UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Optimización Topologíca en Estructuras de Tres Dimensiones Usando Elementos Finitos en el Campo Elástico Lineal

César Arturo Ochoa Sánchez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola
Bogotá, Colombia
Año 2018

Topology Optimization in Three-Dimensional Structures Using Finite Elements in the Linear Elastic Field

César Arturo Ochoa Sánchez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ingeniería - Estructuras

Director:
Ing. Ricardo L. Parra Arango

Análisis y Diseño Estructural
Optimizacion de Estructuras
Grupo de Investigación:
GIES

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola
Bogotá, Colombia
Año 2018

A Dios.

A mi esposa Alejandra y a mis hijos Juan Sebastián y Julieta.

A mis padres, Arturo y Marina, y a mis hermanos, Jenni y Edwin.

Agradecimientos

En primer lugar deseo agradecer a Dios, la luz que guía mi vida, por estar siempre a mi lado.

Al Ingeniero Ricardo León Parra Arango, director de la tesis, por aceptar ser mi director de tesis, y por guiarme e ilustrarme en el estudio de la optimización topologica. Sus valiosos aportes, comentarios, observaciones y orientación constituyeron la clave para el buen desarrollo de la tesis. Por su paciencia durante este tiempo de trabajo y por los sabios consejos siempre tan útiles y oportunos.

Deseo agradecer de manera muy especial a mi esposa, Luz Alejandra Agudelo Gil, por su apoyo y amor incondicional que fueron fundamentales en la elaboración de la tesis, su paciencia, sus consejos y motivación me permitieron mantener la esperanza en alto. A mis hijos, Juan Sebastián Ochoa Agudelo y Julieta Ochoa Agudelo, por ser la fuente de mi motivación, felicidad y fuerza inagotable.

A mis padres, Arturo Ochoa Rojas y Luz Marina Sánchez, por formarme como persona y profesional, por el amor y apoyo que me han brindado durante toda la vida. Y a mis hermanos, Jenni Marcela Ochoa Sánchez y Edwin Alexander Ochoa Sánchez, que con su ejemplo me inspiraron a emprender y mantenerme en este proyecto.

Agradezco a los ingenieros Dorian Luis Linero Segrera y Martín Estrada Mejía, jurados de la tesis, que con sus aportes y discusión crítica ayudaron a mejorar notablemente la descripción de los conceptos matemáticos, la redacción y la definición del alcance de la tesis. Sus observaciones permitieron realizar un análisis más riguroso de los resultados.

Resumen

En el presente trabajo se desarrollo una herramienta computacional en lenguaje de programación de MatLab R2015a que permite la optimización topológica de estructuras en tres dimensiones, utilizando elementos finitos tetraedicos con un comportamiento mecánico lineal elástico, y con un modelo de parametrización de la densidad SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). Para ello, se comenzó por estudiar el estado del conocimiento de la optimización topológica con el propósito de ubicar y referenciar los conceptos desarrollados en la presente tesis. Posteriormente, se establece la formulación del elemento finito tedraedrico y la del problema de optimización que son la base para la formulación del modelo de optimización topológica en 3D propuesto. Este modelo se formula por medio de algoritmos y se implementa en el lenguaje de programación de Matlab R2015a, utilizando algunas rutinas del programa CALFEM (Computer Aided Learning of the Finite Element Method) para realizar el análisis por elementos finitos.
Finalmente todos los resultados conseguidos se validaron en contra parte a soluciones presentadas en la literatura o en investigaciones similares que abordaron el problema con criterios análogos a como se establecieron en el presente trabajo.
Palabras clave: Optimización Topológica, optimización estructural, elementos finitos, diseño optimo, peso mínimo.

Abstract

In the present work a computational tool was developed in MatLab programming language R2015a that allows the topological optimization of structures in three dimensions, using finite element tetrahedral elements with a linear elastic mechanical behavior, and with a SIMP density parameterization model (Solid Isotropic material with penalty). To this end, we began to study the state of knowledge of topological optimization with the aim of locating and referencing the concepts developed in the present thesis. Then, the formulation of the finite element and the optimization problem are established, which are the basis for the formulation of the proposed 3D topological optimization model. This model is formulated using algorithms and is implemented in the Matlab R2015a programming language using some routines from the CALFEM (Computer Assisted Learning of the Finite Element Method) program to perform the finite element analysis.
Finally all the results obtained were validated against the solutions presented in the literature or in similar investigations that approached the problem with similar criteria to how they were established in the present work.
Keywords: Topological optimization, structural optimization, finite elements, optimum design, minimum weight.)

Contenido

Agradecimientos vii

Resumen ix

Lista de símbolos xiv

Lista de Tablas xix

Lista de Figuras xix

1. Introducción 1

1.1. Breve reseña histórica de la optimización de estructuras 2
1.2. Objetivos 5
1.3. Motivación, justificación y antecedentes 6
1.4. Alcance 11
1.5. Estructura del Documento 12

2. Formulación del elemento finito tridimensional 14

2.1. Teoría de la elasticidad lineal para elementos tridimensionales 14
2.1.1. Campos de las deformaciones y de los esfuerzos 14
2.1.2. Modelo constitutivo elástico lineal de material 17
2.1.3. Ecuaciones de gobierno 19
2.1.4. Planteamiento general del problema elástico lineal en la mecánica del medio continuo 19
2.2. Soluciones al problema tridimensional 20
2.2.1. Soluciones analíticas 20
2.2.2. Solución ingenieril de la biela y el tirante 21
2.3. Método de los elementos finitos 23
2.3.1. Principio de los trabajos virtuales 23
2.3.2. Formulación del problema elástico con el MEF 25
2.3.3. Energía interna de deformación 28
2.3.4. Elemento tetraédrico lineal 29

3. Elementos de la optimización estructural **33**
3.1. Formulación del problema de optimización 33
3.1.1. Variables de diseño 33
3.1.2. Función objetivo 34
3.1.3. Restricciones 34
3.1.4. Formulación estándar 34
3.2. Proceso de solución 36
3.3. Métodos específicos y generales 36
3.4. Herramientas analíticas de la optimización 37
3.4.1. Optimización basada en el cálculo diferencial 37
3.4.2. Optimización basada en el cálculo variacional 39
3.4.3. Método de la sustitución directa 40
3.4.4. Multiplicadores de Lagrange 41
3.5. Condiciones de optimalidad 42
3.5.1. Optimización sin restricciones 42
3.5.2. Optimización con restricciones 43
3.6. Análisis de la sensibilidad 45
3.6.1. Métodos directo y adjunto 46

4. Optimización topológica **48**
4.1. Objeto de la optimización topológica 48
4.2. Formulación del diseño de mínimo cumplimiento 49
4.3. Parametrización de la densidad por el modelo SIMP 51
4.4. Patología de la solución del POT-3D 53
4.4.1. Dependencia del mallado inicial 53
4.4.2. Efecto tablero de ajedrez 54
4.5. Técnicas para el control de las patologías de la solución 55
4.5.1. Técnica de filtrado de la sensibilidad 56
4.5.2. Técnica de filtrado de la densidad 57

5. Modelo matemático propuesto para la optimización topológica en 3D **58**
5.1. Formulación del POT-3D 58
5.2. Variables de diseño 59
5.3. Función objetivo 59
5.4. Restricciones 60
5.4.1. Restricciones de igualdad 60
5.4.2. Restricciones de desigualdad 61
5.5. Condiciones de optimalidad 61
5.6. Esquema de actualización de la densidad 62
5.7. Análisis de la sensibilidad 64

5.8. Filtro de sensibilidades 65
5.9. Criterio de convergencia de la optimización 67
5.10. Procedimiento general para la solución POT-3D 68

6. Implementación del modelo matemático propuesto para la solución del POT-3D 70
6.1. Esquema general 71
6.2. Algoritmos para resolver el POT-3D 73
6.2.1. Método de los elementos finitos 73
6.2.2. Optimización topológica 74
6.2.3. Esquema de actualización 77
6.3. Selección del entorno de programación 79
6.4. Codificación de las principales funciones del modelo propuesto 84
6.4.1. Análisis por MEF 85
6.4.2. Evaluación de la función objetivo y la sensibilidad 86
6.4.3. Filtrado de la sensibilidad 87
6.4.4. Actualización de la densidad 89
6.5. Consideraciones sobre la herramienta computacional desarrollada 91

7. Validación y aplicación del modelo de optimización topológica en 3D propuesto 93
7.1. Plan de validación y aplicación 94
7.2. Casos de validación y estudio paramétrico 95
7.2.1. Viga tridimensional aperaltada en voladizo 97
7.2.2. Viga MBB (Messerschmitt-Bölkow-Blohm) 109
7.2.3. Silla de Cuatro Patas (4-legged stool) 119
7.3. Casos de aplicación 128
7.3.1. Ménsula 129
7.3.2. Ménsula invertida o viga tipo L 134
7.3.3. Estructuras tipo losa 139
7.4. Aplicaciones especiales en la ingeniería estructural 145
7.4.1. Puente tipo cercha 145
7.4.2. Dado de fundación - Método de las bielas y tirantes 148

8. Conclusiones, recomendaciones y trabajos a futuro 152

A. Anexo: Función principal de la optimización topológica en 3D 155

B. Anexo: Función para graficar tedraedros arbitrariamente orientados en el espacio 160

C. Manual del usuario 163
C.1. Requisitos de software 163
C.2. Requisitos de hardware recomendados 164

C.3. Creación y edición de los datos de entrada 164
C.4. Datos de salida 164
C.5. Procedimiento 165
C.6. Graficación de resultados 170

Bibliografía **171**

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$\boldsymbol{u}$	Vector de desplazamiento	m	*Ecuación* 2-1
$\boldsymbol{r}$	Vector de posición	m	*Sección* 2.1
E	Modulo de elasticidad	MPa	*Sección* 2.1
G	Modulo de elasticidad a cortante	MPa	*Sección* 2.1
$\boldsymbol{b}$	Vector de fuerzas de cuerpo	kN	*Figura* 2.9
$\boldsymbol{t}$	Vector de fuerzas de superficie	kN	*Figura* 2.9
$\boldsymbol{D}$	Matriz constitutiva elástica	MPa	*Ecuación* 2-12
$\boldsymbol{a}$	Vector global de desplazamientos nodales	m	*Ecuación* 2-73
$\boldsymbol{f}$	Vector global de fuerzas nodales	kN	*Ecuación* 2-73
$\boldsymbol{K}$	Matriz de rigidez global	$\frac{m}{kN}$	*Ecuación* 2-73
$N_i^{(e)}$	Función de forma del elemento (e)	1	*Ecuación* 2-62
$\boldsymbol{N_{(e)}}$	Matriz de funciones de forma del elem. (e)	$\frac{m}{kN}$	*Ecuación* 2-62
$\boldsymbol{P_i}$	Carga puntual del nodo i	kN	*Ecuación* 2-59
V	Volumen	m^3	*Ecuación* 2-59
A	Área	m^2	*Ecuación* 2-59
$u_i^{(e)}$	Componente de desplazamiento nodal	m	*Ecuación* 2-60
$v_i^{(e)}$	Componente de desplazamiento nodal	m	*Ecuación* 2-60
$w_i^{(e)}$	Componente de desplazamiento nodal	m	*Ecuación* 2-60
U	Energía interna de deformación del sistema	J	*Ecuación* 2-77
$U^{(e)}$	Energía interna de deformación del elemento	J	*Ecuación* 2-77
$\boldsymbol{B_{(e)}}$	Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma	m^{-1}	*Ecuación* 2-86

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición	
$\boldsymbol{K^{(e)}}$	Matriz de rigidez elemental	$\frac{m}{kN}$	*Ecuación*	2-87
$\boldsymbol{f_s^{(e)}}$	Vector de fuerzas nodales equivalentes de fuerza de superficie del elemento (e)	kN	*Ecuación*	2-90
$\boldsymbol{f_{sc}^{(e)}}$	Vector de fuerzas de superficie en una cara del elemento (e)	$\frac{m}{m^2}$	*Ecuación*	2-90
$\boldsymbol{f_b}$	Vector de fuerzas nodales equivalentes de fuerzas de cuerpo del elemento (e)	kN	*Ecuación*	2-92
n_g	Restricciones de desigualdad	1	*Ecuación*	3-4
n_c	Restricciones de igualdad	1	*Ecuación*	3-4
$\boldsymbol{H}$	Matriz Hessiana	J	*Ecuación*	3-6
E_{ijkl}	Tensor constitutivo	MPa	*Ecuación*	4-1
$l(\boldsymbol{u})$	Trabajo externo	J	*Ecuación*	4-2
$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$	Trabajo virtual interno	J	*Ecuación*	4-1
$\boldsymbol{v}$	Vector de desplazamiento virtual	m	*Ecuación*	4-1
$\hat{H}_i$	Operador de convolución	m	*Ecuación*	4-10
$dist(k, i)$	Distancia entre elementos	m	*Ecuación*	4-10
$\langle K \rangle$	Kernel de convolución	1	*Ecuación*	4-12
r_{min}	Radio mínimo de filtrado	m	*Ecuación*	4-10
$c(\rho_e)$	Función objetivo	J	*Ecuación*	5-3
$fvol$	Fracción de volumen	1	*Ecuación*	5-2
p	Potencia de penalización	1	*Ecuación*	5-1
$\boldsymbol{B_{(e)}}$	Vector de baricentro del elemento (e)	m	*Ecuación*	5-28

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición	
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vector de deformación	1	*Ecuación*	2-5
ε_{ij}	Componente de deformación lineal	1	*Ecuación*	2-3

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
γ_{ij}	Componente de deformación angular	1	*Ecuación* 2-4
$\tilde{\nabla}$	Operador diferencial	1	*Ecuación* 2-5
$\boldsymbol{\sigma}$	Vector de esfuerzos	1	*Ecuación* 2-7
σ_{ij}	Componente de esfuerzo	MPa	*Ecuación* 2-9
ν	relación de Poisson	1	*Ecuación* 2-8
ϕ	Potencial escalar	Jm	*Ecuación* 2-17
ρ_{min}	Densidad mínima	1	*Ecuación* 5-2
ρ_e	Densidad del elemento (e)	1	*Ecuación* 5-1
$\boldsymbol{\nabla}$	Operador diferencial vectorial	1	*Ecuación* 2-21
δ	Operador de variación	1	*Sección* 2.3.1
Π	Funcional	1	*Ecuación* 2-50
ϵ	Parámetro de amplitud	1	*Ecuación* 3-8
$\eta(x)$	Función de forma	1	*Ecuación* 3-8
λ_i	Multiplicador de Lagrange	1	*Ecuación* 3-17
$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$	Función de Lagrange	1	*Ecuación* 3-17
$\rho(\boldsymbol{x})$	Densidad en el punto $\mathbf{x}$	1	*Ecuación* 4-7
η	Variable de ajuste de convergencia	1	*Ecuación* 5-15
ζ	Variable de ajuste de convergencia	1	*Ecuación* 5-15

Abreviaturas

Abreviatura	Término
$POT-3D$	Problema de optimización topológica en 3D
$ANSYS$	Analysis System
$CALFEM$	Computer aided learning of the finite element method
KKT	Karush-Kuhn-Tucke
$MATLAB$	Matrix laboratory
MEF	Método de los elementos finitos
MMA	Method of moving asymptotes
$PEFICA$	Programa de elementos finitos a código abierto

Abreviatura	**Término**
$SIMP$	Solid isotropic material with penalization
VBA	Visual basic for applications

Lista de Tablas

7-1. Plan de validación y ejercicios de aplicación. 94
7-2. Variables utilizadas en la referencia [43]. 97
7-3. Variables utilizadas para la validación de la optimización. 99
7-6. Optimización topológica de viga en voladizo con variación en la posición de la carga. 107
7-5. Variables del modelo de referencia [43] de la viga MBB. 109
7-6. Variables del modelo de viga MBB. 111
7-7. Variables del modelo de referencia de la silla de cuatro patas. 119
7-8. Variables del modelo de silla de cuatro patas. 121
7-9. Variables del modelo de la ménsula. 130
7-10.Variables del modelo de ménsula invertida. 135
7-11.Variables del modelo de la losa. 140
7-12.Variables del modelo de puente descolgado. 146
7-13.Variables del modelo del dado de fundación. 150

Lista de Figuras

2-1. Deformación longitudinal. (Adaptada de la referencia [31]). 15
2-2. Estado general de esfuerzos.(Fuente: autor). 16
2-3. Acciones y restricciones fisicas. (Adaptada de la referencia [31]). 24
2-4. Elemento tetraédrico. 29

3-1. Tipos de valores extremos en una función con una variable independiente. a.) Valor mínimo. b.) Valor máximo. c.) Valor de inflexión. 39

4-1. Ejemplo de optimización topológica de viga en voladizo. (Tomada de [55]). a.) Modelo mecánico. b.) Optimizacion topologica. 49
4-2. Dependencia del refinamiento con respecto al mallado. (Adaptada de [8]). a.) Esquema mecánico. b.) Refinamiento menor de la malla. c.) Refinamiento moderado de la malla. d.) Alto grado de refinamiento en la malla. 54
4-3. Patrón de tablero de ajedrez. a) Fenómeno en 2D. b) Fenómeno en 3D. (Tomada de [8] y [66]). 55

5-1. Técnica de filtrado de la sensibilidad. (Fuente: autor). 66

6-1. Interacción de programas con PEFiCA como base. (Fuente: autor). 81
6-2. Interacción de programas con PEFiCA-MATLAB como base. (Fuente: autor). 82
6-3. Interacción final de programas. (Fuente: autor). 84

7-1. Modelo de viga aperaltada tridimensional en voladizo. a.) Esquema del modelo numérico. b.) Discretización del dominio por elementos tetraedricos. 98
7-2. Optimización topológica de una viga empotrada en la cara de un extremo y con una carga puntual en el centro de la cara del otro extremo. 100
7-2. (...continuación)Optimización topológica de una viga empotrada en la cara de un extremo y con una carga puntual en el centro de la cara del otro extremo. 101
7-3. Comportamiento de la función objetivo. 102
7-4. Validación de la optimización topológica de la viga tridimensional aperaltada en voladizo. a.) Optimización topológica utilizando herramienta propuesta. b.) Optimizacion topologica presentada en la referencia de validación [43]. . . 104
7-5. Modelos del estudio paramétrico de la influencia de la posición de la carga. a.) Carga en la parte superior central. b.) Carga en la parte inferior central. . 106

7-6. Modelo de media viga MBB. a.) Esquema del modelo físico. b.) Discretización con elemento tetraédricos. 110
7-7. Optimización topológica de una parte simétrica de una viga MBB. 112
7-7. (...continuación.)Optimización topológica de una parte simétrica de una viga MBB. 113
7-8. Validación de la optimización topológica de la viga MBB. a.) Optimización topológica utilizando herramienta propuesta. b.) Optimizacion topologica presentada en la referencia de validación [43]. 115
7-9. Efecto del filtrado por sensibilidades en la optimización topológica de la viga MBB. a) Resultado sin filtro. b) Resultado utilizando una técnica de filtrado. 117
7-10.Modelo de silla de cuatro patas. a.) Esquema del modelo numérico. b.) Discretización con elemento tetraédricos. 120
7-11.Proceso de optimización topológica para el problema de la silla de cuatro patas.122
7-12.Validación de la optimización topológica de la silla de cuatro patas. a.) Optimización topológica utilizando herramienta propuesta. b.) Optimizacion topologica presentada en la referencia de validación [43]. 124
7-13.Efecto de las condiciones de apoyos en la optimización topológica de la silla de cuatro patas. a.) Apoyos totalmente restringidos. b.) Apoyos con restricción en sentido vertical. 126
7-14.Efecto de las condiciones de apoyo en la optimización topológica de la silla de cuatro patas. a) Resultado con apoyos empotrados. b) Resultado con apoyos restringidos en la dirección vertical. 126
7-14.(...continuación.)Efecto de las condiciones de apoyo en la optimización topológica de la silla de cuatro patas. a) Resultado con apoyos empotrados. b) Resultado con apoyos restringidos en la dirección vertical. 127
7-15.Modelo de ménsula. a.) Esquema del modelo numérico. b.) Discretización con elemento tetraédricos. 129
7-16.Resultado de la optimización topológica de la ménsula. i= 44, c=5.96 J. . . . 131
7-17.Efecto de potencia de penalización en la optimización topológica de la ménsula. a.) Potencia p=3. b.) Potencia p=4. 132
7-18.Modelo de ménsula invertida. a.) Esquema del modelo numérico. b.) Discretización con elemento tetraédricos. 134
7-19.Resultado de la optimización topológica de la ménsula invertida. i= 58, c=2237 J. 136
7-20.Efecto del refinamiento del mallado en la optimización topológica de la ménsula invertida. a) Resultado con una malla de 9398 elementos. b) Resultado con una malla de 24355 elementos. 138
7-21.Modelos de estructuras tipo parrilla. a) Modelo numérico. b) Discretización con elementos tetraédricos. 139
7-22.Resultado de la optimización topológica de la losa. i= 110, c=9.89 J. 141

7-23.Efecto del espesor de losas en la optimización topológica. a) Espesor de 1m. b) Espesor de 5m. c) Espesor de 10m. 143
7-23.(...continuación)Efecto del espesor de losas en la optimización topológica. a) Espesor de 1m. b) Espesor de 5m. c) Espesor de 10m. 144
7-24.Modelo de estructuras puente descolgado. a) Modelo físico. b) Discretización con elementos tetraédricos. 145
7-25.Optimización topológica de puente descolgado. i=184, c=38.71 J. 147
7-26.Diseños de puentes tipo Vierendeel. a) Con optimización topológica. b) Con metodologías de diseño convencionales. (Tomado de: en.wikipedia.org) 148
7-27.Modelo de estructuras dado de fundación. a) Modelo físico. b) Discretización con elementos tetraédricos. 149
7-28.Optimización topológica de dado de fundación. i= 40, c= 18.75 J. 150
7-29.Diseños de dados de fundación. a) Con optimización topológica. b) Con el Método de la Biela y el Tirante. 151

C-1. Definición de elemento finito en ANSYS. 165
C-2. Construcción del dominio inicial. 166
C-3. Archivos de exportación de ANSYS. 167
C-4. Exportación de datos a MatLab. 168
C-5. Edición de datos en Excel. 168

1. Introducción

Desde el momento en que el ser humano comenzó a realizar construcciones para vivienda, almacenamiento y movilización ha estado presente la necesidad de que estas sean seguras, eficientes y de alguna forma económicas. El concepto de seguridad surgió de criterios prácticos dictados generalmente por los arquitectos o constructores, tal es el caso del código de Hammurabi (1760 a.C). En él se indica, por ejemplo, el siguiente criterio: *"si llegara a fallar la edificación matando a uno de los miembros de la familia el arquitecto, su hijo o su esclavo, recibirían la pena de muerte"*. Bajo el concepto de eficiencia se pretende buscar que las estructuras cumplan con su función de manera adecuada. El concepto de economía ha evolucionado desde su medición en términos de mano de obra, por ejemplo en las construcciones de las pirámides, pasando por el costo de los materiales, hasta considerar aspectos ambientales. Es precisamente las formulaciones existentes acerca del concepto de economía las que resaltan la importancia de las técnicas de optimización, las cuales han evolucionado desde concepciones empíricas, experimentales hasta técnicas avanzadas de optimización numérica.

En el mundo actual la explotación de las materias primas en forma racional y la utilización de energías renovables juegan un papel preponderante, ya que favorece el equilibrio ambiental y la conservación de los ecosistemas. La optimización de estructuras tiene un papel decisivo en este fin, ya que tiene un impacto directo al buscar un balance entre la explotación, transporte, generación de energía para su transformación, y otras actividades complementarias.

La formulación del estudio de las estructuras desde un contexto matemático se originó con los modelos propuestos por Francis Bacon (1561-1626) y Galileo Galilei (1564-1642), este ultimo en su obra [23] *Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno, a due nuove scienze attenenti alla mecanica et i movimenti locali (1638)* aplicó un modelo científico al estudio de las estructuras. En esta obra ya se comenzaba a estudiar la optimización de vigas en voladizo [46].

A la par de la evolución en el conocimiento de las estructuras también se presento un desarrollo en los materiales de construcción, tales como la utilización de concretos de cementantes naturales en la antigua Grecia hacia el 500 a.C. y la industrialización del acero como material para construcción en el siglo XVIII. No obstante la sobreexplotación de materias primas, los altos costos de los materiales y de las labores inherentes de la construcción, ocasionó que los estudios relacionados con la optimización de estructuras tomaran un papel muy relevante en

el desarrollo de los proyectos.

Por otro lado, la concepción de la estructura más óptima de un proyecto por los métodos tradicionales se basa en conceptos subjetivos tomados por los ingenieros diseñadores. Es decir, basados en su experiencia, conocimiento y en los lineamientos arquitectónicos los ingenieros diseñadores infieren el resultado de un elemento o sistema estructural optimizado. Como complemento el uso de métodos de optimización durante el proceso de diseño garantizará que el producto cumpla con las exigencias normativas y de mercado.

El problema de optimización topológica en tres dimensiones, abreviado en este trabajo como POT-3D, tiene su orígenes a finales del siglo XX [60], estableciendo un método matemático que permite optimizar la distribución de material en un solido. El método busca minimizar o maximizar una función cumpliendo las condiciones de equilibrio y las restricciones previamente impuestas a la estructura. A diferencia de la optimización estructural de tamaño o de forma donde se requiere una determinación previa de la configuración estructural, la optimización topológica unicamente requiere la definición del volumen de la estructura, las cargas aplicadas, las condiciones de apoyo y eventualmente algunas restricciones adicionales como la disposición de material en zonas determinadas o restricciones en las esfuerzos internos máximos.

La Unidad de Estructuras y Construcción de la Facultad de Ingeniería sede Bogotá posee una amplia experiencia en el campo de desarrollo de programas de análisis de estructuras lineales, de superficie y tridimensionales. Uno de los producto de mayor aplicación ha sido el programa *PEFiCA* [30] que realiza análisis por elementos finitos con elementos tipo barra, bidimensionales, y tetraédricos. *PEFiCA* se ha utilizado como modulo básico para desarrollar otras herramientas computacionales como por ejemplo UNDIN 1.0 (programa didáctico a código abierto de análisis dinámico de estructuras) [26], así como para el programa de optimización topológica PEFiCA-OP [44] que permite optimizar topológicamente elementos bidimensionales. En este contexto se pretende dar continuidad a esta linea de investigación mediante la generalización del programa de optimización topológica de dos dimensiones a tres.

1.1. Breve reseña histórica de la optimización de estructuras

La optimización de estructuras se comenzó a enmarcar en un modelo científico con la obra [23] Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno, a due nuove scienze attenenti alla mecanica et i movimenti locali (1638) de Galileo Galilei (1564-1642), en donde se estudio la

forma más óptima de una viga en voladizo con una carga puntual en su extremo sin apoyo. Posterior a esto, se siguieron los trabajos de Leibniz (1646-1716) y LaGrange (1736-1813) que estudiaron el problema de la optimización estructural enfocados en la minimización y maximización de funciones matemáticas. Hamilton (1808-1865), por su lado, estableció el principio de mínima acción. Pero no fue sino hasta en el siglo XX que con las investigaciones de Michell [38], apoyado en los estudios de optimización de estructuras de Clerk Maxwell [36], se llega a tener un método riguroso para acercarse a la estructura óptima. Diferentes modificaciones y extensiones se realizaron a la teoría de Michell en los años que vinieron, autores como Owen [42], Chan [13], Prager [48] y Rozvany [47] lograron estructuras más practicas que las dadas por las teorías de Michell, que eran de difícil construcción y requerían la condición de ser determinadas estáticamente.

La programación matemática llego a la optimización de estructuras a mediados del siglo XX, con las investigaciones de Dorn, Gomory y Greenberg [20], y, al mismo tiempo, Hemp y Chan [14, 25]. Estos plantearon el desarrollo de la optimización desde un punto de vista nodal, es decir, la estructura quedaba descrita por una malla de nudos que contenían las cargas, apoyos y elementos. Posteriormente se sometía a la estructura a un condicionamiento de optimización y se determinaba la estructura más óptima en relación al valor de una función objetivo que estaba construida con la sumatoria de los desplazamientos virtuales de cada nodo. Este método resulto ser muy eficiente ya que eliminaba las barras que no tuvieran una solicitación mecánica importante y sometía a grandes esfuerzos y deformaciones aquellas con una gran responsabilidad estructural, además, evita los problemas que poseían las estructuras de Michell.

Pero no fue sino hasta los estudios de Topping [5, 63] que demostró que al incluir un número considerable de nodos se podía llegar a múltiples soluciones de estructuras optimas, ampliando el abanico de las que podían ser consideradas realizables. Dorn, Gomory y Greenberg [20] tomaron estas ideas y abrieron tres campos en la optimización de estructuras: estructuras donde la única variables de diseño es la eliminación o adición de barras entre nodos; estructuras donde las coordenadas de los nodos y las propiedades de las secciones transversales de los elementos eran variables; y, estructuras donde se ejecutan los dos procedimientos anteriores de manera simultánea.

Por otro lado, las técnicas geométricas comprenden la inclusión de las coordenadas de los nodos, la sección transversal de las barras y el tipo de material como variables de diseño.

Otros investigadores llegarían a lograr avances importantes modificando las diferentes variables del problema de las tres barras, tales como: el ángulo entre elementos, las coordenadas horizontales, el tipo de material y las condiciones iniciales. También, se progresó en restringir el problema según criterios de tensión máxima, deformación permisible, pandeos, tipos de

carga, etc. Un resultado notable lo obtuvieron Sved y Ginos [61] quienes demostraron que era imposible obtener el óptimo global sino se estudiaba cada uno de los elementos de la estructura. Igualmente, Schmit y Mallett [56] demostraron que si se parte de estructuras diferentes se pueden llegar a óptimos diferentes, rompiendo la idea de unicidad de la optimización.

En el año 1970 Corcoran [17, 18], y posteriormente Pedersen, generaron algoritmos no lineales, basados en tecnicas geometricas, que funcionaban de manera satisfactoria llegando a obtener métodos iterativos eficientes para la optimización de estructuras estáticamente determinadas con un único estado de cargas. Pederson logró realizar un análisis de sensibilidades respecto a las áreas y al peso propio. Pearson [45] extendería su trabajo en 1972 incluyendo la aplicación de múltiples estados de carga y ampliando el dominio de diseño al espacio, dio conclusiones importantes en cuanto a la incidencia en la estructura óptima al tener restricciones de pandeo y deformaciones. Después autores como Thomas, Brown [62] y Saka [53] aplicaron diferentes técnicas de optimización, estableciendo variables como las coordenadas de los nodos y las áreas de las secciones transversales, y siempre se buscaba aplicar restricciones de tensión, pandeo o desplazamiento. Imai y Schmit [27] en 1981 utilizando un método primal-dual y aproximando los desplazamientos con polinomios de Taylor pudieron conseguir un algoritmo que arrojaba resultados óptimos sin necesidad de partir de una estructura inicial factible.

Incursiones en el campo dinámico se realizaron a partir de los trabajos de Lin [29], quien restringió el problema a tensiones y resonancias y concluyó que la sensibilidad de la estructura estaba marcada por la afectación de las cargas dinámicas. El campo no lineal fue estudiado por los trabajos de Missoum y Gürdal [39].

El desarrollo histórico, del conjunto de técnicas conocidas como hibridas tuvo dificultades, por el aumento considerable de variables y las sensibilidades implícitas en cada una de ellas. Además, según lo demostraron Sved y Ginos [61] en ciertos casos puede ser muy difícil encontrar el optimo global ya que se presentaría espacios de soluciones disjuntos. Para tratar de resolver este problema de múltiples variables se dividen los espacios de diseño que facilitan el tratamiento conjunto de todas las variables. Esta afirmación fue probada por Vanderplaats y Moses [65] quienes trabajaron en estructuras con múltiples estados de cargas y restricciones de tensiones, grupo tamaños, pandeo y desplazamientos, analizándolas por el método de Fully Stressed Design Stress-Ratio para dimensionar los elementos y el método de la máxima pendiente para obtener la topología óptima.

La tendencia para solucionar el problema de la optimización siguió por algunos años estableciendo la división del espacio de diseño, en algunos casos, se trabajaba primero optimizando la topología y después redimensionando los elementos, y en otros, se partía el problema en

dos fases: una que buscaba la optimización de la función objetivo en términos de las condiciones de equilibrio, y, la otra, en términos de los desplazamientos. Posteriormente habrían aportaciones de diferentes investigadores como Spillers y Kountouris [59] que involucraron algunas especificaciones de diseño de la normativa norteamericana AISC, y, la incorporación del peso de las conexiones realizado por McKeown [37].

Esta tendencia de solucionar el problema hibrido partiendo el espacio de diseño se vio irrumpida con las trabajos de Reinschmidt y Russell [50, 51], quienes comenzaron a utilizar un método de mallado de puntos para optimizar la topología y al mismo tiempo un método de programación lineal o de Fully Stressed Design Stress-Ratio para dimensionar los elementos. Evidentemente este tipo de soluciones dio resultados más óptimos. Ya en el año 1974 Farshi [21] logro un método para librarse de los problemas procedentes de trabajar con un espacio de soluciones factibles disjuntos.

Los trabajos de Bendsoe, Achtziger y Sigmund [7, 6, 1, 8] reformularon el diseño estructural al convertirlo en un problema de Programación Lineal. De esta manera, se busca la estructura con la máxima rigidez cumpliendo con la restricción del volumen inicial y tomando los desplazamientos como variables. Kirsh y Rozvany [28], en 1994, incluyeron nuevas formulaciones que involucraban un criterio de optimalidad (OC). De igual manera en la década de los noventa investigadores como Zhou and Rozvany (1991), Meljnek (1992), Sigmund y Bendsϕe (1994/1997) desarrollarían los fundamentos de la formulación contemporánea de la optimización topológica, utilizando métodos de densidad, como el diseño de 0-1 y el modelo SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization), y correcciones a los problemas de Checkeboard, y a la dependencia de la malla de los elementos finitos, con el uso de los filtros en las sensibilidades o en las densidades.

Técnicas de optimización topológica que involucran algoritmos evolutivos, enfoques level-set, o aquellas que involucran el manejo de la derivada topológica se extendieron en la decada de los dos mil con las investigaciones de Osher y Wang(2003), Allaire (2002-2005), y Challis (2007), entre otros.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de la presente tesis se planteó en la siguiente forma: "Desarrollar un herramienta computacional que realice la optimización topológica en estructuras de tres dimensiones usando elementos finitos tetraédricos de cuatro nudos, con un modelo de material lineal, elástico e isotrópico". La herramienta computacional deberá ser capaz de generar la optimización topológica para estructuras o elementos tridimensionales, cumpliendo requisitos de acceso libre, escalabilidad y de fácil manejo.

Para alcanzar este objetivo se plantearon los siguientes objetivos secundarios:

- Documentar la teoría necesaria para la formulación analítica y numérica del problema de optimización topológica.
- Concebir y desarrollar un algoritmo de optimización topológica.
- Implementar el algoritmo de optimización topológica utilizando la plataforma de programación y simulación numérica MATLAB, así como en el programa de elementos finitos a código abierto PEFiCA.
- Seleccionar, calibrar y validar el algoritmo implementado utilizando modelos analíticos, numéricos y prácticos referidos en la literatura.
- Evaluar la calidad de la optimización topológica verificando la maximización de la rigidez y la cantidad de material optimización.

Con el cumplimento de los anteriores objetivos se busca: en primera instancia, soportar el desarrollo del programa en fundamentos teóricos matemáticos bien establecidos; segundo, proceder con la construcción del algoritmo que permita la implementación eficaz de la optimización y posteriormente su correcta escritura en el lenguaje de programación; tercero, ajustar el modelo según ejemplos encontrados en la literatura.

1.3. Motivación, justificación y antecedentes

La optimización del material utilizado en los elementos estructurales, para condiciones de carga y resistencia definidas, es un desafío permanente del ingeniero estructural. En esta tarea, además del aspecto técnico, intervienen otros compromisos del ingeniero estructural como: la mitigación del impacto ambiental reduciendo la extracción y procesamiento de recursos naturales, la disminución de los costos de fabricación, transporte, montaje y mantenimiento. Todo esto conlleva a una reducción en el costo de los elementos estructurales sin comprometer su seguridad.

En el crecimiento acelerado del mundo actual donde la escasez de las materias primas y el crecimiento del consumo de las mismas por parte de la industria, unido a los esfuerzos mundiales por tratar de conservar los recursos naturales, orientan a la disminución de los materiales utilizados en las estructuras de construcción trascienda a niveles más importantes. Indirectamente al disminuir la cantidad de material también se afectan otros aspectos, como son el transporte y el montaje, y con ello el consumo de combustibles y de energía no renovable.

En la mayoría de los diseños planteados en la actualidad los ingenieros proyectistas basan la concepción de la optimización de la estructura en ideas fundamentadas en diseños previos, en aquellos establecidos en la literatura, en la experiencia o en argumentos subjetivos. De esta manera el proceso de optimización es iterativo en el cual se va buscando paso a paso, con la modificación de la geometría de las secciones, el cumplimiento de los requisitos de diseño y normativos del conjunto de la estructura y de cada elemento. En este aspecto la optimización topológica interfiere de manera determinante, no solamente definiendo parámetros como el tamaño y disposición de las secciones de los elementos si no que es capaz de abordar el problema desde el punto mismo de la determinación de la topología mas óptima, por esta razón su grado de optimización es considerable.

Con la optimización topológica de estructuras se pueden identificar las zonas dentro de un solido que una alta concentración de esfuerzos y su aporte a la rigidez estructural del mismo. Con esta información se puede proceder a eliminar regiones del solido que no tienen una importancia estructural significativa o, por el contrario, a reforzar aquellas que si lo tienen. De esta manera se lograría racionalizar el recurso de materia, reduciendo los costos asociados a esta.

Una herramienta computacional que desarrollo la optimización topológica de estructuras en tres dimensionesLo anterior se basa en lo provechoso que puede ser para el diseñador estructural el conocimiento de qué ciertas zonas de un elemento estructural, bajo condiciones establecidas, están siendo solicitadas por debajo de un esfuerzo promedio, o más aún, que su solicitación sea mínima, reflejado esto por el resultado de la optimización topológica. Por ejemplo, a partir de este entendimiento se tendrá más certeza en dónde y en qué cantidad colocar el refuerzo estructural; pero aún de mayor valor es el hecho, que el ingeniero estructural pueda identificar las zonas que no aportan resistencia y dadas las circunstancias, prescindir de ellas, logrando economías significativas.

Los antecedentes principales que se tuvieron en cuenta buscaron el planteamiento de los temas claves que interfieren en la optimización topológica, estos son: formulación y programación del método de los elementos finitos para el problema lineal elástico; formulación, métodos de solución e implementación de la optimización topológica para una distribución de material isotrópico; y, programación a código abierto del método de los elementos finitos y del algoritmo de la optimización. También se tuvieron en cuenta desarrollos de metodologías de optimación planteadas por otros autores que presentaban condiciones similares a las que se manejaron en la presente tesis.

Algunos de los antecedentes principales nacionales e internacionales que motivaron la presentación de este trabajo son:

- En primer lugar se encuentra el trabajo [16] el cual se concentró en la optimización topológica y de forma de estructuras de tres dimensiones, utilizando el método de mallado Deformable Simplicial Complexa [40] y el método de las Asíntotas en Movimiento (MMA) [8] para actualizar la densidad. Los parámetros iniciales que toma el método de optimización expuesto son con los que comúnmente se trabaja en la optimización topológica: condiciones de frontera, cargas, definición de zonas solidas y vacías, cantidad mínima de material, dominio inicial, y grado de diferencia con este último. El método es aplicado a diferentes estructuras como puentes, sillas, estructuras biológicas, etc., que muestran la bondad del mismo.

  Esta investigación es importante para el presente trabajo porque mostró la calidad de los métodos de optimización en estructuras tridimensionales de vanguardia, es decir, sirvió como punto de referencia y comparación para validar el programa desarrollado en este trabajo. Aunque las metodologías de mallado y de la solución del problema de optimización son diferentes, están enmarcadas en un mismo problema de minimización de una función objetivo y maximización de la rigidez en función de la mínima cantidad de material, es decir, los resultados del valor de la función objetivo para estructuras similares fueron comparables con algún grado menor de discrepancia.

- El articulo [58] presenta el desarrollo de un código en la plataforma de análisis matricial MATLAB que ejecuta la optimización topológica de estructuras bidimensionales con cargas estáticas. Está escrito en tan solo 99 líneas, solicitando al usuario los siguientes parámetros del proceso de optimización: fracción de volumen, coeficiente de penalización y radio del filtro. Con los anteriores parámetros es capaz de realizar la optimización topológica de estructuras bidimensionales, presentando un registro gráfico de la evolución del proceso de optimización. Las condiciones con las que realiza la optimización son: elementos finitos cuadrados bilineales con lados paralelos a los ejes coordenados, cargas estáticas, criterio de optimización de mínimo cumplimiento, parametrización del diseño según modelo SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) y filtro de sensibilidades. El tiempo de respuesta para los ejercicios que presenta el autor es de menos de un minuto, siendo una herramienta para realizar ejercicios de optimización topológica en 2D.

  El algoritmo de optimización topológica presentado en este articulo sirvió como base para desarrollar el algoritmo de optimización desarrollado en esta tesis. La construcción del criterio de convergencia, el filtro de sensibilidades, el esquema de actualización de la densidad como se presentan en este articulo sirvieron como fundamento teórico para la construcción de los mismos en esta tesis, también se trató de conservar el nombre de las variables del proceso de optimización. No obstante, rutinas de cálculo como el

valor de la función objetivo, disposición de zonas solidas y vacías, rasterización para ejecutar el filtro, etc., se cambiaron radicalmente tratando de ajustarlas al problema que se quería resolver. Otras mejoras que se realizaron en cuanto a estructura del código obedecen a cambios descritos en el siguiente antecedente.

- El articulo [3] es la extensión de [58], incorporando mejoras en la eficiencia computacional del código e implementando un filtrado por densidades. La mejora en la eficiencia operacional se logra a través de dos métodos: *Vectorización de Ciclos* [34], uso de operaciones de vectores y matrices en orden a evitar ciclos Para y Mientras; Prelocalización de Memoria [49], la cantidad de memoria requerida para un arreglo es reservada a priori, evitando costos operacionales de mover y relocalizar datos. Efectivamente la implementación de estos métodos reduce significativamente el tiempo de cálculo, aparte de acortar a un más el código de la optimización.

  En la herramienta computacional que se desarrolló se tuvieron muy en cuenta los dos métodos mencionados anteriormente. Se planteó el algoritmo de la optimización tratando de lograr la mayor eficiencia computacional, es así, como los procedimientos obedecen a una lógica que evita cálculos repetitivos innecesarios y declaraciones de variables en la plataforma MATLAB convenientemente para trabajar apropiadamente el espacio en memoria, tal como se explica en este antecedente.

- El antecedente [41] estudia mallados independientes de la geometría con los que, posteriormente, se adapta la solución del problema. Su planteamiento está orientado a la primera fase de la optimización estructural, es decir, la construcción del mallado y su adaptabilidad. Si bien no se toca el problema de la optimización de forma directa la configuración de la malla entra a tomar un papel relevante, puesto que puede definir la calidad de los resultados del análisis por el MEF y estos son datos de entrada para proceso de optimización. Se presentan ejemplos en los que se puede notar claramente lo anterior, comparando la solución con el método CG-FEM, método de los autores del artículo, y la dada por programas comerciales como ANSYS que no tiene en cuenta este tipo de metodologías, que terminan concluyendo la importancia del análisis realizado por los autores.

  La incidencia de este trabajo para el tema que se desarrolló en este documento fue de dos tipos: primero, orientó la escogencia del elemento finito para realizar el mallado y definir sus limitaciones de adaptabilidad y precisión; segundo, limitó el alcance de la investigación en lo que tiene que ver con la calidad de la solución del MEF utilizado.

- En el articulo [43] se presenta la optimización topológica con una formulación multi-material y se plantea la solución del problema de optimización utilizando técnicas multiresolución. La interpolación de los materiales se realiza según la ley de Vegard [19] y la optimización multi-resolución se trabaja estableciendo niveles de discretización para el desplazamiento, la densidad y la variable de diseño. Los resultados gráficos se tratan con técnicas de suavizado de la densidad, mejorando su representación notablemente. Los autores también presentan la formulación estándar de la optimización topológica, discretizando la densidad según el modelo SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). Esto con el objetivo de mostrar las ventajas de los métodos propuestos, comparando los resultados al implementar estos métodos y los que se obtendrían con la formulación estándar.

  Este artículo sirvió para validar la herramienta computacional de optimización topológica en 3D construida en este trabajo. Puesto que tanto en el documento [43] como en esta tesis se presentan modelos de optimización topológica equivalentes se escogieron tres ejercicios como base de validación: viga en voladizo con carga central, viga simplemente apoyada y silla de cuatro patas. Con estos se verificó la correcta formulación del modelo de optimización topológica en 3D propuesto y su implementación en un código de programación.

- El articulo [33] fue fundamental para la elaboración de esta tesis ya que en base al código que se presenta en este se construyeron inicialmente todas las rutinas para la optimización topológica 2D y 3D, permitiendo una exploración inicial de la implementación del modelo de optimización topológica propuesto. Los documentos de soporte del programa, a saber: PEFiCA-vol1 [30], Descripción y manejo del programa; y, PEFiCA-vol2 [30], Ejemplos de aplicación y algoritmos de cálculo, sirvieron como guía imprescindible para aprender los diferentes procedimientos con los que cuenta PEFiCA. En estos documentos se encuentra de manera detallada y explicita cada uno de los procedimientos y funciones de PEFiCA, junto con un conjunto de ejemplos bastante ilustrativos que permitieron vislumbrar el potencial que tiene esta herramienta computacional.

  Aunque la implementación final no se realizó en el programa PEFiCA, puesto que la versión definitiva se escribió en MATLAB R2015a, sí se desarrolló una codificación completa de los modelos de optimización topológica en 2D y 3D , utilizando todos los recursos con los que dispone el programa. Para ejecutar la representación gráfica de la optimización topológica en 3D exclusivamente desde PEFiCA es necesario contar con un modulo adicional de graficación, en esta tesis este se desarrollado en MATLAB.

1.4. Alcance

El grupo de estructuras estudiadas se limita a dominios regulares que puedan ser adecuadamente descritos por una malla de elementos tetraédricos, estructuras más complejas se dejan sin validar con la suposición de que el resultado de la optimización en estas va a ser favorable. De igual forma se trabaja con un número de elementos finitos límite con el fin de no superar las capacidades de computo sugeridas para la implementación del algoritmo de optimización, buscando no afectar la velocidad de cálculo y de graficación, la transferencia de datos, la manejabilidad, etc.

El modelo de optimización topológica que se desarrolla en esta tesis se valida comparando los resultado obtenidos al usar este modelo en contraparte a los que se encuentran en la literatura reconocida. Con el modelo de optimización validado se procede a realizar una serie de ejercicio para estudiar la correspondencia de los diferentes parámetros de entrada de la optimizacion topologica, tales como: cantidad de material a optimizar, efecto de la discretización por elementos finitos, condiciones de apoyo, condiciones de carga, etc. Con lo anterior se puede estimar la incidencia de las diferentes variables del proceso de optimización topológica, buscando contribuir a la determinación de la mejor configuración de parámetros de entrada para cada tipo de problema.

El alcance del presente estudio se delimita por los siguientes puntos:

- Estructuras cuyo material exhibe un comportamiento lineal elástico isotrópico.
- Volumen de las estructuras tridimensionales lo suficientemente regulares como para no caer en errores de mallado e imprecisiones numéricas.
- El algortimo desarrollado resuelve tanto problemas en 2D como en 3D.
- Límite en la cantidad de elementos finitos del mallado en función de la capacidad del equipo de computo. Por ejemplo, un equipo con un procesador de cuatro núcleos con una velocidad de 3.0 Ghz cada uno y una capacidad en memoria RAM de 12 GB DDR2 presentaría un buen rendimiento para un máximo de 30000 elementos finitos.
- Método de solución según diseño de cumplimiento mínimo con interpolación SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization), y criterio de actualización de la densidad conforme al método de los multiplicadores de Lagrange.
- El control del fenómeno “tablero de ajedrez[1]” y de la independencia de la malla se logra utilizando un filtro de sensibilidades.

[1] En inglés *checkerboard*.

La calidad gráfica de los resultados está directamente relacionada con el tipo y cantidad de elementos finitos que se utilicen en el domino inicial, por tal razón, los resultados presentados en esta tesis pueden verse mejor o peor en función de la capacidad de cálculo del computador donde se ejecute la herramienta computacional, ya que, computadores con un alto grado de desempeño pueden trabajar con mallados de mayor cantidad de elementos.

1.5. Estructura del Documento

La estructura del documento que se plantea a continuación busca seguir un orden lógico a fin de alcanzar la correcta implementación de la herramienta computacional de optimización topológica. Cada uno de los siguientes puntos se soporta en el predecesor y establece los argumentos de construcción para el sucesor.

1. **Estado del conocimiento:** la tesis empieza por presentar el estado del conocimiento referente a la optimización topológica de estructuras. Para ello se realiza una búsqueda detallada en las principales bases de datos que contienen temas relacionados con la optimización topológica que son de utilidad para el desarrollo del modelo de optimización que se propone en este documento.

2. **Formulación del problema mecánico discretizado por elementos finitos:** ya que la solución al problema mecánico (determinación del campo del desplazamiento, de las deformaciones y de esfuerzos) es un requisito necesario para formular el modelo de optimización topológica propuesto en esta tesis, se utiliza el método de los elementos finitos para plantear esta solución. En especifico, en esta parte del trabajo se da la formulación del elemento finito tedraédrico lineal con el que se dividirá el dominio del problema mecánico.

3. **Formulación del problema de optimización estructural:** es esta parte del trabajo se describen los elementos necesarios para plantear un problema de optimización estructural, esto se utiliza en secciones posteriores para formular y resolver el modelo de optimización topológica.

4. **Fundamentos matemáticos de la optimización topológica:** Se formula el problema de la optimización topológica en función de los elementos de un problema de optimización estructural, definiendo las variables, y la relación entre ellas, en el problema de optimización topológica. Con el planteamiento matemático completo, tanto del problema mecánico como el de la optimización, se procede a desarrollar un algoritmo que desarrolle la optimización topológica de estructuras en tres dimensiones.

5. **Formulación del algoritmo de optimización:** Este algoritmo contiene la secuencia de operaciones entre las variables del problema de optimización topológica que permite, a través de un proceso iterativo, obtener estructuras tridimensionales optimizadas.

6. **Validación y aplicación de la herramienta computacional de optimización topológica:** el modelo de optimización propuesto en la sección anterior e implementado en un código de programación de MATLAB se valida comparando los resultados obtenidos con esta herramienta computacional contra ejemplos encontrados en la literatura reconocida. De igual forma la herramienta se utiliza para presentar ejemplos en aplicaciones comunes de la ingeniería estructural.

7. **Resultados y conclusiones:** En este capítulo se discute la calidad de los resultados al implementar la herramienta computacional de optimización topológica, realizando el análisis de la información y concluyendo con base en esta.

2. Formulación del elemento finito tridimensional

En este capitulo se presenta la formulación del método de los elementos finitos utilizando la versión variacional del Principio de los Trabajos Virtuales [67], aplicando esta formulación a la resolución del método utilizando un elemento finito tedraétrico bilineal. El capítulo tiene como objetivo presentar el comportamiento mecánico de un cuerpo, variable esencial para realizar la optimización topológica del mismo.

2.1. Teoría de la elasticidad lineal para elementos tridimensionales

En la descripción mecánica de los cuerpos se busca principalmente el vector de desplazamientos de cada punto material. El conjunto de estos vectores para todos los puntos del cuerpo constituyen lo que se denomina campo vectorial de los desplazamientos. Su determinación se realiza comparando los vectores de posición de un punto antes y después de la deformación, es decir, si el vector de posición en la configuración de referencia (configuración con carga nula) es $\mathbf{x_0}$ y después de aplicada la carga (configuración actual) es $\mathbf{x_i}$, el vector de desplazamientos se calcula con la resta vectorial de los dos vectores de posición mencionados:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0 \tag{2-1}$$

2.1.1. Campos de las deformaciones y de los esfuerzos

Dos campos que se pueden inferir a partir del campo de desplazamiento son los campos de las deformaciones y de los esfuerzos. Estos miden la respuesta del cuerpo ante la aplicación de cargas. El campo de deformación se obtiene comparando segmentos con una longitud patrón en la configuración de referencia contra la longitud del mismo segmento en la configuración actual, como se muestra en la siguiente figura:

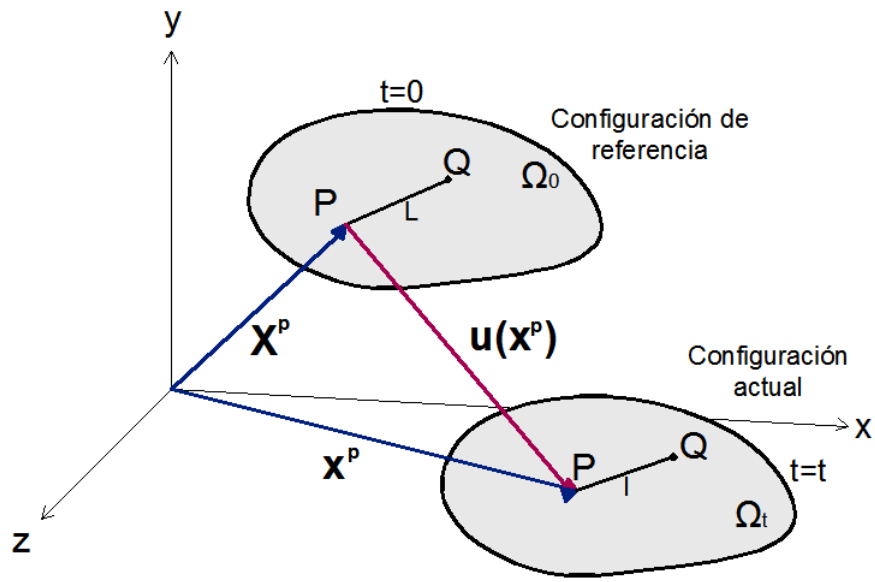


Figura 2-1.: Deformación longitudinal. (Adaptada de la referencia [31]).

