



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

AUTOMORFISMOS DE POLINOMIOS CUÁNTICOS TORCIDOS

César Fernando Venegas Ramírez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2013

AUTOMORFISMOS DE POLINOMIOS CUÁNTICOS TORCIDOS

César Fernando Venegas Ramírez

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
(Doctor) José Oswaldo Lezama Serrano

Línea de Investigación:
Álgebra no conmutativa
Grupo de Investigación:
Seminario de Álgebra Constructiva SAC^2

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2013

(Dedicatoria)

A Angie Melo, Ana Rosa Ramírez (madre),
Luis Fernando Venegas (Padre) y hermanos.

Agradecimientos

Agradezco a:

José Oswaldo Lezama, Profesor titular de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. Por su asesoría y colaboración en la realización de este trabajo.

Resumen

En este trabajo estudiamos los automorfismos de extensiones *PBW* torcidas y polinomios cuánticos torcidos. Usando el trabajo de Artamonov como referencia se obtiene el resultado principal sobre automorfismos para extensiones *PBW* torcidas genéricas y polinomios cuánticos torcidos genéricos. En general, si tenemos un endomorfismo sobre una extensión *PBW* torcida genérica y existen x_i, x_j, x_u , tal que, el endomorfismo no es cero para estos elementos, y el coeficiente principal es invertible, entonces el endomorfismo actúa sobre cada x_i como $a_i x_i$ para algún a_i en el anillo de coeficientes. Por supuesto, este resultado es valido para anillos de polinomios cuánticos, con $r = 0$, tal como muestra Artamonov en su trabajo. Usamos este resultado para dar algunos resultados mas generales para extensiones *PBW* torcidas usando técnicas de graduación-filtración. Finalmente, usamos localización para caracterizar algunas clase de endomorfismos y automorfismos para extensiones *PBW* torcidas y polinomios cuánticos torcidos sobre dominios de Ore.

Palabras clave: Extensión *PBW* torcida, polinomios cuánticos torcidos, polinomios torcidos iterados, localización, dominio de Ore, filtración-graduación, automorfismos, endomorfismos.

Abstract

In this work we study the automorphisms of skew *PBW* extensions and skew quantum polynomials. We use Artamonov's work as reference for getting the principal results about automorphisms for generic skew *PBW* extensions and generic skew quantum polynomials. In general, if we have an endomorphism on a generic skew *PBW* extension and there are some x_i, x_j, x_u such that the endomorphism is not zero on this elements and the principal coefficients are invertible, then endomorphism act over x_i as $a_i x_i$ for some a_i in the ring of coefficients. Of course, this result is valid for quantum polynomials rings, with $r = 0$, as such Artamonov shows in his work. We use this for giving some more general results for skew *PBW* extensions using filtered-graded techniques. Finally, we use localization for characterize some class the endomorphisms and automorphisms for skew *PBW* extensions and skew quantum polynomials over Ore domains.

Keywords: Skew *PBW* extensions, skew quantum polynomials, iterated skew polynomials, localization, Ore domains, filtered-graded rings, automorphisms, endomorphisms .

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
1. INTRODUCCIÓN	2
2. POLINOMIOS CUÁNTICOS.	5
2.1. Definición y generalidades.	5
2.2. Derivaciones	6
3. AUTOMORFISMOS PARA EL ANILLO DE POLINOMIOS CUÁNTICOS.	16
3.1. Automorfismos para el espacio cuántico.	16
3.1.1. El plano cuántico.	23
3.1.2. El producto tensorial de planos cuánticos.	25
3.1.3. El espacio cuántico uniparamétrico.	25
3.2. Automorfismos para el anillos de polinomios cuánticos genérico.	26
4. AUTOMORFISMOS PARA EXTENSIONES PBW TORCIDAS.	33
4.1. Definiciones y propiedades	33
4.2. Reglas de conmutación para extensiones <i>PBW</i> torcidas cuasi-conmutativas.	34
4.3. Automorfismos para extensiones <i>PBW</i> torcidas.	36
4.4. Automorfismos para extensiones <i>PBW</i> torcidas sobre dominios de Ore a izquierda.	42
4.5. Ejemplos y consideraciones.	48
5. AUTOMORFISMOS PARA POLINOMIOS CUÁNTICOS TORCIDOS.	50
5.1. Definición	50
5.2. Reglas de multiplicación.	51
5.3. Automorfismos para anillos de polinomios cuánticos torcidos.	55
5.4. Automorfismos para el anillo de polinomios cuánticos torcidos sobre un dominio de Ore.	57
5.5. Ejemplos y consideraciones.	63
Bibliografía	64

