a_{3\ldots}$ que es la misma letra pero con un distintivo y que de esta forma se estaría ampliando las posibilidades de simbolización.

La tendencia del niño en este nivel es pensar en la letra asociada un valor específico, así mismo que cada letra podría representar un número, es importante que logre dar significado a esa letra que representa a la variable y al encontrar problemas de más de una variable esté en capacidad de simbolizarlos, de usar diferentes símbolos para representar cada una de ellas.

En otras situaciones el niño le asigna a la variable una abreviación de los nombres de los objetos que se van a trabajar en un problema, ejemplo:
Ana compró 8 libras de arroz y una colombina de $200, si pagó $3400 ¿cuánto le costó una libra de arroz?
Usualmente el niño expresa: $8a + 200 = 3400$ donde "a" hace referencia a la abreviatura de la palabra arroz y representa las libras de arroz en vez del precio de la libra de arroz.

En otros casos se presenta un uso excesivo de la letra "x" para representar la variable, si al valor desconocido siempre lo denotamos con la letra "x" esto conlleva a la dificultad de traducir en lenguaje simbólico expresiones como: "un número más otro" o "la suma de dos números cualesquiera" limitando el carácter multifacético del concepto de variable. Este tipo de situaciones conllevan a pensar en la letra no como variable, sino como representante de un número, situación que genera confusión ya que hasta este nivel el niño especialmente en geometría ha denotado otro tipo de objeto con letras, ejemplo: los vértices de un triángulo que no tienen un valor estrictamente numérico, o los literales para las unidades de medida, etc.

Para adquirir el concepto de variable es necesaria la conjunción de dos procesos: Generalización y Simbolización. El primero implica: detectar regularidades, diferencias, semejanzas, relaciones y expresarlas de forma verbal; el segundo consiste en la expresión escrita de estas. Así mismo cada uno de estos procesos presenta dificultades en el contexto escolar.[30] Consideremos estos procesos y su implicación en la construcción del concepto de variable en el lenguaje algebraico y busquemos potenciar dichos procesos a través de actividades en el aula de clase.

2.7 Generalización matemática.

Generalizar se entiende como el poder ver y expresar relaciones cuantitativas, razonar sobre estas relaciones y deducir otros aspectos generales de determinada situación, ya sea en lenguaje natural o simbólico, el cual se privilegia en matemáticas sobre el natural debido a que a través de símbolos podemos traducir dichas relaciones.

En el aprendizaje del álgebra, "la interpretación de símbolos en términos de series numéricas o icónicas, permite que no se vean como simples objetos sino como auténticas variables"[31] y de hecho la comprensión de lo que significa la variable implica procedimientos relacionados con la percepción y la expresión general.

El proceso de generalización en las matemáticas es una característica esencial de la misma y es parte inherente de su lenguaje simbólico El proceso de generalización se construye en tres fases o etapas, que van entrelazadas y se dan una después de otra, estas son: ver, describir y escribir.

Ver: El niño observa lo que permanece constante en cada caso, como lo que varía; lo que es propio y particular de cada situación, aspectos claves en secuencias o transformaciones, para lograr resumir en general determinada situación. Es importante a partir de la observación analizar las posibles estructuras, leyes propiedades de los ejemplos. Cuando se está trabajando en un contexto geométrico (secuencias de figuras geométricas) la observación permite "manipular" la información, reordenando, haciendo agrupamientos visuales de las partes de la figura y comparando partes de la misma. La

---

[30] *Véase, [10] Ideas y actividades para enseñar álgebra. Grupo Arzaquiel. Editorial Síntesis.*
[31] *[10] Ideas y actividades para enseñar algebra. Grupo Arzaquiel*.

observación no siempre será la misma, ya que depende de la percepción visual y de razonamiento de cada individuo.

Describir: La descripción que se haga dada en lenguaje natural puede ser precisa o no, depende de la forma en que se haya apreciado la regularidad o el patrón detectado, se logra mediante la observación, la indagación y la discusión de lo que está pasando. En el contexto escolar esto propicia la participación e intercambio de ideas, llevando consigo a revalidar conjeturas o hipótesis, que poco a poco se van concretando en sin son o no correctas sus reflexiones para posteriormente expresarlas. Generalmente esta descripción en lenguaje natural comunica el resultado de su percepción visual admitiendo diferentes grados de precisión, puede referirse a un primer diagnóstico de la fase que en la medida en que se discuta se consolida, para llevar con mayor o menor dificultad a la escritura de una expresión simbólica correcta.

Escribir: Expresar ya sea por medio de palabras, símbolos, dibujos o combinación de estos la o las relaciones que se observan. Necesariamente en la enseñanza del álgebra se requiere que estas diferentes formas se concreten en un lenguaje simbólico, sin que se pierda el significado, ni su traducción. Se puede motivar al niño a que utilice todos los elementos que le sean útiles para escribir, palabras, dibujos, símbolos o la combinación de estos y posteriormente busquen otros y las comparen con las de sus compañeros, esto permite que más adelante dentro del proceso se valore la importancia del lenguaje simbólico. Esta fase está acompañada de la validación o verificación de la expresión simbólica, al comparar diferentes alternativas que pueden ser correctas y originadas de una misma situación.

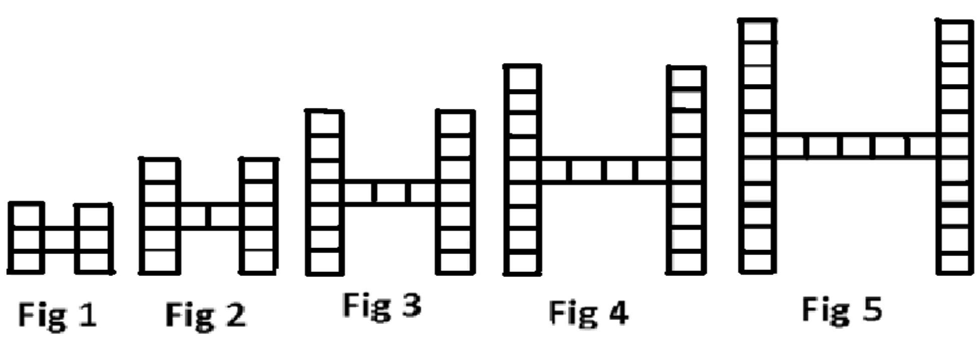
Las investigaciones reportan algunas dificultades para pasar de lo particular a lo general y recomiendan que los niños sean estimulados con procedimientos dirigidos, ya que la generalización es un proceso gradual que poco a poco introduce términos pre-algebraicos y potencia el concepto de variable.

A continuación consideraré algunos problemas[32] con el objetivo de mostrar como introducir al niño al uso del lenguaje simbólico y significado del concepto de variable usando como recurso la generalización en contexto geométrico y numérico en sus fases o etapas. Estos y otros problemas se trabajaron con los niños de grado séptimo de la Institución Educativa Rural La Granja, corroborando que en cada una de las etapas del proceso de generalización los niños descubren diferentes caminos para razonar y expresar regularidades y relaciones, que pueden traducirse en un lenguaje simbólico. (Ver más ejemplos en Anexos)

2.7.1 Contexto geométrico. Secuencias de figuras.

A continuación aparece una secuencia de figuras; la idea es determinar lo que está pasando, a través de las tres etapas de generalización y observar cómo cada una de ellas introduce al niño al uso del lenguaje algebraico.

1. Observe la figura 1, observa la figura 2, la figura 3,
2. Describa cómo son estas figuras, y qué diferencias o regularidades encuentra.
3. De acuerdo a lo observado dibuje como sería la siguiente figura.
4. ¿Cuántos cuadrados tendrá una H, cuyo lado horizontal tiene 7 cuadrados, 8 cuadrados o "n" cuadrados?.



1ª Fase: Ver

[32] *[10] Esta actividad está planteada en el Libro "Ideas y actividades para enseñar álgebra". Grupo Arzaquiel. Editorial Síntesis.*

La primera percepción visual que se tiene además de la intuición, es la variación en el tamaño de la figura de acuerdo al orden de la misma (fig1, fig2, fig3..), tenemos dos magnitudes que varían que son: orden de la figura (fig1, fig2, fig3) y tamaño de la "H".
Lo siguiente es detenernos a observar la variación que sufren las partes de la figura y plantear como sería la siguiente. En todos los niños la percepción visual no será la misma, para unos la siguiente figura será "más grande", "tendrá más cuadrados" "más larga y más ancha", etc. Aquí la intervención del docente es orientar a que esas observaciones se concreten; de la observación cualitativa a la cuantificación y podría sugerir dibujar la siguiente figura o plantear preguntas como: ¿cuánto más grande?, ¿cuántos mas cuadrados?, ¿cuánto es más alta o más ancha?, esto dará lugar a distintas formas de organizar visualmente la figura de acuerdo a cada percepción visual que se tenga, y encontrar observaciones como:

- La variación del número de cuadros en la horizontal de la "H" y número de cuadros en los lados verticales que la forma.
- Agrupamientos visuales entre las partes de la figura y establecer relación entre las partes de la misma.
- Agrupamientos visuales invariantes y a partir de estos determinar otras variaciones.

Es decir encontrar lo que es propio de cada situación, lo común y lo que permanece constante. A menudo se requiere hacer dibujos consecutivos para encontrar regularidades. Veamos tres formas distintas de agrupar o reordenar la figura:

1.

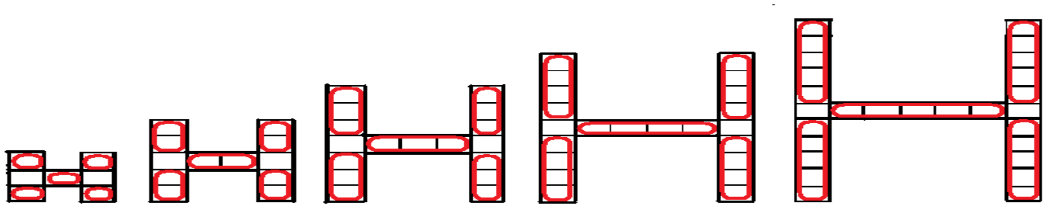


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5

2.

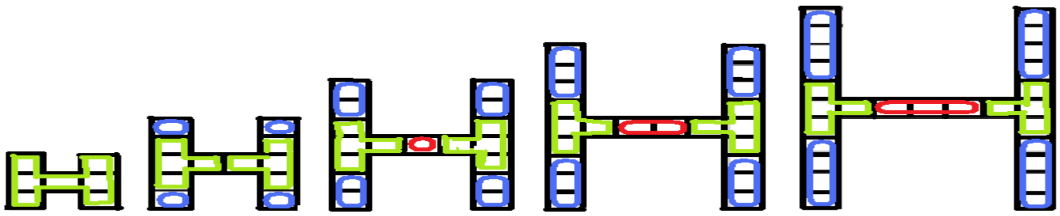


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5

3.

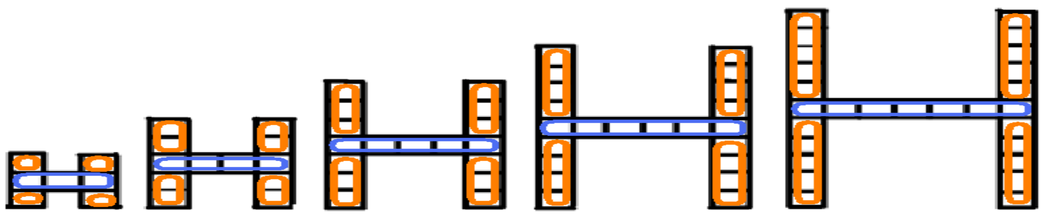


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5

No siempre en la práctica se puede construir todas las figuras, por ejemplo, una “H” con cien cuadros en la horizontal, entonces hay que acudir a las leyes comunes de todas las figuras buscando las relaciones entre las partes que componen la figura.

Conviene que surjan distintas formas de ver la figura ya que esto conlleva a comprobar la equivalencia de las diferentes respuestas, además motiva a validar la búsqueda de otras.

2ª Fase: Describir

Cada percepción visual conlleva a una descripción que puede ser precisa o no ya que depende de cómo se halla apreciado la regularidad y esto conlleva a que la expresión que generaliza la situación sea acertada o no. A continuación se describe cada arreglo visual y cómo se traduce al lenguaje simbólico.

