Clases de Fraïssé, Construcciones de Hrushovski y Algunas Aplicaciones de la Teoría de Ramsey.

María Victoria Cifuentes Amado
Matemática

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.

Septiembre de 2011

Clases de Fraïssé, Construcciones de Hrushovski y Algunas Aplicaciones de la Teoría de Ramsey.

María Victoria Cifuentes Amado
Matemática

Director
Andrés Villaveces Niño, Ph.D.
Profesor Asociado Universidad Nacional de Colombia

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.

Septiembre de 2011

Título en español

Clases de Fraïssé, Construcciones de Hrushovski y Algunas Aplicaciones de la Teoría de Ramsey.

Title in English

Fraïssé Class, Hrushovski Construction and some applications of Ramsey Theory

Resumen: En este trabajo estudiamos la dinámica de las clases de Fraïssé, algunos ejemplos, el comportamiento del grupo de automorfismos de su límite, algunas aplicaciones de la propiedad de Ramsey sobre estas clases y el traslado de uno de dichos resultados a el caso de las construcciones de Hrushovski.

En la parte inicial nos centramos en el trabajo sobre las clases de Fraïssé y dos importantes resultados obtenidos en dos contextos diferentes (estabilidad y dinámicas topológicas), en los cuales cada autor emplea la comprobación de la propiedad de Ramsey sobre algunas clases de Fraïssé, como herramienta para verificar las propiedades que busca. También revisamos el comportamiento de la clase de los nudos suaves, para visualizar su comportamiento análogo al de una clase de Fraïssé.

En la segunda parte, hacemos una breve introducción a las Construcciones de Hrushovski, una herramienta relativamente nueva que ha permitido la resolución de importantes conjeturas e interrogantes matemáticos. La idea es revisar estas construcciones como una generalización de las clases de Fraïssé y así, trasladar el resultado obtenido en el grupo de automorfismos del límite de Fraïssé, a el grupo de automorfismos de la estructura genérica asociada a la construcción de Hrushovski, y como veremos se logra de manera natural, eligiendo el lenguaje apropiadao y haciendo una reformulación de los diferentes conceptos y relaciones en términos de la " contenencia fuerte" definida sobre la construcción.

Abstract: We study the main features of dynamic of Fraïssé Class, some examples, the behavior of Automorphism group of their limits, some applications of Ramsey property on these classes, and the moving of one of these results to Hrushovski Construction case.

At the beginning, we work on Fraïssé Classes and on two important properties, which were gotten in different mathematic contexts (stability and topological dynamics), where authors proves Ramsey property on different Fraïssé Classes to get another results looking for them. We review the class ok knots and its similar behavior as a Fraïssé Class.

Finally, we do a brief introduction to Hrushovski constructions, which is an innovative tool used to solve important conjectures and questions. The aim is to review these constructions as a generalization of Fraïssé Class and on this way to transfer gotten result for Group of automorphisms of the Fraïssé Limit to the group of automorphisms of the generic structure associated to this new class, and we will be able to realize how you can get it on natural way, choosing suitable language and rewriting the concepts, relations and properties such as Ramsey, with respect to the "strong subset relation" which was defined on Hrushovski construction.

Palabras clave: Teoría de Ramsey, Clases de Fraïssé, Construcciones de Hrushovski, Extremadamente Llevadero, Teoría de Nudos, Enlaces, Estructura genérica, Propiedad de Modelación, Grupo topológico, Grupo de automorfismos, Homeomorphismos.

Keywords: Ramsey Theory, Fraïssé Classes, Hrushovski Constructions, Extremely Amenable, Knot Theory, Links, Generic structure, Modeling property, Topological group, Automorphism group, Homeomorphisms.

Dedicado a

A mi familia y a mis compañeros.

Agradecimientos

Agradezco principalmente a Dios por darme la fortaleza para seguir adelante cada día.

Agradezco tambíen a mi familia y amigos por su compañía y apoyo.

Agradezco a los diferentes docentes que me orientaron y ayudaron a resolver algunas inquietudes presentadas en mi tesis. Entre ellos destaco a Julien Melleray, profesor visitante de Lyon, quien planteó varios de los interrogantes consignados al final de la tesis. Las reuniones y discusiones con él, dieron como resultado interesantes preguntas, que pueden seguir siendo trabajadas. Finalmente expreso todo mi agradecimiento al profesor Andrés Villaveces, no sólo por todo el conocimiento que me trasmitió, sino por motivarme cada vez a seguir adelante, por enseñarme el gran valor del quehacer matemático y por permitirme el honor de estudiar bajo su dirección y ayudarme a incursionar en el manejo de estas nuevas herramientas relacionadas con las dinámicas topológicas y teoría de Ramsey.

Índice general

Introducción

La teoría de Ramsey, se ha convertido en una importante herramienta en diferentes ámbitos matemáticos, ya que debido a su gran versatilidad se puede aplicar sobre entes matemáticos de naturaleza diversa (grupos topológicos, clases de Fraïssé, ordinales, etc.).

Es el caso de Kechris, Pestov y Todorcevic, quienes en 2005 lograron interrelacionar una propiedad de dinámicas topológicas (ser grupo "extremadamente llevadero") con la teoría de Ramsey. Se dice que un grupo topológico G es *extremadamente llevadero*, si todo G-flujo X (acción continua de grupo de G sobre X) tiene un punto fijo. Probar esta propiedad tan solo con la definición no es tarea sencilla. Al enfrentarse con el problema de determinar si ciertos grupos de autormofismos eran extremadamente llevaderos, los tres autores implementaron el uso de dos nuevas herramientas para facilitar su investigación: la primera se refiere a la teoría de Fraïssé de clases de amalgamación y estructuras ultrahomogéneas y la segunda es el uso de la teoría de Ramsey aplicada a clases. El objetivo, es probar, bajo hipótesis adecuadas y un lenguaje finito relacional que contenga una relación de orden " $<$ ", que el grupo de automorfismos de una estructura M es extremadamente llevadero si y sólo si dicho modelo es el límite de una clase de Fraïssé de orden. De hecho el camino seguido en su artículo, está construido sobre una serie de equivalencias que logran hilvanar una importante propiedad topológica (extrem. llevadero) con el estudio de las clases de Fraïssé.

Por otra parte, y siguiendo el estudio de aplicaciones de la teoría de Ramsey, encontramos el trabajo de Lynn Scow, quien en su tesis doctoral, generalizó la caracterización que se tenía para estructuras estables: *una teoría T es estable si y solo si toda sucesión de indiscernibles de un modelo de T es conjunto indiscernible*. Scow introduce una nueva definición de indiscernibles (generalizados), y demuestra que una teoría T cumple NIP (en particular las estables) si y solo si los indiscernibles "*generalizados*" en cualquier modelo de T resultan ser sucesiones de indiscernibles. En este caso, a diferencia del anterior resultado la caracterización principal no está formulada en términos de la teoría de Ramsey; sin embargo, ésta desempeña un rol primordial en la prueba del teorema en cuestión, al actuar como eslabón en la transición de NIP a indiscernibles. En otras palabras, antes de llegar al resultado final, Lynn Scow demuestra que una clase de orden $\mathcal{K}$ es de Ramsey si y solo si en todo modelo de la teoría común de las estruturas de $\mathcal{K}$, cuya edad contenga la clase inicial, los indiscernibles generalizados tienen la propiedad de modelación, entendiendo la propiedad de modelación a grandes rasgos como la posibilidad de encontrar indiscernibles en un modelo que sean "*localmente equivalentes*" a un conjunto de parámetros dados (escogidos en el modelo). En ese caso se dice que el conjunto de indiscernibles *está basado sobre* el de los parámetros. Cabe resaltar que para poder probar la equivalencia anterior, se requiere agregar ciertas hipótesis sobre el lenguaje (finitamente relacional, que contenga una relación de orden,...) y el comportamiento de $\mathcal{K}$ (JEP, HP,...). Como se puede ver, Lynn Scow consigue relacionar la estabilidad generalizada (teoría de modelos) y la teoría de Ramsey.

Ya que los dos resultados anteriormente mencionados son actuales, permiten visualizar la importancia y el enfoque que hoy en día se le está dando a la teoría de Ramsey. De hecho, observando el trabajo de Kechris, Pestov y Todorcevic sobre clases de Fraïssé, aparece de forma natural, el preguntarse sobre el comportamiento del grupo de automorfismos del modelo genérico asociado a una construcción de Hrushovski, ya que ésta resulta ser una generalización del concepto de clase de Fraïssé. Sin embargo, se debe tener cuidado a la hora de trasladar los resultados, ya que varios conceptos básicos cambian drásticamente de uno a otro, como el de ser subestructura. En las construcciones de Hrushovski, se introduce una contenencia "fuerte", que elimina las contenencias que no cumplan ciertas condiciones de dimensión, la cual se define a partir de una relación ternaria que se define adicionalmente sobre los elementos de la clase tratada.

A continuación, veremos una exposición de los resultados anteriormente mencionados. En el primer capítulo se hará una revisión de la definición y algunos ejemplos de las Clases de Fraïssé, además del particular caso de la clase de los enlaces en teoría de nudos, la cual preserva las propiedades de una clase de Fraïssé, pero que ante la dificultad de establecer cuál es el lenguaje de primer orden apropiado para tratar esta clase, no sé puede decir qué es una clase de Fraïssé a cabalidad (Ver interrogantes y trabajo futuro).

En el segundo capítulo, retomamos la noción de Clases de Ramsey y en un gran teorema (Ver teorema principal, cap. 2), aunamos la caraterización para clases de Ramsey encontrada por Kechris, Pestov y Todorcevic en términos de que el grupo de automorfismos del límite de Fraïssé sea extremadamente llevadero, con la equivalencia trabajada por Lynn Scow, también para Clases de Ramsey pero en términos de la propiedad de modelación para indiscernibles generalizados. El resultado de Lynn Scow que exponemos en dicho teorema no es el resultado principal de [L.S09], sin embargo es una herramienta importante empleada por la autora para llegar a la conclusión que una teoría es NIP si y sólo si los indiscernibles generalizados (Ver 2.1.) son sucesión de indiscernibles. La exposición de este último resultado al no ser fundamental para el desarrollo del siguiente trabajo, la podemos encontrar en el apéndice.

Finalmente, en el tercer capítulo, hacemos un breve recuento de las Construcciones de Hrushovski y sus principales propiedades, basándonos en [Hru93] y así introducir el resultado original obtenido en el capítulo 4, en el cual logramos, haciendo un re ajuste del lenguaje y de las relaciones definidas en el capítulo 2 en términos de las construcciones de Hrushovski, mostrar que el grupo de automorfismos de la estructura genérica asociada a la construcción de Hrushovski es extremadamente llevadero.

CAPÍTULO 1

Clases de Fraïssé

La construcción de estructuras contables ha ocupado gran parte de la investigación matemática. El porqué se encuentra en la particularidad que tienen estas estructuras de poder ser contruidas a partir de cadenas enumerables de estructuras finitas. Surgen así las construcciones de Fraïssé, un ingenioso método desarrollado por Roland Fraïssé para garantizar la existencia y unicidad de la estructura límite de ciertas clases de estructuras finitas, que cumplieran propiedades que indicaremos más adelante. Dichas clases son las que se conocen como Clases de Fraïssé, y su estudio ha permitido la obtención de importantes resultdos, como la visualización de la clase de los órdenes finitos como un conjunto de aproximaciones a el orden de los racionales, y Fraïssé decribe cómo a partir de ellos construir el órden de los racionales como una estructura enumerable límite de la clase mencionada. Así como el ejemplo descrito, existen muchos otros casos en los que se puede utilizar éstas construcciones, y es por ésto que su estudio resulta tan relevante.

A continuación, precisaremos algunas nociones básicas sobre la teoría de Fraïssé.

Un *lenguaje* es una colección contable $L = \{R_i\}_{i\in I} \cup \{f_j\}_{j\in J}$ de símbolos de relación y función cada uno con una aridad (un entero que indica el número de argumentos en los cuales está definida la relación o la función). Una L-estructura es un objeto de la forma:

$$\mathbf{A}{=}(A, \{R_i\}^{\mathbf{A}}_{i\in I}, \{f_j\}^{\mathbf{A}}_{j\in J})$$

donde A es un conjunto no vacío, llamado el *universo* de **A**, es decir:

- $R_i^{\mathbf{A}} \subseteq A^{n(i)}$, donde $n(i)$ es la aridad de R_i.
- $f_j^{\mathbf{A}} : A^{m(j)} \to A$ donde $m(j)$ es la aridad de f_j.
- Cuando $m_j = 0$, $f_j^{\mathbf{A}}$ es un elemento distinguido de A (una constante).

Dadas dos L-estruturas **A, B**, un *homomorfismo* entre ellas es una aplicación: $\pi : A \to B$ tal que:

$$R_i^{\mathbf{A}} \Leftrightarrow R_i^{\mathbf{B}} \qquad y \qquad \pi(f_j^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_{m(j)})) \to f_j^{\mathbf{B}}(\pi(a_1), ..., \pi(a_{m(j)}))$$

Si el homomorfismo es inyectivo se llama *monomorfismo* o *inmersión*, y si es sobreyectivo se dice *epimorfismo*. Cuando es inyectivo y sobreyectivo a la vez es un *isomorfismo* y si **A**=**B** se denomina *automorfismo*.

Definición 1. *Tenemos las siguientes definiciones*

a. *Una estructura A se dice* ultrahomogénea *si todo isomorfismo entre subestructuras finitamente generadas de A se puede extender a un automorfismo de A.*

b. *La* edad *de A, $age(A)$ es la colección de todas las estructuras finitamente generadas inmersas en A.*

Observación 1. *La clase $\mathcal{K} = age(A)$ es no vacía y si A es ultrahomogénea satisface las siguientes propiedades:*

1. *Es hereditaria (HP): Si $B \in \mathcal{K}$ y C es una estructura finitamente generada inmersa en B entonces $C \in \mathcal{K}$.*

2. *(JEP):Si $B, C \in \mathcal{K}$, existe $D \in \mathcal{K}$ tal que B, C están inmersas en D.*

3. *Amalagamación (AP): Si $B, C, D \in \mathcal{K}$ y $f : B \to C$, $g : B \to D$ son inmersiones, entonces existe $E \in \mathcal{K}$ e inmersiones $r : C \to E$, $g : D \to E$ tales que $r \circ f = s \circ g$.*

1.1. Existencia y Unicidad del límite de Fraïssé:

Dado L y $\mathcal{K}$ una clase de estructuras para L, finitamente generadas. Si $\mathcal{K}$ es no vacía, contable (contables no isomorfos) y que satisface HP, JEP y AP. Entonces existe una única estructura A (salvo isomorfismo), contable, ultrahomogénea tal que $\mathcal{K} = age(A)$.

Dicha estructura es el **límite de Fraïssé** de $\mathcal{K}$. $A = Flim(\mathcal{K})$.

Demostración. Ver Hodges [Hod93], cap. 7.1.

□

Para concluir esta sección, enunciaremos la siguiente definición:

Definición 2. *Dado L algún lenguaje*

- *Una* clase de Fraïssé *en L es una clase de estructuras finitas de L, contable y que satisface HP, JEP y AP.*
- *Una* estructura de Fraïssé *en L es una estructura contable la cual es localmente finita y ultrahomogénea. (Localmente finita = subestructuras finitamente generadas son finitas).*

Sea U una clase de L-estructuras (para algún L) finitamente generadas. Si además $\{<\} \subseteq L$, tal que todas las estructuras de U son linealmente ordenadas por

" $<$ ", entonces U se denomina una *clase de orden.*

Ejemplo 1. *Algunos ejemplos de clases de Fraïssé son:*

- **Grafos***:*

  Sea $L_0 = E$ *y* $L = E, <, R$ *y* E *una relación binaria. Una estructura* $\mathbf{A_0} = (A_0, E^{A_0})$ *es un grafo si la relación es simétrica y antireflexiva. Un grafo ordenado es* $\mathbf{A} = (\mathbf{A_0}, <^{\mathbf{A_0}})$ *donde* $\mathbf{A_0}$ *es un grafo. Tenemos las siguientes clases de Fraïssé de grafos finitos (Ver [A.H94]):*

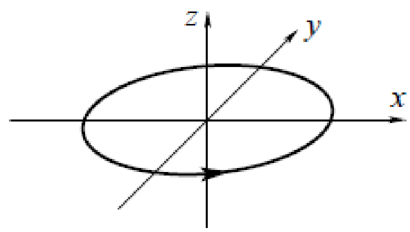
  1. *GR= todos los grafo finitos.*
  2. $\forall n = 3, 4, 5....$, $Forb(K_n)$= *la clase de todos los grafos finitos que omiten* K_n, *el grafo completo de n vértices.*
  3. *EQ = la clase de relaciones de equivalencia finitas. (Quitando en cada uno de ellas la diagonal, es decir las parejas (x,x), para que sean grafos).*
  4. EQ_n = *la clase de todos las relaciones de equivalencia finitas con a lo más n clases.*
  5. EQ_n* = *la clase de relaciones de equivalencia finitas, tal que sus clases tienen a lo más n elementos.*

- *Los espacios vectoriales* $\aleph_0$ *- dimensionales sobre un cuerpo finito. (Ver[S.T73]).*

1.2. Clase de los enlaces - Teoría de nudos: Una Aproximación Categórica

Por un *nudo parametrizado* se entiende un encaje o inmersión suave (C^∞, inyectiva y cuyo diferencial nunca se anula) de S^1 en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2. *El nudo más sencillo es representado por el círculo plano $x = cost$, $y = sent$ y $z = 0$.*



Definición 3. 1. *Una* familia suave de isotopías *se refiere a una transformación suave $F : S^1 \times I \to \mathbb{R}^3$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo. Para cada valor fijo de I, obtenemos una transformación $f_a : S^1 \to \mathbb{R}^3$.*

2. *Una* isotopía suave *de un nudo $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$, es una familia suave de nudos f_u, donde $u \in \mathbb{R}$ y existe algún real a tal que $f_a = f$.*

3. *Dos nudos parametrizados se dicen* ambiente equivalentes *si existe un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\psi"] \\ S^1 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

donde ϕ y ψ son difeomorfismos que preservan la orientación.