1 INTRODUCCIÓN

El concepto de anillo de polinomios cuánticos torcidos es realmente nuevo (véase [10]), y muchos aspectos alrededor de estos anillos aún no han sido estudiados a profundidad. Este es el caso de su grupo de automorfismo, por lo cual, el principal interés en el desarrollo de este trabajo es comenzar el estudio de este tema, esperando que los resultados aquí presentados sirvan como referente para futuros trabajos. Por otro lado, basado en los trabajos hechos por V.A. Artamonov sobre automorfismos para el anillo de polinomios cuánticos, podría decir que, el estudio del grupo de automorfismos para el anillo de polinomios cuánticos torcidos ayudará futuras investigaciones en temas como, invariantes bajo la acción de subgrupos del grupo de automorfismo del anillo de polinomios cuánticos torcidos, derivaciones generalizadas y acciones de álgebras de Hopf punteadas. Además, los aportes hechos por Artamonov son parte esencial para el desarrollo de este trabajo, no solo por que hacen parte fundamental de un histórico de resultados que ha sido realmente corto, aproximadamente 20 años, sino porque han inspirado los resultados más importantes que se han obtenido en este trabajo, no solo para el anillo de polinomios cuánticos torcidos, sino también para extensiones PBW torcidas.

Este trabajo tiene una distribución general resumida de la siguiente forma: Los capítulos 2 y 3 presentan una recopilación bibliográfica de algunos de los resultados sobre el grupo de automorfismos del anillo de polinomios cuánticos, y en los capítulos 4 y 5, presentan resultados sobre los endomorfismos y automorfismos para extensiones PBW torcidas y el anillo de polinomios cuánticos torcidos, respectivamente. A continuación se hará una descripción un poco más detallada de cada capítulo.

En el capítulo 2 se presentan definiciones básicas, como son las de anillo de polinomios cuánticos torcidos y derivación, así como algunos resultados que hacen referencia a la descomposición de las derivaciones del espacio cuántico. Es más, este capítulo está dedicado casi en su totalidad al estudio de los resultados presentados por Alev y Chamarié sobre las derivaciones del espacio cuántico (véase [1]), con un especial interés en el teorema 2.2.2, así como en algunos resultados particulares para el plano cuántico, el producto tensorial de planos cuánticos y el espacio cuántico uniparamétrico.

El capítulo 3 se divide en dos partes. En la primera se caracteriza el grupo de automorfismos de los espacios cuánticos, usando los resultados obtenidos en el capítulo anterior sobre deri-

vaciones, y se presentan algunos resultados particulares para el plano cuántico, el producto tensorial de planos cuánticos y el espacio cuántico uniparamétrico. En la segunda parte, el teorema 3.2.3 caracteriza los endomorfismos de los anillos de polinomios cuánticos genéricos (de cierta forma más generales que los espacios cuánticos), para los que el número de indeterminadas es mayor o igual a tres, y como consecuencia se caracterizan algunos tipos especiales de automorfismos.

El capítulo 4 se aborda desde tres estrategias de trabajo. En la primera, se estudian los automorfismos de extensiones *PBW* torcidas genéricas, empezando por establecer reglas de multiplicación, y con ellas, demostrar el teorema 4.3.2, y algunos corolarios inmediatos, los cuales son análogos a varios resultados presentados por Artamonov para polinomios cuánticos. En la segunda, se hace uso de la estrategia de filtración-graduación para obtener resultados para endomorfismos de extensiones *PBW* torcidas genéricas, basándose en los resultados obtenidos con anterioridad para extensiones casi-conmutativas. Y finalmente en la tercera, se estudian los endomorfismos para extensiones *PBW* torcidas sobre dominios de Ore, obteniendo el teorema 4.4.6, tal vez el resultado más interesante del capítulo.