En este ejemplo la pregunta inicial de cuántos cuadros tendrá una H cuyo lado horizontal tiene 5, 6, 7 ...n cuadros, identifica de entrada dos variables; una, el número total de cuadros que forman la H y la otra el número de cuadros de la horizontal de la H.

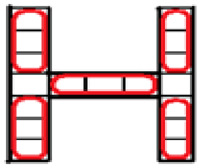


Fig 3

Aquí se toma como referencia la variación de la figura (número de cuadros en la horizontal que forma la H) en la horizontal y a partir de estas se determinó la variación del número de cuadros en cada grupo(agrupaciones en color rojo).

Se forman 5 grupos de 2 cuadrados menos con respecto al número de cuadrados de la horizontal.

	Fig 1	Fig 2	Fig 3	Fig 4	Fig 5
N° de cuadros en la horizontal	3	4	5	6	7
N° de grupos (rojo)	5	5	5	5	5
N° de cuadros por grupo	1	2	3	4	5

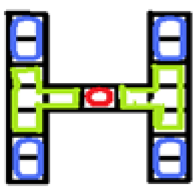


Fig 3

A partir de la **Figura 2** se identifican dos partes de la figura que son constantes (las de color verde), invariables y que equivalen a 8 cuadros de la figura "H" además se obtiene variaciones en los extremos verticales y a partir de la **Figura 3** se observan variaciones en la horizontal.

Variaciones en los extremos verticales: a partir de la **Fig 2.**

	Fig 1	Fig 2	Fig 3	Fig 4	Fig 5
N° de cuadros en la horizontal	3	4	5	6	7
N° de arreglos en los extremos verticales de la "H" (azul).		4	4	4	4
N° de cuadros por arreglo		1	2	3	4

Se forman cuatro arreglos verticales que contienen tres cuadros menos con respecto al número de cuadros de la horizontal de la "H"

Variaciones en la horizontal: A partir de la **Fig 3.**

	Fig 1	Fig 2	Fig 3	Fig 4	Fig 5
N° de cuadros en la horizontal	3	4	5	6	7
N° de arreglos en horizontal.			1	1	1
N° de cuadros por arreglo horizontal			1	2	3

Se forma un arreglo horizontal (color rojo) de cuatro cuadros menos con respecto al número de cuadros de la de la horizontal de la "H".

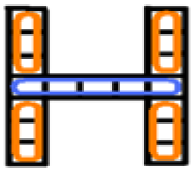


Fig 3

Agrupa las variaciones de los extremos verticales (color naranja), que dependen del número de cuadros en la horizontal que forma la figura "H" y se establece una relación de dependencia entre ellas.

	Fig 1	Fig 2	Fig 3	Fig 4	Fig 5
N° de cuadros en la horizontal	3	4	5	6	7
N° de arreglos en los extremos verticales (color naranja)	4	4	4	4	4
N° de cuadros por arreglo en la vertical	1	2	3	4	5

Se observa que forma 4 arreglos en los extremos verticales de 2 cuadros menos con respecto a al número de cuadros de la horizontal.

3ª Fase: Escribir

Esta fase es el resultado de la descripción y discusión de dichas relaciones o regularidades anteriormente observadas que necesitan concretarse el un lenguaje simbólico, no siempre el niño recurre a los símbolos, el uso tablas y dibujos usualmente es su primer registro. Generalmente su escritura evidencia el orden en que encuentra dichas regularidades o relaciones en el orden que las interpreta. Se requiere verificar dicha escritura, usualmente a través de la sustitución, para validar la expresión.

A partir de las observaciones de cada una de las agrupaciones o arreglos y de las tablas encontramos:

En la primera situación se considera n , el número de cuadros de la horizontal que forma la "H" y las cinco agrupaciones formadas por dos cuadros menos con respecto a n , y de esta forma se obtiene la expresion: $5(n-2)$. Para hallar el total de cuadros de la figura H con respecta al número de cuadros de la horizontal se tiene:

$$5(n-2)+2$$

En la segunda situación se observa que se considera invariante la figura que corresponde a ocho cuadros y la tabla describe las agrupaciones de los extremos verticales, obteniendo la expresión: $8+4(n-3)$. Si se considera el número de cuadros por arreglo en la horizontal con respecto al número de cuadros de la horizontal se obtiene:

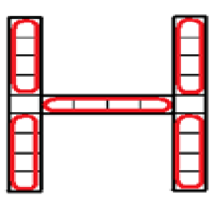
$$8+4(n-2)+(n-4)$$

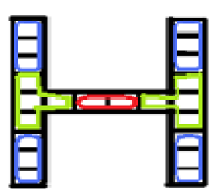
En la tercera situación se considera el número de arreglos en los extremos verticales y el número de cuadros por arreglo con respecto al número de cuadros de la horizontal que forma la figura, se obtiene la expresión:

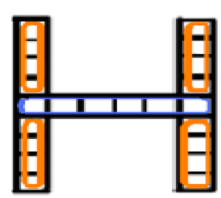
$$4(n-2)+n$$

En este ejemplo por la pregunta inicial ¿Cuántos cuadros tendrá una H cuyo lado horizontal tiene 5,6,7,8… cuadros? se identifican dos variables; una es el número total de cuadros que forma la "H", que podemos denotar con N y que depende de la otra variable que es el número de cuadros de la horizontal de la H, que para éste caso se ha simbolizado con la letra n, es claro que: $n \in N \ y \ n \geq 3,$ ya que como mínimo necesito tres cuadros en la horizontal para formar la "H".

Además se consideraron otras variables adicionales como son los arreglos verticales y horizontales en la figura. Lo interesante es ver cómo a pesar de encontrar diferentes relaciones expresadas en lenguaje simbólico estas pueden llegar a ser equivalentes.
El describir lo que se observa en un lenguaje natural no es fácil para el niño, ya que se obliga a organizar las ideas y comunicarlas al otro y no siempre se tiene la precisión de determinar plenamente las relaciones que se observan. Esta fase del proceso de generalización propicia la interacción de razonamientos entre los niños, permitiendo discutir y validar en conjunto las conjeturas o las hipótesis para escribir una expresion más precisa de la situación.







1. $$5(n-2)\ +2$$
$$5n-10+2$$
$$5n-8$$

2. $$4(n-3)+(n-4)+8$$
$$4n\ -12+n-4+8$$
$$5n-16+8$$
$$5n\ -8$$

3. $$4(n-2)+\ n$$
$$4n-8+n$$
$$5n-8$$

Si se comparan las tres expresiones, los niños consideran de inmediato que una de las tres es la correcta y dos están mal, es necesario pedir a los niños verifiquen y validen sus respuestas, que resuelvan las operaciones allí indicadas, esto pone de manifiesto que podemos encontrar distintas expresiones que describen una misma realidad.

Las secuencias de figuras geométricas conllevan a una apreciación visual y organización espacial, que permiten identificar visualmente lo variable y lo constante y establecer relaciones visuales entre las partes de la figura, para posteriormente hacer una descripción sujeta a su interpretación frente a las regularidades o patrones que encuentran, ésta puede expresarse de diversas formas; símbolos, tablas, letras, etc, es necesario destacar que esta interpretación visual y razonamiento en cada estudiante puede variar, así como lo demostró el ejemplo anterior, el registro en tablas es una gran herramienta, es necesario que el mismo estudiante construya la tabla y registre los datos, esto permite que establezca qué está variando y qué permanece constante, consecuencia de su razonamiento. El paso que sigue de expresar en forma escrita es casi inmediato ya que es el resultado de las conjeturas y el análisis que se ha hecho.

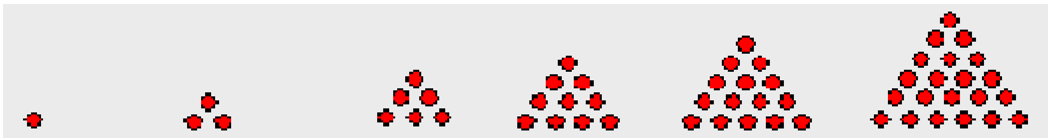
2.7.2 Secuencias numéricas

Aunque no exigen tanto una apreciación visual, éstas si requieren de un razonamiento específicamente numérico frente a alguna característica de los números, una operación entre ellos, o una ley numérica de formación. Generalizar secuencias numéricas consiste en buscar regularidades y expresarlas algebraicamente.

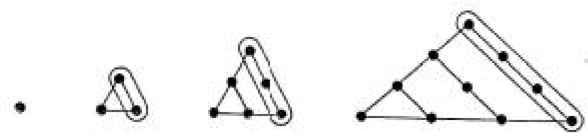
Algunas secuencias numéricas podemos acompañarlas de su representación geométrica, tal como hacían los griegos a algunas clases de números a los cuales les llamaban números figurados. Analicemos las series[33]

$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10 \ldots$$

[33] *[23] Iniciación al álgebra. Cultura y aprendizaje. Socas Manuel, Palarea Mª Mercedes, Camacho Matías*



Para los niños es útil representación geométrica en forma de puntos, su percepción visual les permite hacer agrupamientos en busca de patrones o regularidades:

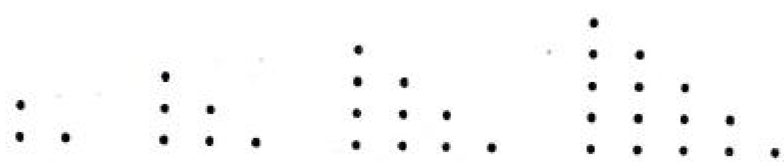


1 1+2 1+2+3 1+2+3+4

Este agrupamiento visual, permite ver que cada número resulta de añadir una nueva fila a la anterior, aumentado a razón de 1, se observa qué elementos varían y cuáles permanecen constantes. Luego el enésimo número vendrá representado por:

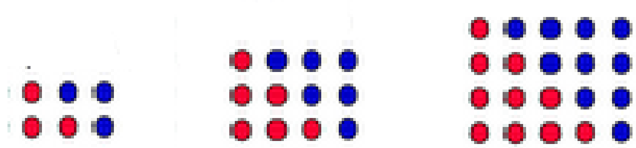
$$1+2+3+\cdots.+n \ = \frac{n(n+1)}{2}$$

Se debe distinguir que no todas las secuencias vana a partir del número 1, como es el caso de la siguiente serie[34]:



3 6 10 15

Completando cada triángulo con otro igual para obtener un rectángulo.



Serie 1 Serie 2 Serie 3

Al analizar la Serie 1 con respecto a la segunda de la serie, notamos que el número de puntos de la serie es $(3x4)/2$ expresión que resulta de multiplicar el número de puntos

[34] [10] *Ideas y actividades para enseñar álgebra. Grupo Arzaquiel. Ed. Síntesis.*

de la base con los de la altura y dividir entre 2, además esta expresión se hace extensible para cualquier n número de la serie. Obteniendo la expresión:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad siendo\; n \geq 1$$

El paso de una serie numérica a una de figuras no siempre es fácil para el estudiante, algunas series permiten intuir regularidades visuales fácilmente otras no, otras dejan ver propiedades de números u operaciones entre ellas, como es el caso de la serie de los números cuadrados perfectos: $1,\ 4,\ 9,\ 16 \ldots\ldots$

Sin embargo la generalización de estas secuencias requiere de un razonamiento numérico y un conocimiento en aritmética que no todos tienen, pero que progresivamente se adquiere. Además hay secuencias que no siempre se pueden presentar como un arreglo geométrico o no siempre van a partir del número 1 como es el caso siguiente:

Observa la siguiente secuencia numérica. ¿Podrías hallar el siguiente número?

$$72, 73, 75, 78, 82, 87\ ,93 \ldots .$$

Si a equivale a 72, ¿Cómo puedo expresar 73 con respecto a a? Es necesario determinar la ley operacional o propiedad que construye a la secuencia.

2.8 De los textos escolares

En los lineamientos curriculares en Matemáticas del Ministerio de Educación introduce la noción del pensamiento variacional, refiriéndose a la modelación de situaciones de la vida diaria, *“Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana”*.. “*En una situación problema, la modelación permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales”* [35]

[35] *[14] Ministerio de Educación Nacional. Estándares Básicos de competencias en matemáticas. 2003*

Generalmente el concepto de variable se usa en los textos escolares sin proporcionar una experiencia introductoria en la cual la idea de variable pueda desarrollarse en sus diferentes significados (Ursini, 1993). Al revisar la noción de variable en algunos textos escolares que se trabajan en Educación Básica Secundaria, encontré una variedad de posibles significados de variable expresados así:

"Una variable es un símbolo que representa un número de un conjunto referencial"…..."Cantidad que se le puede asignar un número ilimitado de valores"…"Es un valor matemático que puede tomar siempre y cuando cumpla una condición"… etc.