4. *Dos nudos parametrizados se dicen* ambiente isotópicos*, si existe una familia suave de difeomorfismos $\psi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\psi_0 = id$ y $\psi_1 \circ f = g$.*

En esta sección nos limitaremos a los nudos suaves, por lo tanto asumiremos que dos nudos son *equivalentes* si son ambiente equivalentes o ambiente isotópicos. Se dice que un nudo es *trivial* si es equivalente al círculo plano.

Una vez establecida la equivalencia entre nudos, no es difícil verificar que ésta es una relación de equivalencia, y por lo tanto cuando se habla de un nudo, se está considerando toda la clase de equivalencia del mismo.

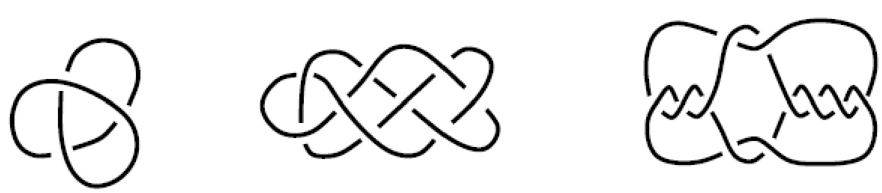


Figura 1.1: Nudos Triviales - Tomado de [JM11]

Pero los nudos son un caso particular de los enlaces. Un *enlace* es una inmersión suave de $S^1 \sqcup ... \sqcup S^1$ en $\mathbb{R}^3$, donde $S^1 \sqcup ... \sqcup S^1$ representa la unión disyunta de varios círculos. Para hablar de la equivalencia entre enlaces, se utiliza una definición totalmente análoga a la ya establecida en nudos, en otras palabras, decimos que dos *enlaces son equivalentes* si existe un homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que envía la imagen del primer enlace en la del segundo.

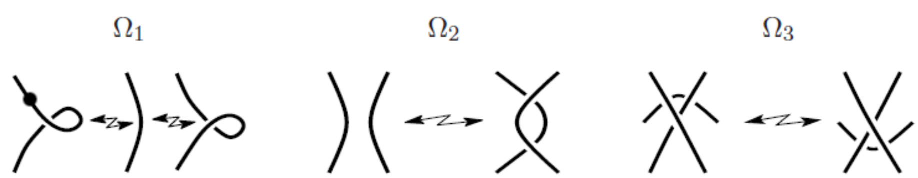
Un nudo se describirá generalmente por medio de su diagrama, que representa su proyección sobre el plano, destacando en cada cruce la diferencia entre el tramo que está encima y el que está debajo (marcado con una interrupción).

Es posible que al proyectar dos nudos diferentes en determinada dirección, se pierda información y se obtenga la misma proyección. Para evitar este inconveniente se trabaja con las *proyecciones regulares*, que contienen toda la información necesaria, para diferenciar un nudo de otro.

Pero el mismo nudo admitirá distintas representaciones en forma de diagrama, así que se tendrán diferentes diagramas equivalentes entre sí. Entonces el problema radica ahora en determinar cuándo dos diagramas representan un mismo nudo.

Una forma práctica de verificar la equivalencia entre dos diagramas planos regulares, es utilizando los movimientos de *Reidemeister*:

Teorema 1 (Movimientos de Reidemeister)**.** *Dos diagramas planos regulares representan un mismo nudo si se puede transformar uno en el otro por una secuencia de isotopías de ambiente del plano y secuencias de movimientos locales de los siguientes tres tipos:*



Entonces para verificar equivalencia entre nudos, el problema se reduce a determinar la equivalencia entre sus diagramas planos. Análogamente, se puede hablar de diagramas planos que representen los enlaces y la forma de definir la equivalencia entre ellos a partir de los movimientos de Reidemeister aplicados a los nudos componentes del enlace.

Al igual que en los nudos, cuando hablemos de un enlace, nos estaremos refiriendo a la clase de equivalencia del enlace considerado. Ahora la idea es verificar que definiendo una suma de enlaces y una relación de "sub-enlace" apropiadas, el conjunto de los enlaces suaves resulta ser clase de Fraïssé.

Definición 4. *La forma natural de sumar dos enlaces es uniéndolos de la siguiente forma:*

$$\begin{array}{ccl} f : S^1_{(1)} \sqcup ... \sqcup S^1_{(n)} \to \mathbb{R}^3 & & \\ + & \Longrightarrow & f + g : S^1_{(1)} \sqcup .... \sqcup S^1_{(n)} \sqcup S^1_{(n+1)} \sqcup ... \sqcup S^1_{(n+m)} \to \mathbb{R}^3 \\ g : S^1_{(n+1)} \sqcup ... \sqcup S^1_{(n+m)} \to \mathbb{R}^3 & & (x_i, y_i) \to f + g(x_i, y_i) = \begin{cases} f(x_i, y_i) & si\ 1 \leq i \leq n \\ g(x_i, y_i) & si\ n+1 \leq i \leq n \end{cases} \end{array}$$

y se denota como $K_1 + K_2$*, donde* K_1 *y* K_2 *son los enlaces a sumar.*

Para poder visualizar los enlaces como clase de Fraïssé, el conjunto se debe dotar de una relación de "$sub - enlace$":

Definición 5. *Sean* g *y* f *enlaces,* $f : S^1_{(1)} \sqcup ... \sqcup S^1_{(n)} \to \mathbb{R}^3$ *y* $g : S^1_{(1)} \sqcup ... \sqcup S^1_{(m)} \to \mathbb{R}^3$*, entonces diremos que* f *es* sub-enlace *de* g*,* $f \preceq g$ *si:*

1. $n \leq m$
2. *Existe un auto-homeomorfismo de* $\mathbb{R}^3$*,* H*, tal que* $H(Img(f)) \subseteq Im(g)$*.*

Una vez introducidas estas definiciones, la idea es utilizarlas para revisar que la clase presenta un comportamiento similar a las clases de Fraïssé. Si no la catalogamos como tal, es por la dificultad que representa establecer especificamente el lenguaje y sus subestructuras. Por lo tanto le daremos un tratamiento más categórico y trabajaremos con una Categoría de Fraïssé ([Kub08]), cuyos objetos serán claramente los diferentes enlaces, y sus morfismos los homeomorfismos de ambiente.

Sea $\mathcal{K}$ la clase de los enlaces suaves:

1. Es **Hereditaria** (HP): Si $f \in \mathcal{K}$ (es decir $f : S^1 \sqcup ... \sqcup S^1 \to \mathbb{R}^3$ inmersión suave) y sea g un sub-enlace de f, entoces $g \in \mathcal{K}$. Claramente se tiene por la definición de sub-enlace. Esta propiedad normalmente no se revisa en categorías, ya que se asume que todos los objetos con los que se está trabajando forman parte de la categoría.
2. Es (**JEP**): Si $f, g \in \mathcal{K}$, existe $h \in \mathcal{K}$ tal que $f, g \preceq h$. Para comprobar este punto, dados los enlaces f y g, basta con encontrar h que cumpla el requerimiento dado. Entonces sea $h := f + g$, es decir, la suma de los dos enlaces dados. No es difícil verificar que en efecto, los enlaces f y g son sub-enlaces de h. (El auto-homeomorfismo necesario es la identidad).
3. Es clase de **Amalgamación** (AP): Si $f, g, h \in \mathcal{K}$ y $A : f \to g$,

   $B : f \to h$ son inmersiones, entonces existe $j \in \mathcal{K}$

   e inmersiones $R : h \to j$, $S : g \to j$ tales que $R \circ A = S \circ B$.

$$\begin{tikzcd}
 & g \arrow[dr, dashed, "R"] & \\
f \arrow[ur, "A"] \arrow[dr, "B"'] & & j \\
 & h \arrow[ur, dashed, "S"'] &
\end{tikzcd}$$

Para demostrar esta parte en la clase de los enlaces, primero debemos interpretar el enunciado en dicho entorno. Entonces la pregunta sería ¿qué significa una inmersión de un enlace en otro?, pues como lo referimos renglones atrás, una inmersión es una inyección continua cuya inversa restringida a su imagen también resulta continua, y como es entre enlaces, las inmersiones se trazan sobre sus imagenes (subconjuntos de $\mathbb{R}^3$). De hecho esta definición de inmersión, es exactamente la que se convino como ser "$sub - enlace$". Entonces la afirmación de que A y B son inmersiones, traduce en que $f \preceq h$ y $f \preceq g$. Ahora para determinar quiénes son R, S y j, los cuales hacen que el anterior diagrama conmute, basta hacer $j := h + g$; claramente $h \preceq j$ y $g \preceq j$. Ahora para determinar R y S, podemos tomar la inmersión natural de h y g en el enlace j que representa su suma, es decir, $R, S :=\preceq$.

Para verificar el adecuado funcionamiento de las escogencias hechas para R, S y j, basta ver que $R \circ A(f) = S \circ B(f)$, pero en esta notación se debe tener cuidado con el significado ya que estamos hablando de igualdad entre enlaces y como vimos al principio de la sección, cada vez que hablamos de un enlace, en realidad estamos considerando toda su clase de equivalencia, luego dos enlaces serán iguales siempre y cuando sus imagenes sean homeomorfas, y para este caso particular, como A, B, R y S, denotan homeomorfismos (considerando cada función restringida a su imagen, para poder hablar de inversa), sus respectivas compuestas son también homeomorfismos, entonces obtenemos que en efecto los enlaces $R \circ A(f)$ y $S \circ B(f)$ son homeomofismos que transforman a f en j.

De las anteriores obsevaciones concluimos que K, es una clase cuyo comportamiento es análogo al de las clases de Fraïssé, teniendo en cuenta que implícitamente cuando decimos que dos enlaces son iguales, nos estamos refiriendo a que son equivalentes (ya que rigurosamente hablando, cuando tomamos un enlace, no lo estamos considerando individualmente, sino a toda su clase de equivalencia) y la contenencia tradicional considerada en las clases de Fraïssé, es en este caso reemplazada por la relación de sub-enlace arriba establecida. Por lo tanto (Ver existencia del límite de Fraïssé, cap. 2), surge la pregunta de cómo sería un límite para nuestra clase. Sería como una especie de "enlace de Fraïssé". La idea para su visualización es la siguiente:

1. Sea $L_0 \preceq .... \preceq L_n....$ sucesión de enlaces que cumple la siguiente condición: si

algún enlace L cumple que existe i tal que existe una inmersión $f : L \to L_i$ para algún $i < \omega$, entonces existe $j > i$ y una inmersión $g : B \to L_j$ que extiende a f. Esta sucesión se contruye por amalgamación:

Sea $P = \{(A, B) : A \preceq B \quad y \quad A, B \in \mathcal{K}\}$. Supongamos que P, tiene un representante por cada tipo de isomorfismo de estos pares, y sea $\pi : \omega \times \omega \to \omega$ una biyección, tal que $\pi(i, j) \geq i, \forall i, j$. Ahora sea $L_0 \in \mathcal{K}$, y la idea es construir la sucesión por inducción. Supongamos que ya tenemos L_k, y consideremos la lista $((f_{kj}, A_{kj}, B_{kj}) : j < \omega)$ de triplas (f, A, B), tal que $(A, B) \in P$ y $f : A \to L_k$. Construimos L_{k+1} por amalgamación, ya que si $\pi(i, j) = k$, entonces $f_{i,j} : A_{ij} \to L_k$ se puede extender a una inmersión de B_{ij} en L_{k+1}.

$$\begin{array}{ccccccccc}
L_0 & \dashrightarrow & L_1 & \cdots & L_k & \dashrightarrow & L_{k+1} & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
A_{00} & \hookrightarrow & B_{00} & \cdots & A_{ij} & \hookrightarrow & B_{ij} & \cdots
\end{array}$$

2. Tomamos la clase de todas las sucesiones contables de enlaces, y la partimos según la siguiente relación de equivalencia: $L_0 \preceq .... \preceq L_n....$ es equivalente a $L'_0....L'_n \preceq ...$ si $\forall i \exists j$ tal que $L'_i \preceq L_j$.

3. Lo que entenderemos como "enlace de Fraïssé" será la clase de equivalencia por la relación (2), de la sucesión construida en (1).

El nuevo objeto construido, en cierta forma, acumula dentro de sí toda la información básica de la clase de los enlaces, ajustándose así a la noción intuitiva de un límite. Sin embargo, no se debe perder de vista que el objeto obtenido no es de la naturaleza de los enlaces, es decir, no es como se podria pensar, un gran enlace que sumergiera elementalmente todos los enlaces finitos. Queda el interrogante de si es posible encontrar un límite de Fraïssé a nuestra clase, de hecho aún no existe explícitamente una teoría de los enlaces escrita en lógica de primer orden con un lenguaje apropiado que nos permitiera afirmar que en efecto nuestra clase es una clase de Fraïssé.

Para terminar esta sección, haremos el siguiente comentario. La clase que utilizamos en el presente ejemplo solo contemplaba los enlaces suaves, asumiéndolos no orientados, es decir aquellos representados por funciones suaves, para evitar complicaciones con la orientación o las equivalencias entre enlaces.

CAPÍTULO 2

Clases de Ramsey

2.1. Nociones Básicas

Sea A, B L-estructuras para L algún lenguaje.

1. $A \leq B$ denota que en B existe una copia isomorfa de A.
2. Si $A \leq B$, se define:

$$\left(\begin{array}{c} B \\ A \end{array} \right) = \{A_0 : A_0 \subseteq B \quad y \quad A_0 \cong A\}$$

3. (Notación de Erdös-Rado) Para $A \leq B \leq C$, $k = 2, 3, ...$, se dice que $C \to (B)^A_k$ si para toda coloración $c : \left(\begin{array}{c} C \\ A \end{array} \right) \to \{1, ..., k\}$, existe $B_0 \in \left(\begin{array}{c} C \\ B \end{array} \right)$ tal que para algún $i \in \{1, ..., k\}$, $c \restriction \left(\begin{array}{c} B_0 \\ A \end{array} \right) = i$.
4. Sea $\mathcal{K}$ una clase de estructuras finitas en un lenguaje L. Se dice que $\mathcal{K}$ es una *clase de Ramsey* si para cualesquiera $A \leq B$ en $\mathcal{K}$ y para todo $k = 2, 3, ...$, existe $C \in \mathcal{K}$ tal que $C \to (B)^A_k$. Utilizando inducción, esta propiedad es equivalente al mismo enunciado pero con $k = 2$.

Algunos ejemplos de clases de Ramsey son:

Ejemplo 3. *1. EQ_1, la clase de relaciones de equivalencia con 1 sola clase es clase de Ramsey.*

Demostración. Por el teorema clásico de Ramsey. Ver [Hod93]. □

2. *GR, $Forb(K_n), n = 3, 4, ...$ y EQ definidas como en el ejemplo 1 del capítulo 1, son clases de Ramsey.*

   Demostración. Demostrado por Nešetřil y Rödl. Ver [J.N77]. □

El objetivo de esta sección es analizar algunas de las propiedades de las clases de Ramsey, desde diferentes ámbitos matemáticos. En un primer contexto, se estudiarán dichas clases en relación al hallazgo y comportamiento de indiscernibles generalizados en modelos indexados por una estructura que satisfaga la teoría común de la clase estudiada. En un segundo momento, y bajo hipótesis adecuadas sobre la clase inicial (para garantizar que la clase sea de Fraïssé), el contexto se desplazará hacia la topología y se encontrará una caracterización de ser clase de Ramsey en términos del cumplimiento de una propiedad topológica por parte de los grupos de automorfismos del límite de Fraïssé de la clase. Antes de definir y describir rigurosamente los elementos de cada uno de los ambientes, veamos el enunciado del teorema alrededor del cual gira el desarrollo de esta sección:

Teorema 2 (Teorema Principal)**.** *[Kechris, Pestov, Todorcevic, Scow]*

Sea:

- *L un lenguaje arbitrario*
- *L' un lenguaje finito relacional que contiene un símbolo de relación binaria para orden $<$*
- *U una clase de orden de $L'-$ estructuras finitas, que cumple JEP y HP.*
- *T' la L' teoría común de las estructuras de U.*

Entonces se tiene la siguiente equivalencia:

1. *U es clase de Ramsey.*
2. *Para todo $I \models T'$, tal que $age(I) = U$, y para todo A, B, k con $A \leq B \in U$ y $k \in \omega$, se cumple $I \to (B)^A_k$.*
3. *Para todo $I \models T'$, tal que $age(I) \supseteq U$, $I-$ indiscernibles tienen la propiedad de modelación.*
4. *U es clase de Fraïssé y $Aut(A)$ es un grupo extremadamente llevadero, donde $A = Flim(U)$.*

La demostración de este teorema implica el uso de dos resultados fundamentales: $1 \Leftrightarrow 2$ y $1 \Leftrightarrow 3$ como en [?] y enfocado a la caracterización de ciertas propiedades modelo-teóricas; y $1 \Leftrightarrow 4$ debido a Pestov, Todorcevic y Kechris [AK76], cuyo objetivo fue caracterizar una propiedad de dinámicas topológicas (el ser un grupo extremadamente llevadero) en términos de la teoría de Ramsey. En las siguientes subsecciones se esclarecerán la notación y las definiciones pertinentes para entender el sentido de las equivalencias a probar.