La estructura del capítulo 5 es bastante parecida a la del capítulo 4. Primero, estudiamos de forma lo más general posible los automorfismos para el anillo de polinomios cuánticos torcidos, estableciendo reglas de multiplicación para estos anillos, y con ellas obtenemos un análogo al teorema 3.2.2; en segundo lugar, estudiamos el anillo de polinomios cuánticos torcidos sobre dominios de Ore, obteniendo el teorema 5.4.5 y el corolario 5.4.6. Los teoremas aquí mencionados, se convierten por tanto, en los resultados principales para los objetivos de este trabajo.

Por otro lado, al lector le parecerá extraño que se haya incluido el capítulo 4, dado que al parecer no guarda relación con los objetivos de este trabajo, por lo cual dedico estas líneas a dar una justificación al porque de este hecho. En primer lugar, algunos casos particulares de polinomios cuánticos torcidos pueden clasificarse como una extensión *PBW* torcida casi-conmutativa biyectiva, y aún más, el anillo de polinomios cuánticos torcidos puede verse como una localización de una extensión *PBW* torcida casi-conmutativa biyectiva. Por lo tanto, un estudio de los automorfismos para estas extensiones sería también aplicable a casos particulares de polinomios cuánticos torcidos. En segundo lugar, los resultados del capítulo 4 fueron posibles gracias a que, cuando se estudiaron los anillos de polinomios cuánticos torcidos que podían clasificarse como extensión *PBW* torcida, pude notar que los resultados obtenidos, podían generalizarse a extensiones *PBW* torcidas casi-conmutativas, y usando propiedades de filtración y localización podían generalizarse aun más dichos resultados, tal como se hace en [9], y dado que el estudio de endomorfismos para las extensiones *PBW* torcidas es realmente poco, el capítulo sería de interés para aquellas personas que quieran abarcar este tema.

Aclaro además que, cuando se haga referencia a endomorfismo, hablaré de un endomorfismo de anillos que además actúa como la identidad sobre el anillo de coeficientes. Los módulos y localizaciones son consideradas siempre por la izquierda, al igual que todas las propiedades que hagan referencia a los mismos.

2 POLINOMIOS CUÁNTICOS.

2.1. Definición y generalidades.

Sea D un anillo de división con un conjunto fijo de automorfismos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y $n \geq 2$. También fijamos elementos $q_{ij} \in D$, $i, j = 1, \dots, n$, que satisfacen las siguientes igualdades:

$$q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = Q_{ijr}Q_{jri}Q_{rij} = 1, \quad \alpha_i(\alpha_j(d)) = q_{ij}\alpha_j(\alpha_i(d))q_{ji}, \quad (2-1)$$

donde $Q_{ijr} = q_{ij}\alpha_j(q_{ir})$ y $d \in D$. Adicionalmente, introducimos la matriz $Q = (q_{ij})$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Definición 2.1.1. Las entradas q_{ij} de la matriz Q forman un **sistema de multiparámetros**.

Definición 2.1.2. Notemos por

$$\Lambda := D_{Q,\alpha}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n] \quad (2-2)$$

al anillo asociativo generado por los elementos de D y por

$$x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_r^{-1}, \quad (2-3)$$

sujeto a las relaciones

$$\begin{aligned} x_i x_i^{-1} &= x_i^{-1} x_i = 1, \quad 1 \leq i \leq r; \\ x_i d &= \alpha_i(d) x_i, \quad d \in D, \quad i = 1, \dots, n; \\ x_i x_j &= q_{ij} x_j x_i, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2-4)$$

El anillo (2-2) es llamado **anillo de polinomios cuánticos**. Si $r = n$, el anillo (2-2) se dice que es un **anillo de polinomios cuánticos de Laurent**.