De esta manera la deformación se define como:

$$\varepsilon = \frac{(l - L)}{L} \tag{2-2}$$

Si se trabaja sobre un entorno diferencial donde las longitudes patrones en la configuración de referencia son infinitesimal se pueden definir las siguientes deformaciones cada una paralela a un eje coordenado:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2-3}$$

El angulo formado por dos segmentos de linea que pasan por un punto de un solido sin deformar, puede cambiar en la condición deformada. Las deformaciones angulares miden este cambio. Si los ángulos que se miden son lo suficientemente pequeños, las deformaciones angulares se pueden escribir como:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{2-4}$$

Con la definición de las anteriores deformaciones se puede completar el campo de deformaciones, que generalmente se escriben de manera vectorial utilizando un operador diferencial actuando sobre el campo de los desplazamientos, de la siguiente manera:

$$\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \widetilde{\nabla} u(\boldsymbol{x}) \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_y v \\ \partial_z w \\ \partial_y u + \partial_x v \\ \partial_z u + \partial_x w \\ \partial_z v + \partial_y w \end{bmatrix} \tag{2-5}$$

La ecuación muestra claramente la dependencia de las deformaciones con los desplazamientos.

El último campo necesario para describir el comportamiento de un sólido elástico, isotrópico y homogéneo, es el campo de los esfuerzos. Este campo se puede visualizar por medio de un cubo infinitesimal con caras paralelas a los ejes coordenados y con fuerzas aplicadas en cada una de estas , como se ilustra en la siguiente figura:

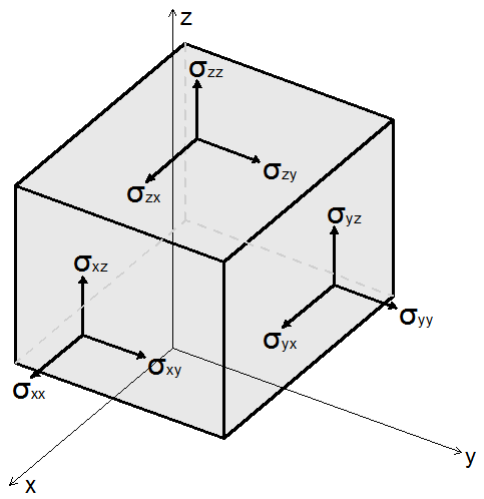


Figura 2-2.: Estado general de esfuerzos.(Fuente: autor).

La convención de cada componente de esfuerzo sigue la regla: el primer subíndice denota el eje coordenado perpendicular al plano, o cara del cubo, donde actúa el esfuerzo; el segundo subíndice, determina la dirección con respecto a los ejes coordenados en la que se orienta la componente de esfuerzo.

Se debe observar que la utilización de flechas para indicar los esfuerzos es únicamente ilustrativa ya que cada una de las componentes de esfuerzos es de naturaleza escalar, porque su dirección y orientación en el espacio quedaron definidas por la posición del cubo infinitesimal. Se puede demostrar, utilizando las ecuaciones de equilibrio en el cubo, que los esfuerzos cortantes en un mismo plano son iguales, es decir:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} \qquad \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \qquad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \tag{2-6}$$

De esta manera se pueden organizar todas las componentes que describen el estado de esfuerzos en un vector columna con tan solo seis componentes, así:

$$\sigma(x) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} \end{bmatrix}^T \tag{2-7}$$

Ecuaciones de compatibilidad

Estas ecuaciones aportan las condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad del campo de los desplazamientos partiendo del campo de las deformaciones, es decir, aseguran que solo existe un campo de deformaciones para un campo de desplazamiento dado.

El sistema de ecuaciones está compuesto por seis igualdades. Según [11] se pueden determinar de la siguiente manera: tres de ellas se obtienen derivando y operando sobre las deformaciones definidas en 2-3 y 2-4: las deformaciones para ε_{xx}, ε_{xy} y ε_{yz} se derivan dos veces con respecto a x, dos veces con respecto a y, y dos veces con respecto a x e y, manipulando las ecuaciones se puede llegar a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{2-8}$$

Las otras tres ecuaciones se obtienen al derivar ε_{xx} dos veces respecto a y y z, ε_{xy} respecto a z, ε_{xz} respecto a y, y, ε_{yz} respecto a x, operando las ecuaciones resultantes entre ellas y simplificando términos se puede llegar a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{2-9}$$

2.1.2. Modelo constitutivo elástico lineal de material

Los modelos constitutivos del material relacionan los estados de esfuerzos y deformaciones en cada punto de un continuo. La ley de Hooke es un modelo constitutivo de material en el que se establece una relación lineal entre los esfuerzos normales y las deformaciones longitudinales

mediante el modulo de Young E, y la relación entre el esfuerzo cortante y la deformación angular mediante el modulo de elasticidad a cortante G:

$$G = \frac{E}{2(1+v)} \tag{2-10}$$

La deformación longitudinal paralela a un eje coordenado produce deformaciones longitudinales en las otras dos direcciones cartesianas. Estas últimas se pueden determinar utilizando un coeficiente denominado relación de Poisson v, que se escribe como:

$$v = -\frac{\varepsilon_{lateral}}{\varepsilon_{axial}} \tag{2-11}$$

Operando las ecuaciones 2-5, 2-7, 2-10, 2-11 se puede llegar a una ecuación matricial que relaciona el estado general de esfuerzos con el estado general de deformaciones:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} (1-v) & v & v & 0 & 0 & 0 \\ & (1-v) & v & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-v) & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0{,}5(1-2v) & 0 & 0 \\ & & & & 0{,}5(1-2v) & 0 \\ sim & & & & & 0{,}5(1-2v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \tag{2-12}$$

es decir,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2-13}$$

donde $\boldsymbol{D}$ recibe el nombre de *matriz constitutiva* para un material elástico, lineal isotrópico.

En ciertos problemas el campo de los esfuerzos y las deformaciones se puede simplificar ya que algunas componentes de estos asumen valores nulos o constantes en todo el dominio del problema. Si los esfuerzos varían exclusivamente en un plano se dice que el sólido se encuentra en una condición plana de esfuerzos, y, si en cambio, las deformaciones son las que están contenidas en una plano se dice que el sólido posee una condición plana de deformaciones. En tales casos las matriz constitutiva asume los siguientes valores, respectivamente:

$$D = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-v) \end{bmatrix}, D = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} (1-v) & v & 0 \\ v & (1-v) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2v) \end{bmatrix} \tag{2-14}$$

2.1.3. Ecuaciones de gobierno

En la descripción de los cuerpos sólidos que realiza la mecánica del medio continuo se desarrollan tres grupos principales de ecuaciones en las que intervienen las diferentes incógnitas del problema. Como se verá en la sección 2.1.4 estas se utilizan para plantear el sistema de ecuaciones general del problema elástico lineal.

Ecuaciones de equilibrio

Si asumimos un cuerpo en equilibrio, que se ve reflejado desde el punto de vista cinemático como de aceleración nula, la ley de conservación de la cantidad de movimiento establece:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \\
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_y = 0 \\
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_z = 0
\end{aligned} \tag{2-15}$$

donde $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ corresponde al vector de fuerzas de cuerpo.

Relación de la deformación infinitesimal y el desplazamiento

Cuando las deformaciones y los desplazamiento son pequeños en comparación a las dimensiones del cuerpo, la relación entre la deformación infinitesimal y el desplazamiento en cada partícula del cuerpo esta dada por las ecuaciones 2-3 y 2-4.

Modelo constitutivo de material

Como se expuso anteriormente estos modelos definen una relación entre los estados de esfuerzos y deformaciones. Un ejemplo de esta relación se presenta en la ecuación 2-12.

2.1.4. Planteamiento general del problema elástico lineal en la mecánica del medio continuo

El problema mecánico busca resolver el campo de los desplazamientos, y con este calcular el campo de las deformaciones y los esfuerzos por medio de las ecuaciones 2-5 y 2-12, respectivamente.

El problema mecánico cuenta con las siguientes incógnitas: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, u, v, w$. Para resolverlas se utilizan las ecuaciones de gobierno descritas en la sección 2.1.3, cada grupo de estas aporta un numero de ecuaciones independientes al sistema, de la siguiente manera:

- Conservación de la cantidad de movimiento:= 3 ecuaciones.
- Relación deformación infinitesimal contra desplazamiento:= 6 ecuaciones.
- Relación constitutivas del material:= 6 ecuaciones.

Al conjunto de las anteriores ecuaciones se agregan las proporcionadas por las condiciones de frontera del problema. Que corresponden a las condiciones de frontera de Neumann, relacionadas con el gradiente o derivada del campo de desplazamientos planteado anteriormente. Y las condiciones de Dirichlet relacionadas con el campo de desplazamiento, comúnmente asociados con las restricciones de los apoyos.

2.2. Soluciones al problema tridimensional

No se conoce una solución analítica general para cualquier problema mecánico. Sin embargo, cuando se presenta algún tipo de simplificación en la geometría, en el estado general de esfuerzos o deformaciones, o en el domino de los sólidos (semi-infinito) se pueden encontrar esquemas de solución, como por ejemplo las *funciones de Airy* [32] que trabajan en una condición plana de esfuerzos despreciando el valor de las fuerzas de cuerpo.

Para obtener algunas soluciones analíticas el sistema de ecuaciones el problema elásticos se suele plantear de dos maneras: formulación de desplazamientos de Navier, y formulación de esfuerzos de Beltrami-Michell [32].

Un conjunto de técnicas aproximadas y numéricas se utilizan actualmente para resolver el problema mecánico. El Método de la biela y el tirante [64] y el Método de los Elementos Finitos (MEF) [67] son dos técnicas ampliamente usadas en la actualidad, su versatilidad y aplicabilidad ha sido probado exitosamente en numerosas aplicaciones.

2.2.1. Soluciones analíticas

En el primer enfoque, formulación de desplazamientos, se comienza por formular el problema de tal manera que se plantea únicamente en función de los desplazamientos. Esto se puede hacer si se reemplaza sucesivamente los desplazamientos en las ecuaciones 2-15 con ayuda de las relaciones constitutivas, operando y reorganizando se llega a:

$$\begin{aligned}
G\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+\frac{1}{1-2v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right]+b_x=0\\
G\left[\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}+\frac{1}{1-2v}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right]+b_y=0\\
G\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{1}{1-2v}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right]+b_z=0
\end{aligned} \tag{2-16}$$

Las ecuaciones diferenciales en 2-16 se conocen como ecuaciones de Navier. La forma de solucionar el sistema consiste en expresar el campo de los desplazamientos en función de potenciales escalares y vectoriales, para luego encontrar la solución determinando el potencial requerido.

El segundo enfoque, formulación de esfuerzos, busca reemplazar el sistema de ecuaciones que componen el problema mecánico por un sistema de ecuaciones que se encuentre exclusivamente en función del campo de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$, incluso las condiciones de frontera deben quedar descritas en términos de este campo. Según [52], este sistema se puede obtener al utilizar con las ecuaciones de compatibilidad 2-8 y 2-9 conjuntamente con la ley de Hooke, de esta manera se puede llegar a establecer las ecuaciones de compatibilidad en términos de esfuerzos, dicho sistema generalmente se denomina con el nombre de *ecuaciones de compatibilidad de Beltrami-Michell*. Sin embargo, un resultado mas útil se puede establecer al reemplazar las ecuaciones de equilibrio 2-15 en el sistema de ecuaciones de compatibilidad de Beltrami-Michell, y considerando fuerzas de cuerpo nulas, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
(1+v)\nabla^2\sigma_{xx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) &= 0\\
(1+v)\nabla^2\sigma_{yy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) &= 0\\
(1+v)\nabla^2\sigma_{zz} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) &= 0\\
(1+v)\nabla^2\sigma_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) &= 0\\
(1+v)\nabla^2\sigma_{yz} + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) &= 0\\
(1+v)\nabla^2\sigma_{zx} + \frac{\partial^2}{\partial z\partial x}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) &= 0
\end{aligned} \tag{2-17}$$

Existen tres maneras de aproximar el desplazamiento utilizando estos enfoques, el Teorema de Helmholtz, el vector de Galerkin y la solución de Papkovich-Neuber. Se puede consultar la referencia [11] para una descripción de estos.

2.2.2. Solución ingenieril de la biela y el tirante

A lo largo de la historia han surgido métodos que describen los campos de interés en la mecánica de los cuerpos (desplazamientos, deformaciones y esfuerzos) con un enfoque diferente al planteado en la mecánica del medio continuo. Uno de estos métodos, que data del siglo XIX con los estudios de Ritter (1899) y Morsh (1909) [54], pero que a demostrado tener enormes ventajas es el Método de Bielas y Tirantes [35], a continuación se describen sus principales elementos.

Con el Método de Bielas y Tirantes se puede realizar el diseño de la mayoría de elementos estructurales usados comúnmente. Sin embargo, su principal aplicación se encuentra en el análisis y dimensionamiento de las zonas llamadas tipo D o de discontinuidades, que son aquellas que no tienen una distribución lineal de deformaciones, o que no pueden modelarse como elementos tipo viga según las hipótesis de secciones planas antes y después de la deformación conforme la teoría de Bernoulli-Navier.

Se puede definir tres tipos de discontinuidades, a saber:

a) Geométricas: son aquellas zonas de la estructura en donde hay un cambio fuerte de la sección prismática asociada a las vigas o columnas. Ejemplos de este tipo de discontinuidades son: nudos de la estructura, ménsulas, aberturas en vigas, etc.
b) Estáticas: se presentan cuando hay cargas puntuales y concentradas. Ejemplos: apoyos y cargas en vigas.
c) Generalizadas: a este tipo de discontinuidades ya no se asocian zonas en una estructura si no todo el conjunto de una. Es decir, son elementos estructurales que en su conjunto no se pueden diseñar dentro de la teoría clásica de vigas, a este grupo pertenecen: zapatas rígidas, dados de cimentación, vigas de gran peralte,etc.

El método de la biela y el tirante se basa en modelar la estructura como una configuración de elementos biarticulados formando una cercha plana o espacial. Por esta razón solo se dispone de elementos sometidos exclusivamente a tension, denominados tirantes, y otros a compresión, denominados bielas. Los sitios de confluencia de las bielas y/o tirantes se denomina nodos.

Este método es particularmente útil en el diseño de estructuras de concreto reforzado, en donde las bielas asumen diferentes formas, como: prismáticas, en abanico y en botella. La forma de la biela se determina en función del grado de dispersión que puedan tener los esfuerzos a compresión. La resistencia de una biela está dada por la siguiente ecuación:

$$C = Af_c \tag{2-18}$$

donde:
$A =$: Área transversal de la biela.
$f_c = 0{,}85f_c^{'} =$: Resistencia a la compresión de un cilindro de concreto afectada por un factor de 0.85.

La resistencia a la compresión de la biela se ve modificada por el estado de esfuerzos transversales, la cuantía de la armadura transversal y el confinamiento que esta proporciona. Las bielas pueden contar con armadura a compresión, para tal caso el incremento en resistencia esta dado por:

$$\Delta C = A_s f_y \tag{2-19}$$

En donde:
$A_s =$: Área transversal del refuerzo a compresión.
$f_y =$: Esfuerzo admisible para el refuerzo a compresión.

La resistencia de los tirantes no se ve afectada por la presencia de esfuerzos transversales o de otra condición, su resistencia se calcula directamente con el área de la sección transversal y el esfuerzo admisibles del acero de refuerzo. Por otro lado, los nodos se deben dimensionar de tal manera que soporten las cargas de compresión provenientes de las bielas y proporcionen la suficiente longitud de desarrollo para los tirantes. La resistencia máxima para un nodo dependiendo del estado de fuerzas a compresión es:

- $f_{2c} = f_c$, para un estado de compresión biaxial.
- $f_{2c} = 3{,}3 f_c$, para un estado de compresión triaxial.
- $f_{2c} = 0{,}7 f_c$, cuando se anclan tirantes.

2.3. Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos es una técnica numérica que permite, a partir de una formulación integral o de forma débil, resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Consiste en dividir el dominio del problema en subdominios de forma geométrica conocida, generalmente formas regulares, denominados elementos finitos. En el interior de un elemento finito se define una función de aproximación, escalar o vectorial, cuyos valores deben ser compatibles en los nudos que comparte con los otros elementos.

El método de los elementos finitos se puede formular desde dos enfoques: primero, formulación variacional [22]; y, segundo, por el método de los residuos ponderados [67]. Para problemas estructurales se utiliza el Principio del Trabajo Virtual [12] que tiene una formulación variacional, en este tipo de problemas la principal incógnita es el campo de los desplazamientos.

El resumen que se presenta a continuación esta basado en el desarrollo del MEF presentado en [31].

2.3.1. Principio de los trabajos virtuales

El principio de los trabajos virtuales [12] relaciona los esfuerzos internos con las acciones externas (fuerzas de cuerpo, de superficie y/o puntuales), vinculándolos por medio de la cantidad de trabajo virtual (trabajo con desplazamientos o fuerzas virtuales) que realiza

cada uno.

Si se define que una configuración es el conjunto de posiciones de todas las partículas de un cuerpo, una configuración virtual admisible es aquella que cumple con las condiciones de frontera del problema, y, la configuración real es aquella única que satisface tanto las condiciones de frontera como el equilibrio real del cuerpo. Se demuestra que las configuraciones admisibles son producto de la variación infinitesimal de la configuración real, y de este conjunto de admisibles aquellas que cumplan con el equilibrio son las que se tiene en cuenta para obtener los desplazamientos virtuales.

Para formular el principio de los trabajos virtuales es necesario definir las acciones externas y las condiciones de frontera que afectan un cuerpo, estas se ilustra en la figura 2-3.

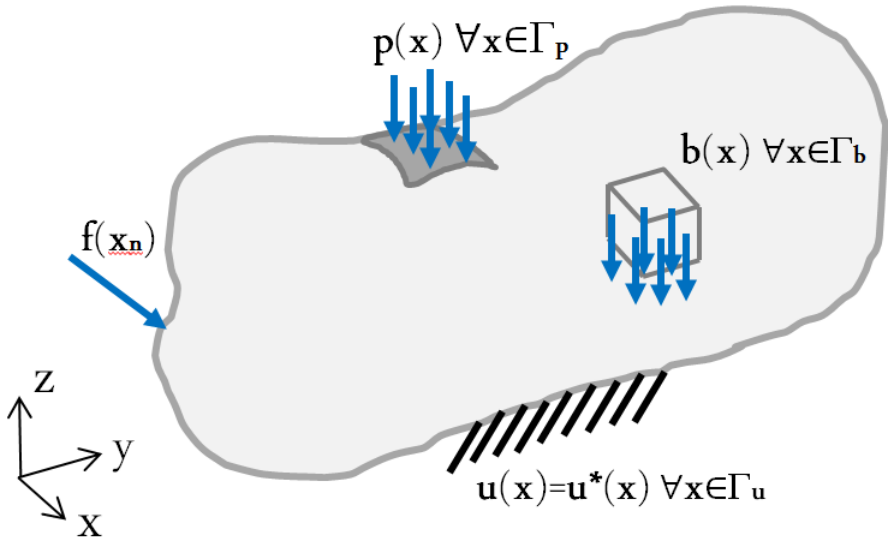


Figura 2-3.: Acciones y restricciones fisicas. (Adaptada de la referencia [31]).

Las variables en la figura 2-3 son:

- **Vector de fuerzas de cuerpo (b):** fuerza por unidad de volumen que actúa en parte o en la totalidad del cuerpo. Ejemplo: el peso propio. Se define por el vector:=$[b_x \quad b_y \quad b_z]^T$.
- **Vector de fuerzas de superficie (p):** fuerza por unidad de área, actúa en una superficie perteneciente al contorno del cuerpo. Ejemplo: cargas distribuidas de placas. Se define por el vector:= $[p_x \quad p_y \quad p_z]^T$.
- **Vector de fuerzas puntuales (f):** fuerza puntual actuando en un punto específico del cuerpo. Idealización realizada para contemplar la presión generada en una superficie mínima. Se define por el vector:= $[f_x \quad f_y \quad f_z]^T$.
- **Condiciones de frontera (u*):** valores conocidos del campo del desplazamiento **u**.

El trabajo virtual externo se define como el trabajo realizado por las acciones externas (fuerzas de cuerpos, de superficie y puntuales) actuando sobre un desplazamiento virtual $\delta\boldsymbol{u}$, como lo establece la siguiente ecuación:

$$\delta W^{ext} = \int_{\Gamma_p} \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{p} dS + \int_V \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} dV + \sum_{n=1}^{r} \delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_n)^T f(\boldsymbol{x}_n) \tag{2-20}$$

Por otro lado, el trabajo virtual interno se define como el trabajo realizado por las fuerzas internas de un cuerpo actuando sobre un desplazamiento virtual $\delta\boldsymbol{u}$, se calcula por medio de la siguiente ecuación:

$$\delta W^{int} = \int_V (\tilde{\nabla}\delta\boldsymbol{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV \tag{2-21}$$

Las integrales y sumatoria se encuentran acotadas dependiendo del dominio en el que actúan: volumen del cuerpo, superficie del contorno y punto x_n.

El principio de los trabajos virtuales establece que un cuerpo se encuentra en equilibrio si y solo si el trabajo virtual externo e interno son iguales, es decir:

$$\delta W^{ext} = \delta W^{int} \tag{2-22}$$

El vector $\delta\boldsymbol{u}^T$ de la ecuación 2-22 se puede cancelar al ser común en todos los términos.

2.3.2. Formulación del problema elástico con el MEF

El primer paso consiste en discretizar el domino del problema Ω en subdominios $\Delta\Omega$. Estos subdominios generalmente se encuentran acotados por figuras geométricas sencillas como pueden ser: lineas, en problemas unidimensionales; triángulos o cuadriláteros, en el caso de problemas en dos dimensiones; y poliedros de caras rectangulares o triangulares, conocidos como elementos tipo bloques o tetraedros en el caso de problemas en tres dimensiones.

En cada elemento finito se establecen funciones de aproximación para cada una de las componentes del campo del desplazamiento:

$$\begin{aligned} u^{(e)}(x,y,z) &= N_1^{(e)}(x,y,z)u_1^{(e)} + \cdots + N_n^{(e)}(x,y,z)u_n^{(e)} \qquad \forall(x,y,z)\epsilon V^{(e)} \\ v^{(e)}(x,y,z) &= N_1^{(e)}(x,y,z)v_1^{(e)} + \cdots + N_n^{(e)}(x,y,z)v_n^{(e)} \qquad \forall(x,y,z)\epsilon V^{(e)} \\ w^{(e)}(x,y,z) &= N_1^{(e)}(x,y,z)w_1^{(e)} + \cdots + N_n^{(e)}(x,y,z)w_n^{(e)} \qquad \forall(x,y,z)\epsilon V^{(e)} \end{aligned} \tag{2-23}$$

donde $N_i^{(e)}$ son funciones de forma que cumplen con las condiciones de contorno y los u_i, v_i y w_i son las componentes del desplazamiento en cada uno de los nodos del elemento finito.

En notación matricial compacta el sistema 2-23 se puede escribir como:

$$\boldsymbol{u}_{(e)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_{(e)}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_{(e)} \qquad \forall \boldsymbol{x} \epsilon V^{(e)} \tag{2-24}$$

Donde:
$\boldsymbol{u}_{(e)}(\boldsymbol{x})$ =: vector de desplazamiento elemental.
$\boldsymbol{N}_{(e)}(\boldsymbol{x})$ =: matriz de funciones de forma.
$\boldsymbol{a}_{(e)}$ =: vector de desplazamientos nodales.

Al expandir el sistema anterior se llega a:

$$\begin{bmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \\ w^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & 0 & 0 & \cdots & N_n^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \cdots & 0 & N_n^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & \cdots & 0 & 0 & N_n^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ w_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n^{(e)} \\ v_n^{(e)} \\ w_n^{(e)} \end{bmatrix} \tag{2-25}$$

Ahora se define el operador diferencial:

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \tag{2-26}$$

que al actuar sobre el campo de los desplazamientos produce el campo de las deformación, según la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\nabla}\boldsymbol{u}_{(e)}(x) = \tilde{\nabla}\boldsymbol{N}_{(e)}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_{(e)} = \boldsymbol{B}_{(e)}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_{(e)} \qquad \forall \boldsymbol{x} \epsilon V^{(e)} \tag{2-27}$$

A la matriz $\boldsymbol{B}$ se le conoce como matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma, y matricialmente toma la forma extendida:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & 0 & 0 & \cdots & N_n^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \cdots & 0 & N_n^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & \cdots & 0 & 0 & N_n^{(e)} \end{bmatrix} \tag{2-28}$$

Posteriormente se utiliza una ley constitutiva de material para poder relacionar las deformaciones con los esfuerzos. Se considera un material elástico lineal isotrópico, de tal manera que según la ley de Hooke la matriz constitutiva $\boldsymbol{D}_e$ toma la forma presentada en la ecuación 2-11 para problemas mecánicos tridimensionales, y los esfuerzos se pueden escribir como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}_{(e)}\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \epsilon V^{(e)} \tag{2-29}$$

Los elementos anteriores se definieron con el propósito de poder establecer las variables de la ecuación 2-22. De esta manera reemplazando ecuaciones y reagrupando se llega a:

$$\sum_{e=1}^{nel} \frac{1}{2} \int_{\Omega_{(e)}} \delta \boldsymbol{a}^{(e)^T} \boldsymbol{B}^{(e)^T} \boldsymbol{D}^{(e)} \boldsymbol{B}^{(e)} \boldsymbol{a}^{(e)} d\Omega = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_{(e)}} \delta \boldsymbol{a}^{(e)^T} \boldsymbol{N}^{(e)^T} \boldsymbol{b}^{(e)} d\Omega$$
$$- \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma_{(e)}} \delta \boldsymbol{a}^{(e)^T} \boldsymbol{N}^{(e)^T} \boldsymbol{t}^{(e)} d\Gamma - \sum_{i=1} \delta \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{f}_i \tag{2-30}$$

Se define la matriz de rigidez y el vector de cargas nodales a nivel elemental, respectivamente, como:

$$\boldsymbol{K}^{(e)} = \int_{\Omega_{(e)}} \boldsymbol{B}^{(e)^T} \boldsymbol{D}^{(e)} \boldsymbol{B}^{(e)} d\Omega$$
$$\boldsymbol{f}^{(e)} = \int_{\Omega_{(e)}} \boldsymbol{N}^{(e)^T} \boldsymbol{b}^{(e)} d\Omega + \int_{\Gamma_{(e)}} \boldsymbol{N}^{(e)^T} \boldsymbol{t}^{(e)} d\Gamma + \sum \boldsymbol{f}_i \tag{2-31}$$

Ecuación con la que se puede llegar a:

$$\boldsymbol{K}^{(e)} \boldsymbol{a}^{(e)} = \boldsymbol{f}^{(e)} \tag{2-32}$$

Un sistema general de ecuaciones se pude obtener si se trabaja con la versión extendida de las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas elementales:

$$\sum_{e=1}^{nele} (\boldsymbol{K}_{ext}^{(e)}) \boldsymbol{a}^{(e)} - \sum_{e=1}^{nele} (\boldsymbol{f}_{ext}^{(e)}) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

(2-33)

Donde las matrices extendidas se pueden operar por medio del operador de ensamblaje, como se muestra en seguida:

$$\boldsymbol{K} = \sum_{e=1}^{nele} (\boldsymbol{K}_{ext}^{(e)}) = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nele} \boldsymbol{K}^{(e)} \qquad , \qquad \boldsymbol{f} = \sum_{e=1}^{nele} (\boldsymbol{f}_{ext}^{(e)}) = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nele} \boldsymbol{f}^{(e)} \tag{2-34}$$

En el sistema 2-34 el vector $\boldsymbol{f}$ ya contiene al último termino de la ecuación 2-30.

Finalmente se logra conformar el sistema:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \tag{2-35}$$

Del cual se pueden obtener los desplazamientos nodales y resolver discretamente el campo de los desplazamientos, con el que posteriormente, con el uso de las ecuaciones 2-27 y 2-29, se puede hallar el campo de las deformaciones y los esfuerzos, respectivamente.

2.3.3. Energía interna de deformación

En un dominio discretizado por una malla de elementos finitos la *energía interna de deformación* a nivel elemental se calcula como:

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^{T(e)}\boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{a}^{(e)} \tag{2-36}$$

Esta cantidad escalar mide el nivel de solicitación mecánica que posee un elemento finito. Para calcular la energía de deformación interna del sistema completo se suman los aportes de energía de cada elemento, de la siguiente forma:

$$U = \sum_{e=1}^{nele} U^{(e)} \tag{2-37}$$

La energía de deformación interna, U, es proporcional a la flexibilidad del sistema, por esta razón esta forma de energía es comúnmente usada en los algoritmos de optimización estructural como criterio de convergencia, para señalar que se ha alcanzado la rigidez deseada.

Si se utiliza el operador de ensamblaje sobre la sumatoria de las matrices de rigidez elementales en 2-33 se llega a una expresión de la energía de deformación interna del sistema en función del vector de desplazamientos y la matriz de rigidez global del sistema:

$$U = \boldsymbol{a}^T \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nele} (\boldsymbol{K}_i^{(e)})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} \tag{2-38}$$

2.3.4. Elemento tetraédrico lineal

Este elemento es la extensión al caso tridimensional del elemento triangular lineal. Se denomina lineal por que las funciones que aproximan el campo del desplazamiento dentro del mismo son polinomios de primer orden. Tiene tres grados de libertad por nodo, como se puede apreciar en la siguiente figura:

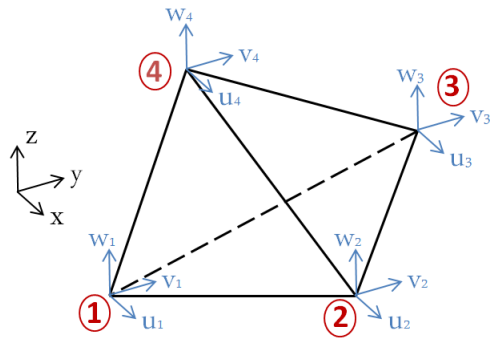


Figura 2-4.: Elemento tetraédrico.

Las componentes del desplazamiento se calculan por medio de tres funciones de aproximación que son validas dentro del domino definido por el volumen del elemento finito tetraédrico:

$$\begin{aligned} u^{(e)}(x,y,z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ v^{(e)}(x,y,z) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ w^{(e)}(x,y,z) &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{aligned} \tag{2-39}$$

Los valores de desplazamientos nodales en términos de las coordenadas generalizadas α se reemplazan de manera directa en las ecuaciones de 2-39. Luego se procede a despejar las coordenadas generalizadas en términos de los desplazamientos nodales y de las coordenadas cartesianas de los nudos, como se ilustra a continuación:

$$\begin{aligned} u_1^{(e)} &= u^{(e)}(x_1,y_1,z_1) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 z_1 \\ u_2^{(e)} &= u^{(e)}(x_2,y_2,z_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 z_2 \\ u_3^{(e)} &= u^{(e)}(x_3,y_3,z_3) = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 z_3 \\ u_4^{(e)} &= u^{(e)}(x_4,y_4,z_4) = \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \alpha_4 z_4 \end{aligned} \tag{2-40}$$

Despejando las coordenadas generalizadas en las ecuaciones anteriores se obtiene la siguiente expresión para la componente u^e del desplazamiento:

$$u^{(e)}(\boldsymbol{X}) = N_1^{(e)}(\boldsymbol{X})u_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\boldsymbol{X})u_2^{(e)} + N_3^{(e)}(\boldsymbol{X})u_3^{(e)} + N_4^{(e)}(\boldsymbol{X})u_4^{(e)} \tag{2-41}$$

donde:

$$N_i^{(e)}(x,y,z) = \frac{1}{6V^{(e)}}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \tag{2-42}$$

Los coeficientes a_i, b_i, c_i y d_i se calculan a partir de los siguientes determinantes:

$$
\begin{aligned}
a_i &= \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \qquad b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix} \\
c_i &= \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix} \qquad d_i = -\begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-43}
$$

donde los subíndices i,j,k corresponden a la siguiente permutación:

$$
i,j,k,l = 1,2,3,4 \quad i,j,k,l = 2,3,4,1 \quad i,j,k,l = 3,4,1,2 \quad i,j,k,l = 4,1,2,3
$$

Este procedimiento se repite para las otras dos componentes $v_i^{(e)}$ y $w_i^{(e)}$, generando el siguiente sistema de ecuaciones simultaneas:

$$
\begin{aligned}
u^{(e)}(\boldsymbol{X}) &= N_1^{(e)}(\boldsymbol{X})u_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\boldsymbol{X})u_2^{(e)} + N_3^{(e)}(\boldsymbol{X})u_3^{(e)} + N_4^{(e)}(\boldsymbol{X})u_4^{(e)} \\
v^{(e)}(\boldsymbol{X}) &= N_1^{(e)}(\boldsymbol{X})v_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\boldsymbol{X})v_2^{(e)} + N_3^{(e)}(\boldsymbol{X})v_3^{(e)} + N_4^{(e)}(\boldsymbol{X})v_4^{(e)} \\
w^{(e)}(\boldsymbol{X}) &= N_1^{(e)}(\boldsymbol{X})w_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\boldsymbol{X})w_2^{(e)} + N_3^{(e)}(\boldsymbol{X})w_3^{(e)} + N_4^{(e)}(\boldsymbol{X})w_4^{(e)}
\end{aligned}
\tag{2-44}
$$

Sistema que matricialmente se expresa de la forma $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}$.

Al aplicar la matriz de operadores diferenciales a las funciones de forma se obtiene $\boldsymbol{B}^{(e)}$:

$$
\boldsymbol{B}_{(e)} = [\boldsymbol{B}_1^{(e)} \quad \boldsymbol{B}_2^{(e)} \quad \boldsymbol{B}_3^{(e)} \quad \boldsymbol{B}_4^{(e)}] \tag{2-45}
$$

donde:

$$
\boldsymbol{B}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x N_i^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z N_i^{(e)} \\ \partial_y N_i^{(e)} & \partial_y N_i^{(e)} & 0 \\ \partial_z N_i^{(e)} & 0 & \partial_x N_i^{(e)} \\ 0 & \partial_z N_i^{(e)} & \partial_y N_i^{(e)} \end{bmatrix} \tag{2-46}
$$

Como la matriz de operadores diferenciales que actúa sobre funciones de forma es constante, las deformaciones y los esfuerzos en el interior del elemento finito tetraédrico son constantes. Aplicando el principio de los trabajos virtuales descrito anteriormente se puede determinar la matriz de rigidez elemental en la siguiente forma:

$$\boldsymbol{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^{(e)} & \boldsymbol{K}_{12}^{(e)} & \boldsymbol{K}_{13}^{(e)} & \boldsymbol{K}_{14}^{(e)} \\ & \boldsymbol{K}_{22}^{(e)} & \boldsymbol{K}_{23}^{(e)} & \boldsymbol{K}_{24}^{(e)} \\ & & \boldsymbol{K}_{33}^{(e)} & \boldsymbol{K}_{34}^{(e)} \\ sim & & & \boldsymbol{K}_{44}^{(e)} \end{bmatrix} \tag{2-47}$$

donde cada submatriz se calcula mediante la expresión:

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \boldsymbol{B}_i^{(e)T} \boldsymbol{D}_{(e)} \boldsymbol{B}_j^{(e)} dV \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{2-48}$$

donde:

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{(e)} = \frac{1}{36V^{(e)}} \begin{bmatrix} (D_{11}b_ib_j + D_{44}c_ic_j + D_{55}d_id_j) & (D_{12}b_ic_j + D_{44}c_ib_j) & (D_{13}b_id_j + D_{55}d_ib_j) \\ (D_{12}c_ib_j + D_{44}b_ic_j) & (D_{22}c_ic_j + D_{44}b_ib_j + D_{66}d_id_j) & (D_{23}c_id_j + D_{66}d_ic_j) \\ (D_{13}d_ib_j + D_{55}b_id_j) & (D_{23}d_ic_j + D_{66}c_id_j) & (D_{33}d_id_j + D_{55}b_ib_j + D_{66}c_ic_j) \end{bmatrix} \tag{2-49}$$

Cada nudo tiene asociada una función de forma que se encarga de recoger los resultados nodales y distribuirlos en el interior del elemento. Las fuerzas nodales equivalentes se pueden calcular con las mismas expresiones pero en sentido inverso, ya no para distribuir hacia los elementos sino para distribuir hacia los nodos. Las siguientes ecuaciones representan este proceso, en el que se toma la carga distribuida de superficie en cada cara, representada por un vector $\boldsymbol{p}_c^{(e)} = \begin{bmatrix} p_{xc}^{(e)} & p_{yc}^{(e)} & p_{zc}^{(e)} \end{bmatrix}^T$, y se distribuye hacia los nodos asociados a esta:

$$\boldsymbol{f}_s^{(e)} = \sum_{c=1}^{nc} \boldsymbol{f}_{sc}^{(e)} \qquad \boldsymbol{f}_{sc}^{(e)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{sc1}^{(e)} \\ \boldsymbol{f}_{sc2}^{(e)} \\ \boldsymbol{f}_{sc3}^{(e)} \\ \boldsymbol{f}_{sc4}^{(e)} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{f}_{sci}^{(e)} = \int_{A_c^{(e)}} \boldsymbol{N}_i^{(e)T} \boldsymbol{p}_c^{(e)} dA \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4 \\ c = (123), (124), (234), (134) \end{cases} \tag{2-50}$$

Al resolver las integrales se llega a los siguientes vectores de cargas equivalentes para cada cara del tetraedro:

$$f_{s123}^{(e)} = \frac{A_{123}^{(e)}}{3}\begin{bmatrix} p_{x123}^{(e)} \\ p_{y123}^{(e)} \\ p_{z123}^{(e)} \\ p_{x123}^{(e)} \\ p_{y123}^{(e)} \\ p_{z123}^{(e)} \\ p_{x123}^{(e)} \\ p_{y123}^{(e)} \\ p_{z123}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_{s124}^{(e)} = \frac{A_{124}^{(e)}}{3}\begin{bmatrix} p_{x124}^{(e)} \\ p_{y124}^{(e)} \\ p_{z124}^{(e)} \\ p_{x124}^{(e)} \\ p_{y124}^{(e)} \\ p_{z124}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{x124}^{(e)} \\ p_{y124}^{(e)} \\ p_{z124}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad f_{s234}^{(e)} = \frac{A_{234}^{(e)}}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{x234}^{(e)} \\ p_{y234}^{(e)} \\ p_{z234}^{(e)} \\ p_{x234}^{(e)} \\ p_{y234}^{(e)} \\ p_{z234}^{(e)} \\ p_{x234}^{(e)} \\ p_{y234}^{(e)} \\ p_{z234}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad f_{s134}^{(e)} = \frac{A_{134}^{(e)}}{3}\begin{bmatrix} p_{x134}^{(e)} \\ p_{y134}^{(e)} \\ p_{z134}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{x134}^{(e)} \\ p_{y134}^{(e)} \\ p_{z134}^{(e)} \\ p_{x134}^{(e)} \\ p_{y134}^{(e)} \\ p_{z134}^{(e)} \end{bmatrix} \tag{2-51}$$

Para las fuerzas de cuerpo el proceso se simplifica notablemente debido a que la carga volumétrica se distribuye a todos los nodos del elemento en forma proporcional:

$$f_b^{(e)} = \begin{bmatrix} f_{b1}^{(e)} \\ f_{b2}^{(e)} \\ f_{b3}^{(e)} \\ f_{b4}^{(e)} \end{bmatrix}, \qquad f_{bi}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} N_i^{(e)T} b_{(e)} dV = \frac{V^{(e)}}{4}\begin{bmatrix} b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \\ b_z^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2-52}$$

3. Elementos de la optimización estructural

Los fundamentos matemáticos de la optimización de estructuras se presentan en este capítulo. Se dan las definiciones de los elementos que intervienen en la optimización, como son: variables y formulación del problema, elementos matemáticos de la optimización, técnicas de solución, condiciones de optimalidad[1], entre otras. El resumen que se muestra se basa en lo consultado en las referencias: [24], [44] y [8].

3.1. Formulación del problema de optimización

En la optimización se asume que existe un resultado que se puede mejorar, y que se encuentra sujeto a ciertas restricción y condiciones. Generalmente la optimizacion se evalúa de acuerdo al valor de una función objetivo que determina el grado de cumplimiento con el estado optimo ideal.

Los elementos básicos necesarios para realizar la formulación estandar de un problema de optimización estructural se tratan en las secciones a continuación. Esto conlleva a la definicion de las varibles de diseño, función objetivo, y restricciones.

3.1.1. Variables de diseño

Las variables de diseño son un grupo de parámetros que controlan el cambio en la estructura a optimizar, ejemplos de estos parámetros son: la sección transversal de los elementos, el modulo de elasticidad del material, las coordenadas geometricas, entre otras.
En este documento se designan con el vector:

$$\boldsymbol{x} = x_1, ..., x_n \tag{3-1}$$

Las variables de diseño pueden tomar valores discretos como por ejemplo las secciones transversales fabricadas en vigas de acero, o también valores continuos como en el caso de las coordenadas geométricas de los nodos de una estructura reticular.

[1] Término en español usado por [44] que busca conservar el significado del término en inglés *optimality*, definida como la capacidad de ser optimizado.

Si la optimización estructural trabaja con un valor continuo de la variable de diseño y se requiere, por cuestiones de manufactura, homologar el resultado de la optimización a valores discretos, se debe analizar el espaciamiento de las variables discretas. Asegurando que al realizar la aproximación de la variable continua por medio de la variable discreta no se modifique el resultado de la optimización.

3.1.2. Función objetivo

La función objetivo es la ecuación del proceso de optimización que se minimiza. Esta mide el grado de eficiencia del diseño. Se denota por $f(\boldsymbol{x})$, o si son varias, como:= $f(\boldsymbol{x}) = [f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), ..., f_p(\boldsymbol{x})]$. Si se tiene más de una función objetivo el problema se conoce como multicriterio, y es, en general, mucho más complejo de resolver. Existen varios enfoques para abordar la optimización multicriterio, algunos escriben las funciones objetivos en una sola ecuación que resulta de la combinación lineal de estas [24], otras transforman determinadas funciones objetivos en restricciones [24].

3.1.3. Restricciones

Las restricciones introducen limites a las variables de diseño. Divide el domino de estas en un espacio admisible, donde las restricciones son satisfechas, y en otro inadmisible, donde las restricciones son violadas. Se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} g_i(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad &, \quad i = 1, ..., n_g \\ h_k(\boldsymbol{x}) = 0 \quad &, \quad k = 1, ..., n_h \end{aligned} \tag{3-2}$$

donde g es el número de restricciones de desigualdad y h de igualdad.

Por su naturaleza generalmente las restricciones se expresan como desigualdades y en algunos casos como igualdades. Las restricciones de igualdad pueden ser cambiadas por dos desigualdades que restrinjan la variable de diseño a un valor cercano al que le impone la igualdad, sin embargo, esto no es deseable por que se adicionan mas restricciones a la formulación del problema de optimización.

3.1.4. Formulación estándar

Utilizando los elementos definidos en las secciones anteriores un problema de optimización estructural se puede plantear como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{Sujeto a:} \quad h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad , \quad i = 1, ..., n_e \\ &\qquad\qquad g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad , \quad j = 1, ..., n_g \end{aligned} \tag{3-3}$$

en donde:

$\boldsymbol{x}$ = $x_1, ..., x_n$=: variables de diseño.
$f(x)$ =: función objetivo.
$h_i(x)$ =: restricción con igualdad.
$g_j(x)$ =: restricción con desigualdad.
n_g =: numero de restricciones de desigualdad.
n_e =: numero de restricciones de igualdad.

El problema presentado en 3-3 se puede expresar también como una maximización de la función $f(x)$ por medio de la multiplicación por el negativo de la unidad (-1), cambiando con esto el sentido de los valores extremos de la función. Por otro lado, si tanto la función objetivo como las restricciones se pueden representar como una función lineal de las variables de diseño se dice que el problema de optimización es lineal, en caso contrario se define como no lineal.

Si los órdenes de magnitud entre las variables de diseño, la función objetivo y las restricciones son muy diferentes se pueden presentar problemas de redondeo y truncamiento de cifras, en estos casos es conveniente la normalización de las variables. Otro inconveniente asociado al proceso de solución de la optimización estructural es la determinación del método de solución, ya que en algunos casos no es totalmente claro cuál método se ajusta mejor al problema planteado en 3-3. La escogencia de este método es un parámetro decisivo por que de esta depende el grado de aproximación alcanzado, la dificultad en la resolución del proceso de optimización, y el costo computacional empleado para llegar al diseño optimo.

El grado de refinamiento en el análisis por el MEF es un factor que interfiere directamente en el rendimiento computacional del proceso de optimización. Puesto que este análisis se ejecuta en repetidas ocasiones durante la rutina de optimización, refinamientos muy complejos, favorables en los problemas de análisis estructural, pueden resultar en tiempos de calculo excesivos e incluso podrían impedir la ejecución del proceso de optimización al superarse la capacidad del equipo de computo.

3.2. Proceso de solución

Generalmente el proceso de solución del problema de la optimización estructural, como se planteo en 3-3, se basa en técnicas numéricas que buscan el mínimo de la función objetivo iterativamente. Para ello comienzan con un diseño inicial y a través de la variación de las variables de diseño en cada iteración se calcula el valor de la función objetivo, su grado de cumplimiento con el criterio de optimizacion, y el cumplimiento de las restricciones. El esquema de iteración se detiene cuando no se puede alcanzar una mejora significativa en el valor de la función objetivo o en el grado de cumplimiento de las restricciones, o cuando el progreso de la función objetivo es muy lenta.

La mayoría de los procesos de optimización cuentan con los siguientes cuatro pasos:

1. Búsqueda y selección de las restricciones activas. Tal como se describió en la sección anterior la correcta especificación de las restricciones activas puede determinar en gran medida el comportamiento del proceso de optimización.
2. Determinación de una dirección de búsqueda de acuerdo a la función objetivo o a las restricciones. Para disminuir el costo computacional y garantizar la convergencia hacia un punto extremo de la función objetivo, es conveniente contar con un método que permita direccionar eficientemente el algoritmo de la optimización estructural hacia el optimo.
3. Determinación de la distancia de recorrido sobre la dirección de búsqueda. Existen metodologías, como la búsqueda de linea unidimensional, que determinan la distancia que se debe recorrer a lo largo de la dirección dada.
4. Evaluación del criterio de convergencia.

3.3. Métodos específicos y generales

Una clasificación de las técnicas de optimización está dada por aquellos métodos que sirven como técnicas de optimización en problemas particulares, denominados métodos específicos, en contraparte a otros, que se formularán desde un punto de vista general, cubriendo una amplia gama de problemas, titulados métodos generales.

Uno de los métodos específicos más reconocidos es el *diseño totalmente esforzado*, sin embargo, este presenta bastantes limitaciones al utilizar únicamente restricciones formuladas en función de esfuerzos y con estructuras de un solo material con redundancia baja. Los métodos generales en comparación a los específicos tienen ventajas al poseer una formulación general, un rango de aplicación más amplio, e integrabilidad con software de análisis. Si bien es cierto que los métodos específicos eventualmente presentan mejores resultados en problemas muy puntuales, también han reflejado sus carencias y limitaciones en las ultimas

décadas, en contraparte, los métodos generales basados en su robusta formulación han sido extendidos a muchos otros campos del conocimiento diferentes a los estructurales.

3.4. Herramientas analíticas de la optimización

Los métodos analíticos utilizados para resolver problemas relacionados con la optimización de estructuras se basan en el calculo diferencial y el calculo variacional. El uso de estas dos teorías permite resolver problemas de manera directa, llegando a los resultados por medio de la ejecución de operaciones algebraicas o analíticas que por lo general dan resultados en términos de funciones. La gran desventaja que presentan estos métodos, y que impulsó el desarrollo de las herramientas numéricas de optimización, es la cantidad y el grado de suposiciones que se tienen que plantear para poder resolver el problema. Por esta razón su utilización se ha orientado hacia: la validación de técnicas de optimización, el fundamento conceptual de las herramientas de optimización, el material pedagógico para ilustrar las condiciones necesarias y suficientes para formular un problema de optimización, entre otros [24].

Un primer método analítico que utiliza el calculo diferencial para resolver el problema de optimización se conoce como *método de sustitución directa*, consiste en el reemplazo directo de las restricciones en la función objetivo. Otro método bastante popular es el de los *multiplicadores de Lagrange*, que convierte un problema de optimización con restricciones a uno sin restricciones determinado por la función de Lagrange [24].

Los fundamentos del calculo diferencial y variacional enfocados en la resolución de problemas de optimización junto con los principios del método de sustitución directa y de los multiplicadores de Lagrange se presentan a continuación.

3.4.1. Optimización basada en el cálculo diferencial

La optimización de una función, minimizarla o maximizarla, desde el punto de vista del cálculo diferencial es bien conocida. Una de las primeras condiciones que tiene que satisfacer un punto optimo $\boldsymbol{x}^* = (x_1, ..., x_n)$ es:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} = 0, ..., \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n} = 0 \tag{3-4}$$

Si bien el sistema de ecuaciónes anterior determina que se trata de un punto extremo no da información relacionada al hecho de que se trate de un mínimo, un máximo o un punto de inflexión. Sin embargo, en los algoritmos iterativos este sistema de ecuaciones se puede utilizar para hallar la mejor dirección de búsqueda dentro del dominio de la función objetivo.

La determinación de un valor estacionario (máximo, mínimo o punto de silla) de la función objetivo $f(\boldsymbol{x})$ se logra por medio de la matriz Hessiana $\boldsymbol{H}$,definida como:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \end{bmatrix} \tag{3-5}$$

donde:
$\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) =:$ variables de diseño.

La matriz Heassiana $\boldsymbol{H}$, es positiva-definida si para cada valor $\boldsymbol{x}$ se cumple que el producto matricial $Q = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{x}$ es positivo, y si equivale a cero únicamente para $\boldsymbol{x} = 0$. Es negativa-definida si $-\boldsymbol{H}$ es positiva-definida y de igual forma se cumple la condicion de ser equivalente a cero únicamente para $\boldsymbol{x} = 0$. Una herramienta para determinar si la matriz Hessiana es positiva-definida o negativa-definida es el cálculo de los determinantes de todos los menores principales desde la esquina izquierda superior de la matriz $\boldsymbol{H}$. De esta manera se puede probar:

- La matriz $\boldsymbol{H}$ es positiva-definida si el determinante de todos los menores principales es positivo.
- La matriz $\boldsymbol{H}$ es negativa-definida si $-\boldsymbol{H}$ es positiva-definida.
- La matriz $\boldsymbol{H}$ es negativa-definida si $\boldsymbol{H}_1$, primer menor principal de $\boldsymbol{H}$, es negativa y los siguientes menores principales $\boldsymbol{H}_2, ..., \boldsymbol{H}_n$ tienen los signos alternados entre positivo y negativo.

De esta manera se puede demostrar que los valores extremos cumplen con:

- Si la evaluación del punto $\boldsymbol{x}^*$ en la matriz $\boldsymbol{H}$ resulta un positivo-definido, el punto extremo es un mínimo.
- Si la evaluación del punto $\boldsymbol{x}^*$ en la matriz $\boldsymbol{H}$ resulta un negativo-definido, el punto extremo es un máximo.

Cuando la matriz presenta problemas de singularidad, es decir existe $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ tal que $Q = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{x} = 0$, se tiene que recurrir a las siguientes definiciones: la matriz $\boldsymbol{H}$ se llama semipositiva-definida si la expresión $Q = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{x}$ es no-negativa para todo $\boldsymbol{x}$, es decir, el no-negativa indica que puede existir la condición de que sea igual a cero para $\boldsymbol{x} \neq 0$, la condición anterior se garantiza cuando los eigenvalores de la matriz $\boldsymbol{H}$ son no-negativos (positivos con inclusión del cero). Si $-\boldsymbol{H}$ es semipositiva-definida entonces $\boldsymbol{H}$ se nombra seminegativa-definida.

A partir de los conceptos de positiva-definida, negativa-definida, semipositiva-definida, y seminegativa-definida. Se puede demostrar que:

- Si la matriz $\boldsymbol{H}$ es semipositiva-definida pero no positiva-definida, se requiere de las derivadas de orden superior para determinar condiciones suficientes de un punto mínimo. Como se representa en la parte a) de la figura 3-1 para una función de una variable.
- Si la matriz $\boldsymbol{H}$ es seminegativa-definida pero no negativa-definida. Se requiere de las derivadas de orden superior para determinar condiciones suficientes de un punto máximo. Como se representa en la parte b) de la figura 3-1 para una función de una variable.
- Si la matriz $\boldsymbol{H}$ no es ni seminegativa-definida ni semipositiva-definida, se nombra como *matriz indefinida*, y el punto estacionario es un punto de silla. Como se representa en la parte c) de la figura 3-1 para una función de una variable.

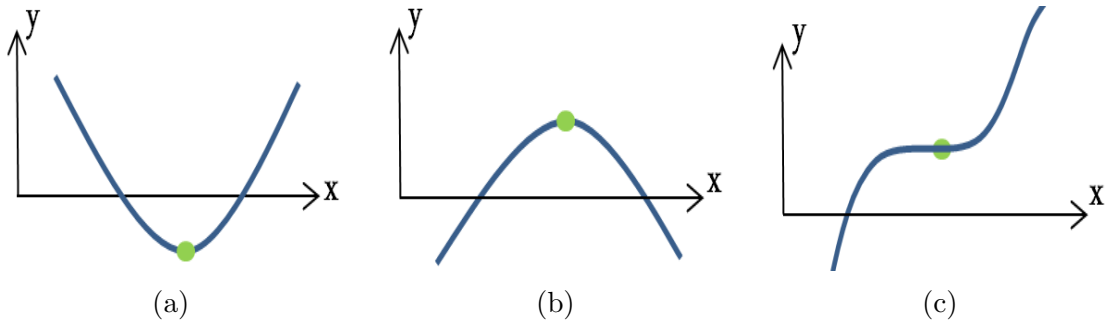


Figura 3-1.: Tipos de valores extremos en una función con una variable independiente. a.) Valor mínimo. b.) Valor máximo. c.) Valor de inflexión.

