que la planta de cubierta tiene una configuración diferente, dado que intencionalmente se suspenden algunas columnas en el último nivel.

Cada nivel de piso posee un diafragma rígido que asocia los desplazamientos en direcciones x e y, así como las rotaciones en dirección z de todos los nudos del mismo nivel, con los desplazamientos y la rotación del centro de masa del diafragma. Finalmente todos los nudos de la base están empotrados, es decir, se restringe completamente los desplazamientos u_x, u_y y u_z y las rotaciones θ_x, θ_y y θ_z.

Dado que la estructura es simétrica respecto al eje y, pero asimétrica respecto al eje x, se espera que la posición de los centros de masa y de rigidez de cada diafragma coincidan en dirección x más no en dirección y. Por tal razón también se espera que los movimientos sísmicos en dirección y induzcan solo desplazamientos en esa misma dirección, mientras que los movimientos sísmicos aplicados solamente en dirección x inducen simultáneamente desplazamientos en x e y, así como rotaciones en z en los nudos.

- *Propiedades de los materiales*

Los elementos estructurales son de concreto, el cual tiene un módulo de Young de $E_c = 22X10^6\ kN/m^2$, y una relación de Poisson de $\nu = 0.25$. Se considera comportamiento elástico del material.

- *Dimensiones y secciones de los elementos estructurales*

Todos los elementos estructurales son prismáticos de sección transversal rectangular. La Figura 8.23 muestra las secciones de las columnas, iguales en todos los pisos. Existen tres tipos diferentes de columnas: 50X50, 30X150 y 150X30 (*dimensiones en cm*).

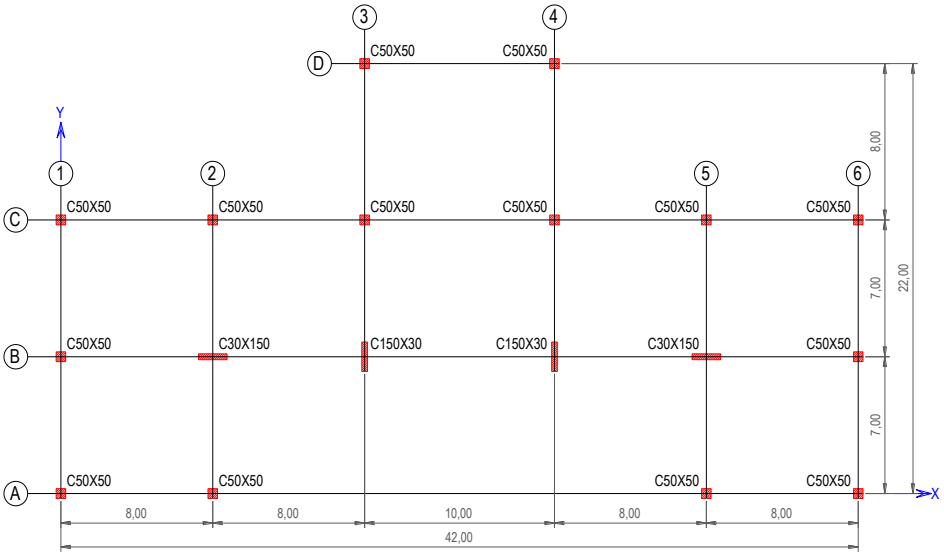


Figura 8.23. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Secciones de columnas

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Las columnas B2 y B5 de sección 30X150, se orientadon intencionalmente para aumentar la excentricidad en dirección y entre los centros de masa y de rigidez de los diafragmas.

Todas las vigas son de sección 30X60cm. La Figura 8.24 y la Figura 8.25 muestran las secciones de las vigas de los niveles 2, 3 y cubierta. En el último nivel desaparecen las vigas entre los ejes A y B y las columnas del eje A.

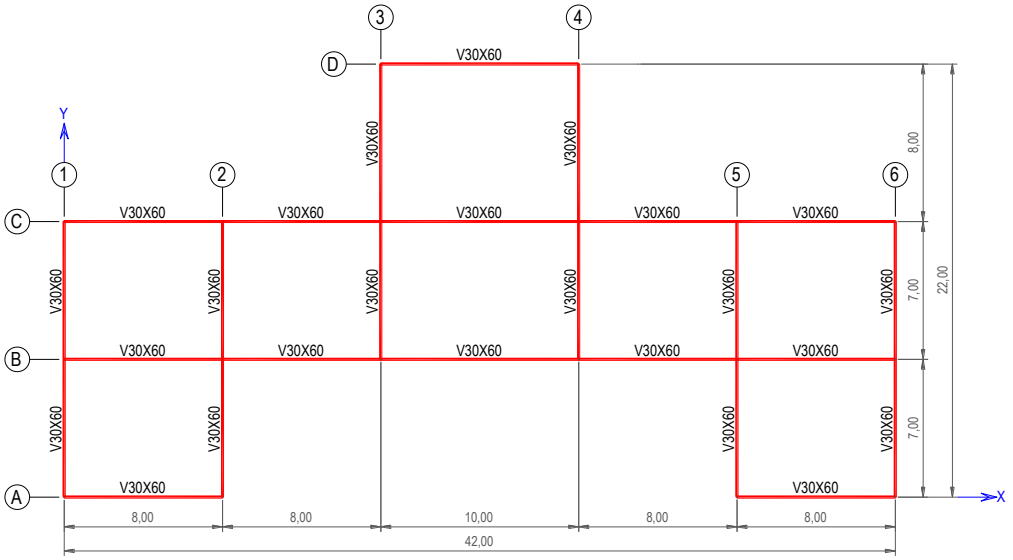


Figura 8.24. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Planta estructural de niveles 2 y 3 (*Z=5.00m y Z=9.00m*)

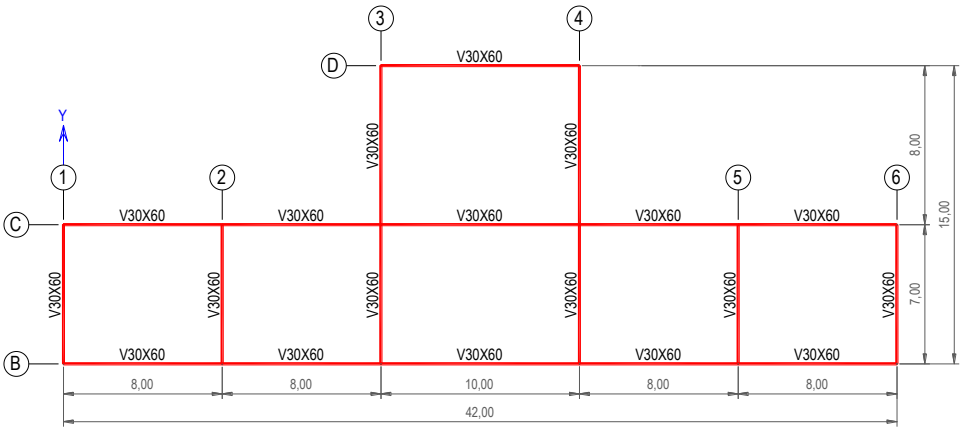


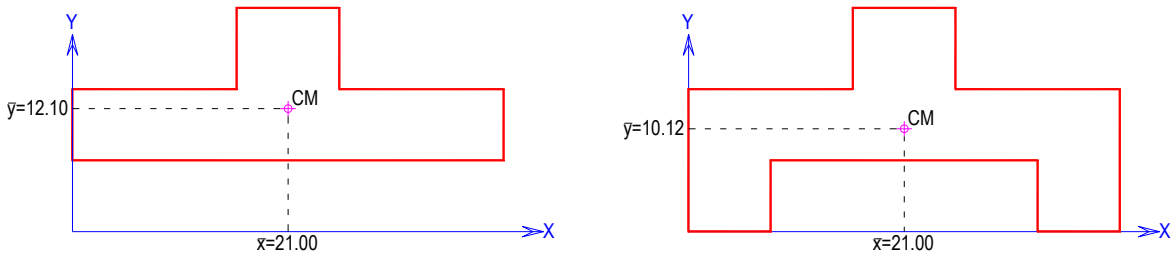
Figura 8.25. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Planta estructural de cubierta (*Z=13.00*)

- *Centros de gravedad, masas traslacionales y masas rotacionales*

Las coordenadas de los centros de masa, las masas y los momentos de inercia de requeridas por UNDIN se calcularon manualmente. Se supuso una carga muerta por metro cuadrado de $q_D = 10\,kN/m^2$ uniformemente distribuida en cada placa de entrepiso.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Las coordenadas de los centros de gravedad de los dos diafragmas tipo que posee la estructura se indican en la Figura 8.26.



Cubierta segundo y tercer nivel

Figura 8.26. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Posición de los centros de gravedad de los diafragmas

Se puede verificar que para el diafragma de cubierta, la masa m y el momento de inercia de masa I_{cm} respecto a un eje paralelo a z, que pase por el centro de gravedad son los siguientes (g = *10m/s*^{2}):

$$A = 374m^2$$

$$m = \frac{374m^2 * 10\,kN/m^2}{10\,m/s^2} = 374Mg$$

$$I_{cm} = \int r^2 dm = 49049.3Mg * m^2$$

Para los diafragmas de segundo y tercer nivel, la masa m y el momento de inercia de masa I_{cm} son los siguientes:

$$A = 486m^2$$

$$m = \frac{486m^2 * 10\,kN/m^2}{10\,m/s^2} = 486Mg$$

$$I_{cm} = \int r^2 dm = 89052.8\text{Mg} * m^2$$

- *Numeración de nudos y de elementos*

A continuación se muestra la numeración asignada a los nudos y a los elementos de la estructura, asi como a los centros de masa de los diafragmas. El pórtico posee 68 nudos y 119 elementos y 3 diafragmas rígidos.

En la Figura 8.27 se indica la numeración de los nudos de la base, en la Figura 8.28, en la Figura 8.29 y en la Figura 8.30 se indica la numeración de los nudos, de los elementos y de los centros de masa de cada nivel estructural.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

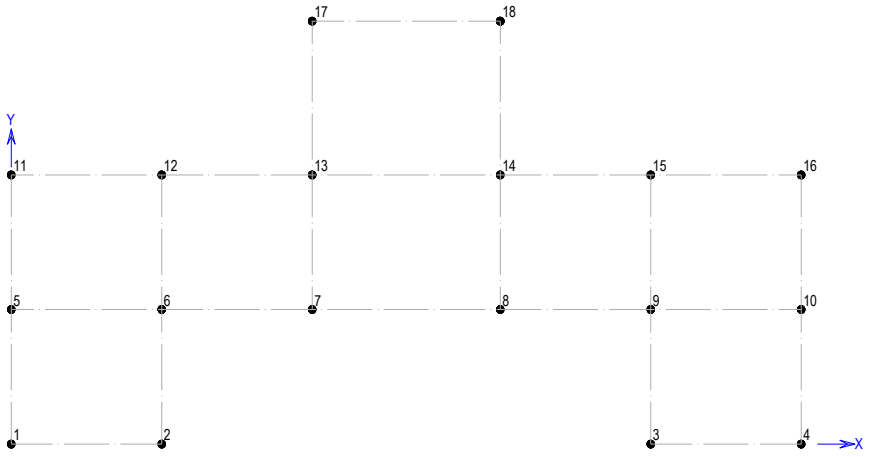


Figura 8.27. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos de la base (*Z=0.00m*)

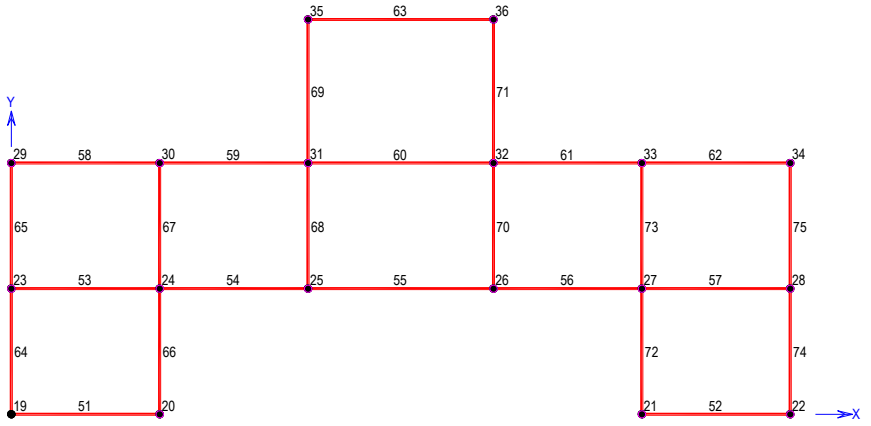


Figura 8.28. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos de la planta de 2° nivel (Z=5.00m)

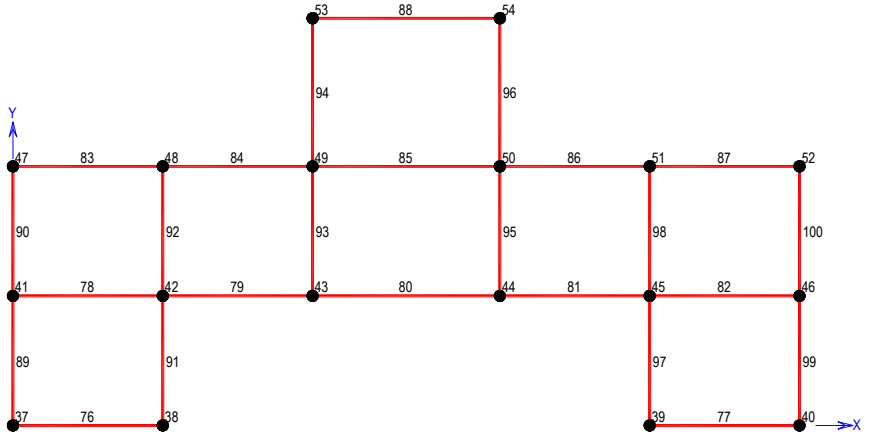


Figura 8.29. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos de la planta de 3° nivel (*Z=9.00m*)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

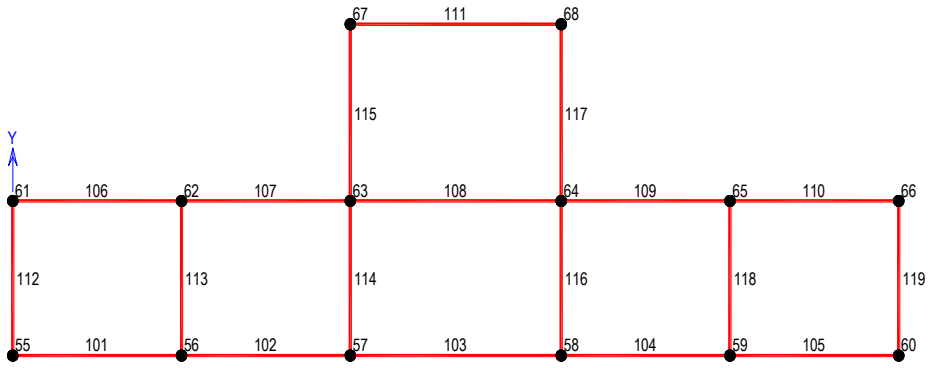


Figura 8.30. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos de la planta de cubierta (*Z=13.00*)

En la Figura 8.31, la Figura 8.32, la Figura 8.33 y la Figura 8.34 se indica la numeración de los nudos y de los elementos que pertenecen a los pórticos paralelos al eje x, con el fin de mostrar la numeración asignada a las columnas.

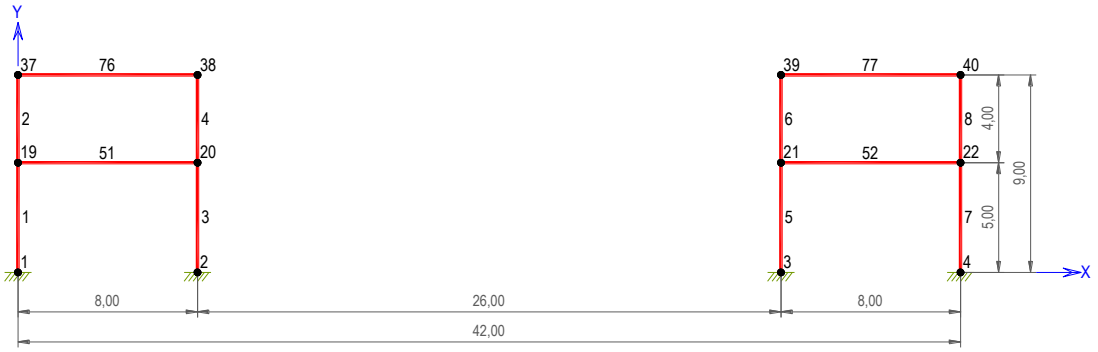


Figura 8.31. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos del pórtico A (*Y=0.00*)

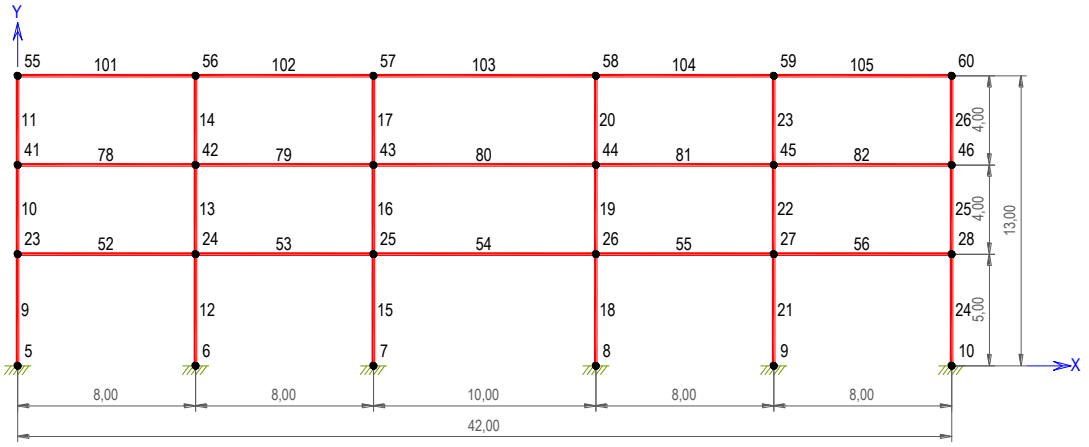


Figura 8.32. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos del pórtico B (*Y=7.00*)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

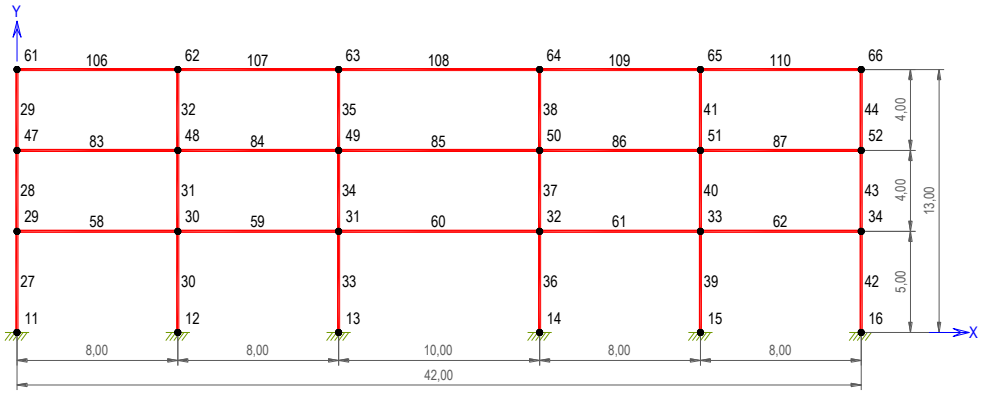


Figura 8.33. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos del pórtico C (*Y=14.00*)

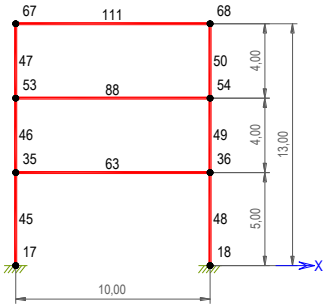


Figura 8.34. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos del pórtico D (*Y=22.00*)

- *Definición de ejes de vigas y columnas*

Para mostrar las derivas por ejes de columnas y los diagramas de acciones internas en vigas y en columnas, los elementos de la estructura se agruparon ordenadamente por ejes. En este caso el pórtico posee 18 ejes de columnas y 31 ejes de vigas como lo muestran la Figura 8.35, la Figura 8.36, la Figura 8.37 y la Figura 8.38. La numeración de los ejes de columnas coincide con la numeración de los nudos de la base.

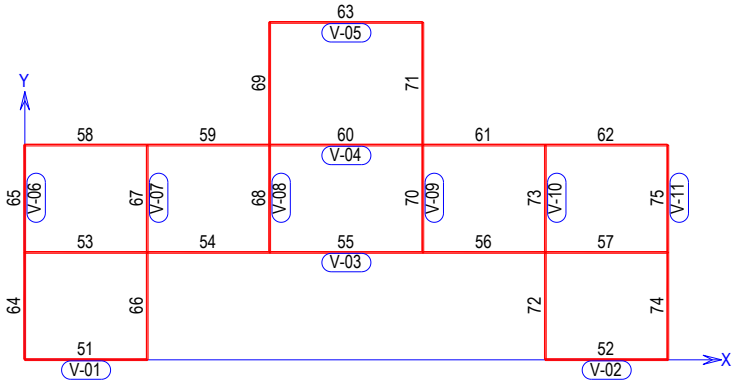


Figura 8.35. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de vigas de segundo nivel

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

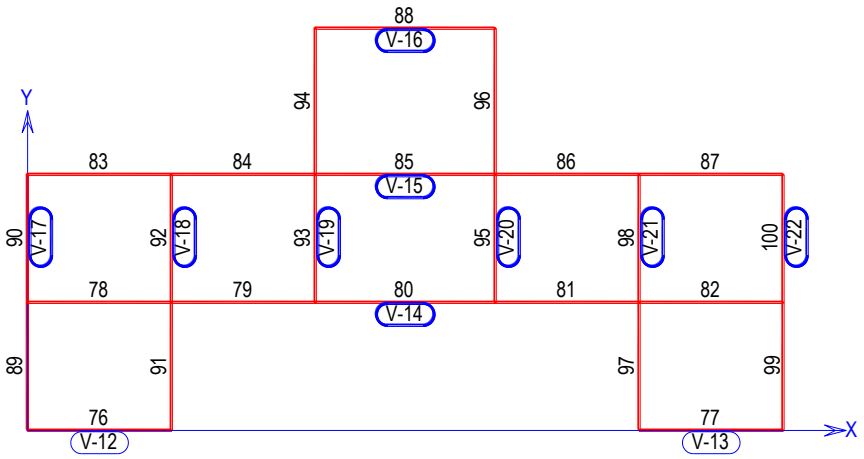


Figura 8.36. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de vigas de tercer nivel

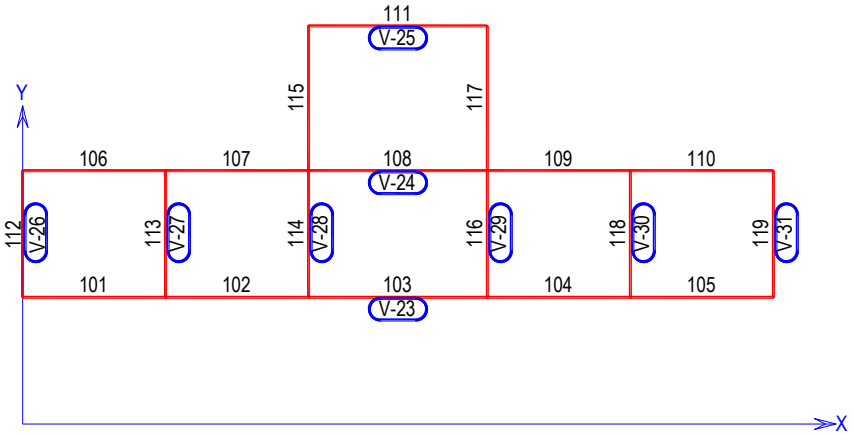


Figura 8.37. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de vigas de cubierta

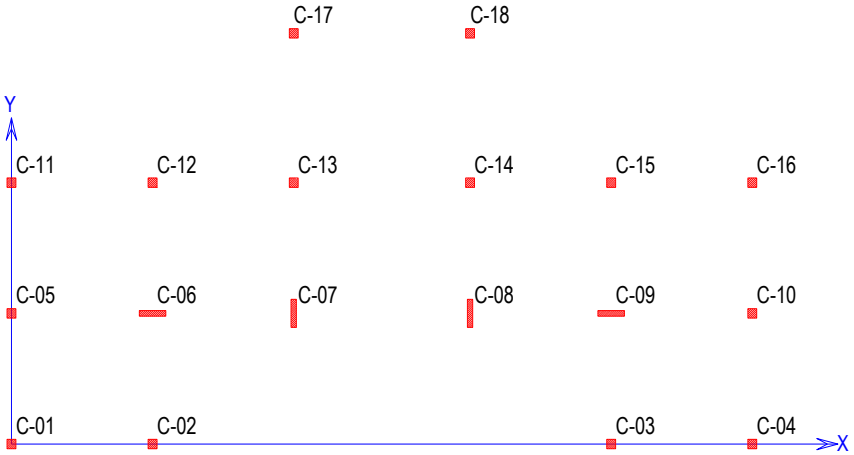


Figura 8.38. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de ejes de columnas

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

8.2.2. Parámetros de análisis

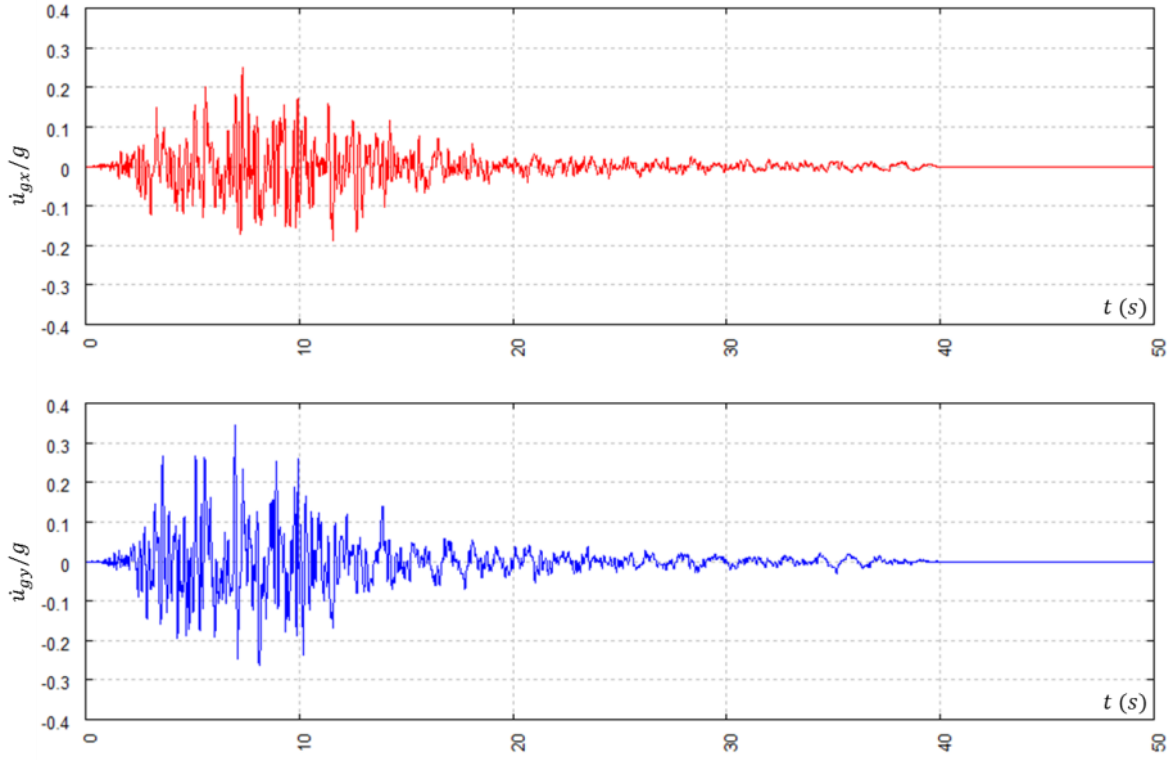
- *Amortiguamiento modal*

Se consideró una fracción de amortiguamiento modal de 5% (ξ = 0.05) respecto al amortiguamiento crítico, igual para todos los modos de vibración de la estructura y para los dos métodos de análisis dinámico elástico.

- *Aceleración en la base*

Para el análisis modal cronológico se utilizaron los acelerogramas en dirección N-S y E-W del sismo de Kobe de 1995 registrado en la estación Kakogawa en Japón, tomado de la base de datos de movimientos sísmicos de PEER, para representar la aceleración aplicada a la base del pórtico en direcciones x e y. Por simplicidad se asumió que el primer acelerograma coincide con la aceleración de la base en dirección x y que el segundo acelerograma coincide con la aceleración de la base en dirección y.

Los datos de aceleración están registrados cada 0.01segundos como fracción de la aceleración de la gravedad g. La duración del sismo es de 41 segundos aproximadamente, pero las máximas aceleraciones se presentan en los primeros 15 segundos del movimiento, como lo muestra la Gráfica 8.32.