Observación 2. *Antes de ésto revisaremos la caracterización más sencilla* $1 \Leftrightarrow 2$*:*

Demostración. Claramente $1 \Rightarrow 2$; faltaría ver $1 \Leftarrow 2$. Para esto supongamos que se tiene (2) y no (1), es decir, existen $A, B \in U$ y $k \in \omega$ y para todo $C \in U$, existe una coloración $f_C : \binom{C}{A} \to \{1, ..., k\}$ t.q. para todo $B' \in \binom{C}{B}$, f_C no es monocromático sobre $\binom{B'}{A}$. Sea $\|A\| = m$ y sean:

- $(C_\alpha : \alpha < \omega)$ una enumeración de las estructuras de U con cardinalidad $> k$, una por cada tipo de automorfismo. (es contable porque el lenguaje es finito relacional).
- Para cada $n \in \omega$, $(C_i^n : i < s_n)$ es una enumeración de las estructuras de U de tamaño n, de tal forma que C_i^n está inmerso en todo C_α para $\alpha \geq \beta(n, i)$ donde $\beta(n, i)$ es algún natural fijo para i y n.
- $L^+ = L' \cup \{c_0, c_1, ..., c_k\} \cup \{f(x_1, ..., x_m)\}$

Se expande cada C_α a L^+:

- Las c_i se interpretan en cada C_α como elementos distintos.
- $f^{C_\alpha}(\bar{a}) = \begin{cases} c_{f_C(\bar{a})} & si\ \bar{a} \cong A \\ c_0 & e.o.c \end{cases}$

Sea D un ultrafiltro que extiende el filtro de cofinitos en ω y sea $\mathcal{U} = \Pi_{\alpha<\omega} C_\alpha / D$. Como cada elemento de U es de la forma C_i^n y dado que el lenguaje es finito relacional, podemos representar el tipo de cada estructura de éstas, como una fórmula $\exists \bar{x} \phi(\bar{x})$. Dado que $\forall \alpha > \beta(n, i)$, C_i^n está inmerso en C_α, entonces por el teorema de Łoś, $\mathcal{U} \models \exists \bar{x} \phi \bar{x}$ entonces hay una copia isomorfa a C_i^n contenida en $\mathcal{U}$; en otras palabras, $U \subseteq age(\mathcal{U})$, lo cual implica $U = age(\mathcal{U})$ (ver mas adelante Lema 1 de la sección 2.2, demostración "$\Rightarrow$") y ya que cada $C_\alpha \models T'$, $\mathcal{U} \models T'$; adicionalmente como en cada C_α existe una interpretación para f existe una coloración sobre $\mathcal{U}$ a partir de f. Por hipótesis (2), existe $B' \in \mathcal{U}$ isomorfo a B y homogéneo con respecto a la coloración inducida, es decir existe $k_0 \in \{1, ..., k\}$ t.q.

$$\mathcal{U} \models \exists \bar{y} \left(p_B(\bar{y}) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{\bar{x} \in \wp(\bar{y}) \\ lg(\bar{x}) = m}} p_A(\bar{x}) \to f(\bar{x}) = c_{k_0} \right) \right)$$

Usando *Łoś*, el conjunto de los α tales que C_α satisface la sentencia de arriba, pertenece a D luego es no vacío. Sea C_{α_0} alguno de los que la cumplen, luego existe $B' \in \binom{C_{\alpha_0}}{A}$ tal que $f^{C_{\alpha_0}}\left\{\binom{B'}{A}\right\} = c_{k_0}$, luego $f_C(\bar{a}) = k_0$ para todo $\bar{a} \in \binom{B'}{A}$ $(\rightarrow\leftarrow)$. $\square$

2.2. La propiedad de modelación y clases de Ramsey (1⇔3)

La idea en esta sección, es probar la equivalencia 1⇔3 del teorema 1 arriba enunciado. Este resultado fue obtenido por Lynn Scow, y lo que proporciona es una caracterización de las clases de Ramsey en términos de si los indiscernibles generalizados (Ver definición 6) en los modelos de la teoría común de la clase tomada, tienen la propiedad de modelación ó no. En esta primera parte, se trabajará con dos lenguajes L y L'. Como la idea es emplear indiscernibles, supongamos que se tiene una L'-teoría de índices que llamaremos T' y una $L-$ teoría indexada T, tal que para toda $I \models T'$, L'-estructura de índices y para toda $M \models T$, L-estructura indexada, existe una función $f : I \rightarrow M$ tal que $f(i) = a_i$ (en otras palabras I indexa a M).

Con estas hipótesis se introducen las siguientes definiciones y notaciones.

1. Dada $\bar{i}$ una tupla de I, $qftp^I(\bar{i})$ denota el conjunto de las $L'-$ fórmulas libres de cuantificadores satisfechas por la tupla $\bar{i}$ en I.

2. Dadas dos $L'-$estructuras A, B una aplicación $f : A \rightarrow B$ es una $L'-$ *inmersión* si es inyectiva y para toda relación $R \in L'$, $R^A(\bar{a}) \leftrightarrow R^B(f(\bar{a}))$.

3. Dado un $L-$modelo M:

   (a) $|M|$ denota su dominio y $\|M\|$ la cardinalidad de $|M|$.

   (b) $\bar{a}_{\bar{i}}$ denota la tupla en M, $(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n})$ donde $\bar{i} = (i_1, i_2, ..., i_n)$ es una tupla de I.

   (c) Dada $\bar{a}_{\bar{i}} \in M$, $tp^M(\bar{a}_{\bar{i}})$ es el conjunto de todas las $L-$fórmulas satisfechas por $\bar{a}_{\bar{i}}$ en M.

   (d) I es un modelo *qf-débilmente saturado* de T', si I realiza todos los qf-tipos consistentes con T'. Por qf-tipos entendemos los tipos libres de cuantificadores.

   (e) T' es una teoría *qf-$\aleph_0$-categórica*, si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe solo un número finito de tipos qf-n-tipos (es decir qf-tipos en n variables) consistentes con T'.

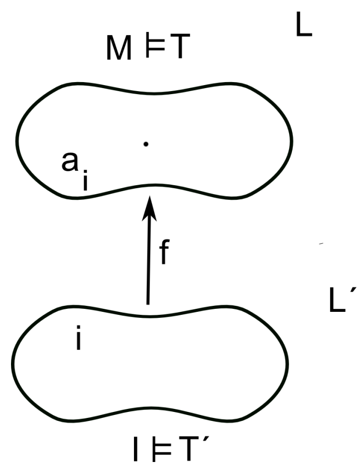


Figura 2.1: Esquema modelos indexados

Observación 3. *Si L' es finito relacional, toda $L'-$ teoría T'es qf-$\aleph_0$-categórica. Y si además la teoría es completa, por el teorema de Engeler, Ryll- Nardzewski y Svenonius, para todo $n \in \omega$, los tipos de $S_n(T)$ son aislados.*

Definición 6. 1. *Sea $L_g = \{R, <\}$ y por T_g entendemos la teoría de grafos simétricos sin ciclos (R es antirreflexiva y simétrica) y linealmente ordenados por una relación binaria $<$. Para abreviar la notación, estos grafos son llamados* grafos ordenados.

2. *Un tipo* grafo-ordenado completo *es un qf-tipo (flas sin cuantificadores) consistente con T_g completo para el qf-lenguaje.*

3. *Un tipo* R-completo *es un qf-tipo consistente con T_g completo para $L_g \restriction_{\{R\}}$.*

4. *Un tipo* orden-completo *es un qf-tipo consistente con T_g completo para $L_g \restriction_{\{<\}}$. item (Indiscernibles Generalizados) Sea M una $L-$ estructura y I una L'-estructura. $(a_i : i \in I) \subseteq M$ es I-indiscernible* en M, *si $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$qftp^I(i_1, ..., i_n) = qftp^I(j_1, ..., j_n) \Longrightarrow tp^M(a_{i_1}, ..., a_{i_n}) = tp^M(a_{j_1}, ..., a_{j_n})$$

No es difícil observar que esta definición de indiscernibles generalizados contiene a la de conjuntos y sucesiones de indiscernibles: el primer tipo se tiene cuando $L' = \emptyset$ y el segundo cuando $L' = \{<\}$. En la mayor parte de este trabajo, el lenguaje para los modelos de índices será $L_g = \{R, <\}$, y a los I - indiscernibles para I modelo de T_g se le conoce usualmente como $L_g - indiscernibles$. Así como existen sucesiones de indiscernibles que no son conjuntos de indiscernibles existen L_g- indiscernibles que nos son sucesiones de indiscernibles u orden-indiscernibles.

Ejemplo 4. *Sea $A := (\mathbb{Q}, <)$ y recordemos que $L_g = \{R, <\}$. Para la relación de grafo definamos una relación binaria por extensión, así $R^A := \{(1, 3), (3, 1)\}$ la cual es claramente simétrica, sin ciclos y trivialmente antireflexiva. Ahora supongamos*

a y b tuplas de A tales que $a \equiv_0 b$ (es decir $qftp^A_{L_g}(a) = qftp^A_{L_g}(b)$) y dada $c \in A$ veamos que existe $d \in A$ tal que $ac \equiv_0 bd$ (para así usando un criterio, afirmar que $Th_{L_g}(A)$ tiene eliminación de cuantificadores). Si $(1,3) \subseteq a$ entonces se tiene $a \models R^A$, por hipótesis, $(1,3) \subseteq b$ ó $(3,1) \subseteq b$ y dadas cualesquiera c, d tuplas no vacías, $ac \models R^A$ y $bd \models R^A$; pero si $a, b \not\models R^A$ y aún $ac \not\models R^A$, entonces $\{frm[o]--,3\} \nsubseteq a, b, c$. Ya que $Th_{\{<\}}(A)$ tiene QE entonces existe $d \in A$ tal que $qftp^A_{\{<\}}(ac) = qftp^A_{\{<\}}(bd)$ y $\{frm[o]--,3\} \nsubseteq a, b, c, d$, de donde se deduce que $ab \equiv_0 cd$.

Ahora tomemos $I = \mathbb{N}$, $M = A$, y $B = \{a_i : a_i = i \quad y \quad i \in I\} \subseteq M$. B es $I-$ indiscernible, ya que $Th_{L_g}(A)$ elimina cuantificadores luego

$$qftp^I\left(\bar{i}\right) = qftp^I\left(\bar{j}\right) \Leftrightarrow tp^M\left(\bar{i}\right) = tp^M\left(\bar{j}\right) = tp^M\left(\bar{a}_{\bar{i}}\right) = tp^M\left(\bar{a}_{\bar{j}}\right)$$

Pero no es sucesión indiscernible: existen las tuplas $1 < 2$ y $1 < 3$ pero $A \models \neg R^A(1,2) \wedge R^A(1,3)$.

Definición 7 (Propiedad de modelación)**.** *Sean I una $L'-$ estructura*

1. *Sea M una $L-$estructura. Dado un conjunto $(a_i : i \in I)$ en M, se dice que $(b_i : i \in I)$ $I-$ indiscernible,* está basado sobre los *a_i si para todo Σ conjunto finito de $L-$ fórmulas y $\forall \bar{s}$ tupla de I, existe $\bar{t} \in I$ tal que $\bar{s} \cong \bar{t}$ y $tp^\Sigma\left(\bar{b}_{\bar{s}}; M\right) = tp^\Sigma\left(\bar{a}_{\bar{t}}; M\right)$.*
2. *Si es posible encontrar $I-$ indiscernibles en todo los modelos $\|I\|^+ -$ saturados, se dice que los $I-$ indiscernibles* tienen la propiedad de modelación, *si para cualquier conjunto $(a_i : i \in I) \in M$ (M un modelo $\|I\|^+ -$ saturado), existe un $I-$ indiscernible en M basado sobre los a_i.*

Ejemplo 5 (Scow)**.** *Los I-indiscernibles con $|I| = 2^{<\omega}$ visto como árbol, es decir, el lenguaje de I tiene una constante para representar la raiz y una relación para η, ν que indica cuando η es segmento inicial de ν. Estos I-indiscernibles tienen la propiedad de modelación. Ver [L.S09].*

Lema 1 (L.Scow)**.** *Sean*

- *L' un lenguaje finito relacional que contiene un símbolo de relación binaria para orden $<$.*
- *U una clase de orden de $L'-$ estructuras finitas, que cumple JEP y HP.*
- *T' la $L'-$ teoría común de las estructuras de U.*

entonces U es clase de Ramsey si y sólo si para todo $I \models T'$, tal que $age(I) \supseteq U$, los $I-$ indiscernibles tienen la propiedad de modelación.

Demostración "⇒". • $age\,(I) = U$: Como $I \models T'$, entonces $Th(I) \vdash T'$. Sea $B \in age\,(I)$, como el lenguaje es finito relacional y por la Observación 3, existe una fórmula $\varphi\,(\bar{x})$ que aisla el tipo el tipo de B en I, es decir $I \models \exists \bar{x} \varphi\,(\bar{x})$. Ahora, si B no estuviera en U, todos los modelos de U satisfarían $\forall \bar{x} \neg \varphi\,(\bar{x})$ y esta fórmula estaría en T' lo cual contradice que $I \models T'$.

Ahora la idea es tomar un conjunto $(a_i : i \in I)$ en M, en alguna $L-$ estructura, y encontrar los $I-$ indiscernibles pedidos en M.

1. Se toma un conjunto de nuevas constantes $\{c_i : i \in I\}$ y se construye el siguiente tipo, en el lenguaje ampliado $L \cup \{c_i\}$

   $$\Gamma = B_1 \cup B_2$$

   donde:

   $$B_1 := \{\psi\,(c_{i_1}, ..., c_{i_m}) : \psi \in L,\ \forall \bar{s} \in I,\ qftp^I\,(\bar{s}) = qftp^I\,(\bar{i}) \Rightarrow \models \psi\,(\bar{a}_{\bar{s}})\}$$
   $$B_2 := \left\{\theta\,(\bar{c}_{\bar{i}}) \leftrightarrow \theta\left(\bar{c}_{\bar{j}}\right) : \bar{i}, \bar{j} \in I,\ \theta \in L \text{ y } qftp^I\,(\bar{j}) = qftp^I\,(\bar{i})\right\}$$

2. Una realización de Γ es uns sucesión $I-$ indiscernible basada sobre los a_i:

   Demostración. Por B_2 la realización será sucesión $I-$ indiscernible. Ahora para verificar que está basada sobre los a_i, tomamos algún conjunto finito de L-fórmulas y la respectiva localización del tipo de una sucesión $b_{\bar{s}}$ tomada de la realización; como dicho tipo es finito, se puede representar por una conjunción finita de fórmulas $\psi(\bar{x})$. Ésta fórmula debe ser realizada por algún $a_{\bar{t}}$ con $qftp^I(\bar{t}) = qftp^I(\bar{s})$, de no ser así, para toda túpla $\bar{t}$ tal que $qftp^I(\bar{t}) = qftp^I(\bar{s})$, tendríamos $a_{\bar{t}} \models \neg\psi(\bar{x})$ y por la parte B_1 de Γ, $b_{\bar{s}} \models \neg\psi(\bar{x})$ lo cual es una contradicción. □

3. Γ es finitamente satisfactible:

   Demostración. Sea $F \subseteq^{fin} \Gamma$.

   (a) Si se escoge un conjunto de índices $X \subseteq I$ tal que $\{a_i : i \in X\} \models F \cap B_2$ y X es lo suficientemente grande como para tener un testigo para cada uno de los qf-tipos de las tuplas mencionadas en la parte B_1 de F (es decir X sumerge los qf-tipos de las tuplas $\bar{t}$ que aparecen en la parte B_2), entonces $\{a_i : i \in X\}$ satisface la parte B_1 de F como consecuencia de que satisface la parte B_2: sea $\varphi(\bar{c}_{\bar{t}}) \in F \cap B_1$, y $\{a_i : i \in X\}$ donde X cumple las condiciones pedidas; luego existe $\bar{s} \in X$ tal que $qftp^I\,(\bar{s}) = qftp^I\,(\bar{t})$ (ésto se tiene, porque X se escogió de tal forma que tiene una realización para cada uno de los qf-tipos de las túplas mencionadas en B_1) y por las condiciones de B_1, se tiene $M \models \varphi\,(\bar{a}_{\bar{s}})$ y como $\{a_i : i \in X\} \models F \cap B_2$, $M \models \varphi\,(\bar{a}_{\bar{t}})$ luego $\{a_i : i \in X\} \models F \cap B_1$. Así el objetivo se reduce a encontrar un subconjunto de parámetros de los a_i, indexado por un subconjunto de I apropiado.

(b) Sean:

- $L_0 \subseteq^{fin} L'$ el lenguaje de las fórmulas que aparecen en F.
- $c_{i_1}, ..., c_{i_r}$ las constantes que aparecen en F, $r < \omega$.
- $\bar{x} = (x_1, ..., x_l)$ las variables que ocurren en Γ, es decir las flas en Γ se toman como r-fórmulas, $l < \omega$.
- $\{\eta_1, ..., \eta_k\}$ los qf-r-tipos en las L_0- fórmulas que aparecen en F. (Es un conjunto finito ya que en F solo hay un número finito de flas.)
- $\{q_1, ..., q_m\}$ los qf-r-tipos en I. (Es finito porque L' es finito relacional, observación 1.1.).

(c) Para encontrar constantes que satisfagan la parte B_2 de F, basta probar la siguiente afirmación:

Existe $Y \in U$ con $\|Y\| \geq r$ tal que Y sumerge a $q_1, ..., q_m$ y para cualesquiera r-tuplas $\bar{i}, \bar{j} \in Y$ con el mismo qf-tipo se tiene que $tp^{L_0}(\bar{a}_{\bar{i}}; M) = tp^{L_0}(\bar{a}_{\bar{j}}; M)$.