El uso del calculo diferencial se ve muy limitado por las suposiciones que se tienen que establecer a fin de que los procedimientos analíticos descritos arriba sean prácticos, suposiciones como: no considerar el peso propio, los efectos de pandeo, los efectos de segundo orden, etc., hacen que las herramientas del calculo diferencial en la optimización se restrinjan a un grupo muy pequeño de problemas prácticos.

3.4.2. Optimización basada en el cálculo variacional

En algunos problemas de optimización la función objetivo se expresa en términos de una integral que depende de una o varias funciones que a su vez están en función de una o varias variables independientes. Un funcional con una sola función y con una sola variable dependiente se escribe:

$$J = \int_a^b F(x, y, y')dx \tag{3-6}$$

La función y que minimiza el funcional anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$y(x) = y^*(x) + \epsilon\eta(x) \tag{3-7}$$

donde:
$y^*(x)$=: función de aproximación.
ϵ =: parámetro de amplitud.
$\eta(x)$ =: función de forma.

Al reemplazar la ecuación 3-8 en 3-7 se llega a una ecuación que depende exclusivamente del parámetro de amplitud ϵ:

$$J(\epsilon) = \int_a^b F(x, y^* + \epsilon\eta, y^{*'} + \epsilon\eta^{'})dx \tag{3-8}$$

De esta manera la primera variación del funcional δJ se obtiene por medio del calculo diferencial utilizando el criterio de la primera derivada y notando que para $\epsilon = 0$ el funcional toma un punto extremo:

$$\delta J = \frac{dJ(\epsilon)}{d\epsilon}(\epsilon = 0) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy^{'}}{d\epsilon} \right) dx \tag{3-9}$$

Integrando la ecuación anterior por partes y resolviendo se llega a:

$$\delta J = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_b^a + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx = 0 \tag{3-10}$$

El primer término de la ecuación 3-10 siempre se anula, ya sea por las condiciones de frontera del variacional de la función y, $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, o por mantener el cumplimiento de la ecuación en si. Lo que reduce a considerar solamente el segundo término de la ecuación, este debe anularse en todo el domino del problema ya que δy toma valores arbitrarios, por tal motivo para dar cumplimiento a la ecuación 3-10 se tiene que satisfacer la siguiente expresión:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{3-11}$$

La relación anterior se conoce como ecuación de Euler-Lagrange, y con el uso directo de esta podemos plantear los problemas de optimización que involucran funcionales.

3.4.3. Método de la sustitución directa

Aquellos problemas de optimización para los cuales las restricciones se presenten en forma de igualdad y dependan exclusivamente de las variables de diseño se pueden formular como sigue:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar.} & f(\boldsymbol{x}), & x = (x_1, ..., x_n)^T \\ \text{sujeto a:} & h_j(\boldsymbol{x}) = 0, & j = 1, ..., n_e \end{array} \tag{3-12}$$

En donde n_e es el número de restricciones. Si este número de restricciones es menor o igual al número de variables de diseño y las restricciones se pueden expresar explícitamente en términos de $n - n_e$ variables de diseño independiente, luego la función objetivo puede ser escrita como una función en términos de $n - n_e$ variables de diseño independiente que no esta restringida.

El objetivo de este método es realizar sustituciones sucesivas, despejando las variables de diseño de las restricciones, de tal manera que permitan trabajar con una función objetivo sin restricciones para la cual se pueda utilizar un método de minimización de funciones convencional.

3.4.4. Multiplicadores de Lagrange

El método de los multiplicadores de Lagrange se puede aplicar a problemas de optimización que se encuentran con restricciones de igualdad, desigualdad, y/o con funcionales. Este método convierte el problema de la optimización restringida en un problema algebraico en el que se resuelve un sistema de ecuaciones. Un cambio diferencial de la función objetivo, df, en el punto optimo satisface:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \tag{3-13}$$

La ecuación 3-13 establece que en el punto óptimo la función objetivo tiene un cambio diferencial nulo. Este estado se verifica por la suma algebraica de cada uno de los términos de la ecuación anterior, es decir, no se puede establecer la condición de nulidad en cada uno de los términos que interviene en la ecuación por que cada uno de ellos asume valores arbitrarios. Procediendo de manera similar en la función que define la restricción, se precisa que un cambio diferencial, dh, en esta función se puede plantear como:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial h}{\partial x_n} dx_n = 0 \tag{3-14}$$

El método de los multiplicadores de Lagrange multiplica la ecuación 3-14 por un escalar λ y posteriormente la iguala con el negativo de la ecuación 3-13, reorganizando los términos se llega a :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2}\right) dx_2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_n}\right) dx_n = 0 \tag{3-15}$$

El escalar λ, conocido como multiplicador de Lagrange, se coloca de tal manera que cada término de la anterior ecuación se anule. El buscar la anulación de cada término de la ecua-

ción 3-15 posibilita plantear n ecuaciones independientes, como las incógnitas del problema son n+1, por la adición del multiplicador de Lagrange, faltaría una ecuación para completar el sistema de ecuaciones que solucione las incógnitas. La ecuación adicional que completa el sistema es la restricción asociada al problema.

Otra manera de ver el método es definiendo una función denominada función de Lagrange como:

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{n_e} \lambda_j h_j \tag{3-16}$$

Esto resulta de observar que la anulación de cada término en la ecuación 3-15 puede corresponder a establecer el siguiente sistema de ecuaciones para la función de 3-16:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0, \qquad i = 1, ..., n, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= 0, \qquad j = 1, ..., n_e, \end{aligned} \tag{3-17}$$

Donde n_e es el numero de restricciones y λ_i es el multiplicador de Lagrange asociado a cada una de ellas. Para el caso en general en el que se tienen múltiples restricciones, el método de los Multiplicadores de Lagrange establece un multiplicador por cada restricción agregando una sumatoria a la ecuación 3-17 por cada una de estas. De esta manera igualmente el sistema de ecuaciones se mantiene solucionable ya que el multiplicador que se agregue se completa con una restricción adicional, dejando el número de ecuaciones igual al número de incógnitas.

3.5. Condiciones de optimalidad

En general es muy difícil demostrar las condiciones necesarias y suficientes para poder garantizar un resultado óptimo global. En muchos casos se deja a criterio del ingeniero la determinación de el grado de optimización de cierta técnica, o, se realizan ensayos de prueba y error a fin de asegurar el punto de diseño óptimo.
A continuación se describen diferentes metodologías que establecen las condiciones necesarias y suficientes que debe poseer un punto estacionario, estas condiciones varían dependiendo del tipo de formulación del problema de optimización que se trate.

3.5.1. Optimización sin restricciones

Cuando se plantea la optimización sin restricciones utilizando el cálculo diferencial en general no se pueden garantizar las condiciones para no caer en mínimos locales o en problemas relacionados con la unicidad de la solución. Un grupo de condiciones que debe satisfacer un

punto óptimo en este tipo de problemas se conocen como *condiciones de KKT o de Karush - Kuhn - Tucker*. en estas condiciones se plantean tres requisitos:

- **Condiciones necesarias de primer orden:** la función objetivo $f(\boldsymbol{x})$ en el punto óptimo, $\boldsymbol{x}^*$ debe satisfacer la ecuación 3-4.
- **Condiciones necesarias de segundo orden:** la existencia y determinación de un mínimo, un máximo o un punto de silla esta en función de las definiciones para la matriz Hessian, $\boldsymbol{H}$, dadas por positiva-definida, negativa-definida, semipositiva-definida y seminegativa-definida. Como se describió en la sección 3.4.1.
- **Condiciones suficientes:** si la función objetivo es dos veces diferenciable y satisface las dos condiciones necesarias en el punto $\boldsymbol{x}^*$, este corresponde a un óptimo de $f(\boldsymbol{x})$.

3.5.2. Optimización con restricciones

En un problema de optimización con restricciones de igualdades y desigualdades como se formuló en 3-3 las condiciones necesarias que debe satisfacer un mínimo se obtienen por medio de la función de Lagrange, descrita en la ecuación 3-15, que se repite a continuación para restricciones exclusivamente de igualdad, h_j:

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n_e} \lambda_i h_i \tag{3-18}$$

La condición estacionaria de esta función corresponde a un punto óptimo de la función $f(\boldsymbol{x})$ restringida, este punto se obtiene al derivar con respecto a las variables independientes, $x_1, ..., x_n$, con respecto a los multiplicadores de Lagrange, λ_i, e igualando a cero para obtener el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{ne} \lambda_i \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= h_j(x) = 0 \end{aligned} \tag{3-19}$$

Por la derivación del método de Lagrange, si se encuentran los multiplicadores, λ_i, que hagan cumplir 3-19 en un punto óptimo $\boldsymbol{x}^*$ luego se reúnen las condiciones necesarias de un punto óptimo. Esta condición es válida solamente para puntos regulares, es decir, puntos en los que los gradientes de las restricciones son linealmente independientes. Si alguna restricción es linealmente dependiente en un punto óptimo evaluado el multiplicador de Lagrange asociado a esta restricción es cero y por consiguiente se puede cancelar.

Las condiciones necesarias de un punto estacionario cuando se tienen restricciones de desigualdades varían con respecto a las presentadas en la ecuación 3-19, para este caso se

empieza por transformar la restricción de inegualdad en una de igualdad por medio de la definición del parámetro t_j^2 que transforma la restricción de igualdad en:

$$g_j(\boldsymbol{x}) - t_j^2 = 0, \quad j = 1, ..., n_g \tag{3-20}$$

Este parámetro mide la distancia entre entre la desigualdad y la condición crítica de esta, es decir, cuan lejos está del limite impuesto a la restricción. Utilizando la ecuación 3-20 se puede escribir la función de Lagrange como:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{\lambda}) = f - \sum_{j=1}^{ng} \lambda_j (g_j - t_j^2) \tag{3-21}$$

Al buscar el punto estacionario de la ecuación 3-21 se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{ng} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 && i = 1, ..., n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= -g_j + t_j^2 = 0 && j = 1, ..., n_g \\ \frac{\partial L}{\partial t_j} &= 2\lambda_j t_j = 0 && j = 1, ..., n_g \end{aligned} \tag{3-22}$$

De manera análoga a como se estableció para los problemas con restricciones únicamente de igualdad, este sistema de ecuaciones es válido únicamente en puntos regulares, es decir aquellos puntos en que los gradiente de las restricciones activas son linealmente independientes. El sistema de ecuaciones anterior representa las condiciones necesarias para establecer si un punto es estacionario de la función objetivo restringida, sin embargo, no son suficientes para establecer si es un punto mínimo. Las condiciones llamadas de Karush-Kuhn-Tucker, también conocida como condiciones KKT, son una variación de 3-22 y se utilizan para establecer las condiciones necesarias de un punto mínimo, se enuncian como:
Si $\boldsymbol{x}$ es un mínimo local de $f(\boldsymbol{x})$ restringida con las inecuaciones $g_j(\boldsymbol{x})$ entonces los λ_i no negativos satisfacen:

- La ecuación 3-22.
- λ_i es nula si la restricción no es activa.

Una interpretación geometría de las condiciones de KKT se puede encontrar en la referencia [24]. Donde se indica que si el número de restricciones activas es menor al número de variables de diseño las condiciones de KKT son necesarias pero no suficientes para garantizar un mínimo. Es decir, un punto óptimo siempre las satisface pero incluso cumpliendo las condiciones KKT se puede encontrar un punto que mejore la función objetivo, requiriendose que la evaluación de la matriz Hessiana de la función de Lagrange 3-21 sea positiva-definida en un subespacio tangente a la restricción activa para asegurar un valor óptimo global. Por otro lado, si el número de restricciones activas es igual al número de variables de diseño

las condiciones KKT son suficientes para garantizar un valor óptimo. Matemáticamente se puede expresar lo anterior como:

- Para las restricciones de igualdad:

$$\nabla^2 L = \nabla^2 f - \sum_{j=1}^{ne} \lambda_j \nabla^2 h_j \tag{3-23}$$

- Para las restricciones de desigualdad:

$$\boldsymbol{s}^T(\nabla^2 g_j) \geq 0, \qquad cuando \quad g_j = 0 \quad y \quad \lambda_j = 0 \tag{3-24}$$

  Donde $\boldsymbol{s}$ es un vector ortogonal a la restricción activa.

En algunos casos, dependiendo de la formulación del problema de optimización, se pueden garantizar las condiciones de optimalidad. Algunos de ellos son:

1. Formulaciones variacionales: si se plantea el problema como se desarrolló en 3.4.2, se logra demostrar que utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange se garantizan las condiciones mínimas y suficientes para lograr la optimización.
2. Principios variacionales en la mecánica del continuo: algunos problemas de la mecánica se pueden plantear de manera variacional, de manera análoga a como se describió en el punto anterior. Esta condición permite que el problema quede formulado de tal forma que se pueda demostrar que se cumple con las condiciones para alcanzar la solución óptima.
3. Funciones convexas: en los problemas discretos que utilizan técnicas de programación matemática, se puede llegar a plantear la función objetivo y las restricciones en forma convexa, lo que aseguraría las condiciones de optimización, sin embargo, este planteamiento no siempre es fácil de realizar. Además, muchos problemas de optimización no se pueden plantear de manera convexa.

3.6. Análisis de la sensibilidad

La sensibilidad de un proceso de optimización se define como la razón de cambio de la función objetivo con respecto a las variables de diseño o, en problemas mecánicos, también con respecto al desplazamiento $\boldsymbol{u}$. El análisis de sensibilidad tiene diferentes aplicaciones en la ingeniería estructural como: la cuantificación del cambio en la respuesta estructural en función de las variables de diseño y la determinación de las incertidumbres de cargas, posición, propiedades de secciones transversales en relación con la respuesta estructural. En general el análisis de sensibilidad determina la dirección de búsqueda en un algoritmo de optimización.

Un primer método para cuantificar la sensibilidad es el método de las diferencias finitas, siendo relativamente sencillo en su conceptualización e implementación. Sin embargo, tiene un alto costo computacional y baja exactitud de los resultados. Para una descripción mas detallada de este método consultar la referencia [24]. Un método muy eficiente cuando se tiene un sistema físico discretizado por el MEF es el método Adjunto. Este se trata con más detalle a continuación.

3.6.1. Métodos directo y adjunto

Estos métodos se utilizan para calcular la sensibilidad de sistemas discretizados por medio de un método de elementos finitos. Particularmente, en el que el sistema se puede modelar como:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{3-25}$$

donde:

$\boldsymbol{K}$ =: matriz de rigidez global.
$\boldsymbol{u}$ =: vector de desplazamientos nodales del sistema.
$\boldsymbol{f}$ =: vector de fuerzas nodales del sistema.

Las restricciones del sistema generalmente se pueden escribir como:

$$g(\boldsymbol{u}, x) \geq 0 \tag{3-26}$$

donde $\boldsymbol{u}$ es la respuesta del sistema, vector de desplazamientos, y x es una variable de diseño. Si se utiliza la regla de la cadena la sensibilidad de la restricción 3-26 en relación a la variable de diseño x se puede escribir como:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{T}} \frac{d\boldsymbol{u}}{dx} \tag{3-27}$$

donde las componentes del vector $\boldsymbol{z}$ se calculan así:

$$z_i = \frac{\partial g}{\partial u_i} \tag{3-28}$$

El primer término de la ecuación 3-27 se puede calcular fácilmente. El segundo término, por su parte, requiere establecer la ecuación de equilibrio y multiplicar por el termino $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{K}^{-1}$ para obtener:

$$\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{T}} \frac{d\boldsymbol{u}}{dx} = \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{K}^{-1} \left(\frac{d\boldsymbol{f}}{dx} - \frac{d\boldsymbol{K}}{dx}\boldsymbol{u} \right) \tag{3-29}$$

Dos metodológicas para resolver la ecuación anterior son: El Método Directo, y el Método

Adjunto[2]. El primero consiste, como lo indica su nombre, en operar directamente la ecuación 3-29 resolviendo el producto del lado derecho de la ecuación. En el segundo se obtiene el vector λ que soluciona el sistema:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{z} \tag{3-30}$$

Dada la forma de este sistema el Método Adjunto también se conoce como Método de Carga Virtual, por que el vector $\boldsymbol{z}$ actúa como un vector de carga virtual que produce una respuesta, desplazamientos virtuales, $\boldsymbol{\lambda}$. Con la solución de 3-30, utilizando los multiplicadores de Lagrange y las condiciones de equilibrio se puede llegar a la ecuación:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{d\boldsymbol{f}}{dx} - \frac{d\boldsymbol{K}}{dx}\boldsymbol{u} \right) \tag{3-31}$$

la cual calcula la sensibilidad de la restricción sin la evaluación de $\frac{d\boldsymbol{u}}{dx}$.

El Método Directo requiere la solución de la ecuación 3-29 para cada variable de diseño, por su parte el Método Adjunto requiere la solución de la ecuación 3-30 para cada restricción. De este manera el Método Directo es más eficiente si el número de variables de diseño es menor que el número de restricciones; y de manera inversa, el Método Adjunto es más eficiente si el número de restricciones es mayor que el número de variables de diseño. Cuando se consideran múltiples estados de carga el Método Adjunto se prefiere en comparación al directo.

[2]En inglés Adjoint Method

4. Optimización topológica

En este capítulo se presentan los principios de la formulación de la optimización topológica, dando continuidad al desarrollo de la formulación general, por el diseño de mínimo cumplimiento. Esta presentación es la mas usada dentro de las distintas metodologías existen para formular la optimización topológica.

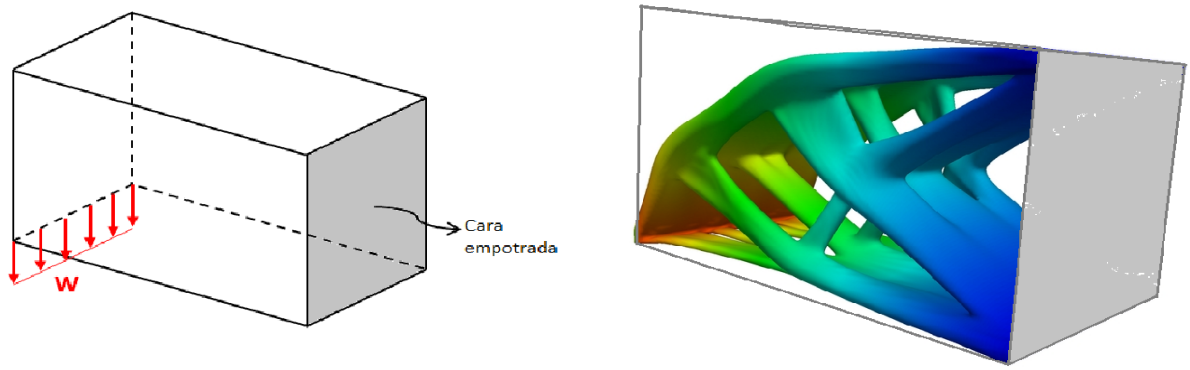
Se indican también las condiciones propias de la optimización topológica resultantes de aplicar los conceptos generales de la optimización estructural presentados en el capítulo 3, como las condiciones de optimalidad[1] y el análisis de la sensibilidad. Este capítulo finaliza con la fundamentación teórica de la optimización topológica. A partir de estos conceptos se propone el modelo de optimización topológica objeto de esta tesis de investigación. La representación del modelo de optimización topológica propuesto se hará mediante algoritmos los cuales posteriormente se implementan en la plataforma MATLAB.

4.1. Objeto de la optimización topológica

El objeto de la optimización topológica consiste en encontrar mediante una formulación matemática la mejor distribución de material en un solido, bajo unas restricciones y solicitaciones determinadas de tal forma que se maximice la rigidez para una cantidad de material establecida. Se busca dejar solo aquellas zonas de material que poseen niveles de esfuerzos grandes, las zonas que tienen niveles bajos se penalizan con el objetivo de eliminarlas del dominio óptimo buscado.

En la figura 4-1 se presenta el resultado de la optimización topológica de una viga en voladizo con carga distribuida en la arista inferior, desarrollada por el grupo de investigación del profesor Dr. Schulz [55] de la Universidad de Trier, en Alemania. La formulación del modelo de optimización topológica presentado en esta figura es la motivación y objetivo de esta tesis de investigación. Los autores luego de la optimización utilizaron técnicas gráficas de suavizado para lograr la geometría mas precisa, esta se presenta en la imagen 4-1(b) en donde la degradación de colores corresponde al nivel de desplazamiento.

[1] Ver explicación del termino en pié de página 33.



(a) (b)

Figura 4-1.: Ejemplo de optimización topológica de viga en voladizo. (Tomada de [55]). a.) Modelo mecánico. b.) Optimizacion topologica.

4.2. Formulación del diseño de mínimo cumplimiento

Un enfoque natural de la optimización estructural es buscar la máxima rigidez con el menor consumo de material, esto se conoce con el nombre de *diseño de mínimo cumplimiento*. Generalmente la rigidez en este tipo de diseño se presenta en términos del trabajo externo (trabajo realizado por las acciones externas), restringido por las condiciones de equilibrio, las de cuantía mínima de material en cada punto, así como por la cantidad total de material que se desea optimizar conocida como fracción de volumen. A continuación se presenta este concepto con más detalle.

Si se define un domino de referencia Ω, ubicado en el campo $\boldsymbol{R}^2$ o $\boldsymbol{R}^3$, que permite definir los puntos de aplicación de las cargas y las condiciones de frontera actuantes en él, donde a cada partícula del domino se le asigna un tensor constitutivo $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, con componentes E_{ijkl}, el problema de diseño optimo consiste en encontrar el valor del tensor constitutivo en cada partícula de tal forma que se minimice el trabajo externo para un mínimo de material posible, cumpliendo con las restricciones de equilibrio.

Con la variación del tensor constitutivo en cada partícula se corresponde directamente una variación de la cantidad de material en cada una de ellas. Con esta correspondencia el problema de optimización topológica también se puede plantear en función de la distribución de material. La distribución que logre minimizar el trabajo externo determina el dominio Ω^{mat} que corresponde a la optimización topológica buscada.

El punto de partida para la formulación del problema de mínimo cumplimiento considera la definición de la forma bilineal de la energía, específicamente el trabajo virtual interno de un cuerpo en un estado de deformación:

$$a_E(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega E_{ijkl}(\boldsymbol{x})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{v})d\Omega \tag{4-1}$$

donde $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ es el tensor de deformaciones, como se definió en 2-3 en notación de Voigt; $\boldsymbol{u}$ es el campo de los desplazamientos reales y $\boldsymbol{v}$ es el campo de los desplazamientos virtuales.

El trabajo de las cargas externas de cuerpo y de superficie se definen como:

$$l(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega \boldsymbol{b}\boldsymbol{u}d\Omega + \int_{\Gamma_T} \boldsymbol{t}\boldsymbol{u}ds \tag{4-2}$$

donde:

$\boldsymbol{b}$ =: vector de fuerzas de cuerpo actuando en un dominio Ω.
$\boldsymbol{t}$ =: vector de fuerzas de superficie actuando en una superficie perteneciente al contorno del cuerpo Γ^T.

finalmente el problema de mínimo cumplimiento se obtiene a partir de las expresiones anteriores y en forma compacta se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & l(\boldsymbol{u}) \\ \text{sujeto a:} \quad & a_E(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = l(\boldsymbol{v}) \\ & \boldsymbol{E} \in \boldsymbol{E_{ad}} \end{aligned} \tag{4-3}$$

donde **u** y **v** pertenecen al campo de los desplazamientos cinemáticos admisibles y $\boldsymbol{E}$ pertenece al conjunto de tensores de rigidez admisibles $\boldsymbol{E_{ad}}$. El tensor de rigidez se define utilizando modelos de parametrización de la rigidez, como se explica mas adelante.

Como se puede notar en la formulación del problema de mínimo cumplimiento de la ecuación 4-3 las variables principales son el campo de los desplazamientos y los tensores de rigidez.

De la mecánica del continuo se conoce que el campo de los desplazamientos se puede hallar de forma analítica para muy pocos casos prácticos, y su solución se limita a problemas muy sencillos, por ende, métodos como el de los elementos finitos son ampliamente usados para calcularlo. Si se establece un mallado igual para el campo de los desplazamientos y de los tensores de rigidez, con esta ultima constante en el interior de cada elemento, se puede plantear el problema de mínimo cumplimiento para un medio continuo discretizado mediante elementos finitos así:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{a} = W_{ext} \\ &\text{sujeto a:} \quad \boldsymbol{K}(E_e)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \\ &\qquad E_e \in E_{ad} \end{aligned} \tag{4-4}$$

donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{f}$ son los vectores de desplazamiento y carga nodal, $\boldsymbol{K}$ es la matriz de rigidez del sólido, y W_{ext} es el trabajo externo. El resultado del ensamblaje de las matrices de rigidez elementales se expresa en la siguiente forma:

$$\boldsymbol{K} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{N} \boldsymbol{K_e}(E_e) \tag{4-5}$$

con $\boldsymbol{K}_e$ y E_e matriz de rigidez y modulo de elasticidad del elemento (e).

En la ecuación 4-4 los módulos de elasticidad a nivel elemental se limita a un conjunto de módulos admisibles, y de igual forma que como se describió para el tensor constitutivo en el medio continuo existen modelos paramétricos para determinar este conjunto, como se desarrolla a continuación.

4.3. Parametrización de la densidad por el modelo SIMP

La búsqueda de distribución de material óptimo se puede plantear desde diferentes enfoques, cada uno de ellos busca la condición óptima con una metodología basada en análisis empíricos, formulaciones matemáticas, o por semejanza con procesos inspirados en la naturaleza. En las referencias [44], [9] y [10] se discuten algunos de estos planteamientos, en el presente trabajo se hace énfasis en el modelo de parametrización de la densidad SIMP, por su siglas en ingles Solid Isotropic Material with Penalization. Este método se constituye en la base para construir de modelo de optimización topológica propuesto en la presente tesis.

Se puede realizar una analogía entre la optimización topológica y la representación de una imagen por medio de pixeles, en la que a cada pixel, que se encuentra dentro de una rejilla de dimensiones fija, se le asigna un color especifico para poder formar la imagen. En el caso de la optimización topológica cada pixel sería un punto el cual solo puede tomar valores comprendidos entre 0 y 1, donde 0 representa la ausencia de material en el elemento y 1 representa el elemento completamente lleno. El significado de los valores intermedios corresponde a valores intermedio entre los casos descritos anteriormente, que generalmente se representan en tonos de grises. Mediante la representación gráfica de la presencia de materia se delimita la topología de la estructura durante el proceso de optimización.

La metodología de parametrización de la densidad (que igualmente parametriza el tensor constitutivo) por el modelo de Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) ha resul-

tado ser muy eficiente, obteniéndose resultados con un alto nivel de detalle y de calidad estructural. Este modelo establece la rigidez en cada punto de acuerdo a una función de densidad penalizada por medio de un exponente, como se desarrolla en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} &E_{ijkl}(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})^p E^0_{ijkl}, \quad p > 1 \\ &\int_\Omega \rho(\boldsymbol{x}) d\Omega \leq V \qquad 0 \leq \rho(\boldsymbol{x}) \leq 1 \qquad x \in \Omega \end{aligned} \tag{4-6}$$

donde:

$\rho(\boldsymbol{x})$ =: función de densidad.
p =: coeficiente de penalización.
$E(\boldsymbol{x})^0_{ijkl}$ =: tensor constitutivo elástico para un material elástico isotrópico lineal.
V =: volumen límite.

La ecuación 4-6 para un dominio discretizado según el Método de los Elementos Finitos toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &E_{(e)} = {\rho_{(e)}}^p E^0_{(e)}, \quad p > 1 \\ &\sum_{i=1}^{ne} \rho_{(i)} V_{(i)} \leq V \qquad 0 \leq \rho_{(e)} \leq 1 \end{aligned} \tag{4-7}$$

donde:

$E_{(e)}$ =: módulo de elasticidad del elemento (e).
$\rho_{(e)}$ =: densidad del elemento (e).
$E^0_{(e)}$ =: módulo de elasticidad para un material elástico isotrópico lineal.
ne =: número de elementos finitos de la malla.
$V_{(e)}$ =: volumen del elemento (e).

Utilizando este modelo el problema de optimización topológica planteado en 4-3 y 4-4 se transforma en un problema de optimización de tamaño donde la única variable de diseño es la densidad. El tensor constitutivo puede asumir los siguientes valores extremos según el modelo SIMP:

$$E_{ijkl} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \rho = 0 \\ E^0_{ijkl} & \text{si} \quad \rho = 1 \end{cases} \tag{4-8}$$

El coeficiente de penalización p esta convenientemente ubicado en el modelo, a fin de eliminar densidades intermedias. Si se eligen valores para este coeficiente por encima de la unidad las densidades penalizadas con esta potencia, presentarán una disminución exponencial de densidad. El coeficiente de penalización afecta drásticamente elementos con densidades in-

termedias. La evaluación de este coeficiente depende del dominio en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p &\geq max\left\{\frac{2}{1-v}, \frac{4}{1+v}\right\} && \text{(en 2D)} \\ p &\geq max\left\{15\frac{1-v}{7-5v}, \frac{3}{2}\frac{1-v}{1-2v}\right\} && \text{(en 3D)} \end{aligned} \tag{4-9}$$

siendo v el coeficiente de Poisson.

El modelo SIMP carece de un sustento matemático riguroso que permita garantizar la unicidad y existencia de soluciones. De alguna forma esta situación compromete la confiabilidad del resultado, y se evidencia en problemas como la dependencia del resultado con la calidad de la malla de elementos finitos, problemas de tablero de ajedrez[2] y mínimos locales. Algunas soluciones para evitar esta situación se presentan más adelante.

4.4. Patología de la solución del POT-3D

En la implementación numérica de los modelos de optimización topológica se presentan dos efectos importantes. Primero, la no existencia de una solución única puesto que el resultado presenta una dependencia con respecto al mallado inicial. Segundo, la presencia de patrones de tablero de ajedrez debido al esquema de interpolación entre los elementos de un continuo discretizado. Estos dos fenómenos se estudian a continuación.

4.4.1. Dependencia del mallado inicial

La optimización topológica en su formulación continua presenta problemas de no unicidad de soluciones, es decir, múltiples óptimos. Además, muchos problemas no se encuentran definidos convexos lo que implica que se pueda llegar a diferentes óptimos locales y que se tenga una dependencia de las soluciones de los valores de entrada y parámetros de modelación. En su implementación numérica estos problemas se reflejan en la dependencia que tienen los resultados con el refinamiento y la discretización de la malla del MEF. El refinar los modelos no genera como consecuencia una definición más detallada de la forma estructural óptima, sino por el contrario puede generar estructuras cada vez más ramificadas. Un ejemplo de este comportamiento se encuentra en la figura 4-2 para un medio discreto en el cual se ha refinado la malla sucesivamente.

[2]En ingles checkerboards.

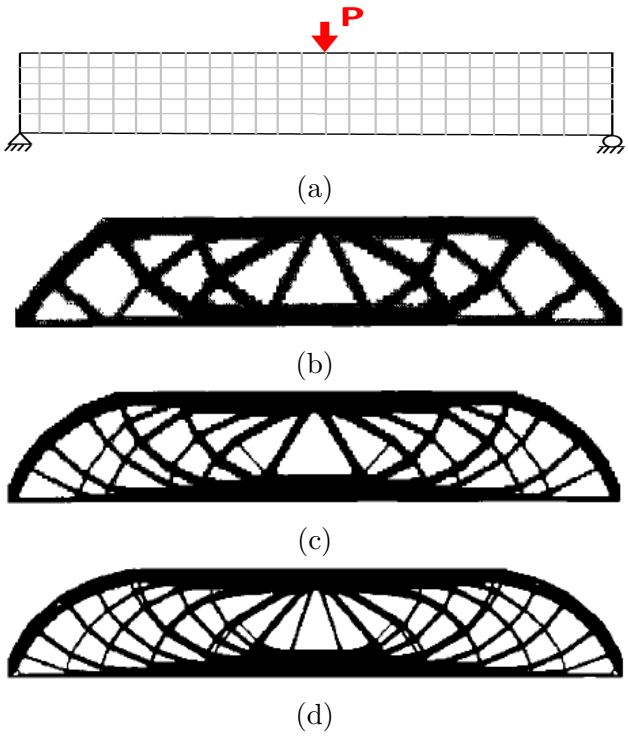


Figura 4-2.: Dependencia del refinamiento con respecto al mallado. (Adaptada de [8]). a.) Esquema mecánico. b.) Refinamiento menor de la malla. c.) Refinamiento moderado de la malla. d.) Alto grado de refinamiento en la malla.

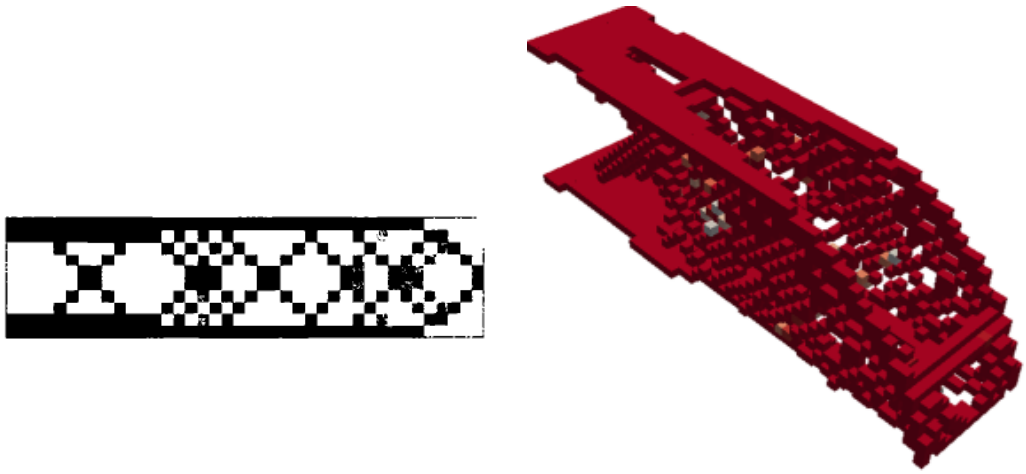
Las soluciones para tratar el problema de dependencia del mallado reducen el espacio de diseños admisibles a un espacio que contenga diseños con una representación física coherente, evitando los diseños con ramificaciones o agujeros excesivos. Para lograr este objetivo se impone una restricción al campo de las densidades, utilizando alguno de los siguientes métodos: primero, agregar restricciones al problema planteado en la ecuación 4-3; o segundo, aplicando técnicas de filtrado en la implementación, que condicionan la densidad de un elemento en función de la de sus vecinos.

Las técnicas de filtrado impiden que se presenten ramificaciones estructurales de tamaños superiores a un valor determinado, denominado radio de filtrado. Por otro lado, existen métodos que agregan restricciones adicionales a la formulación 4-3 y 4-4 afectando la distribución del campo de las densidades, estos métodos permiten la formación de elementos estructurales mas delgados en comparación a las técnicas de filtrado. En el presente trabajo se usó la técnica de filtrado por sensibilidades.

4.4.2. Efecto tablero de ajedrez

El efecto tablero de ajedrez consiste en la aparición de un patrón de densidades formando regiones solidas y vacías alternadas, similar a los cuadros oscuros y claros de un tablero de

ajedrez. El fenómeno como se observa en la figura 4-3(b) también se presenta en dominios R^3. Su aparición es menos frecuente cuando se utilizan mallas no estructuradas.



(a) (b)

Figura 4-3.: Patrón de tablero de ajedrez. a) Fenómeno en 2D. b) Fenómeno en 3D. (Tomada de [8] y [66]).

Este patrón también se puede considerar como una solución óptima del problema, pero no viable físicamente. Su origen obedece a que en el modelado por el MEF la transición de los desplazamiento se lleva a cabo a través de los nudos de conexión y no por los lados. El algoritmo de optimización al encontrar elementos con diferentes rigideces asigna el material a un solo elemento sin generar una transición entre ellos. Es común ver este tipo de patrón al utilizar elementos finitos cuatrilateros bilineales, con elementos finitos de orden superior se puede mitigar considerablemente este efecto [57].

Una solución diferente a emplear elementos finitos de orden superior, que conllevan a un costo computacional elevado, es aplicar una longitud de escala al problema, tal que en ella no se permita la formación del tablero de ajedrez sino que se mantenga una solución factible. Una de las formas de realizarlo es por medio del filtro de sensibilidades que ha demostrado ser muy eficiente [8].

4.5. Técnicas para el control de las patologías de la solución

En esta sección se describen dos técnicas de filtrado, una trabaja sobre las densidades elementales y la otra sobre las sensibilidades. Ambas se basan en el concepto de establecer el valor de una variable en un elemento en función de los valores de la misma variable de los

elementos vecinos al de referencia. Criterio que garantiza la transición suave de material entre los elementos.

4.5.1. Técnica de filtrado de la sensibilidad

Dentro de las técnicas de filtrado los autores de la referencia [7] recomiendan el uso de la técnica de filtrado por sensibilidades. Esta técnica fue exitosa en numerosas implementaciones reportadas en esta referencia. El principio sobre el cual se construye el criterio del filtrado de la sensibilidad obedece a evaluarla en términos de las sensibilidades de los elementos vecinos y especialmente de los ubicados en un radio determinado por el usuario y definido como r_{min}. La expresión matemática de esta técnica se describe a continuación:

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial \rho_k}} = \frac{1}{\rho_k \sum_{i=1}^{N} \hat{H}_i} \sum_{i=1}^{N} \hat{H}_i \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \tag{4-10}$$

donde N corresponde al número de elementos de la malla. La derivada parcial del miembro izquierdo de la ecuación corresponde al término de la sensibilidad modificada del elemento. La derivada parcial del miembro derecho de la misma ecuación corresponde a la sensibilidad original del elemento i. Donde ρ representa la densidad y $\hat{H}_i$ corresponde al operador de convolución, el cual se define como:

$$\hat{H}_i = r_{min} - dist(k,i), \qquad \{i \epsilon N | dist(k,i) \leq r_{min}\}, \quad k = 1, ..., N \tag{4-11}$$

El operador $dist(k,i)$ se define como la distancia entre el centro del elemento k y el centro del elemento i. El operador de convolución solo está definido dentro del radio r_{min}. Fuera de este radio el valor de la convolución es nulo mientras que al interior presenta una variación lineal con respecto a la distancia entre centros de elementos. Si el r_{min} es más pequeño que el tamaño del elemento para el cual se realiza el filtrado de sensibilidades, la sensibilidad modificada es igual a la sensibilidad original, y si el radio es tan grande que recoge todos los elementos del mallado, dará sensibilidades equivalentes para todos los elementos. Por lo tanto se recomienda usar valores ajustados a las dimensiones del elemento estructural a optimizar.

El fundamento de la técnica de filtrado de la sensibilidad procede del tratamiento de imágenes y su formulación matemática es relativamente sencilla; además su aplicación ha demostrado ser muy eficiente. Mediante esta técnica se evitan los problemas de dependencia de la malla y se mejora la convergencia del algoritmo, permitiendo que se llegue a soluciones viables.

Al aplicar un filtro que modifique la longitud de escala del problema se restringe el conjunto de soluciones. En problemas en los que se requiere definir ramificaciones estructurales muy delgadas el condicionamiento en la longitud de escala del problema puede ser contraprodu-

cente, por ejemplo en casos de elementos de lámina delgada o estructuras en las cuales se esperan muchas ramificaciones, como cerchas y estructuras tipo Michell.

4.5.2. Técnica de filtrado de la densidad

Esta técnica de filtrado no modifica la formulación del problema de optimización directamente, en cambio, restringe el espacio de diseño, limitando las rigidez en cada punto en función de la densidad de sus puntos vecinos. Para los problemas de optimización topológica formulados con base en el modelo SIMP el filtrado de las densidades se plantea en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&E_{ijkl}(\boldsymbol{x}) = ((\rho * K)(\boldsymbol{x}))^p E^0_{ijkl}, \qquad \rho \in L^\infty(\Omega) \\
&(\rho * K)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\langle K \rangle} \int_\Omega \rho(\boldsymbol{y}) K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) dy, \qquad \langle K \rangle = \int_{R^n} K(\boldsymbol{y}) dy \\
&\int_\Omega \rho(\boldsymbol{x}) d\Omega \leq V; \quad 0 \leq \rho(\boldsymbol{x}) \leq 1, \qquad x \in \Omega
\end{aligned} \tag{4-12}$$

donde $\langle K \rangle$ es un kernel de convolución, como el que se muestra:

$$K_r(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 - \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{r} & si \quad \|\boldsymbol{x}\| \leq r \\ 0 & \text{para otro caso} \end{cases} \tag{4-13}$$

En el sistema 4-12 la función $(\rho * K)(\boldsymbol{x})$ opera sobre los puntos que se encuentran sobre una circunferencia de radio r, con centro en un punto $\boldsymbol{x}$, y calcula la rigidez de este punto como el promedio ponderado de las densidades de los puntos vecinos.
Cuando se presenta un comportamiento de ramificación excesivo el filtro promedia las rigideces en estos puntos y crea zonas con valores intermedios de densidad que posteriormente serán penalizadas según el modelo SIMP. El filtro también produce un suavizado del campo de la rigidez y un aumento en la convergencia de la optimización.

5. Modelo matemático propuesto para la optimización topológica en 3D

En el presente capítulo se formula el modelo de optimización topológica en tres dimensiones que se desarrolló en este trabajo. Los conceptos definidos en los capítulos anteriores sirvieron como base para esta formulación, así como para definir el estudio de la sensibilidad, la técnica de solución de la optimización, el esquema de actualización, la técnica de filtrado, entre otros.

El modelo propuesto en este trabajo considera un comportamiento de material elástico-lineal-isótropo, con un dominio fijo y discretizado mediante una malla de elementos finitos. El problema de optimización, como se explicó anteriormente, se concibió como un diseño de mínimo cumplimiento con una interpolación de la densidad según el modelo SIMP.

5.1. Formulación del POT-3D

El Problema de la Optimización Topológica en 3D (POT-3D) para un medio discretizado mediante una malla de elementos finitos y con una parametrización de la densidad siguiendo las indicaciones del método SIMP se puede formular como se indica a continuación:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimizar:} \quad \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{a} \\
&\text{sujeto a:} \quad \left(\mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \rho_e^p \boldsymbol{K}_e \right) \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \\
&\qquad \frac{V}{V_0} = f_{vol} \\
&0 < \rho_{min} < \rho_e \leq 1, \qquad e = 1, ..., ne
\end{aligned}
\tag{5-1}
$$

donde:

p =: exponente de penalización.
ρ_e =: densidad elemental.
$\boldsymbol{K}_e$:= matriz de rigidez elemental.
$\boldsymbol{a}$:= vector de desplazamientos nodales del sistema.
$\boldsymbol{f}$:= vector de cargas equivalentes nodales del sistema.
V_0 := volumen total del dominio.
V := volumen afectado por las densidades elementales.
$fvol$:= fracción de volumen.
ρ_{min} := densidad mínima.
ne := número de elementos finitos.

Las variables de diseño del problema de optimización topológica presentadas en la ecuación 5-1 son las densidades elementales. Por esta razón el problema se puede reformular en términos exclusivamente dependientes de la densidad, como se presenta en la ecuación 5-2, esta formulación sera la base para el análisis de la sensibilidad que se da en la sección 5.7.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar:} \quad c(\rho_e) \\ &\text{sujeto a:} \quad \frac{V}{V_0} = fvol, \qquad 0 < \rho_{min} < \rho_e \leq 1, \qquad e = 1, ..., ne \\ &\text{tal que:} \\ &c(\rho_e) = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{a}, \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{a} \quad \text{resuelve:} \quad \left(\mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \rho_e^p \boldsymbol{K}_e \right) \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \end{aligned} \tag{5-2}$$

En las siguientes secciones se detalla cada uno de las componentes que intervienen en la formulación indicada en la ecuación 5-2.

5.2. Variables de diseño

Las variables de diseño según la formulación presentada en la sección anterior corresponden a la densidad de cada uno de los elementos finitos con los que se discretizo el domino del problema. A las densidades generalmente se les asigna una cota inferior para evitar valores nulos que generen problemas de singularidad matemática, y una cota superior igual a la unidad ya que físicamente este es el máximo valor que puede asumir. Las cotas de la densidad se definen como:

$$\rho_{min} < \rho_e < 1 \tag{5-3}$$

5.3. Función objetivo

La función objetivo según la formulación 5-1 corresponde a:

$$c(\rho_e) = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{a} \qquad e = 1, ..., ne \tag{5-4}$$

Una manera mas conveniente de calcular el valor de la función objetivo, y que se utiliza en el proceso de optimización topológica desarrollado en esta tesis, es por medio de la *energía de deformación interna* definida en 2-38.

La ecuación 5-4 corresponde al trabajo realizado por las acciones externas. Esta también se puede reescribir sumando la contribución en energía de cada elemento finito, como se describe en la siguiente ecuación:

$$c(\rho_e) = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{a} = \sum_{e=1}^{ne} \rho_e^p \boldsymbol{a}_e^T \boldsymbol{K}_{(e)} \boldsymbol{a}_e \tag{5-5}$$

donde:
$\boldsymbol{K}$ =: matriz de rigidez global del sistema.
$\boldsymbol{a}_e$ =: vector de desplazamientos del elemento (e).
$\boldsymbol{K}_e$ =: matriz de rigidez del elemento (e).
ρ_e =: densidad del elemento (e).

El ultimo término de la ecuación 5-5 corresponde al doble de la energía interna de deformación definida en 2-37. Esta energía se ve afectada por la modificación de la rigidez que realiza el modelo SIMP. Por este motivo se puede utilizar la energía interna de deformación como una medida de la rigidez del sistema.

5.4. Restricciones

Las restricciones en la formulación 5-1 están orientadas a satisfacer los requisitos en la cantidad de material, cumplimiento de las condiciones de equilibrio y cotas a los valores de la densidad en cada elemento.

5.4.1. Restricciones de igualdad

La primera de las condiciones de igualdad, presentada en la ecuación 5-1, garantiza las condiciones de equilibrio del sistema. Ya que el campo de la rigidez se modifica en cada iteración, en función de las densidades elementales, se deben verificar las condiciones de equilibrio en cada una de estas.

$$\left(\mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \rho_e^p \boldsymbol{K}_e \right) \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \tag{5-6}$$

La segunda restricción en 5-1 está asociada a la cantidad de material a optimizar, garantizando que se encuentre la máxima rigidez con una determinada cantidad de material. Dicha

restricción se define según la variable f_{vol} que corresponde a la relación entre el volumen del solido optimizado y el volumen total del dominio inicial, se formula como:

$$f_{vol} = \frac{V}{V_0} = \frac{\sum_{e=1}^{ne} V_e \rho_e}{V_0} \tag{5-7}$$

donde V_e corresponde al volumen del elemento finito (e) y $V_0 = \sum_{e=1}^{ne} V_e$.

5.4.2. Restricciones de desigualdad

Las restricciones de desigualdad están asociadas a las cotas inferior y superior de las densidades elementales, como se sustentó en 5.2. Se formulan como dos restricciones de desigualdad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \rho_{min} \leq \rho_e \quad &\rightarrow \quad g_1 = \rho_{min} - \rho_e \leq 0 \\ \rho_e \leq \rho_{max} \quad &\rightarrow \quad g_2 = \rho_e - \rho_{max} \leq 0 \end{aligned} \tag{5-8}$$

5.5. Condiciones de optimalidad

Las condiciones de optimalidad[1] desarrolladas en 3.5.2, condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker, se utilizan para resolver el problema de mínimo cumplimiento con SIMP planteado en la ecuación 5-1. De esta manera la fase inicial para verificar las condiciones de optimalidad considera el uso de las ecuaciones 5-5, 5-6, 5-7 así como la ecuación 5-8 para conformar la función de Lagrange:

$$\begin{aligned} Ł = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{a} + \lambda_1 (V - f_{vol} V_0) + \boldsymbol{\lambda}_2^T (\boldsymbol{K} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}) + \\ \sum_{e=1}^{ne} \mu_1^{(e)} (\rho_{min} - \rho_e) + \sum_{e=1}^{ne} \mu_2^{(e)} (\rho_e - 1) \end{aligned} \tag{5-9}$$

derivando con respecto a las variables de diseño (densidades elementales), e igualando a cero, para cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Ł}{\partial \rho_e} = \frac{\partial}{\partial \rho_e} (\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{a}) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_e} (V - f_{vol} V_o) + \boldsymbol{\lambda}_2^T \frac{\partial}{\partial \rho_e} (\boldsymbol{K} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}) + \\ \sum_{e=1}^{ne} \mu_1^{(e)} \frac{\partial}{\partial \rho_e} (\rho_{min} - \rho_e) + \sum_{e=1}^{ne} \mu_2^{(e)} \frac{\partial}{\partial \rho_e} (\rho_e - 1) = 0 \end{aligned} \tag{5-10}$$

Los términos que no dependen de la densidad pueden eliminarse de la ecuación 5-10. Por otro lado, las restricciones para la densidad elemental (ρ_e) no son activas, por lo que los multiplicadores de Lagrange asociados a estas restricciónes, μ_1 y μ_1, son nulos. Teniendo en cuenta las anteriores condiciones, reagrupando, y organizar términos se puede escribir como:

[1] Ver explicación del termino en pié de página 33.

$$\frac{\partial Ł}{\partial \rho_e} = -\boldsymbol{a}^T \frac{\partial}{\partial \rho_e}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{a} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_e}(V) = 0 \tag{5-11}$$

Si se considera la ecuación 5-11 a nivel elemental y utilizando el modelo SIMP de parametrización de la densidad, según la ecuación 4-7, se puede establecer la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$, el vector de desplazamientos nodales $\boldsymbol{a}$ y el volumen del solido V en función de la densidad elemental, de la siguiente forma:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left[-\boldsymbol{a}_e^T \frac{\partial}{\partial \rho_e} \left(\rho_e \boldsymbol{K}_e^0 \right) \boldsymbol{a}_e + \lambda_1^{(e)} \frac{\partial}{\partial \rho^{(e)}} \left(\rho^{(e)} V_0^{(e)} \right) \right] = 0 \tag{5-12}$$

que al derivar con respecto a la densidad elemental ρ_e se llega a:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left[-p\rho_e^{p-1} \boldsymbol{a}_e^T \boldsymbol{K}_e^0 \boldsymbol{a}_e + \lambda_1^{(e)} V_0^{(e)} \right] \tag{5-13}$$

Esta ecuación se conoce como "*Ecuación de la condición estacionaria*", por su procedencia desde el punto estacionario de la función de Lagrange.

En la ecuación 5-13 $\lambda_1^{(e)}$ y ρ_e son variables. Al implementar esta ecuación dentro de un proceso iterativo, primero se calcula la sumatoria que contiene el multiplicador de Lagrange y con este valor definido, se obtienen las densidades elementales. Esta condición se puede expresar en forma de asignación e iteración como:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left[-p\rho_e^{p-1} \boldsymbol{a}_e^T \boldsymbol{K}_e^0 \boldsymbol{a}_e \right]_i \leftarrow \sum_{e=1}^{ne} \left[\lambda_1^{(e)} V_0^{(e)} \right]_{i-1} \tag{5-14}$$

Un tratamiento más detallado de este procedimiento, para la obtención de la *Ecuación de la condición estacionaria*, se puede encontrar en la literatura como por ejemplo [44].

5.6. Esquema de actualización de la densidad

El esquema de actualización de la densidad en cada ciclo tiene por objetivo orientar el proceso iterativo a un punto estacionario de la función objetivo. Este procedimiento consiste en un proceso iterativo en el que la densidad de cada elemento se actualiza como se describe en el siguiente esquema:

$$\rho_{i+1}^{(e)} = \begin{cases} max(\rho_{min}, \rho_i^{(e)} - \zeta) & si \quad \rho_i^{(e)} C_i^{(e)\eta} \leq max(\rho_{min}, \rho_i^{(e)} - \zeta) \\ min(1, \rho_i^{(e)} + \zeta) & si \quad min(1, \rho_i^{(e)} + \zeta) \leq \rho_i^{(e)} C_i^{(e)\eta} \\ \rho_i^{(e)} C_i^{(e)\eta} & si \quad otro \quad caso \end{cases} \tag{5-15}$$

donde:

i =: variable contadora del ciclo de iteración.
ρ_{min} =: densidad mínima.
η, ζ =: coeficientes de ajuste de convergencia.

La variable ζ controla el cambio en cada iteración. Con los coeficientes η y ζ se puede ajustar el modelo a fin de lograr una mayor estabilidad y una rápida convergencia, su determinación es experimental y generalmente toma valores de $\eta = 0{,}5$ y $\zeta = 0{,}2$ [8].

La variable $C_i^{(e)}$ se calcula por medio de la siguiente ecuación:

$$C_i^{(e)} = \frac{p\rho_i^{(e)p-1} \boldsymbol{a}_i^{(e)} \boldsymbol{K}_i^{0(e)} \boldsymbol{a}_i^{(e)}}{\lambda_{1i}^{(e)} V_i^{0(e)}} \tag{5-16}$$

El esquema de actualización está orientado según el valor de la variable $C_i^{(e)}$, que procede de la ecuación 5-13. Esta variable se relaciona con la densidad de energía de deformación ,$p\rho_i^{(e)p-1} \boldsymbol{a}_i^{(e)} \boldsymbol{K}_i^{0(e)} \boldsymbol{a}_i^{(e)}$, y la adición o sustracción de material en un punto, como se explica en los siguientes casos:

1. Si $C_i^{(e)} > 1$, la energía específica de deformación $> \lambda_{1i}^{(e)}$, luego el esquema aumenta la densidad en el punto.

2. Si $C_i^{(e)} < 1$, la energía específica de deformación $< \lambda_{1i}^{(e)}$, luego el esquema disminuye la densidad en el punto.

3. Se alcanza el óptimo en un punto si $C_i^{(e)} = 1$.

Una descripción más detallada de la variable $C_i^{(e)}$ se encuentra en [44], donde se presentan los limites y tendencias de esta.