Gráfica 8.32. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Aceleración de la base en direcciones $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

- *Espectro de pseudo-aceleraciones*

Para el análisis modal espectral se utilizó nuevamente el espectro de pseudo-aceleraciones de la zona Piedemonte B de la microzonificación sísmica de Bogotá vigente, mostrado en la Gráfica 8.2 y construido con los parámetros de la Tabla 8.1. Los movimientos sísmicos representados en el espectro se aplican a la estructura en las direcciones x e y globales.

- *Métodos específicos utilizados en cada tipo de análisis dinámico*

Las ecuaciones modales se resuelven para cada instante de tiempo utilizando el método explicito basado en la interpolación de la excitación externa (*método de la excitación lineal*), obteniendo como resultado la variación en el tiempo de los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones generalizadas.

Para estimar la respuesta máxima probable de la estructura por análisis modal espectral se utilizan los métodos de la *Combinación Cuadrática Completa* y de la *Raiz Cuadrada de la Suma de Cuadrados*. El primer método se utiliza para combinar la respuesta modal obtenida de aplicar sobre la estructura cada componente de aceleración en la base de forma individual, y el segundo método se utiliza para considerar los efectos ortogonales.

- *Idealización de la estructura para el análisis dinámico*

La idealización del pórtico tomado como ejemplo se resume en la Figura 8.39, en la que se indica la numeración asignada por UNDIN a los grados de libertad dinámicos, las masas y los momentos de inercia de los diafragmas y los movimientos sísmicos aplicados en direcciones x e y, representados en la aceleración de la base o en el espectro de pseudo-aceleraciones.

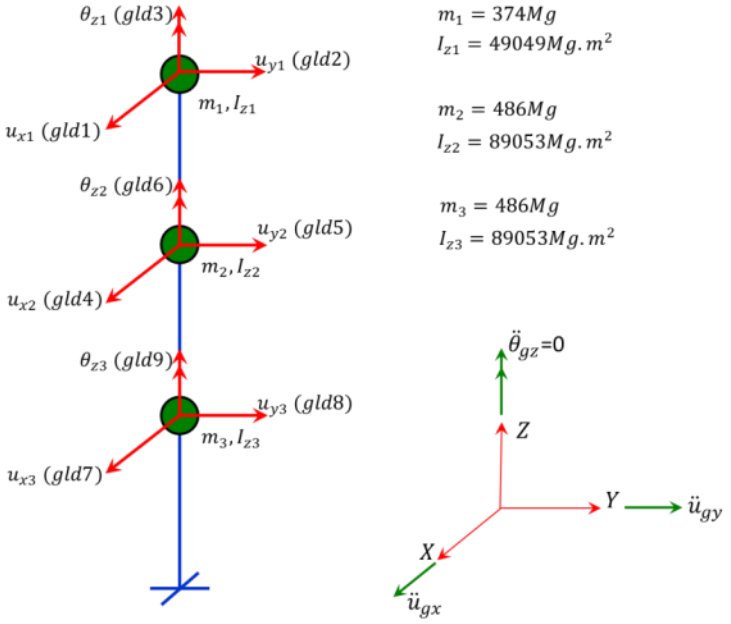


Figura 8.39. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Idealización dinámica del pórtico espacial

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

8.2.3. Datos de entrada

- *Parámetros generales*

La Figura 8.40 muestra los parámetros generales requeridos en la hoja *TB_GEN* para realizar el análisis dinámico del pórtico utilizando el método de análisis modal cronológico, mientras que la Figura 8.41 muestra los parámetros generales requeridos analiszar el mismo pórtico por el método de análisis modal espectral.

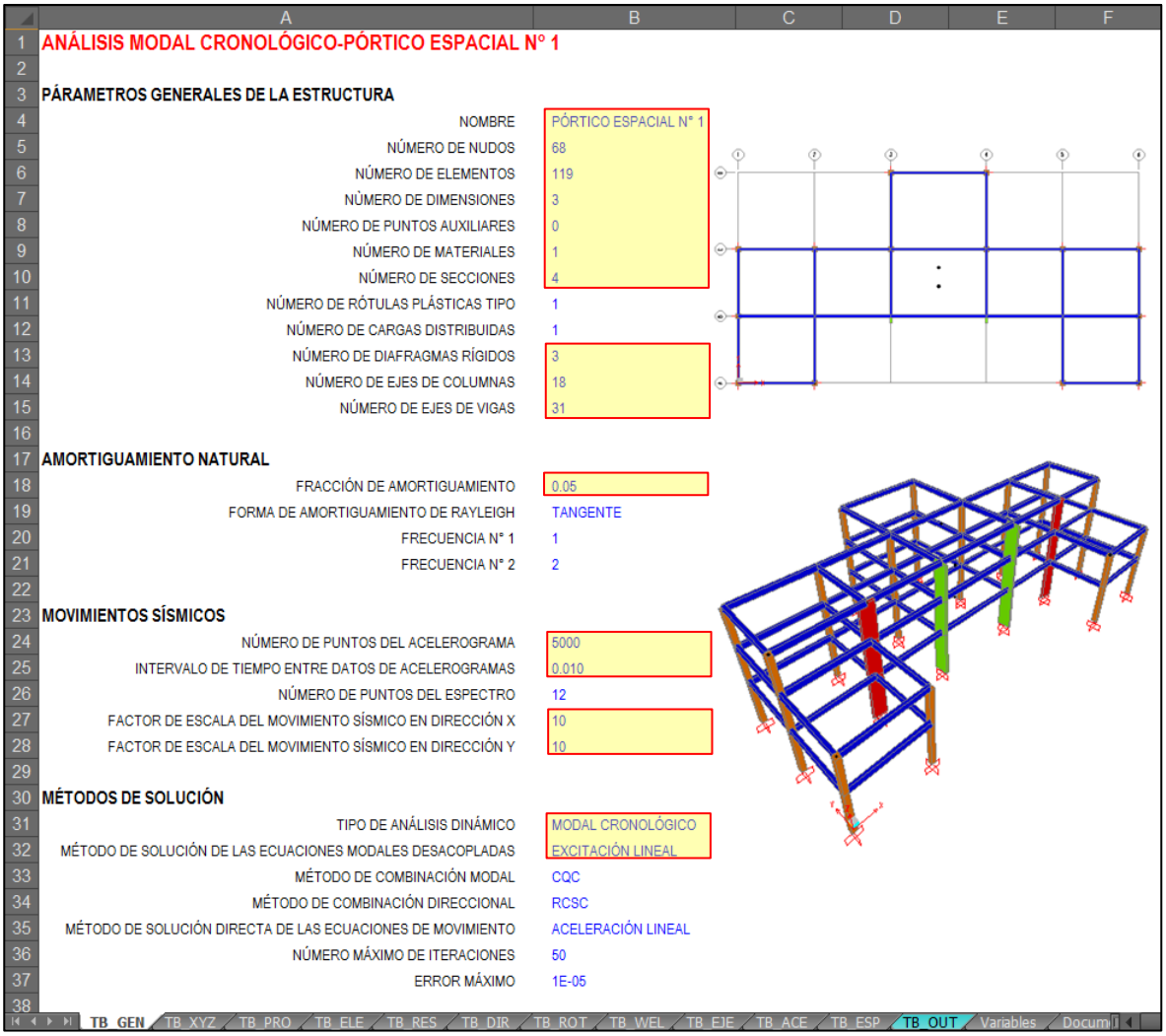
En la primera parte se especifican los parámetros relacionados con el número de nudos (*68*), de elementos (119), de dimensiones (*3 por ser pórtico espacial*), de puntos auxiliares (*0, el programa define los ejes locales de los elementos por defecto*), de materiales tipo (*1*), de secciones tipo (*4*), de diafragmas rígidos (*3*), de ejes de vigas (*31*) y de ejes de columnas (*18*), de acuerdo a la descripción de la estructura indicada previamente. Se utiliza una fracción de amortiguamiento modal de 0.05 (*5%*) para todos los modos y para los dos métodos.

Respecto a los movimientos sísmicos, para el método de análisis modal cronológico se suministra el número de puntos de cada acelerograma, que se especificó en 5000 datos, el tamaño del intervalo de tiempo que es de 0.01 seg y los factores de escala de la aceleración de la base en direcciones x e y, que se toman igual a 10 al suponer $g = 10\,m/s^2$. Para el método de análisis modal espectral se especifica el número de parejas de datos $S_a - T$ usados para construir el espectro (*12*) y los factores de escala del espectro en direcciones x e y, adoptados también iguales a 10.

Finalmente respecto al método de análisis dinámico y a los procedimientos específicos de cada método, en el caso de análisis modal cronológico se utiliza el método de la *excitación lineal*. En el caso de análisis modal espectral se usan los métodos de combinación modal y direccional *CQC* y *RCSC*, como se especificó previamente.

En las mismas figuras se resaltan los parámetros que deben especificarse dependiendo del método de análisis dinámico utilizado. Los parámetros que no están resaltados no se requieren en este tipo de análisis.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



	A	B
1	ANÁLISIS MODAL CRONOLÓGICO-PÓRTICO ESPACIAL N° 1	
2		
3	PÁRAMETROS GENERALES DE LA ESTRUCTURA	
4	NOMBRE	PÓRTICO ESPACIAL N° 1
5	NÚMERO DE NUDOS	68
6	NÚMERO DE ELEMENTOS	119
7	NÚMERO DE DIMENSIONES	3
8	NÚMERO DE PUNTOS AUXILIARES	0
9	NÚMERO DE MATERIALES	1
10	NÚMERO DE SECCIONES	4
11	NÚMERO DE RÓTULAS PLÁSTICAS TIPO	1
12	NÚMERO DE CARGAS DISTRIBUIDAS	1
13	NÚMERO DE DIAFRAGMAS RÍGIDOS	3
14	NÚMERO DE EJES DE COLUMNAS	18
15	NÚMERO DE EJES DE VIGAS	31
16		
17	AMORTIGUAMIENTO NATURAL	
18	FRACCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO	0.05
19	FORMA DE AMORTIGUAMIENTO DE RAYLEIGH	TANGENTE
20	FRECUENCIA N° 1	1
21	FRECUENCIA N° 2	2
22		
23	MOVIMIENTOS SÍSMICOS	
24	NÚMERO DE PUNTOS DEL ACELEROGRAMA	5000
25	INTERVALO DE TIEMPO ENTRE DATOS DE ACELEROGRAMAS	0.010
26	NÚMERO DE PUNTOS DEL ESPECTRO	12
27	FACTOR DE ESCALA DEL MOVIMIENTO SÍSMICO EN DIRECCIÓN X	10
28	FACTOR DE ESCALA DEL MOVIMIENTO SÍSMICO EN DIRECCIÓN Y	10
29		
30	MÉTODOS DE SOLUCIÓN	
31	TIPO DE ANÁLISIS DINÁMICO	MODAL CRONOLÓGICO
32	MÉTODO DE SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES MODALES DESACOPLADAS	EXCITACIÓN LINEAL
33	MÉTODO DE COMBINACIÓN MODAL	CQC
34	MÉTODO DE COMBINACIÓN DIRECCIONAL	RCSC
35	MÉTODO DE SOLUCIÓN DIRECTA DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO	ACELERACIÓN LINEAL
36	NÚMERO MÁXIMO DE ITERACIONES	50
37	ERROR MÁXIMO	1E-05
38		

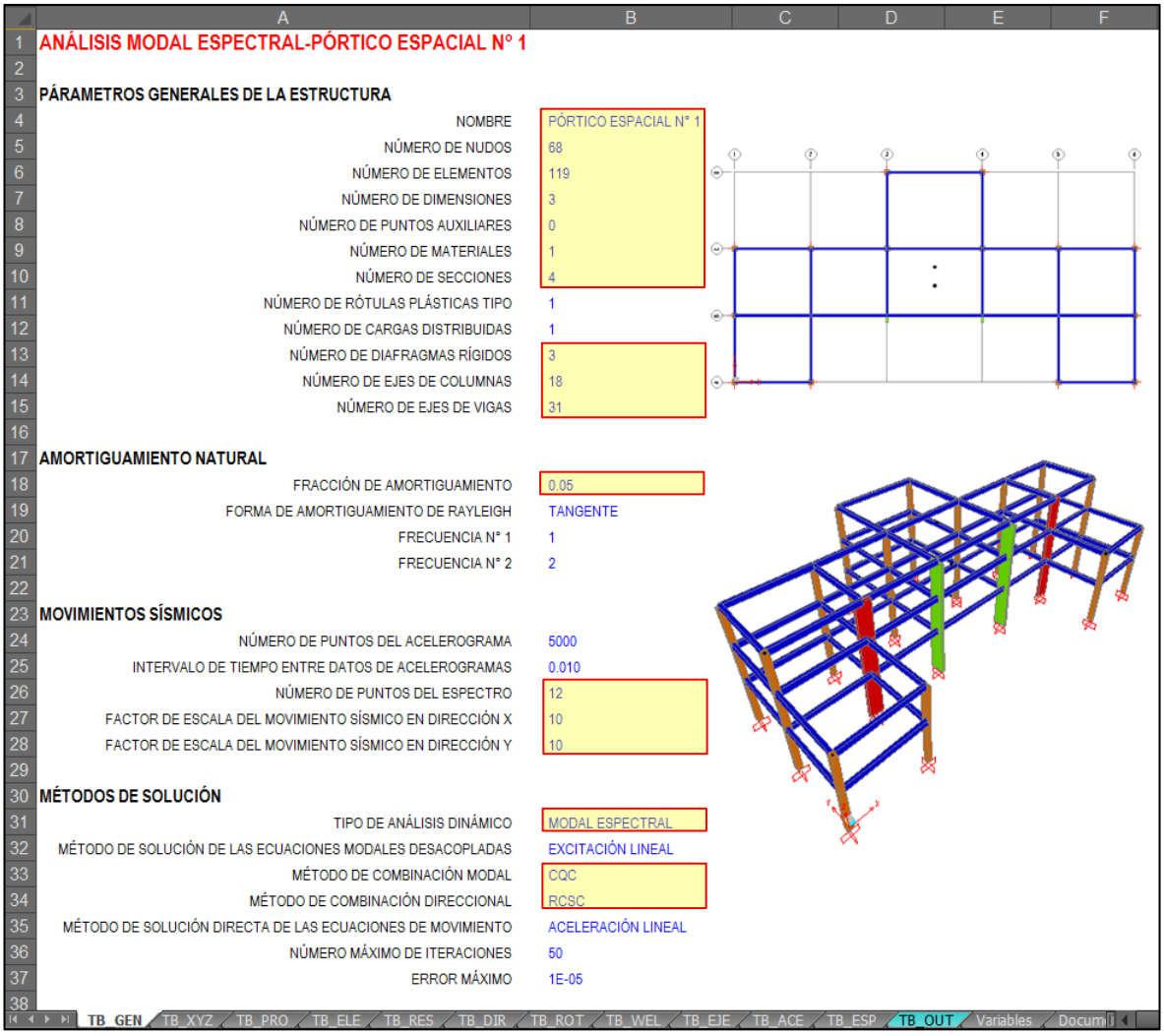
Figura 8.40. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Parámetros generales para utilizar el método de análisis modal cronológico (hoja *TB_GEN*)

- *Coordenadas de los nudos*

La Figura 8.42 muestra la tabla de coordenadas de los nudos y puntos auxiliares de la hoja *TB_XYZ*. Se indican las coordenadas x, y *e* z de los 68 nudos que componen el pórtico. No se usan nudos auxiliares para la definición de los ejes locales de los elementos.

Las coordenadas de cada nudo coinciden con lo indicado en descripción de la estructura, específicamente en lo relacionado con la numeración de los nudos.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



	A	B
1	ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL-PÓRTICO ESPACIAL Nº 1	
2		
3	PÁRAMETROS GENERALES DE LA ESTRUCTURA	
4	NOMBRE	PÓRTICO ESPACIAL N° 1
5	NÚMERO DE NUDOS	68
6	NÚMERO DE ELEMENTOS	119
7	NÚMERO DE DIMENSIONES	3
8	NÚMERO DE PUNTOS AUXILIARES	0
9	NÚMERO DE MATERIALES	1
10	NÚMERO DE SECCIONES	4
11	NÚMERO DE RÓTULAS PLÁSTICAS TIPO	1
12	NÚMERO DE CARGAS DISTRIBUIDAS	1
13	NÚMERO DE DIAFRAGMAS RÍGIDOS	3
14	NÚMERO DE EJES DE COLUMNAS	18
15	NÚMERO DE EJES DE VIGAS	31
16		
17	AMORTIGUAMIENTO NATURAL	
18	FRACCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO	0.05
19	FORMA DE AMORTIGUAMIENTO DE RAYLEIGH	TANGENTE
20	FRECUENCIA N° 1	1
21	FRECUENCIA N° 2	2
22		
23	MOVIMIENTOS SÍSMICOS	
24	NÚMERO DE PUNTOS DEL ACELEROGRAMA	5000
25	INTERVALO DE TIEMPO ENTRE DATOS DE ACELEROGRAMAS	0.010
26	NÚMERO DE PUNTOS DEL ESPECTRO	12
27	FACTOR DE ESCALA DEL MOVIMIENTO SÍSMICO EN DIRECCIÓN X	10
28	FACTOR DE ESCALA DEL MOVIMIENTO SÍSMICO EN DIRECCIÓN Y	10
29		
30	MÉTODOS DE SOLUCIÓN	
31	TIPO DE ANÁLISIS DINÁMICO	MODAL ESPECTRAL
32	MÉTODO DE SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES MODALES DESACOPLADAS	EXCITACIÓN LINEAL
33	MÉTODO DE COMBINACIÓN MODAL	CQC
34	MÉTODO DE COMBINACIÓN DIRECCIONAL	RCSC
35	MÉTODO DE SOLUCIÓN DIRECTA DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO	ACELERACIÓN LINEAL
36	NÚMERO MÁXIMO DE ITERACIONES	50
37	ERROR MÁXIMO	1E-05

TB_GEN / TB_XYZ / TB_PRO / TB_ELE / TB_RES / TB_DIR / TB_ROT / TB_WEL / TB_EJE / TB_ACE / TB_ESP / TB_OUT / Variables / Docum

Figura 8.41. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Parámetros generales para utilizar el método de análisis modal espectral (hoja *TB_GEN*)

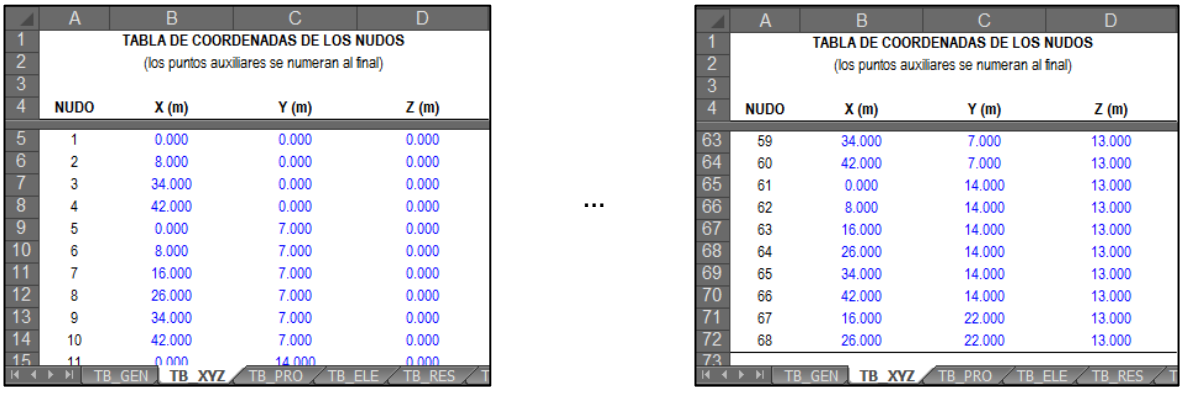


TABLA DE COORDENADAS DE LOS NUDOS
(los puntos auxiliares se numeran al final)

NUDO	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	0.000	0.000	0.000
2	8.000	0.000	0.000
3	34.000	0.000	0.000
4	42.000	0.000	0.000
5	0.000	7.000	0.000
6	8.000	7.000	0.000
7	16.000	7.000	0.000
8	26.000	7.000	0.000
9	34.000	7.000	0.000
10	42.000	7.000	0.000
11	0.000	14.000	0.000

TB_GEN / TB_XYZ / TB_PRO / TB_ELE / TB_RES

...

TABLA DE COORDENADAS DE LOS NUDOS
(los puntos auxiliares se numeran al final)

NUDO	X (m)	Y (m)	Z (m)
59	34.000	7.000	13.000
60	42.000	7.000	13.000
61	0.000	14.000	13.000
62	8.000	14.000	13.000
63	16.000	14.000	13.000
64	26.000	14.000	13.000
65	34.000	14.000	13.000
66	42.000	14.000	13.000
67	16.000	22.000	13.000
68	26.000	22.000	13.000

TB_GEN / TB_XYZ / TB_PRO / TB_ELE / TB_RES

Figura 8.42. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tabla de coordenadas de nudos y de puntos auxiliares (hoja *TB_XYZ*)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

- *Tablas de materiales y de propiedades de secciones*

La Figura 8.43 muestra las tablas de materiales y secciones tipo de la hoja *TB_PRO*, en las que se define un solo tipo de material y se definen 4 tipos de secciones transversales diferentes, tres para columnas y una para vigas, de acuerdo a lo especificado en la descripción de la estructura.

TABLA DE MATERIALES

Material N°	E (kN/m2)	ν (adim)
1	2.20E+07	0.25

TABLA DE PROPIEDADES DE SECCIONES

Sección N°	Tipo	b (m)	h (m)	D (m)	a	b	A (m^2)	I_z (m^4)	I_y (m^4)	J (m^4)	fs (adim)
1	Rectangular	0.50	0.50	0.00	0.50	0.50	0.2500	0.0052	0.0052	0.009	1.20
2	Rectangular	0.30	1.50	0.00	0.30	1.50	0.4500	0.0844	0.0034	0.012	1.20
3	Rectangular	1.50	0.30	0.00	0.30	1.50	0.4500	0.0034	0.0844	0.012	1.20
4	Rectangular	0.30	0.60	0.00	0.30	0.60	0.1800	0.0054	0.0014	0.004	1.20

TB_GEN / TB_XYZ / TB_PRO / TB_ELE / TB_RES / TB_DIR / TB_ROT / TB_WEL / TB_EJE / TB_ACE / TB_ESP / TB_OUT / Variables / Docum

Figura 8.43. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de materiales y secciones tipo (hoja *TB_PRO*)

- *Tablas de conectividades y de asignación de materiales, secciones, rigidez tipo y número de secciones por elemento*

La Figura 8.44 muestra las tablas de datos de la hoja *TB_ELE*. La tabla de conectividades contiene la numeración de los nudos incicial y final de los 119 elementos, de acuerdo a lo indicado en la descripción de la estructura. También se indica que no se usarán puntos auxiliares para definir los ejes locales (*se asignó cero a los datos correspondientes*).

En la tabla de asignación de materiales, secciones, rigidez y cortes se asignó a todos los elementos el material tipo 1 y las secciones tipo 1, 2, 3 o 4 dependiendo del elemento. En todos los elementos se asigna el tipo de rigidez 001 para considerar solamente deformaciones por cortante y se definen 5 cortes en elementos de columnas y 7 cortes en elementos de vigas para construir los diagramas de acciones internas.

No se incluye ningula información de la tabla de rigidez de conexiones elásticas puesto que estas no se consideran en el análisis.

TABLA DE CONECTIVIDADES

Elemento N°	Nudo inicial	Nudo final	IPAU
1	1	19	0
2	19	37	0
3	2	20	0
4	20	38	0
5	3	21	0
6	21	39	0
7	4	22	0
8	22	40	0
9	5	23	0
10	23	41	0
11	41	55	0

ASIGNACION DE MATERIALES, SECCIONES, RIGIDEZ Y CORTES

Elemento N°	Material Tipo	Sección Tipo	Rigidez Tipo	N° de cortes
1	001	001	001	005
2	001	001	001	005
3	001	001	001	005
4	001	001	001	005
5	001	001	001	005
6	001	001	001	005
7	001	001	001	005
8	001	001	001	005
9	001	001	001	005
10	001	001	001	005
11	001	001	001	005

TB_GEN / TB_XYZ / TB_PRO / TB_ELE / TB_RES / TB_DIR / TB_ROT / TB_WEL / TB_EJE / TB_ACE / TB_ESP / TB_OUT / Variables / Docum

Figura 8.44. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de conectividades y asignación de materiales, secciones, rigidez y cortes a elementos (hoja *TB_ELE*)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

TABLA DE CONECTIVIDADES

Elemento N°	Nudo inicial	Nudo final	IPAU
111	67	68	0
112	55	61	0
113	56	62	0
114	57	63	0
115	63	67	0
116	58	64	0
117	64	68	0
118	59	65	0
119	60	66	0

ASIGNACION DE MATERIALES, SECCIONES, RIGIDEZ Y CORTES

Elemento N°	Material Tipo	Sección Tipo	Rigidez Tipo	N° de cortes
111	001	004	001	007
112	001	004	001	007
113	001	004	001	007
114	001	004	001	007
115	001	004	001	007
116	001	004	001	007
117	001	004	001	007
118	001	004	001	007
119	001	004	001	007

TB_GEN / TB_XYZ / TB_PRO / TB_ELE / TB_RES / TB_DIR / TB_ROT / TB_WEL / TB_EJE / TB_ACE / TB_ESP / TB_OUT / Variables / Docum

Figura 8.44. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de conectividades y asignación de materiales, secciones, rigidez y cortes a elementos (hoja *TB_ELE)* (*cont.*)

- *Tablas de clasificación de grados de libertad y de desplazamientos conocidos por nudo*

La Figura 8.45 muestra las tablas de clasificación de grados de libertad y de desplazamientos conocidos por nudo de la hoja *TB_RES*.

En la primera tabla se asignó el indicador *001* a los 6 grados de libertad de los nudos de la base (*nudos 1 a 18*) por estar restringidos. A los grados de libertad u_z, θ_x y θ_y de los nudos restantes (*nudos 19 a 68*) se les asignó el indicador 002 para grados de libertad desconocidos condensados, y a los grados de libertad u_x, u_y y θ_z el indicador 003 para grados de libertad desconocidos de interés.

A los desplazamientos restringidos se les asignó un valor igual a cero como lo indica la tabla de desplazamientos conocidos.

TABLA DE CLASIFICACIÓN DE GRADOS DE LIBERTAD

Interés = 003 / Condensado (002) / Conocido=001

NUDO	u_x	u_y	u_z	θ_x	θ_y	θ_z
1	001	001	001	001	001	001
2	001	001	001	001	001	001
3	001	001	001	001	001	001
4	001	001	001	001	001	001
5	001	001	001	001	001	001
6	001	001	001	001	001	001
7	001	001	001	001	001	001
8	001	001	001	001	001	001
9	001	001	001	001	001	001
10	001	001	001	001	001	001
11	001	001	001	001	001	001

TABLAS DE DESPLAZAMIENTOS CONOCIDOS POR NUDO

NUDO	u_x	u_y	u_z	θ_x	θ_y	θ_z
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

TB_GEN / TB_XYZ / TB_PRO / TB_ELE / TB_RES / TB_DIR / TB_ROT / TB_WEL / TB_EJE / TB_ACE / TB_ESP / TB_OUT / Variables / Docum

Figura 8.45. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de clasificación de grados de libertad y de desplazamientos conocidos por nudo (hoja *TB_RES*)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

TABLA DE CLASIFICACIÓN DE GRADOS DE LIBERTAD

Interés = 003 / Condensado (002) / Conocido=001

NUDO	u_x	u_y	u_z	θ_x	θ_y	θ_z
59	003	003	002	002	002	003
60	003	003	002	002	002	003
61	003	003	002	002	002	003
62	003	003	002	002	002	003
63	003	003	002	002	002	003
64	003	003	002	002	002	003
65	003	003	002	002	002	003
66	003	003	002	002	002	003
67	003	003	002	002	002	003
68	003	003	002	002	002	003

TABLAS DE DESPLAZAMIENTOS CONOCIDOS POR NUDO

NUDO	u_x	u_y	u_z	θ_x	θ_y	θ_z
59	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
60	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
61	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
62	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
63	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
64	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
65	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
66	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
67	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
68	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

TB_GEN / TB_XYZ / TB_PRO / TB_ELE / TB_RES / TB_DIR / TB_ROT / TB_WEL / TB_EJE / TB_ACE / TB_ESP / TB_OUT / Variables / Docum

Figura 8.45. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de clasificación de grados de libertad y de desplazamientos conocidos por nudo (hoja *TB_RES*) (*cont.*)

- *Tabla de diafragmas rígidos*

En la Figura 8.46 se muestra la tabla de diafragmas rígidos de la hoja *TB_DIR*. En esta tabla se suministraron las coordenadas de los centros de masa de los 6 difragmas rígidos de la estructura de acuerdo a lo indicado en la Figura 8.26 y se suminstraron las masa y los momentos de inercia de los diafragmas rígido previamente calculados.