Demostración. : Sean D_i grafos ordenados que satisfagan q_i, para cada $i \in \{1, ..., m\}$ (al ser dichos tipos consistentes con I, entonces tienen realizaciones en I y son grafos ordenados ya que $<\in L'$ y es relacional. En caso de no existir una relación de grafo se toma la vacía.). Como $age(I) = U$, los $D_i \in U$ y por JEP, existe $E \in U$ que sumerge a todos los D_i, de donde $\|E\| \geq r$. Ahora se define una sucesión creciente $\{Z_i : 0 \leq i \leq m\}$ de elementos de U, así: $Z_0 = E$ $Z_{i+1} : Z_{i+1} \to (Z_i)_k^{D_{i+1}}$, están bien definidos porque U es clase de Ramsey. Utilizando esta sucesión, se define Y por inducción:

- (*Caso* 0): Definimos la siguiente coloración: $c_m : \binom{Z_m}{D_m} \to \{1, ..., k\}$ tal que $c_m(X) = i$, si $tp_{L_0}(\bar{a}_X; M) = \eta_i$.
- (*Caso* $1 \leq n \leq m-1$): La hipótesis de inducción es

HI (para $n-1$): *$\exists Y_{m-(n-1)} \cong Z_{m-n}$ tal que los conjuntos $\binom{Y_{m-(n-1)}}{D_1}, ..., \binom{Y_{m-(n-1)}}{D_{m-(n-1)}}$ son homogéneos respectivamente para las coloraciones $c_{m-j} : \binom{Z_{m-(n-1)}}{D_{m-j}} \to \{1, ..., k\}$, $c_{m-j}(X) = i$, si $tp_{L_0}(\bar{a}_X; M) = \eta_i$ y $j \leq n-1$.*

La idea es probar HI para n. Sea $c_{m-n} : \binom{Y_{m-(n-1)}}{D_{m-n}} \to \{1, ..., k\}$ definida como arriba. Por construcción, $Z_{m-n} \to \left(Z_{m-(n+1)}\right)_k^{D_{m-n}}$, y como $Y_{m-(n-1)} \cong Z_{m-n}$, existe $Y_{m-n} \cong Z_{m-(n+1)}$, $Y_{m-n} \subseteq Y_{m-(n-1)}$ tal que $\binom{Y_{m-n}}{D_{m-n}}$ es homogéneo para c_{m-n}. Y como las copias de $D_m, .., D_{m-(n-1)}$

en $Y_{m-(n-1)}$ ya eran homogéneas bajo $c_m, ..., c_{m-(n-1)}$ (HI), y $Y_{m-n} \subseteq Y_{m-(n-1)}$, entonces $\binom{Y_{m-n}}{D_1}, ..., \binom{Y_{m-n}}{D_{m-(n-1)}}, \binom{Y_{m-n}}{D_{m-n}}$ son conjuntos homogéneos bajo la acción de c_m,...,$c_{m-(n-1)}$, c_{m-n} respectivamente. Se obtuvo la siguiente cadena $Y_1 \subseteq ... \subseteq Y_{m-n}$. La asignación $Y = Y_1$ satisface la condición pedida, ya que $\binom{Y_1}{D_1}, ..., \binom{Y_1}{D_m}$ son homogéneos para las coloraciones $c_m, ..., c_1$ respectivamente y además Y sumerge todos los qf-r-tipos en I; en otras palabras las tuplas isomorfas en Y, indexan tuplas en M con el mismo tipo en L_0. □

(d) Ahora, usando Y, se asignan valores para $c_{i_1}, .., c_{i_r}$ así:

$$T = \{t \in I : \psi(c_{t_1}, ..., c_{t_m}) \in F \cap B_1 \ y \ t = t_i \ para \ algún \ i\}$$

$|T| = \beta \leq r$, luego el qf-tipo de $T = \{t_k : k \leq \beta\}$(como es un qf-r-tipo) es realizado en Y y como $Y \in age(I)$, existe $E = \{e_k : k \leq \beta\} \subseteq Y \subseteq I$ satisfaciendo el qf-tipo de T. Entonces:

$$c_{i_k} = \begin{cases} a_{e_k} & si \ i_k \in T \\ d & si \ i_k \notin T, \ d \in \bar{a}_Y \diagdown \{a_i : i \notin T\} \end{cases}$$

Esta asignación satisface F, luego Γ es finitamente satisfactible. □

□

Demostración: "$\Leftarrow$" del lema 1

Demostración. Utilizando la observación 2, es suficiente probar la condición 2 del teorema principal para ver que U es clase de Ramsey. Fijamos $A, B \in U$, $k \in \omega$, I tal que $I \models T'$ y $age(I) = U$, y $f : \binom{I}{A} \to \{1, ..., k\}$. Sea $n = \|A\|$, se define M una $L-$ estructura donde $L = \{R_1, ..., R_k\}$, tal que:

- $|M| = (a_i : i = a_i \wedge i \in I)$
- Las R_i son relaciones n-arias con dominios disjuntos y $M \models R_j(i_1, ..., i_n)$ si:

  1. $i_1 < ... < i_n$
  2. $\{i_1 < ... < i_n\} \cong_I A$
  3. $f(i_1, ..., i_n) = j$

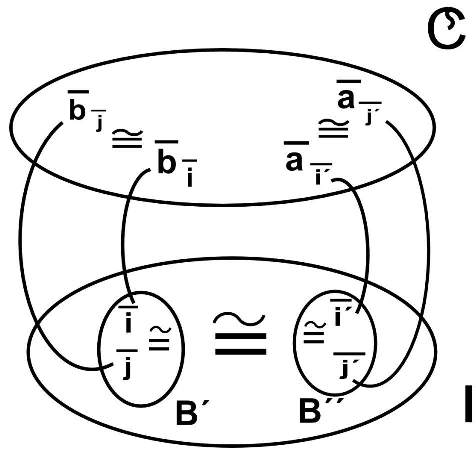


Figura 2.2: Uso de la propiedad de modelación

Sea $\mathfrak{C}$ un modelo monstruo de $Th(M)$, luego $\mathfrak{C}$ es $\|I\|^+$ saturado. Por hipótesis los $I-$ indiscernibles tienen la propiedad de modelación, luego existe en $\mathfrak{C}$ un conjunto $(b_s : s \in I)$ $I-$ indiscernible basado sobre los a_i. Como $age\,(I) = U$, existe $B' \subseteq I$ tal que $B' \cong B$. Si B solo tiene una copia isomorfa de A entonces $f\left\{\begin{pmatrix} B' \\ A \end{pmatrix}\right\} = i$ pues $\left\|\begin{pmatrix} B' \\ A \end{pmatrix}\right\| = 1$. Si no se tiene lo anterior, entonces se toman $\bar{i}, \bar{j} \in \begin{pmatrix} B' \\ A \end{pmatrix}$. Por $I-$ indiscernibilidad, $tp\left(\bar{b}_{\bar{i}}\right) = tp\left(\bar{b}_{\bar{j}}\right)$, luego $\bar{b}_{\bar{i}}$ y $\bar{b}_{\bar{j}}$ coinciden sobre los R_d, y para garantizar que satisfacen alguno de los R_d, usamos lo siguiente: los b_i están basados sobre los a_i, luego que existen $\bar{i}', \bar{j}' \in I$ tuplas isomorfas a $\bar{i}$ y a $\bar{j}$ respectivamente tal que:

$$tp^{\{R_1,\ldots,R_k\}}(\bar{b}_{\bar{i}}) = tp^{\{R_1,\ldots,R_k\}}(\bar{a}_{\bar{i}'}) \quad y \quad tp^{\{R_1,\ldots,R_k\}}(\bar{b}_{\bar{j}}) = tp^{\{R_1,\ldots,R_k\}}(\bar{a}_{\bar{j}'})$$

y como $\bar{a}_{\bar{i}'} = \bar{i}'$ y $\bar{a}_{\bar{j}'} = \bar{j}'$ (tuplas que son isomorfas a A), luego existe R_{j_0} tal $\models R_{j_0}\left(\bar{b}_{\bar{i}}\right) \wedge R_{j_0}\left(\bar{b}_{\bar{j}}\right)$.

Utilizando la propiedad de modelación y que los tipos en $\mathfrak{C}$ son aislados (porque L es finito relacional y observación 1.1.), existe $B'' \subseteq I$, $B' \cong B'$ tal que $tp\left(\bar{b}_{B'}\right) = tp\left(\bar{a}_{B''}\right)$ luego $\bar{b}_{B'} \models \bigwedge_{\bar{i} \in \begin{pmatrix} B' \\ A \end{pmatrix}} R_{j_0}\left(\bar{b}_{\bar{i}}\right)$ entonces $\bar{a}_{B''} \models \bigwedge_{\bar{i} \in \begin{pmatrix} B'' \\ A \end{pmatrix}} R_{j_0}\left(\bar{a}_{\bar{i}}\right)$, lo cual quiere decir que para todo $\bar{i} \in \begin{pmatrix} B'' \\ A \end{pmatrix}$, $\models R_{j_0}\left(\bar{a}_{\bar{i}}\right)$ y como $\bar{a}_{\bar{i}} = \bar{i}$, usando la definición de R_{j_0}, $f\left(\bar{i}\right) = j_0$ (figura 2). Luego B' es la estructura que atestigua la condición 2 del teorema principal. $\square$

Corolario 1. *Para todo grafo ordenado qf-débilmente saturado I, $I-$ indiscernibles tienen la propiedad de modelación.*

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ la clase de todos los grafos finitos ordenados. Y como $\mathcal{K}$ es clase de Ramsey ([L.S09], cap.2) y la teoría de común de los miembros de $\mathcal{K}$ es T_g. Así para todo $I \models T_g$ tal que su edad sea $\mathcal{K}$, $I-$ indiscernibles tienen la propiedad de modelación. $\square$

2.3. Grupos Extremadamente Llevaderos y Propiedad de Ramsey (1⇔4)

En esta subsección el objetivo es ver la equivalencia 1⇔4 del teorema principal de la presente sección. A continuación, señalaremos la conexión entre la propiedad de Ramsey y la propiedad de amalgación.

Observación 4. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de L-estructuras finitas, rígidas (que no tienen automorfismos no triviales). Si $\mathcal{K}$ cumple HP, JEP, y es clase de Ramsey entonces tiene AP.*

Demostración. Sean $A, B, C \in \mathcal{K}$, e inmersiones $f : A \to B$, $g : A \to C$. Por JEP, existe $E \in \mathcal{K}$ tal que B, C están inmersos en E. Ahora sea $D \in \mathcal{K}$ tal que $D \to (E)^A_4$ y sea $d : \binom{D}{A} \to \{x : x \subseteq \{B, C\}\}$ tal que dado $A_0 \in \binom{D}{A}$, $B \in d(A_0)$ si existe una inmersión $r : B \to D$ tal que $r \circ f(A) = A_0$ y de manera similar se define para C.. A partir de d, definimos la siguiente coloración:

$$
\begin{array}{ccc}
c : \binom{D}{A} & \longrightarrow & \{1, 2, 3, 4\} \\
B & \longrightarrow & c(B) = \begin{cases} 1 & si\ d(B) = \emptyset \\ 2 & si\ d(B) = \{B\} \\ 3 & si\ d(B) = \{C\} \\ 4 & si\ d(B) = \{B, C\} \end{cases}
\end{array}
$$

Existe $E_0 \in \binom{D}{E}$, homogéneo para la coloración c; ahora veamos que para todo $A_0 \in \binom{E_0}{A}$, $c(A_0) = 4$, o sea que $d(B_0)\{B, C\}$:

- $B \in d(A_0)$:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{t} E \xrightarrow{g} E_0 \subseteq D$$

donde f y t son inmersiones y g es isomorfismo. Entonces tenemos:

$$A_0 = g \circ t \circ f(A) \subseteq \; g \circ t(B) \subseteq g(E) = E_0$$

Luego $A_0 \cong A$, $A_0 \subseteq E_0$ y $r = g \circ t$ es una inmersión de B en D, tal que $r \circ f(A) = A_0$.

- $C \in d(A_0)$: análogo al anterior.

Entonces existen r, s tales que $r \circ f(A) = A_0 = s \circ g(A)$ y como A, A_0 son rígidos, entonces $r \circ f = s \circ g$. Por lo tanto D, r, s verifican la propiedad de amalgamación para A, B, C, f, g. □

Esta observación se usa para probar la primera parte de la afirmación 4 del teorema principal, ya que en las hipótesis del mismo está HP,JEP y faltaba garantizar amalgamación para concluir que U (la clase usada en el teorema) es de Fraïssé. Por hipótesis, U es clase de orden, entonces claramente $A \in U$ es rígida. Por observación 4, U tiene amalgamación y por lo tanto es una clase de Fraïssé.

De ahora en adelante podemos trabajar con U como clase de Fraïssé.

2.3.1. Preliminares topológicos

Sea G grupo topológico y X un espacio topológico compacto de Hausdorff:

Definición 8. 1. *Un* G-flujo sobre X *es una acción continua de G sobre X, es decir que se puede ver como un homomorfismo continuo $\Phi : G \to H(X)$ tal que $\Phi(g) = f_g$ donde $f_g(x) = g.x$. $H(X)$ denota el conjunto de homeomorfismos de X con la topología compacto abierta. Ésta topología es la generada por las vecindades $V_{K,U} = \{f \in H(X) : f(K) \subseteq U\}$, donde $K, U \subseteq X$, K es compacto y U abierto.*

2. *Dado un G-flujo sobre X y $x \in X$ la* órbita de x *es $Gx = \{g.x : g \in G\}$.*

3. *Un* subflujo *es la restricción de un G-flujo sobre X a un subconjunto no vacío, invariante y compacto de X.*

4. *Un G-flujo sobre X es* minimal *si no tiene subflujos propios.*

De aquí en adelante cuando sea clara la acción de G sobre algún espacio topológico X, nos referimos al $G-$ flujo solo por X, es decir el $G-$ flujo se representará por el conjunto sobre el cual está actuando.

Observación 5. 1. *$\overline{G.x}$ es compacto y G-invariante ($G(\overline{G.x}) = \overline{G.x}$).*
Demostración*: “ $\supseteq$ ” $1_G(\overline{G.x}) = \overline{G.x}$ “ $\subseteq$ ” $gt \in G(\overline{G.x})$ luego existe $\{g_n x\} \to t$ y por tanto $\{g.g_n x\} \to g.t$, de donde $g.t \in \overline{G.x}$.*

2. *Un G-flujo X es minimal ssi toda órbita es densa.*
   Demostración*: " $\Rightarrow$ " Por observación anterior. " $\Leftarrow$ " Si X tuviese un subflujo propio Y, $\forall y \in Y, G.y \subset G.Y = Y$. Tomando adherencia, $X = \overline{G.y} \subset \overline{Y}$ y como Y es compacto en un espacio de Hausdorff, entonces es cerrado, luego $X = \overline{Y} = Y$ ($\rightarrow\leftarrow$).*

3. *Todo G-flujo X contiene un subflujo minimal. (Lema de Zorn)*

Dados dos G-flujos X y Y (X y Y claramente son espacios topológicos), un *homomorfismo* entre ellos es una aplicación continua

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow Y \\ x &\rightarrow \pi(x) \quad t.q. \quad \pi(g.x) = g.\pi(x) \end{aligned}$$

Observación 6. *Si Y es un G-flujo minimal entonces para cualquier otro G-flujo Y, todo homomorfismo de X a Y es sobreyectivo.*

Demostración. Dado $x \in X$ se define $Y = \overline{G.\pi(x)}$; entonces dado $y \in Y$, existe una sucesión $\{g_n.\pi(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \rightarrow y$, entonces $\{\pi(g_n.x)\}_{n\in\mathbb{N}} \rightarrow y$. Como X es compacto y de Hausdorff, existe $\{g_{n_i}.x\}$ subsucesión convergente a algún $z \in X$. Luego $\{\pi(g_{n_i}.x)\}_{i\in\mathbb{N}} \rightarrow y$, y como π es continuo entonces $y = \pi(x)$. □

Existencia del Flujo Minimal Universal Dado un grupo topológico G, existe un G-flujo minimal $M(G)$ tal que para todo G-flujo minimal X, existe un homomorfismo de $M(G)$ en X. $M(G)$ es único salvo isomorfismo.

Demostración. : Ver Auslander [J.A88]. □

Definición 9. *G es* extremadamente llevadero *si $M(G) = \{t\}$.*

Observación 7. *G es extremadamente llevadero ssi todo G-flujo tiene un punto fijo ($g.x = x, \forall g \in G$).*

Demostración. : " $\Rightarrow$ " Sea un G - flujo X y $M(G) = \{t\}$, existe $Y \subseteq X$ subflujo minimal. Luego existe $\pi : \{t\} \rightarrow Y$ homomorfismo sobreyectivo, de donde $Y = \{\pi(t)\}$. Como $M(G)$ es G-invariante, entonces $g.M(G) \subseteq M(G)$, es decir, $\forall g \in G$ y $g.\pi(t) = \pi(g.t) = \pi(t)$.
" $\Leftarrow$ " Como $M(G)$ es $G-$ flujo, tiene un punto fijo t y $Y = \{t\}$ es un subflujo de $M(G)$, luego $M(G) = \{t\}$. □

Ejemplo 6. *Son grupos extremadamente llevaderos, ver [AK76]:*

1. *El grupo de automorfismos de los racionales con el orden usual y la topología de la convergencia puntual $Aut((\mathbb{Q}, <))$.*

2. *El grupo de los homeomorfismos de $\mathbb{R}$ que preservan la orientación con la topología compacto-abierta, $H_+(\mathbb{R})$.*

Está última es la definición más conocida de extremadamente llevadero y a partir de ella se establecen las diferentes equivalencias para esta propiedad. Como la idea es llegar a una caracterización de clases de Ramsey en términos de esta propiedad topológica, se desarrollan una serie de resultados intermedios necesarios para visualizar el resultado objetivo.

Lema 2. *Sea G un grupo topológico y X un $G-$ flujo. Son equivalentes:*

1. *El $G-$ flujo X tiene un punto fijo.*

2. *Para todo $n = 1, 2, ...,$ toda $f : X \to \mathbb{R}^n$ continua, todo $\epsilon > 0$ y dado $F \subseteq^{fin} G$, existe $x \in X$, tal que $|f(x) - f(g.x)| \leq \epsilon$, para toda $g \in F$.*

Demostración " $\Leftarrow$ ".

- $A_{f,F,\epsilon} = \{x \in X : \forall g \in F(|f(x) - f(g.x)| \leq \epsilon)\}$ es cerrado.

- Para toda colección finita $(f_j, F_j, \epsilon_j)_{j=1}^m$, $\cap_{j=1}^m A_{f_j,F_j,\epsilon_j} \neq \emptyset$:
$\overline{F} = \cup_{i=1}^m F_i$ es finito, $\overline{\epsilon} = min_{1\leq i\leq m}\{\epsilon_i\} > 0$
$\overline{f} = (f_1, ..., f_m) : X \to \mathbb{R}^{n_1+...+n_m}$ continua.
Por 2, $\emptyset \neq A_{\overline{f},\overline{F},\overline{\epsilon}} \subseteq \cap_{j=1}^m A_{f_j,F_j,\epsilon_j}$.