Mediante la aplicación del multiplicador de Lagrange λ_{1i} se logra satisfacer el cumplimiento de la restricción asociada a la fracción de volumen $f_{vol} = V/V_0$. La determinación de este multiplicador se realiza por medio de la función $g(V) = V - fV_0$, donde la raíz de $g(V)$ es función de este multiplicador. Puesto que el volumen depende de la densidad en cada

punto y esta a su vez, como se estableció en el esquema de actualización 5-15, depende del multiplicador de Lagrange se puede obtener el multiplicador de Lagrange en términos de la función en la siguiente forma $g(\lambda_{1i})$. Considerando esta relación se puede replantear el multiplicador de Lagrange como:

$$g(V(\rho(\lambda_{1i}))) = V((\rho(\lambda_{1i}))) + fV_0 = 0 \quad \rightarrow \quad g(\lambda_{1i}) = V(\lambda_{1i}) + fV_0 = 0 \tag{5-17}$$

Se concluye que la raíz de la función $g(\lambda_{1i})$ que cumple con la restricción de volumen es dependiente del multiplicador de Lagrange y por lo tanto su valor se puede determinar utilizando cualquier método de cálculo de raíces. Por ejemplo uno de los más utilizados en problemas de optimización es el Método de Bisección. Se trata de un método relativamente sencillo de implementar que asegura la búsqueda del mínimo en una forma geométrica decreciente. En el capítulo seis se describe con más detalle este procedimiento mediante un algoritmo que calcula este multiplicador, resolviendo primero la densidad por medio de λ_{1i}, y posteriormente el volumen V. Luego se aplica la restricción de volumen para verificar que se cumpla con el valor de λ_{1i} escogido.

En general este esquema de actualización ha demostrado ser eficiente para la mayoría de los problemas en los que ha sido probado. Su fortaleza radica en que centra la atención en actualizar la densidad elemento por elemento en forma independientemente. Más adelante se presentarán algunas técnicas para controlar la presencia de fenómenos que pueden distorsionar la optimización, como por ejemplo la aparición del efecto tablero de ajedrez , mínimos locales y dependencia de la malla.

5.7. Análisis de la sensibilidad

La sensibilidad cuantifica el cambio de la función objetivo en relación al cambio de una variable de diseño. Como la optimización topológica es un problema en el cual las variables de diseño son las densidades de cada elemento, por lo tanto la sensibilidad en este contexto, mide la incidencia en la función objetivo al variar cada una de las densidades elementales. En el problema mecánico este concepto se puede expresar matemáticamente como:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{a})}{\partial\rho_e} \tag{5-18}$$

De esta forma, para valores muy grandes de la ecuación anterior la incidencia del elemento en la función objetivo es muy grande. Esto conduce a que el esquema de actualización 5-16 le de prioridad a este elemento sobre aquellos elementos que tengan valores de sensibilidad bajos.

Los desplazamientos son dependientes de las densidades elementales, ya que las matrices de rigidez elementales se ven afectadas por la densidad como se describe en 5-2. De esta manera el cálculo de las sensibilidades se puede relacionar con el análisis del sistema estructural $\boldsymbol{Ka}-$

$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ que contiene a los desplazamientos, y que implícitamente contiene a las densidades. Uno de los métodos que aprovecha esta relación es el *Método Adjunto*[2], que se trato en el apartado 3.6.1, su tarea es agregar a la función objetivo una función nula que contiene un vector de desplazamientos real $\tilde{\boldsymbol{a}}$ arbitrario pero fijo:

$$c(\rho_e) = \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{a} - \tilde{\boldsymbol{a}}^T(\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}) \tag{5-19}$$

derivando y organizando la expresión anterior se llega a:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -\tilde{\boldsymbol{a}}^T\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \rho_e}\boldsymbol{a} \tag{5-20}$$

donde se puede demostrar que $\tilde{\boldsymbol{a}}$ satisface la ecuación de equilibrio:

$$\boldsymbol{f}^T - \tilde{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{K} = 0 \tag{5-21}$$

obteniendo la igualdad $a = \tilde{\boldsymbol{a}}$.
Reemplazando esta ecuación en 5-19 se llega a:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -p\rho_e^{p-1}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{a} \tag{5-22}$$

en donde se ha derivado la matriz de rigidez elemental según el esquema de interpolación SIMP en un medio discreto con MEF.

El cálculo de la sensibilidad como lo muestra la ecuación 5-22 es de fácil implementación y desarrollado en un código de programación. La sensibilidad también se puede utilizar como técnica de filtrado para evitar problemas asociados con la patología de la solución de la optimización topológica, como se indicará más adelante.

Si bien, el cálculo de la sensibilidad pareciera enfocado en el nivel elemental local, por tener sus variables definidas elemento por elemento, la dependencia con las densidades de los otros elementos se ve en los vectores de desplazamientos que están implícitamente dependiendo de todos los elementos.

5.8. Filtro de sensibilidades

De acuerdo a la ecuación 4-10 presentada en el capitulo anterior para definir el filtro de sensibilidades y con la formulación dada en 5-1 se puede replantear la expresión del filtro de las sensibilidades, definiéndolo en término de los baricentros de los elementos como se indica a continuación:

[2]En ingles Adjoint Method

$$\widehat{\frac{\partial c}{\partial \rho_e}} = \frac{1}{\rho_e \sum_{f=1}^{N} \hat{H}_f} \sum_{f=1}^{N} \hat{H}_f \rho_e \frac{\partial c}{\partial \rho_f} \tag{5-23}$$

donde el termino $\hat{H}_f$ se conoce como el factor de convolución, y se calcula por medio de la siguiente ecuación:

$$\hat{H}_f = r_{min} - dist(e,f)\hat{H}_f = r_{min} - dist(e,f) \qquad \{f \in N | dist(e,f) \leq r_{min}\}, e = 1, ..., N \tag{5-24}$$

El termino $dist(e,f)$ de la ecuación 5-24 para elementos tetraédricos se puede calcular en términos del baricentro del elemento finito, tal como se describe en la siguiente ecuación:

$$dist(e,f) = \left\| \boldsymbol{B}_{(f)} - \boldsymbol{B}_{(e)} \right\| \tag{5-25}$$

donde:

$\boldsymbol{B}_{(e)} =$: vector de baricentro del elemento (e).
$\boldsymbol{B}_{(f)} =$: vector de baricentro del elemento (f).

El filtro de sensibilidades opera en elementos vecinos al elemento (e) que cumplen con la condición de que la distancia de su baricentro con respecto al baricentro de este elemento sea menor a radio de filtrado r_{min}, como se ilustra en la figura 5-1. La esfera de radio r_{min} define los baricentros de los elementos que caen dentro del rango de aplicación del filtro, el baricentro de dichos elementos se denota con puntos verdes en la figura 5-1.

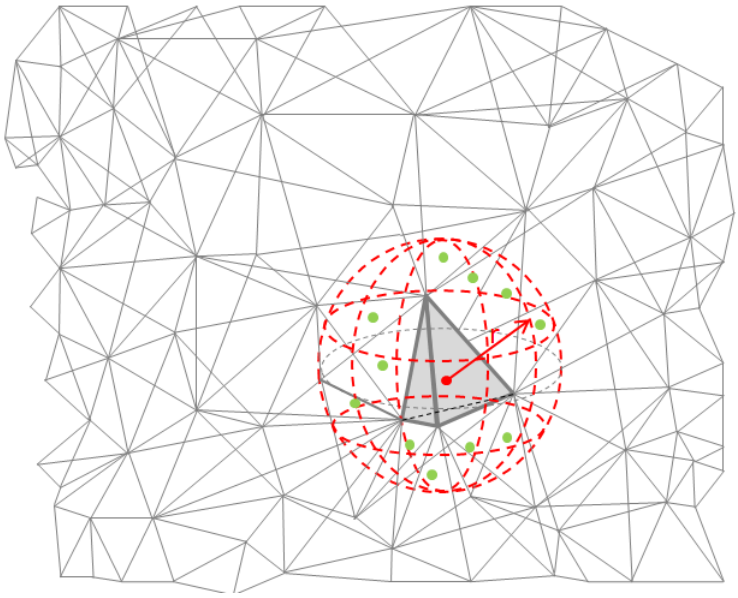


Figura 5-1.: Técnica de filtrado de la sensibilidad. (Fuente: autor).

La sensibilidad modificada con el filtro de sensibilidades, 5-23, nunca va ser nula ya que el filtro se aplica incluso al elemento mismo, arrojando como consecuencia, que aún para radios de filtrado muy pequeños el filtro conservará la sensibilidad original.

5.9. Criterio de convergencia de la optimización

El criterio de convergencia de un proceso de optimización topológica se determina por la diferencia de valores entre dos iteraciones consecutivas de la función objetivo o de una variable de optimización. En programas de optimización topológica en 2D se suele manejar una diferencia máxima de 0.001 [8], al cumplirse con este requisito la ejecución del programa se detiene y los valores de la función objetivo y las densidades de los elementos finitos se conservan según se calculo en el ultimo ciclo ejecutado. Algunos esquemas evalúan la máxima diferencia entre densidades de un elemento finito para dos iteraciones consecutivas como criterio de convergencia.

Un valor para el criterio de convergencia muy pequeño, del orden de 0.00001 puede ocasionar que el proceso de optimización entre en una fase cíclica no convergente, lo que produciría un tiempo de calculo indefinido. En esta etapa de no convergencia el proceso de optimización topológica no logra una diferencia entre los valores de iteraciones consecutivas de la función objetivo tan pequeña como lo requiere el criterio de convergencia, comenzando a oscilar sobre un valor determinado sin acercarse lo suficiente. En contraparte, contar con un criterio de convergencia grande, como por ejemplo 0.1, disminuiría el tiempo de ejecución pero arrojaría resultados poco confiables, sin garantizar la búsqueda exhaustiva del mínimo global de la función objetivo.

El esquema de actualización de la densidad presentado en 5-15 logra determinar eficientemente las zonas con mayor y menor densidad de energía en los primeros ciclos, por esta razón el valor de la función objetivo en estos ciclos cae aceleradamente. En los ciclos posteriores el valor de la función objetivo disminuye con una razón mucho menor, puesto que las regiones con mayor concentración de energía ya están definidas y el proceso de optimización se enfoca en determinar zonas con niveles de energía intermedios. Finalmente, en una ultima etapa luego de la definición de la mayor parte de la topología optimizada del solido el valor de la función objetivo tiende a converger a un valor determinado de manera cíclica. Este comportamiento cíclico obedece a que el esquema de actualización tiene que operar con elementos finitos con niveles de energía similares para finalizar la definición de la topología optima del solido, lo que produce que no se pueda definir una razón de convergencia constante de la función objetivo si no que se converja de manera cíclica decreciente.

En esta tesis se estableció un criterio de convergencia en función del máximo cambio entre densidades de un elemento finito para ciclos consecutivos, exigiéndose un cambio máximo de

0.0001. Este valor se calibro según la calidad de los resultados de la optimización topológica en contraparte al tiempo de calculo requerido.

5.10. Procedimiento general para la solución POT-3D

Los pasos esenciales que debe seguir el procedimiento para desarrollar optimización topológica en un elemento estructural a través del método de distribución de material, con el diseño por mínimo cumplimiento y utilizando la interpolación del modelo SIMP, son:

- Pre-procesamiento

  En este primer paso el objetivo fundamental es asegurar un dominio inicial consistente con el problema, teniendo en cuenta el dominio inicial de referencia y el dominio en el que se comprende la solución buscada. De tal manera que queden correctamente definidos los siguientes aspectos:

  - Determinación del dominio de referencia. Este debe ser dimensionado para que se puedan establecer las cargas, los apoyos, la regiones solidas iniciales, y que pueda llegar a contener la estructura final optimizada. Es conveniente conservar una proporción equivalente en las dimensiones del domino de referencia, si se consideran dominios muy amplios el método puede converger a soluciones no esperadas. Desde el punto de vista de recursos computacionales dominios muy amplios representan mayores de tiempos de calculo y recursos de memoria.
  - Construcción del mallado por elementos finitos. Una de las grandes ventajas del método de optimización planteado aquí, es el hecho de que puede utilizar con cualquier tipo de elemento y de mallado. Sin embargo, una buena calidad en el mallado tendrá como resultado una buena aproximación de los desplazamientos, y también, con un mallado más fino se pueden obtener estructuras más detalladas.

- Criterio de optimización

  En esta fase del método se busca la actualización de la densidad y el cumplimiento de la fracción de volumen esperada, minimizando la función objetivo. En esta fase ocurre efectivamente el proceso de optimización.

  - Ejecución del método de los elementos finitos. Con los datos iniciales definidos en la etapa anterior, se puede proceder a ejecutar el análisis por elementos finitos, a partir del cual obtener el campo de los esfuerzos, las deformaciones y las matrices de rigidez elemental y la matriz de rigidez a nivel global.
  - Calcular el valor de la función objetivo. Se calcula el valor del producto vectorial $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{u}$ que define el trabajo externo del sistema.

- Cálculo de la sensibilidad. En este paso se evalúa la incidencia del cambio de la densidad para cada elemento en relación al cambio en la función objetivo.
- Aplicación de técnica de filtrado. Con el objetivo de evitar los problemas de tablero de ajedrez , dependencia de la malla y mínimos locales se aplica un filtro.
- Actualización de la densidad. Se aplica el esquema de actualización de la densidad para obtener las mismas en una iteración posterior y poder evaluar de nuevo los criterios de optimización.
- Criterio de convergencia del ciclo de optimización general. Establecer un valor de convergencia, como se describió en 5.9, que permita lograr una alta definición de la geometría optima sin caer el tiempos de calculo excesivos.

- Post-procesamiento

  Como resultado final de la optimización topológica bien podría presentarse en un vector, en el que cada posición corresponda a la densidad de un elemento. De esta manera se resuelve el problema principal de la optimización que consistía en identificar la distribución de material dentro del dominio de referencia. Utilizando las técnicas GUI , por sus siglas en ingles Graphical User Interface, disponibles en la plataforma MATLAB se optó por presentar en forma gráfica y espacial la estructura resultante del proceso de optimización topológica.

6. Implementación del modelo matemático propuesto para la solución del POT-3D

Se implementó computacionalmente el modelo matemático presentado en al capítulo anterior que resuelve el problema de optimización topológica en 3D, abreviado como POT-3D. Se elaboraron una serie de algoritmos que contienen las instrucciones necesarias para realizar el proceso de optimización de manera eficiente, basados en la formulación presentada en el capitulo 5. Se concibió un algoritmo principal del cual se desprenden otros algoritmos secundarios que realizan procesos específicos en el marco de la optimización topológica en 3D.

Por tratarse de una linea de investigación y para dar continuidad al trabajo presentado en la referencia [44] se utilizó el mismo esquema y presentación tipográfica para los algoritmos y su descripción.

El objetivo principal de este capitulo consiste en describir la forma en que se implementó el modelo para la solución del POT-3D. Para esto se utilizaron algoritmos auto-explicativos para cada una de las funciones del modelo de optimización propuesto. Adicionalmente se presenta el código en MATLAB de las principales funciones del modelo.

Debido a las limitantes propias de las diferentes plataformas de software elegido inicialmente para el desarrollo, se presenta en este capítulo una breve discusión sobre las características mas relevantes de cada una, y su implicación para su uso en este trabajo.

Al final del capítulo se presentan algunas consideraciones referentes al comportamiento de la herramienta computacional desarrollada en este trabajo y los mecanismos que permiten su aplicación a modelos más complejos. Se dan algunas indicaciones para evaluar el rendimiento de la misma en función de parámetros como: tiempo de ejecución, calidad de los resultados gráficos, desarrollo de la parte lógica y requerimientos de hardware. Bajo estas consideraciones se desarrolló el plan de validación, calibración y aplicación.

A partir de los algoritmos se procedió a la codificación de los mismos, para ello se utilizó, finalmente, el lenguaje de programación de la plataforma MATLAB. Se procuro que el códi-

go fuera lo mas compactos posible para facilitar su lectura y posibles ampliaciones a futuro. Los procesos mas relevantes del algoritmo general se presentan en la sección 6.4 donde se describe su funcionamiento de una forma mas detalla.

6.1. Esquema general

El algoritmo principal para la solución del POT-3D se presenta en el *Algoritmo 6.1*. Los subprocesos más importantes de este se explican en las secciones posteriores.

Algoritmo 6.1: Esquema general del proceso de optimización topológica

Input: Geometría, materiales, rmin, fracción de volumen, potencia de penalización, disposición topológica, restricciones, cargas

Output: Modelo de la estructura optimizada

```
Conformación del modelo estructural y de optimización topológica;
Asignación de la fracción de volumen;
Asignación de la disposición topológica;
while maxi menor a 0.001 do
    Solución modelo estructural:
        -Método de los elementos finitos penalizado;
        -Evaluación de la función objetivo;
        -Evaluación de la sensibilidad;
        -Evaluación de la de sensibilidad modificada por filtro;
        -Esquema de actualización de la densidad;
        -Actualización variables de diseño;
        -Evaluación variable controladora del ciclo de optimización topológica (maxi);
end
Modelo estructural optimizado;
```

El *Algoritmo 6.1* se puede describir como se explica a continuación:

- Los datos de entrada son los requeridos comúnmente en la construcción de un modelo por elementos finitos, el proceso de optimización solo agrega tres datos escalares: la potencia de penalización, la fracción de volumen y el radio mínimo de filtrado, y uno vectorial correspondiente al vector de disposición topológica del sistema. Con los parámetros escalares se desarrolla el modelo SIMP, por su siglas en ingles *Solid Isotropic Material with Penalization*. El vector de disposición topológica permite predisponer zonas del dominio con o sin material.

- Los indicadores del resultado numérico de la optimización se identifican como: la energía interna de deformación y el vector de densidades elementales. La energía interna de deformación se obtiene a partir de la rigidez y el desplazamiento de cada uno de los elementos finitos; de esta forma se puede medir la convergencia en el proceso iterativo de optimización. Mediante el vector de densidades se va controlando, en forma iterativa, la distribución topológica de material hasta alcanzar la fracción de volumen deseada.

- **Lineas (1-3)**: preparan los elementos matemáticos: escalares, vectores y matrices, necesarias para resolver el modelo estructural y el de optimización topológica posteriormente.

- **Lineas (4-13)**: en estas lineas se describe todo el proceso iterativo de búsqueda de puntos extremos de la función objetivo. La convergencia se controla por la variable *maxi* que es igual a la máxima diferencia (en valor absoluto) entre puntos de densidad común entre iteraciones continuas, como se indico en la sección 5.9.

- **Linea (7)**: esta linea sigue el registro de la energía interna de deformación del sistema en el transcurso de lo ciclos, como medida del proceso de convergencia.

- **Linea (10)**: esta linea desarrolla el esquema de actualización de la densidad según se definió en 5-15.

6.2. Algoritmos para resolver el POT-3D

En esta sección se exponen los algoritmos encargados de ejecutar las instrucciones de las lineas 6, $7-10$, y 10 del *Algoritmo 6.1*. Entre las filas 6-10 se lleva a cabo el análisis por el MEF y a continuación se lleva a cabo el parte del proceso de optimización topológica, el cual concluye con el esquema de actualización de la densidad.

6.2.1. Método de los elementos finitos

El algoritmo encargado de ejecutar el análisis por elementos finitos se presenta con una leve modificación en cuanto a su forma estándar. Esta variación consiste en penalizar las rigideces elementales utilizando el modelo de interpolación SIMP. Esta variación se presenta en el siguiente algoritmo:

Algoritmo 6.2: Método de los elementos finitos

Input: $E, \mu, \boldsymbol{x}^{(e)}, \boldsymbol{f}^{(e)}, p, \rho^{(e)}$
Output: $U^{(e)}, U$
1 **Inicialización**:
2 $U \leftarrow 0$;
3 *I Fase progresiva*;
4 **foreach** *elemento (e)* **do**
5 **Penalización**
6 $\boldsymbol{k}^{(e)} \leftarrow E, \mu, \boldsymbol{x}^{(e)}$;
7 $pen^{(e)} \leftarrow (\rho^{(e)})^p$;
8 $\boldsymbol{k}^{(e)} \leftarrow pen^{(e)}\boldsymbol{k}^{(e)}$;
9 **Ensamblaje**
10 $\boldsymbol{K} \leftarrow A(\boldsymbol{k}^e)$;
11 $\boldsymbol{f} \leftarrow A(\boldsymbol{f}^e)$;
12 **end**
13 *II Solución del sistema*;
14 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} \leftarrow \boldsymbol{f}$ + Condiciones de Dirichlet;
15 $\boldsymbol{a} \leftarrow \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ "Solución del sistema";
16 *III Fase regresiva*;
17 **foreach** *elemento (e)* **do**
18 $\boldsymbol{a}^{(e)} \leftarrow extract(\boldsymbol{a})$;
19 $U^{(e)} \leftarrow \boldsymbol{a}^{(e)T}\boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{a}^{(e)}$;
20 $U \leftarrow U + U^{(e)}$;
21 **end**

donde:
E =: modulo de elasticidad.
ν =: coeficiente de Poisson.
$\boldsymbol{x}^{(e)}$ =: coordenadas del elemento (e).
$\boldsymbol{f}^{(e)}$ =: vector de fuerzas nodales del elemento (e).
$\boldsymbol{a}^{(e)}$ =: vector de desplazamientos nodales del elemento (e).
p =: potencia de penalización del modelo SIMP.
$\rho^{(e)}$ =: densidad del elemento (e).
$U^{(e)}$ =: energía interna de deformación del elemento (e).
U =: energía interna de deformación del sistema.
$\boldsymbol{k}^{(e)}$ =: matriz de rigidez elemental.
$A(\boldsymbol{k}^{(e)})$ =: operador de ensamblaje sobre matrices $\boldsymbol{k}^{(e)}$.
$E(\boldsymbol{a})$ =: operador de extracción sobre matriz $\boldsymbol{a}$.
$\boldsymbol{a}$ =: vector de desplazamientos nodales del sistema.
$\boldsymbol{K}$ =: matriz de rigidez del sistema.
$\boldsymbol{f}$ =: vector de fuerzas nodales del sistema.

La modificación que realiza el modelo SIMP al método de los elementos finitos se representa en las lineas 5 a 8, modificando la matriz de rigidez elemental al multiplicarla por la densidad elemental elevada a la potencia p. Esta es la única modificación que se realiza a la presentación estándar del método de los elementos finitos.
El cálculo de las matrices de rigidez elementales es necesario para resolver el sistema estructural, calcular la energía interna de deformación y para el análisis de la sensibilidades, como se muestra en el *algortimo 6.3*.

En cada iteración, al modificar el vector de densidades se modifica de la rigidez del sistema, lo que produce que deba realizarse un nuevo análisis estructural. De esta manera se debe tener especial interés en la escogencia del elemento finito y el mallado posterior. Puesto que el poseer elementos con muchos grados de libertad y/o mallados muy complejos podría elevar demasiado los tiempos de cálculo de la optimización topológica.

6.2.2. Optimización topológica

Del esquema general de la optimización topológica *Algoritmo 6.1* las lineas (4-13) contienen el proceso de optimización topológica propiamente dicho. El algoritmo que se muestra en seguida muestran los procedimientos internos que tienen lugar en estas lineas:

Algoritmo 6.3: Proceso de optimización topológica

Input: $\boldsymbol{a}^{(e)}, \boldsymbol{k}^{(e)}, rmin, \rho^{(e)}$
Output: $U^{(e)}, U$

Proceso de optimización:
- **Inicialización de la función objetivo**
$c \leftarrow 0;$
foreach *elemento (e)* **do**
  -Evaluación de la energía de deformación
    $U^e \leftarrow (\boldsymbol{a}^{(e)})^T \boldsymbol{k}^{(e)} \boldsymbol{a}^{(e)};$
  -Evaluación de la función objetivo
    $pen^{(e)} \leftarrow (\rho^{(e)})^p;$
    $c^{(e)} \leftarrow pen^{(e)} U^{(e)};$
    $c \leftarrow c + c^{(e)};$
  -Evaluación de la sensibilidad
    $dc^{(e)} \leftarrow -p(\rho^{(e)})^{p-1} U^{(e)};$
end
foreach *elemento (e)* **do**
  -Inicialización de variables
    $sum1 \leftarrow 0;$
    $sum2 \leftarrow 0;$
  foreach *elemento (f)* **do**
    -Evaluación de la sensibilidad modificada
    $\hat{H}_f \leftarrow r_{min} - dist(e, f);$
    $sum1 \leftarrow \rho^{(e)} \sum \hat{H}_f;$
    $sum2 \leftarrow \sum \hat{H}_f \rho^{(e)} dc^{(e)};$
    $dcn \leftarrow (1/sum1) sum2$
  end
end
-Esquema de actualización de la densidad:
  Algoritmo 6.4
-Actualización de la variables de diseño;

donde:
$c^{(e)}$ =: contribución a la función objetivo del elemento (e).
c =: función objetivo.
$dc^{(e)}$ =: sensibilidad del elemento (e).
$\hat{H}_f$ =: operador de convolución.
r_{min} =: radio de filtrado.
$dist(e, f)$ =: distancia del elemento (e) al (f).
dcn =: vector de sensibilidad del sistema.
dcn =: vector de sensibilidad modificada del sistema por filtrado.

Este algoritmo se repite iterativamente hasta que se cumpla el criterio de convergencia planteado en el *Algoritmo 6.1*. Los detalles mas importantes del algoritmo anterior se discuten a continuación:

- **Lineas 2-13**: Para poder evaluar la función objetivo se comienza calculando el valor de la energía de deformación interna en cada elemento, la que posteriormente se penaliza según el criterio SIMP. Esta energía se acumula para obtener el valor de la función objetivo en el ciclo i. Valor que sirve como indicador de la convergencia del método hacia un punto mínimo. La sensibilidad se calcula por medio de la energía interna de deformación, por esta razón se encuentra en el mismo ciclo de la función objetivo, y se multiplica por un factor asociado a la penalización del modelo SIMP.

- **Lineas 14-20**: estas lineas ejecutan el filtro de sensibilidades por medio de la distancias entre baricentros de los elementos. A partir del baricentro se buscan todos aquellos elementos que cumplan con la condición de que la distancia entre su baricentro y la del elemento (e) sea menor al *rmin* especificado.

- **Lineas 21-23**: La sensibilidades filtradas se utilizan en estas lineas para definir la dirección de búsqueda del esquema de actualización de la densidad. Esta se describe con mas detalle en la siguiente sección. Actualizada la densidad se reajusta el modelo estructural variando la rigidez del sistema, para proceder con otro ciclo de búsqueda.

6.2.3. Esquema de actualización

El esquema de actualización de las densidades entre ciclos constituye la parte fundamental del algoritmo de la optimización topológica, este se desarrolla conforme a las disposiciones del esquema *Algoritmo 6.1* y se plasma de manera secuencial en el *Algoritmo 6.4*:

Algoritmo 6.3: Esquema de actualización de la densidad

Input: $fvol, \rho_i^{(e)}, disto^{(e)}, V_o^{(e)}, VTS, dcn_i^{(e)}$
Output: $\rho_{i+1}^{(e)}$

```
conv ← ϵ;
L1 ← Cero matemático;
L2 ← Infinito matemático;
int ← L2 − L1;
ρ_min ← Densidad mínima;
move ← Variable de movimiento del esquema;
while int mayor a conv do
    bisección del intervalo
    LMID ← (L1 + L2)/2;
    foreach elemento (e) do
        actualización de la densidad
        if disto^(e) = 1 then
            elemento con densidad fija
            ρ^(e) ← 1
        end
        else if disto^(e) = 0 then
            elemento con densidad nula
            ρ^(e) ← ρ_min
        end
        else
            elemento con densidad variable
            ρ^(e) ← ρ_min, move, ρ_i^(e), dcn_i^(e), LMID, V_o^(e)
        end
        volumen elemental
        V^(e) ← ρ^(e) V_o^(e)
    end
    volumen total
    VS ← ∑ V^(e)
    if (VS − f_vol VTS) > 0 then
        cambio del limite inferior
        L1 = LMID;
    end
    else
        L2 = LMID;
    end
end
posición λ óptima
λ_opt ← LMID
```

El esquema de actualización de la densidad esta en función del cumplimiento de la restricción de volumen y, este a su vez, en términos del multiplicador de Lagrange. Se utilizó el método de la bisección con la variable de movimiento *move* para encontrar el multiplicador. No todas las densidades elementales pueden asumir valores arbitrarios. También es posible que el usuario pueda fijar aquellos elementos que considere deban conservarse o eliminarse en el diseño optimo, esto se verifica en las lineas 12-19.

6.3. Selección del entorno de programación

En la implementación del modelo de optimización topológica se encontró un alto consumo de recursos de hardware al resolver el MEF, requiriéndose tiempos de cálculo importantes para resolver el sistema de ecuaciones, superiores a las 10 horas. Lo anterior condicionó el espacio de trabajo de la optimización topológica, disminuyendo el dominio en el que se define el solido inicial.

Durante la implementación computacional del modelo numérico de optimización topológica propuesto se evidenciaron algunas limitantes relacionadas con las herramientas de apoyo seleccionada. Debido a que con cada una de las herramientas utilizadas se resolvieron algunas limitantes se consideró pertinente presentar cronológicamente el historial de las diferentes herramientas utilizadas.

- **PEFiCA:** El primer intento de escritura en un código de programación se realizó utilizando el lenguaje VBA Excel. Específicamente utilizando la herramienta PEFiCA [30] . Esta herramienta maneja un lenguaje conversacional con el cual, utilizando unas instrucciones básicas, se puede construir un programa de elementos finitos.

  Una de las grandes ventajas de PEFiCA es la facilidad en la escritura y lectura del código, permitiendo una manipulación sencilla de las funciones creadas para el manejo de vectores y matrices, solución de sistemas de ecuaciones lineales, representación gráfica, y funciones especificas para el análisis de elementos finitos. Todas estas opciones lo convierten en una herramienta muy potente para la escritura de modelos de optimización topológica.

  Otra ventaja de PEFiCA es la gran biblioteca de funciones que posee de manera predeterminada, esto le permiten al usuario realizar una multitud considerable de tareas. Estas se relacionan con: operaciones matriciales, manejo de datos, representación gráfica, bases de datos, interfaz de usuario, etc.

  Puesto que el tamaño de las variables del análisis por elementos finitos y del proceso de optimización topológica consumen una cantidad considerable de memoria RAM, en promedio 4GB, se hizo necesario manejar la version de Microsoft Excel 2010 de 64 bits,

la cual no limita la disposición de memoria RAM en contraparte a su version de 32 bits que solo permite 2.0GB.

Inicialmente el modelo de optimización topológica escrito en la plataforma PEFiCA se ejecutó en un computador con los siguientes recursos de hardware:

Procesador: Procesador Intel Core i3
Velocidad del procesador: 2.4 Ghz
Numero de núcleos: 3
Memoria RAM: 3 GB DDr2
Procesador gráfico: VGA estándar
Memoria de vídeo: 16 MB

Dado los requisitos exigidos en memoria RAM por el tamaño de las variables se procedió a cambiar a un equipo de computo con mayor capacidad de calculo y memoria RAM con las siguientes características:

Procesador: AMD Athlon(tm) II 640
Velocidad del procesador: 3.00 Ghz
Numero de núcleos: 4
Memoria RAM: 12 GB DDr2
Procesador gráfico: VGA estándar
Memoria de vídeo: 16 MB

En la gráfica 6-1 se ilustra la interacción de los software que intervienen en la herramienta computacional desarrollada, teniendo como base central el programa PEFiCA.

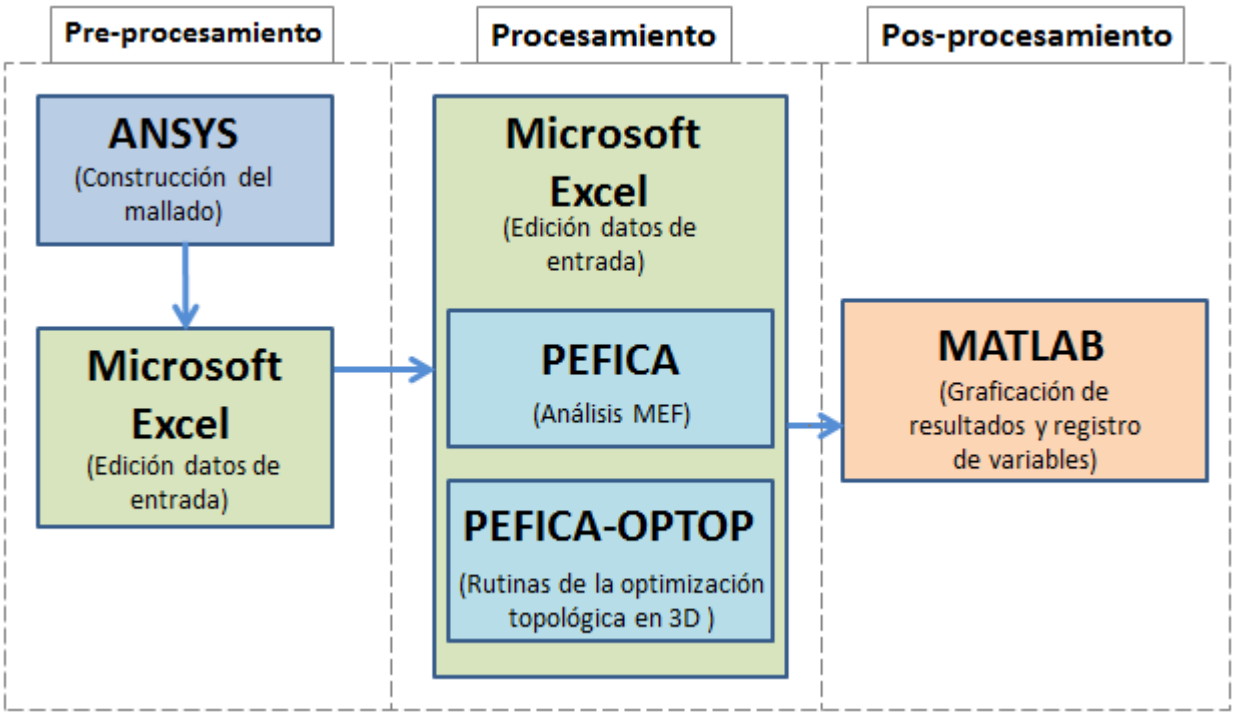


Figura 6-1.: Interacción de programas con PEFiCA como base. (Fuente: autor).

Con el objetivo de optimizar los tiempos de cálculo y de encontrar una relación más directa con la representación gráfica tridimensional de la optimización topológica, se decidió generar una interacción entre PEFiCA y la plataforma MATLAB versión R2015a. El resultado de esta interacción fue el siguiente:

- **PEFiCA-MATLAB:** se vinculó el lenguaje VBA Excel de PEFiCA con las instrucciones de la plataforma MATLAB por medio del complemento *Spreadsheet Link EX 3.2.3* en Excel. Esto representó una mejora significativa en cuanto al tiempo de calculo y sobretodo permitió una representación gráfica exacta de la estructura y de su estado optimizado utilizando las diferentes opciones de graficación de MATLAB. Sin embargo, dos limitantes seguían siendo recurrentes: primero, el tiempo de cálculo, aunque disminuyó aún era considerable, debido a que la transferencia de datos de Excel a MATLAB se hacía por medio de la memoria del disco duro y no por la memoria RAM, lo que pausaba la solución del sistema de ecuaciones lineales; y segundo, la memoria RAM colapsaba al declarar matrices muy grandes elemento por elemento como se requiere en el lenguaje VBA Excel.

  De igual forma que en PEFiCA esta solución solo funcionó mientras se utilizó la versión de Microsot Excel de 64 bits, y la instalación y configuración previa del complemento *Spreadsheet Link EX 3.2.3*. Si bien la instalación de esta componente facilitó la transmisión de datos, provocó que la herramienta computacional perdiera versatilidad al requerirse expresiones relativamente complejas.

En la gráfica 6-2 se ilustra la interacción de los software que intervienen en la herramienta computacional desarrollada, teniendo como base central el programa PEFiCA y a MATLAB como herramienta para resolver el sistema $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{a}$.

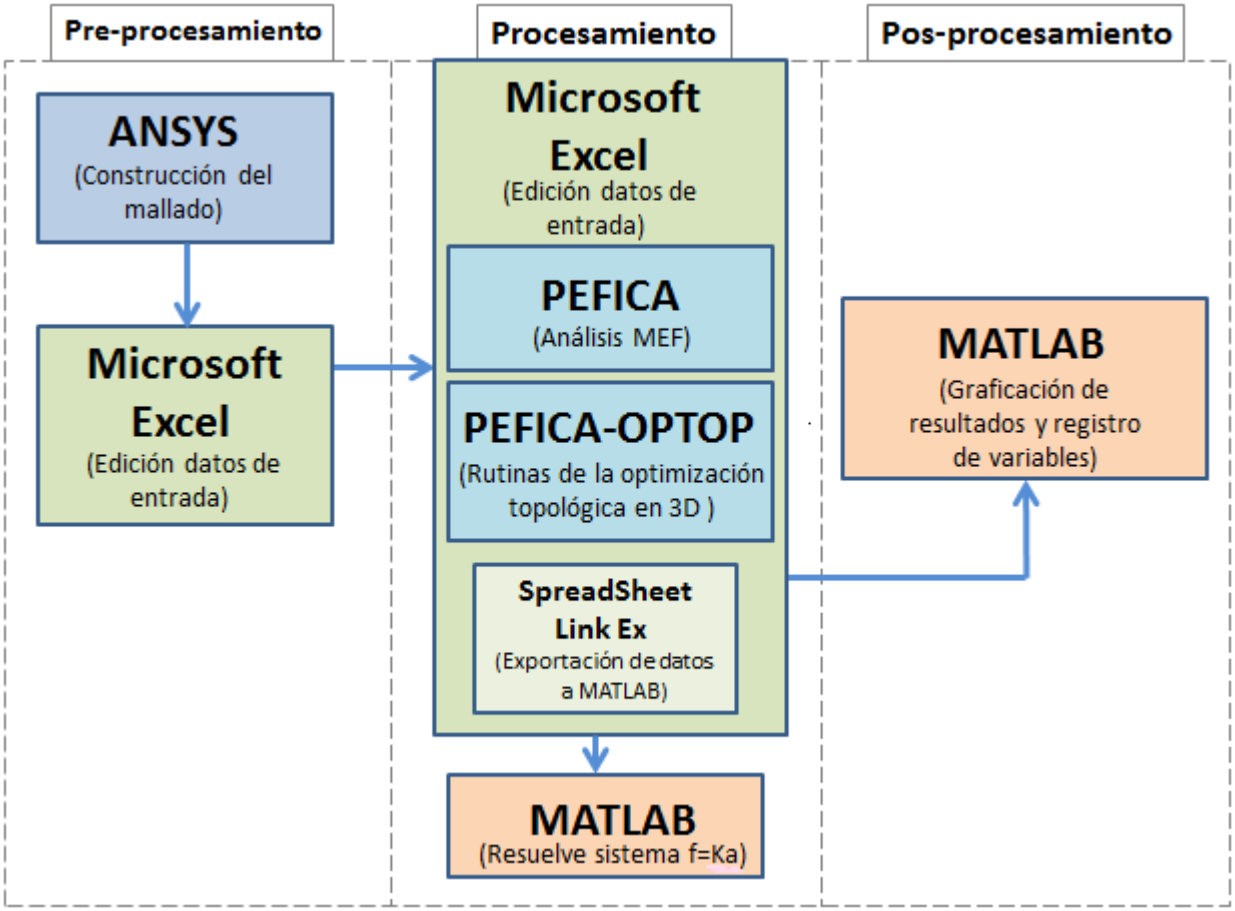


Figura 6-2.: Interacción de programas con PEFiCA-MATLAB como base. (Fuente: autor).

- **MATLAB-CALFEM:**La persistencia en las limitaciones encontradas al desarrollar el modelo de optimización topológica en lenguaje de VBA Excel condujo a migrar el código de optimización topológica a la plataforma MATLAB. Considerando que MATLAB no requiere de una declaración previa de variables, y la ventaja de disponer de funciones matemáticas avanzadas convierta esta plataforma en otra opción viable para migrar el código de optmización. De esta manera el usuario se puede concentrar exclusivamente en la implementación del algoritmo sin caer en formalismos de escritura muy complejos.

  Parte del análisis por el MEF se realizó con el paquete de software CALFEM (Computer Aided Learning of the Finite Element Method) [4], desarrollado en la *Lund University*. Este paquete contiene un conjunto de rutinas para realizar la formulación

de un gran numero de elementos finitos, especialmente en 2D, y un elemento sólido isoparamétrico. También posee rutinas para el ensamblaje y extracción de matrices y vectores, resolución de sistemas de ecuaciones lineales, operaciones especiales entre matrices, funciones de graficación, entre otras. Un condicionamiento de CALFEM es la orientación que tiene a problemas en 2D. Se utilizó principalmente para construir y operar las matrices de rigidez y para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

CALFEM fue bastante útil para realizar los primeros intentos de implementación, en los cuales se ensayaron el elemento triangular lineal y el elemento sólido isoparametrico de ocho nodos, ejecutando el análisis del MEF exclusivamente con CALFEM. Al utilizar este elemento sólido su costo computacional fue bastante alto en comparación al elemento tetraédrico. Puesto que el elemento sólido posee más grados de libertad y necesita que se efectúe una técnica de integración numérica.

MATLAB permitió mejorar la administración de la memoria interna, como por ejemplo declarando matrices tipo *sparce* de manera que se optimice asignación de memoria. De igual forma sucedió con las operaciones entre matrices y la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

MATLAB cuenta con un potente motor gráfico que permitió unificar la estructura lógica con su posterior representación gráfica, facilitando la presentación de resultados y la interacción con el usuario.

Otro aspecto acorde con los objetivos del trabajo radica que MATLAB es una plataforma con un lenguaje de fácil manejo que goza de amplio reconocimiento a nivel académico e industrial. De esta forma se garantiza el acceso y escalabilidad del código desarrollado en este trabajo.

- **ANSYS-EXCEL-MATLAB-CALFEM:** El proceso principal de la optimización topológica se realizó en MATLAB integrando algunas herramientas de CALFEM. De igual manera el post-procesamiento de datos se realizó con MATLAB. Debido a que existen programas especializados para el pre-procesamiento de datos se recurrió al programa ANSYS para generar la discretización o el mallado de los modelos. La información del mallado posteriormente se exporto y editó en Excel para ser leída por MATLAB. Esta interacción facilitó notablemente el rendimiento del programa, siempre y cuando la edición corresponda a la de la herramienta computacional desarrollada, tal como se indica en el anexo A.

ANSYS dispone de una gran conjunto de herramientas para la construcción de mallados. También permite la exportación de datos en formatos admisibles para la lectura en otros programas. De esta manera se logra la transferencia de datos de ANSYS a Microsoft Excel, en donde se realiza la disposición de los datos de entrada. Con la utilización del complemento *Spreadsheet Link EX 3.2.1* se facilita a transferencia de los datos de EXCEL a MATLAB.

En la gráfica 6-3 se ilustra la interacción final de los software que intervienen en la herramienta computacional desarrollada. Esta interacción permitió operar los datos de manera eficiente, disminuir los tiempos de cálculo, unificar las etapas de procesamiento y posprocesamiento, darle una mayor versatilidad a la herramientas, entre otros.

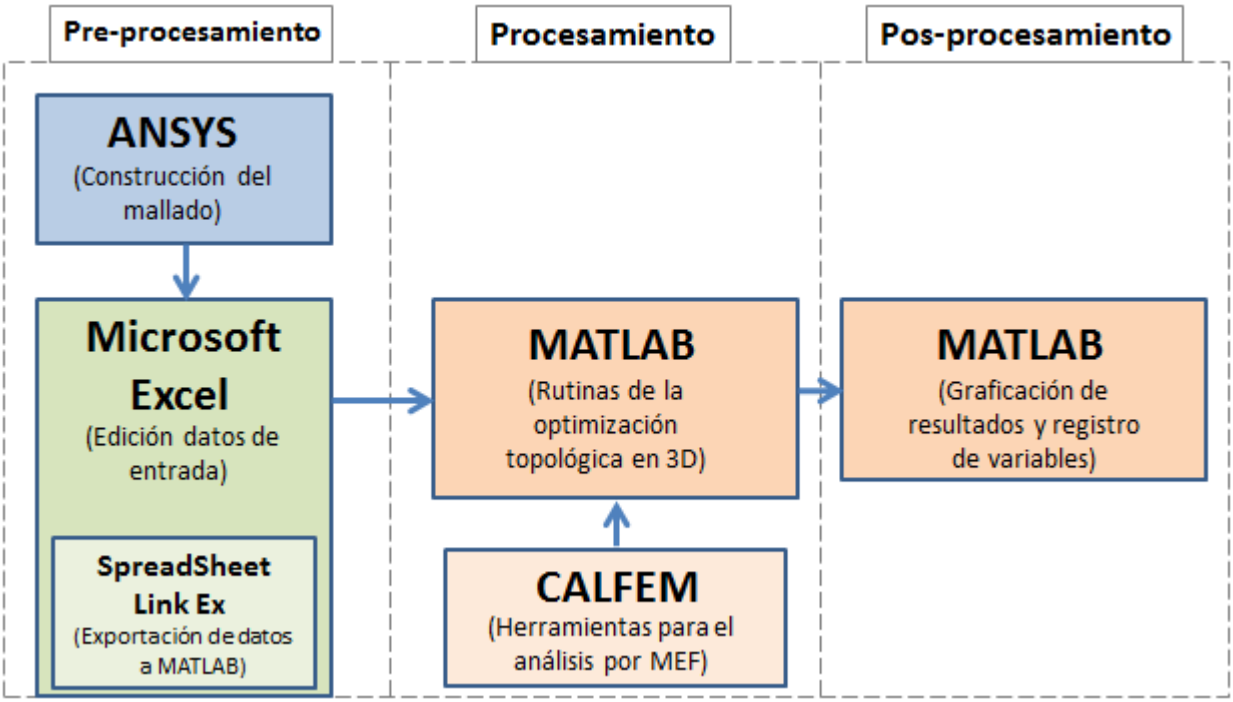


Figura 6-3.: Interacción final de programas. (Fuente: autor).

6.4. Codificación de las principales funciones del modelo propuesto

De los algoritmos de optimización topológica descritos en la sección 6.2 se presentan los que mayor relevancia tienen en el proceso de optimización topológica, con el fin de describir de forma más detallada su alcance.

Tal como se recomienda en la referencia [3] se evitó al máximo la declaración de funciones en el código con el objetivo de aumentar el rendimiento de la aplicación. Dando como resultado

un código relativamente plano y compacto. La única función que se conservó fue la encargada de ejecutar el análisis por FEM *ELEMTETRA* que se muestra en el siguiente titulo.

6.4.1. Análisis por MEF

El código que se muestra a continuación resuelve el sistema del análisis del MEF:

```
function ...
    [a]=ELEMTETRA(NNUD,NELE,ELE,XYZ,E,v,x,p,FUN,RES,Ex,Ey,Ez,Ndof,Edof,D);

%--------------------------------------------------
%INICIO DE RUTINAS ELEMENTO FINITO TETRAEDRICO

%grafica la malla sin deformar
%GRAFTETRA(XYZ,ELE,NELE,x)

%obtiene las matrices de rigidez y las ensambla
K=zeros(NNUD*3);

for i=1:NELE
   Ke=ktetra(Ex(i,:),Ey(i,:),Ez(i,:),D);
   Ke=Ke*(x(i,1)^p);
   K=assem(Edof(i,:),K,Ke);
end

%llena el vector de fuerzas nodales
f=zeros(NNUD*3,1);
for i=1:size(FUN,1)
   f((FUN(i,1)*3)-2)=FUN(i,2);
   f((FUN(i,1)*3)-1)=FUN(i,3);
   f(FUN(i,1)*3)=FUN(i,4);
end

%llena la matriz de restricciones
m=0;
for i=1:size(RES,1)

    if RES(i,2)==1
    m=m+1;
    bc(m,1)=Ndof(RES(i,1),1);
    bc(m,2)=0;
    end

    if RES(i,3)==1
    m=m+1;
```

```
    bc(m,1)=Ndof(RES(i,1),2);
    bc(m,2)=0;
    end

    if RES(i,4)==1
    m=m+1;
    bc(m,1)=Ndof(RES(i,1),3);
    bc(m,2)=0;
    end
end

%resuelve el sistema
a=solveq(K,f,bc);

% guarda las variables
% save ('variablesRPARA.mat');
```

Código 6.1: Análisis FEM.

6.4.2. Evaluación de la función objetivo y la sensibilidad

El siguiente código ejecuta las instrucciones entre las lineas 4-13 del *Algoritmo 6.3*, calculando el valor de la función objetivo y las sensibilidad elemental según las ecuaciones 5-5 y 5-22, respectivamente:

```
c=0;
for i=1:NELE
    Ed(1,:)=extract(Edof(i,:),a);

    fact=Ed(1,:)*(ktetra(Ex(i,:),Ey(i,:),Ez(i,:),D))...
        *Ed(1,:)';

    c=c+(x(i)^(p))*fact;
    dc(i,1)=-(p*(x(i)^(p-1)))*fact;
end
```

Código 6.2: Calculo función objetivo y sensibilidad elemental.

donde las variables de programación corresponden a:

i	=: variable contadora del ciclo.
$NELE$	=: número de elementos.
$Ex(i,:)$	=: vector de coordenadas x de los nodos del elemento i.
$Ey(i,:)$	=: vector de coordenadas y de los nodos del elemento i.
$Ez(i,:)$	=: vector de coordenadas z de los nodos del elemento i.
D	=: matriz constitutiva elástica.
c	=: función objetivo.
Ed	=: vector de desplazamientos nodales elementales.
$Edof$	=: matriz de grados de libertad por elemento.
$x(i)$	=: densidad del elemento i.
p	=: potencia de penalización del modelo SIMP.
$ktetra()$	=: función que calcula la matriz de rigidez elemental.
$extract()$	=: función que extrae desplazamientos elementales.
$dc(i,1)$	=: sensibilidad del elemento i.

El cálculo de la energía de la deformación, c=c+(x(i)ˆ(p))*fact , del sistema es el resultando de la sumatoria de las energías de deformación elementales, por esta razón el ciclo *for* que se muestra al inicio del código comprende todos los elementos. Utilizando la relación que existe entre la ecuación de la energía de deformación interna de un elemento y la ecuación de la sensibilidad elemental, *fact*, se puede incluir la evaluación de la sensibilidad en el mismo ciclo. El cálculo de la energía interna de deformación del sistema y las sensibilidades elementales se actualiza en cada ciclo del proceso de optimización puesto que estas se encuentran en función de las densidades elementales.

El objetivo general de la formulación de la optimización topológica consiste en minimizar la energía interna de deformación del sistema. Por esta razón su valor en el proceso iterativo deberá alcanzar un punto estacionario mínimo. El comportamiento de la función objetivo también es un indicador de la convergencia del proceso de optimización.
La función *extract* se encarga de extraer los desplazamientos nodales de un elemento i del vector de desplazamientos globales *Ed*. La función $(ktetra(Ex(i,:), Ey(i,:), Ez(i,:), D))$ calcula la matriz de rigidez elemental del elemento i en función de las coordenadas nodales del elemento (*Ex,Ey,Ez*) y de la matriz constitutiva elástica D.

6.4.3. Filtrado de la sensibilidad

El *Código 6.2* ejecuta las instrucciones entre las lineas 18-24 del *Algoritmo 6.3*, en donde se desarrolla el filtrado de las sensibilidades elementales:

```
for i=1:NELE
      sum1=0;
      sum2=0;
      sum3=0;
      for j=1:NELE
          DIST=(((BAR(i,1)-BAR(j,1))^2)+((BAR(i,2)-BAR(j,2))^2)+
          ((BAR(i,3)-BAR(j,3))^2))^0.5;
          if DIST≤rmin
              sum1=sum1+(rmin-DIST)*x(j)*dc(j,1);
              sum2=sum2+(rmin-DIST);
          end
      end
      sum3=x(i)*sum2;
      dcn(i,1)=sum1/sum3;
 end
```

Código 6.3: Sensibilidad modificada por filtro.

donde las variables de programación corresponden a:

i, j	=: variables contadoras de ciclo.
$NELE$	=: número de elementos.
$sum1$	= $sum2 = sum3$=: variables de almacenamiento.
$BAR(i,1)$	=: baricentro del elemento i.
$rmin$	=: radio mínimo.
$DIST$	=: distancia entre baricentros.
$x(i)$	=: densidad del elemento i.
$dc(i,1)$	=: sensibilidad del elemento i.
$dcn(i,1)$	=: sensibilidad del elemento i modificada por filtro.

Como parámetros de entrada del procedimiento del filtrado se requiere la determinación previa de la matriz de baricentros, matriz que contiene las coordenadas de los baricentros de cada elemento finito, el radio mínimo de filtrado *rmin*, las densidades elementales *x(i)*, y la matriz de sensibilidades originales *dc*. Con la matriz de baricentros se construyó el vector distancia entre el baricentro del elemento i y el del elemento j, para posteriormente compararlo con el radio mínimo, $ifDIST <= rmin$. De esta comparación se decide si el elemento j se incluye en la determinación de la sensibilidad modificada del elemento i.

La evaluación del condicional $ifDIST <= rmin$ se realiza tomando como base cada elemento finito i, evaluando la distancia de este contra todos los demás j, incluso la distancia al propio elemento. De esta manera el condicional será verdadero por lo menos una vez, haciendo que la sensibilidad modificada y la original sean iguales $dc = dcn$.

El procedimiento del filtrado de la sensibilidad depende de la densidad elemental explícitamente por lo que debe ser calculado en cada ciclo del proceso de optimización. Este procedimiento no se integró a otros procesos iterativos, como el mostrado en el *Código 6-1*, debido a que es necesario conocer previamente la sensibilidad original de cada elemento.