Proposición 2.1.3 ([3]). *El anillo Λ de (2-2) es un espacio vectorial a derecha e izquierda sobre D cuya base consiste de los monomios $u = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$, donde $m_i \in \mathbb{Z}$ si $1 \leq i \leq r$ y $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si $r+1 \leq i \leq n$. En particular, el anillo Λ de (2-2) es un dominio noetheriano a derecha e izquierda con anillo total de fracciones $F = D_{Q,\alpha}(x_1, \dots, x_n)$. Cada automorfismo α_i de D puede ser extendido a F de la siguiente forma $\alpha_i(f) = x_i f x_i^{-1}$.*

Definición 2.1.4. Sea N el subgrupo del grupo multiplicativo D^* del anillo de división D generado por el subgrupo derivado $[D^*, D^*]$ y el conjunto de todos los elementos de la forma $z^{-1}\alpha_i(z)$, donde $z \in D^*$ e $i = 1, \dots, n$.

Podemos observar que N es un subgrupo normal del grupo multiplicativo D^* y D^*/N es un grupo abeliano multiplicativo. El subgrupo normal N surge cuando multiplicamos monomios en el anillo Λ . La siguiente formula será usada frecuentemente. Para cualquiera dos monomios en Λ se tiene que

$$(x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n})(x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}) = \left(\prod_{i \leq j} q_{ji}^{m_j s_i} \cdot u \right) x_1^{m_1+s_1} \cdots x_n^{m_n+s_n}, \quad (2-5)$$

donde $u \in N$.

Cuando las imágenes de los multiparámetros q_{ij} son independientes en D^*/N decimos que el anillo Λ es un **anillo de polinomios cuánticos general o genérico**.

2.2. Derivaciones

En esta sección se asumirá que en el anillo (2-2), $D = k$ es un campo, $r = 0$ y α consiste solo de la identidad sobre D .

Definición 2.2.1. Una **derivación** de un anillo R es un homomorfismo de su grupo aditivo

$$d : R \longrightarrow R, \quad (2-6)$$

que satisface $d(r_1 r_2) = d(r_1)r_2 + r_1 d(r_2)$. Al conjunto de todas las derivaciones de R se le notará como $Der(R)$.

Si b es un elemento de R , la función

$$\begin{aligned} [\cdot, b] : R &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto [x, b] = xb - bx \end{aligned}$$

es una derivación, llamada **derivación interna** respecto a b . Al conjunto de todas las derivaciones interna de R se le notará como $Derint(R)$ (véase [7]).

Cuando adicionalmente R es una k -álgebra, con k un anillo conmutativo, una derivación es además un homomorfismo de k -módulos.

Es claro que si λ es una derivación de la k -álgebra Λ , ella está determinada por su acción sobre los x_i y debe cumplir:

$$\lambda(x_i)x_j + x_i\lambda(x_j) = q_{ij}(\lambda(x_j)x_i + x_j\lambda(x_i)) \quad \text{para todo } i, j = 1, \dots, n. \quad (2-7)$$

Definimos

$$D_i : \Lambda \longrightarrow \Lambda \quad (2-8)$$

$$x_j \longmapsto D_i(x_j) := \begin{cases} x_i & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

es claro que D_i es una derivación para todo i .

Por otro lado, si

$$\Lambda_i := \{v \in \mathbb{N}^n : v_i = 0 \text{ y } \prod_k q_{kj}^{v_k} = q_{ij} \text{ para } i \neq j\}, \quad (2-9)$$

podemos definir una única derivación D_{iv} , para todo $v \in \Lambda_i$, tal que $D_{iv}(x_j) := \delta_{ij}x^v$ para todo j . Estas derivaciones son linealmente independientes, por lo cual consideramos $E := \bigoplus_i (\bigoplus_{v \in \Lambda_i} kD_{iv})$.