- $\cap_{f,F,\epsilon} A_{f,F,\epsilon} \neq \emptyset$: Se deduce de lo anterior y compacidad de X.

- $x \in \cap_{f,F,\epsilon} A_{f,F,\epsilon}$ es punto fijo: Si no, existiría $g \in G$ tal que $g.x \neq x$ y por tanto habría una función continua f, tal que $f(x) = 0$ y $f(g.x) = 1$, luego $x \notin A_{f,\{g\},1}$.

" $\Rightarrow$ " Si el $G-$ flujo tiene un punto fijo entonces dicho punto, denotémoslo x, satisface la condición 2. □

Utilizando el lema anterior se demuestra el siguiente resultado:

Proposición 1. *Si $G \leq S_\infty$ un subgrupo cerrado, entonces son equivalentes:*

1. *G es extremadamente llevadero.*

2. *Para cualquier subgrupo abierto $V \leq G$, toda coloración $c : G/V \to \{1, ..., k\}$ ($G/V = \{gV : g \in G\}$), existe $g \in G$ y $1 \leq i \leq k$, tal que $c(g.a) = i$, $\forall a \in A$.*

Comentario: La topología sobre S_∞ es la producto (generada por los abiertos básicos $U_{f,F} = \{g \in S_\infty : f \restriction_F = g \restriction_F\}$ donde $F \subseteq^{fin} \mathbb{N}$). Se considera G/V con la topología generada por $\{A \subseteq G/V : \pi^{-1}(A)$ es abierto en $G\}$.Donde:

$$\begin{aligned} \pi : G &\to G/V \\ g &\to gV \end{aligned}$$

Finalmente, la topología definida sobre $Y = \{1,...,k\}^{G/V}$ tiene como base $B = \{U_{f,F} : f \in Y,\ F \subset^{fin} G/V\}$, y $U_{f,F} = \{g \in Y : f \restriction_F = g \restriction_F\}$ (topología producto).

Demostración. " $\Rightarrow$ "

- La acción de G sobre $Y = \{1,...,k\}^{G/V}$ definida por $g.p(x) = p(g.x)$ es un $G-$ flujo.
- Como $\{1,...,k\}$ es compacto, Y es compacto y luego $X = \overline{G.c}$ es $G-$ flujo, $\forall c \in Y$; por hipótesis, $\exists \gamma \in X$ punto fijo.
- $\gamma(a) = i$, $\forall a \in G/V$ y algún $i \in \{1,...,k\}$:
  Dado $a \in G/V$, $a = h.V$, luego $\gamma(a) = \gamma(h.V) = h.\gamma(V) = \gamma(V) = i$, con i fijo.
- Dado $A \subseteq^{fin} G/V$, y como $\gamma \in \overline{G.c}$, entonces $G.c \cap U_{\gamma,A} \neq \emptyset$, luego existe $g \in G$, tal que $g.c \restriction_A = \gamma \restriction_A$.

" $\Leftarrow$ " Se usa el lema anterior. Sean $f : X \to \mathbb{R}^n$ continua, $\epsilon > 0$ y $F \subseteq^{fin} G$.

- **$\exists V = V_{1_G}$, tal que $\forall h \in V$ y $\forall x \in X$, $|f(x) - f(h.x)| \leq \epsilon/3$:**
  Sea:

  $$\begin{aligned} \Phi : G \times X &\to X \to \mathbb{R}. \\ (g,x) &\to gx \to f(gx) \end{aligned}$$

  $\left\{B_{\varepsilon/6}(f(x)) : x \in X\right\}$ es un cubrimiento abierto para $f(X)$ y como es compacto (por continuidad de f), existe $B = \{B_{\varepsilon/6}(f(x_i)) : 1 \leq i \leq n\}$ un sub-recubrimiento finito. Entonces $\left\{f^{-1}\left(B_{\varepsilon/6}(f(x_i))\right) : 1 \leq i \leq n\right\}$ son vecindades abiertas alrededor de cada x_i y en suma constituye un recubrimiento abierto de X.
  Por la continuidad de Φ, cada $Z_i = \Phi^{-1}\left(f^{-1}\left(B_{\varepsilon/6}(f(x_i))\right)\right)$ es una vecindad de $(1_G, x_i)$ (ya que $\Phi(1_G, x) = x$, para todo $x \in X$), entonces dentro de cada Z_i existe un abierto básico alrededor de $(1_G, x_i)$ de la forma $V_i \times B_i$. Sea $V_{1_G} = \cap_{1 \leq i \leq n} V_i$ vecindad abierta de 1_G, y verifiquemos que cumple la propiedad deseada:

  Sea $h \in V_{1_G}$ y $x \in X$, entonces existe $i \in \{1,...,n\}$ tal que $f(x) \in B_{\varepsilon/6}(f(x_i))$, luego $x \in f^{-1}\left(B_{\varepsilon/6}(f(x_i))\right)$ y como $h \in V_{1_G}$, entonces $h \in V_i$ y $(h,x) \in Z_i$, de donde $f(hx) \in B(f(x_i))$. En conclusión

  $$|f(hx) - f(x_i)| < \varepsilon/6 \text{ y } |f(x_i) - f(x)| < \varepsilon/6 \Rightarrow |f(hx) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

- Sea $A_1, ..., A_k$ partición de $f(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ de diámetro $\leq \epsilon/3$. Sea $x_0 \in X$ y $U_i = \{g \in G : f(g.x_0) \in A_i\}$. Sea $V_i = V.U_i = \cup_{g \in U_i} V.g$ para ver $\cup_{i=1}^k V_i = G/V$.

- $\exists\ c : G/V \to \{1,...,k\}$ t.q. $c^{-1}(i) \subseteq V_i$, y por (2), $\exists\ i$ y $g \in G$ tal que $(F \cup \{1_G\})g \subseteq V_i$.

- $x = g.x_0$ **satisface la condición 2 del lema:** Dado $h \in F$, como $h.g \in VU_i$, existe $v \in V$ tal que $v^{-1}hg \in U_i$, de donde $f(v^{-1}hg.x_0) = f(v^{-1}h.x) \in A_i$. Como $v^{-1} \in V$ (por la forma de la topología de S_∞, y como V es una vecindad abierta de G, entonces V se puede tomar como un subgrupo):

$$\left|f(v^{-1}h.x) - f(h.x)\right| \leq \epsilon/3.$$

Ya que $1_G.g = g \in V_i$, existe $w \in V$, tal que $f(w^{-1}.x) \in A_i$ y

$$\left|f(w^{-1}.x) - f(x)\right| \leq \epsilon/3.$$

Luego $|f(w^{-1}.x) - f(v^{-1}h.x)| \leq \epsilon/3$. Finalmente, $|f(x) - f(h.x)| \leq \epsilon$.

□

Nota 1 (Respecto al Lema 2). *Para cualquier $F \subseteq^{fin} \mathbb{N}$, $G_{(F)} = \{g \in G : \forall i \in F, g(i) = i\}$, es el* estabilizador puntual *de F y $\{G_{(F)} : \emptyset \neq F \subseteq^{fin} \mathbb{N}\}$ es una base local de 1_G de subgrupos abiertos, luego usando item 1 de la anterior demostración (el cual garantiza que basta con probar el resultado para las vecindades abiertas de 1_G), y que $\{G_{(S)} : \emptyset \neq S \subseteq^{fin} \mathbb{N}\}$ es una base local para 1_G), será suficiente tomar las vecindades básicas V de la forma $G_{(F)}$. De hecho bastaría con tomar solo los F de alguna colección cofinal en los conjuntos finitos de $\mathbb{N}$; para ver esto último, sea D dicha colección, es decir $D \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ cofinal, y veamos que $\{G_{(S)} : \emptyset \neq S \in D\}$ es una base local para 1_G. Claramente nuestro conjunto está conformado por abiertos alrededor de 1_G (topología puntual, ver cap.2), falta ver que en efecto es base local. Sea $V(1_G)$ una vecindad alrededor de la identidad, entonces existe $F \subseteq^{fin} \mathbb{N}$, tal que $G_{(F)} \subseteq V(1_G)$; si $F \in D$ entonces terminamos, de lo contrario, como D es cofinal, existe $F_1 \in D$, tal que $F \subseteq F_1$ y por lo tanto $G_{(F_1)} \subseteq G_F$ entonces $G_{(F_1)} \subseteq V(1_G)$ con $F_1 \in D$. Con esto queda demostrado que basta tomar los F en un conjunto cofinal de $[\mathbb{N}]^{<\omega}$.*

2.4. Propiedad de Ramsey en subgrupos de S_∞

Para facilitar el estudio de los subgrupos cerrados de S_∞ y su comportamiento se utiliza la siguiente caracterización:

Los subgrupos cerrados de S_∞ Los subgrupos cerrados de S_∞ son exactamente (salvo isomorfismo) los grupos de automorfismos de estructuras con universo $\mathbb{N}$ y lenguaje relacional.

Demostración. : Sea $A = (\mathbb{N}, \{R_i^A\}_{i\in\mathbb{N}})$, $Aut(A)$ es un subgrupo cerrado de S_∞ ($f \in S_\infty \setminus Aut\,(A)$; existen $\bar{a} \in \mathbb{N}$ y $i \in \mathbb{N}$ tal que $\models R_i^A\,(\bar{a}) \wedge \models \neg R_i^A\,(f\bar{a})$, entonces $U_{f,\{\bar{a}\}}$ es una vecindad abierta de f contenida en $S_\infty \setminus Aut\,(A)$.).
Recíprocamente, si $G \subseteq S_\infty$ es subgrupo cerrado, se considera la *estructura inducida asociada a* G, la cual es $A_G = (\mathbb{N}, \{R_{i,n}^{A_G}\}_{i,n\in\mathbb{N}})$, donde las relaciones se definen así:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^n = \{{a_1}^{(n)}, {a_2}^{(n)}, ...\}$, y definimos la acción de G sobre $\mathbb{N}^n$, como

$$g.a_k^{(n)} = (g.a_{k_1}, g.a_{k_2}, ...), \text{ luego } R_{i,n}^{A_G} = G.a_i^{(n)}.$$

Entonces $Aut(A_G) = G$. □

En adelante, A_G denotará la estructura inducida asociada a G definida en la demostración anterior. Para un subgrupo cerrado de S_A, la estructura A_G es ultrahomogénea y como el lenguaje es relacional, entonces es localmente finita, luego A_G es una estructura de Fraïssé.

Usualmente se habla de la propiedad de Ramsey, en relación con clases de estructuras finitas. Sin embargo para lograr visualizar el vínculo entre clases de Ramsey y la propiedad de un grupo de ser extremedamente llevadero, es necesario introducir la definición análoga de ser clase de Ramsey en subgrupos de S_∞.

Para todo $F \subseteq^{fin} \mathbb{N}$ no vacío, se define el *estabilizador* de G (ya definimos el estabilizador puntual $G_{(F)}$ en la nota 1) como:

$$G_F = \{g \in G : g.F = F\},\; g.F = \{g(i) : i \in F\}.$$

No es difícil ver que $G_{(F)} \leq G_F$. Si $\emptyset \neq F \subseteq^{fin} \mathbb{N}$, el G-*tipo* de F es $G.F = \{g.F : g \in G\}$. Un G-tipo σ, es un conjunto de la forma$G.F$ para algún F finito no vacío. Se define un orden sobre los $G-$ tipos:

$$\begin{aligned}
\rho \leq \sigma \quad &\Leftrightarrow \quad \exists F \in \sigma \exists H \in \rho (H \subseteq F) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall F \in \sigma \exists H \in \rho (H \subseteq F) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall H \in \rho \exists F \in \sigma (H \subseteq F)
\end{aligned}$$

Estas definiciones resultan equivalentes, ya que una órbita es la agrupación de todas las posibles imagenes de un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ (fijo para cada órbita) bajo la acción de G, y como las contenencias son respetadas por la acción de cualquier elemento de S_∞, entonces si algún elemento de la órbita de un F_1 finito está contenida en un elemento de la órbita de algún F_2, al tomar cualquier otro elemento de la órbita de F_1 y aplicando las permutaciones adecuadas llegaremos a que existe algún elemento en la órbita de F_2 que contiene a F_1. De igual forma se procede si se toma un elemento ahora de la órbita de F_2. Como se puede ver, esta definición, no alcanza a garantizar que los conjuntos alrededor de los cuales se ha construido la órbita estén uno contenido en el otro, pero sí garantiza que para cada movimiento de los conjuntos principales, se puede encontrar alguna imagen del otro conjunto que sí respete la relación de contenencia. Finalmente:

Nota 2. • X_L *denota el* espacio de estructuras para algún lenguaje L, *con universo* $\mathbb{N}$. *Este espacio es compacto (homeomorfo a* $2^{\mathbb{N}}$, *con la topología producto), y se define la acción de* G *sobre* X_L *de tal forma que para todo estructura* $A \in X_L$, $g.A \cong A$. *(Ver [3] Pág. 23)*

- LO *denota el subconjunto compacto y* $S_\infty -$ *invariante de* X_L, *que contiene los órdenes lineales sobre* $\mathbb{N}$. LO *es* $G-$*flujo dado que es un subflujo de* X_L, *con la acción enunciada en el ítem anterior.*
- *Si* $G \leq S_\infty$ *es cerrado, se dice que* G preserva un orden *si el* $G-$ *flujo LO tiene un punto fijo, i.e., existe* $\prec$ *un orden sobre* $\mathbb{N}$ *tal que* $\forall g \in G$, $a \prec b \Leftrightarrow g(a) \prec g(b)$.

Definición 10. *: Sea* $G \leq S_\infty$ *cerrado:*

- *Dados* $\rho \leq \sigma$ $G-$ *tipos, y* $F \in \sigma$, *se define:*

$$\begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix} = \{H \subseteq F : H \in \rho\}$$

- *Si* $\rho \leq \sigma \leq \tau$, $G-$ *tipos y* $k = 2, 3, ...$, *se dice que*

$$\tau \to (\sigma)_k^\rho$$

  si $\forall F \in \tau$ *y* $\forall c : \begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix} \to \{1, ..., k\}$, $\exists F_0 \in \begin{pmatrix} F \\ \sigma \end{pmatrix}$ *homogéneo, i.e.* $\forall H \in \begin{pmatrix} F_0 \\ \rho \end{pmatrix}$, $c(H) = i$, *para algún* i.

- G tiene la propiedad de Ramsey *si* $\forall \rho \leq \sigma$, *y* $\forall k = 2, 3, ...$, *existe un* $G-$ *tipo* τ *tal que* $\sigma \leq \tau$ *y* $\tau \to (\sigma)_k^\rho$.

Nota 3. *En* $\tau \to (\sigma)_k^\rho$ *es suficiente que la propiedad se cumpla para* ***algún*** $F \in \tau$*: Sea* $H \in \tau$ *y* $\tau = G.M$, *luego* $H = h.M$ *y* $F = f.M$, *entonces* $H = h.(f^{-1}.F)$ *y dada* $c : \begin{pmatrix} H \\ \rho \end{pmatrix} \to \{1, ..., k\}$, *induce* $c' : \begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix} \to \{1, ..., k\}$, *tal que* $c'(A) = c(h.f^{-1}A)$.

Se tiene el siguiente resultado (Ver [AK76]):

Proposición 2. $G \leq S_\infty$ *subgrupo cerrado. Son equivalentes:*

1. G *es extremadamente llevadero.*
2. (a) $\forall \emptyset \neq F \subseteq^{fin} \mathbb{N}$, $G_{(F)} = G_F$

(b) *$\forall \rho \leq \sigma$ $G-$ tipos, y toda coloración $c : \rho \rightarrow \{1, ..., k\}$, existen $1 \leq i \leq k$ y $F \in \sigma$ tal que $c(H) = i$, $\forall H \in \binom{F}{\rho}$.*

3. (a) *G preserva un orden*

   (b) *Como en 2).*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (3):
(a) se tiene porque el $G-flujo\ LO$ tiene un punto fijo. Para probar (b), sean $\rho \leq \sigma$, $\rho = G.F'$ y $c : \rho \rightarrow \{1, ..., k\}$. Claramente $F' \in \rho$.

- $V = G_{(F')} = G_{F'}$: si $g \in G_{F'}$, $F' = \{f_1 \prec ... \prec f_n\}$, luego $gF' = \{gf_1 \prec ... \prec gf_n\} = F'$.

- $G/V \approx G.F' = \rho$: $gG_{F'} \rightarrow g.F'$ biyección.

- Aplicar (2) de la prop. 1 a $V, c, A_{F_0} = \{F'_0 \subseteq F_0 : F'_0 \in \rho\}$, con $F_0 \in \sigma$. Luego existe i, con $1 \leq i \leq k$ y $\exists g \in G$ tal que $c(g.F'_0) = i$, $\forall F'_0 \in A_{F_0}$.

- $F = g.F_0 \in \sigma$. Luego si $H \in \binom{F}{\rho}$, $c(H) = c(g.g^{-1}.H)$, y como $g^{-1}.H \in A_{F_0}$, $c(H) = i$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Pues $V = G_{(F')} = G_{F'}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Probar condición (2) de la proposición 3.2.1.7.

- $V = G_{(F)} = G_F$, con F finito y no vacío. Sea $\rho = G.F \approx G/V$. Dado $c : \rho \rightarrow \{1, ..., k\}$ y $A = \{g_j.F : 1 \leq j \leq n\} \subseteq^{fin} \rho$, sea $F_0 = \cup_{j=1}^{n} g_j.F$, y $\sigma = G.F_0$. Claramente $\rho \leq \sigma$.

- $\exists i$ y $\exists F' = g.F_0 \in \sigma$, tal que $c\left\{\binom{F'}{\rho}\right\} = i$. Si $a \in A$, $g.a = g.g_j.F \subseteq g.F_0$, luego $c(g.a) = i$.