TABLA DE DIAFRAGMAS RÍGIDOS

Diafragma	Coordenadas Centros de Masa			Mx=My	Mrz
	X_{cm} (m)	Y_{cm} (m)	Z_{cm} (m)	kkg	kkg.m^2
1	21.000	12.100	13.000	374.0	49049.3
2	21.000	10.120	9.000	486.0	89052.8
3	21.000	10.120	5.000	486.0	89052.8

TB_GEN / TB_XYZ / TB_PRO / TB_ELE / TB_RES / TB_DIR / TB_ROT / TB_WEL

Figura 8.46. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tabla de diafragmas rígidos (hoja *TB_DIR*)

- *Tabla de ejes de columnas y de vigas*

La Figura 8.47 muestra las dos tablas de datos de la hoja *TB_EJE*. En la primera tabla se suministraron las coordenadas x, y de los 18 ejes de columnas, las cuales coinciden con las coordenadas x, y de los primeros 18 nudos, y en la segunda tabla se suministraron en forma ordenada la cantidad y los nombres de los elementos asociados a los 31 ejes de vigas de la estructura.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

COORDENADAS DE EJES DE COLUMNAS

EJE	X m	Y m
1	0.000	0.000
2	8.000	0.000
3	34.000	0.000
4	42.000	0.000
5	0.000	7.000
6	8.000	7.000
7	16.000	7.000
8	26.000	7.000
9	34.000	7.000
10	42.000	7.000
11	0.000	14.000
12	8.000	14.000
13	16.000	14.000
14	26.000	14.000
15	34.000	14.000
16	42.000	14.000
17	16.000	22.000
18	26.000	22.000

TABLA DE ELEMENTOS ASOCIADOS A EJES DE VIGAS

Viga	N° de elementos	Elementos					
1	1	51					
2	1	52					
3	5	53	54	55	56	57	
4	5	58	59	60	61	62	
5	1	63					
6	2	64	65				
7	2	66	67				
8	2	68	69				
9	2	70	71				
10	2	72	73				
11	2	74	75				
12	1	76					
13	1	77					
14	5	78	79	80	81	82	
15	5	83	84	85	86	87	
16	1	88					
17	2	89	90				
18	2	91	92				
19	2	93	94				
20	2	95	96				
21	2	97	98				
22	2	99	100				
23	5	101	102	103	104	105	
24	5	106	107	108	109	110	
25	1	111					
26	1	112					
27	1	113					
28	2	114	115				
29	2	116	117				
30	1	118					
31	1	119					

TB_GEN / TB_XYZ / TB_PRO / TB_ELE / TB_RES / TB_DIR / TB_ROT / TB_WEL / TB_EJE / TB_ACE / TB_ESP / TB_OUT / Variables / Documl

Figura 8.47. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de coordenadas de ejes de columnas y de elementos asociados a ejes de vigas (hoja *TB_EJE*)

- *Aceleración de la base para análisis modal cronológico*

La Figura 8.48 muestra las tablas de acelerogramas en direcciones x e y almacenadas en la hoja *TB_ACE*, con las que se construyó la Gráfica 8.32 de aceleración de la base.

ACELEROGRAMA EN DIRECCIÓN X GLOBAL

PEER NGA STRONG MOTION DATABASE RECORD
KOBE 01/16/95 2 046, KAKOGAWA, 00 0 (CUE)
ACCELERATION TI ME HISTORY IN UNI TS OF G
4096 0.0100 NPTS, DT

ACELEROGRAMA EN DIRECCIÓN Y GLOBAL

PEER NGA STRONG MOTION DATABASE RECORD
KOBE 01/16/95 2 046, KAKOGAWA, 09 0 (CUE)
ACCELERATION TI ME HISTORY IN UNI TS OF G
4096 0.0100 NPTS, DT

13	-6.72E-07	-2.00E-07	2.58E-06	8.55E-06	1.17E-05	9.42E-07	4.80E-07	-1.72E-06	-4.68E-06	1.62E-07
14	1.57E-06	-1.84E-05	-4.62E-05	-6.48E-05	-5.40E-05	1.41E-05	2.44E-05	1.31E-05	-6.97E-06	-1.75E-05
15	-4.11E-05	-4.35E-05	-4.54E-05	-3.57E-05	3.48E-05	-1.62E-05	2.45E-05	8.51E-05	9.01E-05	3.38E-05
16	1.93E-04	2.81E-04	2.58E-04	2.03E-04	6.99E-05	-3.70E-05	-1.03E-04	-1.28E-04	-1.05E-04	-6.55E-05
17	-4.19E-05	-1.64E-04	-2.59E-04	-2.34E-04	-2.26E-04	-5.55E-05	-9.34E-05	-1.10E-04	9.17E-05	3.46E-04
18	-4.19E-04	-4.89E-04	-2.32E-04	-4.10E-06	1.51E-04	4.04E-04	3.58E-04	4.56E-04	6.29E-04	7.28E-04
19	3.65E-05	-1.80E-04	-9.95E-05	1.98E-06	-8.88E-05	6.39E-04	2.90E-04	-3.59E-06	5.43E-05	1.98E-04
20	1.24E-04	8.19E-04	1.24E-03	9.58E-04	5.96E-04	3.02E-04	2.90E-04	-1.32E-05	-6.00E-04	-1.00E-03

TB_GEN / TB_XYZ / TB_PRO / TB_ELE / TB_RES / TB_DIR / TB_ROT / TB_WEL / TB_EJE / TB_ACE / TB_ESP / TB_OUT / Variables / Documl

Figura 8.48. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de aceleración de la base (hoja *TB_ACE*)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ACELEROGRAMA EN DIRECCIÓN X GLOBAL						ACELEROGRAMA EN DIRECCIÓN Y GLOBAL				
3	PEER NGA STRONG MOTION DATABASE RECORD						PEER NGA STRONG MOTION DATABASE RECORD				
4	KOBE 01/16/95 2 046, KAKOGAWA, 00 0 (CUE)						KOBE 01/16/95 2 046, KAKOGAWA, 09 0 (CUE)				
5	ACCELERATION TI ME HISTORY IN UNI TS OF G						ACCELERATION TI ME HISTORY IN UNI TS OF G				
6	4096 0.0100 NPTS, DT						4096 0.0100 NPTS, DT				
826	-4.06E-06	-3.08E-06	-1.92E-06	-3.19E-07	1.58E-06		-1.36E-05	-1.22E-05	-1.17E-05	-1.15E-05	-1.16E-05
827	3.81E-06	6.12E-06	8.36E-06	1.04E-05	1.21E-05		-1.16E-05	-1.14E-05	-1.11E-05	-1.08E-05	-1.05E-05
828	1.35E-05	1.47E-05	1.58E-05	1.68E-05	1.76E-05		-1.02E-05	-1.02E-05	-1.04E-05	-1.08E-05	-1.13E-05
829	1.84E-05	1.91E-05	1.97E-05	2.02E-05	2.06E-05		-1.17E-05	-1.20E-05	-1.23E-05	-1.25E-05	-1.26E-05
830	2.09E-05	2.11E-05	2.13E-05	2.15E-05	2.15E-05		-1.27E-05	-1.29E-05	-1.30E-05	-1.31E-05	-1.32E-05
831	2.15E-05	2.15E-05	2.14E-05	2.13E-05	2.10E-05		-1.32E-05	-1.33E-05	-1.34E-05	-1.34E-05	-1.34E-05
832	2.08E-05						-1.35E-05				
833											

TB_GEN / TB_XYZ / TB_PRO / TB_ELE / TB_RES / TB_DIR / TB_ROT / TB_WEL / TB_EJE / TB_ACE / TB_ESP / TB_OUT / Variables / Docum

Figura 8.48. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de aceleración de la base (hoja *TB_ACE*) (*cont.*)

- *Espectro de pseudo-aceleraciones para análisis modal espectral*

La Figura 8.49 muestra los datos del espectro de pseudo – aceleraciones de la hoja *TB_ESP* con los que se construyó la Gráfica 8.2. El número de parejas de datos es 12, como se especificó en la hoja *TB_GEN*.

	A	B	C
1	ESPECTRO DE PSEUDO-ACELERACIONES		
2			
3	Dato Nº	t (seg)	S_a / g
4	1	0.000	0.731
5	2	0.560	0.731
6	3	0.804	0.507
7	4	1.048	0.389
8	5	1.292	0.315
9	6	1.536	0.265
10	7	1.780	0.229
11	8	2.024	0.201
12	9	2.268	0.179
13	10	2.512	0.162
14	11	2.756	0.148
15	12	3.000	0.136
16			

TB_ACE / TB_ESP / TB_OUT / Var

Figura 8.49. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Espectro de pseudo-aceleraciones (hoja *TB_ESP*)

8.2.4. Resultados del análisis modal

A continuación se muestran los resultados más representativos del análisis modal del pórtico espacial tomado como ejemplo, a través de las tablas de datos escritas en la hoja *TB_OUT*. El formato de la tablas resumen fueeditado para facilitar su interpretación.

- *Matriz de rigidez lateral*

La Tabla 8.26 muestra la matriz de rigidez lateral $[k_\phi]$ que considera los 9 grados de libertad dinámicos de la estructura. El significado de cada columna de la matriz fue descrito para el pórtico plano tomado anteriormente como ejemplo. Cada fuerza y cada momento tiene unidades de kN o $kN * m$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Matriz de rigidez lateral - KDP() (9x9)

$u_x^{(1)}$	$u_y^{(1)}$	$\theta_z^{(1)}$	$u_x^{(2)}$	$u_y^{(2)}$	$\theta_z^{(2)}$	$u_x^{(3)}$	$u_y^{(3)}$	$\theta_z^{(3)}$	
226294.9	0.0	469131.4	-359383.3	0.0	-195292.5	153036.1	0.0	202707.3	$u_x^{(1)}$
0.0	211951.2	0.0	0.0	-342227.7	0.0	0.0	149962.0	0.0	$u_y^{(1)}$
469131.4	0.0	32229689.3	-902469.9	0.0	-43593895.8	500986.9	0.0	13935911.4	$\theta_z^{(1)}$
-359383.3	0.0	-902469.9	866056.0	0.0	965431.2	-673487.4	0.0	-1123476.7	$u_x^{(2)}$
0.0	-342227.7	0.0	0.0	844579.8	0.0	0.0	-669099.1	0.0	$u_y^{(2)}$
-195292.5	0.0	-43593895.8	965431.2	0.0	110903787.2	-1118758.6	0.0	-85488172.5	$\theta_z^{(2)}$
153036.1	0.0	500986.9	-673487.4	0.0	-1118758.6	986257.3	0.0	1866963.1	$u_x^{(3)}$
0.0	149962.0	0.0	0.0	-669099.1	0.0	0.0	984222.0	0.0	$u_y^{(3)}$
202707.3	0.0	13935911.4	-1123476.7	0.0	-85488172.5	1866963.1	0.0	132328111.5	$\theta_z^{(3)}$

Tabla 8.26. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de rigidez lateral *KDP()*

- *Coordenadas de centros de rigidez*

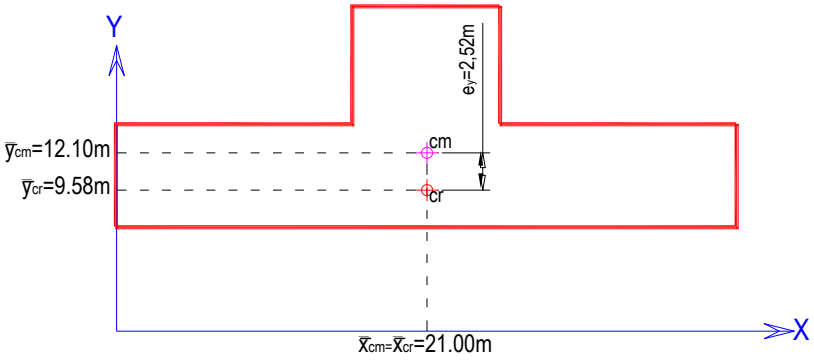
Como se trata de un pórtico espacial, UNDIN calcula las coordenadas de los centros de rigidez X_{cr} y Y_{cr}, asi como las excentricidades e_x y e_y que existen entre estos y los centros de masa de los diafragmas. Los resultados se adjuntan al final de la tabla de coordenadas de los centros de masa *DRX()* como lo muestra la Tabla 8.27.

Coordenadas de centros de masa y de rigidez - DRX() (3x7)

Diafragma	X_{cm} (m)	Y_{cm} (m)	Z_{cm} (m)	e_x (m)	e_y (m)	X_{cr} (m)	Y_{cr} (m)
1	21.000	12.100	13.000	0.000	-2.518	21.000	9.582
2	21.000	10.120	9.000	0.000	-1.386	21.000	8.734
3	21.000	10.120	5.000	0.000	-1.795	21.000	8.325

Tabla 8.27. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tabla de coordenadas de centros de masa y de rigidez *DRX()*

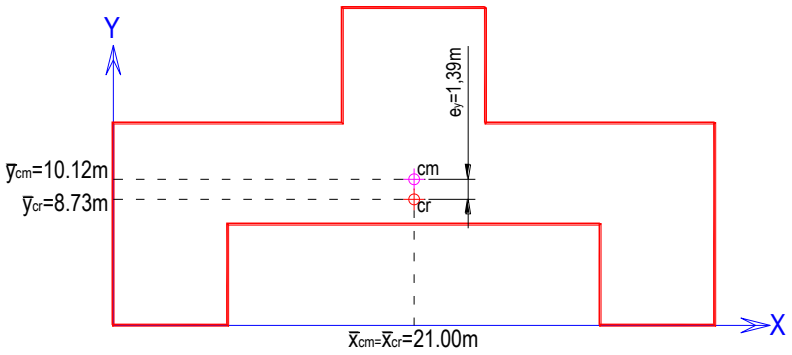
Los resultados anteriores verifican la suposición hecha al comienzo, relacionada con la no coincidencia del centro de masa y del centro de rigidez de cada diafragma, debido a la presencia de las columnas de gran sección colocadas intencionalmente sobre el eje B. En este caso los centros de rigidez están desplazados en dirección y respecto a los centros de masa, como se muestra en la Figura 8.50.



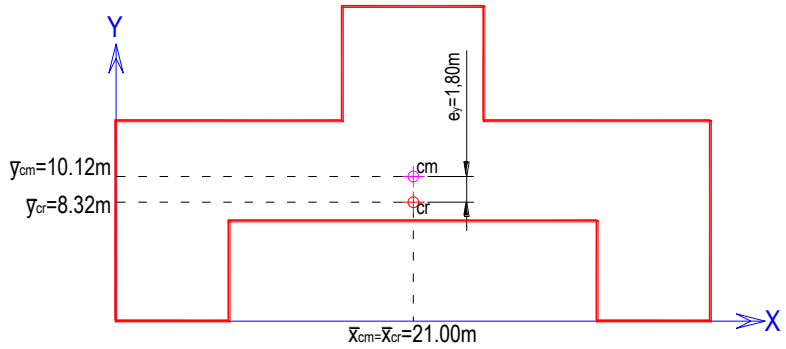
a) Diafragma N°1 de cubierta

Figura 8.50. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Posición de los centros de masa y de rigidez de los diafragmas

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



b) Diafragma N°2 del tercer nivel



c) Diafragma N°3 del segundo nivel

Figura 8.50. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Posición de los centros de masa y de rigidez de los diafragmas (*cont.*)

- *Matriz de masa*

La Tabla 8.28 muestra la matriz de masa *MDR()* diagonal, cuyo tamaño coincide con el tamaño de la matriz de rigidez lateral $[k_\phi]$. Esta matriz contiene las masas en Mg y los momentos de inercia en $Mg * m^2$ de cada diafragma, organizados de acuerdo a la numeración de los grados de libertad dinámicos (*ver Figura 8.39*).

Matriz de masa - MDR() (9x9)

$u_x^{(1)}$	$u_y^{(1)}$	$\theta_z^{(1)}$	$u_x^{(2)}$	$u_y^{(2)}$	$\theta_z^{(2)}$	$u_x^{(3)}$	$u_y^{(3)}$	$\theta_z^{(3)}$	
374.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$u_x^{(1)}$
0.0	374.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$u_y^{(1)}$
0.0	0.0	49049.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$\theta_z^{(1)}$
0.0	0.0	0.0	486.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$u_x^{(2)}$
0.0	0.0	0.0	0.0	486.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$u_y^{(2)}$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	89052.8	0.0	0.0	0.0	$\theta_z^{(2)}$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	486.0	0.0	0.0	$u_x^{(3)}$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	486.0	0.0	$u_y^{(3)}$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	89052.8	$\theta_z^{(3)}$

Tabla 8.28. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de masa *MDR()*

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

- *Matriz de amortiguamiento por superposición de matrices modales*

La Tabla 8.29 muestra la matriz de amortiguamiento $[c_\phi]$ construida por el criterio de superposición de matrices modales. Su tamaño es similar al de las matrices $[m]$ y $[k_\phi]$. Los resultados se encuentran almacenados en el arreglo *AMR()*.

Matriz de amortiguamiento - AMR() (9x9)

$u_x^{(1)}$	$u_y^{(1)}$	$\theta_z^{(1)}$	$u_x^{(2)}$	$u_y^{(2)}$	$\theta_z^{(2)}$	$u_x^{(3)}$	$u_y^{(3)}$	$\theta_z^{(3)}$	
727.7	0.0	811.0	-632.8	0.0	168.7	66.1	0.0	151.7	$u_x^{(1)}$
0.0	705.9	0.0	0.0	-614.8	0.0	0.0	67.6	0.0	$u_y^{(1)}$
811.0	0.0	108406.3	-1099.1	0.0	-83440.1	321.8	0.0	2392.5	$\theta_z^{(1)}$
-632.8	0.0	-1099.1	1710.6	0.0	812.3	-861.9	0.0	-860.2	$u_x^{(2)}$
0.0	-614.8	0.0	0.0	1693.2	0.0	0.0	-864.1	0.0	$u_y^{(2)}$
168.7	0.0	-83440.1	812.3	0.0	262519.9	-879.2	0.0	-130140.0	$\theta_z^{(2)}$
66.1	0.0	321.8	-861.9	0.0	-879.2	2004.0	0.0	2061.0	$u_x^{(3)}$
0.0	67.6	0.0	0.0	-864.1	0.0	0.0	2007.7	0.0	$u_y^{(3)}$
151.7	0.0	2392.5	-860.2	0.0	-130140.0	2061.0	0.0	316189.3	$\theta_z^{(3)}$

Tabla 8.29. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de amortiguamiento *AMR()*

- *Periodos, frecuencias y modos de vibración natural*

La Tabla 8.30 muestra la matriz $[\Phi]$ con los 9 modos de vibración natural de la estructura. La obtención y la organización de los modos, los periodos y las frecuencias se describió en el Capítulo 3.

Los resultados obtenidos para esta estructura indican que los modos 1, 3, 4, 6, 7 y 9 inducen simultáneamente desplazamientos en dirección x y rotaciones en dirección z en los centros de masa, mostrando el acoplamiento entre los desplazamientos y las rotaciones de los diafragmas en las direcciones indicadas. Por otro lado los modos 2, 5 y 8 inducen solamente desplazamientos en dirección x en los centros de masa. Este comportamiento es el esperado, teniendo en cuenta la geometría del pórtico y las posiciones relativas de los centros de masa y de rigidez de los diafragmas.

La matriz de modos de vibración también indica que la estructura es más flexible en dirección x que en dirección y, teniendo en cuenta que el primer modo es principalmente traslacional en x, mientras que el segundo modo es traslacional en y.

Matriz de modos de vibración ortonormalizados - MOV() (9x9)

$u_x^{(1)}$	$u_y^{(1)}$	$\theta_z^{(1)}$	$u_x^{(2)}$	$u_y^{(2)}$	$\theta_z^{(2)}$	$u_x^{(3)}$	$u_y^{(3)}$	$\theta_z^{(3)}$	
0.0355	0.0000	0.0153	0.0202	0.0000	-0.0236	0.0062	0.0000	-0.0132	$u_x^{(1)}$
0.0000	0.0390	0.0000	0.0000	-0.0311	0.0000	0.0000	-0.0138	0.0000	$u_y^{(1)}$
-0.00127	0.00000	0.00266	-0.00229	0.00000	-0.00214	-0.00124	0.00000	-0.00060	$\theta_z^{(1)}$
0.0235	0.0000	0.0138	-0.0123	0.0000	0.0149	-0.0113	0.0000	0.0285	$u_x^{(2)}$
0.0000	0.0269	0.0000	0.0000	0.0203	0.0000	0.0000	0.0303	0.0000	$u_y^{(2)}$
-0.00100	0.00000	0.00199	0.00088	0.00000	0.00069	0.00212	0.00000	0.00072	$\theta_z^{(2)}$
0.0115	0.0000	0.0062	-0.0191	0.0000	0.0239	0.0097	0.0000	-0.0293	$u_x^{(3)}$
0.0000	0.0128	0.0000	0.0000	0.0301	0.0000	0.0000	-0.0315	0.0000	$u_y^{(3)}$
-0.00055	0.00000	0.00108	0.00175	0.00000	0.00125	-0.00212	0.00000	-0.00081	$\theta_z^{(3)}$

Tabla 8.30. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de modos de vibración ortonormalizados *MOV()*

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La Tabla 8.31 contiene la frecuencia en rad/s y el periodo de vibración natural en segundos, correspondiente a cada modo de vibración natural.

Frecuencias y periodos de vibración natural - FRN(), PER()

Modo	$\omega_n\ (rad/s)$	$T_n\ (s)$
1	7.84	0.8010
2	8.10	0.7754
3	9.51	0.6605
4	26.15	0.2403
5	27.87	0.2255
6	29.95	0.2098
7	48.67	0.1291
8	59.05	0.1064
9	60.86	0.1032

Tabla 8.31. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Frecuencias de vibración *FRN()* y modos de vibración natural *PER()*

Este pórtico también se analizó con el programa SAP2000© para verificar los resultados. La Figura 8.51 muestra algunas imágenes el modelo matemático del pórtico.

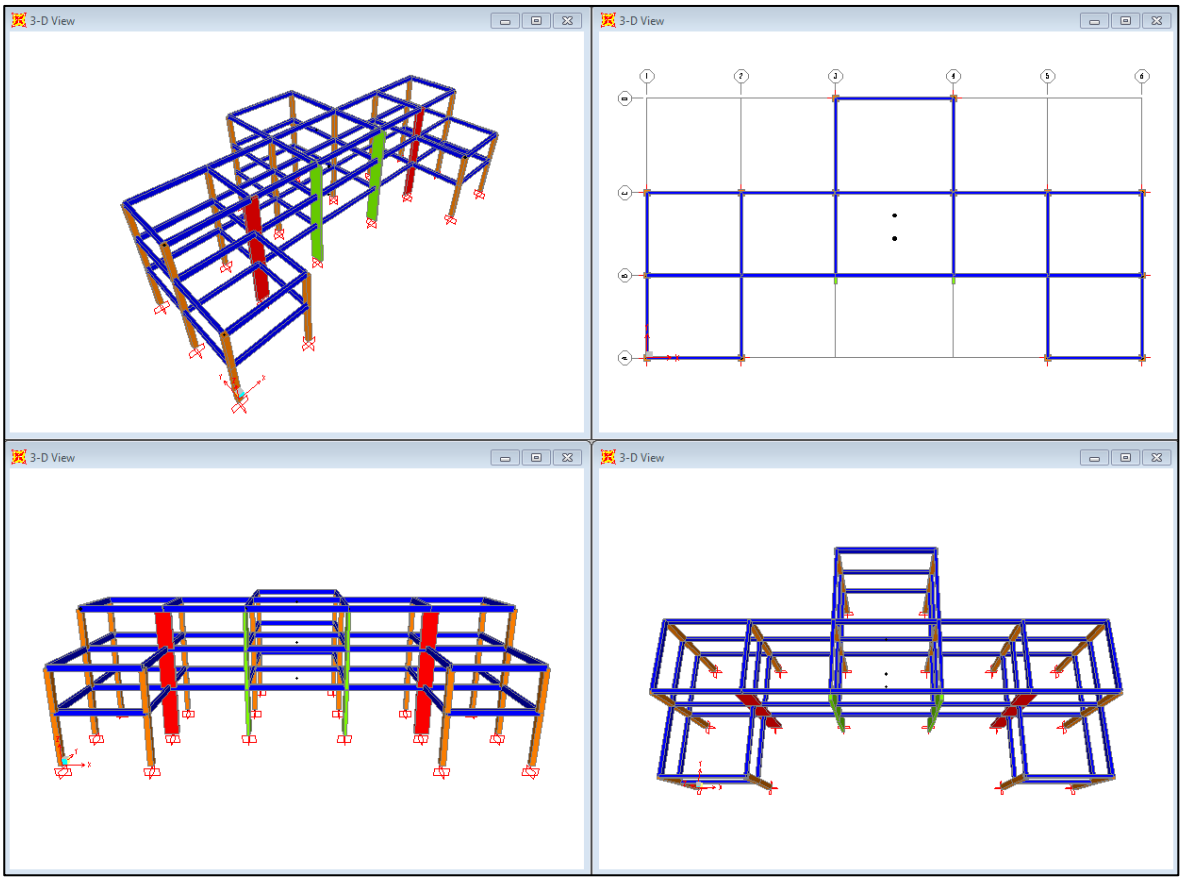


Figura 8.51. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Análisis del pórtico espacial en SAP2000

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

A modo de verificación la Figura 8.52 muestra los tres primeros modos de vibración natural del mismo pórtico junto con sus respectivos periodos, obtenidos con SAP2000©. Se verifica que los valores numéricos de los periodos son idénticos y que las formas de los modos coinciden con lo indicado en las 3 primeras columnas de $[\Phi]$.

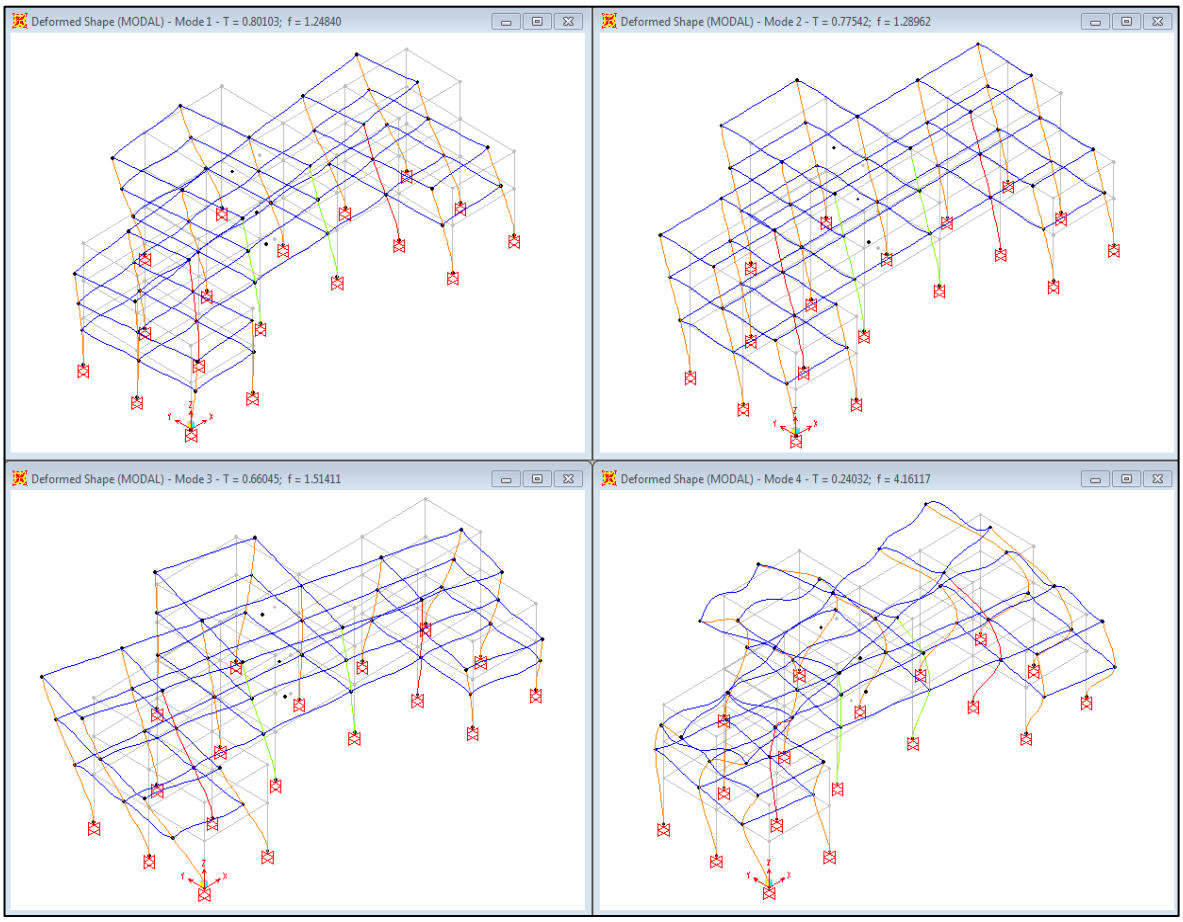


Figura 8.52. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Modos de vibración natural obtenidos con SAP2000

- *Matrices de influencia y matriz de coeficientes de participación*

La Tabla 8.32 corresponde a la matriz de influencia $[\gamma]$, en la que cada fila corresponde a un grado de libertad dinámico y cada columna corresponde a una componente de aceleración de la base considerada en el análisis. Para el caso de este pórtico espacial el tamaño es 9X3, aún cuando $\ddot{\theta}_{gz}$ (*la aceleración angular de la base en dirección z*) se supuso igual a cero.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Matriz de influencia - GAM() (9x3)

u_{gx}	u_{gy}	θ_{gz}	
1.000	0.000	0.000	$u_x^{(1)}$
0.000	1.000	0.000	$u_y^{(1)}$
0.000	0.000	1.000	$\theta_z^{(1)}$
1.000	0.000	0.000	$u_x^{(2)}$
0.000	1.000	0.000	$u_y^{(2)}$
0.000	0.000	1.000	$\theta_z^{(2)}$
1.000	0.000	0.000	$u_x^{(3)}$
0.000	1.000	0.000	$u_y^{(3)}$
0.000	0.000	1.000	$\theta_z^{(3)}$

Tabla 8.32. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de influencia *GAM()*

Se observa que los coeficientes de la matriz de influencia son consistentes con los desplazamientos que experimentarían los centros de masa cuando se dan desplazamientos unitarios a la base y la estructura se desplaza como cuerpo rígido. Por ejemplo, si se revisan los coeficientes de la primera columna, cuando la base se desplaza una cantidad unitaria en dirección x, solamente los grados de libertad $u_x^{(1)}, u_x^{(2)}\ y\ u_x^{(3)}$ se desplazan la misma cantidad unitaria, mientras que los grados de libertad restantes no se desplazan, es decir $u_y^{(1)} = u_y^{(2)} = u_y^{(3)} = \theta_y^{(1)} = \theta_y^{(2)} = \theta_y^{(3)} = 0$.