Acosta Gempeler, Ernesto[36] en su artículo "variable y variación" se refiere *"Una variable es una magnitud susceptible de cambiar junto con otra u otras en una situación de variación*"... y añade *"El poner en escena una situación para estudiarla variacionalmente es modelar variacionalmente la situación".*

Estas y otras posibles definiciones dejan el significado de la variable en escenarios diferentes. La variable en el contexto escolar según Ursini (1994) [37]se aborda en tres maneras, la variable como ***incógnita***, la variable como ***número generalizado*** y la variable como ***relación funcional.*** Refiriéndose a cada una de ellas:

La variable como incógnita

Hace referencia a encontrar el valor específico de un símbolo (x) que la representa en situaciones como ecuaciones, completar operaciones y que posteriormente se verifica mediante la sustitución. Ejemplos:

$\boxed{} + 3 = 5 + 2$ $\qquad$ $2X + 3 = 11$

Se podría entender una ecuación como una igualdad en la que por lo menos encontramos una variable como incógnita y que dar solución a ésta implica hallar el valor

---

[36] [1] Acosta Gempeler, Ernesto. Variable y variación. Artículo que se escribió en el contexto de la investigación Caracterización de los niveles de conceptualización de variación de los primeros semestres de Ingeniera.

[37] [26] Trigueros, M., Ursini Legovich, Sonia y Quintero ,Ricardo, Diseño de un cuestionario de diagnostico acerca del manejo del concepto de variable en el algebra. Revista Enseñanza de las ciencias , 1996, vol 14

de la incógnita simbolizada usualmente por una letra, que hace cierta o posible esta igualdad. Se espera que el estudiante identifique que la variable está sujeta a una condición.

La variable como número generalizado.

La variable como expresión de un número general, aparece en generalizaciones y en métodos generales, representados en cualquier expresión algebraica, tales como tautologías y expresiones abiertas. En este caso la variable está implícita en un patrón de regularidades, que deduce métodos generales y su conjunto de valores (dominio) debe estar definido, es decir acompañada de un cuantificador y situada en un contexto. Ejemplo:

1. Generalización de la propiedad conmutativa de la suma en los números reales:
$$(\forall\, x, y\ \in \mathbb{R})\ (x + y = y + x)$$
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad \forall\, a, b\ \in\ \mathbb{R}$
3. Existe algún numero natural que aumentado en cinco es menor que doce.
$$5 + x\ < 12$$

Se espera que el estudiante interprete la variable como representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

La variable en una relación funcional

Se refiere a una relación de correspondencia entre dos o más variables; la determinación de una de ellas cuando se conoce el valor de la otra, la relación entre cantidades y variación de una con respecto a la otra u otras.

Para Trigueros M, la variable en relación funcional se puede considerar en dos formas: una estática; en donde la relación establece una correspondencia punto a punto entre dos conjuntos de valores y la otra dinámica que concibe una variación interdependiente de la otra.[38] lo que él llama relaciones especiales entre variables.

---

[38] *Véase [26] Trigueros, M.', Reyes, A.', Ursini, S.* y Quintero, R. Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. Enseñanza de las Ciencias, 1996, 14 (3)*

Mediante el análisis de tablas de variación es posible la aproximación al concepto de variable en una relación funcional, también las gráficas hacen posible el estudio dinámico de la variación, ya que permiten una interpretación cualitativa y cuantitativa de las variables (rangos de variación, crecimiento, decrecimiento etc).

.

Ejemplo:

En cierta ciudad el precio de una carrera de taxi, se calcula de acuerdo con la siguiente tarifa: $1000 el arranque o banderazo y $100 por cada metro recorrido.

Si x representa el recorrido en metros y C el costo de la carrera, para un recorrido de X metros ¿Cuál es el costo C? ¿Cómo se relaciona x y C?

En situaciones como éstas se evidencia que las variables entran en relación de tipo funcional, se muestra la dependencia de una con respecto a la otra.

Estas y otras preguntas conllevan a analizar el comportamiento de dos variables y su relación, que puede ser además representada a través de una gráfica y una expresión que las relacione.

Distintas posibles definiciones en los textos escolares, muestran que el significado de variable se interpreta y se usa en contextos aislados, ya que unas se refieren a la variable como incógnita., otras como número generalizado y otras como variación o relación funcional. Esto conlleva a la necesidad de buscar contextos y situaciones que flexibilicen el significado de variable.

Las investigaciones realizadas, sugieren que la introducción al concepto de variable puede desarrollarse desde la infancia a través los procesos de generalización, desarrollándose en diferentes grados de complejidad y en diferentes contextos, geométricos y numéricos.

3. Propuesta didáctica

Esta propuesta didáctica es una selección de ejercicios pertinentes a potenciar el significado de variable, en el paso del lenguaje natural al algebraico, está diseñada para niños que oscilan entre los 10 y 13 años de edad. Se plantean algunas situaciones en diversos contextos con el fin de flexibilizar el significado de variable, sus distintos usos y formas de representarla a partir de la generalización y modelación de situaciones.

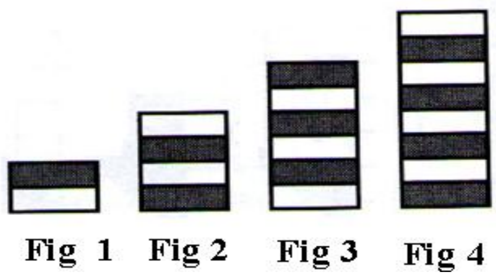
La actividades a continuación parten de la experiencia con los niños y su principal objetivo teniendo como referente epistemológico el paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico en la construcción del concepto de variable, es que el niño vivencie las etapas históricas en la construcción del lenguaje simbólico, de forma que inicialmente el niño describa en palabras las situaciones observadas de lo que está pasando, e identifique y comunique verbalmente patrones, regularidades, variaciones, como un acercamiento a la etapa del lenguaje retórico, posteriormente lo avanzamos al lenguaje sincopado cuando el niño siente la necesidad de abreviar esas observaciones al momento de describir lo que sucede en determinada situación. Dicha descripción podrá ser cualitativa o cuantitativa; es importante resaltar que la descripción, puede ser resultado de una observación referida a las cualidades de la figura (grande, pequeño, horizontal, vertical, etc.), es decir de tipo cualitativo, como también cuantitativas e irá acompañada de diversas abreviaturas que el niño usará como recurso para describir; de ahí la importancia de las preguntas que se le planteen, ya que éstas deben apuntar a enriquecer sus observaciones y cuestiones, acercándolo al uso lenguaje simbólico. En un tercer momento el niño va a escribir o registrar a través de tablas o símbolos dichas regularidades patrones o variaciones, para posteriormente encontrar un lenguaje que le permita describir o predecir lo que pasará en determinada situación.

Actividad 1

Objetivo:

- Identificar patrones y regularidades.
- Determinar la variable.
- Determinar la variación en la secuencia de figuras geométricas o secuencia numérica y expresar en lenguaje natural y lenguaje algebraico dichas regularidades.

Situación 1[39]



1. Observe detenidamente la secuencia de las figuras.
2. Basándose en las observaciones describa en forma verbal, la Fig 1, la Fig 2, la Fig 3, y la Fig 4, ¿Qué diferencias o semejanzas encuentra?
3. Dibuje la Fig 5, la Fig 6
4. De acuerdo al orden de la figura ¿en cuántas casillas sombreadas aumenta en la medida que aumenta el orden de la figura?
5. Describa que está pasando en cada figura (Fig 1, Fig 2, Fig 3, Fig4) con respecto al número de casillas sombreadas.
6. ¿Observa alguna relación entre el orden de las figuras y el número de casillas sombreadas? ,
7. Describa que está pasando en cada figura (Fig 1, Fig 2, Fig 3, Fig4) con respecto al número de casillas no sombreadas
8. ¿Encuentre alguna relación entre el orden de las figuras y número de casillas no sombreadas?
9. ¿Qué está cambiando o variando de figura a figura.
10. Complete la tabla a partir de las observaciones

[39] *[28] A esta situación se ha añadido preguntas. Zuluaga, Carlos. Proyecto matemática recreativa. Colombia aprendiendo año 2010.*

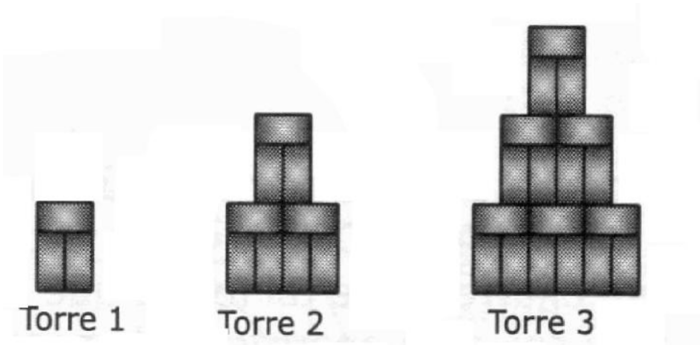
Orden de la Fig	Casillas sombreadas	Casillas no sombreadas	Total casillas
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Observe el registro de la tabla y responda:

11. ¿Varía el orden de las figuras? Representemos por n el orden de la figura.($n = 1$ para Fig1, $n = 2$ para Fig2, $n = 3$ para Fig3)
12. ¿Varía el número de casillas sombreadas y no sombreada?
13. ¿Qué relación encuentra entre el número de casillas sombreadas y número de casillas no sombreadas con respecto al orden de la figura.
14. ¿Cuántas casillas sombreadas y no sombreadas tendrá la Fig 6, 7, 8, 9, 10, 100?
15. ¿Cuántas casillas sombreadas y no sombreadas tendrá la Fig n?
16. Escriba el número de total de casillas en la Fig n.
17. Como la letra n representa el orden de las figuras y escriba como se relaciona el orden de la fig n con el número total de casillas que la forman
18. Determine a qué orden de figura corresponde una que tenga 120 casillas sombreadas.
19. Determine a qué orden de figura corresponde una que tenga 200 casillas en total (sombreadas y no sombreadas).
20. Observe y escriba el orden de la figura n y el total de casillas que forman la figura n

    La relación que acabe de escribir es la que relación que hay entre el orden de la figura y el total de casillas.

Situación 2[40]



1. Observe detenidamente la secuencia de las figura.(torre 1, torre 2, torre 3)
2. Observe la Fig 1 (torre 1), observe la Fig 2 (torre 2), la Fig 3 (torre 3)
3. Con base en la observación describa en forma verbal, las figuras (la Torre 1, torre 2, torre 3). ¿Qué diferencias o semejanzas encuentra?
4. ¿Qué está cambiando o variando de figura a figura?
5. Pinte la siguiente figura es decir la Torre 4.
6. ¿Cuántos ladrillos horizontales hay en la Torre 1, Torre 2, Torre 3)? ¿Qué relación observa?.
7. ¿Cuántos ladrillos verticales hay en la torre 1, torre 2, torre 3? ¿Qué relación observa?.
8. ¿Cómo varía el número de ladrillos en posición horizontal con respecto al orden de la torre?(torre 1, torre 2, torre 3…).
9. ¿Cómo varía el número de ladrillos en posición vertical con respecto al orden de la torre? (torre 1, torre 2, torre 3…).
10. Responda ¿Cuántos ladrillos horizontales tendrá la torre 5, la torre 6, la torre 7?.
11. Responda ¿Cuántos ladrillos verticales tendrá la torre 5, la torre 6, la torre 7?.
12. Registre con base en sus observaciones el número de ladrillos horizontales y el número de ladrillos verticales de cada una de las torres.¿ qué relación observa?.
13. Con base en su registro, determine ¿Cuántos ladrillos verticales y horizontales tendrá la torre 8, la torre 9, la torre 10?.
14. Representemos por n el orden de la figura.($n = 1$ para Torre 1, $n = 2$ para Torre 2, $n = 3$ paraTorre 3)Escriba como se relaciona el número de ladrillos verticales y horizontales en una torre de n niveles.
15. Verifique que la expresión anterior describe lo que pasa en todas las torres.
16. Utilice la expresión anterior calcular ¿de cuántos ladrillos en posición horizontal estará formada una torre de 78 ladrillos en posición vertical?