$\square$

En esta última proposición, se logra una primera caracterización de extremadamente llevadero en términos de propiedades sobre las coloraciones, lo cual allana el camino hacia la equivalencia en términos de la propiedad de Ramsey. Como se verá en la siguiente proposición, la afirmación de la proposición anterior ((2)-b y (3)-b)) enuncia implícitamente la propiedad de Ramsey.

Proposición 3. *Sea $G \leq S_\infty$ subgrupo cerrado. Son equivalentes:*

1. *G es extremadamente llevadero.*

2. (a) *G preserva un orden.*

   (b) *G tiene la propiedad de Ramsey.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Por inducción se puede ver que para tener la propiedad de Ramsey es suficiente verficar para $k = 2$. Prueba por contradicción y usando proposición anterior (Ver [AK76], sección 4).

(2) $\Rightarrow$ (1) : La condición (b) de la proposición anterior (en los items 1 y 2), se sigue de Ramsey:

Sean $\rho \leq \sigma$ y $c : \rho \to \{1, ..., k\}$; $\exists \tau \geq \sigma$, t.q. $\tau \to (\sigma)^{\rho}_{k}$. Luego c induce $c' : \begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix} \to \{1, ..., k\}$, i.e. $c' = c \restriction \begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix}$ □

Una vez obtenida la equivalencia entre extremadamente llevadero y tener la propiedad de Ramsey (en grupos), el objetivo es evidenciar la relación existente entre la propiedad de Ramsey vista desde grupos y la enunciada en términos de clases. Para poder observar el vínculo, se verá en la siguiente proposición que una clase de Fraïssé ordenada, es de Ramsey si y sólo si el grupo de automorfismos de su límite de Fraïssé cumple la propiedad de Ramsey.

Proposición 4. *Sea $G \leq S_\infty$ subgrupo cerrado. Son equivalentes:*

1. *G es extremadamente llevadero.*

2. *$G = Aut(A)$, donde $A = Flim(\mathcal{K})$ y $\mathcal{K}$ es una clase de Fraïssé de orden que cumple la propiedad de Ramsey.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2)

- $A_G = (\mathbb{N}, L_{A_G})$ la estructura inducida asociada a G, luego $G = Aut(A_G)$ y A_G es ultrahomogénea. Por (1), G preserva un orden lineal $\prec$ sobre $\mathbb{N}$. Sea $L = L_{A_G} \cup \{<\}$, y sea A la expansión de A_G a L, con $<^A := \prec$. Como G preserva $\prec$, $Aut(A) = G$ y A sigue siendo ultrahomogénea. Como L es relacional, entonces A es localmente finita y $\mathcal{K} = age(A)$ es una clase de orden de Fraïssé .

- Dado un $G-$ tipo ρ, $\rho = G.F$, con $\emptyset \neq F \subseteq^{fin} \mathbb{N}$, luego $gen(F) = (F, L) = A_0 \in age\,(A)$. Como $\rho = \{g.A_0 : g \in G\}$, y A es ultrahomogénea, si $\exists t : H \cong A_0$, entonces existe $t' \in Aut(A)$ que extiende a t, i.e. $\rho = \{B \subseteq A : B \cong A_0\}$.

Sea $\mathcal{K} = age(A)$ y $G = Aut(A)$

- $\mathcal{K}$ tiene la P. de Ramsey $\Leftrightarrow$ G tiene la P.de Ramsey
  " $\Rightarrow$ " Sean $\rho \leq \sigma$ $G-$órdenes y $k \in \{2, 3, ...\}$, luego $\rho = G.F_1$ y $\sigma = G.F_2$

$(F_1 \subseteq F_2)$. Sean $E = gen(F_1)$, $B = gen(F_2)$ en $\mathcal{K}$, luego $\exists C \in \mathcal{K}$ t.q. $E \leq B \leq C$ y $C \to (B)^A_k$. Para $\tau = G.C$, $\sigma \leq \tau$, y ahora tomemos $F = g.C \in \tau$, y $c : \begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix} \to \{1, ..., k\}$. Como $\begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix} = \{B \subseteq F : B \cong gen\,\{F_1\} = E\} = \begin{pmatrix} F \\ E \end{pmatrix}$, entonces $c \circ g^{-1} : \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix} \to \{1, ..., k\}$ para la cual existe un conjunto monocromático. " $\Leftarrow$ " Análogo al anterior.

(2) $\Rightarrow$ (1)

- A es el límite de Fraïssé de una clase de orden de Fraïssé, luego A es una estructura de orden contable, ultrahomogénea y localmente finita. Como $G = Aut(A)$, entonces G preserva el orden asociado a la clase.
- Si A_0 subestructura finita de A, entonces $G.A_0 = \{B \subseteq A : B \cong A_0\}$: (ya que $G = Aut(A)$ y A es ultrahomogéneo)
- $\mathcal{K} = age(A)$ tiene la propiedad de Ramsey ssi $G = Aut(A)$ también la cumple. Por proposición 3, G es extremadamente llevadero.

$\square$

Reescribiendo la proposición anterior, obtenemos la equivalencia deseada:

Conclusión - subsección 2.3. Sea $\mathcal{K}$ una clase de orden de Fraïssé y $A = Flim(\mathcal{K})$. Entonces son equivalentes:

1. $Aut(A)$ es extremadamente llevadero.
2. $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de Ramsey.

Demostración. :
Como A es un límite de Fraïssé de una clase de Fraïssé entonces es enumerable, luego $G = Aut(A)$ es un subgrupo cerrado de S_A, y como S_A es homeomorfo a S_∞, entonces la conclusión se tiene por Proposición 4.

$\square$

CAPÍTULO 3

Construcciones de Hrushovski

El trabajo realizado en los capítulos anteriores, se desenvuelve en un entorno de clases de Fraïssé. Pero en el ámbito matemático, existen muchas estructuras que no pueden ser visualizadas como de Fraïssé, causando que el campo de aplicación de las mismas se haya visto gradualmente reducido. Es entonces cuando en el panorama matemático surge la necesidad de trabajar con un concepto menos restrictivo y que funcione como una generalización del concepto de clase de Fraïssé. Y es en este punto de nuestro trabajo en el que aparecen las construcciones de Hrushovski, ya que su concepción, da luz a un nuevo tipo de clases de estructuras, en el cual la relación dominante no es la contenencia tradicional, sino una nueva noción de ser *subestructura fuerte* " $\leq$ ", que surge a partir de una función de dimensión definida sobre las estructuras finitas que forman parte de la clase inicial. Igualmente, la noción de dimensión, tiene su origen en una relación ternaria, con unas propiedades fijas (Ver subsección 3.1.) y cuyos elementos son tomados de la clase dada. Entonces en pocas palabras, la construcción de Hrushovski funciona como una clase de Fraïssé generalizada, cuya relación preponderante es una nueva "contenencia fuerte". Y así como existe un teorema de la existencia del límite de Fraïssé, existe uno (Subsección 3.1.) análogo, que garantiza la existencia de una "estructura genérica" cuyo comportamiento es el de límite para la construcción de Hrushovski.

Cabe anotar que el nacimiento de las construcciones de Hrushovski, no tenía por objeto generalizar el concepto de límite de Fraïssé. La aplicación inicial de éstas, estuvo en la refutación de las conjeturas de Lachlan y Zilber [Hru93], y responder en forma negativa la pregunta de Cherlin (Todo grupo simple $\omega-$ estable, es un grupo algebraico sobre un cuerpo algebraicamente cerrado). Sin embargo resultó ser una herramienta tan interesante y versátil, que su estudio ha cobrado gran importancia y ha permitido lograr grandes avances en el análisis del comportamiento de estas construcciones.

A continuación veremos algunas de las propiedades y definiciones básicas relacionadas con las construcciones en cuestión.

3.1. Subestructuras Finitas y la noción de Dimensión

Sea L un lenguaje relacional que contiene al menos un símbolo de relación ternaria R.

Definición 11. *Sea M una L-estructura, $A \subseteq M$ finita:*

1. *$n(A)$ es el tamaño de A. $r(A)$ es el número de triplas $\bar{a} \in A$ tal que $M \models R(\bar{a})$. Se define $d_0(A) = n(A) - r(A)$ y $d_0(A/B) = d_0(A \cup B) - d_0(B)$.*

2. *Se define $d(A, M) = min\{d_0(B) : A \subseteq B \subseteq^{fin} M\}$ y $d(A/B, M) = d(A \cup B, M) - d(B, M)$.*

Como vimos en la definición anterior, la noción de dimensión con la que trabajaremos solo será para sub-estructuras finitas o finitamente generadas, lo cual para este caso es equivalente, dado que el lenguaje es relacional.

Definición 12. *Una subestructura A de M es* auto-suficiente *en M si $d(A, A) = d(A, M)$ y se nota como $A \leq M$.*

De aquí en adelante la idea es trabajar con una clase de L-estructuras finitamente generadas (o finitas), de lo que más adelante será la estructura fuertemente minimal encontrada por Hrushovski. Sean:

- $\bar{\mathcal{C}}$: la colección de L-estructuras A, tal que $0 \leq d_0(B)$, $\forall B \subseteq^{fin} A$.
- $\mathcal{C}$: la colección de L-estructuras finitas de $\bar{\mathcal{C}}$.
- Si $M \in \mathcal{C}$, $X \subseteq M$, decimos que *c depende de X en M*, si $d(X \cup c, M) = d(X, M)$. Además se define $cl(X, M) = \{a \in M : d(X \cup a, M) = d(X, M)\}$.

Observación 8. *Sean $A, N \in \mathcal{C}$ tal que $A \subseteq N$. Supongamos $A \leq N$:*

1. *Dado $A \subseteq M$, $d(A, A) = d_0(A)$. No es difícil de verificar, se deduce directamente de la definición.*

2. *$d_0(\emptyset) = 0$.*

3. *$d_0(X \cap A) \leq d_0(X)$, $\forall X \subseteq N$.*

4. *$d(A', A) = d(A', N)$, $\forall A' \subseteq A$.*

5. *Si $B \leq A \leq N$ entonces $B \leq N$.*

Demostración. Revisar Lema 1 de [Hru93]. $\square$

Definición 13. *A se dice* simplemente algebraica sobre B (en M)*, si* $A, B \subseteq^{fin} M$*,* $B \leq A \cup B$*,* $A \cap B = \emptyset$*,* $d_0(A \cup B) = d_0(B)$ *y no existen subconjuntos propios* A'*, no vacíos, de* A *tal que* $d_0(A' \cup B) = d_0(B)$*.* A *es* minimal y simplemente algebraica sobre B*, si en adición, no existe un subconjunto propio* B' *de* B *tal que* A *es simplemente algebraica sobre* B'*.*

La idea original de Hrushovski al implementar estas nuevas estructuras, era construir una pre-geometría fuertemente minimal, amalgamando estructuras finitas, cada una de las cuales tienen una pregeometría. Las inmersiones relevantes entre las estructuras finitas deben preservar la dimensión arriba establecida.

Sin embargo, durante el estudio de éstas clases, se visualizó que representa en cierto sentido el concepto ya establecido de las clases de Fraïssé. Ya que la idea es tratar las construcciones de Hrushovski como tal, revisemos que $\mathcal{C}$ cumple HP, JEP y AP para la relación " $\leq$ ": Sean A, B y D finitamente generadas:

1. (HP) Si $A \leq B$ y $B \in \mathcal{C}$ entonces $A \in \mathcal{C}$.

   Demostración. Por hipótesis se tiene $\emptyset \leq B$, es decir, $d_0(\emptyset) = 0 = d(\emptyset, B)$. Como $d(\emptyset, A) = min\{d_0(A_0) : \emptyset \subseteq A\}$ entonces $d_0(A) \geq 0$, y por definición de $\mathcal{C}$, $A \in \mathcal{C}$. $\square$

2. (JEP) Si $A, B \in \mathcal{C}$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $A, B \leq C$.

   Demostración. Se sigue como caso particular de la propiedad de amalgamación (teniendo en cuenta que el vacío es autosuficiente en toda estructura de $\mathcal{C}$), cuya prueba es un poco engorrosa y que se encuentra desarrollada en el artíulo de Hrushovski [Hru93]. $\square$

3. (AP) Si $f_1 : A \to B_1$ y $f_2 : A \to B_2$ son $\leq$-inmersiones, existe $E \in \mathcal{C}$ y g_1, g_2 $\leq$-inmersiones, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& B_1 \arrow[dr, dashed, "g_1"] & \\
A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & & E \\
& B_2 \arrow[ur, dashed, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

   Demostración. Ver capítulo 2, [Hru93]. $\square$

3.2. Propiedad de Ramsey en clases de Hrushovski

La propiedad de Ramsey ha sido planteada dependiendo de la relación tradicional de subestructuras. La idea es reformular esta propiedad para la nueva " contenencia fuerte" introducida en las construcciones de Hrushovski. Entonces podemos traducir esta propiedad al nuevo lenguaje que contiene la relación " $\leq$ ".

Definición 14. *Sean $A \leq B \leq C$ estructuras autosuficientes pertenecientes a $\mathcal{C}$, y k=2,3,...*

1. $\left(\begin{array}{c} B \\ A \end{array} \right) = \{A_0 : A_0 \leq B, A_0 \cong A\}$.

2. *Retomando la notación de Erdös-Rado, diremos que* $C \to (B)^A_k$, *si* $\forall c : \left(\begin{array}{c} B \\ A \end{array} \right) \to 1, ..., k$, *existe* $B_0 \in \left(\begin{array}{c} C \\ B \end{array} \right)$ *tal que* $c\left\{\left(\begin{array}{c} B_0 \\ A \end{array} \right)\right\} = i$.

$\mathcal{C}$ cumple la *propiedad de Ramsey* si $\forall A \leq B \in \mathcal{C}$ y $\forall k = 2, 3, ...$, existe $C \in \mathcal{C}$ con $B \leq C$ tal que $C \to (B)^A_k$.

3.3. La estructura genérica

Como se mencionó al principio del capítulo, la idea es visualizar las construcciones de Hrushovski como una generalización de las clases de Fraïssé, entonces así como toda clase de Fraïssé tiene un límite, existe un análogo en las construcciones de Hrushovski, una estructura que tiene un comportamiento similar, pero en el contexto de Hrushovski, y se conoce como la estructura genérica. De hecho esta estructura genérica asociada a la construcción de Hrushovski, es precisamente el conjunto fuertemente minimal que Hrushovski construyó en [Hru93].

Sea M un modelo. Decimos que M es $(\mathcal{C}, \leq) -$ *genérica* si:

1. M es una $L-$estructura contable.

2. Toda subestructura finita de M está en $\mathcal{C}$.

3. Si $A \leq M$, $A \leq B$ y $B \in \mathcal{C}$, entonces existe $f : B \to M$ una inmersión tal que $fB \leq M$ y $f \upharpoonright A = Id_A$

Por un argumento análogo al utilizado para la construcción del límite de Fraïssé, se muestra que en $\bar{C}$, existe una *estructura genérica* para $\mathcal{C}$, denominada M:

1. $M = \bigcup_{i<\omega} A_i$, donde $A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq .... \in \mathcal{C}$.

2. M es $(\mathcal{C}, \leq)$ - genérica.

De forma similar a la unicidad del límite de Fraïssé se prueba la unicidad, salvo isomorfismo, de esta estructura genérica. Entonces M denotará la estructura genérica asociada a $\mathcal{C}$.

Propiedades de la relación de autosuficiencia y de M

1. $d_0(A) \geq d(A, M)$

2. $d(A, A) = d_0(A)$.

3. Si $A \subseteq B$ entonces $d(A, M) \leq d(B, M)$

4. Si $g \in Aut(M)$ y $A \leq B \leq M$ entonces $g(A) \leq g(B)$.

5. Si $A \subseteq B \subseteq C$ y $A \leq C$, entonces $A \leq B$.

6. Si $A \subseteq^{fin} M$, existe B finito tal que $A \subseteq B \subseteq M$, $d(A, M) = d(B, M)$ y $B \leq M$.

Demostración. A continuación, algunas ideas del por qué de las propiedades:

1. Se tiene porque $A \subseteq\ A \subseteq M$ y d es el mínimo d_0 de conjuntos que contengan a A y sean subconjuntos de M.

2. Por definición.

3. Como $A \subseteq B$, $\{d_0(D) : B \subseteq D \subseteq M\} \subseteq \{d_0(D) : A \subseteq D \subseteq A\}$, de donde $d(B, M) \geq d(A, M)$.

4. Al ser g automorfismo de M, entonces g restringido a A y a B sigue siendo isomorfismo, entonces $n(A) = n(gA)$, $n(B) = n(gB)$, $r(A) = r(gA)$ y $r(A) = r(gA)$, entonces $d_0(F) = d_0(gF)$, $\forall F \subseteq^{fin} M$, luego $d_0(gA) = d_0(A) = d(A, B) = d(gA, gB)$.

5. Por la definición y al ser B subconjunto de C, se tiene el resultado.

6. Basta tomar B, tal que $d(A, M) = d_0(B)$ (ya que por definición de d, se trata de un mínimo, luego es un valor alcanzado por alguna estructura). Claramente $A \subseteq B$, solo falta ver que $d_0(B) = d(B, M)$; siempre se tiene $d_0(B) \geq d(B, M)$, para el otro sentido, por el ítem 3 de estas propiedades, $d(A, M) \leq d(B, M)$, entonces $d_0(B) \leq d(B, M)$.

□

3.4. Algunos Ejemplos y Comentarios

3.4.1. *Ab Initio*

Uno de los ejemplos clásicos de estas construcciones es el que se conoce como *ab initio*, (Ver [Bal99]). La idea, a grandes rasgos, es tomar una clase que no es de amalgamación, en la noción habitual (es decir con la contenencia usual de conjuntos) y restringir las subestructuras, solo a aquellas que son auto suficientes, es decir, aquellas que respetan la noción de dimensión, definida líneas arriba.

Sea $L = \{R\}$ y R una relación de grafo, es decir simétrica y anti-reflexiva. Sea $\mathcal{K}$ la clase de grafos finitos sin ciclos. Esta clase no cumple la propiedad de amalgamación:

Tomemos los siguientes grafos finitos:

- $C_0 = \{a, b, d\}$, tal que $R(a, b)$.
- $C_1 = \{a, b, c, d\}$, tal que $R(a, c)$ y $R(c, d)$.
- $C_2 = \{a, b, c, d, e\}$, tal que $R(d, e), R(e, b)$ y $R(b, a)$.