6.4.4. Actualización de la densidad

El código de programación del esquema de actualización, presentado a continuación, implementa la ecuación iterativa 5-15. Corresponde al procedimiento principal de la optimización topológica ya que orienta el campo de la densidad hacia un punto estable de la función objetivo.

```
while (L2-L1)>0.0001
    LMID=0.5*(L2+L1);

    for i=1:NELE
        if DISTO(i,1)==1
            XNEW(i,1)=1;
        elseif DISTO(i,1)==0
            XNEW(i,1)=xmin;
        else
            XNEW(i,1)=max(xmin,max(x(i,1)-move,min(1,min(x(i,1)
              +move,x(i,1)*((-dcn(i,1)/(LMID*VT(i,1)))^0.5)))));
        end

        V(i,1)=VT(i,1)*XNEW(i,1);
    end

    VS=sum(sum(V));

    if (VS-fvol*VTS)>0
        L1=LMID;
    else
        L2=LMID;
    end
end
```

Código 6.4: Actualización de la densidad.

donde las variables de programación corresponden a:

i	=: variables contadoras de ciclo.
$NELE$	=: número de elementos.
$x(i,1)$	=: densidad del elemento i.
$dcn(i,1)$	=: sensibilidad del elemento i modificada por filtro.
$L2$	=: cota superior del método de la bisección.
$L1$	=: cota inferior del método de la bisección.
$LMID$	=: valor medio del método de la bisección.
$DISTO(i,1)$	=: disposición topológica del elemento i.
$XNEW(i,1)$	=: densidad actualizada del elemento i.
$xmin$	= 0.001=: densidad mínima.
$move$	= 0.2=: constante de movimiento del esquema.
$VT(i,1)$	=: volumen inicial del elemento i.
$V(i,1)$	=: volumen afectado por la densidad del elemento i.
$VS(i,1)$	=: volumen total del dominio inicial afectado por las densidades elementales.
$VTS(i,1)$	=: volumen total del dominio inicial sin ser afectado por las densidades elementales.
$fvol$	=: fracción de volumen.

Este esquema requiere gran cantidad de variables de entrada, todas las variables del problema de optimización interfieren explicita o implícitamente en este esquema. De las variables que se relacionaron arriba, las únicas que no son parámetros de entrada son $V(i,1)$ y $XNEW(i,1)$, que corresponden al volumen del elemento i afectado por la densidad elemental $x(i)$, y la densidad del elemento i actualizada $XNEW(i,1)$.

El Código 6.3 empieza por verificar la disposición topológica de cada elemento, es decir, si el usuario predeterminó la densidad de un elemento de la siguiente manera: 0, elemento con densidad mínima, representa un vació fijo en el dominio de diseño final; 1, elemento con densidad máxima, representa una región solida en el diseño final; y, 2, se asume que la densidad del elemento no está condicionada. Para realizar esta verificación utiliza la matriz *DISV*.

El ciclo $while(L2 - L1) > 0{,}0001$ corresponde a la implementación del método de la bisección para hallar el multiplicador de Lagrange, representado en el código por *LMID*, que satisface la restricción de volumen impuesta por la fracción de volumen *fvol*. De esta manera se ejecuta un ciclo anidado, dentro del ciclo general de la optimización topológica, que recorre todos los elementos hasta lograr el cumplimiento del criterio de convergencia. El movimiento del esquema para buscar el multiplicador de Lagrange se realiza por medio de la constante *move*, la cual modifica las densidades en pasos discretos de 0,2 [8].

El resultado del esquema de actualización es el vector de densidades elementales actualizado *XNEW*. Este en conjunto con el vector de densidades no actualizado, x, se utilizan como criterio de evaluación de la convergencia del proceso general de la optimización topológica.

6.5. Consideraciones sobre la herramienta computacional desarrollada

Las tres características representativas que se tuvieron en cuenta durante la implementación del código de la herramienta computacional correspondieron a la libertad de acceso y facilidad en la modificación y escalamiento.

El código de la rutina principal de la optimización topológica se presenta en el anexo A. La estructura de este código busca: evidenciar las etapas del proceso de optimización topológica de estructuras en 3D, facilitar el desarrollo de ejercicios de optimización topológica, y, simplificar la incorporación de complementos o técnicas adicionales al modelo de optimización topológica propuesto.

Con las condiciones disponibles de software se observa una limitación en cuanto a los modelos a utilizar debido al tiempo de ejecución y capacidad de cómputo. La herramienta se probó con modelos relativamente refinados, alcanzando tiempos de ejecución superiores a las 24 horas. En la medida en que se planteen problemas con un número de elementos finitos muy grande (superior a los 30000) la capacidad de cómputo necesaria para resolver el sistema de ecuaciones del problema mecánico planteado es considerable.

Para manejar las limitaciones del tiempo se controlaron las siguientes variables del proceso de optimización topológica: número de elementos finitos del mallado, optimización de los códigos de programación, planteamiento de los algoritmos de la optimización topológica, y, definición del dominio de diseño. En el planteamiento de los ejemplos de validación y aplicación que se presentan en el capítulo de validación se tuvieron en cuenta estas variables, logrando resultados satisfactorios sin entrar en tiempos de cálculo excesivos.

El evitar los tiempos de cálculo excesivos conlleva de igual manera el trabajar con dominios muy grandes (mallados de muchos elementos), y esto a su vez condiciona el espacio de trabajo de la optimización topológica. Dominios pequeños producirán resultados con un nivel de detalle bajo y poco estructurados. Este condicionamiento se manejó ajustando el dominio inicial en función del tipo de problema.

La herramienta computacional está compuesta por una parte lógica y por otra gráfica, en esta ultima se presenta el resultado de la optimización topológica utilizando una repre-

sentación tridimensional del modelo. La calidad de la parte gráfica de la herramienta esta condicionada por la capacidad en hardware del equipo de cómputo, si se define un número muy elevado de elementos se requeriría de una capacidad gráfica computacional considerable.

Si bien los recursos computacionales disponibles restringieron en alguna forma las dimensiones de los modelos a implementar, la validación, calibración y aplicación de la herramienta de software desarrollada cumplió con las expectativas y metodologías alternas utilizadas en el ámbito ingenieril, como se demostrará en el capitulo siguiente.

7. Validación y aplicación del modelo de optimización topológica en 3D propuesto

La herramienta computacional que se desarrolló en los capítulos anteriores se aplica a ciertos problemas estructurales con el objetivo de validar el correcto funcionamiento de la misma. Esta validación se realizó comparando los resultados obtenidos al ejecutar la herramienta computacional propuesta con los presentados por los autores Jaejong Park y Alok Sutradhar en el documento *A multi-resolution method for 3D multi-material topology optimization*, que se encuentra en la referencia [43]. Por otro lado, validada la herramienta, se procede a realizar tres ejemplos de aplicación, presentados en secciones posteriores del capitulo, para casos comunes de la ingeniería estructural.

En cada uno de los ejercicios se muestra un desarrollo progresivo de la optimización topológica, de tal manera que por medio de una secuencia de imágenes se logra exponer el proceso de convergencia desde el dominio inicial hasta la estructura optima. De igual manera en cada uno de los ejercicios se sigue la variación de la función objetivo, que para el caso de la presente tesis corresponde al doble de la energía interna de deformación, verificando efectivamente que esta alcance valores mínimos estables.

En las gráficas que se presentan para cada uno de los ejercicios se tienen en cuenta, en general, solamente las densidades superiores a 40 por ciento. Lo anterior con la finalidad de facilitar la representación gráfica de la optimización, ya que las densidades bajas interfieren en la visualización de las densidades más altas.

Como se estableció en la sección anterior el criterio de convergencia está dado por la diferencia absoluta máxima entre valores de densidades de un mismo elemento de un ciclo a otro, si esta diferencia no supera el valor de 0,001 el ciclo se detiene. La convergencia del ciclo esta en relación directa con la convergencia a un punto mínimo de la función objetivo. En general, en todos los ejercicios se presenta una convergencia a un mínimo de la función objetivo en los primeros 50 ciclos.

Aparte del criterio de convergencia descrito en el *Algoritmo 6.1* se agregó otro criterio que

consiste en la posibilidad de detener el proceso cuando se llegue a los 100, 150 o 200 ciclos, dependiendo de la evaluación que se obtenga de la posible mejora en la optimización. Esto puesto que en los primeros ciclos es cuando se obtiene el porcentaje mas alto de material optimizado, cuando se entra en la fase oscilatoria de convergencia de la función objetivo el porcentaje se reduce considerablemente. La fase final de convergencia oscilatoria puede llevar una cantidad considerable de tiempo, sin tener una incidencia relevante en el resultado final de la optimización.

7.1. Plan de validación y aplicación

En la tabla 7-1 se realiza una breve descripción de los casos de validación y aplicación, con lo que el lector puede tener una visión general de los casos tratados en el presente documento.

Tabla 7-1.: Plan de validación y ejercicios de aplicación.

Caso	Descripción	Función	Sección
Viga tridimensional aperaltada en voladizo	Viga en voladizo restringida totalmente en una cara y con una carga unitaria en el centroide de la cara opuesta, ver figura 7-1. Dominio de dimensiones 30x30x10. Fracción de volumen del 5 %.	Validación y estudio paramétrico: influencia de la posición de la carga	7.2.1.
Viga MBB	Viga simplemente apoyada con carga unitaria linealmente distribuida en el centro de la luz, ver figura 7-6. Dominio de dimensiones 30x30x10. Fracción de volumen del 10 %.	Validación y estudio paramétrico: influencia del uso del filtrado	7.2.2.
Silla de cuatro patas	Estructura con apoyos totalmente restringidos en los cuatro vértices inferiores del dominio cubico inicial y carga unitaria aplicada en el centroide de la cara inferior, ver figura 7-10. Dominio de dimensiones 10x10x10. Fracción de volumen del 10 y 15 %.	Validación y estudio paramétrico: influencia de la fracción de volumen	7.2.3.
Ménsula en 3D	Estructura tipo ménsula, tiene condiciones de apoyo y de carga como se muestra en 7-15. Dominio de dimensiones 0.5x0.5x0.5. Fracción de volumen 8 %.	Ejercicio de aplicación y estudio paramétrico: influencia de la potencia de penalización	7.2.4.
Ménsula invertida o viga en L	Estructura descolgada tipo con las condiciones de apoyo, carga y dimensiones de dominio inicial como se ilustra en 7-18. Fracción de volumen 10 %.	Ejercicio de aplicación y estudio paramétrico: influencia de la cantidad de elemento de la malla	7.2.5.

(...continuación.)Casos de validación y aplicación.

Caso	Descripción	Función	Sección
Puente suspendido	Puente suspendido conformado por tablero y elementos tipos cerchas en los dos lados largos del tablero. Carga unitaria de superficie uniformemente distribuida en el área del tablero, ver figura 7-24. Dominio de dimensiones 10x30x10.Fracción de volumen 10 %.	Caso ingenieril.	7.2.8.
Parrilla en 3D	Estructura tipo parrilla con profundidad variable y con carga unitaria actuando en el centroide de la cara inferior del dominio, ver figura 7-21. Dominios de dimensiones 20x20x1, 20x20x5 y 20x20x10. Fracción de volumen 10 %.	Ejercicio de aplicación y estudio paramétrico: influencia de la profundidad del dominio	7.2.6.
Dado de fundación	Estructura tipo bloque apoyada en los 4 vértices de la cara inferior y con carga puntual actuante en el centroide de la cara superior, ver figura 7-27. Dominio de dimensiones 10x30x10. Fracción de volumen 10 %.	Caso ingenieril.	7.2.9.

Como se puede apreciar se utilizaron los casos de validación y ejercicios de aplicación para realizar simultaneamente los siguientes estudios paramétricos: efecto de la ubicación local de la carga, efecto del filtrado, efecto de las condiciones de apoyo, efecto del tamaño de la malla, efecto de la fracción de volumen y el efecto en la dimension en profundidad del dominio inicial, como se indica en la tabla 7-1.

7.2. Casos de validación y estudio paramétrico

Los siguientes casos estudiados en esta sección permitieron validar la calidad del algoritmo de optimización topológica 3D propuesto, así como su implementación mediante la herramienta computacional desarrollada en este trabajo. Se encontró que la capacidad de memoria y tiempo de procesamiento de los diferentes recursos computacionales disponibles limitó el grado de detalle que se puede alcanzar con la herramienta computacional desarrollada. Por otra parte, algunos de los resultados de los casos de validación seleccionados como referencia presentan un pos-tratamiento gráfico el cual está por fuera del alcance de este trabajo. En general, tanto para los casos de validación como para los ejercicios de aplicación se encontró similitud en el resultado de la optimización con los modelos de las referencias.

El criterio de validación adoptado en este trabajo corresponde a la comparación de la

configuración topológica de las fuentes con la obtenida a partir de la implementación del algoritmo de optimización propuesto. Aunque las dimensiones de los elementos estructurales resultantes presentan algunas variaciones, las configuraciones topológicas son equivalentes y se ajustan a la forma esperada.

7.2.1. Viga tridimensional aperaltada en voladizo

Jaejong Park y Alok Sutradhar [43] reportan en este referencia un caso de optimización topológica de una viga tridimensional en voladizo utilizando un método multiresolución. La discretización de la densidad se realizó por medio del modelo SIMP, lo cual permitió utilizar los modelos de este artículo como referencia para la validación. Las principales características y parámetros del modelo de viga en voladizo, desarrollado en esta referencia, se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 7-2.: Variables utilizadas en la referencia [43].

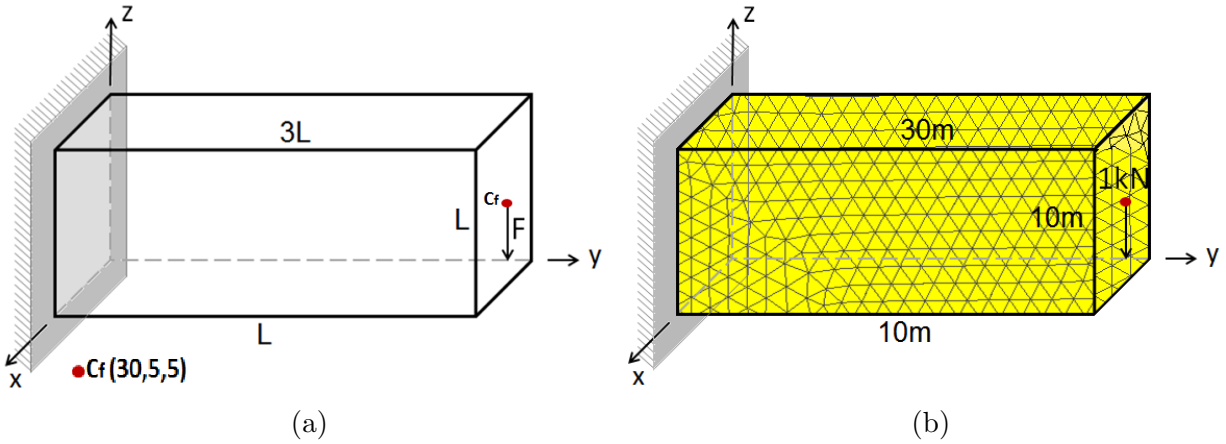
Parámetro	**Símbolo**	**Un.**	**Valor**
Variables para la modelación mediante el MEF			
Módulo de elasticidad	E	MPa	1
Relación de Poisson	μ	-	0.3
Número de elementos finitos	-	-	3000
Tamaño promedio del elemento	-	m	1
Carga puntual	F	kN	1
Variables para la optimización topológica			
Potencia de penalización	p	-	3
Coeficiente de amortiguación	ξ	-	0.5
Radio de filtrado	r_{min}	m	1
Fracción de volumen	f_{vol}	%	5

Los autores mencionados [43] utilizaron para la discretización del continuo un elemento finito tridimensional tipo bloque, de tres grados de libertad por nodo. Las caras de este elemento se conservaron paralelas a los planos ortogonales.

Validado este caso de viga en voladizo se procede a estudiar la influencia de la posición local de la carga en el proceso de optimización, para lo cual se presentan dos modelos adicionales ilustrados en la figura 7-4, que son análogos al modelo de viga en voladizo validado pero con una ubicación de la carga puntual diferente.

Descripción del modelo numérico

La descripción del modelo físico, la discretización, los parámetros para el modelamiento mediante el MEF, los parámetros utilizados para desarrollar la optimización topológica al igual que los resultados mas relevantes del proceso de optimización se presentan en la tabla 7-3 y figura 7-1.



(a) (b)

Figura 7-1.: Modelo de viga aperaltada tridimensional en voladizo. a.) Esquema del modelo numérico. b.) Discretización del dominio por elementos tetraedricos.

El modelo propuesto para validación consistió en una viga tridimensional, denominada viga aperaltada, de dimensiones 30x10x10 (LxBxH), en metros. Por solicitación se dispuso una carga unitaria concentrada en el extremo libre de la viga, actuando en el centroide de la sección transversal con sentido vertical hacia abajo.

Para la discretización se utilizó una malla tridimensional no estructurada de elementos tipo tetraedro con un tamaño aproximado del 3 % de la máxima dimensión. Las unidades utilizadas para construir el modelo numérico son consistentes y corresponden a las del sistema internacional (kN, m).

Las variables y parámetros utilizados para el proceso de optimización en la referencia [43] se indican en la tabla 7-2, se adaptaron para lograr que la optimización desarrollada en esta tesis se pudiera validar utilizando el modelo de referencia [43], el cual trabajo utilizando otros parámetros de discretización del MEF.

El dominio, sus dimensiones, las condiciones de apoyo y solicitaciones, así como el mallado del MEF, se presentan en la figura 7-1. Los datos más relevantes para las construcción del modelo de optimización topológica de la viga en voladizo descrita anteriormente se resume en la tabla 7-3 a modo de ficha técnica.

Tabla 7-3.: Variables utilizadas para la validación de la optimización.

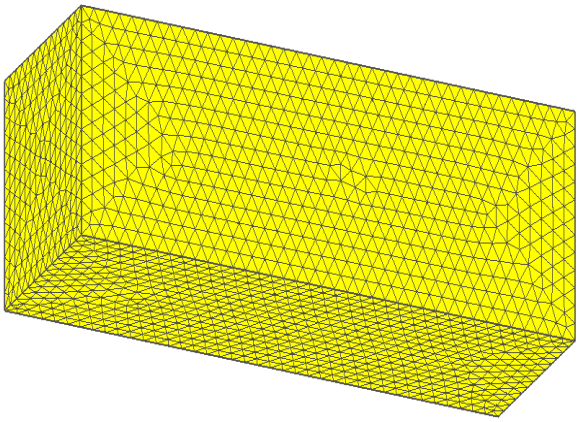
Parámetro	**Símbolo**	**Un.**	**Valor**
Variables para la modelación mediante el MEF			
Modulo de elasticidad	E	MPa	1
Relación de Poisson	μ	-	0.3
Número de elementos finitos	-	-	26897
Tamaño promedio del elemento	-	m	0.78
Carga puntual	F	kN	1
Variables para la optimización topológica			
Potencia de penalización	p	-	3
Coeficiente de amortiguación	ξ	-	0.5
Radio de filtrado	r_{min}	m	0.8
Fracción de volumen	f_{vol}	%	3.25

Como se aprecia al comparar las tablas 7-2 y 7-3 se observa que tanto los parámetros de la modelacion por el MEF como de la optimización topológica son muy similares en la referencia [43] y en el modelo propuesto en esta tesis, de esta manera se logró cumplir con el objetivo de semejanza de la validación a nivel de la construcción del modelo, parámetros y resultados de la optimización.

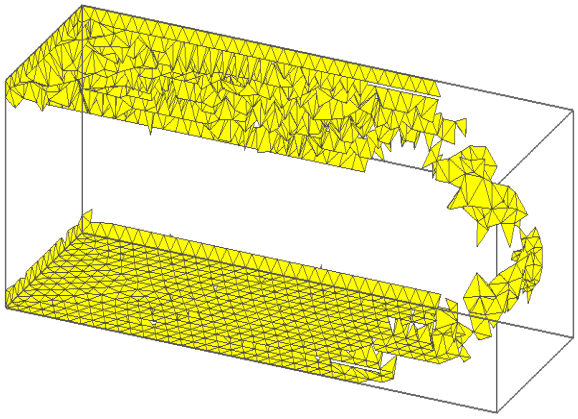
Los datos de r_{min} y f_{vol} que utilizaron los autores [43] para construir el modelo de optimización y los correspondientes que se emplearon para elaborar el modelo de optimización que se propone en esta tesis no se pueden tomar iguales, ya que se llegaría a modelos de validación no consistentes. Lo anterior se debe a la diferencia en las propiedades del mallado para la modelación por el MEF, los autores [43] utilizaron elementos tipo bloque con caras paralelas a los planos coordenados, en esta tesis se utilizaron elementos tetraédricos arbitrariamente orientados.

Proceso de optimización topológica

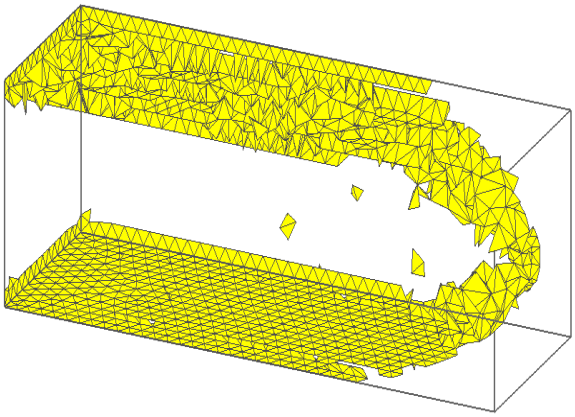
En las siguientes figuras se presenta la evolución del proceso de optimización topológica donde se han seleccionado las iteraciones de optimización mas relevantes asociadas a su energía de deformación. De esta forma se pretende mostrar la secuencia de optimización, el comportamiento de la función objetivo, la velocidad de la convergencia y la representación gráfica de la distribución de material asociada con la fracción de volumen. Con el objetivo de presentar una visualización clara se graficarón unicamente los elementos con densidades superiores al 20 %.



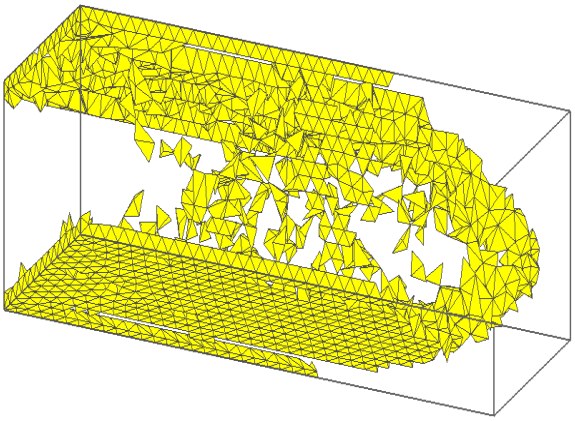
(a) i=2, U=27J



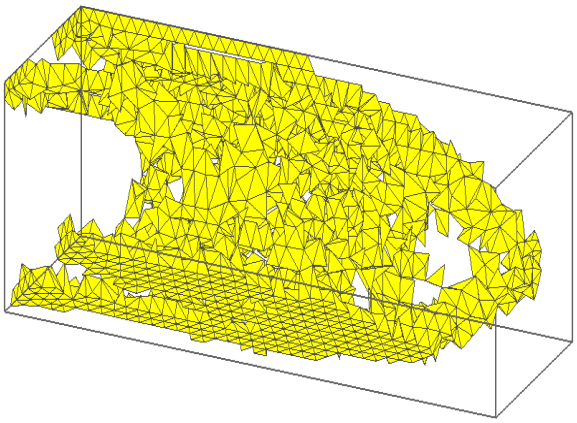
(b) i=6, U=100830J



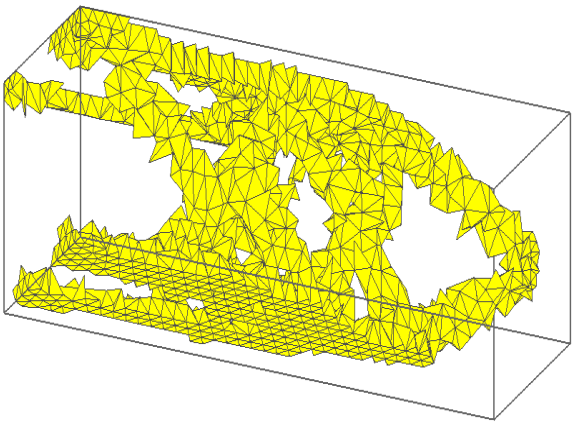
(c) i=8, U=31592J



(d) i=10, U=14283J

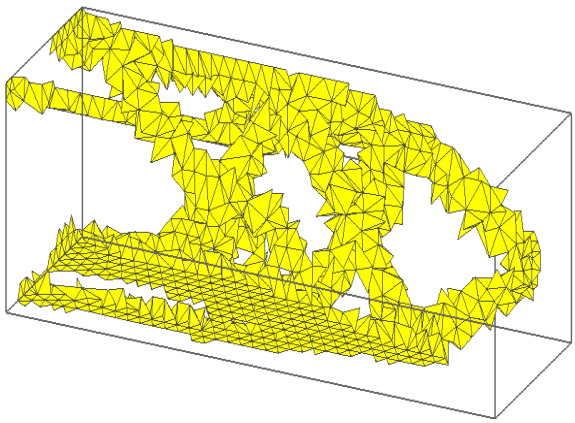


(e) i=14, U=3974J

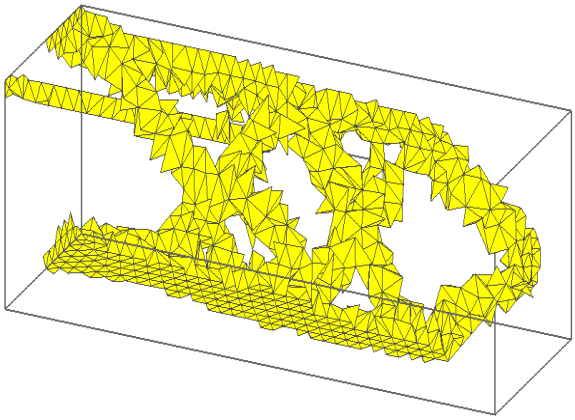


(f) i=20, U=610J

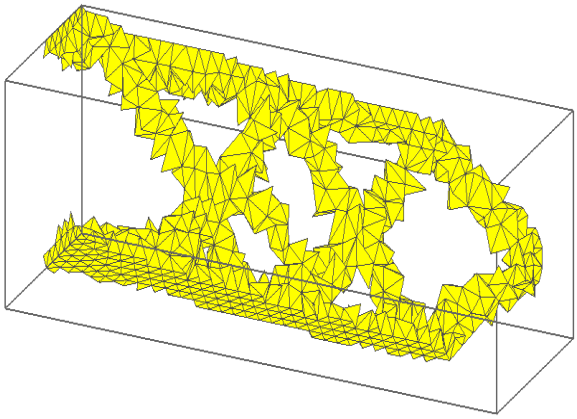
Figura 7-2.: Optimización topológica de una viga empotrada en la cara de un extremo y con una carga puntual en el centro de la cara del otro extremo.



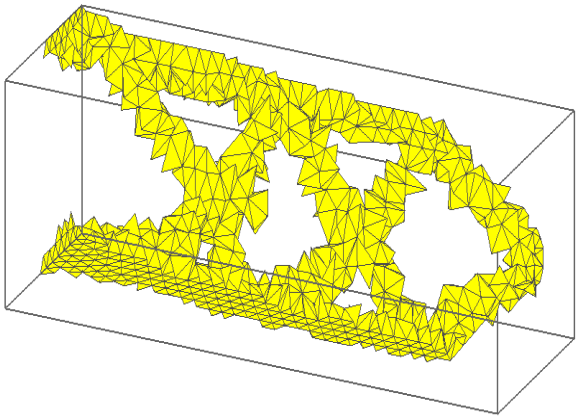
(g) i=30, U=433J



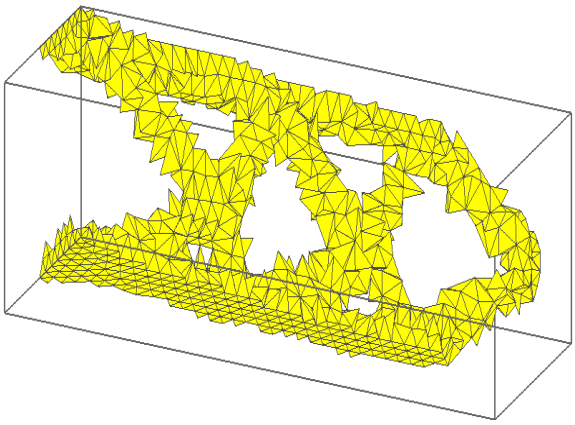
(h) i=40, U=355J



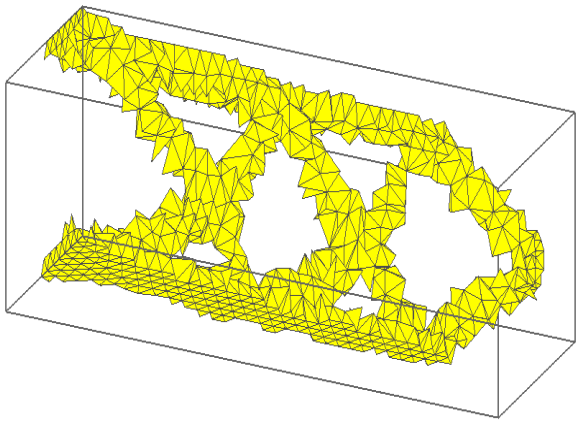
(i) i=56, U=310J



(j) i=70, U=305J



(k) i=100, U=220.2J



(l) i=120, U=219.9J

Figura 7-2.: (...continuación)Optimización topológica de una viga empotrada en la cara de un extremo y con una carga puntual en el centro de la cara del otro extremo.

Análisis y validación de la optimización

Algunas de las conclusiones del modelado que se expone en las figuras 7-2 se comentan a continuación, estas son producto del estudio del comportamiento durante el proceso de optimización de las variables de optimización y las del análisis por MEF, así como del análisis de los resultados desde el punto de vista de la intuición estructural basada en la mecánica básica.

- En los primeros ciclos del proceso de optimización el esquema de actualización identifica los elementos que poseen una baja energía de deformación, o de igual forma una baja sensibilidad, y los penaliza con densidades bajas. De esta manera grandes cantidades de material se eliminan en los primeros ciclos, produciendo que la función objetivo decrezca rápidamente, como se puede observar en la figura 7-3. Terminado este proceso inicial la función objetivo se estabiliza y entra en una fase en la que desciende lentamente, hasta llegar a una etapa de oscilatoria decreciente en la que pueden transcurrir muchos ciclos hasta cumplir con la condición de convergencia.

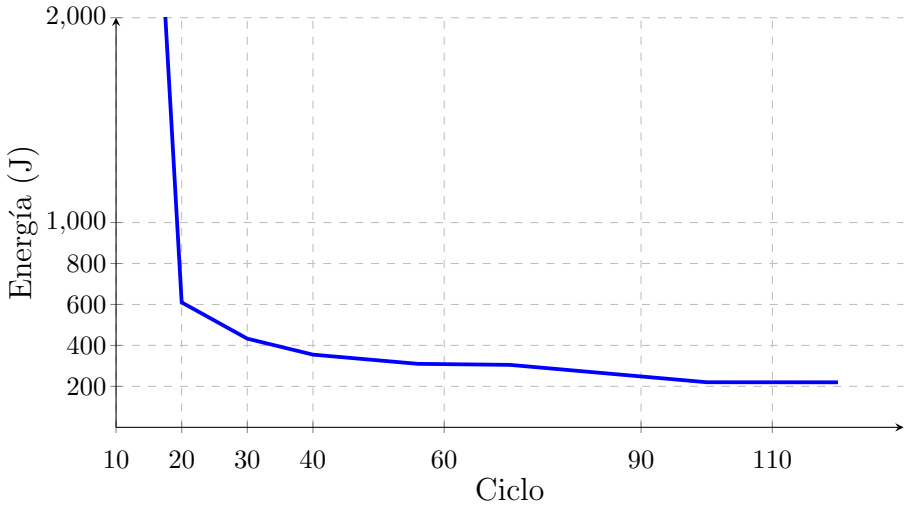


Figura 7-3.: Comportamiento de la función objetivo.

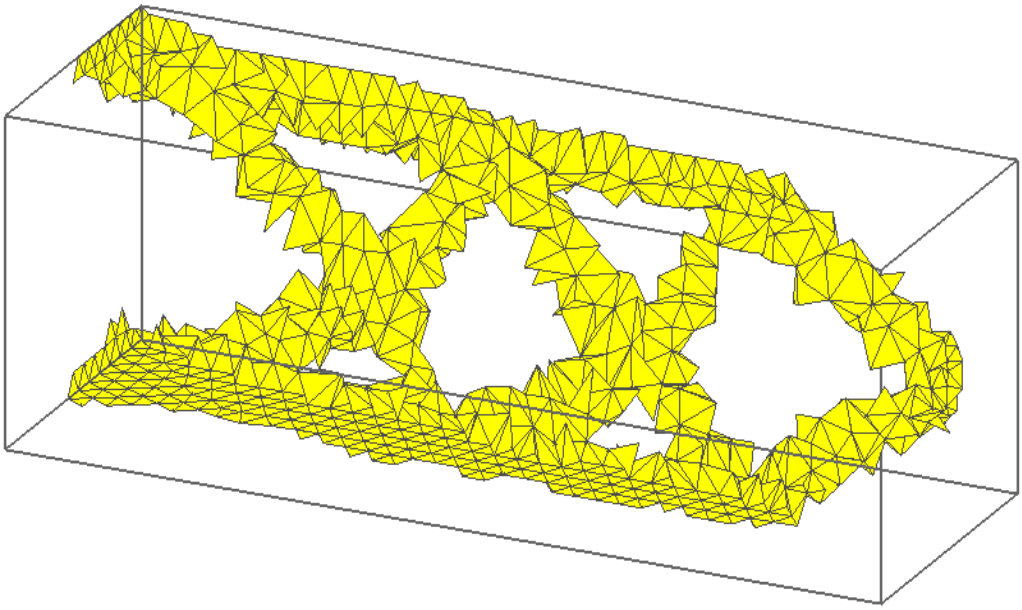
- El comportamiento de la función objetivo presenta una relación directa con la evolución de la topología. En primera instancia, se forman las ramificaciones estructurales principales, cordones superior e inferior, por medio de los elementos que presentan mayor cantidad de energía de deformación. En esta etapa la función objetivo se encuentra en su etapa de decrecimiento acelerado. En la etapa de decaimiento lento de la función objetivo se forman las ramificaciones interiores de la cercha, tomándose un número considerable de ciclos para definirlas. Y en la etapa oscilatoria decreciente final, no se presentan cambios considerables en la topología, pudiéndose detener el proceso de optimización antes de que alcance el criterio de convergencia.

- Se aprecia que las ramificaciones de material permiten una conexion entre el punto de aplicación de la carga y los apoyos del sistema. Esta condición se cumplió para todos los casos de optimización estudiados en este trabajo.

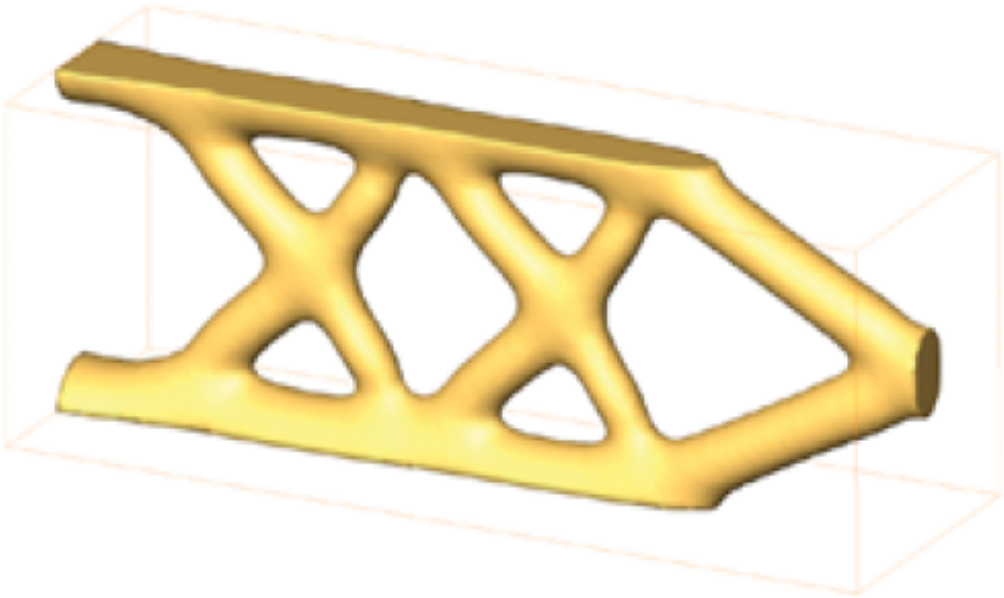
- Se verifica que el resultado de la optimización topológica esta acorde con lo esperado según el análisis de esfuerzos para este tipo de estructuras. La cercha resultante cuenta claramente con un cordón superior a tension y otro inferior a compresión, y con elementos interiores que funcionan como diagonales o parales según la teoría clásica de cerchas.

- Se puede observar que la optimización topológica en 3D, en comparación a lo que se aprecia en la optimización topológica en 2D, desarrolla un efecto importante de amplificación de los cordones de la cercha. En los puntos mas cercanos al apoyo, debido a la intensidad del par interior como lo establece la mecánica estructural, los miembros presentan una mayor concentración de área transversal. La cantidad de material en los cordones superior e inferior de la cercha aumenta en la medida que se acercan a los apoyos, de esta forma se evita la concentración de esfuerzos. Si esta modificación de área no tuviera lugar se presentarían concentraciones de esfuerzos que conllevarían mayores deformaciones originando una disminución en la rigidez del sistema.

En la figura 7-4 se realizó la comparación entre los resultados obtenidos de aplicar la herramienta computacional desarrollada y el resultado presentado en la referencia [43].



(a)



(b)

Figura 7-4.: Validación de la optimización topológica de la viga tridimensional aperaltada en voladizo. a.) Optimización topológica utilizando herramienta propuesta. b.) Optimizacion topologica presentada en la referencia de validación [43].

Se evidencia que la disposición de material en los dos resultados es equivalente desde el punto de vista topológico. En la figura 7-4b) se observa una mejor definición de los elementos debido a que en ella se aplicaron técnicas más avanzadas de graficación y suavizado de la configuración topológica.

En el ejercicio de optimización desarrollado, figura 7-4a), se requirió un número más grande de ciclos para alcanzar la definición de la topología óptima; mientras que en la referencia [43] se reportaron menos de cien ciclos. Esta discrepancia se presenta por la diferencia entre los tipos de mallado, en la referencia de validación se utilizaron elementos tipo bloque en un mallado estructurado, mientras que en este trabajo se utilizaron elementos tetraédricos arbitrariamente orientados en el espacio generándose un mayor numero de incógnitas de densidades elementales. Se puede observar que es necesario el uso de cinco tetraedros para cubrir el mismo espacio que ocuparía un elemento tipo bloque, resultando cinco variables de densidad para el mismo volumen de la referencia.

Al no presentarse una simetría perfecta en la distribución de los elementos finitos tetraédricos de la malla es muy difícil garantizar la simetría perfecta en la estructura presentada en 7-4a). Lo anterior obedece a que las configuraciones óptimas con algún sesgo hacia las caras laterales del dominio, y que cumplen con la restricción en la fracción de volumen, están asociadas con valores de la función objetivo que se encuentran dentro de la vecindad del punto óptimo de esta. En otras palabras, la sensibilidad de la disposición de los tetraedros es muy alta.

Estudio paramétrico: efecto de la posición de la carga

Se aprovechó el modelo anterior con el fin de investigar el efecto que tiene la ubicación espacial de la carga sobre la optimización. En el siguiente estudio paramétrico se reportan los resultados obtenidos, sobre el modelo presentado en la sección 7.2.1 se varió la posición de la carga en el extremo. Se estudian dos posiciones, la primera en la parte superior central de la cara no restringida, y la segunda en la parte inferior central de la misma cara. La figura 7-5 ilustra los modelos utilizados.

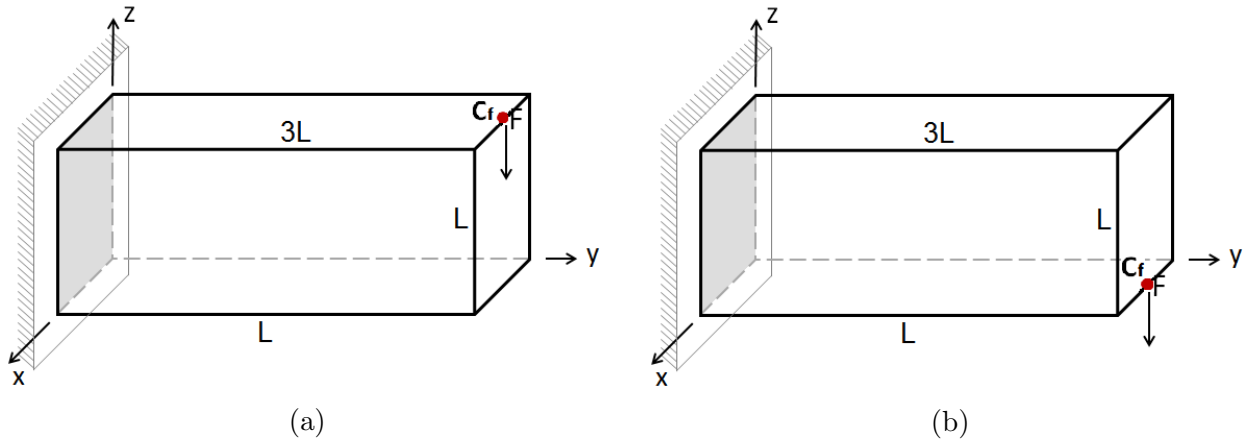


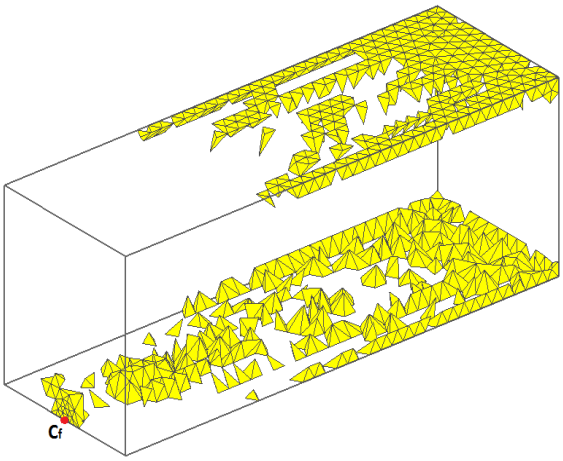
Figura 7-5.: Modelos del estudio paramétrico de la influencia de la posición de la carga. a.) Carga en la parte superior central. b.) Carga en la parte inferior central.

Los datos del modelo por MEF y del proceso de optimización topológica en 3D se conservaron iguales a los presentados en la tabla 7-3.

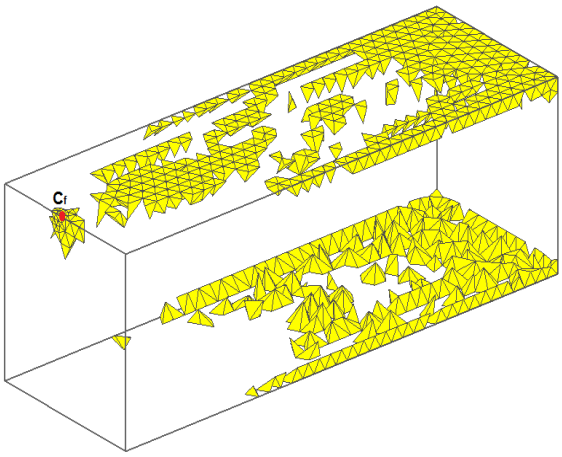
Una muestra de la evolución de la optimización topológica y el resultado final, para las dos condiciones de carga se ilustra en la figura 7-4; la columna de imágenes de la izquierda corresponde al caso con carga puntual en la parte inferior, y la de la derecha al caso con carga puntual en la parte superior.
De los resultados de optimización presentados en la figura 7-4 donde se varió la posición de la carga se puede concluir lo siguiente.

- La posición de la carga define la configuración topológica óptima, como era de esperarse. Sin embargo, en los casos estudiados con carga en la parte superior, inferior y central, estudiado inicialmente, se identifican algunas semejanzas. La formación de cordones de material tanto en las fibras superiores como inferiores. Estos últimos elementos se forman en todos los casos puesto que poseen una gran cantidad de energía de deformación independientemente de la posición local vertical de la carga, haciendo que el proceso de optimización los considere de suma importancia asignándoles densidades altas. De igual forma sucede con los elementos adyacentes al punto de aplicación de la carga, los cuales presentan altos niveles de energía de deformación al distribuir la carga concentrada.

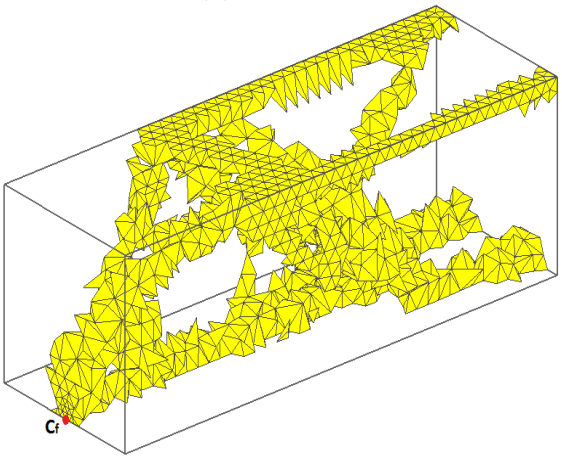
- Otro aspecto importante para destacar corresponde a la configuración simétrica que se aprecia en la topología del sistema con carga en la parte superior y el de la parte inferior. A pesar que la configuración se puede lograr mediante una función de reflexión los esfuerzos en las ramificaciones estarán invertidos; siempre y cuando se conserve la misma fracción de volumen.



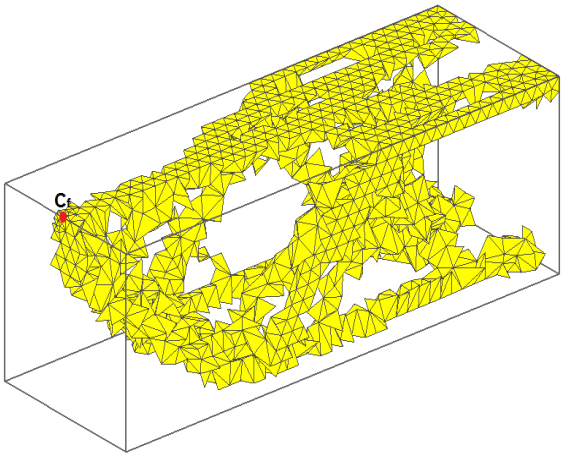
(a) i=1, U=3556J



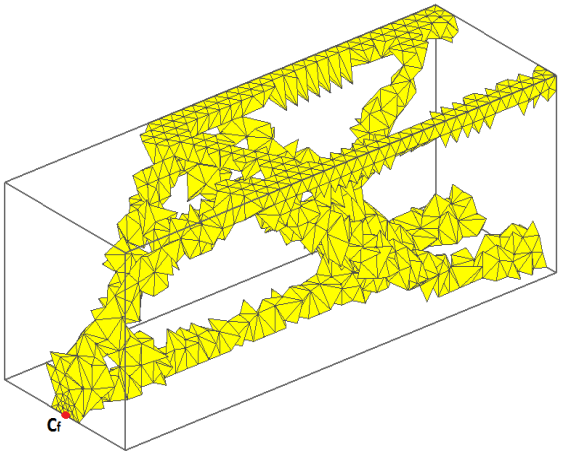
(b) i=3, U=589J



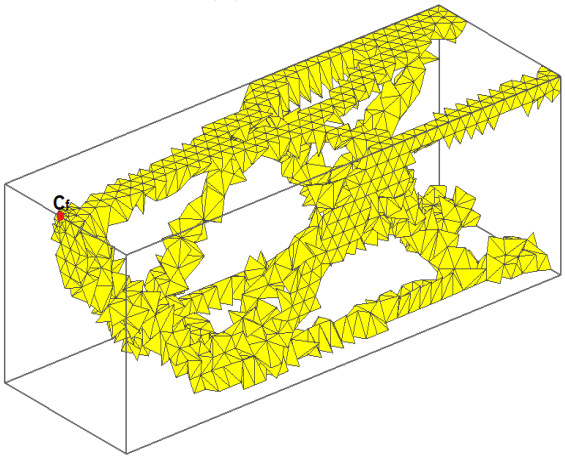
(c) i=6, U=151J



(d) i=8, U=133J



(e) i=7, U=131J



(f) i=9, U=125J

Figura 7-6.: Optimización topológica de viga en voladizo con variación en la posición de la carga.

- Las ramificaciones interiores o diagonales, generadas durante el proceso de optimización, se ajustan para llevar la carga a los apoyos logrando la mayor rigidez. En el caso de la carga aplicada en los extremos se conforman diagonales que van desde la fibra inferior hasta la fibra superior. En el caso de la carga aplicada en el centro se conforma diagonales cruzadas a la mitad de la altura del peralte del elemento. En los tres casos se observó que la orientación de las diagonales y crucetas presentan un angulo de 45.

- La energía y velocidad de convergencia para los tres casos, al igual que la función objetivo, se comportaron de forma similar, alcanzando aproximadamente los mismos niveles de energía y densidad.

7.2.2. Viga MBB (Messerschmitt-Bölkow-Blohm)

El modelo de viga MBB es un problema clásico dentro del ámbito de la ingeniería estructural, este se compone de una viga simplemente apoyada con una carga distribuida en la mitad del claro. Como el problema presenta una simetría sobre un plano vertical en la mitad de la luz, se acostumbra modelar una de las dos mitades de la viga aplicando condiciones de borde compatibles con los condiciones mecánicas de la viga completa. Jaejong Park y Alok Sutradhar [43] reportan en esta referencia un caso de optimización topológica de una viga MBB utilizando un método multiresolución. De igual forma que el caso anterior la discretización de la densidad se realizó por medio del modelo SIMP, lo cual permitió utilizar el modelo de la viga MBB de la referencia para la validación. Las principales características y parámetros del modelo de esta viga MBB, desarrollado en esta referencia, se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 7-5.: Variables del modelo de referencia [43] de la viga MBB.

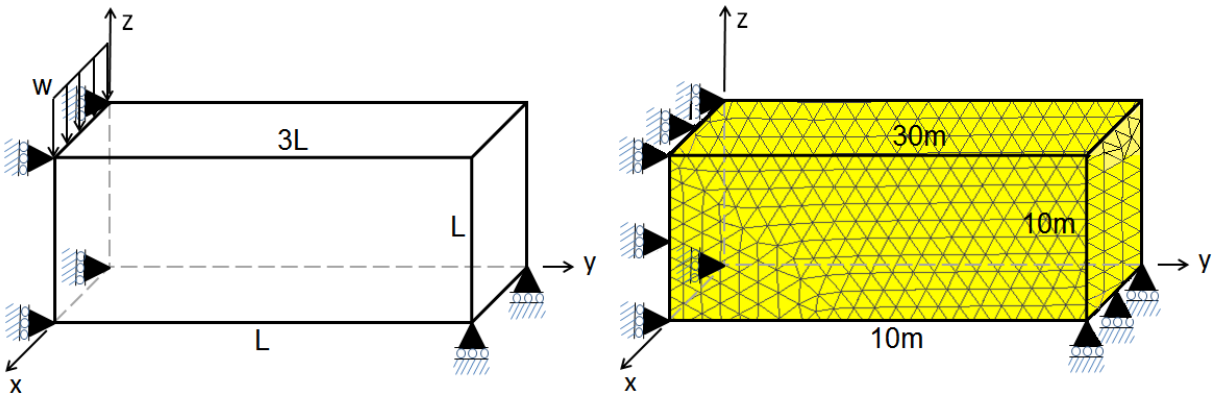
Parámetro	**Símbolo**	**Un.**	**Valor**
Variables para la modelación mediante el MEF			
Modulo de elasticidad	E	MPa	1
Relación de Poisson	μ	-	0.3
Número de elementos finitos	-	-	3000
Tamaño promedio del elemento	-	m	1
Carga distribuida	w	kN/m	1
Variables para la optimización topológica			
Potencia de penalización	p	-	3
Coeficiente de amortiguación	ξ	-	0.5
Radio de filtrado	r_{min}	m	1
Fracción de volumen	f_{vol}	%	10

En este caso los autores [43] utilizaron para la discretización del continuo un elemento finito tridimensional tipo bloque, de tres grados de libertad por nodo, con caras paralelas a los planos ortogonales.

El caso de viga MBB se logró validar correctamente, según se muestra y se discute mas adelante. Una vez validada la optimización de la viga MBB se procedió a estudiar el efecto que tiene el filtrado sobre el proceso de optimización. En el estudio paramétrico que acompaña este caso se consideró un modelo utilizando la técnica de filtrado de la sensibilidad y otro modelo equivalente en el cual no se aplica ninguna técnica de filtrado. Los resultados de los dos modelos se compararon para determinar la incidencia del filtrado.

Descripción del modelo numérico

La descripción del modelo físico, la discretización, los parámetros para el modelamiento mediante el MEF, los parámetros utilizados para desarrollar la optimización topológica, al igual que los resultados mas relevantes del proceso de optimización se presentan en la tabla 7-6 y figura 7-6.



(a) (b)

Figura 7-6.: Modelo de media viga MBB. a.) Esquema del modelo físico. b.) Discretización con elemento tetraédricos.

El modelo propuesto para validación consistió de una viga MBB tridimensional de dimensiones 30x10x10 (LxBxH), en metros. Por solicitación se dispuso una carga unitaria linealmente distribuida sobre la arista superior izquierda de la viga como se indica en la figura 7-6.

La discretización del dominio continuo, las unidades, las variables y parámetros de la optimización, al igual que las propiedades del dominio son las mismas indicadas en la sección anterior, para el caso de viga tridimensional aperaltada en voladizo y se reproducen en la tabla.

Los datos mas relevantes para las construcción del modelo de optimización topológica de la viga MBB descrita anteriormente se resumen en la tabla 7-6 a modo de ficha técnica.

Tabla 7-6.: Variables del modelo de viga MBB.