[40] *[28] A esta situación se ha añadido preguntas. Zuluaga, Carlos. Proyecto matemática recreativa. Colombia aprendiendo año 2010*

Situación 3

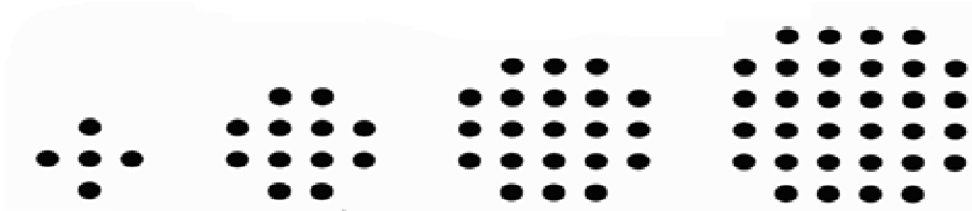


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

.

1. Observe el orden de las figuras.
2. Observe la fig 1 , observe la Fig 2, la Fig 3, la Fig 4
3. Basándose en las observaciones describa en forma verbal, como se compone la la Fig 1, la Fig 2, la Fig 3, y la Fig 4,
4. Existe alguna variación de una figura a otra ¿Qué diferencias o regularidades encuentra entre una y otra?
5. Describa que está pasando en cada figura (Fig 1, Fig 2, Fig 3, Fig4) con respecto al número de horizontales y verticales.
6. ¿Observa alguna relación entre el orden de las figuras y el número de horizontales y verticales que se forman?
1. ¿Qué está cambiando o variando de figura a figura? Unifiquemos que eso que está variando lo vamos a simbolizar con la letra n
7. Describa ¿Cómo sería la Fig 5, la Fig 6?, ¿Pinte la siguiente figura?
8. Complete la tabla de acuerdo a las regularidades observadas.

	Fig 1	Fig 2	Fig 3	Fig 4	Fig 5	Fig 6
Horizontales						
Verticales						

9. Cuántos puntos tendrá la Fig 7 la Fig 8?
10. Encuentre una expresión que permita determinar el número de puntos con relación al orden de la figura.

Situación 4[41]

Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

1. Observe detenidamente la secuencia de las figuras.
2. Basándose en las observaciones describa en forma verbal, la Fig 1, la Fig 2, la Fig 3, y la Fig 4, ¿Qué diferencias o regularidades encuentra?
3. Describa que está pasando en cada figura (Fig 1, Fig 2, Fig 3, Fig4) con respecto al número de cuadros blancos.
4. ¿Observa alguna relación entre el orden de las figuras y el número de cuadros rojos? ,
5. Describa que está pasando en cada figura (Fig 1, Fig 2, Fig 3, Fig 4) con respecto al número de cuadros blancos
6. ¿Qué está cambiando o variando de figura a figura?.Unifiquemos que eso que está variando lo vamos a simbolizar con la letra n
7. Describa ¿Cómo sería la Fig. 5?, ¿Cuántos cuadros rojos y blancos tendrá?
8. Pinte la siguiente figura.
9. Complete la tabla de acuerdo a lo observado:

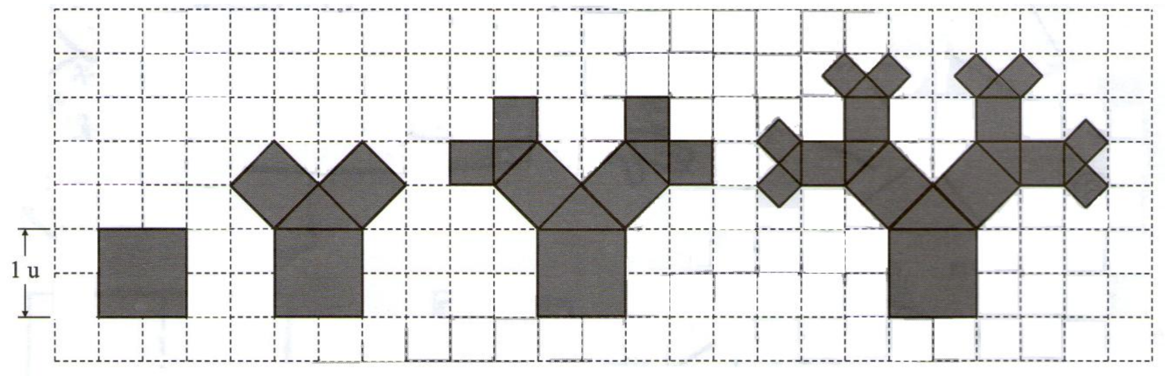
Orden de la Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cuadros rojos		5							
Cuadros blancos	0	4							

10. Establezca la relación entre el número de cuadros rojos y el orden de la figura.
11. Establezca la relación entre el número de cuadrados blancos y el orden de la figura.
12. Escriba una expresión que permita hallar el número de cuadros blancos de la figura n con relación al número de cuadros rojos.

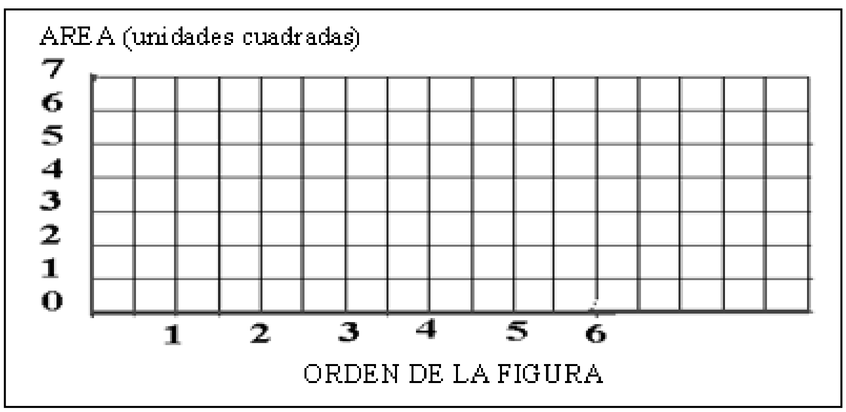
[41] *[28] Zuluaga , Carlos. Proyecto matemática recreativa. Colombia aprendiendo año 2010*.

Situación 5 [42]

.



1. Observe detenidamente la secuencia de las figuras.
2. Basándose en las observaciones describa en forma verbal, la Fig 1, la Fig 2, la Fig 3, y la Fig 4, ¿Qué diferencias o semejanzas encuentra?
3. ¿Qué varía de figura a figura?
4. Halle el área de cada figura en unidades cuadradas.
5. Dibuje la siguiente figura.
6. Compete la gráfica con los datos obtenidos.



7. Encuentre una expresión que relacione el área a , a medida que el número del orden de la figura *(fig1, fig2, fig3..)* aumenta.

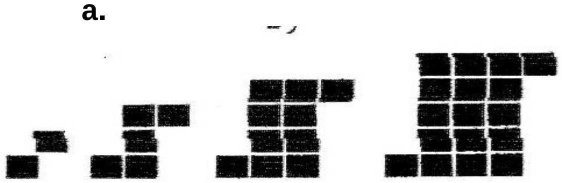
---

[42] *[20] Peña, Antonio. Álgebra en toda partes. Ed. La ciencia.. Fondo de cultura Económica.*

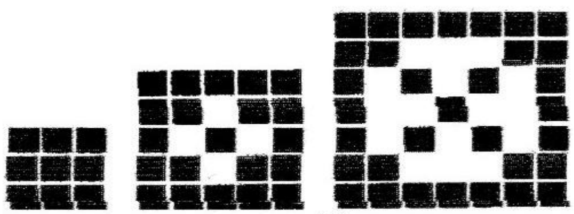
Situación 6

Los problemas a continuación planteados, favorecen la búsqueda de patrones y regularidades a través de la observación y se enriquece a través de las preguntas que se formulen de la situación, se hace necesario ampliarlas con preguntas tal como se plantearon en las situaciones anteriores.

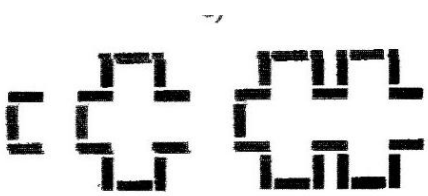
a.



b.



c.



Situación 7.

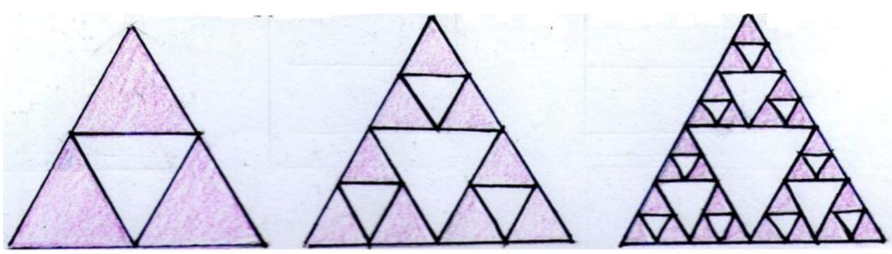
Observe la siguiente tabla, complétala y contesta las preguntas (Ursini y Trigueros, 1998, p. 462):

Tiempos(s)	**Velocidad (m/s)**
0	0
10	
20	60
25	

1. Si aumenta el tiempo ¿qué pasa con la velocidad, aumenta o disminuye?
2. En una hoja aparte, sobre un sistema de coordenadas marca los puntos de la tabla y únelos trazando así una curva. De 10 s a 25 s ¿cómo varió la velocidad?.
3. Escribe la expresión general que relaciona a los números de la lista de la izquierda con los números de la derecha.

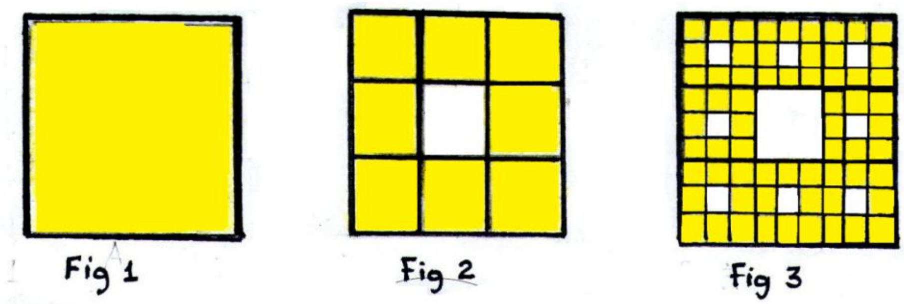
Situación 8.

.



1. Observe detenidamente la secuencia de las figuras.
2. Basándose en las observaciones describa en forma verbal, la Fig 1, la Fig 2, la Fig 3, y la Fig 4, ¿Qué diferencias o semejanzas encuentra?
3. Dibuja la figura siguiente.
4. ¿Qué varía de figura a figura?
5. Determine el área de la parte sombreada de cada figura.
6. Registre en una tabla lo observado.
7. Establezca que relación hay entre el orden de la figura y el área sombreada.
8. Escriba la expresión que relacione el área sombreada en función del orden de la figura.

Situación 9.



1. Observe detenidamente la secuencia de las figuras
2. Basándose en las observaciones describa en forma verbal, la Fig 1, la Fig 2, la Fig 3, y la Fig 4, ¿Qué diferencias o semejanzas encuentra?
3. Dibuje la figura siguiente.
4. ¿Qué varia de figura a figura?
5. Dibuje la figura siguiente.
6. Determine el área de la parte sombreada de cada figura. Registre en una tabla lo observado.
7. ¿Cómo varía el área con respecto al orden de la figura?
8. Establezca qué relación hay entre el orden de la figura y el área sombreada.
9. Escriba la expresión que relacione el área sombreada en función del orden de la figura.

Conclusiones

Este trabajo centró su atención en buscar fortalecer el paso del lenguaje natural al lenguaje simbólico en los niños de grado séptimo de Educación Básica Secundaria de la Institución Rural La Granja, al analizar las diferentes dificultades que presentan frente al manejo de símbolos, de interpretación y uso sin sentido de los mismos, surge la necesidad de encontrar herramientas que propicien y faciliten entender los procesos que se requieren para la construcción de un lenguaje simbólico, concluyendo que una de las formas de acercar a los niños al manejo de letras y a la construcción del lenguaje simbólico con significado es a través de procesos de generalización que se pueden abordar con actividades en diferentes contextos, dicha actividades introducen al manejo de letras, facilitan la comprensión del significado de variable a través de las relaciones de tipos numérico o geométrico, establece una relación aritmética-geometría , que se amplía con la simbolización en una relación aritmética- geometría-álgebra.