Claramente $C_0, C_1, C_2 \in \mathcal{K}$ y (C_0, R) es sub-grafo de (C_1, R) y (C_2, R). Si la clase tuviera amalagamación entonces existiría un grafo $C \in \mathcal{K}$ que amalgamaría C_1 y C_2 sobre C_0; pero C, sumergiría elementalmente cada uno de los grafos mencionados, y por lo tanto cumpliría $R(a, c), R(c, d), R(d, e), R(e, b)$ y $R(b, a)$, formando así un ciclo. Luego C no podría pertenecer a la clase, teniendo en cuenta que los grafos que estamos considerando no pueden tener ciclos.

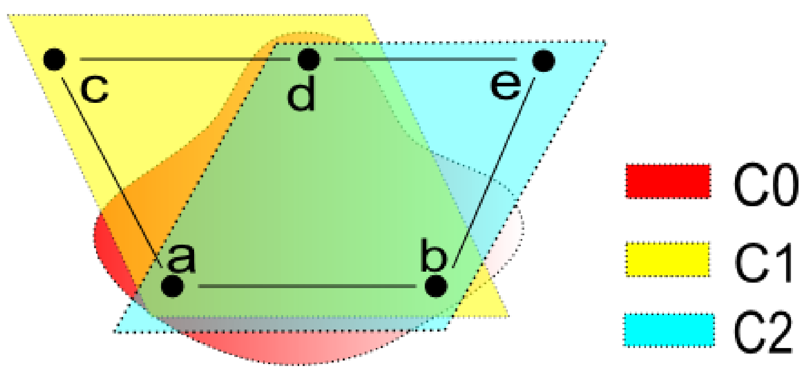


Figura 3.1: No amalgamación en la clase de grafos sin ciclos

Para poder solventar este problema, y volver nuestra clase de amalgamación, la idea es reducir las inmersiones aceptables, es decir , restringir la noción de ser subestructura elemental a aquellos casos en los cuales se respete la noción de dimensión introducida por Hrushovski.

Entonces consideramos de nuevo la clase $\mathcal{K}$, solo que ahora ya no comparamos sus elementos por " $\subseteq$ ", sino por la relación de ser subestructura autosuficiente " $\leq$ ", noción arriba definida. Como vimos previamente la clase de Hrushovski siempre tiene amalgamación, entonces nuestra clase de grafos finitos sin ciclos bajo la relación de auto-suficiencia, $(\mathcal{K}, \leq)$ sí tiene AP.

Ahora revisemos porque en nuestro ejemplo fallaba amalgamación con la definición de sub estructura usual. Lo que ocurre es que en el caso citado, hablamos de amalgamación sobre C_0, ya que éste es sub-grafo tanto de C_1, como de C_2. En nuestro nuevo contexto, C_0 no es auto-suficiente en C_1, veamos la razón de tal afirmación:

- $d_0(C_0) = 3 - 1 = 2$
- $d(C_0, C_1) = min\{d_0(A) : C_0 \subseteq A \subseteq C_1\}$.
- Como $C_0 \subseteq C_1$ entonces $d(C_0, C_1) \leq d_0(C_1)$.
- $d_0(C_1) = 4 - 3 = 1$
- Por (1), (3) y (4) $d_0(C_0) > d_0(C_1) \geq d(C_0, C_1)$

En conclusión $C_0 \neq C_1$. Por lo tanto no tendría sentido amalgamar C_1 y C_2 sobre C_0 en $(\mathcal{K}, \leq)$.

Ahora sabemos, gracias a la teoría desarrollada por Hrushovski, que existe una estructura contable, saturada, fuertemente minimal, asociada a $(\mathcal{K}, \leq)$, llamémosla K que se comporta como lo que llamaremos el límite de Hrushovski.

Ya que K es contable y su lenguaje será el mismo que el de la clase de Hrushovski, o sea R, podemos afirmar que el grupo de automorfismos de K, $Aut(K)$ es un subgrupo cerrado del grupo polaco S_K (Ver 2.4.). En la siguiente sección haremos un análisis más detallado del comportamietno del grupo de automorfismos de la estructura genérica asociada a una construcción de Hrushovski.

3.4.2. Fusiones: algunos comentarios

En esta sección sólo haremos un breve comentario sobre las fusiones, otra aplicación de las construcciones de Hrushovski, mencionando someramente en qué consisten y algunos ejemplos en los que se ha empleado.
El estudio sobre las construcciones de Hrushovski ha permitido el descubrimiento de diversas técnicas útiles en la generación de nuevas estructuras con algunas características específicas. Es el caso de el método de fusionar pre-geometrías sobre lenguajes disyuntos con el objetivo de construir nuevos conjuntos fuertemente minimales. Algunos ejemplos son:

1. (Hrushovski - [Hru]) Dos conjuntos fuertemente minimales con la propiedad de multiplicidad definible (DMP, es decir el rango de Morley es definible en la teoría), en lenguajes disyuntos se pueden fusionar (amalgamar libremente) con la predimensión:

$$\delta(A,B) = RM_1(A/B) + RM_2(A/B) - |A \setminus B|$$

y luego ser colapsado a un conjunto fuertemente minimal.

2. (Ziegler - [Zie07]) Dos teorías de rango de Morley finito y definible con (DMP) pueden ser amlagamadas libremente con predimensión:

$$\delta(A,B) = n_1 RM_1(A/B) + n_2 RM_2(A/B) - n.|A \setminus B|$$

donde $n_1 RM_1(T_1) = n_2 RM_2(T_2) = n$, y colapsar la fusión a una teoría de rango de Morley n.

3.4.3. El límite de Fraïssé, el de Hrushovski y sus automorfismos

Como veíamos al comienzo de la sección, la noción de construcción de Hrushovski resulta como una generalización de la establecida por Fraïssé. Entonces, surge el interrogante de si sobre una clase de Fraïssé, con una relación ternaria que me permita trabajar con la noción de dimensión hasta ahora trabajada, qué pasaría con sus límites, es decir qué relación existiría entre el límite de Fraïssé y la estructura genérica asociada a la clase.

Sea L un lenguaje finito, relacional, con al menos un símbolo de relación ternaria R. Sea $\mathcal{C}$ una L-clase de Fraïssé, pero que cumpla las condiciones pedidas en 3,1. Ahora, si consideramos la relación de autosuficiencia en $\mathcal{C}$ para interrelacionar sus estructuras, sabemos por [Hru93] de la existencia de una única estruturas genérica, salvo isomorfismo, que cumple con las condiciones $(1)-(3)$ de la sección 3.3. Entonces sea :

$$M_1 = Flim(\mathcal{K}) \quad y \quad M_2 = Hlim(\mathcal{C})$$

Ahora revisemos que $M_1 \cong M_2$.

Para ver ésto, solo se debe usar la saturación de M_2, de hecho dicha propiedad fue probada por Hrushovski en [Hru93]. Y como por las propiedades de la estructura genérica asociada a una clase de Hrushovski M_2 es contable, y $Age(M_2) \subseteq \mathcal{C}$, entonces como contable y saturada implica ultrahomogénea, sólo falta ver que $Age(M_2) \supseteq \mathcal{C}$ para concluir (usando subsección 1.1.) que $M_1 \cong M_2$. Por la forma en que se escogió $\mathcal{C}$, para todo $B \in \mathcal{C}$, $\emptyset \leq B$ y aplicando las propiedades de la estructura genérica, existe una inmersión $f : B \to M_2$, tal que $fB \leq M_2$, luego $B \in Age(M_2)$. Entonces por unicidad del límite de Fraïssé garantizamos que los dos límites deben coincidir y por lo tanto sus grupos de automorfismos también.

Ejemplo 7 (KPT). *Sea $\mathcal{K} = EQ_1$ (la clase de las relaciones de equivalencia con una sola clase). Entonces $F = Flim(EQ_1)$ es claramente el grafo completo sobre un conjunto contable. Ahora si consideramos la clase:*

$$OK = K * LO = \{(A, \prec) : A \in K \quad y \quad \prec \text{ es } LO \text{ en } A\}$$

Entonces $Flim(OK) \cong (\mathbb{Q}, E, <)$ donde E es el grafo completo sobre $\mathbb{Q}$. Pero $Aut(\mathbb{Q}, E, <) = Aut(\mathbb{Q}, <)$ y que en [AK76] se prueba que es grupo extremadamente llevadero. Aplicando lo anteriormente observado, obtenemos que la estrutura genérica asociada a $(\mathbb{Q}, E, <)$ es de nuevo $(\mathbb{Q}, <)$.

Comentario Final: En el desarrollo de su trabajo, Hrushovski no trabajó solo con el concepto de dimensión heredado de una relación ternaria. De hecho hizo ésto para R_k, relaciones k- arias donde $k = 3, 4, 5, ...$ De cada $\mathcal{C}_k$, se toma una subclase cuya estrutura genérica sea fuertemente minimal. Dicha selección es la que se conoce como *colapso*.

A partir de la propuesta de Hrushovski, se han desprendido diversas propuestas de construcciones con diferentes pre-geometrías, pero que siempre buscan preservar la noción de autosuficiencia. A grandes rasgos, se puede decir que lo que se busca preservar en toda construcción de Hurshovski, sin importar las modificaciones que se le hayan implementado, es que A sea autosuficiente en B, si la dimensión de todo subconjunto de A con respecto a B es la misma que con respecto a B, es decir, que toda la información importante para la dimensión que podría aportar B, ya estaba en A. Pero debido a la variación de la dimensión, es muy posible, que a diferencia de lo que ocurre con el límite de Fraïssé, las estructuras genéricas asociadas a diferentes nociones de dimensión sobre una misma clase, no guarden relación alguna.

CAPÍTULO 4

Grupos extremadamente llevaderos y Construcciones de Hrushovski

Como pudimos ver en la sección 2, Kechris, Pestov y Todorcevic [AK76] demostraron que el grupo de automorfismos del límite de Fraïssé de una Clase de Fraïssé de orden, es extremadamente llevadero. Ahora después de haber visto en la unidad anterior, las propiedades de las estructuras de Hrushovski, y que en cierta forma son una generalización de las de Fraïssé (bajo la relación de orden " $\leq$ "), resulta natural preguntarse si el grupo de automorfismos de la estructura genérica asociada a la construcción (Ver capítulo 2) también es extremadamente llevadero.

El objetivo de la presente sección es analizar y demostrar el resultado de [AK76] pero en el contexto de Hrushovski, entonces ya no trabajaremos con la noción de ser subestructura tradicional, sino con la contenencia fuerte vista en el capítulo precedente.

Sea M la estructura genérica asociada a $\mathcal{C}$, mencionada en el capítulo anterior y $G = Aut(M)$. Tenemos los siguientes resultados, análogos a los obtenidos por Kechris, Pestov y Todorcevic (Ver cap.2 o [AK76]), pero trabajando con la noción de contenencia fuerte " $\leq$ ":

Lema 3. *Sea G el grupo de automorfismos de M y X un G-flujo. Se tiene la siguiente equivalencia:*

1. *El G-flujo X tiene un punto fijo.*
2. *$\forall n = 1, 2, ...,$ y $f : X \to \mathbb{R}^n$ continua, $\epsilon > 0$, $S_{N_1} \cup S_{N_2} .... \cup S_{N_k}$ con $N_i \leq^{finito} M$, $i \in \{1, ..., k\}$, existe $x \in X$, tal que $|f(x) - f(g.x)| \leq \epsilon$, $\forall g \in (S_{N_1} \cup S_{N_2} .... \cup S_{N_k}) \cap G$.*

Demostración. " $\Longrightarrow$ " Ver lema 1 del capítulo 2.
" $\Longleftarrow$ " Fijemos $f : X \to \mathbb{R}^n$ continua, $\epsilon > 0$ y $F = S_{N_1} \cup ... \cup S_{N_k}$. Se define:

- $A_{f,F,\epsilon} = \{x \in X : \forall g \in F(|f(x) - f(g.x)| \leq \epsilon)\}$ es cerrado.
- Para toda colección finita $(f_j, F_j, \epsilon_j)_{j=1}^m$ (como se indican en la hipótesis), $\cap_{j=1}^m A_{f_j,F_j,\epsilon_j} \neq \emptyset$:
  $\overline{F} = \cup_{i=1}^m F_i$ es unión de S_{N_i}, $\overline{\epsilon} = min_{1 \leq i \leq m}\{\epsilon_i\} > 0$
  $\overline{f} = (f_1, ..., f_m) : X \to \mathbb{R}^{n_1+...+n_m}$ continua.
  Por 2, $\emptyset \neq A_{\overline{f},\overline{F},\overline{\epsilon}} \subseteq \cap_{j=1}^m A_{f_j,F_j,\epsilon_j}$.
- $\cap_{f,F,\epsilon} A_{f,F,\epsilon} \neq \emptyset$: Se deduce de lo anterior y compacidad de X.
- $x \in \cap_{f,F,\epsilon} A_{f,F,\epsilon}$ es punto fijo: Si no, existiría $g \in G$ tal que $g.x \neq x$ y se podría definir el siguiente automorfismo:

$$\begin{array}{rccc} h: & M & \to & M \\ & y & \to & \begin{cases} gx & si\ y = x \\ x & si\ y = gx \\ y & e.o.c \end{cases} \end{array}$$

  Claramente $h(x) \neq x$ y como h fija putualmente a $M \setminus \{x, gx\}$ entonces $h \in S_N$, para algún $N \leq M$. Finalmente, definimos una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ y $f(hx) = 0$, entonces x no pertenecería a $A_{f,N,1}$ $(\to\leftarrow)$.

□

Los resultados que vienen a continuación son, como lo dijimos al inicio, análogos a los obtenidos en [AK76], con unas pequeñas modificaciones para ajustarlos al nuevo lenguaje, entonces para cuestiones de notación, definiciones, escogencia de topologías y demás se puede revisar el capítulo 2.

Nota 4 (**Desambiguación de** “ $\leq$ ”). *Se debe tener cuidado con la interpretación de $\leq$, ya que este símbolo se usará para denotar la relación de ser sub-grupo y también para denotar la própiedad de ser auto-suficiente (Definición 11, capítulo 3). Entonces para poder distinguir cada caso, se debe revisar el contexto: si estamos hablando de grupos topológicos o de subestructuras finitamente generadas.*

Siguiendo la idea del cap. 2, plantearemos la proposición:

Proposición 5. *Si $G \leq S_M$ es un subgrupo cerrado, son equivalentes:*

1. *G es extremadamente llevadero.*
2. *Para todo $G_{(F)} \leq G$ $(F \leq M)$, para toda coloración $c : G/G_F \to \{1, ..., k\}$ y para todo $A \subseteq G/G_F$, existe $g \in G$ y existe i con $1 \leq i \leq k$ tal que $c(g.a) = i, \forall a \in A$*

Nota 5. *Ya que en el enunciado anterior se requiere que el subgrupo sea cerrado, se necesita que $G = Aut(M)$ sea subgrupo cerrado de S_M. Pero como vimos en el capítulo, los subgrupos cerrados de S_∞ son, salvo isomorismo, los grupos de automorfismos de estructuras con universo $\mathbb{N}$ y lenguaje relacional (Sección 2.4), y debido a que S_M es homeomorfo a S_∞, tenemos un resultado análogo para los cerrados de S_M, luego G es subgrupo cerrado.*

Demostración de la proposición 5. " $\Leftarrow$ " Para esta dirección, basta ver que $\{G_{(F)} : \emptyset \neq F \leq M\}$ es una base local de 1_G (Ver nota 1, capítulo 2) y aplicar la proposición 1 (cap.2, $1 \leftarrow 2$) y como dice la nota, para verificar que es base local, es suficiente revisar que la colección de subconjuntos finitos que son auto-suficientes en M es cofinal en $[M]^{<\omega}$. Sea $H \subseteq^{fin} M$; si $H \leq M$ terminamos, pero si no es así, significa que $d_0(H) > d(H, M)$, es decir, existe H_1 subconjunto finito de M tal que $H \subseteq H_1$ y $d_0(H_1) = d(H, M)$ y como $d(H, M) \leq d(H_1, M)$ (por ser H subconjunto de H_1), entonces $d_0(H_1) \leq d(H_1, M)$ y por propiedades de d, se tiene la otra desigualdad concluyendo que $H_1 \leq M$.
" $\Rightarrow$ " Se sigue de la proposición 1, cap.2, teniendo en cuenta que $F \leq M$ implica que $F \subseteq^{fin} M$. $\square$

En el capítulo 2 se introdujo la noción del G - tipo de un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, y se conservará para los subconjuntos finitos auto-suficientes de M (recordar que en M, se reemplazó la contenencia tradicional por " $\leq$ "), es decir definimos $G.F = \{gF : g \in G\}$ donde $F \leq M$. Ahora definimos sobre los G - tipos, la siguiente relación de orden:

$$\begin{aligned} \rho \leq \sigma \quad (1) &\Leftrightarrow \quad \exists F \in \sigma \exists H \in \rho (H \leq F) \\ (2) &\Leftrightarrow \quad \forall F \in \sigma \exists H \in \rho (H \leq F) \\ (3) &\Leftrightarrow \quad \forall H \in \rho \exists F \in \sigma (H \leq F) \end{aligned}$$

Como podemos observar, ésta se deprende naturalmente de 2,1. La modificación que debimos hacer con respecto al caso del capítulo 2 para que funcionara correctamente la definición, consistió en asumir que en este desarrollo $G = Aut(M)$, mientras que en el capítulo 2, G era un subgrupo cerrado arbitrario de S_M

Nota 6. *Verifiquemos que en efecto las tres condiciones anteriores son equivalentes. Sea $\rho = GH_1, \sigma = GH_2$ y $\rho \leq \sigma$*

- *($1 \to 2$) Sea $F \in \sigma$, entonces $F = gH_1$, para algún $g \in G$. Por (1), existe $g_1H_1 \in \sigma$ y $g_2H_2 \in \rho$, tal que $g_1H_1 \leq g_2H_2$. Por propiedades de la relación de autosuficiencia*3,3*, $gH_1 \leq gg_1^{-1}g_2H_2$, y como $gg_1^{-1}g_2 \in G$, hemos terminado.*

- *($2 \to 3$) Sea $H \in \rho$, entonces $H = gH_1$, para algún $g \in G$. Por (2) y como $H_2 = 1_GH_2 \in \sigma$, existe $g_1H_1 \in \rho$, tal que $g_1H_1 \leq H_2$. Por propiedades de la* *relación de autosuficiencia*3,3*,* $gH_1 \leq gg_1^{-1}H_2$*, y como* $gg_1^{-1} \in G$*, se tiene la implicación.*

- *(*$3 \to 1$*) Trivial.*

En la nota 2 del capítulo 2, se precisaron nociones relacionadas con X_L y se introdujo el significado de que un G-flujo ($G \leq S_\infty$), preserve un orden. La idea es, como ahora ya no trabajamos en $\mathbb{N}$, sino en M, trasladar de manera natural estos conceptos a S_M.