La Tabla 8.33 corresponde a la matriz de factores de participación $[\alpha]$. Como en el caso de $[\gamma]$, cada fila corresponde a un grado de libertad dinámico y cada columna corresponde a una componente de aceleración de la base.

Coeficientes de Participación - ALF() (9x3)

Modo	α_x	α_y	α_z
1	30.290	0.000	-200.587
2	0.000	33.882	0.000
3	15.450	0.000	403.132
4	-7.676	0.000	121.515
5	0.000	12.854	0.000
6	10.004	0.000	67.781
7	1.559	0.000	-60.644
8	0.000	-5.726	0.000
9	-5.327	0.000	-36.962

Tabla 8.33. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de coeficientes de participación *ALF()*

Un coeficiente $\alpha_{ij} = 0$ indica que cuando actúe la componente de aceleración de la base en dirección *j*, el modo *i* no se excitará, es decir, no participará o no aportará a la respuesta de la estructura.

Cuando el movimiento sísmico actúe en dirección x, los modos de vibración 2, 5 y 7 no aportarán a la respuesta total ya que los coeficientes de participación $\alpha_{21}, \alpha_{51}\ y\ \alpha_{71}$, son cero, pero si el movimiento sísmico actúa en dirección y, estos mismos modos serán los únicos que aporten a la respuesta de la estructura, puesto que los coeficientes de participa-

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

ción α_{22}, α_{52} y α_{72} son los únicos diferentes a cero. Cuando actúe únicamente una componente de aceleración angular en la base $\ddot{\theta}_{gz}$ diferente de cero, los modos 1, 3, 4, 6, 7 y 9 serán los que aporten a la respuesta total de la estructura.

- *Matrices de masa modal efectiva y de masa total de la estructura*

La Tabla 8.34 contiene la matriz de masa modal efectiva $[\overline{m}]$ con las masas y los momentos de inercia que se activan en cada modo de vibración, cuando actúa cada componente de aceleración de la base.

La primera parte de la tabla contiene los valores absolutos mientras que la segunda parte contiene los mismos valores, pero como porcentaje de la masa total de la estructura activada por cada componente $\ddot{u}_{gx}$, $\ddot{u}_{gy}$ y $\ddot{\theta}_{gz}$.

Masa Modal Efectiva - MME() y MMP() (9x3)

Modo	m_x (Mg)	m_y (Mg)	$I_{z,cm}$ (Mg*m^2)	m_x (%)	m_y (%)	$I_{z,cm}$ (%)
1	917.50	0.00	40235.00	68.17	0.00	17.71
2	0.00	1147.99	0.00	0.00	85.29	0.00
3	238.69	0.00	162515.74	17.73	0.00	71.54
4	58.93	0.00	14765.99	4.38	0.00	6.50
5	0.00	165.23	0.00	0.00	12.28	0.00
6	100.08	0.00	4594.27	7.44	0.00	2.02
7	2.43	0.00	3677.73	0.18	0.00	1.62
8	0.00	32.78	0.00	0.00	2.44	0.00
9	28.38	0.00	1366.17	2.11	0.00	0.60

Tabla 8.34. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matrices de masa modal efectiva *MME()* y *MMP()*

Las tablas de masa modal efectiva dan una medida más clara de la magnitud en la que participa cada modo de vibración en la respuesta total de la estructura. De los resultados se observa que los 5 primeros modos de vibración son los que participan en mayor medida en la respuesta total del pórtico.

Los coeficientes de $[\overline{m}]$ indican que los dos primeros modos de vibración son principalmente traslacionales, mientras que el tercer modo es principalmente rotacional. Además indican que hay acoplamiento entre el desplazamiento en x y la rotación en z, y que no hay acoplamiento por el desplazamiento en dirección y.

La suma de los coeficientes de cada columna de $[\overline{m}]$ coincide con la suma total de las masas o de los momentos de inercia de los diafragmas rígidos de la estructura. Estos a su vez coinciden con los valores de la diagonal principal de la matriz $[M_T]$ de la Tabla 8.35.

Masa Total de la estructura - MTE() (3x3)

Dirección	m_x (Mg)	m_y (Mg)	$I_{z,cm}$ (Mg*m^2)
X	1346.0	0.0	0.0
Y	0.0	1346.0	0.0
Z	0.0	0.0	227154.9

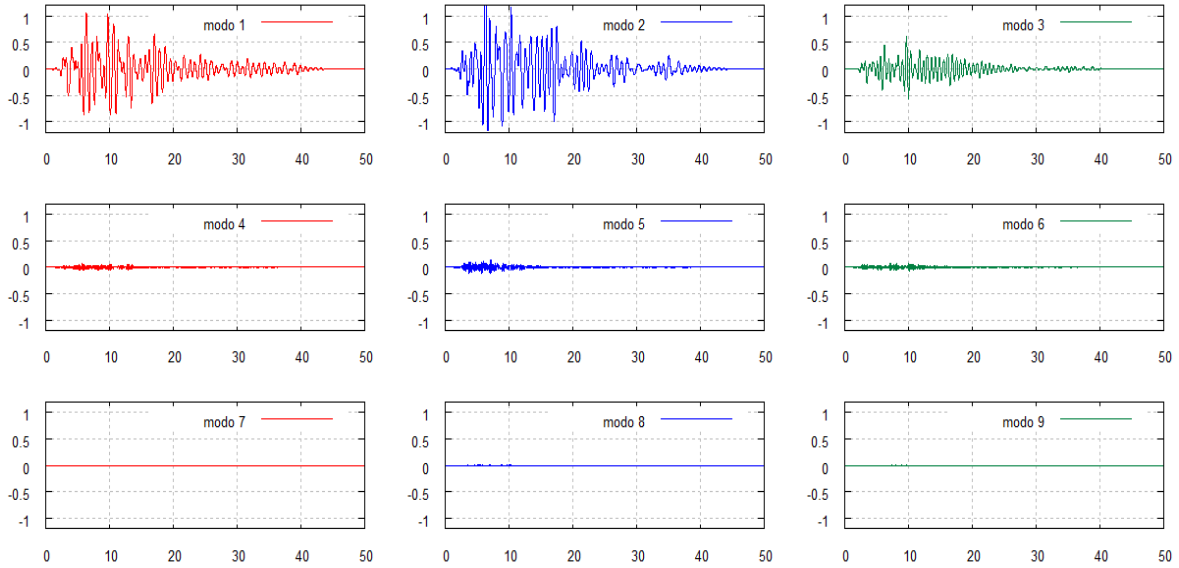
Tabla 8.35. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de masa total de la estructura *MTE()*

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

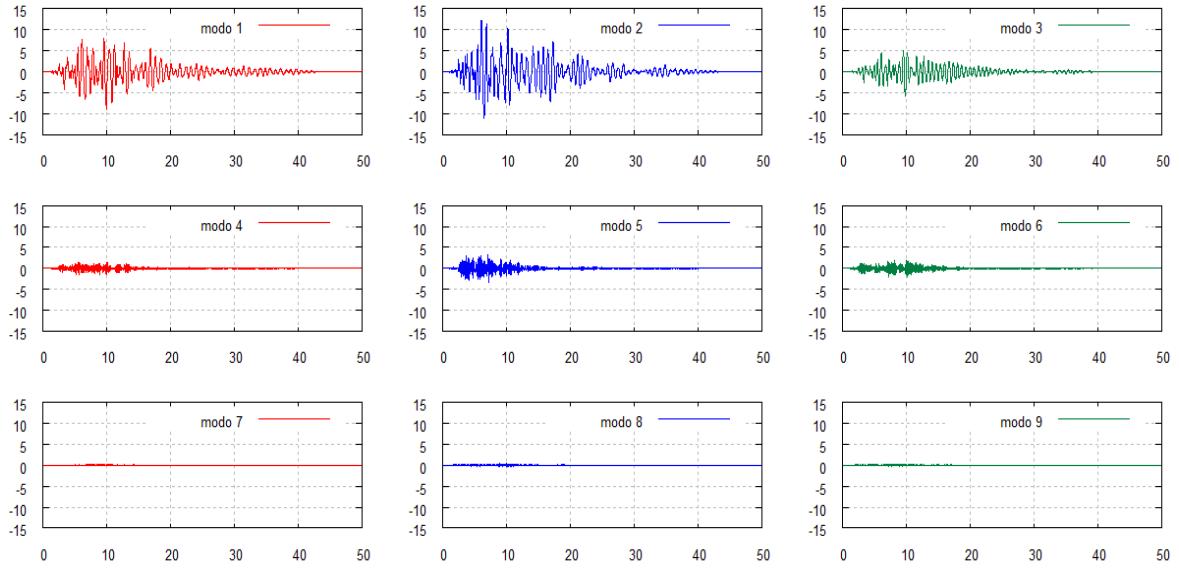
8.2.5. Resultados del análisis modal cronológico

- *Desplazamientos, velocidades y aceleraciones generalizadas*

La Gráfica 8.33, la Gráfica 8.34 y la Gráfica 8.35 muestran la variación en el tiempo de los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones generalizadas del pórtico espacial, en m, m/s y m/s^2 respectivamente.

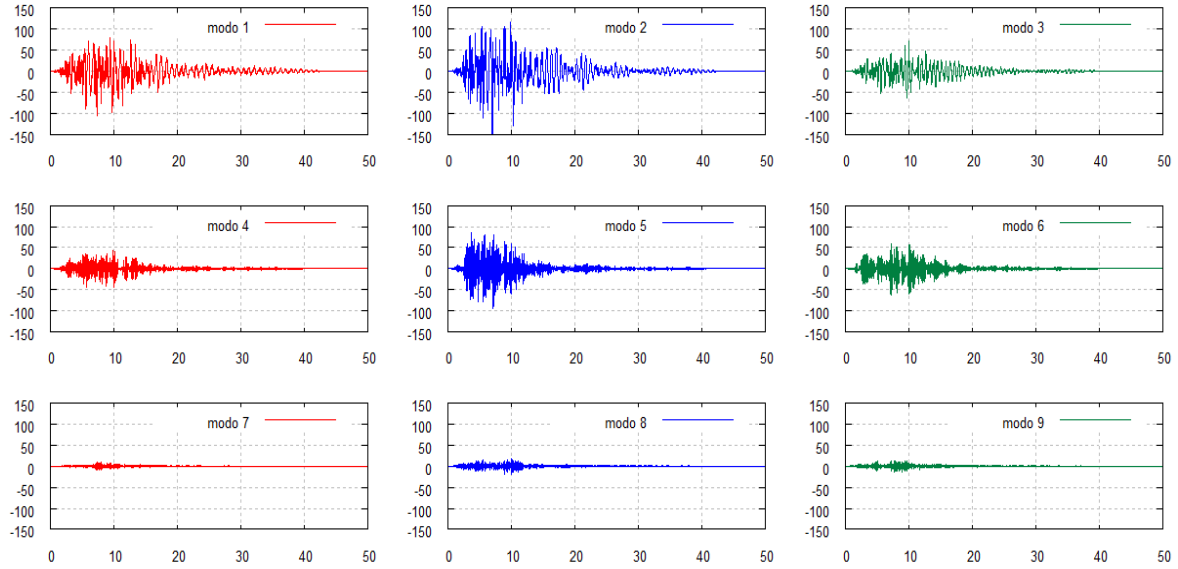


Gráfica 8.33. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos generalizados



Gráfica 8.34. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Velocidades generalizadas

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



Gráfica 8.35. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Aceleraciones generalizadas

Las anteriores gráficas se construyeron con los datos almacenados en los archivos *DCG.txt*, *VCG.txt* y *ACG.txt*. Cada subgráfica corresponde a un modo de vibración natural. Dependiendo el parámetro, solamente los primeros 5 o 6 modos de vibración son representativos, siendo despreciables los modos superiores restantes.

La Tabla 8.36 muestra los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones generalizadas máximas absolutas y los instantes de tiempo donde se presentan.

Desplazamientos, velocidades y aceleraciones generalizadas máximas

Modo de vibración	Desplazamientos		Velocidades		Aceleraciones	
	$\eta^{(i)}(m)$	$t(s)$	$\dot{\eta}^{(i)}(m/s)$	$t(s)$	$\ddot{\eta}^{(i)}(m/s^2)$	$t(s)$
1	1.048	6.38	8.875	9.96	105.600	7.33
2	1.626	6.30	12.073	6.09	179.956	6.99
3	0.621	9.69	5.775	9.81	72.132	10.00
4	0.071	5.67	1.539	5.62	45.217	10.00
5	0.140	7.16	3.304	7.21	92.967	7.16
6	0.070	8.19	1.968	10.13	63.492	7.17
7	0.005	7.35	0.211	7.38	9.698	7.35
8	0.009	8.93	0.371	9.98	19.506	10.07
9	0.006	7.25	0.254	7.22	13.686	8.93

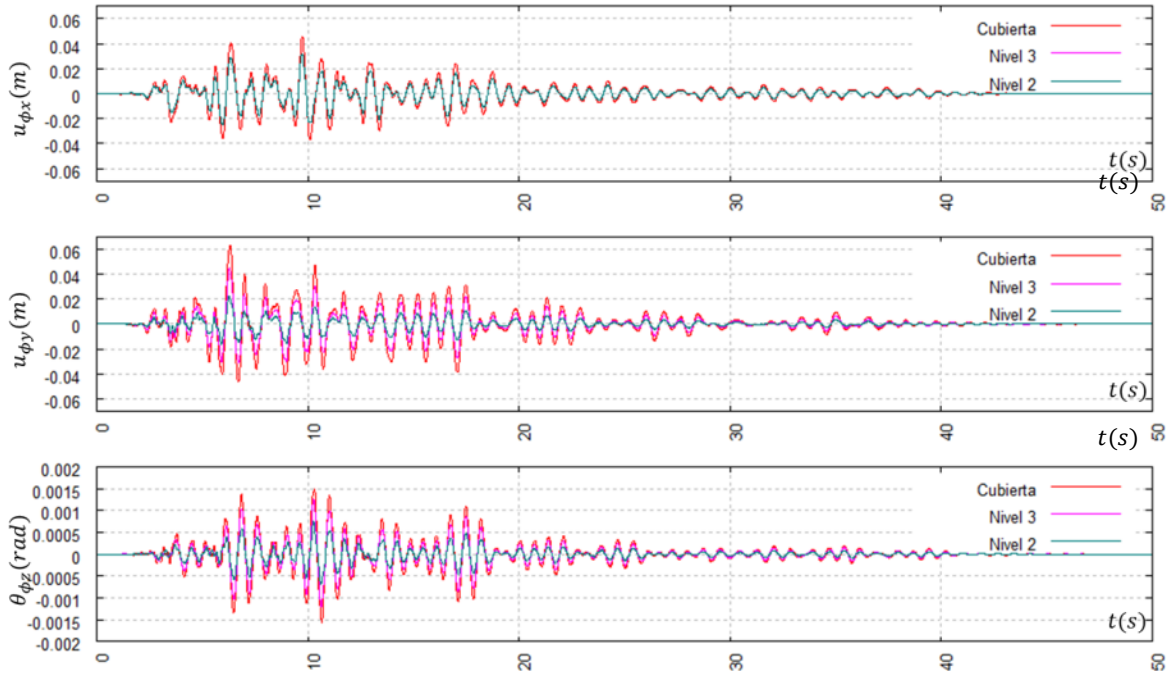
Tabla 8.36. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Coordenadas generalizadas máximas e instantes de tiempo correspondientes

- *Desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los centros de masa*

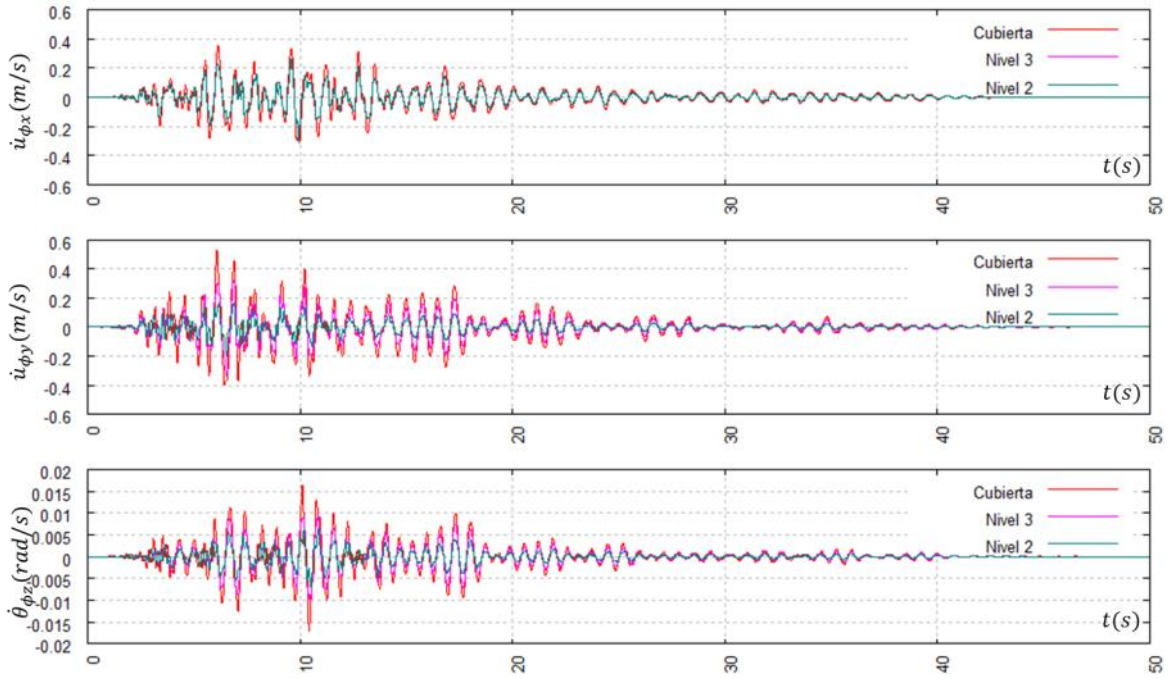
La Gráfica 8.36, la Gráfica 8.37 y la Gráfica 8.38 muestran los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones relativas a la base de los centros de masa del pórtico en m, m/s y m/s^2 respectivamente. Estas gráficas fueron construidas con los datos de los archivos

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

DCM,txt, *VCM,txt* y *ACM.txt*. Las cantidades asociadas a cada grado de libertad se separaron en las direcciones x, y, z para mejorar su visualización.

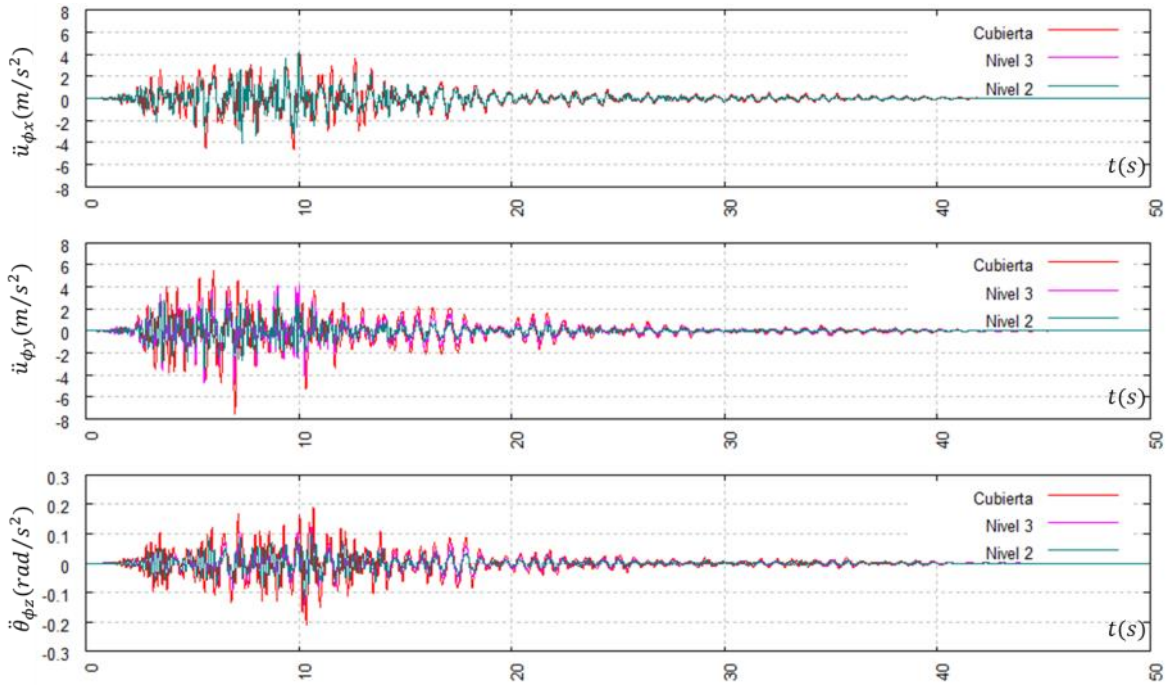


Gráfica 8.36. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos relativos a la base de centros de masa



Gráfica 8.37. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Velocidades relativas a la base de centros de masa

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



Gráfica 8.38. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Aceleraciones relativas a la base de centros de masa

La Tabla 8.37 muestra los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones máximas absolutas de los centros de masa y los instantes de tiempo donde estos se presentan.

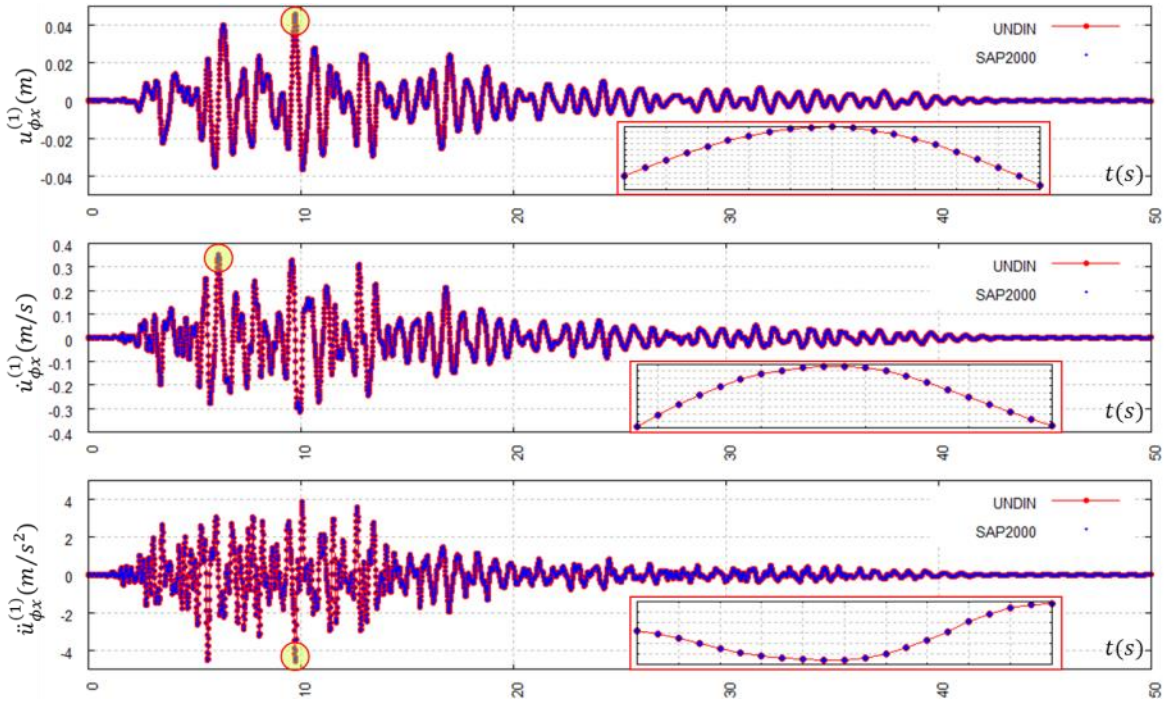
Desplazamientos, velocidades y aceleraciones máximas de centros de masa

Grado de libertad	Desplazamientos		Velocidades		Aceleraciones	
	$u_\phi^{(i)}(m)$	$t(s)$	$\dot{u}_\phi^{(i)}(m/s)$	$t(s)$	$\ddot{u}_\phi^{(i)}(m/s^2)$	$t(s)$
1	0.046	9.74	0.353	6.14	4.590	9.76
2	0.063	6.31	0.527	6.08	7.547	7.00
3	0.002	10.67	0.017	10.43	0.208	10.36
4	0.032	9.73	0.303	9.95	4.132	10.00
5	0.044	6.29	0.335	6.53	4.871	6.98
6	0.001	10.27	0.010	10.50	0.139	10.27
7	0.015	9.71	0.184	9.94	2.991	10.00
8	0.022	6.27	0.199	6.53	3.506	5.56
9	0.001	10.27	0.007	10.52	0.123	10.26

Tabla 8.37. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones máximas de los centros de masa de los diafragmas, e instantes de tiempo correspondientes

Como verificación de resultados la Gráfica 8.39 muestra el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en dirección x del centro de masa de cubierta, cantidades relativas a la base del pórtico y en coordenadas globales. Los resultados obtenidos utilizando UNDIN y SAP2000© son idénticos puesto que para solucionar las ecuaciones modales desacopladas se ha utilizado el mismo método.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

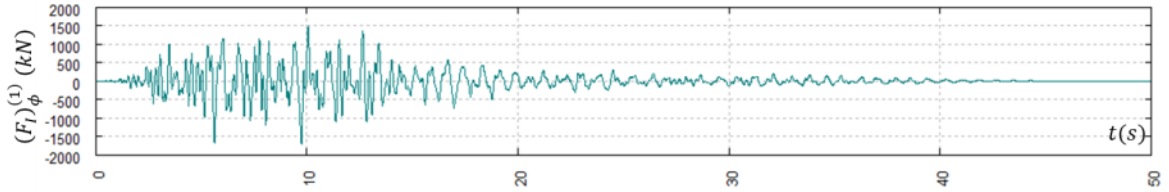


Gráfica 8.39. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones del centro de masa de cubierta, obtenidas con UNDIN y SAP2000

- *Acciones inerciales, de amortiguamiento, equivalentes y externas y verificación de la ecuación de movimiento*

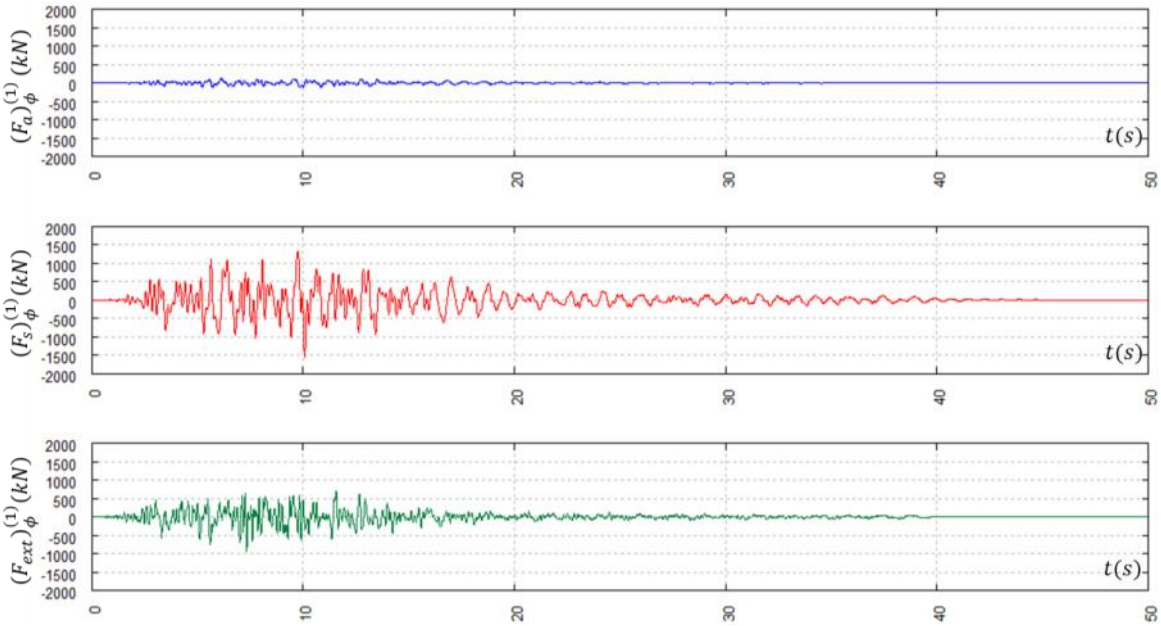
Como en el ejemplo del pórtico plano, la información almacenada en los archivos de texto *FIN.txt, FAM.txt, FEQ.txt* y *FEX.txt* permite conocer la variación en el tiempo de las acciones inerciales, de amortiguamiento, equivalentes y externas que actúan en los centros de masa y que intervienen en el sistema de ecuaciones simultáneas de movimiento.