El estudio que hice de la historia de lenguaje simbólico y del significado de variable me permitió comprender las dificultades a las que se enfrentan los niños al iniciar el curso de álgebra cuando no se ha tenido una sólida comprensión del lenguaje simbólico. La historia revela que ese paso no se da en uno solo instante, sino por el contrario diferentes situaciones motivaron la construcción de dicho lenguaje, así mismo el significado de variable se consolida tras cambios es su simbología y en el contexto. El conocimiento de la historia de la matemática y de la construcción de conceptos a lo largo del tiempo, se constituye es un saber fundamental para aquel el docente que busque reflexionar sobre su práctica pedagógica y enriquecer su formación disciplinar.

Anexos. Actividades resueltas por los estudiantes

Se plantea una serie de actividades a un grupo de 20 estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Rural La Granja del Municipio de Zipaquirá, con el fin de introducirlos al significado de variable usando como recurso la generalización en un contexto geométrico. Se muestra paso a paso cómo los niños ven la figura de secuencias geométricas y determinan regularidades de acuerdo a su percepción visual, cómo la describen, cómo razonan y logran expresar dichas regularidades, sobre las cuales establecen relaciones entre las partes de la figura que los conlleva a expresar en un lenguaje algebraico dichos razonamientos, encontrando tres expresiones algebraicas todas equivalentes.

El curso se dividió en 6 grupos, algunos grupos no lograron los mismos resultados, 3 grupos descubren algo que los lleva a proponer caminos diferentes y logran concluir satisfactoriamente, estos grupos hicieron diferentes observaciones, pero que llegan a expresiones de tipo equivalente. Registramos los resultados de dicha actividad y el diálogo detallado de los estudiantes con el profesor.

SECUENCIAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

SITUACIÓN 1

1. Observa la figura.
2. De acuerdo a lo observado dibuja como sería la siguiente figura.
3. ¿Cuántos cuadros tendrá una "H", cuyo lado horizontal tiene 7 cuadros, 8 cuadros o "n" cuadros?

A continuación detallamos las interpretaciones y razonamientos de los diferentes grupos y las conclusiones frente al desarrollo del ejercicio.

Es de aclarar que en todos los grupos hay una intervención por parte del profesor (la cual denotamos con P) a través de preguntas que les plantea con el propósito de llevarlos a identificar y simbolizar la variable. En un primer diálogo con los estudiantes (el cuál denotamos con E) tenemos:

Observe la siguiente serie de figuras:

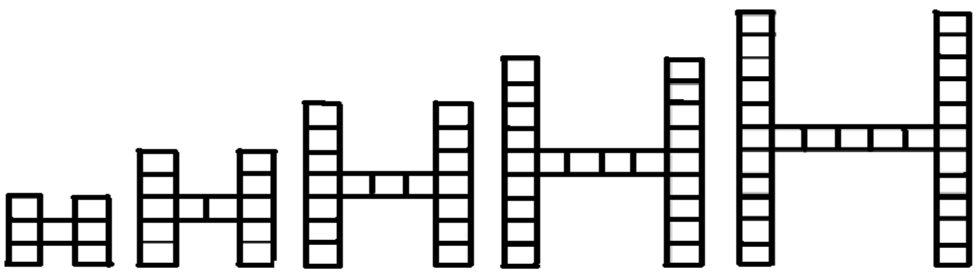


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5

VISUALIZACIÓN

- *P: ¿Cómo sería la siguiente figura?*
- *E: ¡más grande¡*
- *P: ¿Cuánto más grande?*
- *E: Depende*
- *P: ¿De qué depende?*
- *E: del número de cuadros de la horizontal*
- *P: ¿Qué está variando en la figura? .Unifiquemos para todos que eso que esta variando lo vamos a simbolizar con la letra n*

En un primer intento los niños, elaboran una tabla, y aunque intenta razonar con los datos de la tabla, estos no les son suficientes para hacer conjeturas.

Cuadros en la horizontal	**Total de cuadros**
3	7
4	12
5	17
6	22

A continuación el grupo visualiza algunas regularidades y hace agrupamientos, encontrando cantidades que varían entre las partes de la figura, estableciendo una relación entre las mismas así:

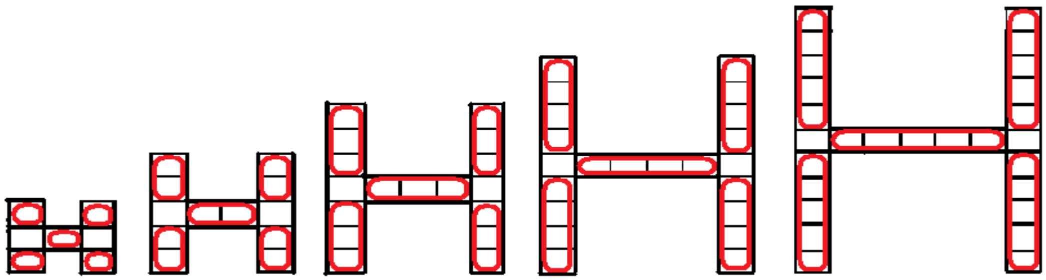


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5

DESCRIPCIÓN

Los niños describen lo que observan, basándose en su percepción visual y argumentan:

- *E: Se inicia con mínimo tres cuadrados en la horizontal y van aumentando*
- *E: Varía el número de cuadrados en el lado horizontal y en los lados verticales*
- *E: En la figura, siempre puedo formar 5 grupos del mismo número de cuadrados.*

- *P: ¿Qué quieres decir con el mismo número de cuadrados?.*
- *E: Cuando el lado horizontal tiene 4, formo 5 grupos de 2 cuadrados en los verticales y la horizontal, cuando el lado horizontal tiene 5 cuadrados , formo 5 grupos de 3 cuadrados, cuando el lado horizontal tiene 6 cuadrados formo 5 grupos de 4 cuadrados…..*

- *P. ¿Qué significa eso?*
- *E: Que siempre puedo formar 5 grupos de 2 cuadrados menos con relación al número de cuadrados de la horizontal.*

EXPRESAR O REGISTRAR

- P:¿Podrías escribirlo? Para un lado horizontal de n cuadrados
-E: si siempre tengo 2 cuadrados menos con relación a la horizontal, sería algo así como…. $n-2$ *y como son 5 grupos será 5 veces* $n-2$.

P: ¿De qué otra forma podrías escribirlo?
E: 5 (n-2) que representa los 5 grupos que se forman en la figura.

P: ¿Qué faltaría para hallar el total de cuadrados de la figura H con ***n*** *cuadrados en la horizontal?*
E: Sumarle los 2 cuadrados que faltan, que siempre serán 2 para formar la H.

$$5\,(n-2)\,+2$$

VERIFICAR O VALIDAR

P: ¿Para construir la H cuantos cuadrados en el lado horizontal como mínimo debo tener?

Luego de verificar a través de la sustitución, concluyen que necesitan 3 cuadrados como mínimo para construir la figura,

P: ¿Qué valores podrá tomar n?

E: Muchos a partir de 3, porque necesitamos como mínimo 3 cuadrados en la horizontal para construir la figura.

Aquí la variable que ha sido representada por la letra "n" , ha significado el poder tomar cualquier valor de un conjunto de valores que son enteros positivos, pero que también dicho valor está condicionado a ser mayor o igual a tres, se puede decir que se están definiendo los elementos del conjunto de valores posibles, lo que sería el dominio de una relación o función.

$$n \in Z\,, \qquad n \geq 3$$

GRUPO 2

Percepción visual diferente al grupo 1, realiza agrupaciones en la figura de la siguiente forma:

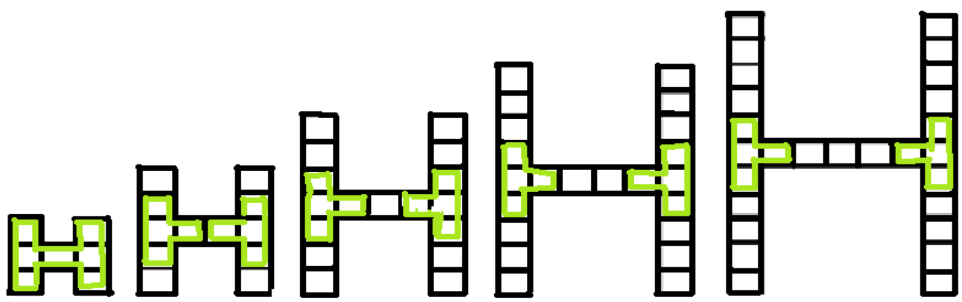


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5

Deja constante 2 agrupaciones a partir de la **Fig 2** argumentando que no cambian, sin importar tamaño de la figura (H) o el número de cuadrados en la horizontal. Luego agrupa los cuadrados de los extremos verticales, observando 4 grupos y describe:

- *Para n = 3 tengo 0 cuadrados en los extremos.*
- *Para n = 4 tengo 4 grupos de 1 cuadrado*
- *Para n = 5 tengo 4 grupos de 2 cuadrados*
- *Para n = 6 tengo 4 grupos de 3 cuadrados.*

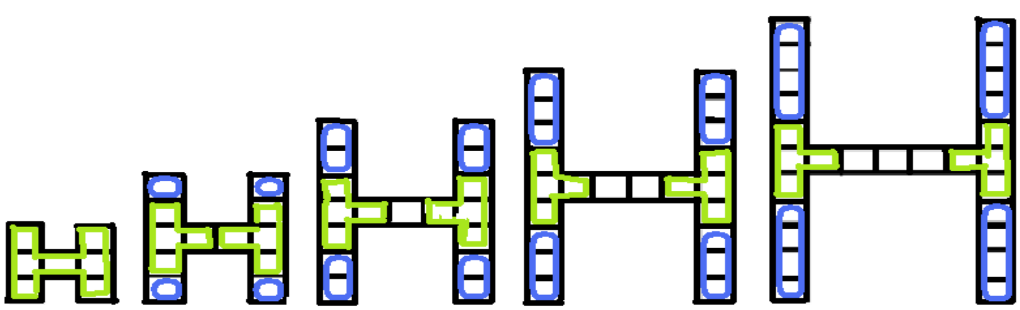


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5

Usa este tipo de notación al razonar:

Cuadrados en la horizontal		**Número de cuadrados por arreglo**
4	$\longrightarrow$	1
5	$\longrightarrow$	2
6	$\longrightarrow$	3
7	$\longrightarrow$	4
n	$\longrightarrow$	n-3

Describe que la diferencia entre estos agrupamientos y la horizontal es 3 cuadrados menos que el número de cuadrados de la horizontal. Argumenta.