Definición 15. *: Sea* $G = Aut(M)$*:*

- *Dados* $\rho \leq \sigma$ $G-$ *tipos, y* $F \in \sigma$*, se define:*

$$\begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix} = \{H \leq F : H \in \rho\}$$

- *Si* $\rho \leq \sigma \leq \tau$*,* $G-$ *tipos y* $k = 2, 3, ...$*, se dice que*

$$\tau \to (\sigma)_k^\rho$$

si $\forall F \in \tau$ *y* $\forall c : \begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix} \to \{1, ..., k\}$*,* $\exists F_0 \in \begin{pmatrix} F \\ \sigma \end{pmatrix}$ *homogéneo, i.e.* $\forall H \in \begin{pmatrix} F_0 \\ \rho \end{pmatrix}$*,* $c\,(H) = i$*, para algún* i*.*

- G tiene la propiedad de Ramsey *si* $\forall \rho \leq \sigma$*, y* $\forall k = 2, 3, ...$*, existe un* $G-$ *tipo* τ *tal que* $\sigma \leq \tau$ *y* $\tau \to (\sigma)_k^\rho$*.*

Proposición 6. *Sea* $G = Aut(M)$*. Son equivalentes:*

1. G *es extremadamente llevadero.*
2. *(a)* $\forall F \leq M$ *tal que* $F \neq \emptyset$*,* $G_F = G_{(F)}$

   (b) $\forall \rho, \sigma$ *G-tipos, con* $\rho \leq \sigma$*, y toda coloración* $c : \rho \to \{1, ..., k\}$*, existe* $1 \leq i \leq k$ *y* $F \in \sigma$ *tal que* $c(F') = i$*,* $\forall F' \in \begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix}$
3. *(a)* G *preserva un orden*

   (b) Como en (2).

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (3) y (3) $\Rightarrow$ (2) se deducen de la proposición 3, capítulo 2.
(2) $\Rightarrow$ (1) La idea es probar el item 2 de la proposición anterior. Sea $V = G_{(F)} = G_F$, con $F \leq M$, entonces G/V se puede identificar con $\rho = G.F$ y sea $c : \rho \to \{1, ...k\}$ y $A \subseteq \rho$, es decir $A = \{g_1F, ..., g_nF\}$. Se hace $F_0 = \bigcup A$ y por la propiedad 5 de

las propiedades de M, $g_iF \leq F_0$, $\forall i \in 1, ..., n$. Sea $\sigma = G.F_0$, y como $g_1F \leq F_0$, y $F_0 \in \sigma$, entonces $\rho \leq \sigma$ y por hipótesis existe $j \in \{1, ...k\}$ y $F \in \sigma$ tal que $c(F') = j$, $\forall F' \in \begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix}$; existe $g \in G$, tal que $F = gF_0$ y ya que $g_iF \leq F_0$, entonces $gg_iF \leq gF_0$ y por lo tanto $c(g.g_iF) = j$, $\forall g_iF \in A$. Por proposición anterior, tenemos la propiedad. $\square$

Proposición 7. *Sea $G = Aut(M)$. Son equivalentes:*

1. *G es extremadamente llevadero.*
2. *(a) G preserva un orden.*
   (b) G tiene la propiedad de Ramsey.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Se tiene por la proposición 3 del capítulo 2.
(2) $\Rightarrow$ (1) La idea es verificar el item b de las condiciones 2 y 3, de la proposición 6. Sean $\rho \leq \sigma$ y $c : \rho \to \{1, ..., k\}$. Por Ramsey, $\exists \tau \geq \sigma$, t.q. $\tau \to (\sigma)^\rho_k$ y $\tau = G.F$ con $F \leq M$. Luego c induce $c' : \begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix} \to \{1, ..., k\}$, i.e. $c' = c \restriction \begin{pmatrix} F \\ \rho \end{pmatrix}$ y por Ramsey, existe $F_0 \in \begin{pmatrix} F \\ \sigma \end{pmatrix}$ tal que c' es monocromático sobre $\begin{pmatrix} F_0 \\ \rho \end{pmatrix}$. Como $F_0 \in \sigma$ entonces queda comprobada la propiedad. $\square$

Definición 16. *Sea L un lenguaje con un símbolo de relación binaria $<$. Una* estructura de orden *para L es una estructura A de L en la cual $<^A$ es un orden lineal. Si $\mathcal{K}$ es una clase de estructuras de L, se dice que $\mathcal{K}$ es una* clase de orden *si todas sus estructuras son de orden.*

Como se ha visto en el desarrollo de esta sección, siguiendo el esquema de demostración utilizado por Kechris, Pestov y Todorcevic en la sección 4 de [Hru93], se han podido establecer los diferentes resultados traducidos al lenguaje empleado por Hrushovski en sus construcciones, para poder llegar finalmente a la conclusión del capítulo, y por tanto el objetivo de la misma:

Teorema 3. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de Hrushovski de orden que cumple la propiedad de Ramsey y M la estructura genérica asociada. Entonces $Aut(M)$ es extremadamente llevadero.*

Demostración. Por la forma en que se construyó la estructura genérica M (Ver 3.3., del capítulo 3), y ya que la clase es de orden, entonces M es una estructura de orden localmente finita. Lo anterior implica que G preserva un orden y como notamos arriba el G-tipo de algún $F \leq M$ es la colección de todas las subestructuras autosuficientes de M que son isomorfas a F, es decir $G.F = \begin{pmatrix} M \\ F \end{pmatrix}$. No es difícil verificar que el hecho de que $\mathcal{C}$ sea una clase de orden que cumple la propiedad de Ramsey, implica que su grupo de automorfismos también la tiene. $\square$

APÉNDICE A

Caracterización de Lynn Scow para las teorías NIP

En el capítulo 2, mencionamos que la afirmación 3 del teorema principal, es un resultado demostrado y utilizado por Lynn Scow para probar una caracterización de las teorías NIP en términos de los indiscernibles generalizados (Ver cap.2 ó [L.S09]).

El objetivo de Scow radicaba en encontrar una equivalencia similar a la ya existente para teorías estables: Una teoría es estable si y sólo si en todo modelo de dicha teoría una sucesión de indiscernibles es conjunto indiscernible. Entonces el teorema demostrado por Scow es:

Teorema 4 (Caracterización de NIP). *Son equivalentes:*

1. *Una teoría T tiene NIP.*

2. *Para todo qf-débilmente saturado grafo indiscernible en un modelo de T es una sucesión de indiscernibles.*

Recordemos que un qf-débilmente saturado grafo indiscernible, es un I-indiscernible, para $I \models T_g$, I modelo qf-débilmente saturado. El lenguaje, notaciones y contexto modelo teórico con los cuales estamos trabajando son los mismos de la sección 2 del capítulo 2, (Ver 2.2).

Para la demostración del teorema se utilizan dos lemas, que indicaremos a continuación:

Lema 4 ($\Leftarrow$). *Si T tiene IP entonces existe un qf-débilmente saturado grafo ordenado indiscernible en un modelo de T, que no es sucesión indiscernible.*

Demostración. Sea $M \models T$, M $\aleph_0$ - saturado. Por Shelah - Laskowski (Ver Lema 2.2 de [ML]), existe $\phi(x, y)$ que "codifica grafos" es decir, para todo (G, R) grafo, existe

$M_G \models T$ tal que $\{\bar{c}_g : g \in G\} \subseteq M_G$ tal que $\forall g, h \in G$, $M_G \models \phi(\bar{c}_g, \bar{c}_h) \Longleftrightarrow R(g,h)$. Sea $G \subseteq M \times M$ las realizaciones de ϕ en M y $\mathcal{R}$ el grafo aleatorio ordenado. Como M es saturado y por compacidad, existe $A \subseteq M$ contable tal que:

$$\mathcal{R} \restriction_R \cong_f (A, G \restriction_{A \times A})$$

Entonces $A = (a_g : f(g) = a)$ (A es indexado por $\mathcal{R}$). Por el corolario 1 del capítulo 2, para $I = \mathcal{R}$, $I-$ indiscernibles tienen la propiedad de modelación. Luego existe $\{b_g : g \in \mathcal{R}\}$ $I-$ indiscernible basado sobre los a_g. Ahora veamos que los b_g NO son sucesión de indiscernibles.

Lema 5. $M \models \phi(b_g, b_h) \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models R(g,h)$.

Demostración. Ver [L.S09], Lema 4.3. □

Por propiedades de grafo ordenado aleatorio, existen $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathcal{R}$ tal que:

1. $i_1 < i_2$, $i_1 R i_2 \Longleftrightarrow M \models \phi(b_{i_1}, b_{i_2})$
2. $j_1 < j_2$, $\neg j_1 R j_2 \Longleftrightarrow M \models \neg\phi(b_{j_1}, b_{j_2})$

luego $\{b_g : g \in \mathcal{R}\}$ no es sucesión de indiscernibles. □

En la prueba anterior, se pudo evidenciar de qué forma Lynn Scow utilizó la caracterización de clases de Ramsey en términos de la propiedad de modelación (enunciada en el teorema principal del capítulo 2), para comprobar su teorema objetivo. A continuación está la otra dirección del resultado de Scow, pero ya que en esta parte no se utiliza el resultado relacionado con clases de Ramsey (tema que nos ocupa en el presente escrito), la prueba no se hará tan detalladamente.

Lema 6 ($\Rightarrow$)**.** *Si algún qf-débilmente saturado grafo ordenado indiscernible en un modelo de T NO es sucesión indiscernible entonces T tiene IP.*

Demostración. Sea $(\bar{a}_i : i \in I)$ $I-$ indiscernible en M que no es sucesión indiscernible. Tomando una extensión elemental, asumimos M $\aleph_0-$ saturado. Por estiramiento de I-indiscernibles, se puede asumir que la sucesión dada es $\mathcal{R}-$ indiscernible (Lema 3.26, [L.S09]), tal que $\forall n \in \omega$, y algún η qf-tipo completo realizado en I, $p_n^\eta(\mathcal{R}) = p_n^\eta(I)$, donde $p_n^\eta = \{\psi(x_1, ..., x_n) : i_1 < ... < i_n, (i_1, ..., i_n) \models \eta(v_1, ..., v_n), \bar{a}_{\bar{i}} \models \psi\}$. Como la inicial no es sucesión de indiscernibles, así ocurre con la nueva, entonces existen $\bar{i}, \bar{j}$, tal que:

$$\begin{cases} i_1 < ... < i_n \\ y \\ j_1 < .... < j_n \end{cases} \quad pero \quad \exists \theta \quad L - fla \quad t.q. \begin{cases} M \models \neg\theta\left(\bar{b}_{\bar{j}}\right) \\ y \\ M \models \theta\left(\bar{b}_{\bar{i}}\right) \end{cases}$$

Dicha $\theta(x;\bar{y})$ es la fórmula que tiene la propiedad de independencia; para poder evidenciar que en realidad ésta es la fórmula buscada, se deben demostrar una serie de resultados que se encuentran desarrollados en el artículo de Scow (Ver [L.S09], Lema 4.4). $\square$

Interrogantes y Trabajo Futuro

Durante el desarrollo de esta tesis, se presentaron diferentes dificultades y cuestionamientos, muchos pudieron ser solventados, mientras que otros, que ofrecen una mayor dificultad, quedaron pendientes y seguirán siendo trabajados más adelante. Algunas de las cuestiones mencionadas son:

1. En lo referente a teoría de nudos fueron varios los interrogantes y complicaciones que se presentaron:

   (a) ¿Es posible encontrar un lenguaje de primer orden de tal forma que se pueda visualizar la clase de los enlaces como una clase de Fraïssé y cada enlace como una L-estructura?. De ser así, ¿qué tipo de objeto sería el límite de Fraïssé de esta clase?, ¿qué tipo de topología tendría?. La discusión de estos interrogantes, permitió la exploración de diferentes sugerencias hechas por Andrés Villaveces y Julien Melleray.

      - Se puede abordar el problema de los enlaces desde un punto de vista más categórico, y al parecer en este entorno sería más fácil trabajar con la clase. Sin embargo, así se pudiera garantizar la existencia de un objeto límite, no sería muy claro la forma y propiedades que éste tendría.
      - Si se puede garantizar que el número de tipos de isomorfismos de los nudos es a lo más contable, sería viable pensar en la codificación de la teoría de los nudos, mediante un lenguaje de primer orden, asignando símbolos diferentes a cada uno de los nudos y enlaces. De esta forma estaríamos olvidando temporalmente la estructura de objetos topológicos (para evitar el problema de la topología sobre el límite) y reducirnos a trabajar con la parte netamente de combinatoria de conjuntos de la clase en cuestión. En un primer momento ésta parece ser una solución adecuada, pero debe ser explorada con cuidado, sobre todo en lo relacionado con el conteo y la codificación de los diferentes tipos de isomorfismo de los nudos.
      - Tratar de construir un lenguaje y una teoría para la clase de los enlaces, pero en lógica continua, teniendo en cuenta que los espacios

de Hilbert y de Banach ya han sido modelados allí, entonces podría ser interesante explorar esta clase desde dicha Lógica.

2. ¿Es posible encontrar resultados de dinámicas topológicas similares a las descritas por Pestov, Todorcevic y Kechris en [AK76], pero equivalentes a un resultado de Ramsey infinito? en este punto se han hecho varias discusiones y aunque aún no se ha podido responder, se han logrado aproximaciones, sobre todo a lo relacionado con qué significa una versión de Ramsey infinitaria. Es el caso de el siguiente resultado debido a Galvin-Prikry ([F.G73]):

$$\mathbb{N} \rightarrow_{\star} (\mathbb{N}_l^{\mathbb{N}})$$

donde $\star$ denota una restricción sobre las coloraciones consideradas, por ejmplo, si tomamos solo las coloraciones borelianas.

3. Durante el trabajo realizado con las clases de Hrushovski en la última sección, definimos sobre ellas una relación de orden sobre sus $G-$ órbitas de sus subestructuras autosuficientes, donde $G = Aut(M)$ y M la estructura asociada. Para que esta relación conservara las propiedades que tenía sobre todas las órbitas, fue necesario trabajar con $G = Aut(M)$, mientras que en el planteamiento general se tiene $G \leq^{cerrado} S_M$, 2,1. Por esta razón la caracterización de ser grupo extremadamente llevadero sola la pudimos hacer para el grupo de automorfismos de M. Entonces la pregunta sería, si es posible encontrar otro orden sobre las órbitas de las estructuras auto-suficientes, que permitiera una caracterización de los grupos extremadamente llevaderos, mediante estructuras genéricas cuyo grupo de automorfismos coincida exactamente con el grupo explorado. Pero para poder realizar ésto, es necesario buscar una nueva relación de órden sobre las órbitas, la cual si se pueda aplicar para cualquier grupo cerrado de S_M.

Bibliografía

[A.H94] R.Woodrow A.H.Lachlan. *Countable Ultrahomogeneous undirected Graphs.* Trans. Amer. Math. Soc. 262, 1980, 51-94.

[AK76] V.G. Pestov y S. Todorcevic A.S. Kechris. *Fraïssé Limits, Ramsey Theory, and Topological Dynamics of Automorphism groups.* Springer - Verlag, New York, 1976.

[Bal99] John Baldwin. Review: Ehud hrushovski, a new strongly minimal set; ehud hrushovski, strongly minimal expansions of algebraically closed fields. 1999.

[F.G73] K.Prikry F.Galvin. *Borel Sets and Ramsey´s Theorem.* J. Symb. Logic 38, 1973.

[Hod93] W. Hodges. *Model Theory.* Universidad de Cambridge. Press, 1993.

[Hru] E. Hrushovski. *Strongly minimal expansions of algebraically closed fields.* Israel J. Math 79. 129.151, 1992 edition.

[Hru93] E. Hrushovski. *A new strongly minimal set.* Annals of Pure and Applied Logic, 52:147-166 edition, 1993.

[J.A88] J.Auslander. *Minimal Flows and Their Extensions.* North Holland, 1988.

[JM11] S. Duzhin J. Mostovoy, S. Chmutov. *Introduction to Vassiliev Knot Invariants.* Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, México, 2011.

[J.N77] V.Rödl J.Nešetřil. *Partitions of finite relational and set systems.* J. Comb. Theory 22(3), 289-312, 1977.

[Kub08] Wieslaw Kubiś. Fraïssé sequences - a category - theoretic approach to universal homegeneous structures. February 2008.

[L.S09] L.Scow. *Characterization of NIP Theories by Orderes Graph-Indiscernibles.* Universidad de California, Berkeley, 2009.

[ML] S. Shelah M.C. Laskowski. *Karp complexity and classes with the independece property.* Annals of Pure and Applied Logic 120 (2003), 263-283.

[S.T73] S.Thomas. *Groups acting on infinite dimensional projective spaces.* J. London Math. Soc. 34 (2), 1986, 265-273.

[Zie07] M. Ziegler. *Fusion on structures of finite Morley Rank.* Annals of Pure and Applied Logic, Mayo 2007.