Teorema 2.2.2. *Sea Λ un anillo de polinomios cuánticos con las hipótesis consideradas al principio de esta sección, entonces $Der(\Lambda) = Der_{int}(\Lambda) \oplus (\bigoplus_i Z(\Lambda)D_i) \oplus E$.*

Demostración. Dividimos la prueba en tres pasos.

Paso 1. Sea

$$E' := \{D \in Der(\Lambda) : \text{para todo } i, D(x_i) \text{ no contiene el término } x_i \text{ en su expansión}\}.$$

Veamos que $E' = E$.

Como $D_{iv}(x_i) = x^v$, con $v_i = 0$, entonces $D_{iv}(x_i)$ no posee en su expansión a x_i , por lo cual $D_{iv} \in E'$ para cada $v \in \Lambda_i$, y para todo $i = 1, \dots, n$. Esto implica que $E \subseteq E'$.

Para probar la otra contención, consideremos una derivación $D \in E'$. Esta derivación satisface

$$D(x_i)x_j - q_{ij}x_jD(x_i) = 0 \quad \text{para todo } i \neq j. \quad (2-10)$$

En efecto, si $D \in E'$, sabemos de (2-7) que

$$D(x_i)x_j + x_iD(x_j) = q_{ij}(D(x_j)x_i + x_jD(x_i)). \quad (2-11)$$

Observando que $D(x_i)x_j$ y $x_jD(x_i)$ no tienen a x_i en su representación, pero si la tienen $x_iD(x_j)$ y $D(x_j)x_i$, y teniendo en cuenta la representación única de los elementos de Λ , se tiene que

$$D(x_i)x_j - q_{ij}x_jD(x_i) = 0.$$

Por otro lado, cualquier monomio x^v en la escritura de $D(x_i) = \sum_v \lambda_{iv}x^v$, $\lambda_{iv} \in k^*$, verifica

$$x^v x_j - q_{ij}x_j x^v = 0 \text{ si } i \neq j. \quad (2-12)$$

En efecto, dado que $D \in E'$, entonces para cada x^v en la expansión de $D(x_i)$ satisface que $v_i = 0$, de lo contrario $D(x_i)$ tendría un término en el que aparece x_i , lo cual no es posible. Por lo tanto, de (2-10) se tiene que

$$\left(\sum_v \lambda_{iv}x^v\right)x_j - q_{ij}x_j\left(\sum_v \lambda_{iv}x^v\right) = 0, \quad (2-13)$$

así

$$\sum_v \lambda_{iv}(x^v x_j - q_{ij}x_j x^v) = 0, \quad (2-14)$$

por lo cual

$$\sum_v \lambda_{iv}\left(\prod_k q_{kj}^{v_k} - q_{ij}\right)x_j x^v = 0. \quad (2-15)$$

Como la representación de todo elemento en Λ es única, tenemos que

$$\lambda_{iv}\left(\prod_k q_{kj}^{v_k} - q_{ij}\right)x_j x^v = 0, \quad (2-16)$$

por lo tanto,

$$\prod_k q_{kj}^{v_k} x_j x^v - q_{ij}x_j x^v = 0 \text{ para } i \neq j, \quad (2-17)$$

es decir

$$x^v x_j - q_{ij}x_j x^v = 0.$$

La ecuación (2-16) además nos dice que

$$\prod_k q_{kj}^{v_k} = q_{ij} \text{ para todo } j \neq i, \quad (2-18)$$

Así vemos que $v \in \Lambda_i$, ya que $v_i = 0$.

Con esto concluimos que $D = \sum_i \sum_v \lambda_{iv} D_{iv}$, ya que D y $\sum_i \sum_v \lambda_{iv} D_{iv}$ actúan de la misma forma sobre los x_i , $i = 1, \dots, n$. Así hemos mostrado que D puede escribirse como combinación lineal de los D_{iv} , que son los generadores de E ; es decir, hemos probado que $D \in E$ y por tanto $E' \subseteq E$.