- *E: Siempre puedo formar 4 grupos de 3 cuadrados menos , que los que tiene la barra horizontal*
- *P: ¿Cómo escribirlo?*
- *E: Lo expresa* $(n-3)+(n-3)+(n-3)+(n-3)$ *son 4 grupos entonces 4 veces* $n-3$ *es decir:* $4\,(n-3)$
- *P: ¿Podrías ahora calcular el número de cuadrados para una H de n cuadrados en la horizontal?*

Posteriormente visualiza las variaciones en el lado horizontal de la H, las agrupa de la siguiente forma y describe una segunda relación que percibió visualmente entre el número de cuadrados de la horizontal y el arreglo horizontal y a medida escribe:

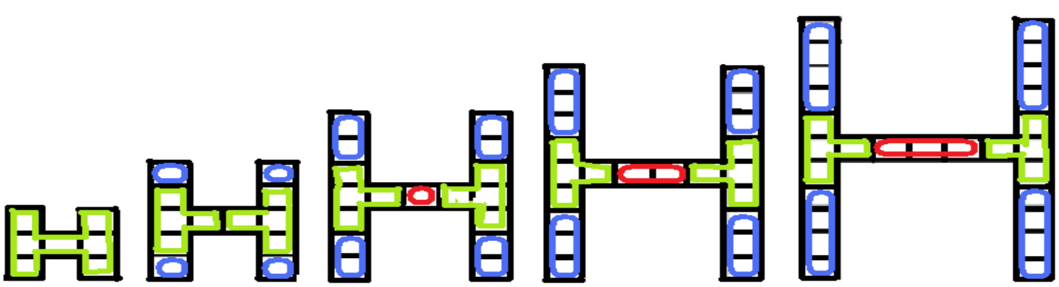


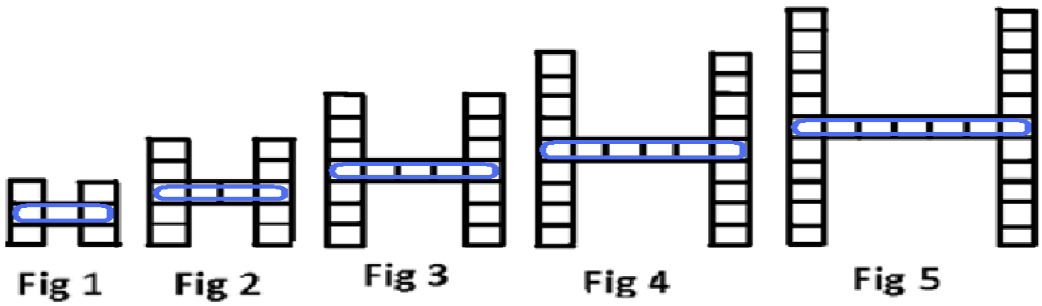
Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5

- *E: Estos grupos siempre tendrán 4 cuadrados menos de los que tiene la horizontal y escribe:* $(n-4)$.
- *P: ¿Faltaría algo para calcular el total de cuadrados?*
- *E: Si, sumar los 8 cuadrados que siempre son los mismos que agrupamos en un principio*
- *P: ¿Podrías escribir lo que observaste?*
- *E: Si, sería algo como :* $8+4(n-3)+(n-4)$
- *P: Puede n tomar cualquier valor? Teniendo en cuenta que representa el numero de cuadrados en la horizontal de la H?*
- *E: No, es decir debe ser como mínimo 3, luego n debe ser igual o mayor a 3*
-

Su escritura evidencia el orden en que encontró las regularidades y relaciones. Luego de haber descrito estas regularidades y relaciones, para el estudiante es más fácil escribirlo algebraicamente y lo hace en el orden en que las interpreta.

GRUPO 3

Agrupa tomando como referencia el lado horizontal de la H.



- *E: Varia el numero de cuadrados de la horizontal, y los cuadrados de los lados verticales.*
- *E: El número de cuadrados verticales varía y depende del número de cuadrados de la horizontal.*
- *E: Entre más cuadrados tenga la horizontal, más cuadrados habrán en la vertical.*

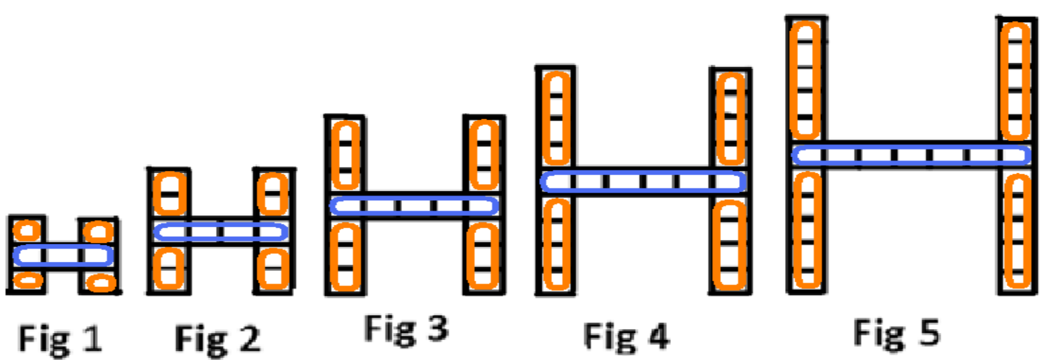
En esta forma de agrupamiento visual los niños han identificado una relación de dependencia ente variables (partes de la figura) que va del número de cuadrados del lado horizontal a el número de cuadrados del lado vertical.

Visualiza de nuevo y agrupa el número de cuadrados de los extremos verticales, se apoya con gráficos, algunos símbolos o la combinación de estos y describe:

Horizontal		**Vertical**	**Arreglos**
3 ⟶	1	X 4	= 4
4 ⟶	2	X 4	= 8
5 ⟶	3	X 4	= 12
6 ⟶	4	X 4	= 16
.n ⟶	n-2	X 4	

- *Siempre tengo 4 grupos de 2 cuadrados menos con respecto a los de la horizontal, es decir* $n-2$*, como son 4 grupos entonces se tiene:* $4\,(n-2)$.
- *Faltaría sumar los cuadrados de la horizontal que son algún n, entonces se obtiene:*

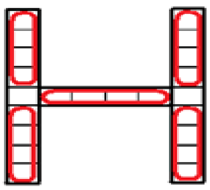
$$4(n-2)+n$$

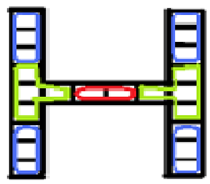


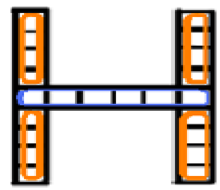
- P: ¿Puede n tomar cualquier valor numérico? Verifiquen.
- E: Como minino necesito 3 cuadrados.

Verifica sustituyendo y concluye que n puede tomar cualquier valor entero de 3 en adelante.

En los diferentes grupos se hicieron interpretaciones encontrando varias respuestas distintas que corresponden a distintas maneras de ver la figura al final mostraron que la relación obtenida era la misma.



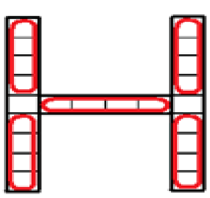


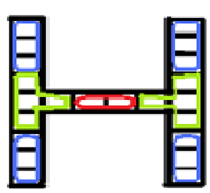


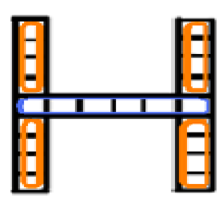
1. $$\begin{gathered} 5(n-2)\ +2 \\ 5n-10+2 \\ 5n-8 \end{gathered}$$
2. $$\begin{gathered} 4(n-3)+(n-4)+8 \\ 4n\ -12+n-4+8 \\ 5n-16+8 \\ 5n\ -8 \end{gathered}$$
3. $$\begin{gathered} 4(n-2)+\ n \\ 4n-8+n \\ 5n-8 \end{gathered}$$

Socialización

Al comparar las tres expresiones que resultaron del trabajo de cada grupo, los niños consideran de inmediato que una de las tres es la correcta y dos están mal. Se les pide que verifiquen sus respuestas, se les conduce a que resuelvan las operaciones allí indicadas, concluyendo que las tres son válidas y son pertinentes a las variaciones que sufre la figura.







1. $$\begin{gathered} 5(n-2)\ +2 \\ 5n-10+2 \\ 5n-8 \end{gathered}$$
2. $$\begin{gathered} 4(n-3)+(n-4)+8 \\ 4n\ -12+n-4+8 \\ 5n-16+8 \\ 5n\ -8 \end{gathered}$$
3. $$\begin{gathered} 4(n-2)+\ n \\ 4n-8+n \\ 5n-8 \end{gathered}$$

SITUACIÓN 2

Observa el siguiente arreglo geométrico. Describe cómo se van formando las diferentes figuras. ¿Cuántas casillas sombreadas tendrá la figura 5, la figura 6 o la figura n? ¿Cuántas casillas no sombreadas tendrá la figura 5, la figura 6 o la figura n?

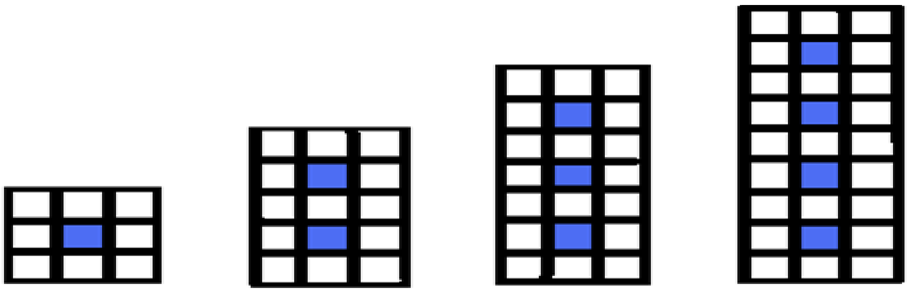


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

GRUPO 1

¿Podrías pintar la siguiente figura?

Los niños visualmente parten de la figura 1 como patrón de referencia y la compara con la figura 2, determinando lo que varía en la siguiente figura. Agrupa visualmente lo que es constante para ellos.

Argumentan:

- *E: Siempre tendré 3 cuadrados en la base de la figura, eso no cambia.*
- *P: ¿Qué esta variando o cambiando en cada figura?*
- *E: El número de cuadrados sombreados y no sombreados, además del orden de la figura (fig 1, fig2, fig3..)*

  Han determinado que son tres cantidades las que están variando en el arreglo: orden de la figura(fig1,fig2,fig3…), número de cuadrados sombreados y número de cuadrados no sombreados.

- *P: ¿Cuántas casillas sombreadas hay en cada figura?*
- *E: En la fig 1 tengo una casilla sombreada , en la fig 2 tengo 2 casillas sombreadas, en la fig 4, tendré 4 casillas sombreadas, luego en la fig n , tendrá n casillas sombreadas.*

Usa la siguiente notación para describir lo que está pasando. Ya puede determinar cuántas sombreadas tendrá la figura n. pues ha determinado una relación entre el orden de la figura y el número de casillas sombreadas.

Fig		**Casillas sombreadas**
1	$\longrightarrow$	1
2	$\longrightarrow$	2
3	$\longrightarrow$	3
4	$\longrightarrow$	4
..n	$\longrightarrow$	N

- *P: Observa las casillas no sombreadas, ¿podrías encontrar como están variando este número?*

Los niños toman como referencia la fig 1 y la compara con la fig2, y ésta la compara con la fig 3, toma como referencia la fig 3 y a su vez la compara con la fig4.

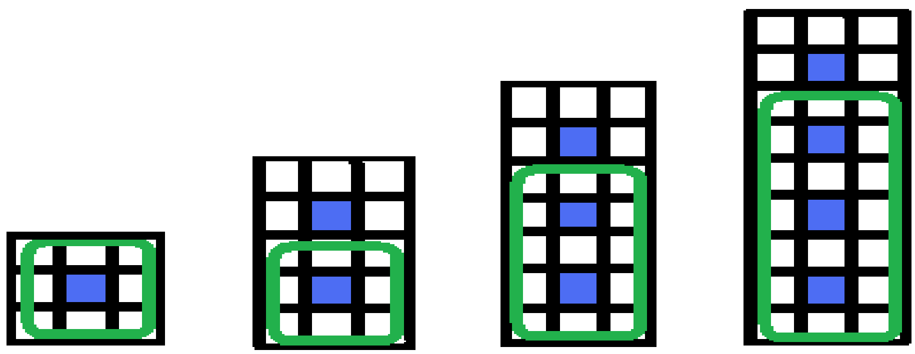


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

Describe:

- *E: En cada figura va aumentando 5 casillas no sombreadas con respecto a la fig anterior, luego en la figura n también aumentara 5 casillas con respecto a la anterior.*
- *P: ¿Qué varia entonces?*
- *E: El orden de la figura.*
- *P: Si n representa la enésima figura, Expresa lo que sucede.*
- *E: 5 veces n es decir* $5(n)$

Esta descripción la hace fundamentada en su percepción visual y por intuición, sin embargo al verificar encuentra que esta expresión no satisface para la Fig 1, ni para la dos, ni la tres…ya que se tiene que para $n = 1$, sustituyendo en $5(n)$ es igual a 5 cuadrados y deberían ser 8 cuadrados no sombreados.

- *P: ¿Qué le faltaría para hallar el total de cuadrados?*
- *E: Sumar 3 unidades. Es decir* $5\,(n\,) +\, 3$
- *P: Verifica para las demás figuras*

De esta situación se podría plantear: halla el número total de casillas, sombreadas y no sombreadas en la figura 100, sabiendo que $5(n) + 3$ expresa el número de casillas no sombreadas, y n el número de casillas sombreadas, siendo n el orden de la Figura.

- E: Sombreadas n ;
  No sombreadas $5(n) + 3$
  Total de casillas $n + 5n + 3$ resolviendo $6n + 3$

Ya en este momento se resuelven operaciones indicadas, y a través de preguntas conducir al niño a hacer que sus observaciones se concreten en un lenguaje simbólico.