A modo de ejemplo la Gráfica 8.40 muestra la variación en el tiempo de las fuerzas aplicadas en direccion x en el centro de masa del Diafragma 1. Para su construcción se utilizaron las dos primeras columnas de los archivos de texto correspondientes. Las fuerzas están en kN.



Gráfica 8.40. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones inercial, de amortiguamiento, equivalente y externa en dirección x, que actúan en el centro de masa del Diafragma 1

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



Gráfica 8.40 Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones inercial, de amortiguamiento, equivalente y externa en dirección x, que actúan en el centro de masa del Diafragma 1 (*cont.*)

La Tabla 8.38 muestra las acciones máximas absolutas aplicadas en los centros de masa junto con los instantes de tiempo donde estas se presentan. Cada fila corresponde a un grado de libertad dinámico de la estructura.

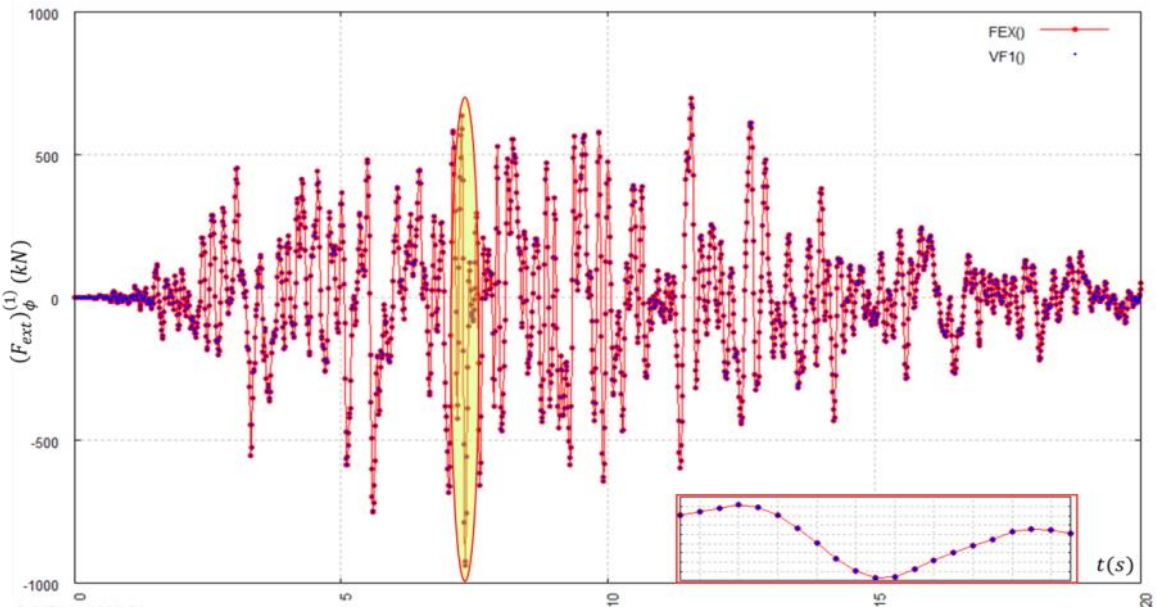
Acciones inerciales, de amortiguamiento y equivalentes máximas

Grado de libertad	Fuerzas inerciales		Fuerzas de amortiguamiento		Fuerzas equivalentes	
	$(F_I)_\phi^{(i)}(m)$	$t(s)$	$(F_a)_\phi^{(i)}(m/s)$	$t(s)$	$(F_s)_\phi^{(i)}(m/s^2)$	$t(s)$
1	1716.6	9.76	125.4	9.84	1545.0	10.09
2	2822.7	7.00	204.0	6.07	1860.0	6.35
3	10191.7	10.36	1090.7	10.43	10365.1	10.36
4	2008.1	10.00	168.9	9.95	1341.6	10.00
5	2367.1	6.98	168.7	6.54	1859.1	6.25
6	12390.9	10.27	963.3	10.54	12349.6	10.27
7	1453.7	10.00	129.9	9.93	1149.0	10.19
8	1703.9	5.56	141.4	7.20	1867.8	7.15
9	10959.1	10.26	988.6	10.20	10848.1	10.26

Tabla 8.38. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones máximas aplicadas en los centros de masa e instantes de tiempo correspondientes

La Gráfica 8.41 muestra la variación en el tiempo de la fuerza externa aplicada en dirección x en el centro de masa del Diafragma 1, junto con su respectiva verificación. Para su construcción se utilizaron las dos primeras columnas de *FEX.txt y VF1.txt*.

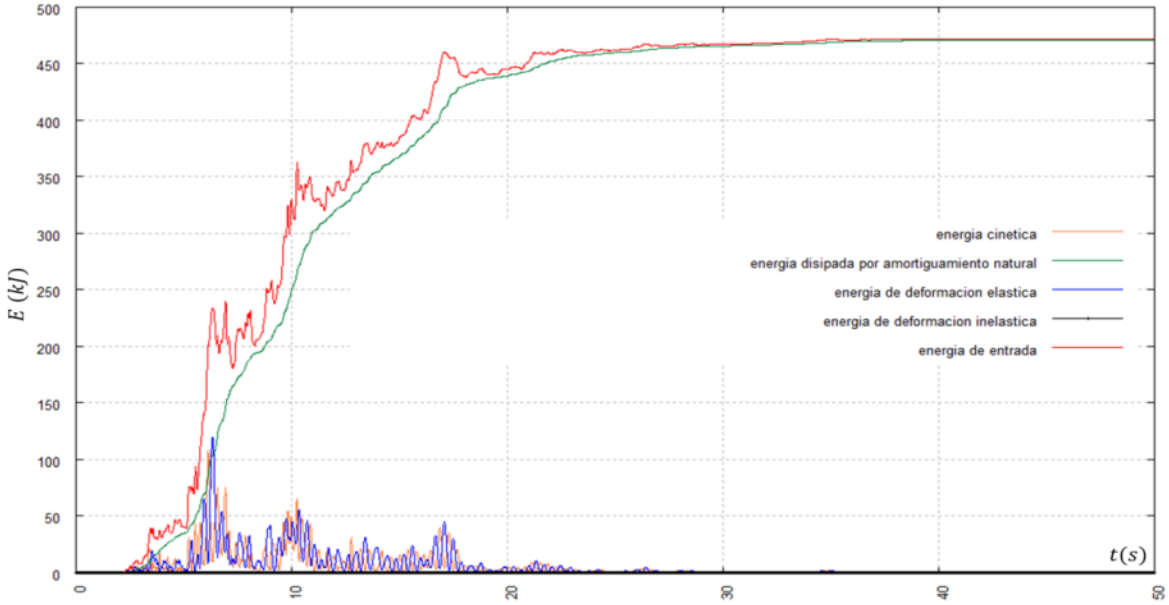
© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



Gráfica 8.41. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de la ecuación de movimiento del grado de libertad dinámico 1

- *Verificación de la ecuación de balance de energía*

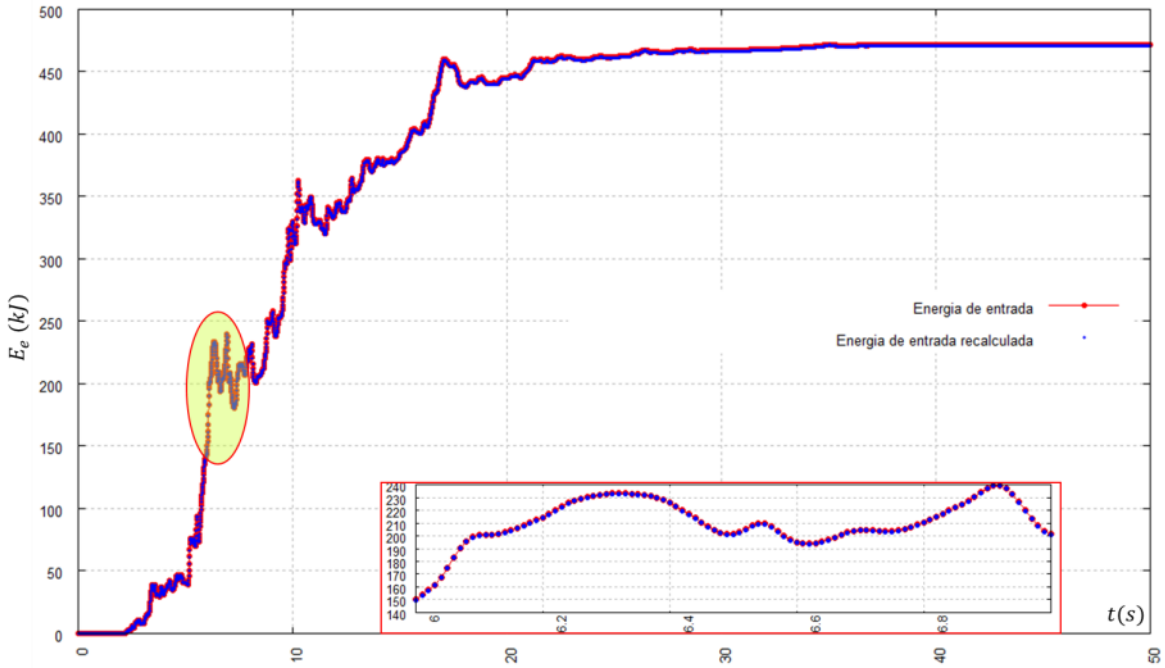
La Gráfica 8.42 muestra la variación en el tiempo de las energías cinética, disipada por amortiguamiento natural, de deformación elástica y de entrada del pórtico, todas en kJ. La gráfica fue construida a partir de la información almacenada en el archivo *ENE.txt*. La energía de deformación inelástica es cero en todos los instantes de tiempo.



Gráfica 8.42. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Componentes de la ecuación de balance de energía

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La Gráfica 8.43 muestra la energía de entrada E_e calculada por integracion numérica y utilizando la expresión $E_e = E_c + E_a + E_{ss} + E_{sy}$. Los resultados son practicamente idénticos, indicando que la respuesta estimada de la estructura posee una precisión suficiente.



Gráfica 8.43. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de la ecuación de balance de energía

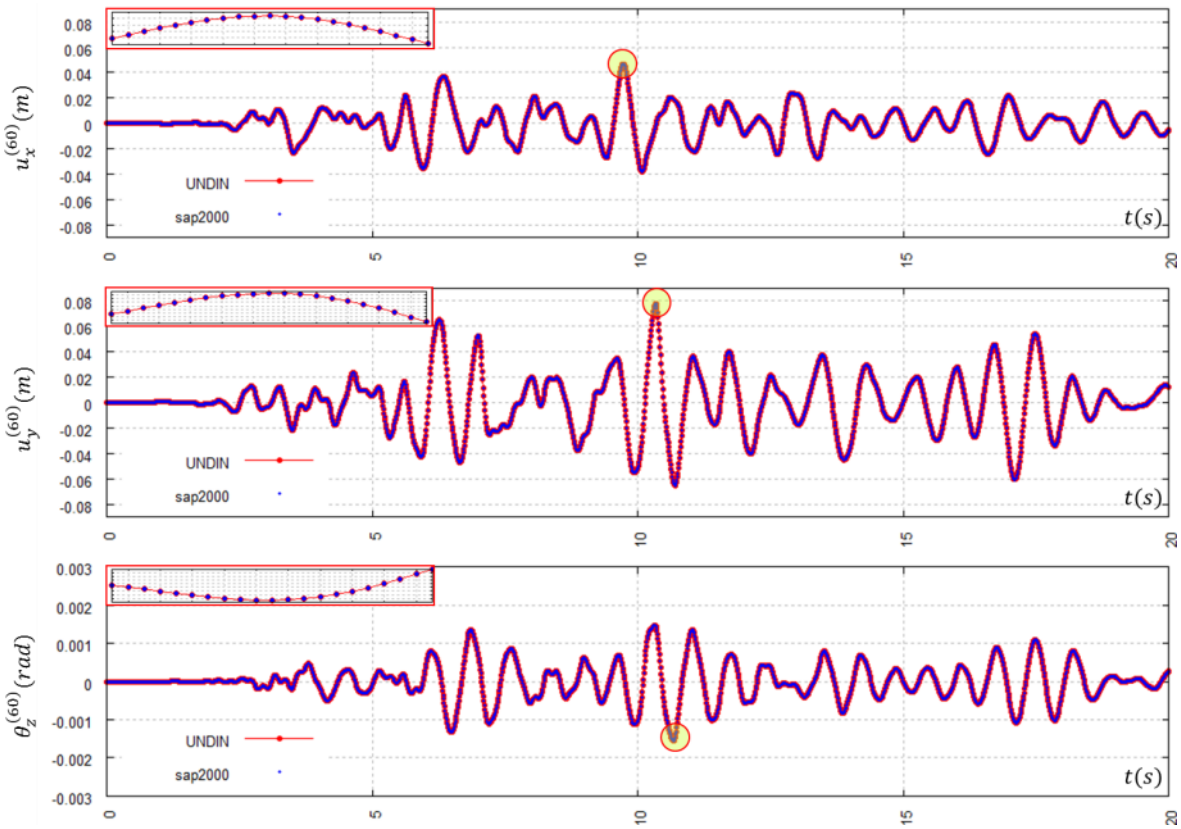
- *Desplazamientos en coordenadas globales de nudos*

Como se describió para el pórtico plano del ejemplo anterior, la tabla almacenada en el archivo *DNG.txt* permite conocer la variación en el tiempo de los desplazamientos relativos a la base y en coordenadas globales de los nudos de la estructura.

A modo de ejemplo la Gráfica 8.44 muestra la variación en el tiempo de los desplazamientos u_x y u_y, y de la rotación θ_z del Nudo 60 localizado en el nivel de cubierta (Figura 8.30). En la misma gráfica se muestran los resultados obtenidos con UNDIN y con SAP2000©.

Para la construcción de la gráfica se utilizaron las columnas 1, 17, 18 y 19 del archivo *DNG.txt*, teniendo en cuenta que la primera columna corresponde a los instantes de tiempo y que las columnas restantes coinciden con los grados de libertad 16, 17 y 18, es decir, con los desplazamientos u_x, u_y y θ_z como lo muestra la Tabla 8.39 (*la primera fila fue tomada de la tabla de numeración de grados de libertad por nudo MGL()*). Se muestran solamente los 20 primeros segundos de la respuesta.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



Gráfica 8.44. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de los desplazamientos de los nudos

La Tabla 8.39 también muestra los desplazamientos máximos del nudo N° 60 y los instantes de tiempo donde se presentan. Esta tabla se adaptó de la tabla resumen escrita en la hoja *TB_OUT*.

Grados de libertad y desplazamientos máximos del nudo 60

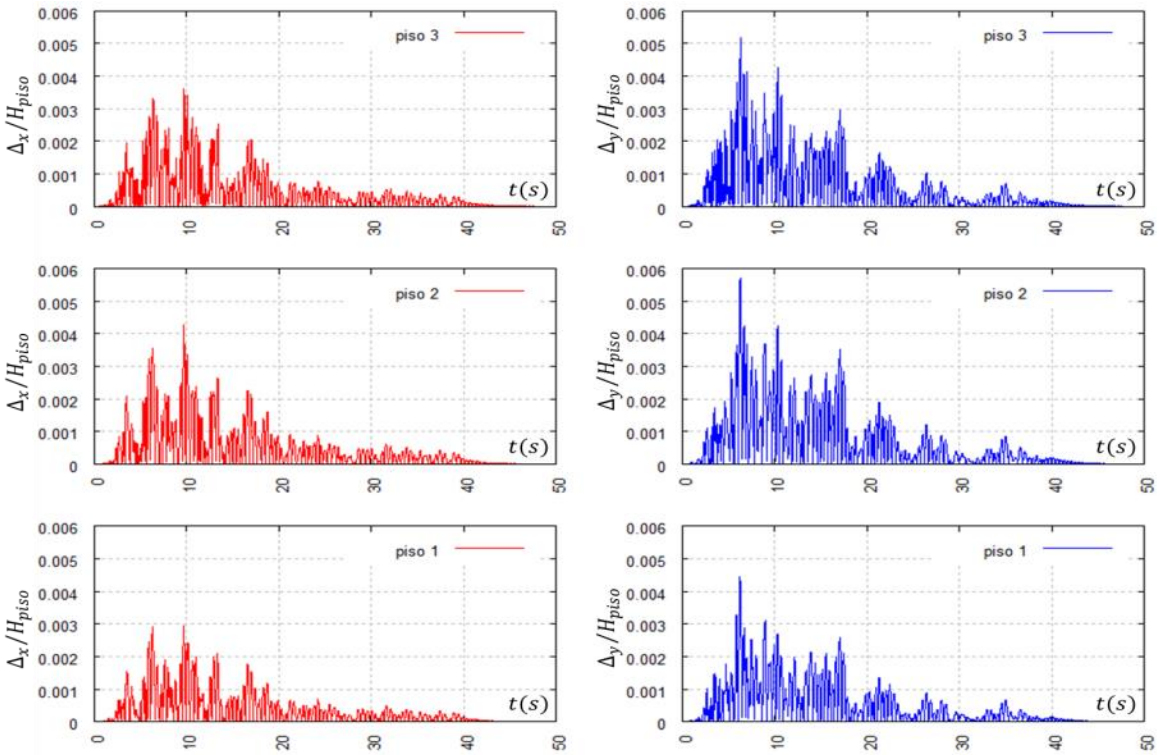
Nudo	Desplazamientos			Rotaciones		
	$u_x\ (m)$	$u_y\ (m)$	$u_z\ (m)$	$\theta_x\ (rad)$	$\theta_y\ (rad)$	$\theta_z\ (rad)$
GL N°	016	017	274	275	276	018
Desplazamientos	0.047	0.078	0.000	0.00429	0.00201	0.00155
Tiempos	9.73	10.33	9.77	10.35	10.08	10.67

Tabla 8.39. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos máximos del nudo 60 de cubierta

- *Derivas de centros de masa*

La Gráfica 8.45 muestra la variación en en tiempo de las derivas en direcciones x e y de los tres centros de masa del pórtico, en valor absoluto y como fracción de la altura de piso respectiva. La gráfica se construyó con los datos almacenados en los archivos de texto *EXX.txt* y *EYY.txt*.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



Gráfica 8.45. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas en direcciones x e y de los centros de masa

En la gráfica se observa que en todos los niveles las derivas son mayores en dirección y que en dirección x. La Tabla 8.40 contiene las derivas máximas de los centros de masa y los instantes de tiempo en que estas se presentan.

Derivas máximas de centros de masa en X e Y

Piso	$(\Delta_x/h)_{máx}$	$t(s)$	$(\Delta_y/h)_{máx}$	$t(s)$
3	0.0036	9.76	0.0052	6.34
2	0.0043	9.74	0.0057	6.31
1	0.0030	9.71	0.0044	6.27

Tabla 8.40. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas máximas en direcciones x e y de los centros de masa

- *Derivas de ejes de columnas*

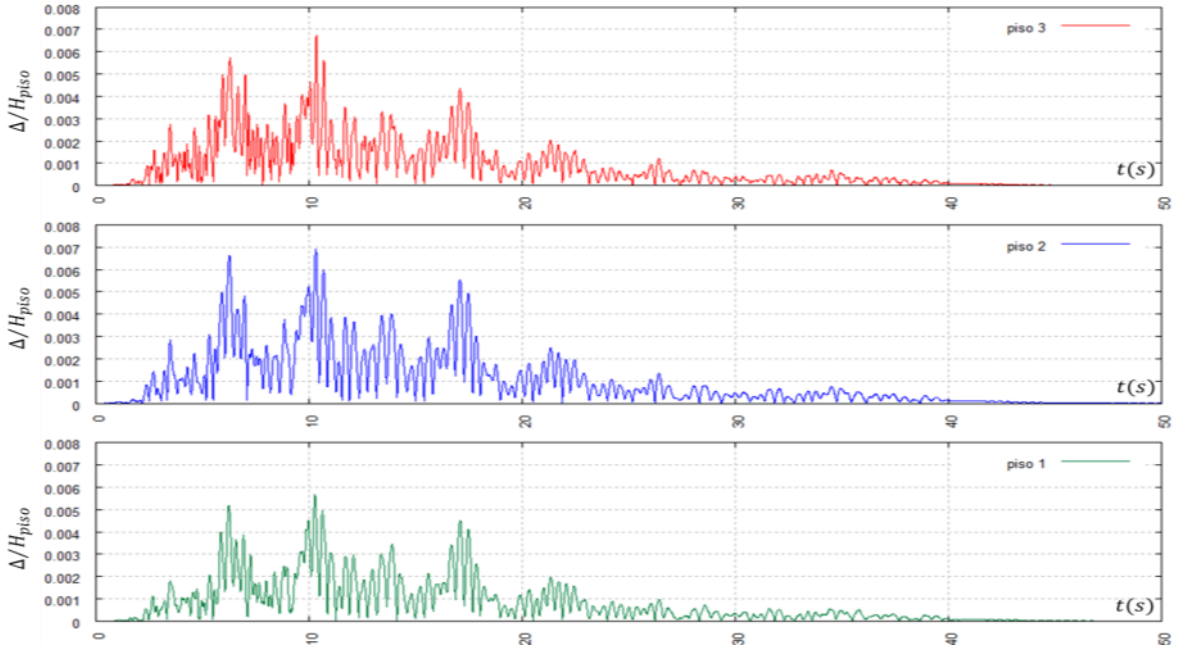
Para pórticos espaciales, las derivas calculadas a partir de los desplazamientos de los nudos asociados a cada eje de columnas se almacenan en un archivo de texto denominado *DER-'i'.txt*, donde *i* indica el número del eje de columna estudiado. Por ejemplo, para el eje de Columna 10, el archivo de texto donde se almacenan las derivas se denomina *DER-10.txt*.

En cada archivo de texto la primera columna almacena los instantes de tiempo y las derivas se almacenan a partir de la segunda columna, en orden descendente de acuerdo con

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

los pisos, es decir, en la segunda columna del archivo se guardan las derivas del nivel más elevado, y en la última columna del archivo se almacenan las derivas del nivel más bajo. El número de columnas de cada archivo depende del número de pisos que posea el eje de columna.

A modo de ejemplo la Gráfica 8.46 muestra la variación en el tiempo de las derivas de cada nivel del eje de Columnas 10. Por la torsión del pórtico y la localización periférica de la columna, estas derivas resultan superiores a las derivas de los centros de masa.



Gráfica 8.46. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas totales del Eje de Columna 10

La Tabla 8.41 resume las derivas totales máximas del mismo eje de columna y los instantes de tiempo en que se presentan.

Derivas máximas en eje de columna N° 10

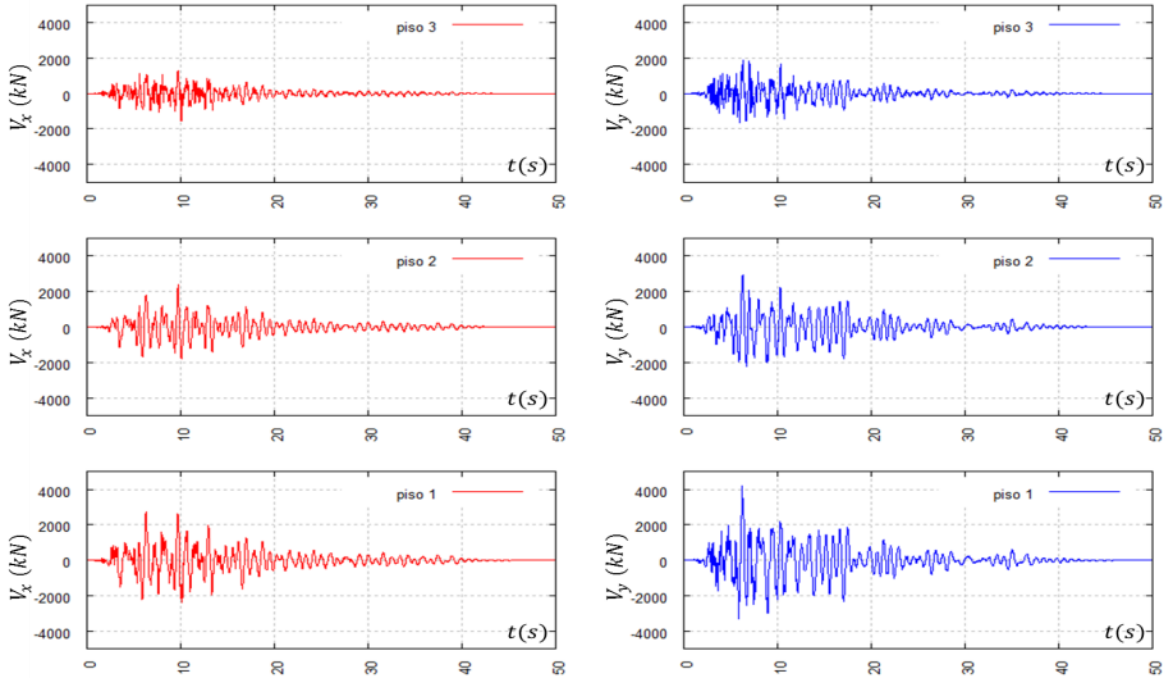
Piso	$(\Delta_x/h)_{máx}$	$t(s)$
3	0.0067	10.35
2	0.0069	10.32
1	0.0057	10.28

Tabla 8.41. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas máximas del Eje de Columna 10

- *Cortantes de piso*

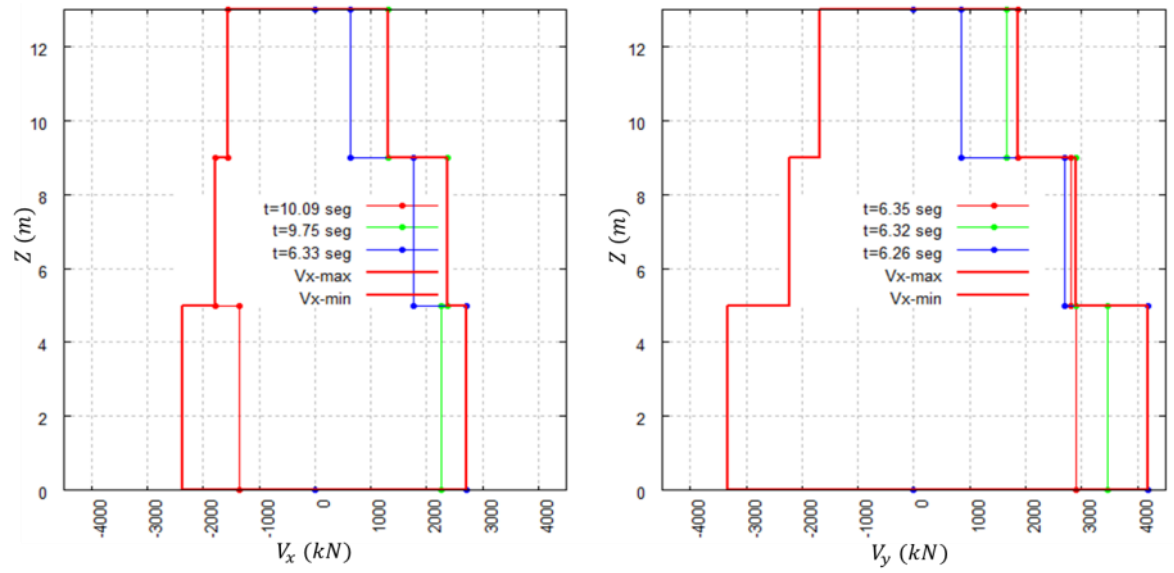
La Gráfica 8.47 muestra la variación en el tiempo de los cortantes de piso en direcciones x e y. Los datos utilizados para construir la gráfica fueron tomados de los archivos de texto *VPX.txt* y *VPY.txt*.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



Gráfica 8.47. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Cortantes de piso en direcciones x e y

La Gráfica 8.48 muestra los diagramas de cortante de piso en direcciones x e y en los instantes de tiempo donde se presentan los valores máximos (*Tabla 8.42*), asi como las envolventes de valores máximos y minimos. Esta gráfica se construyó con la información de los archivos de texto *DVX.txt* y *DVY.txt*, siguiendo un procedimiento similar al utilizado en el ejemplo del pórtico plano.