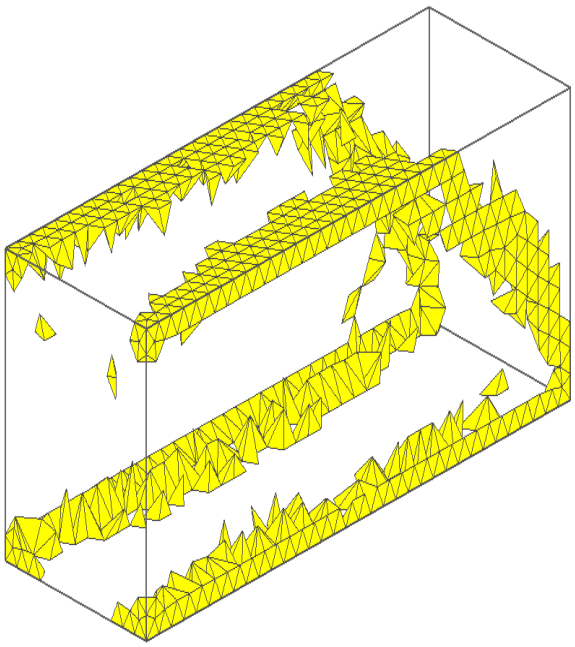
Parámetro	**Símbolo**	**Un.**	**Valor**
Variables para la modelación mediante el MEF			
Modulo de elasticidad	E	MPa	1
Relación de Poisson	μ	-	0.3
Número de elementos finitos	-	-	16731
Tamaño promedio del elemento	-	m	0.87
Carga distribuida	w	kN/m	1
Variables para la optimización topológica			
Potencia de penalización	p	-	3
Coeficiente de amortiguación	ξ	-	0.5
Radio de filtrado	r_{min}	m	0.9
Fracción de volumen	f_{vol}	%	6.5

Al comparar las tablas 7-4 y 7-5 se observa, tanto los parámetros de la modelación por el MEF, como los de la optimización topológica son similares a los de la referencia [43], así como a los utilizados en el modelo propuesto en esta tesis. De esta manera se configuró un modelo semejante para la validación, a nivel de la construcción del modelo, parámetros y resultados de la optimización.

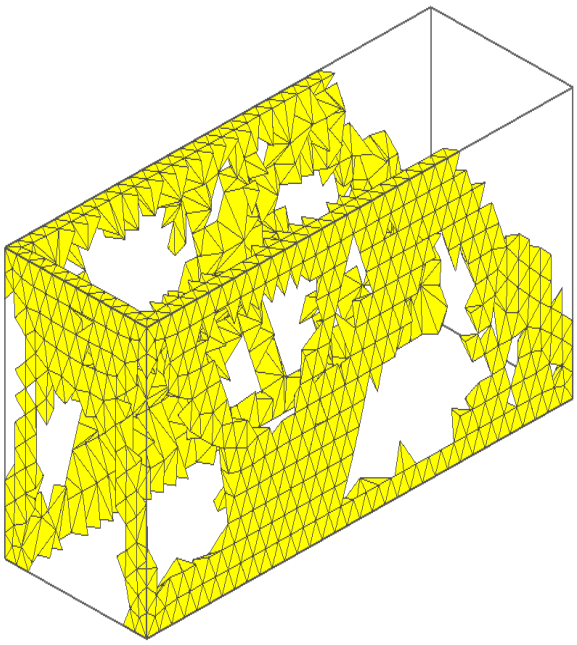
Los datos de r_{min} y f_{vol} que utilizaron los autores [43] para construir el modelo de optimización y los correspondientes que se emplearon para elaborar el modelo de optimización propuesto difieren en algunos aspectos y se adaptaron según las razones que se expusieron en 7.2.1.

Proceso de optimización topológica

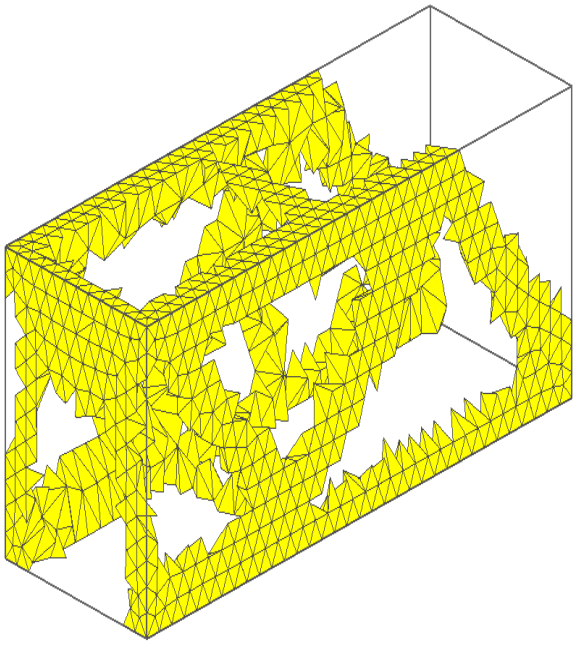
En figura 7-8 se presenta la evolución del proceso de optimización topológica. Se seleccionaron las iteraciones de optimización mas relevantes asociadas a su energía de deformación:



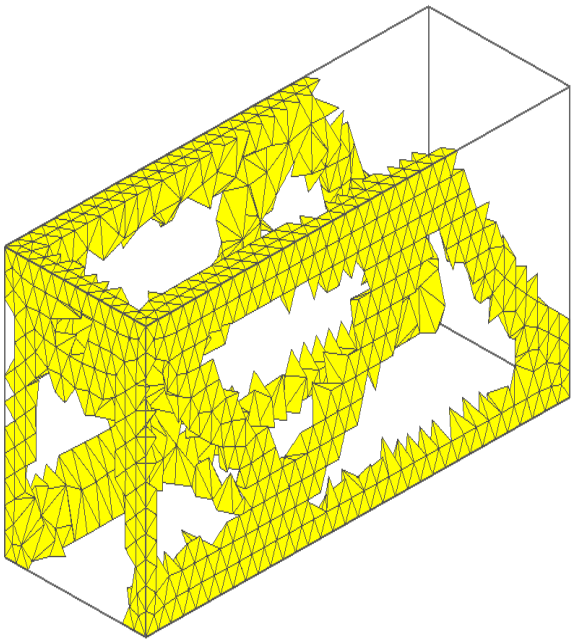
(a) i=6, U=697530J



(b) i=10, U=63255J

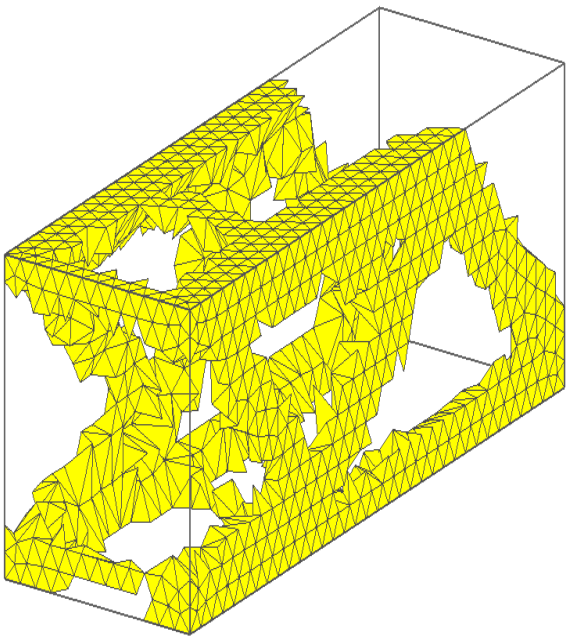


(c) i=16, U=19202J

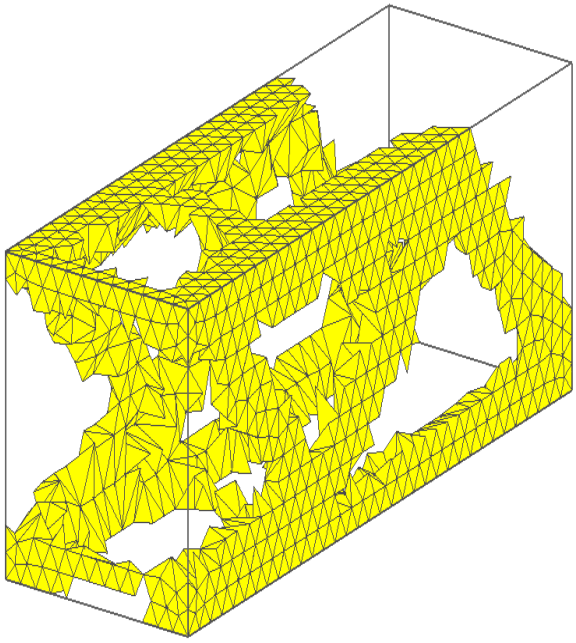


(d) i=20, U=17885J

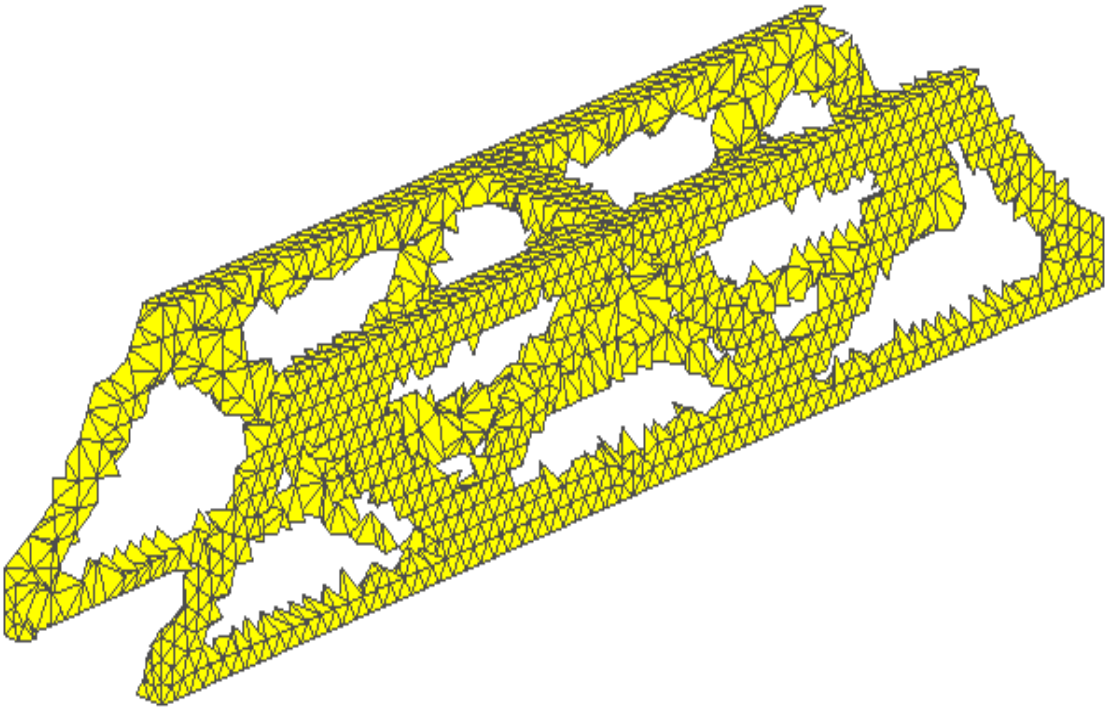
Figura 7-7.: Optimización topológica de una parte simétrica de una viga MBB.



(e) i=90, U=16916J



(f) i=110, U=16895J



(g) i=110, U=16895J

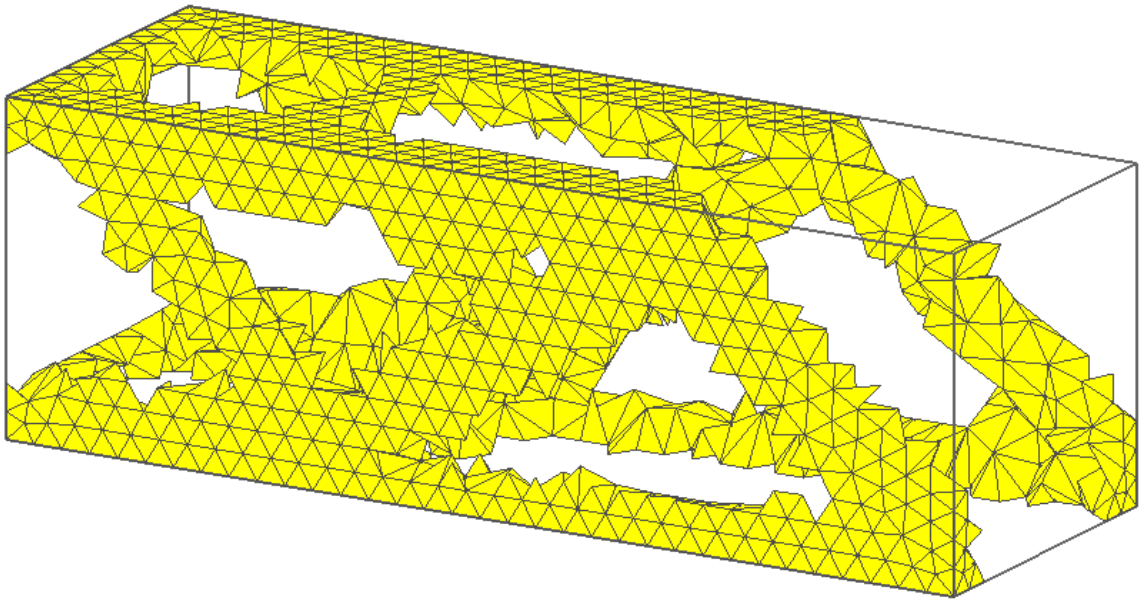
Figura 7-7.: (...continuación.)Optimización topológica de una parte simétrica de una viga MBB.

Análisis y validación de la optimización

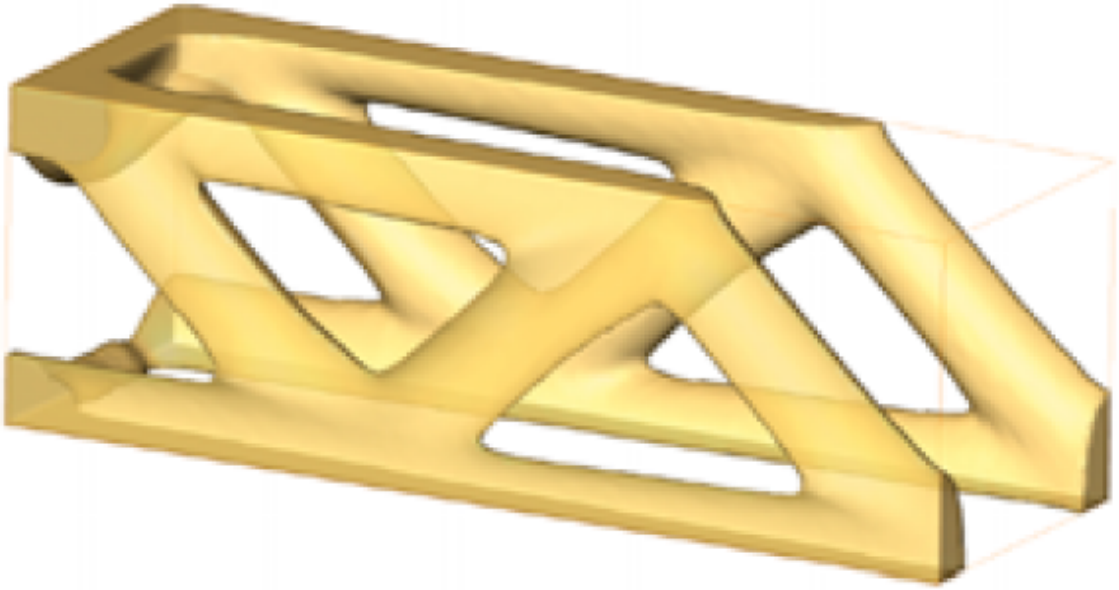
Algunas de las conclusiones del proceso de optimización topológica para el problema de la viga MBB ilustrado en la figura 7-8 se describen a continuación:.

- La convergencia del proceso de optimización, en forma general, tanto la de la referencia, como la obtenida con la herramienta propuesta en este trabajo alcanzaron aproximadamente la misma cantidad de ciclos y el mismo nivel de energía de deformación.
- Debido a que la energía de deformación a partir del ciclo cuarenta presenta variaciones muy leves y adquiere un comportamiento oscilatorio decreciente alrededor del punto óptimo se resolvió forzar la finalización del proceso de optimización en la iteración ochenta.
- En las primeras iteraciones de optimización se definen los cordones superior e inferior, que corresponden a los elementos con mayor energía de deformación y también a los elementos que transmiten la carga desde el punto de aplicación a los apoyos. También se evidencio la formación de las ramificaciones estructurales principales asignando densidades cercanas a la unidad a los elementos que presentan mayor cantidad de energía de deformación. La definición de las diagonales tiene lugar una vez los cordones superior e inferior alcanzan un alto grado de definición, proceso que toma bastante tiempo.
- El comportamiento de la función objetivo se puede dividir en tres fases, la primera en la cual decrece rápidamente, la segunda caracterizada por un decrecimiento lento y finalmente se presenta un comportamiento oscilatorio asintótico.
- El resultado de la optimización topológica de la viga MBB, en forma de cercha, corresponde a los planteamientos de la mecánica estructural, que describe el estado de esfuerzos para este tipo de estructuras. Al igual que el caso de validación anterior, la sección transversal de los cordones superior e inferior se amplían para controlar la concentración de esfuerzos que se presentan en el centro de la luz. Las diagonales están orientadas con una inclinación cercana a los 45°, optimizando su función estructural.
- El resultado de la optimización topológica de la viga MBB en 3D es similar al resultado obtenido para el mismo problema en 2D reportado en la referencia [8]. Esto se debe a que el esquema de optimización al crear un elemento tipo puente en la región donde se aplica la carga la distribuye hacia los dos planos laterales. A partir de la carga trasladada a los planos laterales se lleva a cabo un proceso de optimización 2D que resulta en forma de cerchas en el plano.

En la figura 7-8 se presenta la comparación entre los resultados de la optimización topológica obtenidos de aplicar la herramienta computacional desarrollada en este trabajo y el resultado presentado en la referencia [43].



(a)



(b)

Figura 7-8.: Validación de la optimización topológica de la viga MBB. a.) Optimización topológica utilizando herramienta propuesta. b.) Optimizacion topologica presentada en la referencia de validación [43].

La similitud en los resultados de la optimización es evidente conservándose la misma disposición topológica (conectividad entre elementos). En la figura 7-9 *b)* se observa una mejor calidad en el resultado debido a que como se menciona en la referencia se aplicaron técnicas avanzadas de graficación y suavizado de la densidad.

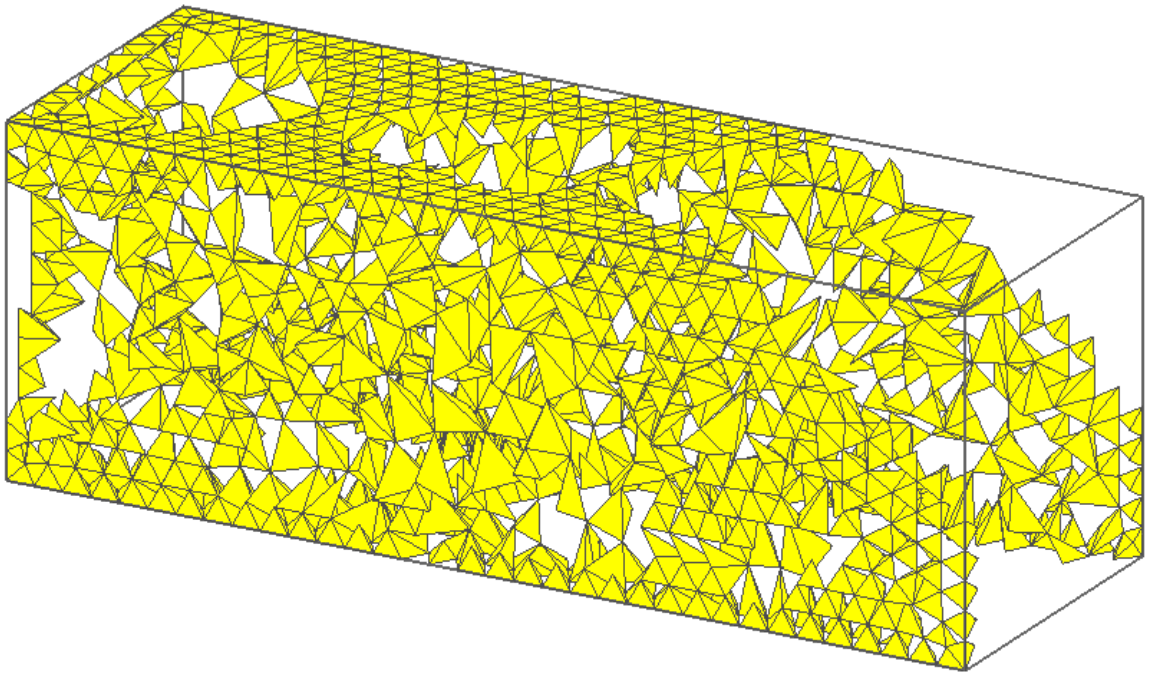
Algunos elementos no corresponden exactamente en los dos resultados, debido a que fue necesario modificar las condiciones de apoyo restringiendo un grado de libertad adicional a los que se exponen en la referencia [43]; con el fin de no generar problemas de estabilidad numérica en la solución del MEF por presentarse desplazamientos de cuerpo rígido, se introdujeron restricciones laterales. En la referencia [43] no se hace mención alguna a este tipo de restricciones.

Características como el ángulo de orientación de las ramificaciones estructurales, su ancho y topología presentan prácticamente la misma configuración.

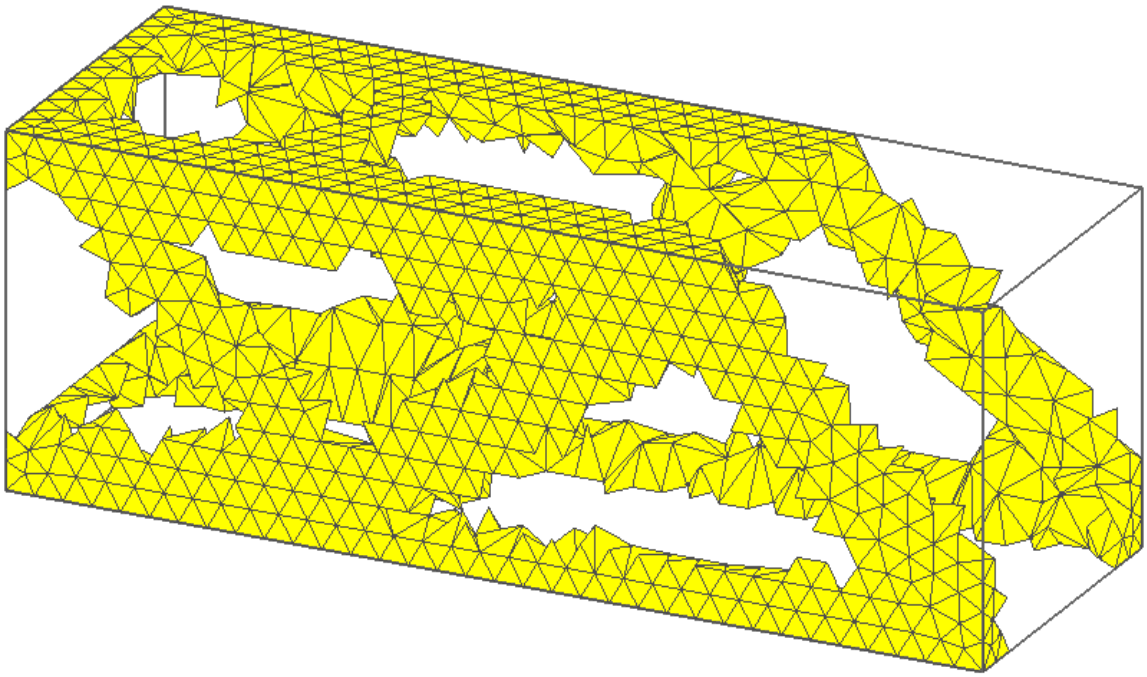
De igual manera a como se explicó en la sección 7.2.1, se requirió de un mayor número de ciclos para lograr la forma óptima en comparación a los ciclos requeridos en la referencia de la validación.

Estudio paramétrico: Efecto del uso de una técnica de filtrado

Utilizando el modelo de la viga aperaltada MBB implementado anteriormente se estudio el efecto que tiene la técnica de filtrado sobre la optimización. En el presente estudio paramétrico se estudia la dependencia del resultado de la optimización cuando se introducen técnicas de filtrado de la sensibilidad. Como se verá mas adelante la inclusión de estas técnicas permite corregir los fenómenos relacionados con la dependencia del resultado con la malla del MEF y la distribución de la densidad en los mismos evitando el fenómeno de tablero de ajedrez. Se estudiaron dos modelos, uno sin técnica de filtrado y el otro utilizando la técnica de filtrado de la sensibilidad. La figura 7-9 ilustra los modelos utilizados:



(a)



(b)

Figura 7-9.: Efecto del filtrado por sensibilidades en la optimización topológica de la viga MBB. a) Resultado sin filtro. b) Resultado utilizando una técnica de filtrado.

Se evidencia en la figura 7-9b) que el uso de la técnica de filtrado evita la aparición del fenómeno de tablero de ajedrez. Desde el punto de vista matemático el diseño óptimo con

el patrón de tablero de ajedrez es totalmente concebible, tanto en las implementaciones en 2D como en 3D, pero físicamente representa un desafió en la conexión de material a través de los vértices de los tetraedros. De los resultados de optimización sin la técnica de filtrado se puede concluir que este fenómeno también se presenta al utilizar elementos tetraédricos regulares de cuatro nodos. De esta forma queda demostrada la importancia de incluir una técnica que ayude a evitar los problemas relacionados con la conectividad y ramificación no controlada entre elementos finitos.

7.2.3. Silla de Cuatro Patas (4-legged stool)

El problema de optimización de la silla de cuatro patas, o "4-legged stool"por su traducción al ingles, trabaja sobre un cubo 3D apoyado en las cuatro esquinas de su base. Este se encuentra solicitado con una carga unitaria aplicada en el centroide de la cara inferior. Los autores Jaejong Park y Alok Sutradhar [43] presentan la optimización topológica para este modelo discretizando la densidad según el modelo SIMP. Las principales características y parámetros del modelo de la silla de cuatro patas, desarrollado en esta referencia [43], se presentan en la tabla 7-6. La geometría, las condiciones de apoyo y la solicitación se muestran en la figura 7-10a).

Tabla 7-7.: Variables del modelo de referencia de la silla de cuatro patas.

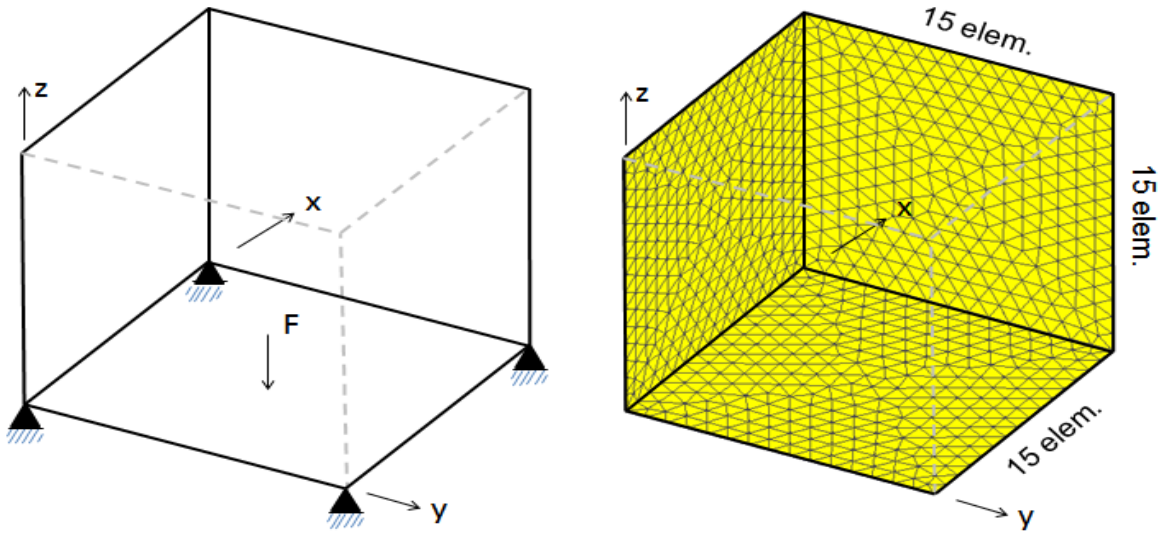
Parámetro	**Símbolo**	**Un.**	**Valor**
Variables para la modelación mediante el MEF			
Modulo de elasticidad	E	MPa	1
Relación de Poisson	μ	-	0.3
Número de elementos finitos	-	-	1728
Tamaño promedio del elemento	-	m	1
Carga puntual	F	kN	1
Variables para la optimización topológica			
Potencia de penalización	p	-	3
Coeficiente de amortiguación	ξ	-	0.5
Radio de filtrado	r_{min}	m	1
Fracción de volumen	f_{vol}	%	10

Para trabajar el modelo de referencia los autores [43] utilizaron para la discretización del continuo un elemento finito tridimensional tipo bloque, de tres grados de libertad por nodo, con caras paralelas a los planos ortogonales.

El caso de la silla de cuatro patas se logró validar correctamente, según se muestra y se discute mas adelante. Posterior a esta validación se estudió la influencia de las condiciones de apoyo en el proceso de optimización. Para realizar este estudio se elaboraron dos modelos, uno en el que se restringen totalmente los cuatro vértices de la base del cubo y otro modelo equivalente, en el que la restricciones se cambian por apoyos de primer género actuando en sentido vertical. Estos dos modelos se muestran en la figura 7-14.

Descripción del modelo numérico

La descripción del modelo físico, la discretización, los parámetros para el modelamiento mediante el MEF, los parámetros utilizados para desarrollar la optimización topológica, al igual que los resultados más relevantes del proceso de optimización se presentan en la tabla 7-8 y figuras 7-10.



(a) (b)

Figura 7-10.: Modelo de silla de cuatro patas. a.) Esquema del modelo numérico. b.) Discretización con elemento tetraédricos.

El modelo propuesto para la validación consistió de un cubo 3D de dimensiones 12x12x12 (LxBxH), en metros. Por solicitación se dispuso de una carga unitaria aplicada en el centroide de la cara inferior. Los desplazamientos de los cuatro vértices de apoyo se restringieron al desplazamiento.

Como discretización se utilizó una malla tridimensional no estructurada de elementos tipo tetraedro con un tamaño aproximado del 3 % de la máxima dimension. Las unidades utilizadas para construir el modelo numérico son consistentes y corresponden a las del sistema internacional SI (kN, m).

No se realizó una adaptación de los datos para la optimización topológica, puesto que al conservar la misma configuración de la referencia [43] los resultados se mantuvieron consistentes. De esta manera se pudo realizar una comparación representativa entre los resultados de la optimización para la validación.

El dominio, sus dimensiones, así como la discretización para el MEF, se presentan en la figura 7-10. Los datos mas relevantes para la construcción del modelo de optimización topológica se resumen en la tabla 7-8 a modo de ficha técnica.

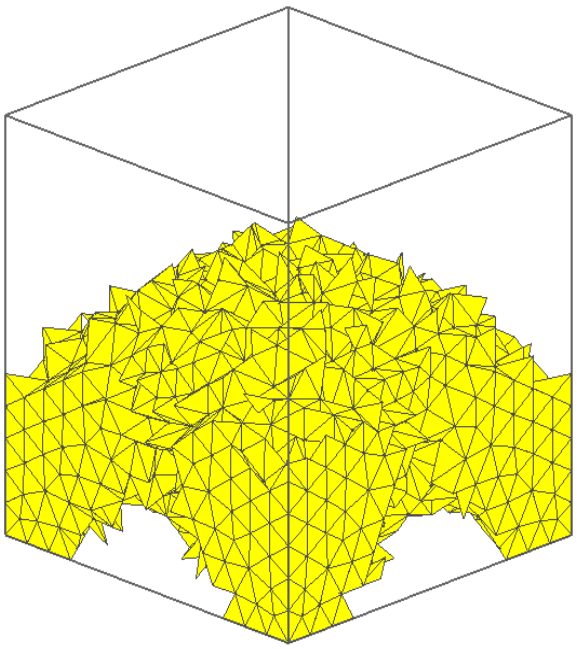
Tabla 7-8.: Variables del modelo de silla de cuatro patas.

Parámetro	**Símbolo**	**Un.**	**Valor**
Variables para la modelación mediante el MEF			
Modulo de elasticidad	E	MPa	1
Relación de Poisson	μ	-	0.3
Número de elementos finitos	-	-	27472
Tamaño promedio del elemento	-	m	0.84
Carga distribuida	F	kN/m	1
Variables para la optimización topológica			
Potencia de penalización	p	-	3
Coeficiente de amortiguación	ξ	-	0.5
Radio de filtrado	r_{min}	m	0.85
Fracción de volumen	f_{vol}	%	10

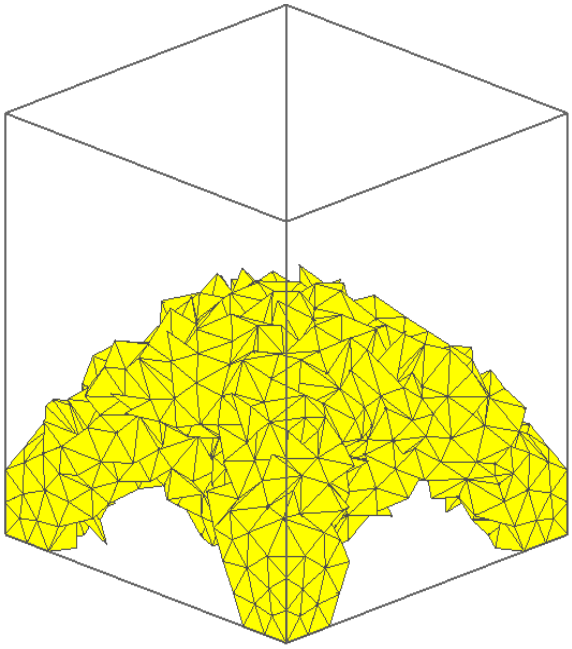
Al comparar las tablas 7-7 y 7-8 se observa que tanto los parámetros de la modelación por el MEF como de la optimización topológica son similares tanto en la referencia [43] como en el modelo propuesto. De esta manera se cumplió con el objetivo de semejanza de la validación a nivel de la construcción del modelo, parámetros y resultados de la optimización.

Proceso de optimización topológica

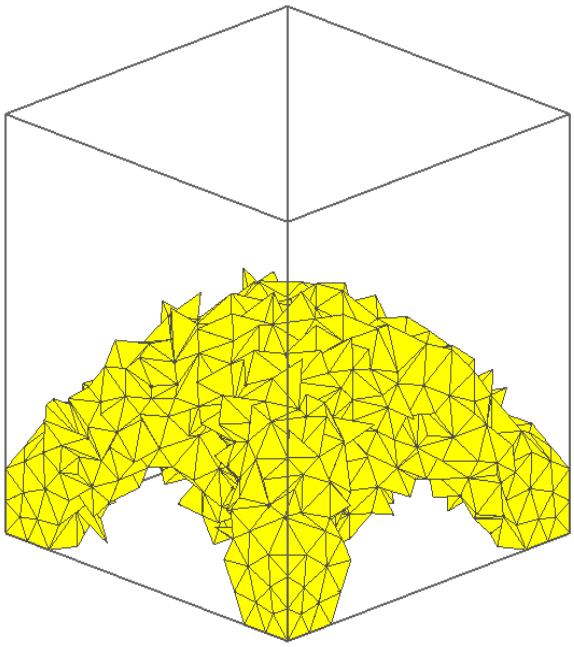
En las siguientes figuras se presenta la evolución del proceso de optimización topológica, donde se han seleccionado las iteraciones de optimización mas relevantes asociadas a su energía de deformación. Se muestra la secuencia de optimización, los valores de la función objetivo para ciertas iteraciones, y la representación gráfica de la distribución de material asociada con la fracción de volumen.



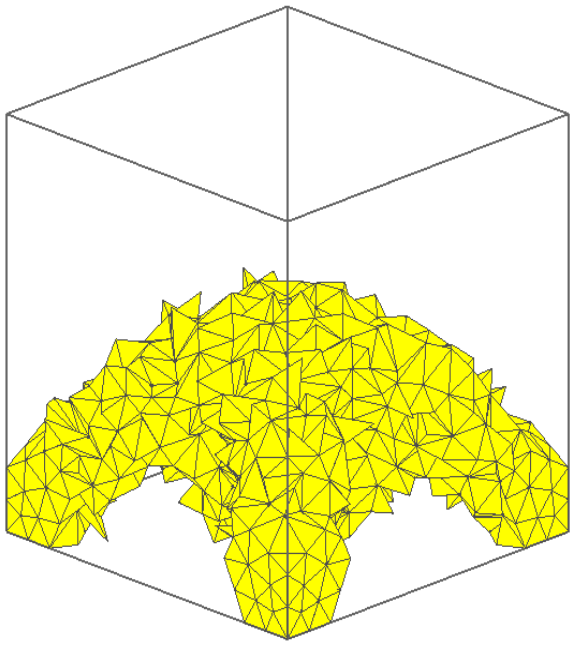
(a) i=4, U=46J



(b) i=6, U=116J



(c) i=20, U=5.55J



(d) i=40, U=5.44J

Figura 7-11.: Proceso de optimización topológica para el problema de la silla de cuatro patas.

Análisis y validación de la optimización

A continuación se presentan algunas observaciones sobre el proceso de optimización topológica para el problema de la silla de cuatro patas presentado en la figura 7-12. Estas resultan de la comparación entre la convergencia y el comportamiento del proceso de optimización, así como del análisis de los resultados desde el punto de vista de la intuición estructural basada en la mecánica estructural.

- La convergencia del proceso de optimización alcanza una condición estable en un tiempo menor a los veinte minutos. A partir de la iteración quince se presentan variaciones muy leves de la función objetivo. En comparación a los ejercicios anteriores el número de iteraciones para alcanzar la convergencia fue mucho menor. Esta acelerada convergencia se logro al no tener que definir ramificaciones estructurales complejas para alcanzar la condición optima, ya que esta se compone de elementos sencillos fácilmente identificables durante el proceso de optimización.

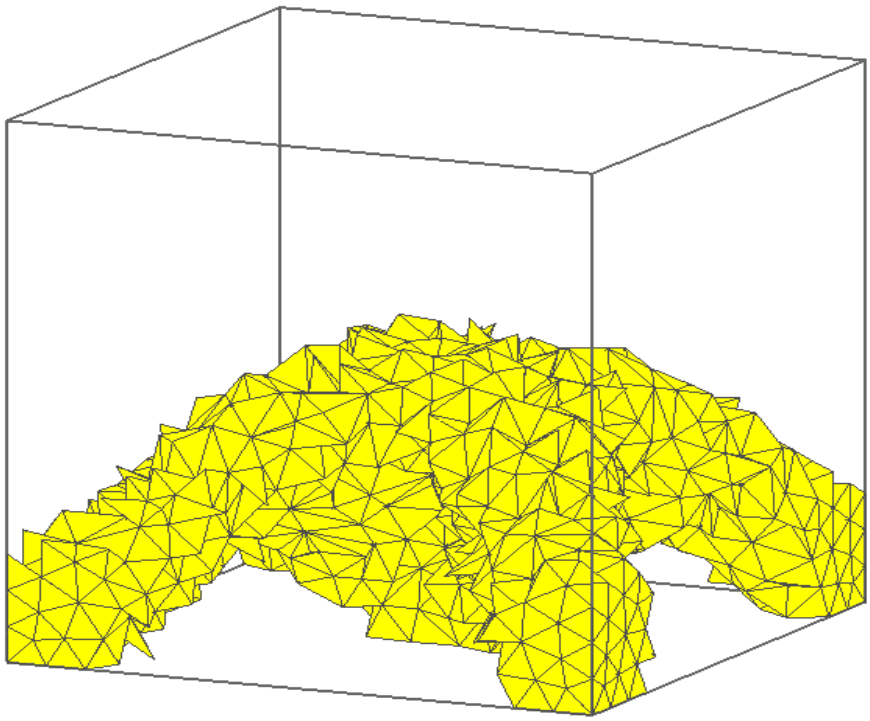
- En la identificación de las cuatro patas de la silla se presentó el mayor cambio de la función objetivo. Debido a que la topología del sistema queda prácticamente defina desde las primeras iteraciones. Posterior a esta etapa no se presentan mayores cambios en la misma.

- No se desarrollan elementos tipo cercha como se podría pensar inicialmente. Esto se debe a las condiciones de apoyo del cubo. Como se tienen empotramientos en las esquinas inferiores el sistema trabaja concentrando los esfuerzos cerca de los apoyos, similar a tener vigas en voladizo.

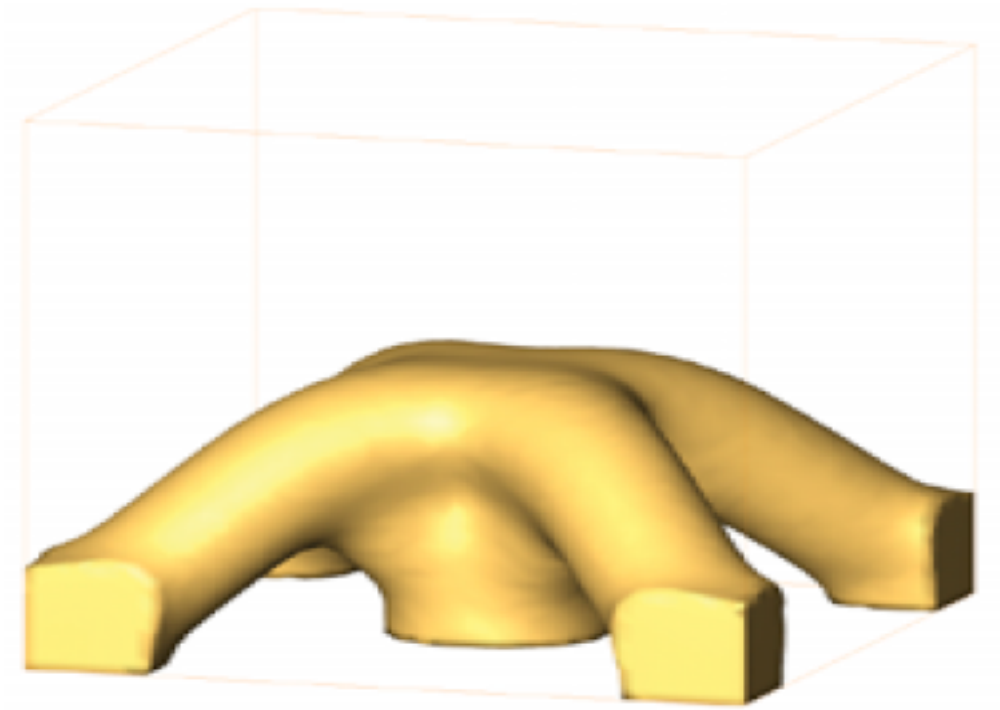
- Por la simetría en las condiciones de apoyo y la aplicación de la carga en el centroide de la cara inferior, se presenta una estructura con doble simetría con respecto a los planos verticales, los cuales pasan por el centroide en forma paralela a los planos coordenados zy y zx. Este comportamiento coincide con la teoría de la mecánica estructural.

- La energía de deformación interna cae rápidamente hasta un valor estable en la iteración veinte, a partir de esta no se vuelven a presentar descensos significativos y comienza una fase oscilatoria decreciente sobre el punto mínimo.

En la figura 7-12 se presenta la comparación entre los resultados obtenidos de aplicar la herramienta computacional desarrollada en este trabajo y el resultado presentado en la referencia [43].



(a)



(b)

Figura 7-12.: Validación de la optimización topológica de la silla de cuatro patas. a.) Optimización topológica utilizando herramienta propuesta. b.) Optimizacion topologica presentada en la referencia de validación [43].

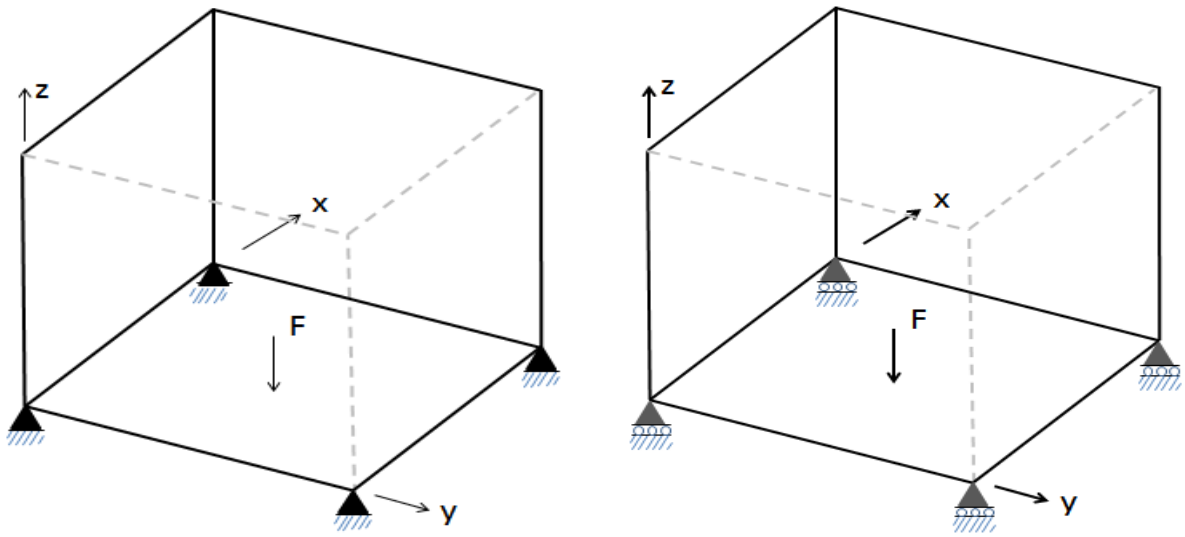
Se evidencia que la topología del resultado coincide con la de la referencia. En forma similar a los casos anteriores, la figura 7-12b) presenta mayor definición puesto que en ella se aplicaron técnicas avanzadas de graficación y suavizado de la densidad, como se describe en la referencia [43].

El alto grado de equivalencia entre los dos casos se debe a las condiciones simétricas del dominio, de los apoyo y de la carga que facilitan la resolución del problema mecánico y permiten que el esquema de optimización identifique clara y rápidamente los elementos que definen la estructura óptima.

De igual manera, como se explicó en la sección 7.2.1 se requirió de un mayor numero de ciclos para lograr la forma optima en comparación a los que se requirieron en la referencia de validación.

Estudio paramétrico: efecto de las condiciones de apoyo

Con base en el modelo de la silla de cuatro patas, validado, se estudió el efecto de las condiciones de apoyo sobre la optimización topológica. Para lo cual se elaboraron dos modelos, el primero corresponde a la silla de cuatro patas con las esquinas de la base totalmente restringidas. En el segundo se liberan solamente las restricciones laterales en los apoyos, restringiéndolos unicamente en la dirección vertical. Los resultados de la optimización topológica para el primer modelo se presentaron en la sección anterior y se enseñan en la figura 7-11. Para el segundo modelo la optimización se presenta en la figura 7-14, mientras que las condiciones físicas de los dos modelos estudiados se muestran en la figura 7-13.

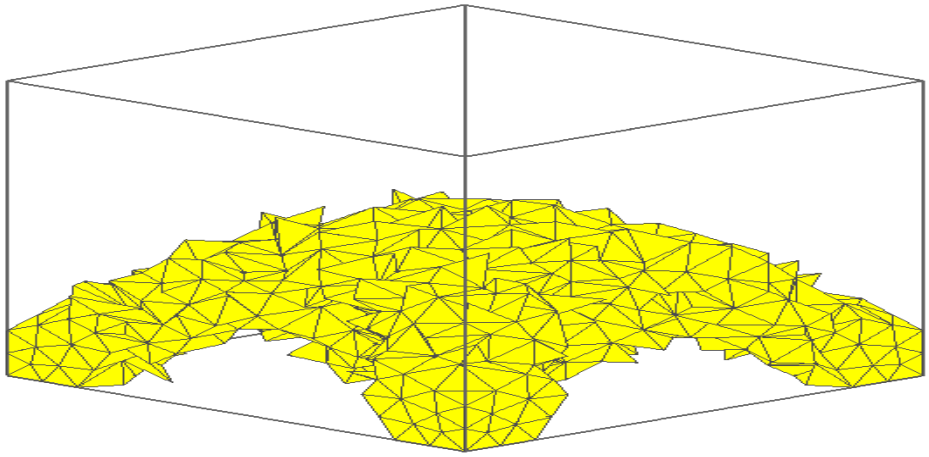


(a) (b)

Figura 7-13.: Efecto de las condiciones de apoyos en la optimización topológica de la silla de cuatro patas. a.) Apoyos totalmente restringidos. b.) Apoyos con restricción en sentido vertical.

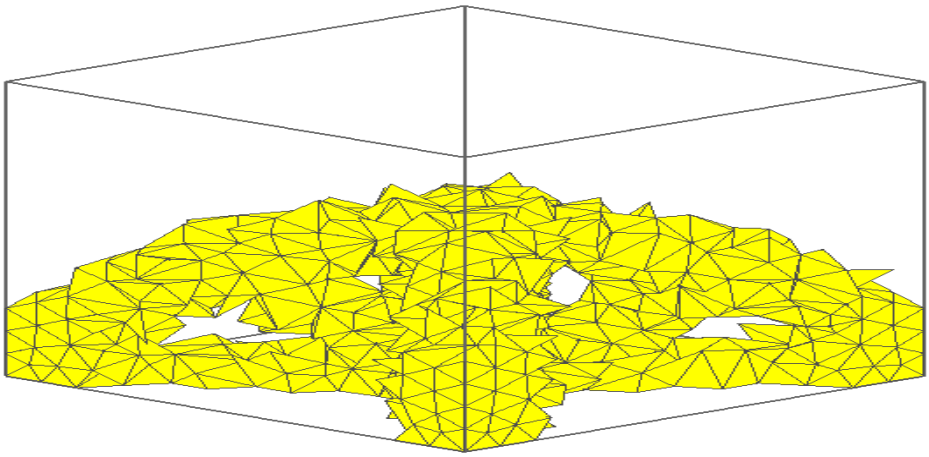
Los datos del modelo numérico para la modelación mediante el MEF y del proceso de optimización topológica se conservaron iguales a los presentados en la tabla 7-8.

La optimización topológica para los dos modelos planteados se presenta en la figura 7-14.



(a)

Figura 7-14.: Efecto de las condiciones de apoyo en la optimización topológica de la silla de cuatro patas. a) Resultado con apoyos empotrados. b) Resultado con apoyos restringidos en la dirección vertical.



(b)

Figura 7-14.: (...continuación.)Efecto de las condiciones de apoyo en la optimización topológica de la silla de cuatro patas. a) Resultado con apoyos empotrados. b) Resultado con apoyos restringidos en la dirección vertical.

Se evidenció que las condiciones de apoyo tienen una gran incidencia en la configuración optima de la silla de cuatro patas. El uso de apoyos totalmente restringidos produjo una concentración de esfuerzos cerca de las esquinas de la base, lo que originó que los elementos en estas zonas tuvieran una energía de deformación alta. De esta manera el esquema de actualización de la densidad los penaliza con densidades cercanas a la unidad. Este comportamiento es similar al de varias vigas en voladizo conectadas en su extremo libre, donde la concentración de material se encuentra cerca de los apoyos.

Al contrario del comportamiento con apoyos restringidos, en el caso con restricción únicamente en sentido vertical los elementos con mayores niveles de energía de deformación se encontraron hacia el centro inferior del cubo. Como las reacciones en los vértices de la base se distribuyen a los elementos adyacentes a estas, se presentó una concentración de esfuerzos también en estas zonas. La configuración topológica se realizó conectando los elementos de mayor energía en el centro del cubo con los que se encuentran cerca a los apoyos. Este comportamiento es similar al de una viga simplemente apoyada que tiende a formar elementos tipo cercha.

Si a la formulación del problema de la optimización topológica presentado en 5-1 se le agregara una restricción de esfuerzos, limitando el esfuerzo máximo en la configuración topológica óptima, los resultados presentados en 7-14 tenderían a parecerse. Cuando se tiene el sistema con apoyos totalmente restringidos se llega a una etapa en la cual no se pueden elevar los niveles de esfuerzos en las zonas cercanas a los apoyos ni su energía de deformación. Situación que provoca una redistribución de material en forma de entramado tipo cercha para

conservar la rigidez y fracción de volumen .

7.3. Casos de aplicación

Validada la herramienta computacional, mediante los tres ejercicios anteriores (secciones 7.2.3., 7.2.3. y 7.2.3.), se utiliza en esta sección para desarrollar la optimización topológica en 3D de tres casos de aplicación. Se escogieron de tal manera que fueran de uso frecuente en el ámbito de la ingeniería estructural.

De igual manera que en los casos de validación los recursos de hardware limitaron el grado de detalle que se pudo alcanzar con la herramienta computacional. El número máximo de elementos finitos se limitó a 30000. Si bien se hubiera podido trabajar con cerca de 40000 elementos sin superar la capacidad computacional esto habría ocasionado tiempos de cálculo superiores a un día y dificultades en el manejo gráfico de los resultados.

La optimización topológica en 3D se presenta por medio de una secuencia de imágenes que muestran la evolución de la estructura inicial a su configuración topológica optima final. Junto con la representación gráfica se presenta un registro de la energía de deformación del sistema.

En cada caso de aplicación se realizó un estudio paramétrico. Estudiando la influencia en la optimización topológica de la potencia de penalización, el refinamiento de la malla o la profundidad en la optimización de estructuras planares como losas o parrillas.

Para la discretización del dominio en cada caso de aplicación se utilizó una malla tridimensional no estructurada de elementos tipo tetraedro con un tamaño aproximado del 3 % de la máxima dimensión. Las unidades utilizadas para construir el modelo numérico son consistentes y corresponden a las del sistema internacional (kN,m).