- *P: ¿lo que esta variando más cinco veces lo que está variando*?
- P: *¿Qué valores puede tomar n?*
- *E: A partir de 1, es decir todos los enteros positivos*
- *P: ¿Qué variables encuentras y como se relacionan?*
- *E: El orden de la figura como una variable independiente y el número de casillas no sombreadas que dependen del orden de la figura.*

En este ejercicio se pueden determinar tres variables, el orden de la figura (fig 1, fig2, fig3..) el número de casillas no sombreadas, que dependen tanto del orden de la figura como del número de casillas sombreadas. Sin embargo en este caso se ha tomado como variable independiente el orden de la figura(fig 1, fig2, fig3…) y en función a ésta se ha determinado el número de casillas sombreadas y no sombreadas. También se podría plantear buscar la expresión que relacionan las casillas sombreadas con las no sombreadas.

GRUPO 2.

Interpretan visualmente algunos arreglos geométricos de la forma:

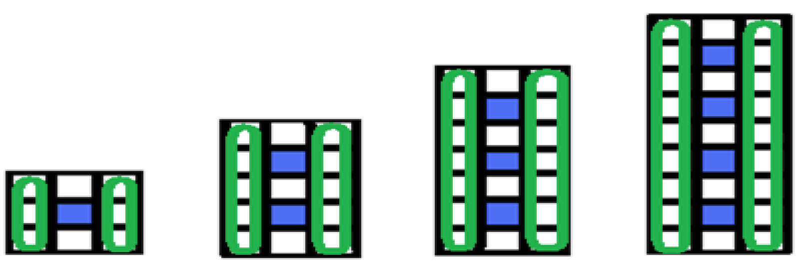


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

Construyen una tabla que le permite describir algunas regularidades

Fig.	Casillas sombreadas	Casillas no sombreadas	Total casillas no sombreadas
1	1	3 + 2 + 3	8
2	2	5 + 3 + 5	13
3	3	7 + 4 + 7	18
4	4	9 + 5 + 9	23
5	5	11 + 6 + 11	28

Suma las casillas no sombreadas de las verticales externas, observando una variación de una figura a otra, aumentado en el orden de los números impares. Situación que expresa:

$$2\,(2n + 1)$$

Luego observa y describe:

- *E: Las casillas no sombreadas internas es decir las de la segunda columna siempre serán una mas con respecto al orden de la figura. La fig. 1 tiene 2 casillas no sombreadas en la vertical interna, la fig. 2 tiene 3 casillas, la fig. 3 tiene 4, la fig. 4 tiene 5.*
- *E: Luego la fig. n tendrá* $n+1$ *casillas no sombreadas en la vertical interna.*
- *P: ¿Que haría falta para calcular el total de casillas no sombreadas de la figura?.*
- *E: Sumarlas* $2(2n+1) + n+1$

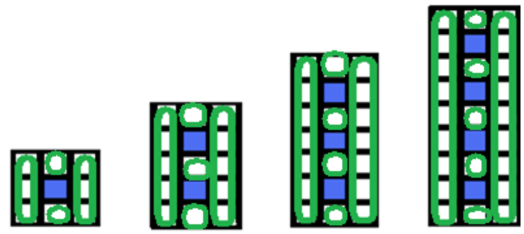
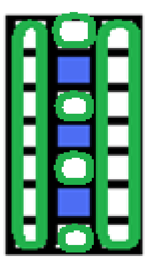
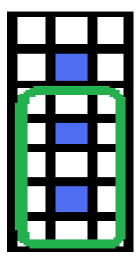


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

En este momento los niños están registrando lo que observan; la organización de los datos a través de tablas favorece la observación de relaciones cuantitativas.

SOCIALIZACIÓN:: Al evaluar las dos expresiones, de nuevo los niños afirman que una está bien y la otra está mal; cada grupo expone sus argumentos participando activamente y se verifica que las dos expresiones son equivalentes. Se resuelven las operaciones indicadas y se tiene:





$2(2n+1) + n+1$

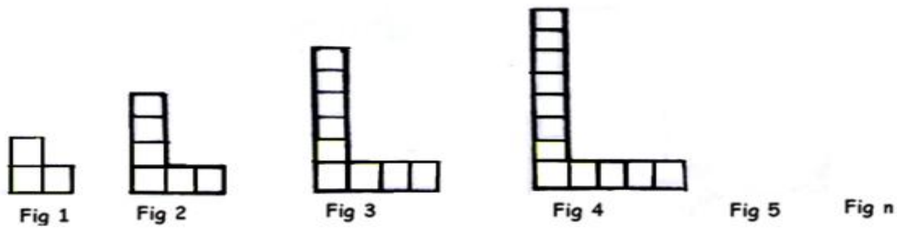
$4n + 2 + n + 1$

$5n + 3$

$5(n) + 3$

SITUACIÓN No 3

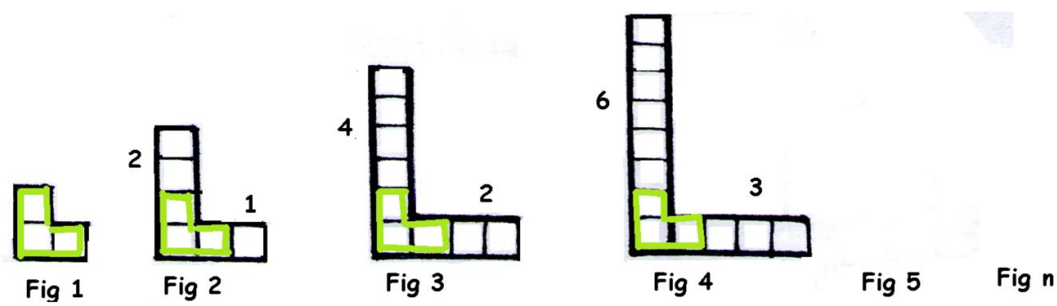
Observa la figura 1, figura 2, figura 3…



1. ¿Cuántos cuadrados tendrá la Fig. 4, la Fig. 5, la Fig. 10?
2. Halla una expresión que permita encontrar el número de cuadrados en la Fig. **n**

GRUPO 1

Arreglo visual, dejan constante la figura 1, es decir invariante y sobre esta determinan que cambia o varia y como varia en las figuras siguientes.



- *E: Tenemos una figura de base que no cambia, formada de 3 cuadros, en la figura 2 hay un aumento de 3 casillas, en la figura 3 aumenta 6 casillas con respecto a la figura 1, en la fig 4 aumenta 9 , luego en la fig 5 aumentara 12….*
- *P: Registra en una tabla lo observado*

Fig	Constante	Cuadrados que aumenta
1	3	3 = 3x1
2	3	6 = 3x2
3	3	9 = 3x3
4	3	12 = 3x4
…n	3	3n

- *E: En la figura n se obtiene $3n$ que representa el número de cuadrados que aumentan.*
- *P: ¿Podrías calcular el total de cuadrados o falta algo?*
- *E: es "$3n$ mas alguna cosa" $3n+3$ basándome en la figura 2.*
- *P: Verifica sustituyendo para las demás figuras.*

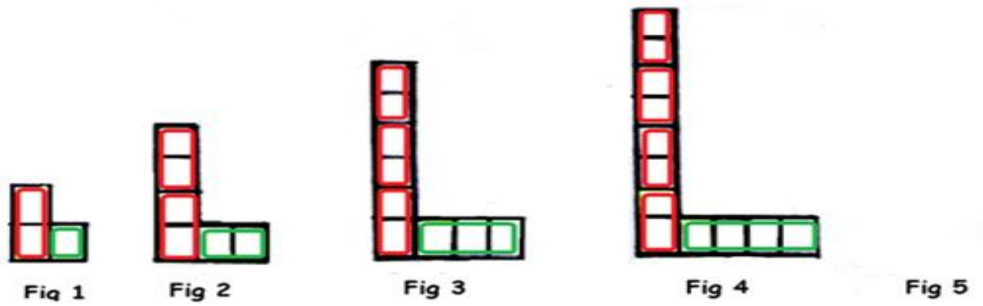
$$Para\, n = 1,\quad 3n+3 = 6$$
$$Para\ n = 2,\ 3n+3 = 9$$
$$Para\, n = 3,\ 3n+3 = 12$$

- *E: "resulta el número siguiente y no el de la figura que corresponde" entonces a n lo manda en el anterior es decir ($n-1$).*

Reescribe, en el orden en que interpreta las regularidades, obteniendo la expresión:

$3\,(n-1)\,+\,3$.

GRUPO 2: Agrupamiento visual de la forma:



Construyen una tabla y observan que esta variando y que es constante. Describen:

Fig	Cuadros por arreglo	Arreglos horizontal	Cuadros en la horizontal
1	2	1	1
2	2	2	2
3	2	3	3
4	2	4	4
n	2n		n

- *E: Varía el orden la figura, fig 1, fig2, fig3 , fig4…..el número de arreglos que puedo formar en la horizontal es igual al número de orden de la figura.*

- *E: En la vertical el número de arreglos (en color rojo)depende del número de orden de la figura y estos arreglos siempre serán de 2 cuadros es decir* $2n$.

El grupo ha definido que hay una relación directa entre el orden de la figura y el número de arreglos en la vertical, de 2 cuadros cada uno; al igual ha identificado la relación directa entre el orden de la figura y los arreglos en la horizontal, tres variables y dos relaciones.

De la tabla deducen que para una figura n se obtiene la expresión: $2n\,+\,n$

GRUPO 3

Agrupamiento visual, este grupo mira cuanto crece, no toda la figura, sino lo que es variable y lo que permanece constante:

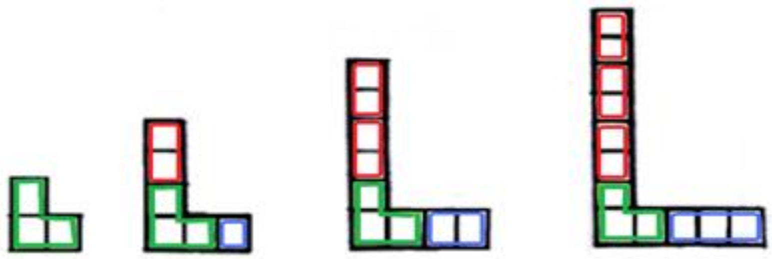


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4 Fig 5 Fig n

Toma la fig1 como patrón invariante, y a partir de ésta registra como varía o aumenta el número de cuadros en la vertical y en la horizontal Describe:

Fig	Arreglos verticales	Cuadros por arreglo
1	0	2
2	1	2
3	2	2
4	3	2
n	n-1	2

Fig	Cuadros en la horizontal
1	0
2	1
3	2
4	3
n	n - 1

- *E: Siempre puedo formar arreglos en la vertical con el mismo número de cuadros.*
- *P: ¿Cómo expresar lo que está pasando según el registro de la tabla ?*
- *E: Tenemos la figura 1, que es constante y tiene 3 cuadros, le sumamos lo que aumenta en la vertical que es* $2(n-1)$ *y l o que aumenta en la horizontal que es* $(n-1)$*, se obtiene:*
-

$$3 + 2\,(n-1) + (n-1)$$

- *P: Definan algunos valores que puede tomar n y su conjunto de referencia.*
- *E:* $\boldsymbol{n}$ *representa el orden de la figura y sus valores pertenecen al conjunto de los números enteros positivos*
- *P: es decir* $n \in Z^{+}$

SOCIALIZACIÓN: Los tres grupos verifican y resuelven las operaciones indicadas con ayuda del profesor, concluyendo que las tres expresiones muestran un patrón de variación o cambio de la figura con respecto al orden de la misma. Ya no se atreven a afirmar que alguna expresión pueda no corresponder, sino que contemplan la posibilidad de que sean equivalentes, con base en la experiencia de los anteriores ejercicios.