Gráfica 8.48. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Diagramas de cortantes de piso en direcciones x e y

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Finalmente la Tabla 8.42 muestra los cortantes de piso máximos en cada dirección y los instantes de tiempo donde se presentan. Los cortantes del primer piso coinciden cn los cortantes basales y son los que se utilizan en el ajuste de resultados.

Cortantes de piso máximos en X e Y

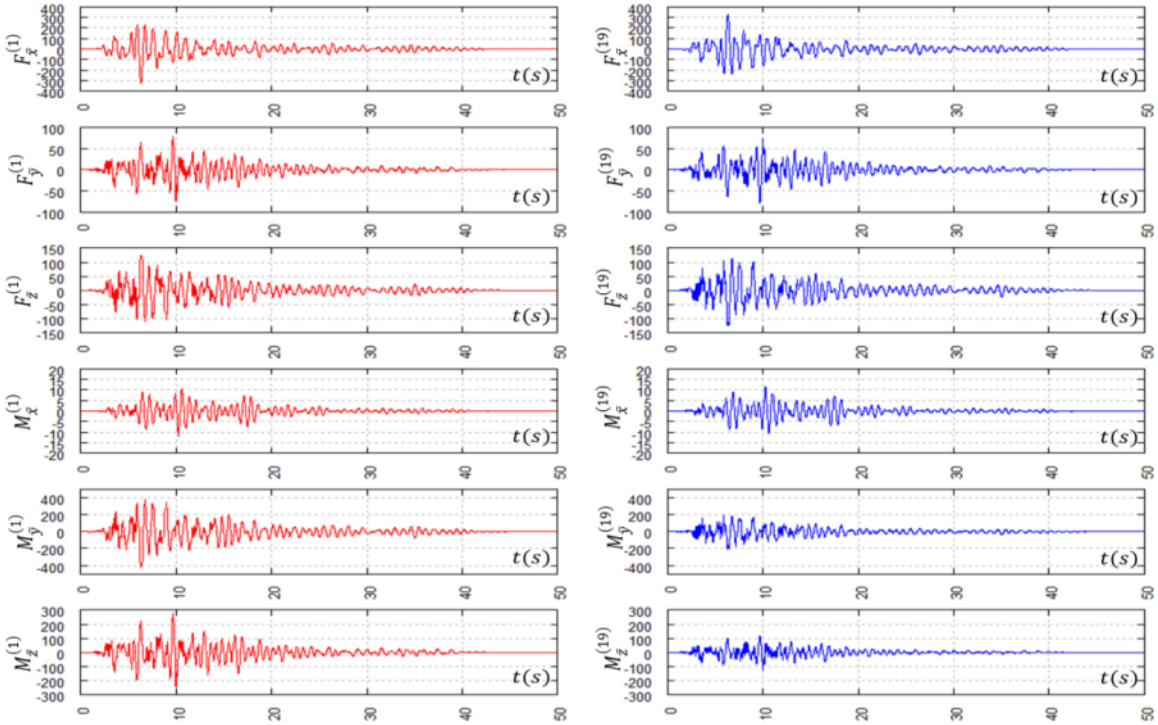
Piso	$(V_x)_{máx}$	$t(s)$	$(V_y)_{máx}$	$t(s)$
3	1545.0	10.09	1860.0	6.35
2	2362.4	9.75	2911.4	6.32
1	2712.9	6.33	4194.3	6.26

Tabla 8.42. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Cortantes de piso máximos e instantes de tiempo correspondientes

- *Acciones en los extremos de los elementos*

La Gráfica 8.49 muestra la variación en el tiempo de las fuerzas en kN y de los momentos en $kN \cdot m$, ambos en coordenadas locales, que actúan en los extremos inicial y final del Elemento 1 localizado en la intersección de los ejes 1 y A en el primer piso de la estructura, como se observa en la Figura 8.31.

Las 6 subgráficas de la izquierda muestran las acciones que actúan en el extremo inicial (*nudo 1*) mientras que las seis subgráficas de la derecha muestra las acciones que actúan en el extremo final (*nudo 19*). Para su construcción se usaron los datos almacenados en el archivo de texto *FEL-1.txt*.



Gráfica 8.49. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Variación de las acciones en coordenadas locales en los extremos del Elemento 1

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

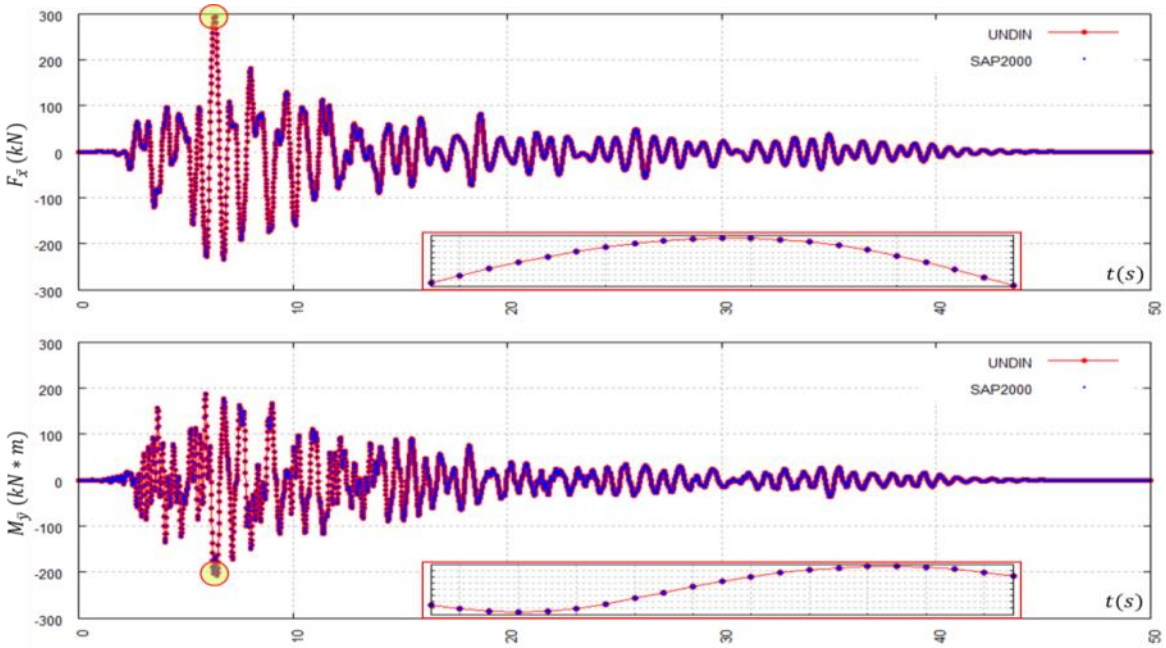
La Tabla 8.43 contiene las acciones máximas en coordenadas locales aplicadas en los extremos del mismo elemento y los instantes de tiempo donde se presentan.

Acciones máximas en los extremos del elemento N°1

	$F_{\bar{x}}^{(1)}$	$F_{\bar{y}}^{(1)}$	$F_{\bar{z}}^{(1)}$	$M_{\bar{x}}^{(1)}$	$M_{\bar{y}}^{(1)}$	$M_{\bar{z}}^{(1)}$
Acciones	324.5	78.5	124.7	11.7	423.1	275.0
Tiempos	6.34	9.69	6.30	10.27	6.30	9.70
	$F_{\bar{x}}^{(19)}$	$F_{\bar{y}}^{(19)}$	$F_{\bar{z}}^{(19)}$	$M_{\bar{x}}^{(19)}$	$M_{\bar{y}}^{(19)}$	$M_{\bar{z}}^{(19)}$
Acciones	324.5	78.5	124.7	11.7	208.4	127.0
Tiempos	6.34	9.69	6.30	10.27	6.46	9.99

Tabla 8.43. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones máximas en los extremos del Elemento 1

La Gráfica 8.50 compara la fuerza en dirección $\bar{x}$ y el momento en dirección $\bar{y}$ que actúan en el extremo final del mismo elemento, calculados con UNDIN y con SAP2000©. Se observan resultados similares.



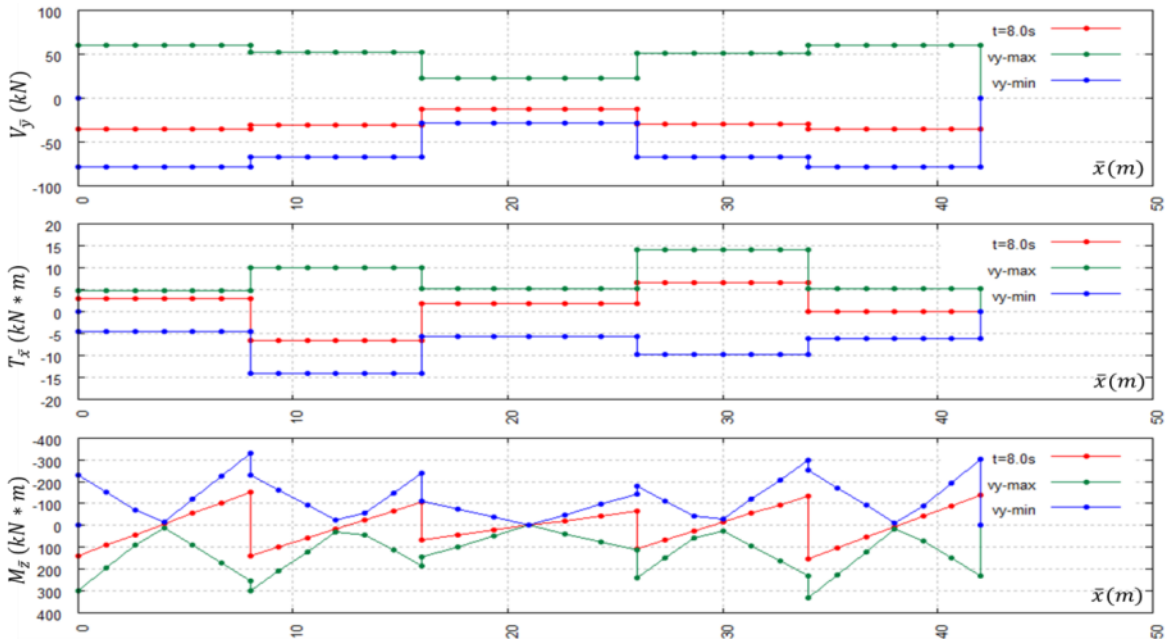
Gráfica 8.50. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de acciones en los extremos

- *Diagramas de acciones internas en vigas y columnas*

Las tablas de datos que permiten graficar los diagramas de acciones internas de un eje de vigas o de columnas de un pórtico espacial se almacenan en los archivos de texto *NX-'id'.txt, VY-'id'.txt, VZ-'id'.txt, TX-'id'.tx, MY-'id'.txt* y *MZ-'id'.txt*, donde *'id'* indica el nombre del eje de viga o de columna. Cada archivo corresponde a cada acción interna $N_{\bar{x}}$, $V_{\bar{y}}$, $V_{\bar{z}}$, $T_{\bar{x}}$, $M_{\bar{y}}$ y $M_{\bar{z}}$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La Gráfica 8.51 muestra los diagramas $V_{\bar{y}}$, $T_{\bar{x}}$ y $M_{\bar{z}}$, únicos diferentes de cero, en un instante de tiempo cualquiera ($t = 8.0s$) y las envolventes correspondientes de la viga *V-03*. La gráfica se construyó utilizando los datos almacenados en los archivos *VY-V3.txt*, *TX-V3.txt* y *MZ-V3.txt* en las columnas 802, 5003 y 5004.



Gráfica 8.51. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Diagramas de acciones internas de la Viga V-03

La Figura 8.53 muestra el diagrama de $M_{\bar{z}}$ en $t = 8.00s$ y las envolventes correspondientes, calculados con SAP2000©. Se puede ver que los resultados son idénticos.

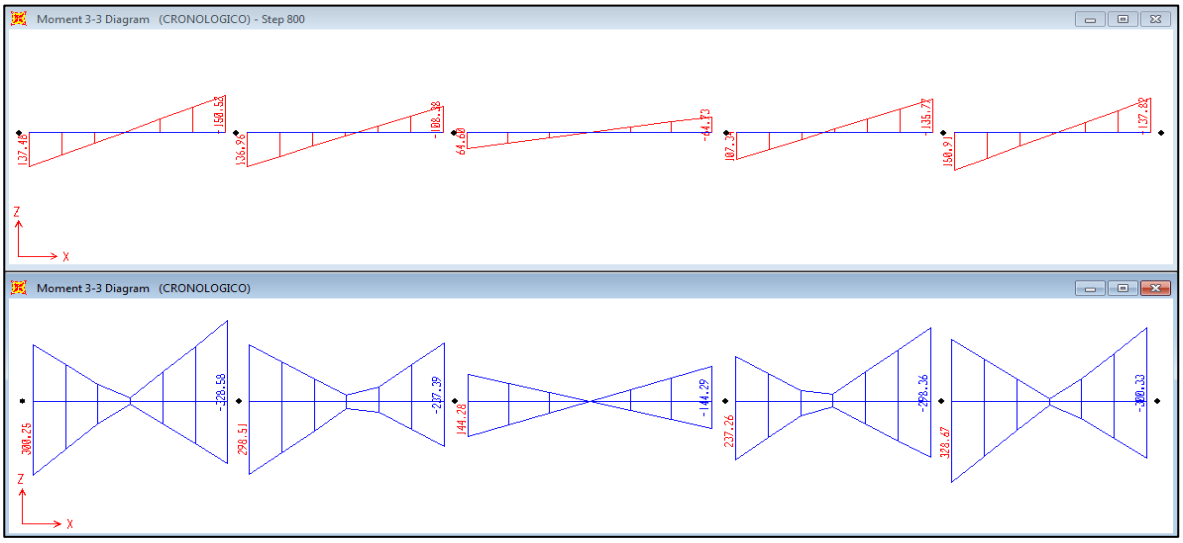
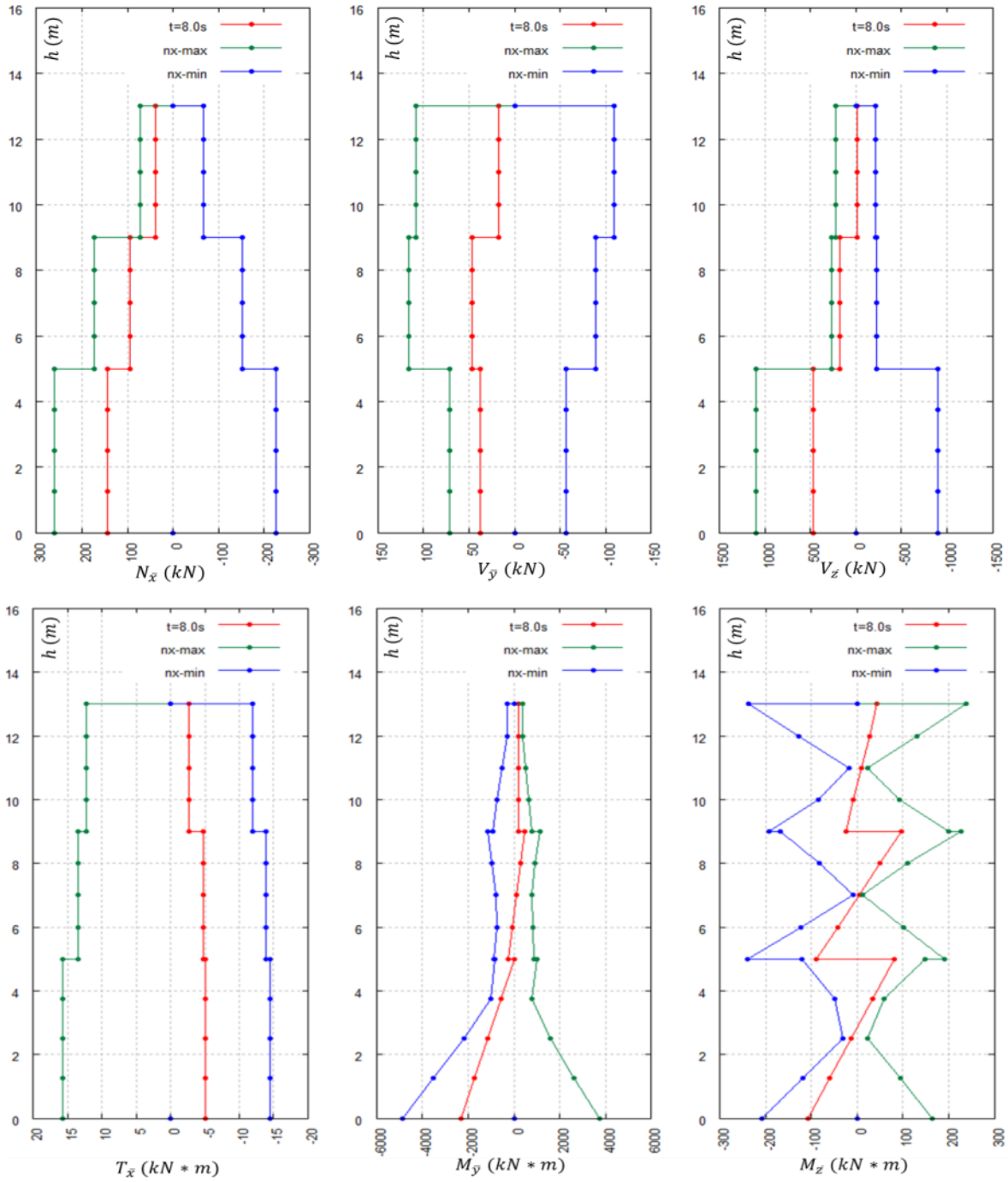


Figura 8.53. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de acciones internas en la Viga V-03

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La Gráfica 8.52 muestra para la columna *C-07* los diagramas de acciones interas $N_{\bar{x}}$, $V_{\bar{y}}$, $V_{\bar{z}}$, $T_{\bar{x}}$, $M_{\bar{y}}$ y $M_{\bar{z}}$ en el instante $t = 8.00s$, y las envolventes correspondientes, mientras que la Figura 8.54 muestra los diagramas de $M_{\bar{z}}$ de la Gráfica 8.52 obtenidos con SAP2000©. En ambos casos los resultados son los msmos.



Gráfica 8.52. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Diagramas de acciones internas de la Columna C-07

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

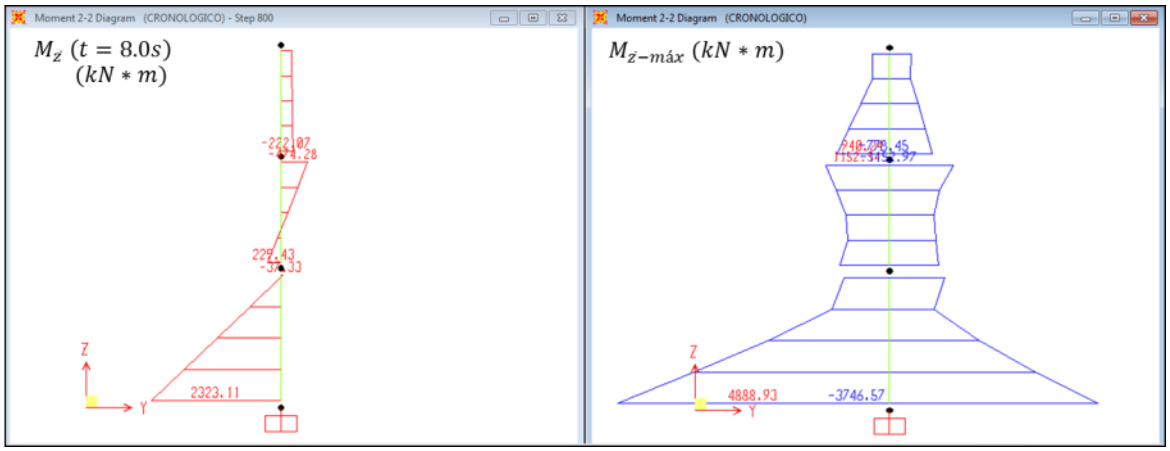


Figura 8.54. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de acciones internas en la Columna C-07

- *Tiempos de cálculo*

En la Figura 8.55 indica que el tiempo total de cálculo del pórtico, utilizando el método de análisis modal cronológico es de 368 segundos (6 *minutos aproximadamente*), y que las acciones que más tiempo demandan corresponden a la creación de las tablas de diagramas de acciones internas de vigas y columnas.

```
Inmediato

Programa Didáctico a Código Abierto de Análisis Dinámico de Estructuras
Universidad Nacional de Colombia. 2013

calculando ...
Lectura y definición de parámetros generales                                  0.73
Lectura de tablas de datos                                                    0.95
Cantidad de grados de libertad por tipo                                       0.95
Creación de matrices auxiliares                                               0.95
ANÁLISIS MODAL                                                                0.95
Matriz de masa                                                                0.95
Matriz de rigidez considerando todos los grados de libertad                   1.84
Matriz de rigidez condensada a grados de libertad de interés                  1.84
Matriz de rigidez lateral                                                     1.84
Coordenadas de centros de rigidez                                             1.84
Frecuencias, periodos y modos de vibración ortonormalizados                   1.89
Matrices modales de masa, rigidez y amortiguamiento                           1.89
Matriz de amortiguamiento por superposición de matrices modales               1.89
Factores de participación y masa modal efectiva                               1.89
ANÁLISIS MODAL CRONOLÓGICO                                                    1.89
Acciones modales externas equivalentes a la aceleración de la base            1.94
Desplazamientos, velocidades y aceleraciones generalizadas                    1.95
Desplazamientos, velocidades y aceleraciones relativas a la base de centros de masa   2.03
Verificación del equilibrio dinámico                                          2.10
Balance de energía                                                            2.28
Desplazamientos de los nudos, relativos a la base y en coordenadas globales   9.33
Derivas de centros de masa                                                    9.33
Derivas en ejes de columnas                                                   16.91
Cortantes de piso                                                             16.94
Acciones en los extremos de los elementos en coordenadas locales              47.75
Diagramas de acciones internas en vigas y columnas                            356.60
¡ fin del cálculo !                                                           367.55
```

Figura 8.55. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tiempos de cálculo obtenidos por el método de análisis modal cronológico

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

8.2.6. Resultados del análisis modal espectral

A continuación se muestran los resultados obtenidos del análisis modal espectral del pórtico espacial tomado como ejemplo. Los resultados se muestran de forma gráfica y mediante tablas.

Los resultados que se muestran para todas las cantidades que representan la respuesta de la estructura (*desplazamientos, derivas, acciones internas, etc.*) están agrupados de la siguiente forma:

- Respuesta máxima por cada modo de vibración, producida por cada componente de aceleración de la base $\ddot{u}_{gx}$ o $\ddot{u}_{gy}$ actuando de forma independiente.
- Respuesta máxima probable producida por cada componente de aceleración de la base $\ddot{u}_{gx}$ o $\ddot{u}_{gy}$ actuando de forma independiente (*combinación modal*).
- Respuesta máxima probable producida por las componentes de aceleración de la base $\ddot{u}_{gx}$ y $\ddot{u}_{gy}$ actuando de forma simultánea (*combinación direccional*).

- *Pseudo-aceleraciones correspondientes a cada modo de vibración*

La Tabla 8.44 muestra las pseudo – aceleraciones máximas S_a correspondientes a los modos de vibración del pórtico, como fracción de la aceleración de la gravedad g.

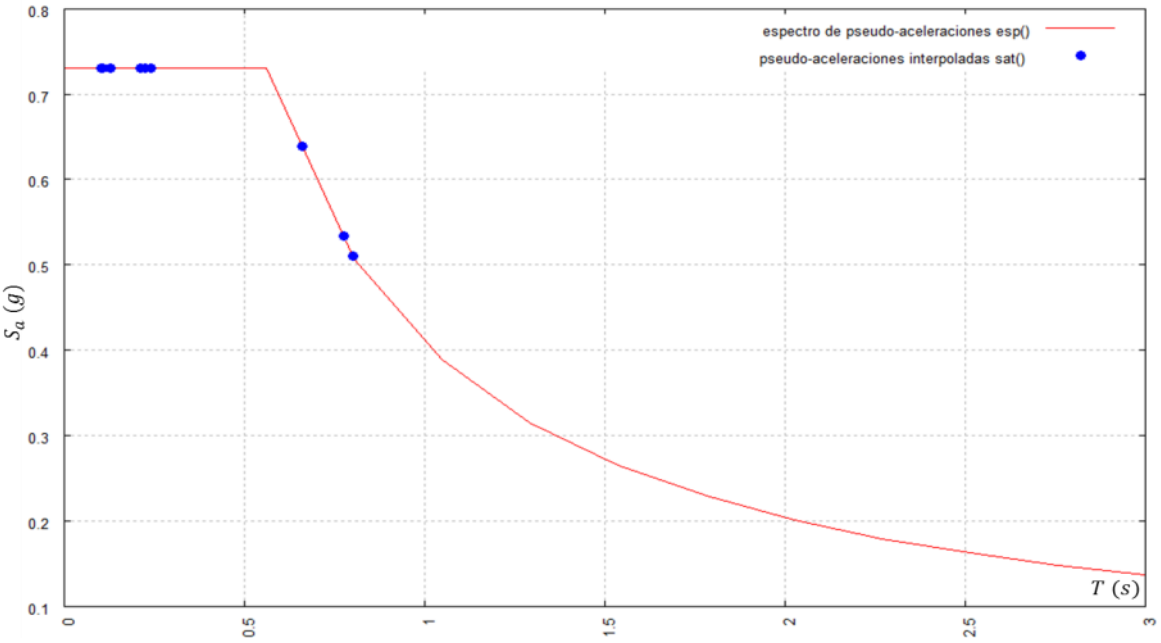
Vector de pseudo-aceleraciones interpoladas-SAT() (9x2)

Modo	$T\,(s)$	$S_a\,(g)$
1	0.80	0.51
2	0.78	0.53
3	0.66	0.64
4	0.24	0.73
5	0.23	0.73
6	0.21	0.73
7	0.13	0.73
8	0.11	0.73
9	0.10	0.73

Tabla 8.44. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Pseudo-aceleraciones correspondientes a cada modo de vibración del pórtico

La Gráfica 8.53 muestra los valores de S_a de la tabla anterior, graficados sobre el espectro de pseudo-aceleraciones usado en el análisis. La gráfica se construyó con los datos almacenados en los archivos de texto *ESP.txt* y *SAT.txt.*

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



Gráfica 8.53. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Pseudo-aceleraciones asociadas a modos de vibración

- *Desplazamientos generalizados máximos por cada modo de vibración*

La Tabla 8.45 contiene los desplazamientos generalizados máximos asociados a cada modo de vibración natural, producidos cuando actúan de forma separada las componentes de aceleración de la base $\ddot{u}_{gx}$, $\ddot{u}_{gy}$ y $\ddot{\theta}_{gz}$, esta ultima igual a cero.

Matriz de desplazamientos generalizados máximos - GEN() (9x3)

Modo	$\ddot{u}_{gx}$	$\ddot{u}_{gy}$	$\ddot{\theta}_{gz}$
1	2.509	0.000	0.000
2	0.000	2.752	0.000
3	1.091	0.000	0.000
4	-0.082	0.000	0.000
5	0.000	0.121	0.000
6	0.082	0.000	0.000
7	0.005	0.000	0.000
8	0.000	-0.012	0.000
9	-0.011	0.000	0.000

Tabla 8.45. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos generalizados máximos por modo

- *Matriz de coeficientes de correlación*

La Tabla 8.46 muestra la matriz de coeficientes de correlacion $[\rho]$ utilizada en el método de la Combinación Cuadrática Completa (*CCC*). La matriz es simétrica, su tamaño coincide

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

con el número de modos de vibración de la estructura (*en este caso 9*), todos los coeficientes son positivos y la diagonal principal siempre tiene valores iguales a la unidad.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1.000	0.904	0.210	0.005	0.004	0.004	0.002	0.001	0.001	1
0.904	1.000	0.278	0.005	0.005	0.004	0.002	0.001	0.001	2
0.210	0.278	1.000	0.008	0.007	0.006	0.002	0.002	0.001	3
0.005	0.005	0.008	1.000	0.710	0.350	0.023	0.013	0.012	4
0.004	0.005	0.007	0.710	1.000	0.658	0.029	0.016	0.014	5
0.004	0.004	0.006	0.350	0.658	1.000	0.039	0.019	0.018	6
0.002	0.002	0.002	0.023	0.029	0.039	1.000	0.209	0.165	7
0.001	0.001	0.002	0.013	0.016	0.019	0.209	1.000	0.917	8
0.001	0.001	0.001	0.012	0.014	0.018	0.165	0.917	1.000	9

Tabla 8.46. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de coeficientes de correlación *COR()*

- *Desplazamientos máximos de los centros de masa*

Los desplazamientos máximos por modo y probables en direcciones x e y, y las rotaciones máximas por modo y probables en dirección z de los centros de masa, se almacenan respectivamente en los archivos de texto denominados *XCR.txt*, *YCR.txt* y *ZCR.txt*. En tales archivos cada columna corresponde a un modo o a un parámetro combinado. La iformación almacenada en estos archivos también se escribe en la hoja *TB_OUT*.