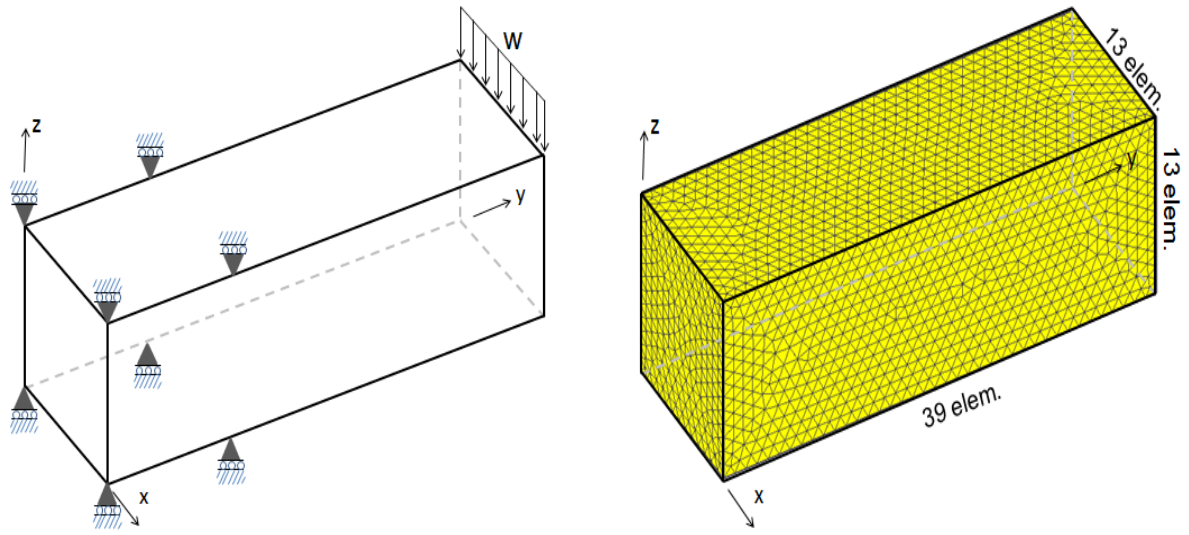
La fracción de volumen y el radio mínimo se escogieron con el fin de mejorar el grado de detalle gráfico de la estructura óptima. El tener valores bajos de estos parámetros permite definir una escala de definición equivalente al tamaño promedio de los elementos de la malla.

7.3.1. Ménsula

Las ménsulas son elementos comunes en la ingeniería estructural. Son voladizos cortos solicitados con una carga puntual o distribuida en su cara superior. Se utilizan con el objetivo de proporcionar una superficie plana horizontal de apoyo. El análisis de este tipo de elementos no se puede realizar por medio de la teoría clásica de vigas, generalmente se utilizan el método de la biela y el tirante o el MEF. Con la optimización topológica de la ménsula presentada en esta sección se pueden corroborar los resultados analíticos de estos métodos.

Descripción del modelo numérico

La descripción del modelo físico, la discretización, los parámetros para el modelamiento mediante el MEF y los utilizados para desarrollar la optimización topológica se presentan en la figura 7-15 y tabla 7-9.



(a) (b)

Figura 7-15.: Modelo de ménsula. a.) Esquema del modelo numérico. b.) Discretización con elemento tetraédricos.

Las dimensiones de la ménsula tridimensional son 1.5x0.5x0.5(LxBxH), en metros. Por solicitación se dispuso de una carga linealmente distribuida de 10 kN/m, actuando en la arista superior derecha de la ménsula, como se muestra en la figura 7-15.

Los datos más relevantes para la construcción del modelo de optimización topológica de la ménsula se resumen en la tabla 7-9 a modo de ficha técnica.

Tabla 7-9.: Variables del modelo de la ménsula.

Parámetro	**Símbolo**	**Un.**	**Valor**
Variables para la modelación mediante el MEF			
Modulo de elasticidad	E	MPa	20000000
Relación de Poisson	μ	-	0.3
Número de elementos finitos	-	-	23041
Tamaño promedio del elemento	-	m	0.05
Carga distribuida	w	kN/m	10
Variables para la optimización topológica			
Potencia de penalización	p	-	3
Coeficiente de amortiguación	ξ	-	0.5
Radio de filtrado	r_{min}	m	0.065
Fracción de volumen	f_{vol}	%	5

La configuración de apoyos se escogió de tal manera que simularan las condiciones reales cuando el elemento hace parte de una columna. La condición de carga obedece a la forma mas común de solicitar este tipo de estructuras.

Resultado de la optimización topológica

En la siguiente figura se aprecia el resultado de la optimización topológica para el problema de la ménsula planteado anteriormente. El proceso de optimización paso a paso, como se dio en los ejercicios de validación, no se muestra ya que este presenta el mismo comportamiento mostrado en los casos de validación. Los valores de la iteración en la cual se cumplió el criterio de convergencia y su correspondiente nivel de energía de deformación acompañan la figura.

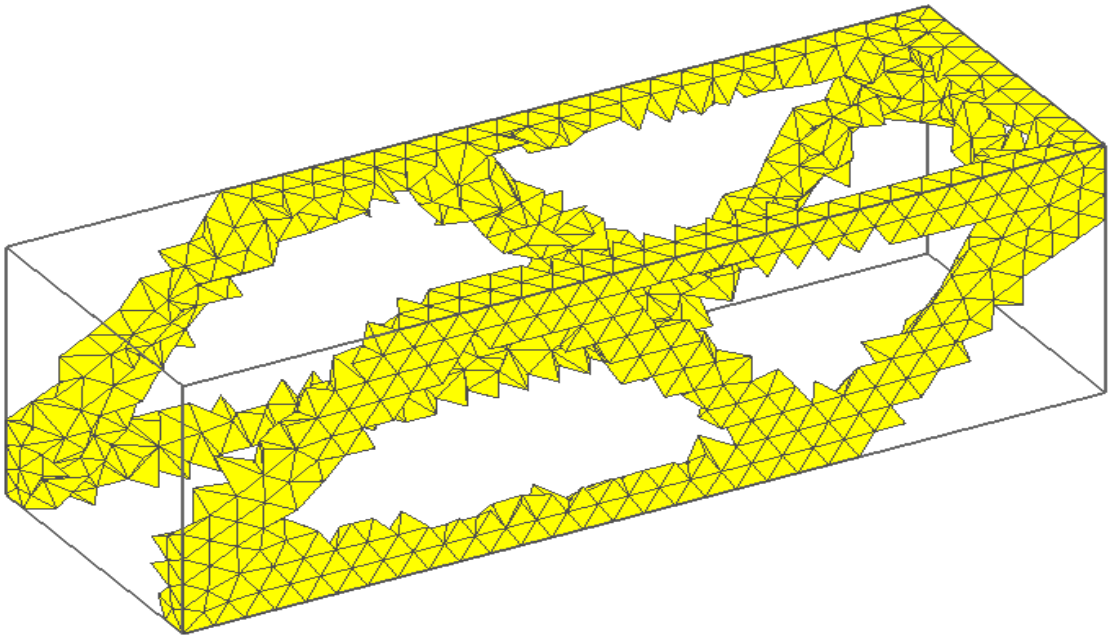


Figura 7-16.: Resultado de la optimización topológica de la ménsula. i= 44, c=5.96 J.

Análisis de la optimización

Las conclusiones más relevantes del proceso de optimización topológica para el problema de la ménsula mostrado en la figura 7-16 se describen a continuación:

- El resultado esta acorde con lo esperado según la teoría de estructuras. Por ejemplo se obtienen resultados equivalentes al aplicar el método de la biela y el tirante. Se establecen cerchas en las caras de la ménsula, con elementos a compresión y a tension, que trasladan la carga hasta los apoyos. Los nodos de la cercha están determinados por los puntos de apoyo y de carga y por la longitud del voladizo.

- Se presenta una convergencia rápida del proceso de optimizacion. En los primeros treinta ciclos ya se encuentra definida la disposición topológica optima. En los ciclos posteriores la funcion objetivo tan solo cambio de valor en la tercera cifra decimal, pudiéndose dar por terminado el proceso sin afectar la calidad de los resultados.

- De igual manera a como se describió en secciones anteriores la función objetivo pasa por tres etapas. En la primera presenta un comportamiento decreciente acelerado, en la segunda decrece lentamente y posteriormente entra en una etapa oscilatoria decreciente sobre el punto optimo. Este comportamiento se mantuvo para todos los ejercicios descritos en este trabajo.

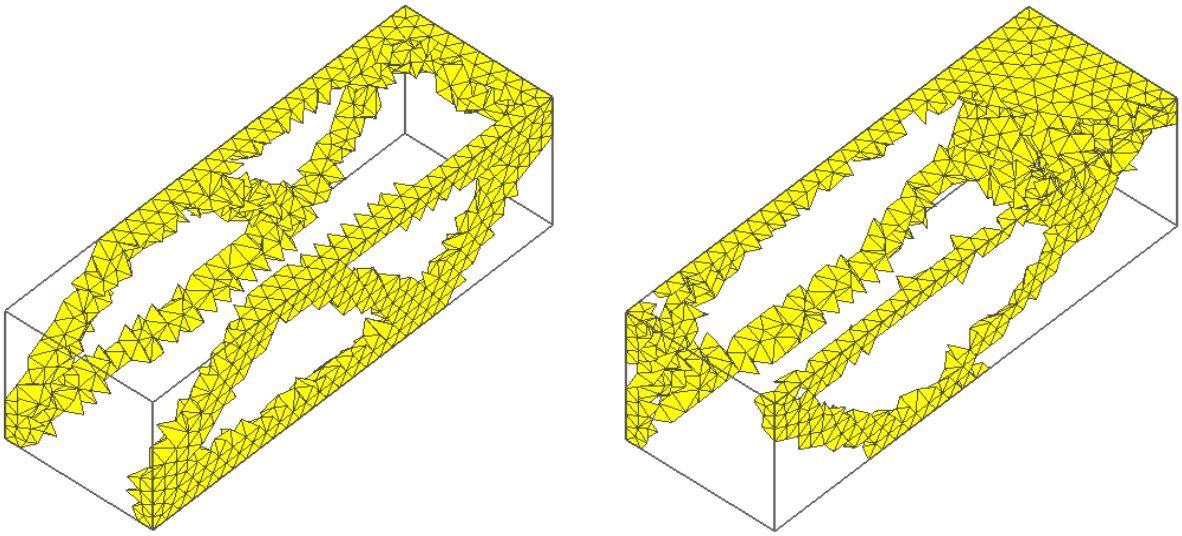
- Existe un elemento en la arista superior derecha, donde se aplican las solicitaciones, que transfiere las cargas a las caras laterales de la ménsula. Con esta transferencia el problema se puede simplificar a dos dimensiones ya que las estructuras optimas que

se forman no salen del plano de la cara. Este sesgo hacia las caras de la ménsula se presenta por la disposición de los apoyos, que origina zonas con un alto nivel de energía cerca a ellos, orientando la conectividad estructural sobre las caras laterales del solido.

Estudio paramétrico: efecto de la potencia de penalización

En esta sección se estudia la influencia en el proceso de optimización topológica al variar el coeficiente de penalización de la densidad (p. Se utiliza el modelo de la ménsula descrito anteriormente modificando el valor del coeficiente p. Inicialmente se trabajó con un valor igual a tres, según se describió en la tabla 7-9, y se asume un nuevo valor de cuatro para realizar el estudio de la parametrización.

La figura 7-17 muestra el resultado de la optimización topológica para los dos valores del coeficiente p.



(a) i=44,c=5.96 J (b) i=44,c=172.6 J

Figura 7-17.: Efecto de potencia de penalización en la optimización topológica de la ménsula. a.) Potencia p=3. b.) Potencia p=4.

Se observa una diferencia sustancial entre los dos resultados gráficos. El aumentar la potencia de penalización puede provocar que el sistema físico quede mal condicionado, puesto que se puede interrumpir la continuidad entre apoyos, originando un movimiento de cuerpo rígido. Numéricamente se pierde la exactitud y confianza de los datos. Si se llegara a presentar este incoveniente el problema tratado debe ser planteado nuevamente.

El aumentar la potencia de penalización, castigando con mayor severidad las densidades intermedias, no provoca necesariamente el aceleramiento de la convergencia del proceso

de optimizacion, como se podría esperar. Por el contrario, puede llevar a que el proceso de optimización entre en un conflicto interno al no poder encontrar un diseño admisible cumpliendo a su vez con todas las restricciones del problema.

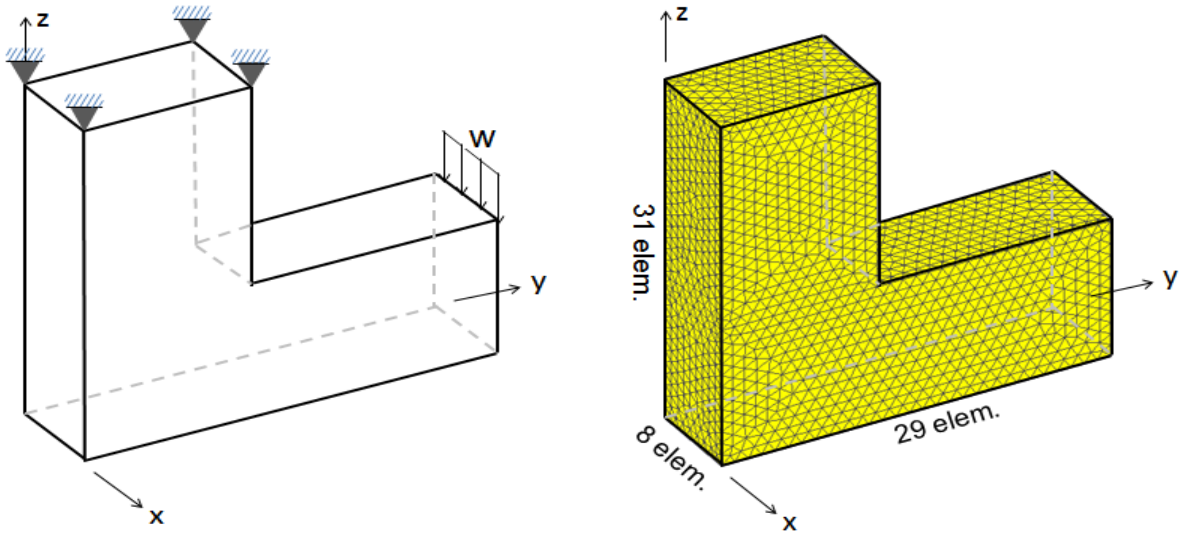
La función objetivo presentó valores menores para el caso de p igual a tres. Esto es consistente con la formulación de la energía de deformación del sistema que se dio en 5-5 y que corresponde a la función objetivo. Valores grandes de p penalizan las densidades intermedias más radicalmente, haciendo que se presenten zonas con una alta concentración de esfuerzos y deformaciones dada la baja cantidad de material que se logra.

7.3.2. Ménsula invertida o viga tipo L

Este tipo de estructuras son una variación a la presentación de ménsula de la sección 7.3.1. En este caso la ménsula se suspende desde un plano horizontal situado en un nivel superior al que se encuentra la solicitación de carga. Se suele llamar viga tipo "L"por la forma de la ménsula invertida. Al igual que en el caso de ménsula anterior su analisis se realiza por medio de métodos como la biela y el tirante o el MEF.

Descripción del modelo numérico

La descripción del modelo físico, la discretización, los parámetros para el modelamiento mediante el MEF y los utilizados para desarrollar la optimización topológica se presentan en la figura 7-19 y tabla 7-10.



(a) (b)

Figura 7-18.: Modelo de ménsula invertida. a.) Esquema del modelo numérico. b.) Discretización con elemento tetraédricos.

La ménsula invertida se limitó a un dominio en forma de "L"para condicionar la búsqueda del proceso de optimización topológica. La altura de la ménsula es de 20m, su ancho menor de 5m, su ancho mayor de 20m y tiene una profundidad de 5m. Por solicitación se dispuso de una carga linealmente distribuida de 10 kN/m, actuando en la arista inferior derecha, como se muestra en la figura 7-19.

Los datos más relevantes para la construcción del modelo de optimización topológica de la ménsula invertida se resumen en la tabla 7-10 a modo de ficha técnica.

Tabla 7-10.: Variables del modelo de ménsula invertida.

Parámetro	**Símbolo**	**Un.**	**Valor**
Variables para la modelación mediante el MEF			
Modulo de elasticidad	E	MPa	20000000
Relación de Poisson	μ	-	0.3
Número de elementos finitos	-	-	24355
Tamaño promedio del elemento	-	m	0.57
Carga distribuida	w	kN/m	1000
Variables para la optimización topológica			
Potencia de penalización	p	-	3
Coeficiente de amortiguación	ξ	-	0.5
Radio de filtrado	r_{min}	m	0.6
Fracción de volumen	f_{vol}	%	6.5

Para tener un nivel de detalle alto se determinó una fracción de volumen (f_{vol}) baja. De esta manera las ramificaciones estructurales quedan definidas con una escala equivalente al tamaño promedio de los elementos finitos del mallado del MEF.

Resultado de la optimización topológica

En la siguiente figura se aprecia el resultado de la optimización topológica para el problema de la ménsula invertida planteado anteriormente. El proceso de optimización paso a paso, como se dio en los ejercicios de validación, no se muestra ya que este presenta el mismo comportamiento mostrado en los casos de validación. Los valores de la iteración en la cual se cumplió el criterio de convergencia y su correspondiente nivel de energía de deformación acompañan la figura.

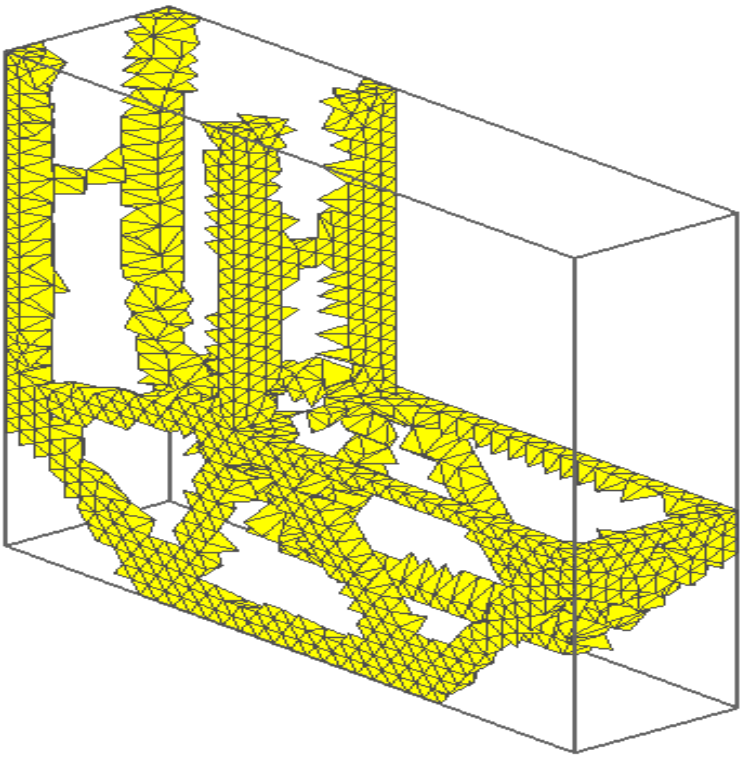


Figura 7-19.: Resultado de la optimización topológica de la ménsula invertida. i= 58, c=2237 J.

Análisis de la optimización

Las conclusiones mas relevantes del proceso de optimización topológica para el problema de la ménsula mostrado en la figura 7-20 se describen a continuación:

- Se presenta una convergencia rápida del proceso de optimización. La función objetivo deja de decrecer aceleradamente en la iteración 35. A partir de esta iteración la función comienza un decrecimiento lento y sigue así hasta la iteración 58, a partir de la cual el cambio es muy leve.

- En los primeros seis ciclos la función objetivo aumentan de valor. Esto se debe al hecho de que las densidades se inicializan con la fracción de volumen y al proceso de optimización topológica le toma unos cuantos ciclos distribuir heterogeneamente la densidad. Después de esta distribución se comienza a identificar las zonas con altos y bajos niveles de energía de deformación y la función objetivo comienza a decrecer.

- Como se ha observado en otros casos presentados en esta tesis dada la simetría en cargas y apoyos el esquema de optimización topológica en 3D muestra que el problema se puede reducir a 2D. La configuración óptima esta compuesta de dos estructuras bidimensionales idénticas puestas en las caras laterales de la ménsula conectadas por un elemento de transferencia de carga continuo.

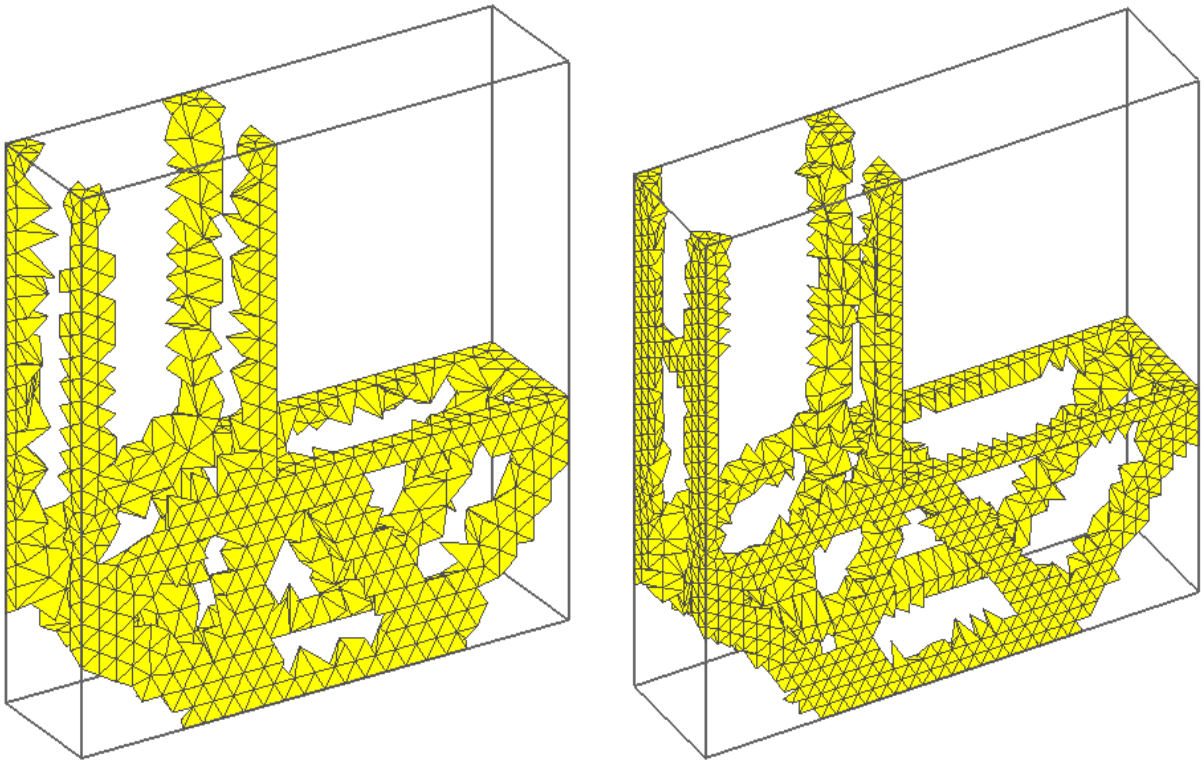
- Los elementos con más energía interna de deformación se encuentran en el contorno de la ménsula. Por esta razón son los primeros en ser identificados por el esquema de actualización de la densidad.

  La definición de las ramificaciones estructurales internas toma muchos ciclos del proceso de optimización, alrededor de 40, ya que se encuentran en zonas donde la energía de deformación no es tan heterogénea, teniéndose que verificar la sensibilidad de muchos elementos para definir una ramificación.

Estudio paramétrico: Efecto del refinamiento de la malla

En esta sección se estudia la influencia en el proceso de optimización topológica al disminuir el refinamiento de la malla. Se utiliza el modelo de la ménsula descrito anteriormente modificando el número de elementos del mallado del MEF. Inicialmente se trabajo con un valor de 24355 elementos, según se describió en la tabla 7-10, y se asume un nuevo valor de 9398 elementos para realizar el estudio paramétrico.

La figura 7-20 muestra el resultado de la optimización topológica para los dos mallados.



(a) (b)

Figura 7-20.: Efecto del refinamiento del mallado en la optimización topológica de la ménsula invertida. a) Resultado con una malla de 9398 elementos. b) Resultado con una malla de 24355 elementos.

No se evidencia una dependencia de la topología con el refinamiento de la malla. Lo que muestra el buen trabajo de la técnica de filtrado de la sensibilidad, la cual tiene como uno de sus objetivos evitar el problema de esta dependencia. Sin embargo, en mallados con un número muy elevado de elementos y con una escala de filtrado muy pequeña los problemas de la dependencia con el refinamiento de la malla pueden presentarse en una escala global.

Como se puede apreciar en la figura 7-20 (a) el uso de menos elementos disminuye el grado de detalle de la estructura óptima. Algunas ramificaciones quedan sin definir claramente o se llega a diseños sin muchos elementos estructurales.

El mallado con pocos elementos puede producir sistemas físicos mal condicionados durante el proceso de optimización. Esto sucede por que el esquema de actualización de la densidad crea diseños rompiendo la continuidad hacia uno de los apoyos. El esquema genera estos diseño forzado por la carencia de elementos en el dominio de búsqueda.

7.3.3. Estructuras tipo losa

Las losas son estructuras contenidas en un plano horizontal. Por esta razón poseen una dimension mucho mas pequeña que las otras dos. Su análisis estructural se realiza por la teoría clásica de placas o por el MEF. Generalmente se conforman por elementos orientados en las dos direcciones cartesianas del plano horizontal.

Descripción del modelo numérico

La descripción del modelo físico, la discretización, los parámetros para el modelamiento mediante el MEF y los utilizados para desarrollar la optimización topológica se presentan en la figura 7-21 y tabla 7-11.

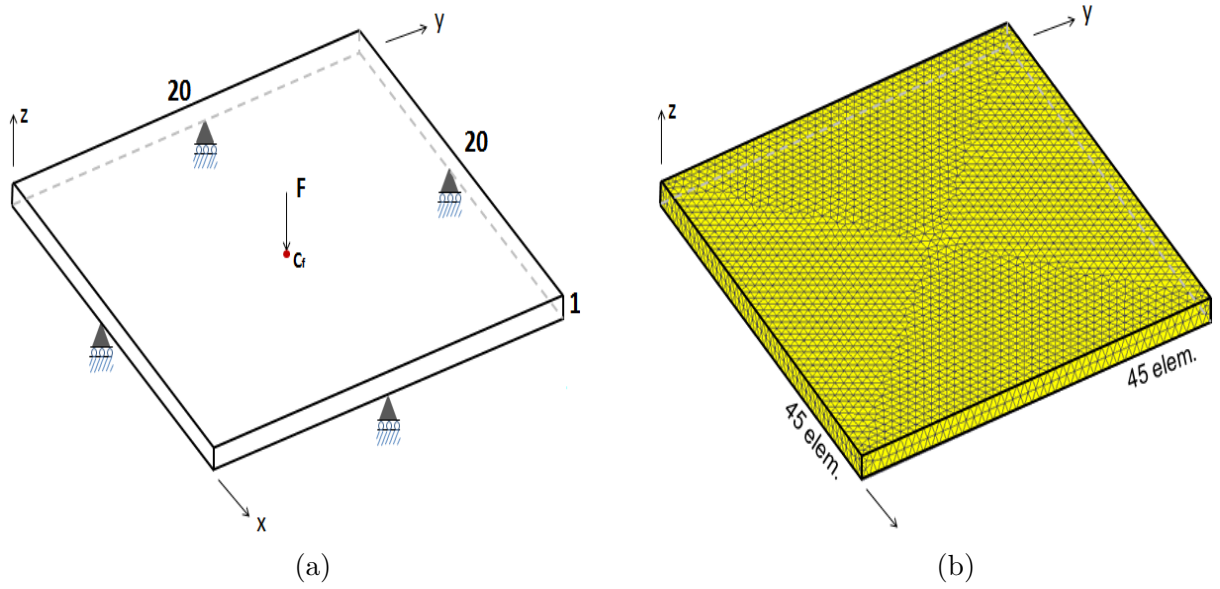


Figura 7-21.: Modelos de estructuras tipo parrilla. a) Modelo numérico. b) Discretización con elementos tetraédricos.

Las dimensiones de la losa son 20x20x1(LxBxH), en metros. Por solicitación se dispuso de una carga unitaria concentrada de 1000 kN, actuando en el centroide de la cara superior de la losa, como se muestra en la figura 7-21.

Los datos más relevantes para la construcción del modelo de optimización topológica de la losa se resumen en la tabla 7-11 a modo de ficha técnica.

Tabla 7-11.: Variables del modelo de la losa.

Parámetro	**Símbolo**	**Un.**	**Valor**
Variables para la modelación mediante el MEF			
Modulo de elasticidad	E	MPa	20000000
Relación de Poisson	μ	-	0.3
Número de elementos finitos	-	-	19395
Tamaño promedio del elemento	-	m	0.42
Carga puntual	F	kN	1000
Variables para la optimización topológica			
Potencia de penalización	p	-	3
Coeficiente de amortiguación	ξ	-	0.5
Radio de filtrado	r_{min}	m	0.45
Fracción de volumen	f_{vol}	%	10

Para tener un nivel de detalle alto se determinó una fracción de volumen (f_{vol}) baja. De esta manera las ramificaciones estructurales quedan definidas con una escala equivalente al tamaño promedio de los elementos finitos del mallado del MEF.

Resultado de la optimización topológica

En la siguiente figura se aprecia el resultado de la optimización topológica para el problema de la losa planteado anteriormente. El proceso de optimización paso a paso, como se dio en los ejercicios de validación, no se muestra ya que este presenta el mismo comportamiento mostrado en los casos de validación. Los valores de la iteración en la cual se cumplió el criterio de convergencia y su correspondiente nivel de energía de deformación acompañan la figura.

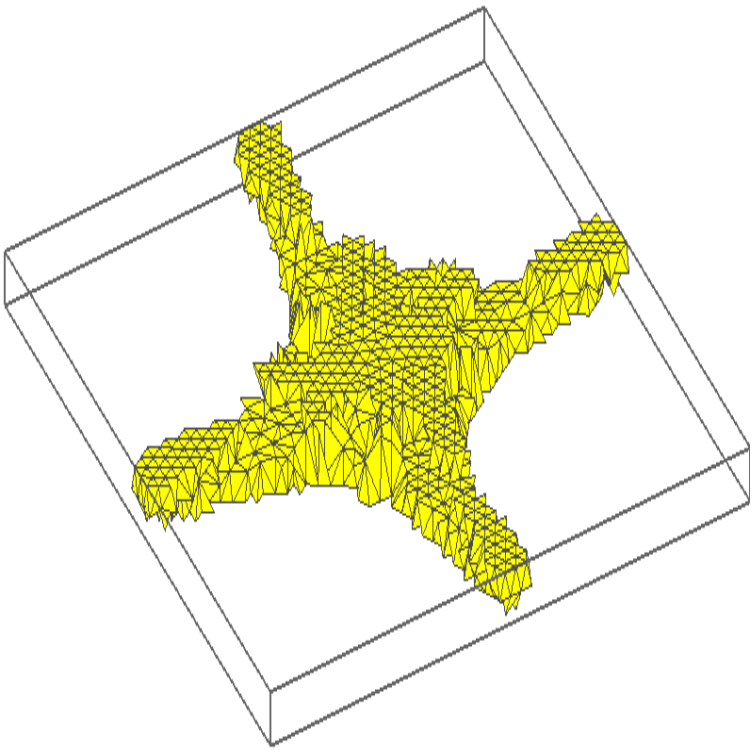


Figura 7-22.: Resultado de la optimización topológica de la losa. i= 110, c=9.89 J.

En la imagen 7-22 se presenta una leve distorsión visual de los elementos finitos producto de la escala de presentación de la imagen.

Análisis de la optimización

Las conclusiones más relevantes del proceso de optimización topológica para el problema de la losa mostrado en la figura 7-22 se describen a continuación:

- Puesto que las estructuras tipo losa no pueden equilibrar las acciones externas aumentando la altura de los elementos para generar una mayor inercia, se ven obligadas a distribuir material en planta para obtener una mayor rigidez y lograr el equilibrio. Este fenómeno se observó en la figura 7-23 donde la concentración de esfuerzos en el centro de la luz se ve compensada con el aumento en la cantidad de material en esta zona.

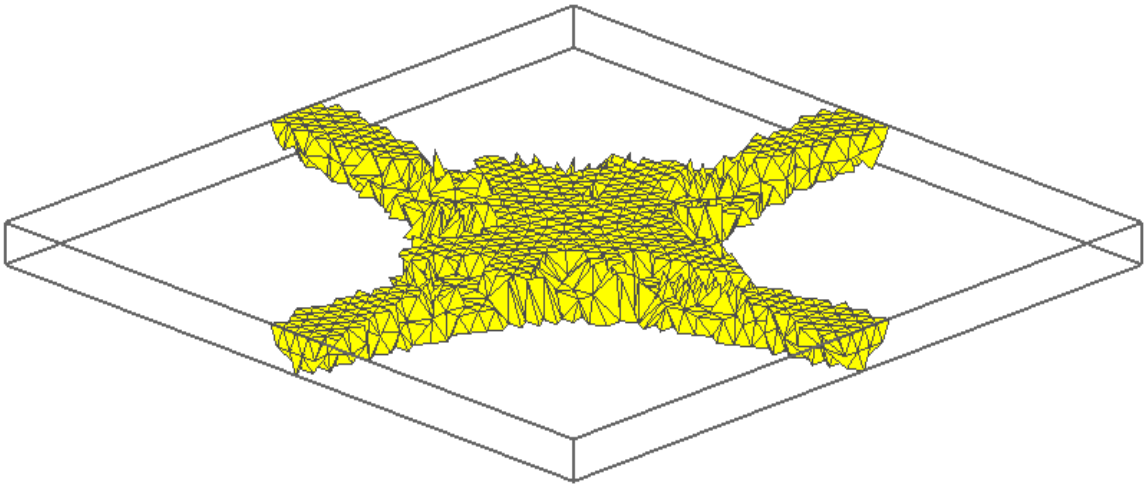
- Se presentó una convergencia rápida, en menos de 30 ciclos la función objetivo ya presentaba variaciones muy pequeñas entre ciclos. Debido a que la estructura óptima no implicaba la definición de ramificaciones estructurales complejas. Las zonas con mayores niveles de energía se pudieron identificar claramente por el proceso de optimización ya que tenían sensibilidades muy altas. Estas zonas se encuentran adyacentes al centro de la luz y a los puntos de apoyo. En el ciclo cuarenta la función objetivo se estabilizó, entrando en su etapa de decrecimiento lento final.

- Al trabajar con fracciones de volumen más bajas se podría llegar a sistemas físicos mal condicionados. Por la forma óptima de la losa, como se observa en 7-23, al buscar diseños mas óptimos se puede cortar la continuidad de alguno de los cuatro elementos que llevan la carga a los apoyos, quitándole demasiada rigidez al sistema.

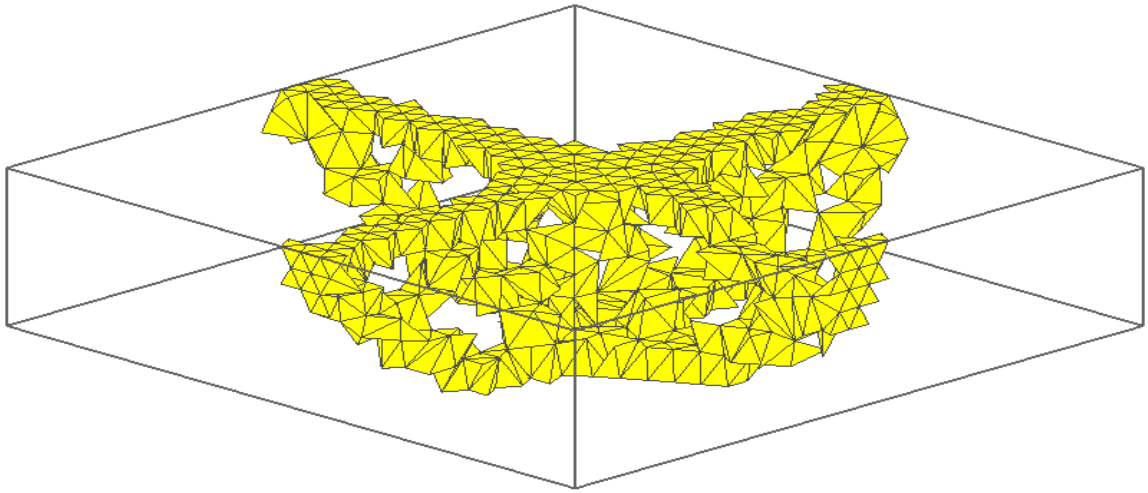
Estudio paramétrico: efecto de la profundidad en estructuras planares

Los modelos que se dan en esta sección muestran la incidencia en el resultado de la optimización topológica al variar las condiciones de profundidad de una estructura tipo losa, contenida inicialmente en una plano xy.

Como lo muestra la figura 7-23 se estudiaron tres modelos para estudiar la incidencia de la altura. Cada uno de los modelos posee una altura de uno, cinco y diez metros, respectivamente. El aumento en la altura busca representar el cambio de la configuración topológica óptima en función de este parámetro, pudiendo determinar el grado de influencia de la altura.

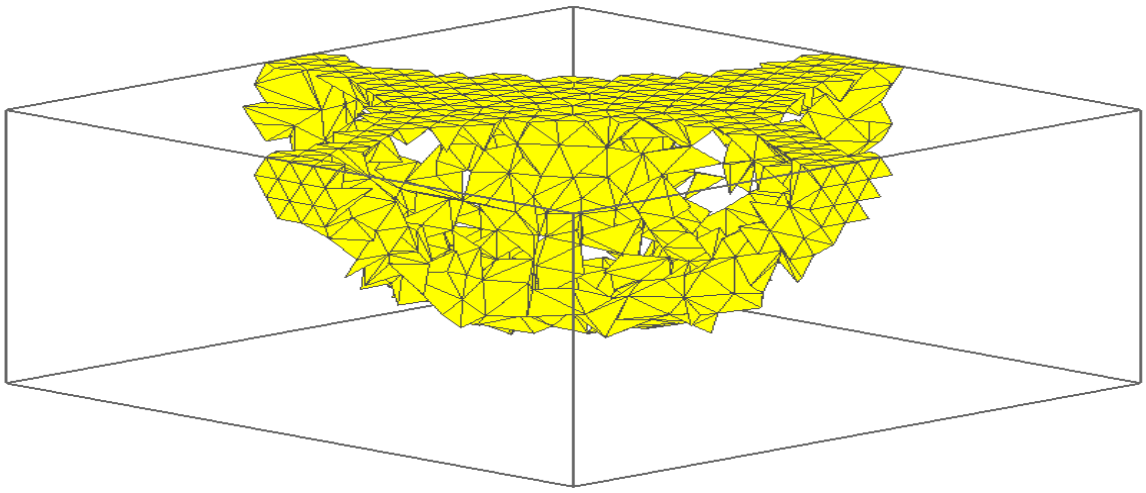


(a)



(b)

Figura 7-23.: Efecto del espesor de losas en la optimización topológica. a) Espesor de 1m. b) Espesor de 5m. c) Espesor de 10m.



(c)

Figura 7-23.: (...continuación)Efecto del espesor de losas en la optimización topológica. a) Espesor de 1m. b) Espesor de 5m. c) Espesor de 10m.

Aunque en los tres modelos se maneje una misma fracción de volumen, lo que conlleva a que tengan la misma cantidad de material, el modelo con la altura mas grande permite una mejor distribución de los esfuerzos en comparación a los modelos con alturas menores.

Como la estructura con menor espesor presenta una mayor intensidad de esfuerzos, al implementar este diseño este diseño se debe verificar que no se sobrepase el esfuerzo admisible del material. Si se agregara esta restricción de esfuerzos directamente a la formulación de la optimización topológica, no se encontraría una solución para los modelos de losa con espesores bajos. Puesto que el esquema al tratar de agregar más material para distribuir los esfuerzos, y cumplir con la restricción asociada a estos, incumpliría la restricción de la fracción de volumen.

Como los niveles de esfuerzos y los desplazamientos son mayores en las losas menos profundas, estas presentaron mayores valores de energía de deformación interna.

7.4. Aplicaciones especiales en la ingeniería estructural

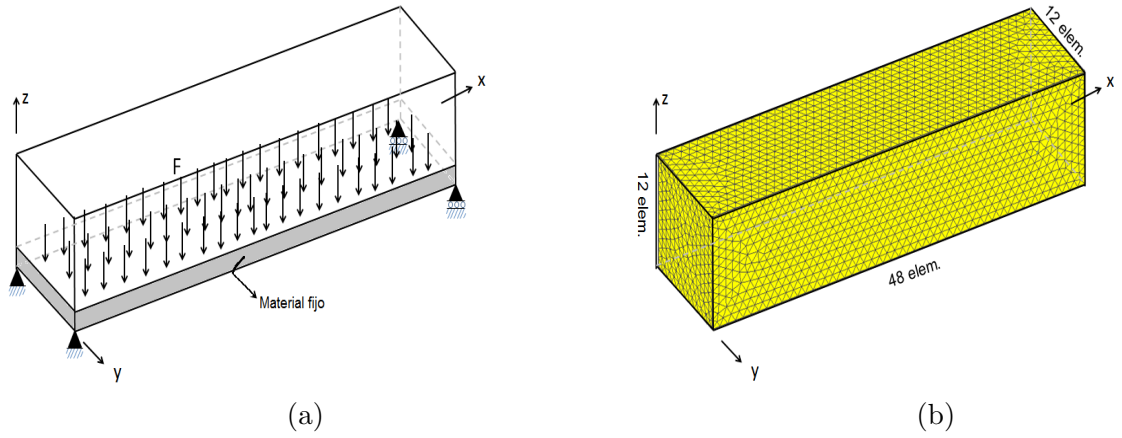
Los casos que se tratan en esta sección muestran los resultados de aplicar la herramienta de optimización topológica en 3D en un puente descolgado y en un dado de fundación. Estas han sido estructuras típicas en la ingeniería estructural, se pueden encontrar en multitud de construcciones. Los resultados de la optimización topológica concuerdan con los que se obtendrían al analizar estas estructuras con otros métodos reconocidos en la ingeniería estructural.

Con el resultado del diseño utilizando la optimización topológica se pudo comprobar la veracidad y eficiencia de los métodos clásicos de diseño. Estos aunque se basan en principios muy diferentes a los establecidos para la optimización topológica conducen a diseño óptimos similares, estando acordes con la configuración topológica óptima que se encontró.

7.4.1. Puente tipo cercha

La particularidad de este tipo de puentes son los entramados de elementos estructurales en las caras laterales. Estos se encuentran unidos al tablero y al sistema de riostras en la parte superior del puente. Los entramados se pueden disponer de un sin número de formas, algunas de ellas reciben el nombre de: cercha Allan, puente Bailey, armadura de Baltimore, Braguero Bollman, armadura Marrón, cercha de Pratt, cerha Warren y cercha Vierendeel. Este último tipo de puente se estudia en esta sección.

La descripción del modelo físico, la discretización, los parámetros para el modelamiento mediante el MEF y los utilizados para desarrollar la optimización topológica se presentan en la figura 7-24 y tabla 7-12.



(a) (b)

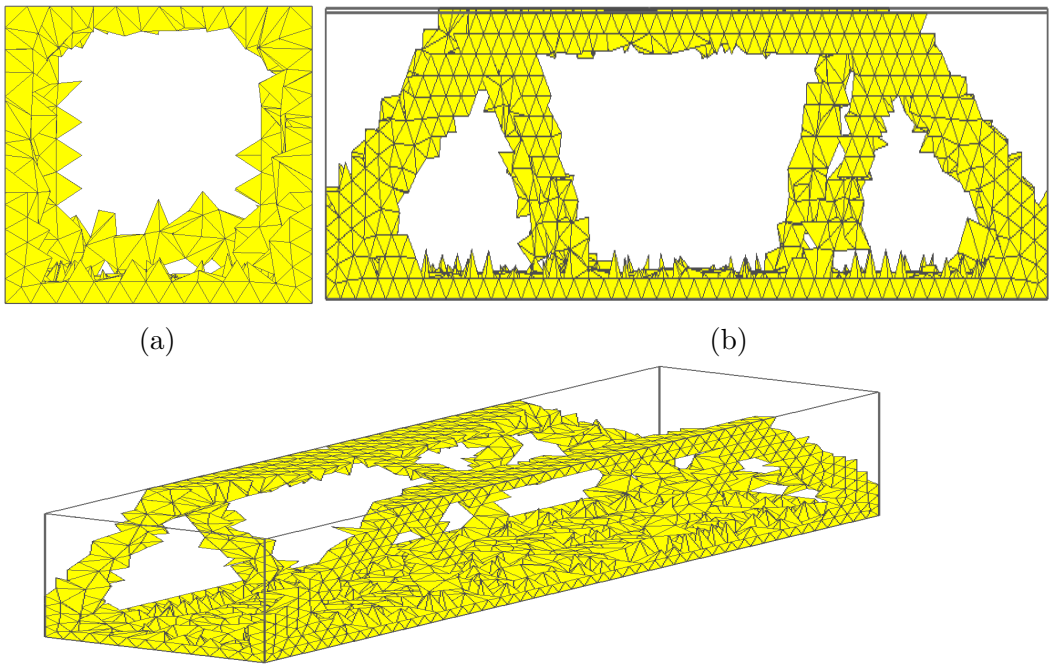
Figura 7-24.: Modelo de estructuras puente descolgado. a) Modelo físico. b) Discretización con elementos tetraédricos.

Las dimensiones del puente son 40x10x10(LxBxH), en metros. Por solicitación se dispuso de una carga distribuida de superficie de 10 kN/m2, como se muestra en la figura 7-24. Los datos más relevantes para la construcción del modelo de optimización topológica se resumen en la tabla 7-12 a modo de ficha técnica.

Tabla 7-12.: Variables del modelo de puente descolgado.

Parámetro	**Símbolo**	**Un.**	**Valor**
Variables para la modelación mediante el MEF			
Modulo de elasticidad	E	MPa	200000000
Relación de Poisson	μ	-	0.3
Número de elementos finitos	-	-	28250
Tamaño promedio del elemento	-	m	0.85
Carga distribuida	F	kN/m	10
Variables para la optimización topológica			
Potencia de penalización	p	-	3
Coeficiente de amortiguación	ξ	-	0.5
Radio de filtrado	r_{min}	m	0.87
Fracción de volumen	f_{vol}	%	9.5

El resultado de la optimización topológica se muestra en la figura 7-25. Se presentan dos imágenes de proyección y una imagen 3D para facilitar la visualización del resultado. Junto con la representación gráfica se da el nivel de energía de deformación interna que se alcanzó, y la correspondiente iteración en la que se finalizó el proceso de optimización.



(a) (b)

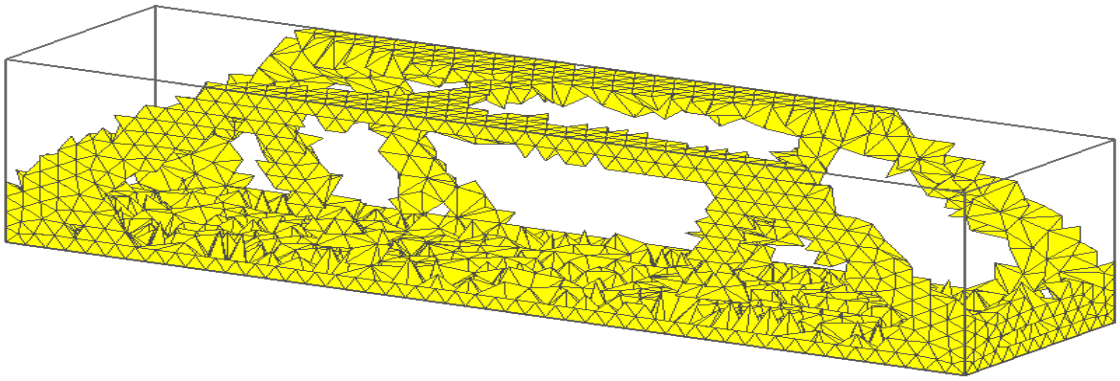
(c)

Figura 7-25.: Optimización topológica de puente descolgado. i=184, c=38.71 J.

En el extremo derecho del puente, donde se encuentra restringido por un apoyo tipo rodillo, se evidencia la formación de elementos que tratan de librar la luz perpendicular al eje del puente. La forma mas eficiente de lograr transportar la carga en esta luz corta es con elementos tipo cercha de gran altura, por esta razón se observa en la figura 7-25 a) elementos que salen del plano del tablero.

El tablero sirve como elemento transmisor de carga a las cerchas laterales, no es un elemento estructural como tal. La disposición topológica de los elementos finitos que componen el tablero se estableció previamente al inicio del proceso de optimización, de esta manera se logró conservarlos en el diseño optimo.

En la imagen 7-26 se compara el resultado de la optimización topológica para el puente descolgado, presentado en la figura 7-25, con un diseño ingenieril de puente tipo Vierendeel materializado.



(a)

(b)

Figura 7-26.: Diseños de puentes tipo Vierendeel. a) Con optimización topológica. b) Con metodologías de diseño convencionales. (Tomado de: en.wikipedia.org)

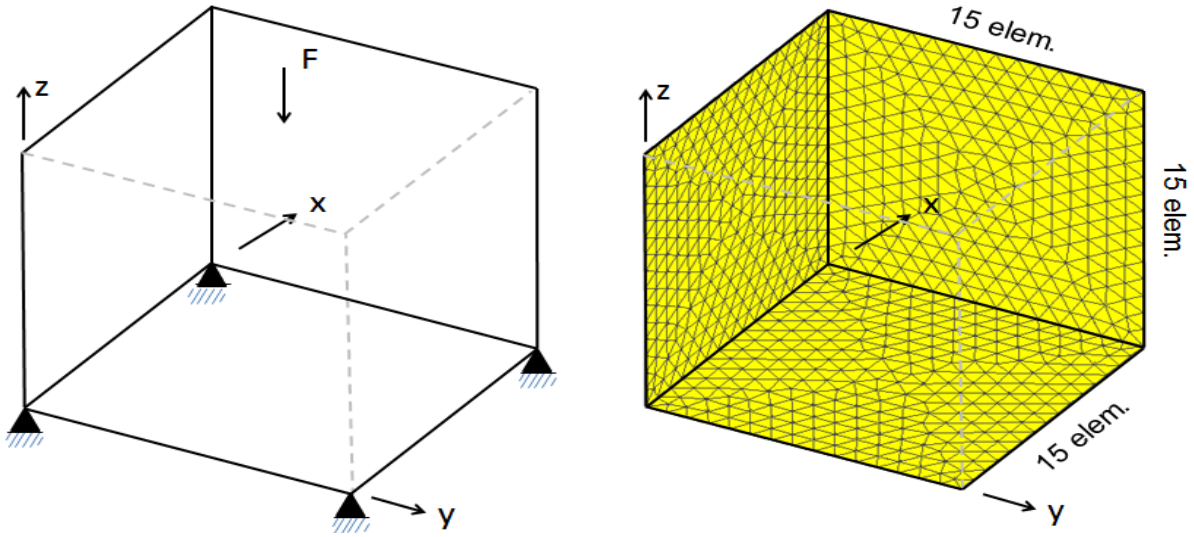
Se puede observar que el resultado de la optimización topológica esta en conformidad con las configuraciones obtenidas por los métodos convencionales de diseño. La optimización topológica no dispone los elementos interiores de las cerchas laterales totalmente verticales para optimizar su funcionamiento.

7.4.2. Dado de fundación - Método de las bielas y tirantes

Los dados de fundación son estructuras encargados de transferir la carga proveniente de una columna a elementos de la cimentación como pilotes o zapatas. Como su nombre lo indica tienen dimensiones aproximadamente iguales. La carga superior proveniente de la columna se aplica generalmente en el centroide de la cara superior, y los elementos que reciben la carga en la cara inferior se disponen de manera geométrica regular. Este tipo de estructuras se analizan utilizando la teoría de la Biela y el Tirante [15] y el MEF [67].

Los dados son estructuras que trabajan esencialmente como una cercha espacial. En estos se puede identificar zonas a compresión y a tensión. Por esta razón la teoría de la Biela y el Tirante logra analizar correctamente este tipo de estructuras.

La descripción del modelo físico, la discretización, los parámetros para el modelamiento mediante el MEF y los utilizados para desarrollar la optimización topológica se presentan en la figura 7-27 y tabla 7-13.



(a) (b)

Figura 7-27.: Modelo de estructuras dado de fundación. a) Modelo físico. b) Discretización con elementos tetraédricos.

Las dimensiones del dado son 2x2x2(LxBxH), en metros. Por solicitación se dispuso de una carga concentrada de kN, como se muestra en la figura 7-27. Los datos mas relevantes para la construcción del modelo de optimización topológica se resumen en la tabla 7-13 a modo de ficha técnica.

Tabla 7-13.: Variables del modelo del dado de fundación.

Parámetro	**Símbolo**	**Un.**	**Valor**
Variables para la modelación mediante el MEF			
Modulo de elasticidad	E	MPa	20000000
Relación de Poisson	μ	-	0.3
Número de elementos finitos	-	-	17145
Tamaño promedio del elemento	-	m	0.12
Carga puntual	F	kN	1000
Variables para la optimización topológica			
Potencia de penalización	p	-	3
Coeficiente de amortiguación	ξ	-	0.5
Radio de filtrado	r_{min}	m	0.13
Fracción de volumen	f_{vol}	%	10

El resultado de la optimización topológica se muestra en la figura 7-28. Junto con la representación gráfica se da el nivel de energía de deformación interna que se alcanzó, y la correspondiente iteración en la que se finalizó el proceso de optimización.