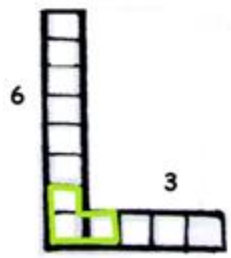


Fig 4

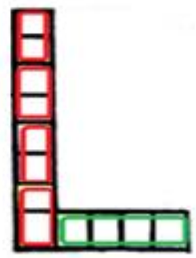


Fig 4

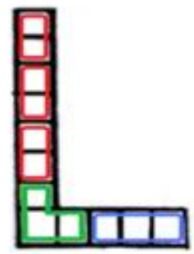


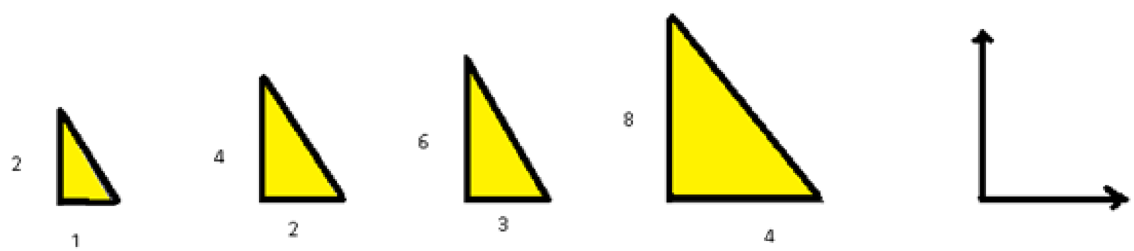
Fig 4

$3\,(\mathrm{n}-1)\ +\ 3$	$2n\ +\ n$	$3+\ 2\,(n-1)+(n-1)$
$3n\ -3\ +3$	$3n$	$3+\ 2n-2+n-1$
$3n$		$3n$

"Tres expresiones equivalentes"

SITUACIÓN 4

La siguiente situación pretende responder a la pregunta ¿Cómo modelar variacionalmente el siguiente problema?



1. Observe la fig 1, la Fig 2, la Fig3…¿Qué pasará en la figura n?, ¿Podrías determinar sus dimensiones?
2. ¿Qué relación encuentras entre la medida de la base y la medida de la altura de la figura?
3. Determina las dimensiones de la figura cuya base mide n unidades.

Aquí se ha tomado como variable independiente la medida de la base y como variable dependiente la medida de la altura, luego para una base de longitud n su altura será $2n$.

$$n\ \rightarrow 2n$$

4. Halle el área de la Fig 1, halle el área de la Fig 2, de la Fig 3, y así sucesivamente.

Sustituyen en la expresión $A = \frac{b\ .\ h}{2}$ donde b representa la medida de la base y h la medida de la altura, obteniendo las siguientes áreas:

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16 \ldots$$

- *P: ¿Qué relación o característica en común tienen estos números?*
- *E: Son números cuadrados* $1^2 = 1,\ 2^2 = 4\ ,\ 3^2 = 9 \ldots..$
- *P: ¿Qué relación hay entre la medida de la base y el área?*
- *E: Que si la base aumenta, el área también aumenta.*
- *P: Registra esas variaciones ¿Cuál será el área de la figura de base n?*

Base	Área
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
n	n^2

Más que mirar las dimensiones de la siguiente figura es interesante mirar el área y como varía dependiendo de la base y dependiendo de la altura.

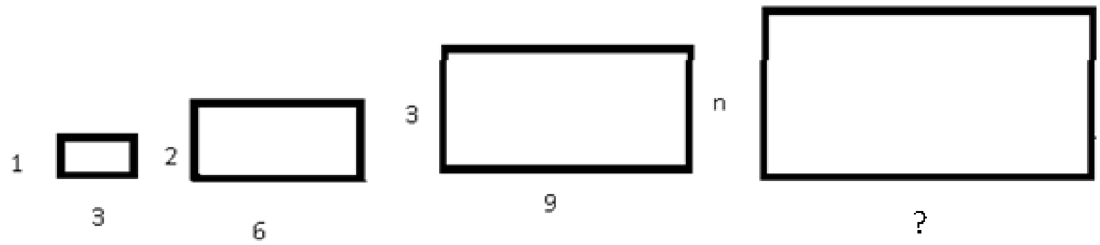
Establezcamos la relación entre área y la medida de la base

$$Area\ (n) = n^2 \quad donde\ n\ es\ la\ medida\ de\ la\ base$$

El área varía en función de la base dado que la altura siempre es el doble de la base.

En este ejercicio se establece la relación entre dos magnitudes que son; base y altura, altura y área, en donde también se puede introducir la noción de razón si determinamos la variación de la medida de la base y la medida de la altura.

SITUACIÓN 5 Observa las medidas de los lados de la figura.



P: ¿Qué variación observa en la altura del rectángulo? :
E: 1, 2, 3, 4, 5 ,….que inicia desde número 1 y va aumentando de 1 en 1.
P: ¿Qué variación observa en la base del rectángulo?
E: 3, 6, 9, 12,,, Es siempre el triple con respecto a la altura.
*P: ¿Si la altura es **n** quien es la base?*
E: $3n$*, es decir* $n \rightarrow 3n \quad donde\ n\ representa\ la\ medida\ de\ la\ altura$
P:¿Qué relación hay entre estas dos cantidades?.. Halla el perímetro de cada figura.
E: 8,16 , 24

1. Determine la expresión para hallar el perímetro del rectángulo de altura n.

$$P = 2(3n) + 2(n)$$

$$P = 6n + 2n$$

$$P = 8n$$

Se establece una relación entre el perímetro y la altura, sabiendo que la base es 3 veces la altura se puede denotar:

$$P(h) = 8h$$

2. Establece la relación del perímetro del rectángulo y su base.

Si para una base $3n$ se tiene un perímetro de 8, se plantea una ecuación donde la variable va a tomar un valor específico que está condicionado.

$$3n = 8$$

$$n = 8/3$$

Se tiene que para una base n, el perímetro de la figura será $\frac{8}{3}n$, se denota.

$$base \rightarrow perímetro$$

$$n \quad \rightarrow \quad \frac{8}{3}\,n$$

¿Qué tanto varía el perímetro con respecto a la base, es decir en qué proporción?

Registrar a través de una tabla:

Base	Perímetro	Razón
3	8	8/3
6	16	16/6
9	24	24/9
12	32	32/12

En esta actividad se define la variable como incógnita al plantear la ecuación que nos permite establecer la relación entre el perímetro del rectángulo y su base, se define además como número generalizado al asignarle un valor arbitrario de un conjunto de valores (enteros positivos) a la altura del rectángulo y una relación entre la altura y la base, entre área y la altura y área y base.

SITUACIÓN 6

SECUENCIA NUMÉRICA.

1. Observa las siguientes igualdades.

$1 + 2 = 3$
$1 + 2 + 3 = 6$
$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

¿Cuál es la característica de estas sumas?
Si quisiéramos sumar hasta 50 o hasta 100 o hasta un determinado número entero positivo, ¿cuál será el resultado de la suma?

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \ldots + 50 =$
$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \ldots \ldots \ldots + 100 =$
$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + n =$

Denotemos por n el enésimo término.

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \ldots + n = x$

donde x representa el resultado de la suma, que en este momento representa un valor especifico. Si escribimos en sentido contrario la suma tendremos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \ldots + n = x$$

$$\underline{n + (n-1) + \cdots \ldots\ldots + 3 + 2 + 1 = x}$$

$$(n+1) + (n+1) + \cdots (n+1) = 2X$$

$$n(n+1) = 2X$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = x$$

En esta situación podemos trabajar la variable como número generalizado, cuando sumamos el número siguiente a cada término de la secuencia y como incógnita, cuando se pretende hallar la suma de la secuencia.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ACOSTA G, Ernesto. Matemática Educativa: *Fundamentos de la matemática universitaria. Variable y variación*. Ponencias. Ed Escuela Colombiana de Ingeniería. Agosto 2004 .Primera Edición. p 111-113

[2] BOYER, Carl B. *Historia de la matemática*. Alianza Universidad, textos 1992.

[3] BUTTO, Cristianne, ROJANO Teresa. *Introducción temprana al pensamiento algebraico. Abordaje basado en geometría*. Educación Matemática. Ed Santillana. Abril año 2004/vol 16 No 001.

[4] BUTTO, Cristianne, ARRIAGA, Gabriela. *Procesos de generalización con estudiantes de 1º y 2º de secundaria de escuela pública del distrito federal; una propuesta didáctica.* X Congreso Nal de investigación educativa.

[5] CARRILLO, Francisco. *Apuntes de Historia de las Matemáticas No. 1, Vol. 2, ENER0 2003.* http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-1-1-india.pdf

[6] COLLIS, Kevin F. *La matemática escolar y los estadios de desarrollo. Revista Infancia y aprendizaje.1982,19-20,39.74.*

[7] DISTEFANO, Mª Laura. *Una intervención Educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Septiembre 2010.

[8] FALK DE LOZADA, María. *Enseñanza acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático"* Boletín de Matemáticas Nueva Serie Vol. 1.1994.

[9] GOMEZ, Enrique. *La construcción de la noción variable*. Tesis Doctoral. México. Octubre de 2008.

[10] GRUPO ARZAQUIEL. Ideas para enseñar álgebra.. Colección: Matemáticas : Cultura y Aprendizaje. Ed. Síntesis S.A 1993.

[11] JUAREZ, José. *Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de Matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV.* Revista Numeros. Vol 76. Marzo de 2011, pag 83,103.

[12] KLINE, Morris. El *pensamiento matemático de la antigüedad en nuestros días.* Alianza Ed Madrid 1994.

[13] MALISANI, Elsa. *Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica.* Artículo publicado en la "Revista IRICE" del "Instituto Rosariode Investigaciones en Ciencias de la Educación" di Rosario – Argentina, N° 13 del 1999, en lengua española. ISSN 0327-392X. http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf

[14] MEN. Ministerio de Educación Nacional. *Estándares Básicos de competencias en matemáticas*. 2003

[15] MILLER, HEEREN, HORNSBY. *Matemáticas razonamiento y aplicaciones de Miller*. Ed Pearson, Decima Edición, México. Año 2006.

[16] MORALES PERAL, Lina y DÍAZ GÓMEZ , José Luis. *Concepto de variables .Dificultades de uso a nivel universitario*. Revista Mosaicos Matemáticos No. 11 Reporte de Tesis (Maestría) Nivel superior. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. Diciembre, 2003 p 110-113.. http://semana.mat.uson.mx/Memorias/lina.pdf

[17] *NATHAN, Mitchell J. J. y KOEDINGER, Kenneth R. (2000). Teachers' and Researchers' Beliefs about the development of algebraic reasoning*. Journal for Research in Mathematics Education, Vol 31, p 168-190.

[18] ORTIZ, María. *El lenguaje algebraico en la escuela: cómo conseguir el equilibrio entre la investigación y la práctica.* Artículo extraído de Uno. Revista Didáctica de las Matemáticas. Octubre 1997.

[19] PALAREA MEDINA, Mª de las Mercedes. *(1999) "La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación".* Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas . Ed. Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. Vol 40, Diciembre de 1999 (p 3-28).

[20] PEÑA, Antonio. *Álgebra en todas partes.* Ed. La Ciencia. Fondo de cultura económica. SL. 2002

[21] PUERTO MONTERROSA, José. "*El uso de las nuevas tecnologías en la transición de la aritmética al álgebra".* Ponencia, cognición, aprendizaje y currículo. Experiencia docente. Sincelejo – Sucre, 2006. http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/article-106509.html

[22] *RADFORD, Luis G. Incursión histórica por la cara oculta del desarrollo primitivo de las ecuaciones. Revista UNO Didáctica de las matemáticas. N 14. Octubre 1997.p 61-73*

[23] SOCAS, Robayna ,MARTIN Manuel, *Iniciación al Algebra. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje.* Editorial Síntesis S.A Febrero de 1996.

[24] SOCAS ROBAYNA, Martin M, PALAREA, Mª Mercedes.. *"Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar"* Artículo de UNO Revista Didactica de las matemáticas No 4 p 7-22. Octubre 1997.

[25] TRIGUEROS ,M, URSINI S. (1999) *"La Conceptualización de la Variable en la Enseñanza Media",* Artículo de Investigación. Educación Matemática Volumen XII No. 2 (P.27-48)

[26] TRIGUEROS, M.', Reyes, A.', Ursini, S.* y Quintero, R. *Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra*. Enseñanza de las Ciencias, 1996, 14 (3)

[27] VASCO U, Carlos E. El álgebra renacentista. Ed 1985 Universidad Nacional de Colombia.

[28] *ZULUAGA,* Carlos*. Proyecto Matemática Recreativa. Colombia Aprendiendo.* Año 2010. Ed Instituto San Pablo Apóstol

[29] Imágenes de símbolos: http://www.xenciclopedia.com/post/Matematicas/Numeros-romanos,-egipcios,-mayas-y-chinos.html