La Tabla 8.47 resume el cálculo de los desplazamientos y las rotaciones máximas probables de los centros de masa. En la primera parte se muestran los desplazamientos en dirección x, en la segunda parte se muestran los desplazamientos en dirección y, y en la tercera parte se muestran las rotaciones en dirección z. Cada parte de la tabla muestra el aporte máximo de los modos de vibración que participan, la respuesta máxima probable producida por $\ddot{u}_{gx}$ o $\ddot{u}_{gy}$ y la respuesta maxima probable considerando efectos ortogonales.

Desplazamientos máximos en X de CM's de diafragmas - XCR()

Centro de masa	C1	C2	C4	C5	C7	C8	C10	C20	C21	C22
	Z (m)	Modo 1	Modo 3	Modo 4	Modo 6	Modo 7	Modo 9	Máx-X	Máx-Y	Máximo
1 (Cubierta)	13.00	0.0891	0.0167	-0.0017	-0.0019	0.0000	0.0001	0.0940	0.0000	0.0940
2 (3° piso)	9.00	0.0591	0.0151	0.0010	0.0012	-0.0001	-0.0003	0.0640	0.0000	0.0640
3 (2° piso)	5.00	0.0288	0.0068	0.0016	0.0019	0.0000	0.0003	0.0311	0.0000	0.0311

Desplazamientos máximos en Y de CM's de diafragmas - YCR()

Centro de masa	C1	C12	C15	C18	C20	C21	C22
	Z (m)	Modo 2	Modo 5	Modo 8	Máx-X	Máx-Y	Máximo
1 (Cubierta)	13.00	0.1072	-0.0038	0.0002	0.0000	0.1073	0.1073
2 (3° piso)	9.00	0.0741	0.0025	-0.0004	0.0000	0.0742	0.0742
3 (2° piso)	5.00	0.0352	0.0036	0.0004	0.0000	0.0354	0.0354

Rotaciones máximas en Z de CM's de diafragmas - ZCR()

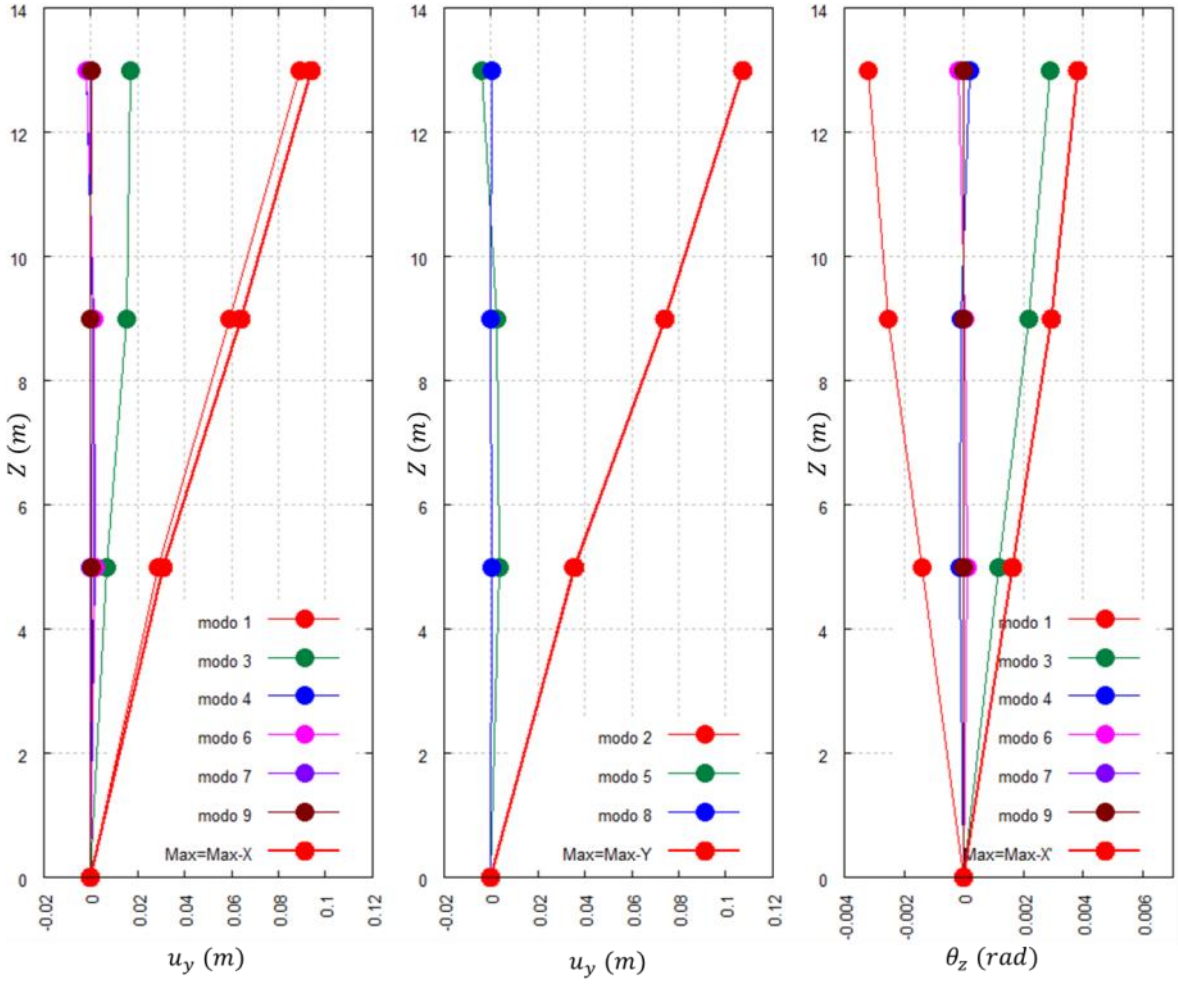
Centro de masa	C1	C2	C4	C5	C7	C8	C10	C20	C21	C22
	Z (m)	Modo 1	Modo 3	Modo 4	Modo 6	Modo 7	Modo 9	Máx-X	Máx-Y	Máximo
1 (Cubierta)	13.00	-0.00319	0.00290	0.00019	-0.00017	-0.00001	0.00001	0.0038	0.0000	0.0038
2 (3° piso)	9.00	-0.00251	0.00217	-0.00007	0.00006	0.00001	-0.00001	0.0030	0.0000	0.0030
3 (2° piso)	5.00	-0.00139	0.00117	-0.00014	0.00010	-0.00001	0.00001	0.0016	0.0000	0.0016

Tabla 8.47. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos y rotaciones máximas probables de los centros de masa

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Se observa que los centros de masa se desplazan en dirección x y rotan respecto a z solamente cuando actúa la componente de aceleración de la base $\ddot{u}_{gx}$. De igual forma los centros de masa se desplazan solo en dirección y si actua unicamente $\ddot{u}_{gy}$.

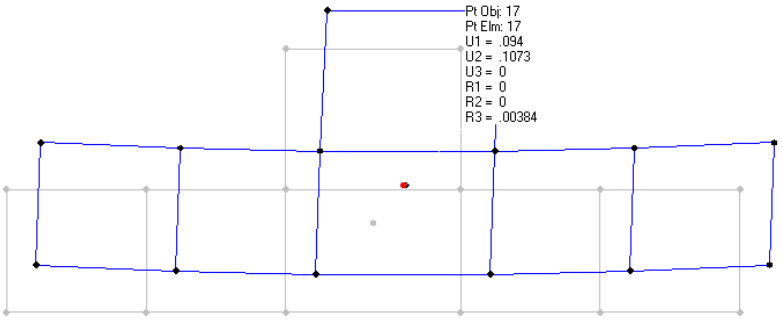
La información mostrada en la Tabla 8.47 se muestra en la Gráfica 8.54. En esta se observa con más claridad la forma en que cada modo de vibración participa en los desplazamientos y las rotaciones máximas probables de los centros de masa. De los resultados se observa que los tres primeros modos de vibración son los que aportan en mayor medida a la respuesta máxima.



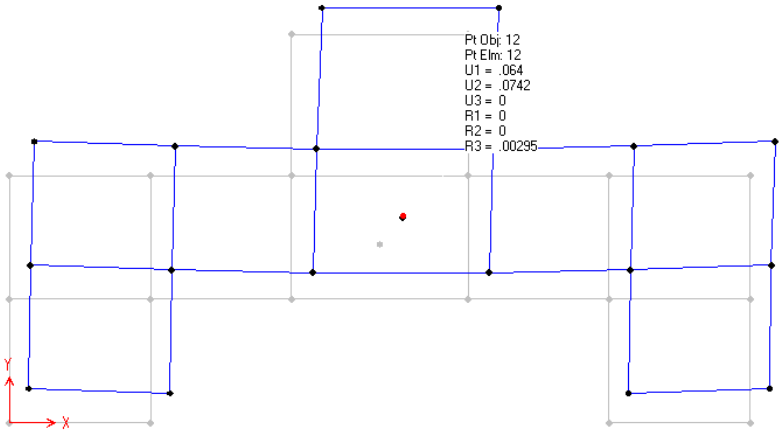
Gráfica 8.54. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos y rotaciones máximas de los centros de masa

A modo de verificación la Gráfica 8.55 muestra los desplazamientos y las rotaciones máximas probables de los tres centros de masa del pórtico, calculados UNDIN y con SAP2000 ©. Se observan resultados que coinciden con los mostrados en la Tabla 8.47.

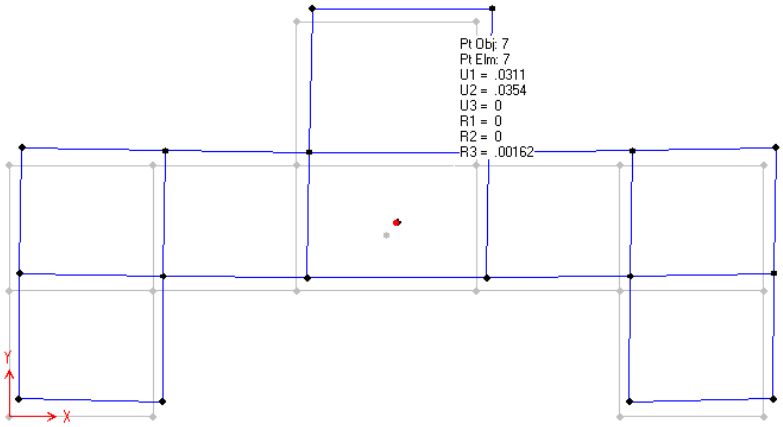
© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



a) Centro de masa de cubierta



b) Centro de masa de tercer piso



a) Centro de masa de segundo piso

Gráfica 8.55. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos y rotaciones máximas de los centros de masa obtenidos con SAP2000

- *Desplazamientos máximos de los nudos*

La Tabla 8.48 muestra los desplazamientos máximos y las rotaciones máximas del Nudo 60 de cubierta (*Figura 8.30*). La tabla fue construida a partir de la información almacenada

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

en el archivo *DNR.txt* en el que la historia de cálculo de los desplazamientos de los nudos se almacena de acuerdo a la numeración de los grados de libertad. Se muestran solamente las respuestas modales diferentes de cero. Los desplazamientos y las rotaciones están en metros y radianes.

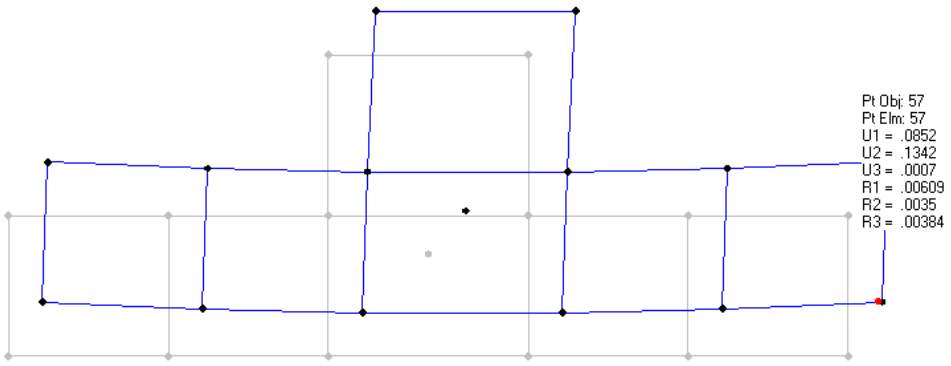
Desplazamientos máximos probables de nudos - DNR()*

Grado de libertad	Desplazamiento o rotación	C1 Modo 1	C3 Modo 3	C4 Modo 4	C6 Modo 6	C7 Modo 7	C9 Modo 9
016	u_x	0.0728	0.0314	-0.0007	-0.0028	0.0000	0.0002
017	u_y	-0.0669	0.0608	0.0039	-0.0037	-0.0001	0.0001
274	u_z	-0.0006	-0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
275	θ_x	0.00211	-0.00235	-0.00093	0.00083	0.00007	-0.00006
276	θ_y	0.00292	0.00127	-0.00024	-0.00065	0.00001	0.00010
018	θ_z	-0.00319	0.00290	0.00019	-0.00017	-0.00001	0.00001
Grado de libertad	**Desplazamiento o rotación**	**C11 Modo 2**	**C14 Modo 5**	**C17 Modo 8**	**C19 Máx-X**	**C20 Máx-Y**	**C21 Máximo**
016	u_x	0.0000	0.0000	0.0000	0.0852	0.0000	0.0852
017	u_y	0.1072	-0.0038	0.0002	0.0805	0.1073	0.1341
274	u_z	0.0003	-0.0001	0.0000	0.0007	0.0004	0.0007
275	θ_x	-0.00520	0.00107	-0.00011	0.00298	0.00531	0.00609
276	θ_y	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00350	0.00001	0.00350
018	θ_z	0.00000	0.00000	0.00000	0.00384	0.00000	0.00384

Tabla 8.48. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos y rotaciones máximas probables del nudo 60

De los resultados del nudo se observa que mientras el desplazamiento máximo probable en x y la rotacion máxima probable en z son debidas solamente a $\ddot{u}_{gx}$, el desplazamiento máximo probable en y es debido tanto a $\ddot{u}_{gx}$ como a $\ddot{u}_{gy}$, siendo similares los desplazamientos máximos probables debidos a cada componente de aceleración de la base.

A modo de verificación la Gráfica 8.56 muestra los desplazamientos máximos probables del mismo nudo calculados con Sap2000©. Los resultados coinciden con los mostrados en la ulitma columna de la Tabla 8.48 y con lo escritos en *TB_OUT* en la tabla resumen *DEM()*.



Gráfica 8.56. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de los desplazamientos y rotaciones máximas del Nudo 60

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

- *Derivas máximas de centros de masa*

Para pórticos espaciales UNDIN calcula de forma separada las derivas en dirección x y en direccion y de los centros de masa, y las almacena en los archivos de texto *EXR.txt* y *EYR.txt* respectivamente. La Tabla 8.49 muestra las derivas máximas por modo y las derivas máximas probables de cada nivel y en cada dirección x e y.

Derivas máximas de CM's en dirección X - EXR() (3x21)

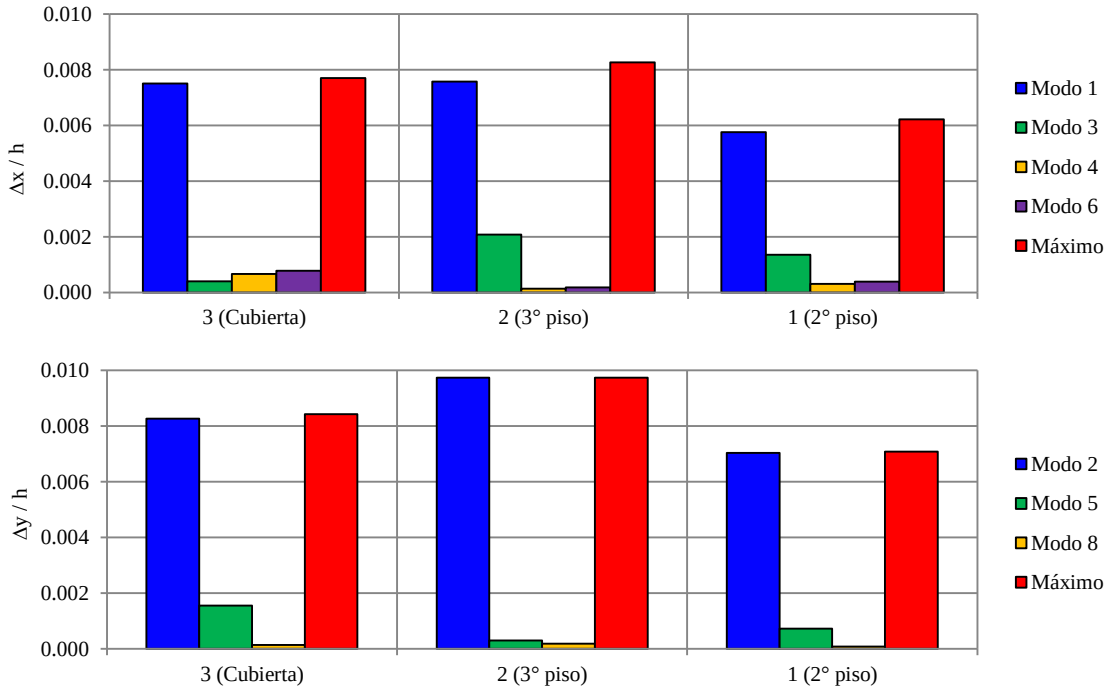
Piso	C1 Modo 1	C3 Modo 3	C4 Modo 4	C6 Modo 6	C7 Modo 7	C9 Modo 9	C19 Máx-X	C20 Máx-Y	C21 Máximo
3	0.00750	0.00040	0.00067	0.00079	0.00002	0.00011	0.00770	0.00000	0.00770
2	0.00757	0.00207	0.00014	0.00018	0.00003	0.00015	0.00827	0.00000	0.00827
1	0.00576	0.00136	0.00031	0.00039	0.00001	0.00006	0.00622	0.00000	0.00622

Derivas máximas de CM's en dirección Y - EYR() (3x21)

Piso	C11 Modo 2	C14 Modo 5	C17 Modo 8	C19 Máx-X	C20 Máx-Y	C21 Máximo
3	0.00827	0.00155	0.00013	0.00000	0.00842	0.00842
2	0.00973	0.00030	0.00019	0.00000	0.00974	0.00974
1	0.00704	0.00073	0.00008	0.00000	0.00708	0.00708

Tabla 8.49. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas máximas de centros de masa

En la Gráfica 8.57, que muestran las derivas máximas probables de cada nivel y el aporte máximo de los primeros modos de vibración a las derivas respectivas, se observa que la deriva máxima en cada dirección se presenta en el tercer piso. Por otro lado, mientras que en dirección y las derivas del eje prácticamente coincide con la deriva del segundo modo, en dirección x los modos 3, 4 y 6 aportan significativamente a la deriva máxima.



Gráfica 8.57. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas máximas de centros de masa

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

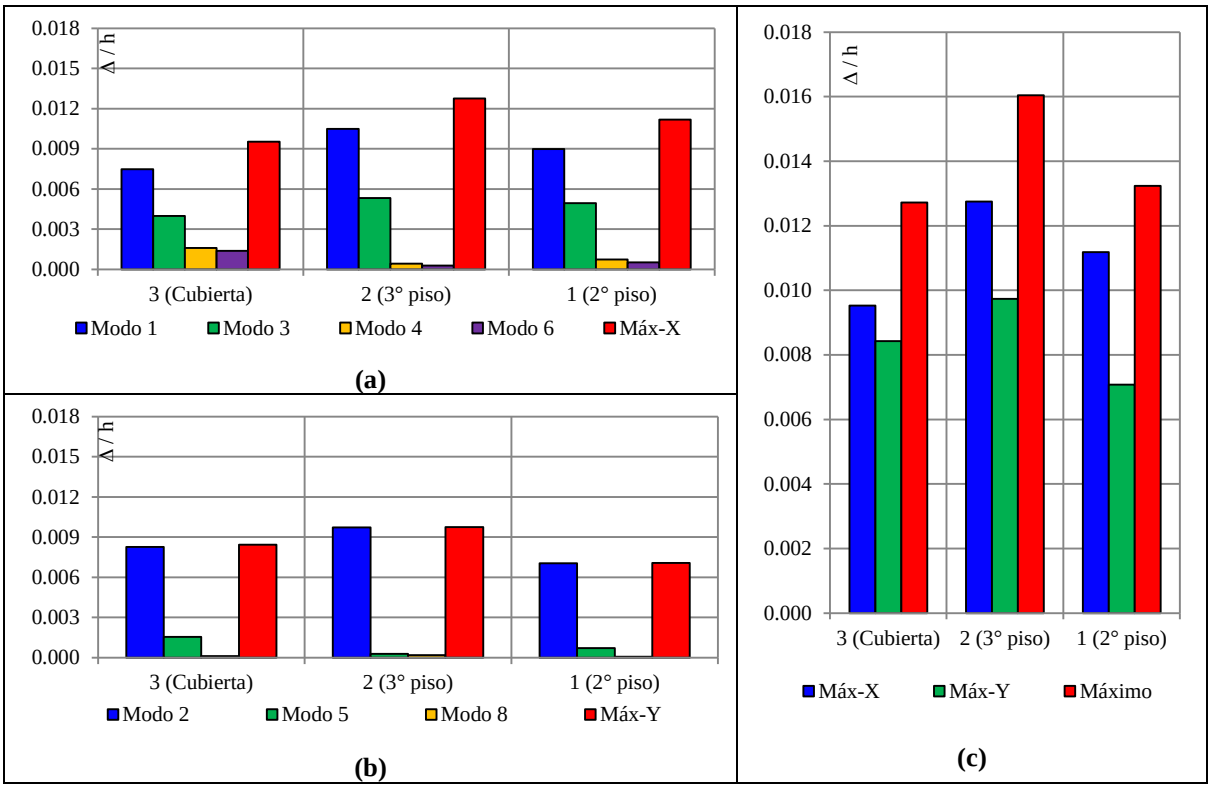
- *Derivas máximas de ejes de columna*

Similar a lo indicado en el caso de análisis modal cronológico, las derivas totales evaluadas a partir de los desplazamientos de los nudos de cada eje de columna se almacenan en el archivo de texto *DER-'i'.txt*, donde *i* indica el número del eje de columna. A modo de ejemplo la Tabla 8.49 y la Gráfica 8.58 muestran el cálculo de las derivas máximas probables del eje de columnas 16 localizado en la intersección de los ejes C y 6. La información para crear las tablas y las gráficas fue tomada de la hoja *TB_OUT* y también se encuentra en el archivo *DER-16.txt*.

Tabla resumen de derivas máximas en eje de columna 16 (3x21)

Piso	C1 Modo 1	C3 Modo 3	C4 Modo 4	C6 Modo 6	C7 Modo 7	C9 Modo 9
3 (Cubierta)	0.00748	0.00399	0.00160	0.00137	0.00009	0.00012
2 (3° piso)	0.01049	0.00534	0.00043	0.00028	0.00012	0.00016
1 (2° piso)	0.00897	0.00495	0.00074	0.00053	0.00005	0.00007
Piso	**C11 Modo 2**	**C14 Modo 5**	**C17 Modo 8**	**C19 Máx-X**	**C20 Máx-Y**	**C21 Máximo**
3 (Cubierta)	0.00827	0.00155	0.00013	0.00953	0.00842	0.01272
2 (3° piso)	0.00973	0.00030	0.00019	0.01275	0.00974	0.01605
1 (2° piso)	0.00704	0.00073	0.00008	0.01118	0.00708	0.01323

Tabla 8.50. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas máximas del Eje de Columnas 6



Gráfica 8.58. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas máximas del Eje de Columnas 16

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

En la anterior gráfica la parte (a) corresponde a las derivas totales máximas por modo y máximas probables cuando actua solamente $\ddot{u}_{gx}$, la parte (b) corresponde a las derivas totales máximas por modo y máximas probables cuando actua solamente $\ddot{u}_{gy}$ y la parte (c) corresponde a las derivas totales cuando actúan simultáneamente $\ddot{u}_{gx}$ y $\ddot{u}_{gy}$.

- *Acciones equivalentes máximas trasladadas a centros de masa*

Para pórticos espaciales UNDIN calcula las las fuerzas equivalentes en direcciones x e y, y los momentos equivalentes en dirección z aplicados en los centros de masa, y los almacena en los archivos de texto *FXR.txt*, *FYR.txt* y *MZY.txt* respectivamente. La Tabla 8.51 muestra las acciones equivalentes máximas por modo y las acciones equivalentes máximas probables que actúan sobre cada centro de masa en las direcciones x, y, z globales.

Fuerzas elásticas máximas en dirección X - FXR() (4x22)

Centro de masa	C1	C2	C4	C5	C7	C8	C10	C20	C21	C22
	Z (m)	Modo 1	Modo 3	Modo 4	Modo 6	Modo 7	Modo 9	Máx-X	Máx-Y	Máximo
1 (Cubierta)	13.00	2050.2	563.8	-423.9	-646.4	26.6	192.5	2409.0	0.0	2409.0
2 (3° piso)	9.00	1766.5	662.8	334.3	529.0	-62.5	-539.7	2207.7	0.0	2207.7
3 (2° piso)	5.00	860.6	298.0	520.3	849.0	53.7	554.6	1614.0	0.0	1614.0
Base	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Fuerzas elásticas máximas en dirección Y - FYR() (4x22)

Centro de masa	C1	C12	C15	C18	C20	C21	C22
	Z (m)	Modo 2	Modo 5	Modo 8	Máx-X	Máx-Y	Máximo
1 (Cubierta	13.00	2632.7	-1091.5	216.4	0.0	2852.3	2852.3
2 (3° piso	9.00	2365.5	926.8	-617.0	0.0	2614.4	2614.4
3 (2° piso	5.00	1123.3	1372.5	640.2	0.0	1897.2	1897.2
Base	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

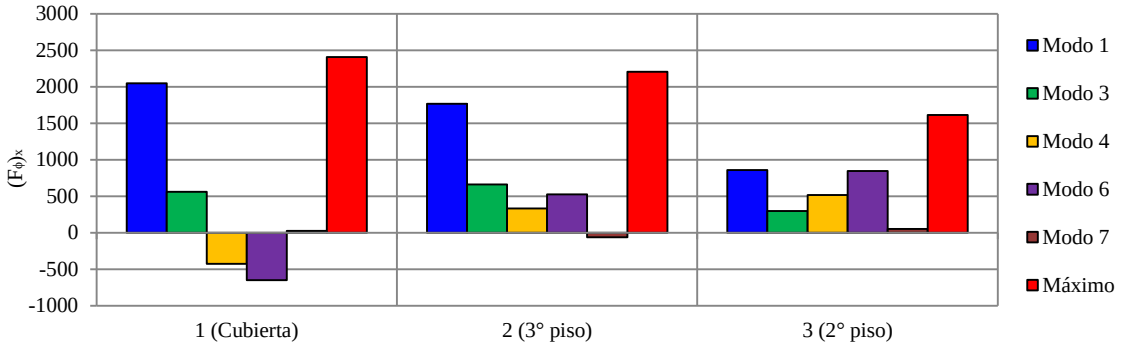
Momentos elásticos máximos en dirección Z - MZR() (4x22)

Centro de masa	C1	C2	C4	C5	C7	C8	C10	C20	C21	C22
	Z (m)	Modo 1	Modo 3	Modo 4	Modo 6	Modo 7	Modo 9	Máx-X	Máx-Y	Máximo
1 (Cubierta)	13.00	-9618.6	12860.6	6300.5	-7674.9	-693.6	1141.9	16497.6	0.0	16497.6
2 (3° piso)	9.00	-13763.7	17465.6	-4391.3	4486.3	2155.4	-2502.8	20688.9	0.0	20688.9
3 (2° piso)	5.00	-7591.7	9455.4	-8727.9	8145.3	-2153.0	2800.2	14813.5	0.0	14813.5
Base	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

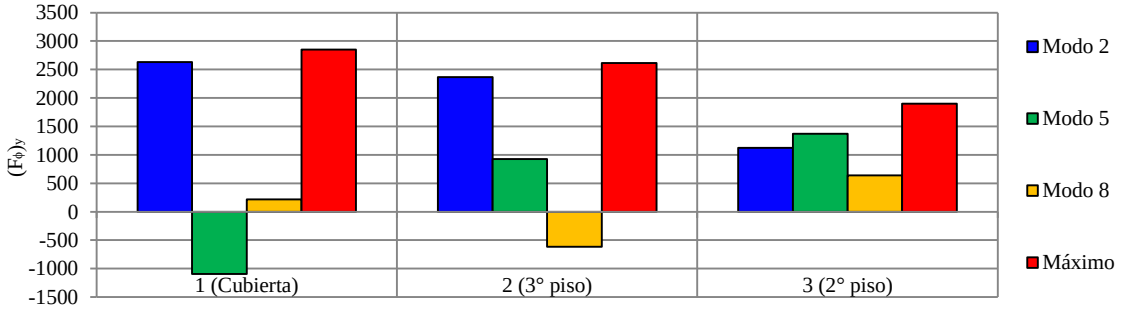
Tabla 8.51. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones equivalentes trasladadas a centros de masa

La Gráfica 8.59 muestra la información de la Tabla 8.51. Como en el pórtico plano del ejemplo anterior, las acciones equivalentes no tienen la tendencia de los primeros modos como sucede con los desplazamientos y con las derivas. Nuevamente los modos superiores tienen una alta incidencia en las acciones equivalentes máximas que actúan en los niveles más bajos de la estructura.