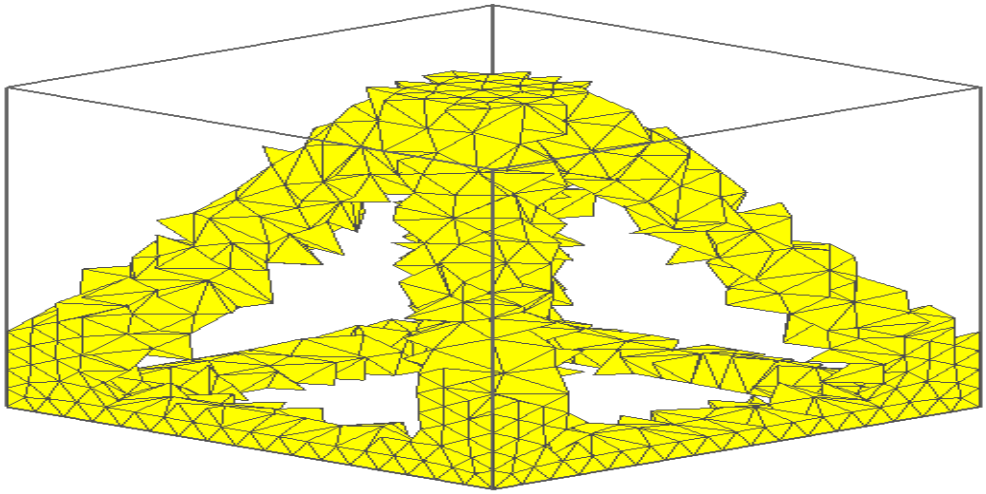
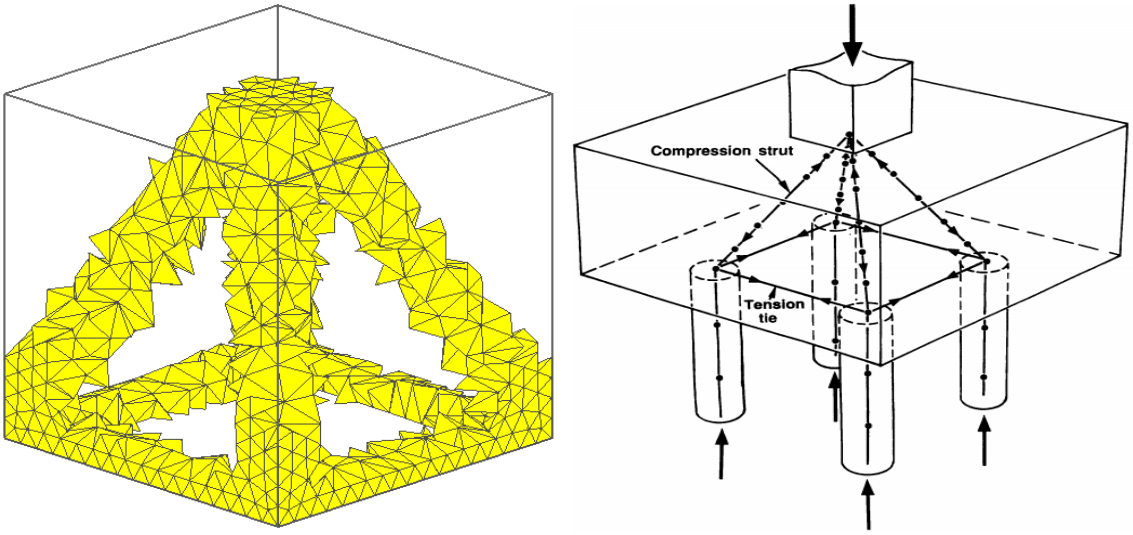


Figura 7-28.: Optimización topológica de dado de fundación. i= 40, c= 18.75 J.

El proceso de optimización topológica converge rápidamente. Tan solo se necesitan cuarenta iteraciones para darle cumplimiento al criterio de convergencia. Cuando se alcanza la iteración veinte la función objetivo entra en su etapa final de oscilación decreciente sobre el punto óptimo. De igual forma la configuración optima queda prácticamente definida antes del ciclo doce, posterior a este la variación es muy leve. Esta rapidez en la convergencia se debe a las simplificaciones del modelo físico, teniendo una estructura simétrica con solo una carga concentrada. Con estas simplificaciones se facilita la asignación de las densidades que

realiza el esquema de actualización de la densidad.

En el articulo [2] se realiza un estudio detallado del modelo de bielas y tirantes aplicado a dados de cimentación. En este articulo se recopila información experimental de otros autores acerca del comportamiento estructural de los dados de cimentación. De igual manera, también se realizan ensayos propios con la intención de validar el uso del método de las bielas y tirantes en el análisis y diseño de los dados de cimentación. Una de los modelos que estudiaron los autores fue precisamente un dado de cimentación con condiciones de carga y apoyo equivalentes al modelo que se estudia en esta sección.
En la figura 7-29 se presentan los resultados al utilizar la optimización topológica en 3D y al aplicar el método de la biela y el tirante según se reporta en [2].



(a) (b)

Figura 7-29.: Diseños de dados de fundación. a) Con optimización topológica. b) Con el Método de la Biela y el Tirante.

Se puede observar que el resultado de la optimización topológica esta en conformidad con la teoría de la Biela y el Tirante. Los elementos diagonales que se orientan desde la carga hacia los apoyos forman las bielas a compresión y los elementos en la cara inferior del dado se encuentran solicitados a tension, formando los tirantes. Se verifica que la estructura se comporta como una cercha espacial.

8. Conclusiones, recomendaciones y trabajos a futuro

Las conclusiones que se presentan a continuación corresponden en primera instancia con el cumplimiento del objetivo principal de la tesis definido en el capítulo 1. Posteriormente se recopilan las principales conclusiones a las que se llegó durante el desarrollo del trabajo.

Se presenta también una serie de recomendaciones, que no hacían parte del alcance de este trabajo, pero que es pertinente indicar para que en trabajos futuros puedan ser consideradas. Asimismo se indican algunas recomendaciones sobre el modelo numérico propuesto.

A partir de las recomendaciones y el potencial que la herramienta computacional desarrollada puede tener en las áreas de diseño, se sugieren algunos trabajos a futuro.

Conclusiones

Según los resultados de la validación, calibración y aplicación de los diferentes modelos tridimensionales extraídos de la literatura, se puede concluir que el proceso de optimización topológica llevado a cabo por la herramienta computacional propuesta en este trabajo arroja resultados topológicos equivalentes a los presentados en las referencias. Algunas diferencias presentes en la definición geométrica se deben al tipo de mallado y de graficación que se manejo en las referencias de validación, sin embargo la topología (conectividad entre elementos) permaneció equivalente.

La optimización topológica desarrollada con la herramienta computacional produce una distribución de material que permite transmitir eficientemente los esfuerzos internos en el interior del cuerpo, tanto para dominios 2D como 3D. Cumpliendo con el objeto mismo de la optimización topológica.

El lenguaje de programación seleccionado para desarrollar la herramienta computacional presentada en este trabajo fue el de la plataforma MATLAB, conocido y utilizado ampliamente en el ambiente académico e industrial. De esta forma se garantiza el acceso y escalabilidad del código. La herramienta computacional desarrollada mostró su versatilidad y robustez al permanecer estable durante la ejecución de los diferentes modelos de validación.

Considerando que estable es la capacidad del programa de continuar en el modo de ejecución ante situaciones especiales de optimización, como por ejemplos la presencia de sistemas físicos mal condicionados durante el proceso de optimización.

Se encontró que al tener la limitante del número máximo de elementos finitos, en orden a evitar tiempos de calculo muy grandes, la selección del valor del radio de filtrado es fundamental para lograr una adecuada definición de la geometría optima. A radios pequeños la densidad entre elementos continuos puede disminuir rápidamente; con radios grandes, la densidad entre elementos adyacentes se atenúa levemente, de esta manera el radio determina una escala de definición de la geometría. Se puede presentar el caso en el que el radio de filtrado sea muy grande en comparación a las dimensiones del dominio del solido y al tamaño promedio del elemento finito, lo que puede originar que el proceso de optimización arroje resultados de baja calidad o no converja. Todos los modelos elaborados y presentados en esta tesis se calibraron para ajustar el radio de filtrado acorde a lograr una buena calidad del resultado optimizado.

Recomendaciones

Durante el proceso de optimización se identificó que la potencia de penalización del modelo SIMP presenta una alta sendibilidad por lo que se recomienda adelantar un estudio paramétrico sobre su comportamiento y efecto en la optimización.

No siempre el aumentar el criterio de convergencia para lograr un mayor detalle de diseño optimo conduce a resultados positivos. Se puede presentar el fenómeno en el cual el proceso de optimización topológica entre en una fase oscilatoria cíclica. Si se llega a esta condición el proceso no cumplirá el criterio de convergencia, entrando en un proceso iterativo indefinido siendo necesario forzar la terminación del mismo.

En el planteamiento de los problemas de optimización topológica en 3D es de especial relevancia la capacidad del equipo cómputo en el cual se implemente la herramienta computacional desarrollada. A manera de referencia, se plantean los siguientes indicadores: las mallas de los modelos considerados en este trabajo oscilaron entre 20000 y 30000 elementos, el equipo de computo contaba con un procesador de 4 núcleos a 3.0 GHz y una memoria RAM de 12GB DDr2 , con estos condicionantes los tiempos de ejecución en promedio fueron de 6 horas. Se recomienda evaluar la capacidad del equipo en el que se va a ejecutar la herramienta computacional con respecto a los criterios anteriores, con el fin de predimensionar los dominios de trabajo correctamente.

La optimización topológica se ve condicionada por la definición del dominio a optimizar.

Es conveniente utilizar las propiedades particulares del sistema que permitan la reducción del tamaño sin alterar el resultado de la optimización, como por ejemplo el uso de las propiedades de simetría. Como recomendación se sugiere adelantar un procedimiento de ensayo y error, con menos de tres procesos de prueba, o con una aproximación intuitiva del campo del esfuerzo y la deformación que permita predecir con algún grado de exactitud la forma mas cercana a la condición óptima.

Trabajos a futuro

Se recomiendan las siguientes actividades para futuros trabajos de investigación en el tema:

- Exportar los resultados de la optimización topológica a sistemas de impresión en 3D. Para ello es necesario una herramienta de software que permita la transferencia de datos desde MATLAB y la edición e impresión del diseño optimo.

- Desarrollar una técnica de suavizado de la densidad que permita mejorar la calidad gráfica del la optimización topológica en 3D, como por ejemplo la representación por el metodo NURBS, por sus siglas en ingles Not Uniform Racional B-Spline. Planteando una formulación del suavizado que se adapte al modelo de optimización propuesto y realizando la implementación en una plataforma de programación.

- Incorporar al modelo de optimización topológica desarrollado en este trabajo nuevas técnicas de filtrado, por ejemplo por densidades, o modificando la formulación del problema de optimización topológica. O mediante sistemas de mallado adpatativos que dependan de la concentración de densidades. O la consideración de mallas multiresolución que permitan ver el comportamiento de las principales variables de diseño.

- Implementar el modelo de optimización en lenguajes de programación de bajo nivel o modificar el algoritmo de optimización para ser implementado y ejecutado disponiendo de varios procesadores trabajando en paralelo, esto permitirá la disminución de los tiempos de calculo.

A. Anexo: Función principal de la optimización topológica en 3D

```
function TETRAOPTOP(E,v,NELE,NNUD,XYZ,ELE,RES,FUN,DISV,fvol,p,rmin,x,ciclo)

%-------------------------------------------------
%INICIO DE RUTINAS OPTIMIZACION TOPOLOGICA

%Calcula tiempo de procesamiento
tic

%inicializa vector de densidades con fvol
% x(1:NELE,1)=fvol;

%construye la matriz de grados de libertad por nodo, va asignando grados
%de libertad en orden numerico 1,2,3,4,...
Ndof=zeros(NNUD,3);
k=1;
for i=1:NNUD
    for j=1:3
        Ndof(i,j)=k;
        k=k+1;
    end
end

%construye la matriz de grados de libertad por elemento, proceso optimizado
Edof=zeros(NELE,13);
for i=1:NELE
Edof(i,1)=i;
Edof(i,2)=Ndof(ELE(i,1),1);
Edof(i,3)=Ndof(ELE(i,1),2);
Edof(i,4)=Ndof(ELE(i,1),3);
Edof(i,5)=Ndof(ELE(i,2),1);
Edof(i,6)=Ndof(ELE(i,2),2);
Edof(i,7)=Ndof(ELE(i,2),3);
Edof(i,8)=Ndof(ELE(i,3),1);
Edof(i,9)=Ndof(ELE(i,3),2);
Edof(i,10)=Ndof(ELE(i,3),3);
Edof(i,11)=Ndof(ELE(i,4),1);
```

```
Edof(i,12)=Ndof(ELE(i,4),2);
Edof(i,13)=Ndof(ELE(i,4),3);
end

%extrae coordenadas elementales
[Ex,Ey,Ez]=coordxtr(Edof,XYZ,Ndof,4);

%obtiene la matriz constituva
D=hooke(4,E,v);

%crea vector de disposicion topologica
%REGION VACIA=0
%REGION SOLIDA=1
%REGION NO ESTABLECIDA=2
DISTO(1:NELE,1)=2;
DISTO(DISV(:,1),1)=DISV(:,2);

%inicializa variables del ciclo de optimizacion
% ciclo=0;
cambio=1;

%inicializar variable controladora ciclo de optmizacion
maxi=1;

%Prelocalizacion de variables del ciclo de optimizacion
Ed=zeros(1,12);
dc=zeros(NELE,1);
DIST=0;
dcn=zeros(NELE,1);
V=zeros(NELE,1);
XNEW=zeros(NELE,1);
VT=zeros(NELE,1);
mvo=ones(4,4);
BAR=zeros(NELE,3);
regis=0;

%Calculo de volumnes elementales y total, y de matriz de baricentros
for i=1:NELE

    BAR(i,1)=sum(Ex(i,:))/4;
    BAR(i,2)=sum(Ey(i,:))/4;
    BAR(i,3)=sum(Ez(i,:))/4;

    for j=1:4
        mvo(j,2)=Ex(i,j);
        mvo(j,3)=Ey(i,j);
        mvo(j,4)=Ez(i,j);
    end
```

```
85
86      VT(i,1)=(1/6)*det(mvo);
87  end
88  VTS=sum(VT);
89
90  %iniciar ciclo de optimizacion
91  while maxi>0.001
92  ciclo=ciclo+1;
93
94  %ejecuta el ciclo de elementos finitos
95  [a]=ELEMTETRA(NNUD,NELE,ELE,XYZ,E,v,x,p,FUN,RES,Ex,Ey,Ez,Ndof,Edof,D);
96
97  %calcula el valor de la funcion objetivo y la matriz de sensibilidades
98  %sin modificar por filtro
99  c=0;
100 for i=1:NELE
101     Ed(1,:)=extract(Edof(i,:),a);
102
103     fact=Ed(1,:)*(ktetra(Ex(i,:),Ey(i,:),Ez(i,:),D))...
104         *Ed(1,:)';
105
106     c=c+(x(i)^(p))*fact;
107     dc(i,1)=-(p*(x(i)^(p-1)))*fact;
108 end
109
110 % sensibilidad modificada por filtro de sensibilidades
111 for i=1:NELE
112     sum1=0;
113     sum2=0;
114     sum3=0;
115     for j=1:NELE
116         DIST=(((BAR(i,1)-BAR(j,1))^2)+((BAR(i,2)-BAR(j,2))^2)+((BAR(i,3)...
117         -BAR(j,3))^2))^0.5;
118         if DIST≤rmin
119             sum1=sum1+(rmin-DIST)*x(j)*dc(j,1);
120             sum2=sum2+(rmin-DIST);
121         end
122     end
123     sum3=x(i)*sum2;
124     dcn(i,1)=sum1/sum3;
125 end
126
127 %densidad minima
128 xmin=0.001;
129 %limite movible positivo
130 move=0.2;
131 %cotas metodo de biseccion
132 L1=0;
```

```
L2=100000;
%iniciar ciclo metodo de biseccion
while (L2-L1)>0.0001
    LMID=0.5*(L2+L1);

    for i=1:NELE
        if DISTO(i,1)==1
            XNEW(i,1)=1;
        elseif DISTO(i,1)==0
            XNEW(i,1)=xmin;
        else
            XNEW(i,1)=max(xmin,max(x(i,1)-move,min(1,min(x(i,1)+move,x(i,1)...
                *((-dcn(i,1)/(LMID*VT(i,1)))^0.5)))));
        end

        V(i,1)=VT(i,1)*XNEW(i,1);
    end

    VS=sum(sum(V));

    if (VS-fvol*VTS)>0
        L1=LMID;
    else
        L2=LMID;
    end
end

%calcular cambio maximo entre iteraciones
maxi=max(max(abs(XNEW-x)));

%copiar densidades nuevas a densidades actuales para iniciar proximo ciclo
x=XNEW;

%registro de ciclo y funcion objetivo en display de MatLab
disp(['Ciclo No:=' num2str(ciclo),' ; funcion objetivo:=' num2str(c)])

% registra imagenes de optimizacion
if  rem(ciclo,2)==0
    t = strcat('Densidad_voladizo_superior-', num2str(ciclo), '.mat');
    save(t,'XYZ','ELE','NELE','x','ciclo','c');
% elseif ciclo==1
%     save ('Datos_voladizo_superior.mat','DISV','E','ELE','FUN','fvol',...
%           'NELE','NNUD','p','RES','rmin','v','XYZ');
end

%detiene proceso numero excesivo de ciclos
% if ciclo==200 | ciclo==300
```

```
%     dd = questdlg('Desea parar el proceso?, puede que se encuentre en ...
    una etapa...
osiclatoria','Numero de ciclos excesivo','Si','No','Si');
%     if strcmpi(dd, 'Si')
%         return
%     end
% end

end

%Calcula tiempo de procesamiento
toc

%save ('Viga_empotrada_a.mat');        %guardar variables definitivas

%grafica densidades finales
GRAFTETRAa(XYZ,ELE,NELE,x);
```

Código A.1: Codigo principal de la optimización topológica en 3D.

B. Anexo: Función para graficar tedraedros arbitrariamente orientados en el espacio

```
function GRAFTETRAa(XYZ,ELE,NELE,x)

%   GRAFTETRA funcion para dibujar tetraedros en el espacio con una
%   densidad especifica utilizando la estructura FV
%
%   GRAFTETRA(coordenadas,conectividad,cantidad,densidad)
%
%   la densidad de cada tetraedro se representada por un color en la escala
%   de grises, donde 1 corresponde a considerar el elemento en su totalidad
%   y 0 a eliminarlo de su posicion en el mallado
%
%   coordenadas: matriz que contiene las coordenadas x,y,z de los
%   vertices de los tetraedros
%   conectividad: matriz que contiene los nodos asociados a cada tetraedro
%   cantidad: numero de tetraedros a dibujar
%   densidad: densidad asociada a cada tetraedro

%set(0,'DefaultFigureVisible','off'); %no abrir grafico

hold on

%quitar numeros de ejes
% set(gca,'Xticklabel',[])
% set(gca,'Yticklabel',[])
% set(gca,'Zticklabel',[])

axis('off');

%cambiar el color de fondo
set(gcf,'color','white')

% xlabel('x','FontSize',12,'FontWeight','bold','Color','black')  ...
    %etiquetar eje
```

```
% ylabel('y','FontSize',12,'FontWeight','bold','Color','black')  ...
    %etiquetar eje
% zlabel('z','FontSize',12,'FontWeight','bold','Color','black')  ...
    %etiquetar eje

%propiedades del grafico
% grid;                                   %grilla sobre ejes
B=max(XYZ);                               %escalar ejes
axis ([ 0 B(1)+0.5 0 B(2)+0.1 0 B(3)+0.1]);

axis equal                                %manteniene escala 1:1 de ...
    graficacion

%graficar dominio de diseno
V=[0 0 0;B(1) 0 0;B(1) B(2) 0;0 B(2) 0;0 0 B(3);B(1) 0 B(3);B(1)...
   B(2) B(3);0 B(2) B(3)];
FV.vertices=V;
FV.faces=[1 2 6 5;2 3 7 6;1 4 8 5;4 3 7 8;2 3 4 1;6 7 8 5];
FV.facecolor='none';
FV.edgecolor=[0.4 0.4 0.4];
FV.linewidth=0.5;
patch(FV);

%asignar la matriz de coordenadas a la estructura FV
FV.vertices= XYZ;
%asignar propiedades de conectividad y color a estructura FV
%para llenar los argumentos del objeto patch
for i=1:NELE
    FV.faces=nchoosek(ELE(i,:),3);
   %densidad minima para graficar
    if x(i)<0.2
        FV.facecolor='none';
        FV.edgecolor='none';        %Borra mallado(Opcional)
    else
        FV.facecolor=[0 0.5 0.7];
        FV.edgecolor=[0.3 0.3 0.3];
        FV.linewidth=1.2;
    end
    patch(FV);
end

view(45,20);                              %controlar angulo de vision

%print('Img-01','-dpng')                   %guardar imagen

% whitebg('alpha')                        %cambiar color de fondo
% establecer puntos de iluminacion
% camlight(90,0)
```

```
% camlight(180,0)
% camlight(270,0)
% camlight(0,0)
% camlight(0,90)
% camlight(0,-90)
% material metal                          %propiedades de iluminacion del ...
    objeto

hold off
end
```

Código B.1: Calculo función objetivo y sensibilidad elemental.

C. Manual del usuario

La herramienta computacional esta diseñada para desarrollar la optimización topológica de estructuras en 3D. Esta herramienta se encuentra escrita en lenguaje de MatLab por lo que es indispensable contar con este programa, la version del mismo que se manejo es la 2015a. Se espera que el usuario tenga conocimientos básicos en el manejo de este programa. Tanto los datos de entrada como los de salida se presentan en formatos propios de MatLab.

En este manual se presenta una forma de manejar los datos que interfieren en el proceso de optimización, sin embargo, el usuario puede establecer su propia manera siempre y cuando este acorde con la lógica establecida del programa. Esta se ilustra en los siguientes párrafos.

La creación de los datos de entrada puede ser demasiado laboriosa sino se dispone de un programa auxiliar que facilite la creación y edición de estos. Por esta razón se utilizan los programas ANSYS Mechanical APDL 16.0 y Microsoft Excel 2010 para la creación, edición y exportación de los datos de entrada hacia MatLab. Por otra parte, los datos de salida son registros de las variables en formato *.mat* que puede ser leído directamente en MatLab sin ningún pre-procesamiento.

C.1. Requisitos de software

Como se menciono anteriormente es necesario contar con el programa MatLab R2015 para poder compilar el código principal y los secundarios, de igual manera tambien es indispensabe contar con las rutinas para el analisis por elementos finitos de CALFEM. Otros programas que se requieren para el manejo de datos de entrada que se propone son:

- Microsoft Excel 2010.
- ANSYS Mechanical APDL 16.0

Se recomienda utilizar la versión de 64 bits de Microsoft Excel 2010 para poder manejar variables mas grandes, ya que la version de 32 bits tiene un limitante en memoria RAM de 2 GB, en contraparte a la version de 64 bits que no impone ningún limite.
Es necesario disponer del complemento *Spreadsheet Link EX 3.2.1 for use MATLAB* para Microsoft Excel, ya que por medio de este se realiza la transferencia de datos de Excel a Matlab.

C.2. Requisitos de hardware recomendados

La calidad de los modelos esta en proporción directa con la capacidad en hardware disponible, recursos bajos producirán tiempos de calculo excesivo, manejo gráfico pausado, e incluso la interrupción en la ejecución del programa de optimización por la insuficiencia en memoria RAM.

Se recomienda contar con un equipo de computo con las siguientes características:
Procesador: AMD Athlon(tm) II 640
Velocidad del procesador: 3.00 Ghz
Numero de núcleos: 4
Memoria RAM: 12 GB DDr2
Procesador gráfico: VGA estándar
Memoria de vídeo: 16 MB

C.3. Creación y edición de los datos de entrada

Los datos de mallados se crean con ayuda del programa *ANSYS Mechanical APDL 16.0*. Este tiene dentro de su amplia gama de elementos el elemento finito tedraédrico lineal con el que se construyo el modelo de optimización topológica en 3D de esta tesis. De este programa se exportan las coordenadas de los nudos, la matriz de conectividad elemental, y se pueden leer los nodos de los apoyos y cargas, y la numeración de elementos con disposición topológica predeterminada. La exportación de los datos hacia Microsoft Excel se realiza por medio de un archivo con extension *.txt*.

La edición de los datos y exportación de los mismos hacia MATLAB se realiza utilizando Microsoft Excel con el complemento *Spreadsheet Link EX 3.2.1 for use MATLAB*. En la edición se procesan levemente los datos provenientes de ANSYS Mechanical APDL 16.0 para ajustarlos al formato requerido en MATLAB.

En la sección C.5 se muestra el paso a paso, ilustrado con pantallazos, del procedimiento de creación y edición de datos expuesto en los párrafos anteriores.

C.4. Datos de salida

El código esta configurado para exportar tres conjuntos de datos: primero, registro del número de iteración y valor de la función objetivo durante el proceso de optimización; segundo, registro de las variables *XYZ*, *ELE*, *NELE*, y x que corresponde a la matriz de coordenadas

de nudos, matriz de conectividad elemental, numero de elementos, y vector de densidades elementales, respectivamente, estas variables son los argumentos de entrada de la función de graficación del anexo A; tercero, gráfica del resultado final del proceso de optimización topológica en 3D.

C.5. Procedimiento

A continuación se ilustra el proceso paso a paso de manejo y operación de datos propuesto en este trabajo.

1. Construcción del mallado en ANSYS Mechanical APDL 16.0: el mallado se puede obtener operando las opciones de *Modeling* y *Meshing* del preprocesador del programa ANSYS. En primera instancia se define el elemento tedraédrico de la biblioteca de elementos, este se designa según la nomenclatura del programa como SOLID285:

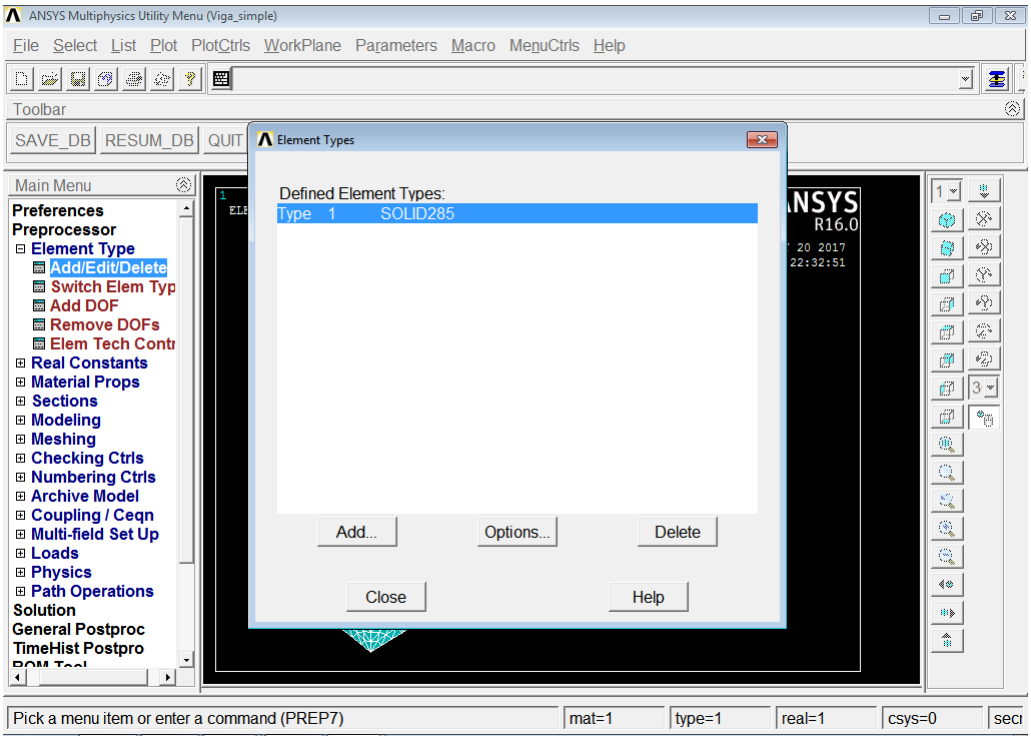


Figura C-1.: Definición de elemento finito en ANSYS.

Posterior a la definición del tipo de elemento se procede a configurar las dimensiones del domino en R3 que se desea mallar. Como generalmente en los problemas de optimización topológica el dominio inicial consta de un simple bloque este se puede establecer con la siguiente secuencia de comandos: *Prepocessor*→*Modeling*→*Create*→*Volumes*→*Block*→*By Dimensions*. En las que se tienen que especificar las dimensiones del bloque, se sugiere que el origen del dominio sea el mismo que el del sistema coordenado:

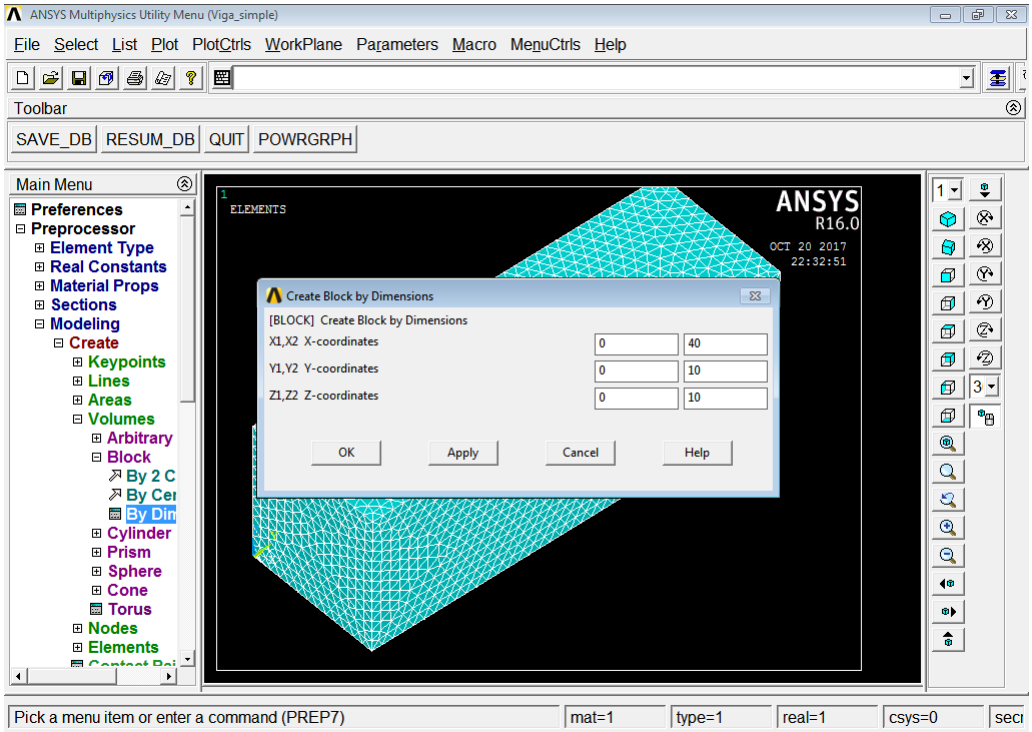


Figura C-2.: Construcción del dominio inicial.

Para la configuración del mallado se determina el tamaño promedio de los elementos finitos, que esta relacionado directamente con el número de elemento en los que se divide el dominio inicial, lo anterior se logra con el comando:*Prepocessor*→*Meshing*→*Size Cntrls*→**ManualSize**→**Global**→**Size**.

Con el mallado definido se exportan dos archivos con extension *.txt*, el primero corresponde a las coordenadas de los nudos que se puede obtener en la ruta:textitList→*Nodes*. El segundo archivo de exportación corresponde a las conectividad nodal de los elementos, se obtiene por medio de la ruta:textitList→*Elements*→*Nodes+Atributes*. En la siguiente ilustración se da un ejemplo de los archivos exportados:

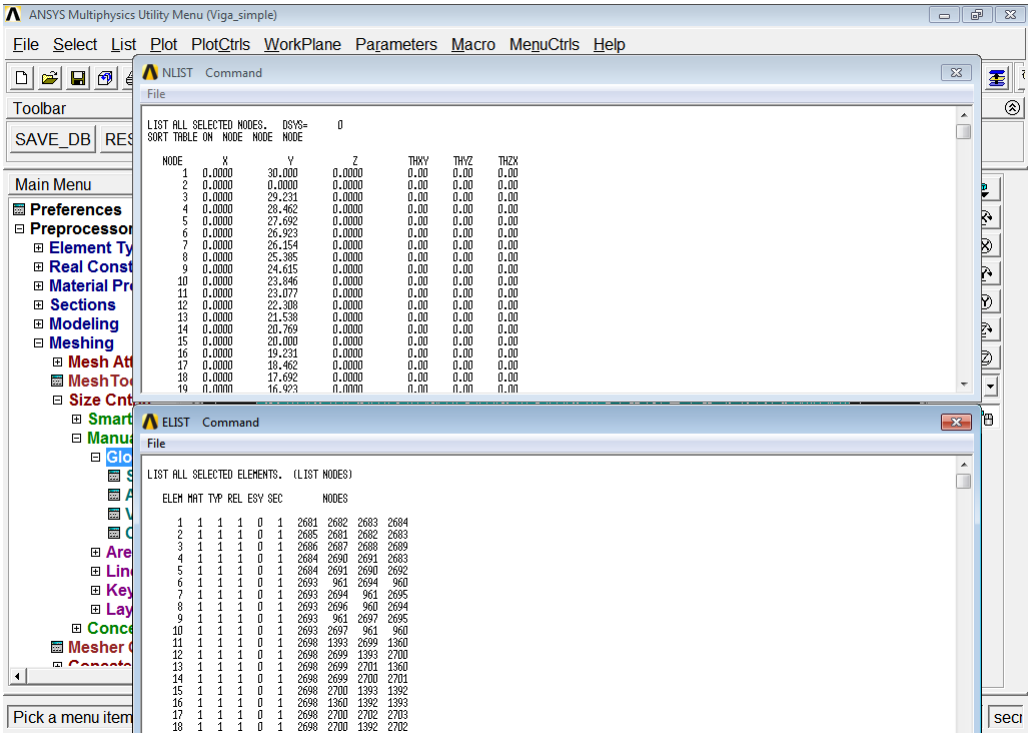


Figura C-3.: Archivos de exportación de ANSYS.

2. Edición de datos en Microsoft Excel: los datos provenientes de *ANSYS* junto con los demás datos necesarios para ejecutar el proceso de optimización se pueden organizar en una hoja de calculo de Microsoft Excel con el objetivo de poder exportarlos a MatLab. Para realizar esta exportación es necesario tener instalado el complemento *Spreadsheet Link EX 3.2.1 for use MATLAB* que se puede descargar del link: *es.mathworks.com/products/excellink.html*. Una manera de organizar los datos se ilustra en la figura C.5, en donde las matrices que intervienen en el proceso de optimización se definen en las pestañas TB_XYZ, TB_ELE, TB_DISV, TB_RES y TB_FUN que corresponden a la matriz de coordenadas de los nudos, matriz de nudos por elemento, matriz de disposición topológica, matriz de restricciones y matriz de cargas nodales, respectivamente. La estructuración de esta hoja de calculo es la que se maneja en el programa PEFICA, se trabajo de esta manera ya que con esta estructura se facilita la exportación de los datos de entrada de la optimización topológica

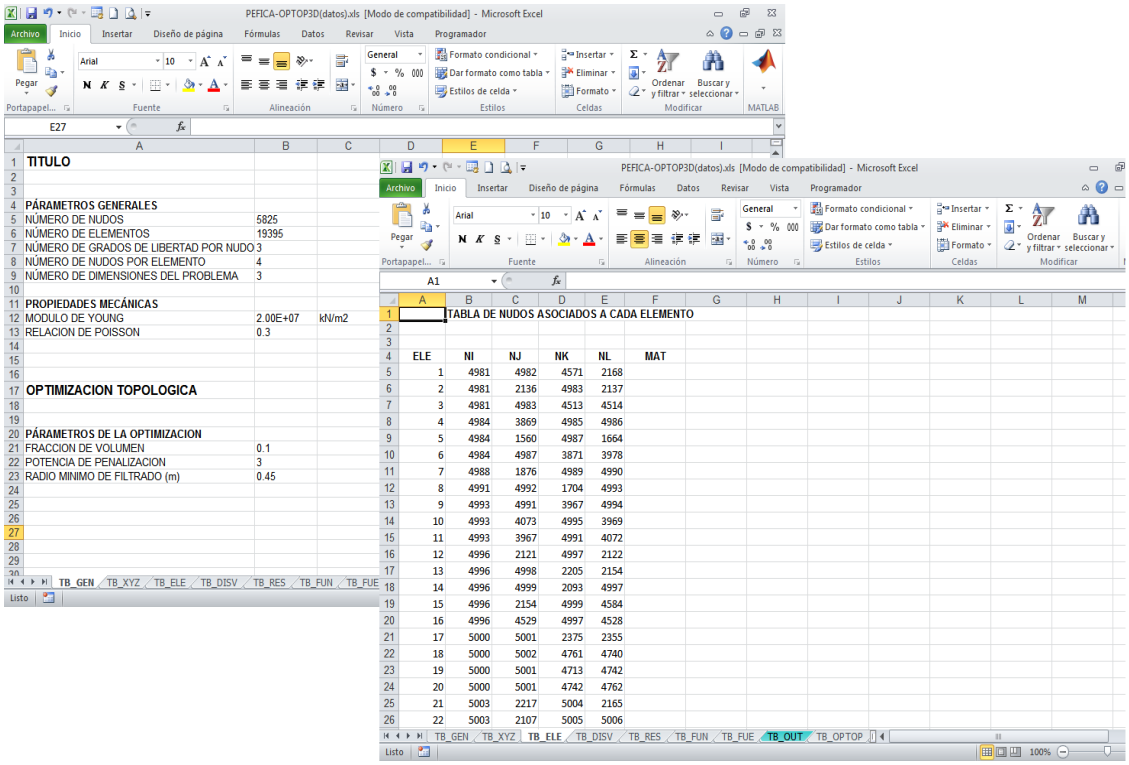


Figura C-4.: Exportación de datos a MatLab.

Los datos se exportan utilizando la opción *Send data to MatLab* del complemento *Spreadsheet Link EX 3.2.1 for use MATLAB*. Como se ilustra en la siguiente figura:

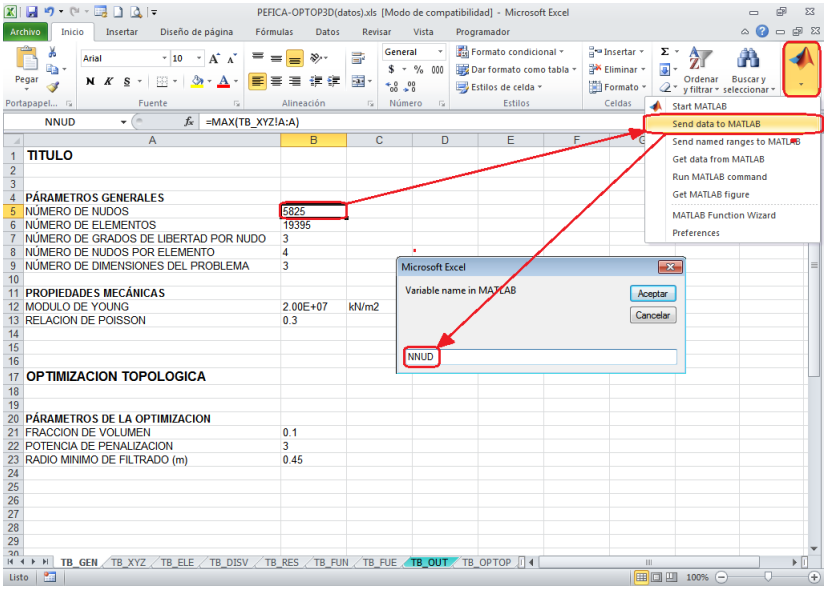


Figura C-5.: Edición de datos en Excel.

Procediendo de esta manera se pueden almacenar variables en MATLAB. Se deben almacenar todas las variables de entrada que se solicitan en el código A, terminado este

proceso el manejo de los datos se hace exclusivamente desde MatLab, pudiendo cerrar el programa Microsoft Excel.

2. Manejo del código principal: Los códigos elaborados en MatLab son de libre acceso, por lo que su modificación no tiene limitantes, mientras no se rompa la lógica de programación las rutinas pueden ser modificadas por el usuario. A continuación se enuncian una serie de parametros que se pueden modificar dentro del código principal con la finalidad de ajustarlo a los requerimientos del usuario:

- *Filtrado:* el filtro de las sensibilidades se aplica utilizando el concepto de baricentro de un tedraedro, como se comento en 5.8, esto se desarrolla entre las lineas 74-87 del codigo del anexo A. Sin embargo, utilizando otro concepto que permita definir la distancia entre un elemento y otros elementos de la malla se podría modificar el procedimiento que realiza la técnica de filtrado de la sensibilidad.

- *Rutina de análisis por MEF:* en la linea 95 del código del anexo A se hace el llamado a una función que ejecuta el análisis por elementos finitos. Parte de esta función se elaboro utilizando las rutinas del programa CALFEM, pero, puesto que el código de optimización A únicamente requiere el vector de desplazamientos nodales las rutinas del analisis por MEF pueden cambiar involucrando otros tipos de elementos finitos o planteamientos de resolución diferentes.

- *Criterio de convergencia:* en la linea 91 del código presentado en el anexo A se establece el criterio de convergencia. Al disminuir el criterio de convergencia se permite que el programa busque el punto optimo con mas precisión, aumentando el numero de iteraciones. Esto conlleva a tener diseños mas definidos, pero de igual manera aumenta el numero de iteraciones con lo que tambien se aumenta el tiempo de calculo. Incluso si el criterio se establece demasiado pequeño el proceso de optimización topológica puede caer en una etapa oscilatoria cíclica indefinida, lo que obligaría a realizar una terminación forzada de la ejecución del programa de optimización.

- *Almacenamiento de datos:* en las lineas 168 a 175 del código presentado en el anexo A se configura el registro de datos del proceso de optimización. El programa esta configurado inicialmente para guardar las variables *XYZ, ELE, NELE, x, ciclo, c,* que corresponde a las coordenadas nodales, matriz de nudos por elemento, numero de elementos, vector de densidades elementales, ciclo de registro de los datos, y, valor de la función objetivo, estas variables se almacenan cada dos iteraciones y se titulan según se defina el nombre en la linea 170. Los datos que se almacenan sirven para tener el registro de las variables mas importantes del proceso de optimización y para poder graficar la representación en 3D del diseño,

C.6. Graficación de resultados

El código presentado en el anexo B permite graficar tetraedros arbitrariamente orientados en el espacio en los que su representación se ve afectada por la densidad asociada a cada elemento tedraedrico, de esta manera valores por debajo de cierta densidad previamente fijada no se grafican. El criterio de la densidad para determinar si se representa o no el elemento se encuentra en la linea 59.

El registro de las variables durante el proceso de optimizacion permite, como se describió en la sección anterior, que se puedan graficar los estados de la estructura previos al diseño optimo, teniendo una representación gráfica del proceso de optimización topológica en 3D.

Los parámetros que se pueden modificar por el usuario en este código de graficación son el criterio de representación de las densidades y parámetros asociados a la visualización gráfica como: escala de ejes, puntos de foco, matices de colores, puntos de iluminación, color para la densidad elemental, etc.

Bibliografía

[1] Achtziger, Wolfgang ; Bendsøe, M ; Ben-Tal, Aharon ; Zowe, Jochem: Equivalent displacement based formulations for maximum strength truss topology design. En: *IMPACT of Computing in Science and Engineering* 4 (1992), Nr. 4, p. 315–345

[2] Adebar, Perry ; Kuchma, Daniel ; Collins, Michael P.: Strut-and-tie models for the design of pile caps: An experimental study. En: *ACI Structural Journal* 87 (1990), Nr. 1, p. 81–92

[3] Andreassen, Erik ; Clausen, Anders ; Schevenels, Mattias ; Lazarov, Boyan S. ; Sigmund, Ole: Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. En: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43 (2011), Nr. 1, p. 1–16

[4] Austrell, Per E. ; Dahlblom, Ola ; Lindemann, Jonas ; Olsson, Anders ; Olsson, Karl-Gunnar ; Persson, Kent ; Petersson, Hans ; Ristinmaa, Matti ; Sandberg, Göran ; Wernberg, Per-Anders: CALFEM-a finite element toolbox, version 3.4. (2004)

[5] Barnes, MR ; Topping, BHV ; Wakefield, DS: Aspects of form finding by dynamic relaxation. En: *International Conference on the Behaviour of Slender Structures, London, United Kingdom*, 1977

[6] Bends, Martin P.: New displacement-based methods for optimal truss topology design. (1991)

[7] Bendsøe, Martin P. ; Soares, Carlos A M.: *Topology design of structures*. Vol. 227. Springer Science & Business Media, 2012

[8] Bendsoe, Martin P. ; Sigmund, Ole: *Topology optimization: theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media, 2013

[9] Caballero, Samuel S.: *Optimización estructural y topológica de estructuras morfológicamente no definidas mediante algoritmos genéticos*, Universidad Politecnica de Valencia (Spain), Tesis de Grado, 2012

[10] Carbonell, Guillem Josep C.: Desarrollo de un Programa de Optimización de forma de Componentes Mecánicos Mediante Optimización Topológica ADAPTATIVA. (2011)

[11] Cela, Juan José L.: *Mecánica de los medios continuos.* Univ de Castilla La Mancha, 1999 (27)

[12] Cervera Ruiz, Miguel ; Blanco Díaz, Elena I. *Mecánica de estructuras.* 2002

[13] Chan, ASL: The design of Michell optimum structures / College of Aeronautics Cranfield. 1960. – Informe de Investigación

[14] Chen, Debin: *Least weight design of 2-D and 3-D geometrically nonlinear framed structures using a genetic algorithm.* 1997

[15] Chen, Wai-Fah ; El-Metwally, Salah: *Structural Concrete: Strut-and-Tie Models for Unified Design.* CRC Press, 2017

[16] Christiansen, Asger N. ; Bærentzen, J A. ; Nobel-Jørgensen, Morten ; Aage, Niels ; Sigmund, Ole: Combined shape and topology optimization of 3D structures. En: *Computers & Graphics* 46 (2015), p. 25–35

[17] Corcoran, PJ: Configurational optimization of structures. En: *International Journal of Mechanical Sciences* 12 (1970), Nr. 5, p. 459–462

[18] Cororan, PJ: *The Design of Minimum Weight Structures of Optimum Configuration.* 1970

[19] Denton, Alan R. ; Ashcroft, Neil W.: Vegard's law. En: *Physical review A* 43 (1991), Nr. 6, p. 3161

[20] Dorn, William S.: Automatic design of optimal structures. En: *Journal de mecanique* 3 (1964), p. 25–52

[21] Farshi, Behrooz ; Schmit, Lucien A.: Minimum weight design of stress limited trusses. En: *Journal of the Structural Division* 100 (1974), Nr. 1, p. 97–107

[22] Fonseca, Zeferino A.: *El método de los elementos finitos: una introducción.* Univ. Rafael Urdaneta, 2011

[23] Galilei, Galileo: 1638. Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali.

[24] Haftka, Raphael T. ; Gürdal, Zafer: *Elements of structural optimization.* Vol. 11. Springer Science & Business Media, 2012

[25] Hemp, WS: Studies in the theory of Michell structures. En: *Applied Mechanics.* Springer, 1966, p. 621–628

[26] Hilarión, Francisco Leonardo N. ; Segrera, Dorian Luis L.: Programa didáctico a código abierto de análisis dinámico de estructuras UNDIN 1.0. En: *Revista Educación en Ingeniería* 9 (2014), Nr. 17, p. 118–131

[27] Imai, Kanji ; Schmit, Lucien A.: Configuration optimization of trusses. En: *Journal of the Structural Division* 107 (1981), Nr. 5, p. 745–756

[28] Kirsch, U ; Rozvany, GIN: Alternative formulations of structural optimization. En: *Structural optimization* 7 (1994), Nr. 1-2, p. 32–41

[29] Lin, JH ; Che, WY ; Yu, YS: Structural optimization on geometrical configuration and element sizing with statical and dynamical constraints. En: *Computers & Structures* 15 (1982), Nr. 5, p. 507–515

[30] Linero, D. *PEFiCA-Programa de elementos finitos a código abierto. versión 1.0., Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, 2010*

[31] Linero, Dorian L.: Apuntes de clase de elementos finitos. (2002)

[32] Linero, Dorian L. ; Alvarado, Diego Alexander G.: *Elementos de la mecánica del medio continuo para cuerpos sólidos.* Univ. Nacional de Colombia, 2010

[33] Linero Segrera, Dorian L. ; Garzón-Alvarado, Diego A.: Enseñanza del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería Civil y Mecánica Utilizando el Programa de Computador a Código Abierto PEFICA. En: *Revista Educación en Ingeniería* 7 (2012), Nr. 14

[34] Lynch, S: MATLAB Programming for Engineers. En: *Applications of Chaos and Nonlinear Dynamics in Engineering-Vol. 1.* Springer, 2011, p. 3–35

[35] Martín, José Romo: Método de bielas y tirantes: monografía M-6 de ACHE. En: *Hormigón y acero* (2004), Nr. 231, p. 101–102

[36] Maxwell, J C.: I.—On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces. En: *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 26 (1870), Nr. 01, p. 1–40

[37] McKeown, JJ: The design of optimal trusses via sequences of optimal fixed displacement structures. En: *Engineering optimization* 14 (1989), Nr. 3, p. 159–178

[38] MicheU, AG: M. The limits of economy of material in frame structure [J]. En: *Philosophical Magazine* 8 (1904), Nr. 6, p. 589–597

[39] Missoum, Samy ; G-uacute, Zafer ; rdal: Displacement-based optimization for truss structures subjected to static and dynamic constraints. En: *AIAA journal* 40 (2002), Nr. 1, p. 154–161

[40] Misztal, Marek K. ; Bærentzen, Jakob A.: Topology-adaptive interface tracking using the deformable simplicial complex. En: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 31 (2012), Nr. 3, p. 24

[41] Nadal, Enrique ; Ródenas, JJ ; Sánchez-Orgaz, EM ; López-Real, S ; Martí-Pellicer, J: Sobre la utilización de códigos de elementos finitos basados en mallados cartesianos en optimización estructural. En: *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 30 (2014), Nr. 3, p. 155–165

[42] Owen, John Benjamin B.: *The analysis and design of light structures.* American Elsevier Pub. Co., 1965

[43] Park, Jaejong ; Sutradhar, Alok: A multi-resolution method for 3d multi-material topology optimization. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 285 (2015), p. 571–586

[44] Parra Arango, Ricardo L. [u. a.]: *Optimización topológica aplicada a problemas de elasticidad bidimensional usando elementos finitos*, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Grado

[45] Pedersen, Pauli: On the optimal layout of multi-purpose trusses. En: *Computers & Structures* 2 (1972), Nr. 5, p. 695–712

[46] Per, Jahren ; Tongbo, Sui: *History of Concrete: A Very Old and Modern Material.* World Scientific, 2017

[47] Prager, W ; Rozvany, GIN: Optimal Layout of Grillages†. En: *Journal of Structural Mechanics* 5 (1977), Nr. 1, p. 1–18

[48] Prager, William: A note on discretized Michell structures. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3 (1974), Nr. 3, p. 349–355

[49] Recktenwald, Gerald W.: *Numerical methods with MATLAB: implementations and applications.* Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2000

[50] Reinschmidt, Kenneth F. ; Russell, Alan D.: Applications of linear programming in structural layout and optimization. En: *Computers & Structures* 4 (1974), Nr. 4, p. 855–869

[51] Russell, Alan D. ; Reinschmidt, Kenneth F.: Discussion of Optimum Design of Trusses for Ultimate Loads. En: *Journal of the Structural Division* 97 (1971), Nr. 9, p. 2437–2442

[52] Sadd, Martin H.: *Elasticity: theory, applications, and numerics.* Academic Press, 2009

[53] Saka, MP: Shape optimization of trusses. En: *Journal of the Structural Division* 106 (1980), Nr. 5, p. 1155–1174

[54] Sanders, David H.: Verification and Implementation of Strut-and-Tie Model in LRFD Bridge Design Specifications. En: *AASHTO, Highway Subcommittee on Bridge and Structures* (2007)

[55] Schmidt, Stephan ; Schulz, Volker: A 2589 line topology optimization code written for the graphics card. En: *Computing and Visualization in Science* (2011), p. 1–8

[56] Schmit, Lucien A. ; Mallett, Robert H.: Structural synthesis and design parameter hierarchy. En: *Journal of the Structural Division* 89 (1963), Nr. 4, p. 269–300

[57] Shukla, Avinash ; Misra, Anadi ; Kumar, Sunil: Checkerboard problem in finite element based topology optimization. En: *International Journal of Advances in Engineering & Technology* 6 (2013), Nr. 4, p. 1769

[58] Sigmund, Ole: A 99 line topology optimization code written in Matlab. En: *Structural and multidisciplinary optimization* 21 (2001), Nr. 2, p. 120–127

[59] Spillers, William R. ; Kountouris, George E.: Geometric optimization using simple code representation. En: *Journal of the Structural Division* 106 (1980), Nr. 5, p. 959–971

[60] Sui, Yunkang ; Peng, Xirong: *Modeling, Solving and Application for Topology Optimization of Continuum Structures: ICM Method Based on Step Function.* Butterworth-Heinemann, 2017

[61] Sved, G ; Ginos, Z: Structural optimization under multiple loading. En: *International Journal of Mechanical Sciences* 10 (1968), Nr. 10, p. 803–805

[62] Thomas, H R. ; Brown, Daniel M.: Optimum least-cost design of a truss roof system. En: *Computers & Structures* 7 (1977), Nr. 1, p. 13–22

[63] Topping, Barry Hilary V.: *The application of dynamic relaxation to the design of modular space structures*, City University London, Tesis de Grado, 1978

[64] Val, Javier R.: *Estructuras de la Edificación.* Editorial Club Universitario, 2011

[65] Vanderplaats, Garret N. ; Moses, Fred: Automated design of trusses for optimum geometry. En: *Journal of the Structural Division* 98 (1972), Nr. 3, p. 671–690

[66] Wang, Mingming ; Qian, Xiaoping: Efficient Filtering in Topology Optimization via B-Splines. En: *Journal of Mechanical Design* 137 (2015), Nr. 3, p. 031402

[67] Zienkiewicz, Olgierd C. ; Taylor, Robert L.: *The finite element method: solid mechanics.* Vol. 2. Butterworth-heinemann, 2000