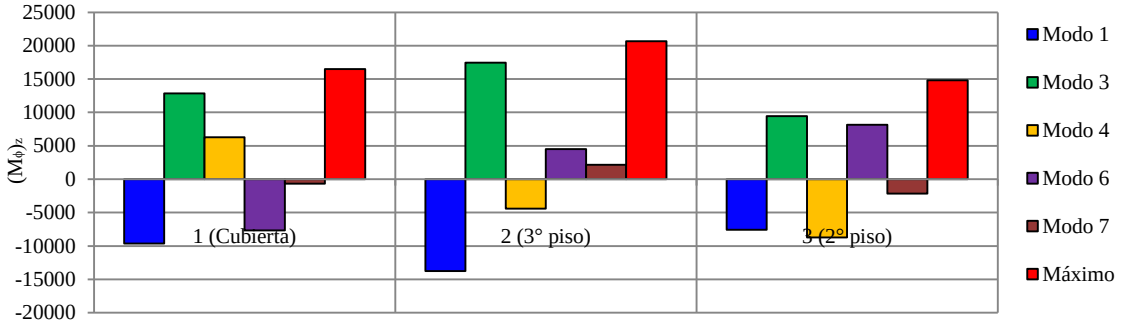
© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



a) Fuerzas equivalentes en dirección x



b) Fuerzas equivalentes en dirección y



c) Momentos equivalentes en dirección z

Gráfica 8.59. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones equivalentes trasladadas a centros de masa

- *Cortantes máximos de piso*

Para pórticos espaciales UNDIN calcula los cortantes de piso en direcciones x e y, los cuales se escriben en la hoja *TB_OUT* y se almacenan en los archivos de texto *VXR.txt* y *VYR.txt*. La Tabla 8.24 muestra los cortantes de piso máximos por modo y los cortantes de piso máximos probables en las direcciones indicadas.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Tabla resumen de cortantes de piso máximos en X - VXR() (3x21)

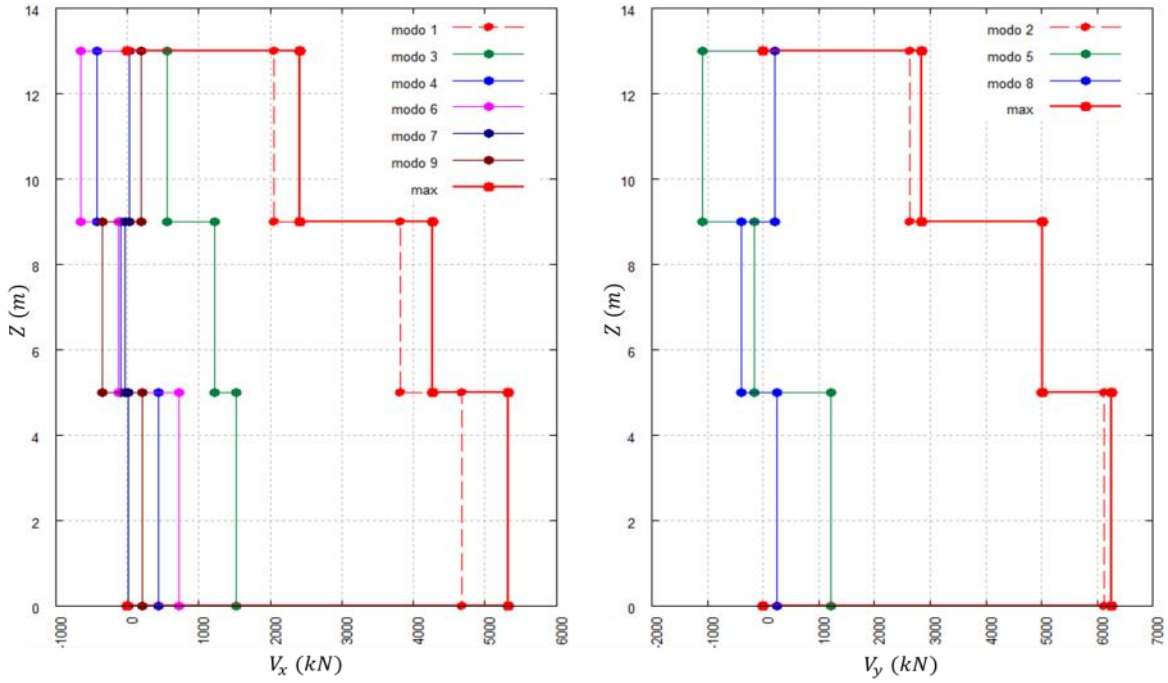
Piso	C1 Modo 1	C3 Modo 3	C4 Modo 4	C6 Modo 6	C7 Modo 7	C9 Modo 9	C19 Máx-X	C20 Máx-Y	C21 Máximo
3°	2050.2	563.8	-423.9	-646.4	26.6	192.5	2409.0	0.0	2409.0
2°	3816.7	1226.6	-89.6	-117.4	-35.9	-347.2	4264.4	0.0	4264.4
1°	4677.3	1524.6	430.7	731.6	17.8	207.4	5317.2	0.0	5317.2

Tabla resumen de cortantes de piso máximos en Y - VYR() (3x21)

Piso	C11 Modo 2	C14 Modo 5	C17 Modo 8	C19 Máx-X	C20 Máx-Y	C21 Máximo
3°	2632.7	-1091.5	216.4	0.0	2852.3	2852.3
2°	4998.2	-164.7	-400.6	0.0	5015.8	5015.8
1°	6121.5	1207.8	239.6	0.0	6250.8	6250.8

Tabla 8.52. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Cortantes de piso en direcciones x e y

Con los datos almacenados en los archivos *DVX.txt* y *DVY.txt* creados también para porticos espaciales, se pueden graficar los diagramas de cortante de piso de cada modo de vibración, asi como los diagramas de cortantes máximos probables. La Gráfica 8.60 muestra la contribución al cortante de piso de los modos con participación diferente de cero.



Gráfica 8.60. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Cortantes de piso en direcciones x e y

- *Acciones máximas en extremos de elementos*

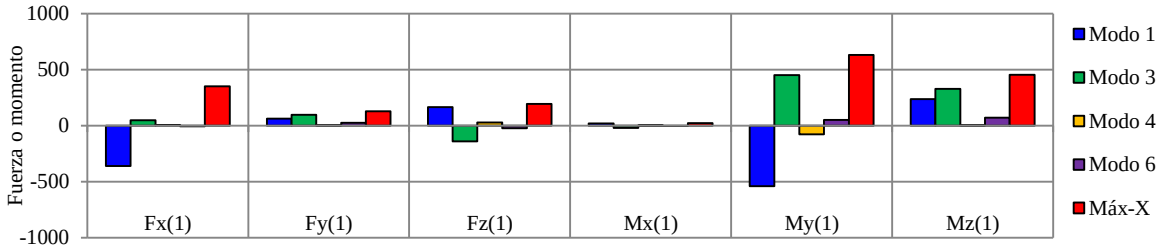
La Tabla 8.53 contiene las acciones máximas en los extremos del Elemento 1 localizado entre los nudos 1 y 19. Los datos han sido tomados del archivo de texto *FEL-1.txt*. De igual forma la Gráfica 8.61 muestra las acciones máximas en el extremo inicial (*nudo 1*) producidas por $\ddot{u}_{gx}$ y $\ddot{u}_{gy}$ actuando de forma independiente y de forma simultánea.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Acciones máximas en los extremos del elemento N°1 - FEL-1()

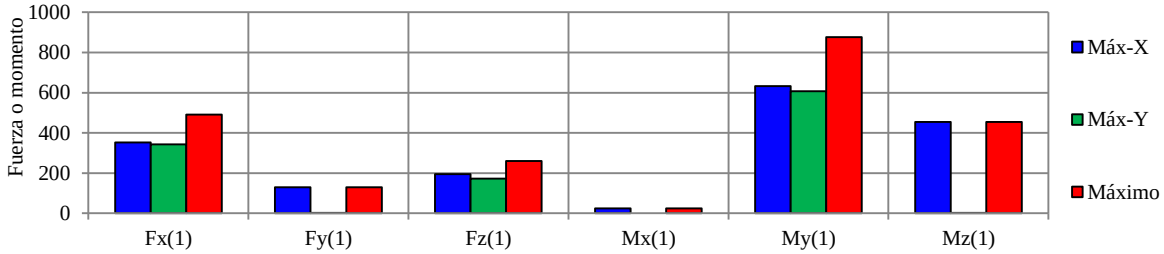
Fuerza o momento	C1 Modo 1	C3 Modo 3	C4 Modo 4	C6 Modo 6	C7 Modo 7	C9 Modo 9	C11 Modo 2	C14 Modo 5	C17 Modo 8	C19 Máx-X	C20 Máx-Y	C21 Máximo
$F_{\bar{x}}^{(1)}$	-359.3	48.1	8.0	-3.5	1.5	2.5	-342.9	6.6	3.6	352.4	343.0	491.7
$F_{\bar{y}}^{(1)}$	63.3	97.5	0.4	27.5	-0.8	5.5	0.0	0.0	0.0	130.2	0.0	130.2
$F_{\bar{z}}^{(1)}$	166.6	-138.2	29.2	-20.6	2.9	-2.4	169.5	33.4	5.1	195.0	173.0	260.7
$M_{\bar{x}}^{(1)}$	21.5	-18.2	2.2	-1.6	0.2	-0.1	0.0	0.0	0.0	25.1	0.0	25.1
$M_{\bar{y}}^{(1)}$	-540.2	452.8	-75.5	53.5	-6.7	5.5	-600.9	-88.2	-11.8	632.1	607.9	877.0
$M_{\bar{z}}^{(1)}$	239.1	330.9	1.7	72.5	-1.8	12.6	0.0	0.0	0.0	453.9	0.0	453.9
$F_{\bar{x}}^{(19)}$	359.3	-48.1	-8.0	3.5	-1.5	-2.5	342.9	-6.6	-3.6	352.4	343.0	491.7
$F_{\bar{y}}^{(19)}$	-63.3	-97.5	-0.4	-27.5	0.8	-5.5	0.0	0.0	0.0	130.2	0.0	130.2
$F_{\bar{z}}^{(19)}$	-166.6	138.2	-29.2	20.6	-2.9	2.4	-169.5	-33.4	-5.1	195.0	173.0	260.7
$M_{\bar{x}}^{(19)}$	-21.5	18.2	-2.2	1.6	-0.2	0.1	0.0	0.0	0.0	25.1	0.0	25.1
$M_{\bar{y}}^{(19)}$	-292.8	238.4	-70.4	49.6	-7.8	6.3	-246.5	-78.9	-13.6	343.8	259.6	430.8
$M_{\bar{z}}^{(19)}$	77.2	156.4	0.3	65.1	-2.0	14.7	-0.1	0.0	0.0	200.4	0.1	200.4

Tabla 8.53. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones máximas en los extremos del Elemento 1



a) Acciones por aceleración de la base en dirección x

b) Acciones por aceleración de la base en dirección y



c) Acciones por aceleración de la base en direcciones x e y simultáneamente

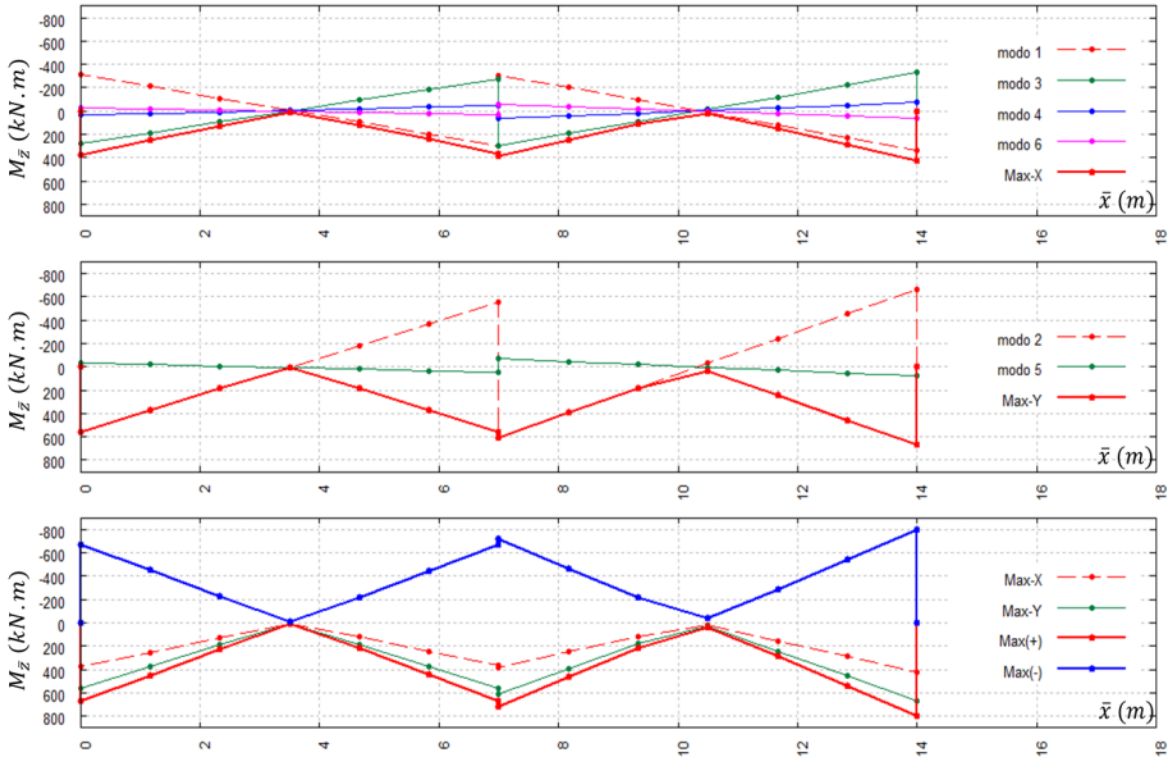
Gráfica 8.61. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones máximas en el extremo inicial del Elemento 1

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

- *Acciones internas máximas en vigas y columnas*

Con la información almacenada en los archivos de texto de diagramas de acciones internas se puede graficar los diagramas asociados a cada modo de vibración, o los diagramas de acciones máximas probables sobre cualquier eje de vigas o de columnas.

Gráfica 8.62 muestra los diagramas de momento flector en dirección $\overline{z}$ de la Viga 22 paralela al eje y, localizada en el tercer nivel de la estructura. En la primera parte muestra el aporte de cada modo de vibración y el diagrama de momentos máximos probables cuando actua solamente $\ddot{u}_{gx}$. En la segunda parte se muestra el aporte de cada modo y el diagrama de momentos máximos probables cuando actua solamente $\ddot{u}_{gy}$. En la tercera parte se muestran los diagramas de momentos máximos probables cuando actúan $\ddot{u}_{gx}$ y $\ddot{u}_{gy}$ individual y simultáneamente, estos últimos corresponden a las envolventes. Para la construcción de la gráfica se utilizaron los datos almacenados en el archivo *MZ-V22.txt*.

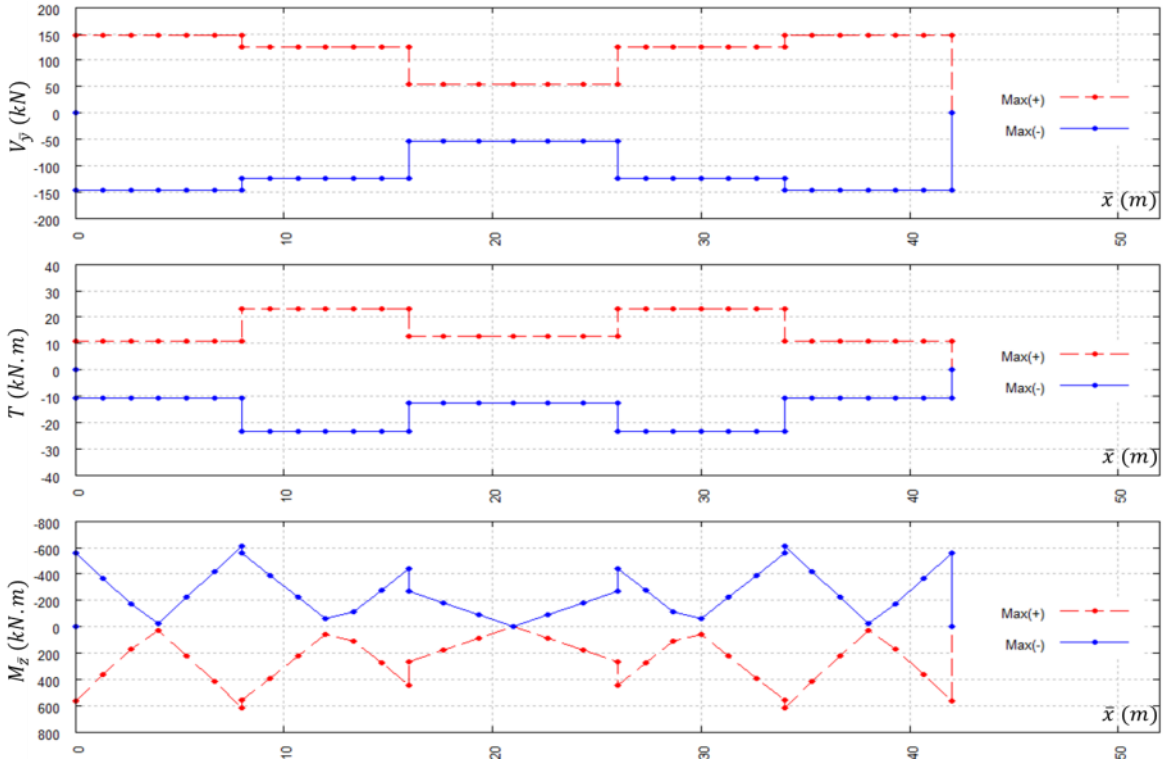


Gráfica 8.62. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Diagramas de momento flector en z local de la Viga V-22

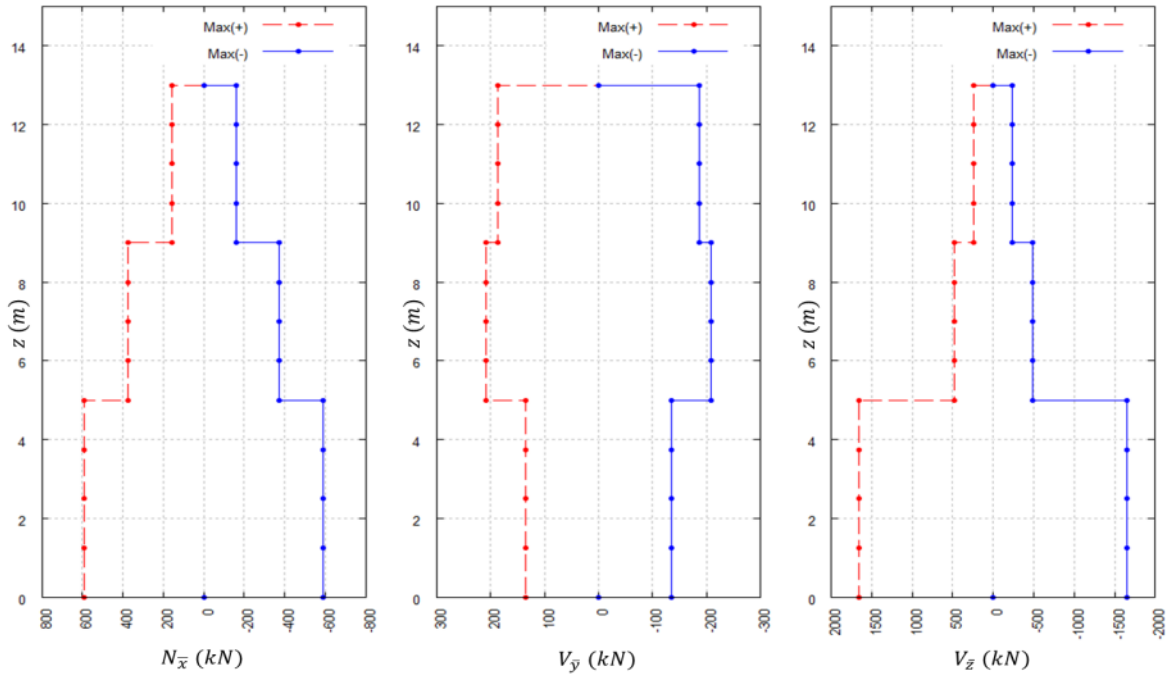
La grásfica muestra que se producen acciones internas en esta viga, y en general en todas las vigas paralelas al eje y, así como en las columnas, cuando actúa la aceleración de la base en cada dirección principal del pórtico.

También es posible graficar las envolventes de acciones internas en cualquier eje de viga o de columna. La Gráfica 8.63 y la Gráfica 8.64 muestran las envolventes de acciones internas diferentes a cero de la viga V-03 y de la columna C-08 respectivamente.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

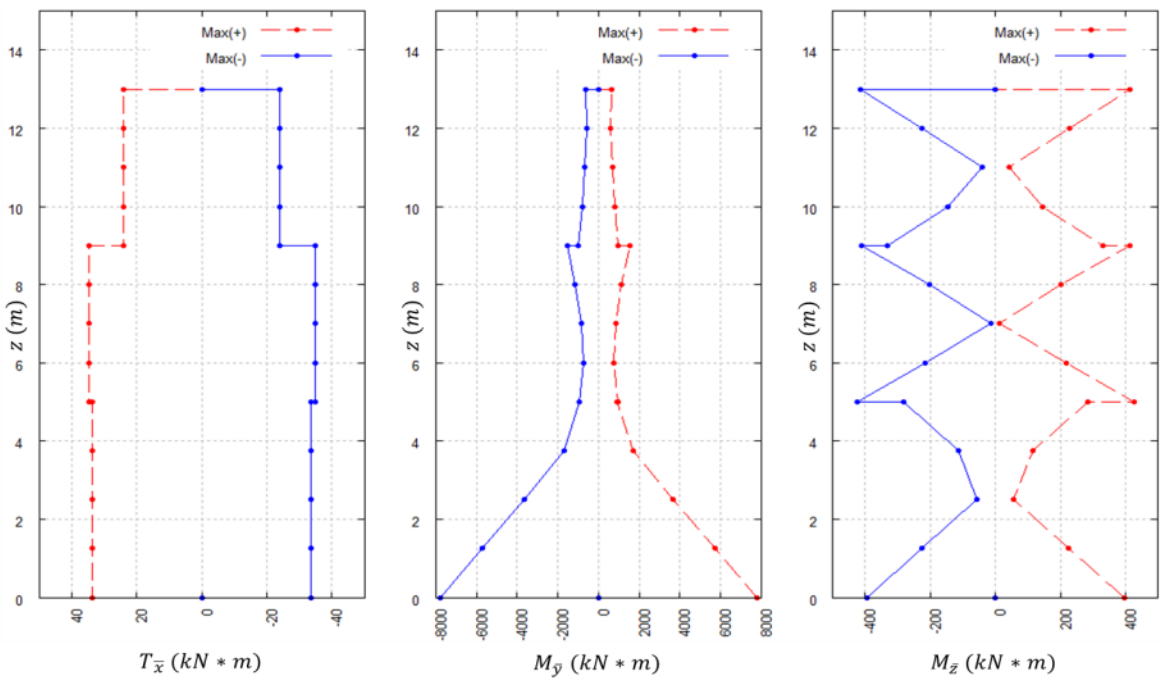


Gráfica 8.63. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Envolventes de acciones internas máximas probables de la Viga V-03



Gráfica 8.64. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Envolventes de acciones máximas de la Columna C-08

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013



Gráfica 8.64. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Envolventes de acciones máximas de la Columna C-08 (*cont.*)

A modo de verificación la Figura 8.56 muestra la envolvente positiva de cortante y momento mostradas en la Gráfica 8.63 y calculados con SAP2000©. Los resultados obtenidos coinciden con los obtenidos con UNDIN.

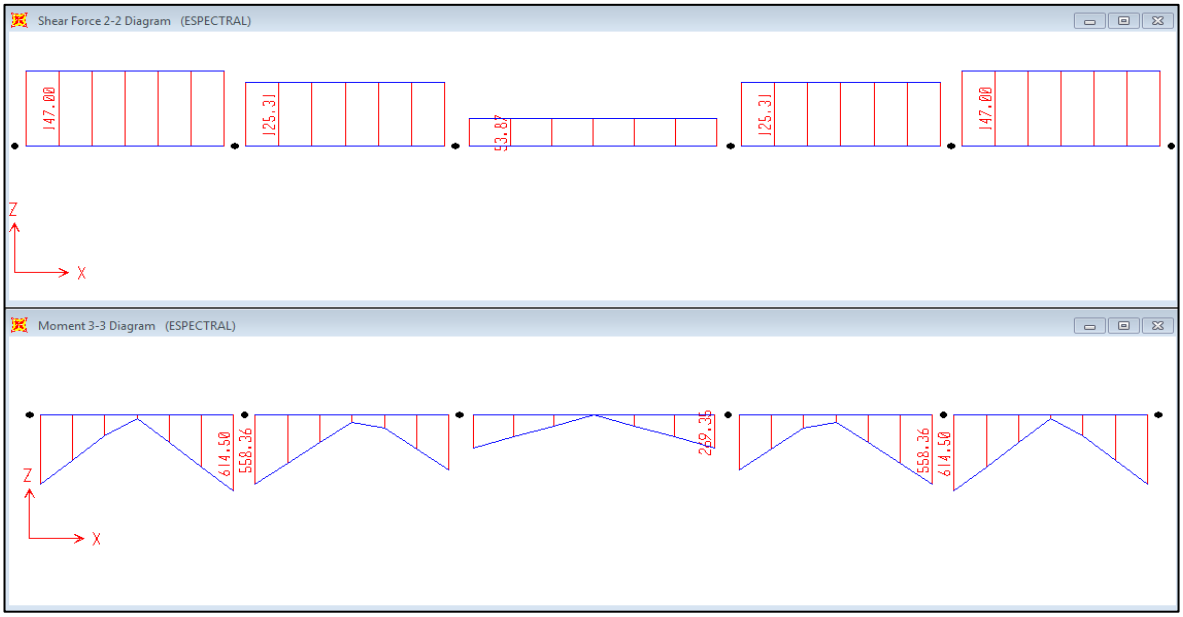


Figura 8.56. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de acciones internas en la viga V-03

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

- *Tiempos de cálculo*

La Figura 8.57 muestra que el tiempo total de cálculo del pórtico, utilizando el método de análisis modal espectral, es de 10 segundos aproximadamente. Este tiempo es significativamente menor que el requerido para resolver el mismo pórtico por análisis modal cronológico.

Nuevamente la etapa mas demorada es la que tiene que ver con la creación de los archivos de texto de diagramas de acciones internas en vigas y columnas.

```
Inmediato

Programa Didáctico a Código Abierto de Análisis Dinámico de Estructuras
Universidad Nacional de Colombia. 2013

calculando ...
Lectura y definición de parámetros generales                                  0.63
Lectura de tablas de datos                                                    0.86
Cantidad de grados de libertad por tipo                                       0.86
Creación de matrices auxiliares                                               0.86
ANÁLISIS MODAL                                                                0.87
Matriz de masa                                                                0.87
Matriz de rigidez considerando todos los grados de libertad                   1.79
Matriz de rigidez condensada a grados de libertad de interés                  1.80
Matriz de rigidez lateral                                                     1.80
Coordenadas de centros de rigidez                                             1.80
Frecuencias, periodos y modos de vibración ortonormalizados                   1.83
Matrices modales de masa, rigidez y amortiguamiento                           1.83
Factores de participación y masa modal efectiva                               1.83
ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL                                                      1.83
Desplazamientos generalizadas máximos                                         1.83
Desplazamientos máximos probables de centros de masa                          1.84
Desplazamientos máximos probables de los nudos en coordenadas globales        2.25
Derivas máximas probables de centros de masa                                  2.25
Derivas máximas por ejes de columnas                                          3.92
Acciones equivalentes máximas probables trasladadas a centros de masa         3.92
Cortantes de piso máximos probables                                           3.92
Acciones máximas probables en los extremos de los elementos                   4.48
Diagramas de acciones internas en vigas y columnas                            7.33
¡ fin del cálculo !                                                           10.05
```

Figura 8.57. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tiempos de cálculo obtenidos por el método de análisis modal espectral

8.3. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano

A continuación se realiza el análisis dinámico inelástico del pórtico plano tomado inicialmente como ejemplo. Se describe la idealización de la estructura para el análisis inelástico, los parámetros de análisis, los datos de entrada y los resultados obtenidos con UNDIN, los cuales se comparan con los obtenidos utilizando SAP2000©.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013