Paso 2. Sea $F := \{D \in \text{Der}(\Lambda) : D(x_i) \in \langle x_i \rangle \text{ para todo } i\}$, donde $\langle x_i \rangle$ denota el ideal bilátero generado por x_i . Probemos que

$$\text{Der}(\Lambda) = F \oplus E. \quad (2-19)$$

Si D es una derivación de Λ , para todo i existe $f_i \in \Lambda$ cuya escritura no contiene a x_i , tal que $D(x_i) - f_i \in \langle x_i \rangle$. Es decir, $D(x_i) = p_i + f_i$, con $p_i \in \langle x_i \rangle$.

La ecuación (2-7), implica que

$$p_i x_j + f_i x_j + x_i p_j + x_i f_j = q_{ij}(p_j x_i + f_j x_i + x_j p_i + x_j f_i). \quad (2-20)$$

Observamos que los únicos elementos de (2-20) que no tienen a x_i es su escritura son $f_i x_j$ y $x_j f_i$. Luego por la representación única de los elementos de Λ , se tiene que

$$f_i x_j = q_{ij} x_j f_i. \quad (2-21)$$

De aquí observamos que

$$f_i x_j + x_i f_j = q_{ij}(f_j x_i + x_j f_i) \text{ para } i \neq j, \quad (2-22)$$

por lo tanto, existe una derivación D' tal que $D'(x_i) = f_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Además, $D - D' \in F$ ya que

$$\begin{aligned} (D - D')(x_i) &= D(x_i) - D'(x_i) \\ &= D(x_i) - f_i \in \langle x_i \rangle, \end{aligned} \quad (2-23)$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Así, todo elemento $D \in \text{Der}(\Lambda)$ puede escribirse como suma de un elemento de F y uno de E , y por tanto

$$\text{Der}(\Lambda) = F + E. \quad (2-24)$$

Claramente $F \cap E = 0$, ya que de lo contrario tendríamos una derivación D , tal que $D(x_k) \neq 0$ y $D(x_k)$ está en $\langle x_i \rangle$ y a su vez no tiene a x_i en su escritura, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, concluimos que $\text{Der}(\Lambda) = F \oplus E$.

Paso 3. Si

$$G := \text{Derint}(\Lambda) + \sum_i Z(\Lambda) D_i; \quad (2-25)$$

veamos que $F = G$.

Comencemos probando que (2-25) es suma directa. De lo contrario, existirán elementos no nulos $z_i \in Z(\Lambda)$ y $f \in \Lambda$ no nulos tales que

$$\sum z_j D_j = [\cdot, f], \quad (2-26)$$

por lo tanto

$$z_i D_i(x_i) = [x_i, f]. \quad (2-27)$$

Suponiendo que $z_i = \sum_v \lambda_v x^v$, tenemos que

$$\begin{aligned} z_i x_i &= \sum_v \lambda_v x^v x_i \\ &= \sum_v \lambda_v \prod_j q_{ji}^{v_j} x_i x^v \\ &= \sum_v \lambda_v x_i x^v. \end{aligned}$$

Dada la representación única de los elementos de Λ se llega a que $\prod q_{ji}^{v_j} = 1$, para cada v , luego x^v conmuta con x_i .

Por otro lado, si $f = \sum_v \eta_v x^v$

$$\begin{aligned} z_i x_i &= x_i f - f x_i \\ &= x_i \sum_v \eta_v x^v - \sum_v \eta_v x^v x_i \\ &= \sum_v \eta_v (x_i x^v - x^v x_i) \\ &= \sum_v \eta_v [x_i, x^v]. \end{aligned} \quad (2-28)$$

Así, $\sum_v \lambda_v x^v x_i = \sum_v \eta_v [x_i, x^v]$, y por tanto $\lambda_v x^v x_i = \eta_v [x_i, x^v]$, pero $[x_i, x^v] = 0$ ya que x_i y x^v conmutan. Luego $z_i x_i = 0$ y en consecuencia $z_i = 0$, lo que no es posible.

Si $[\cdot, b] \in \text{Derint}(\Lambda)$, entonces $[x_i, b] \in \langle x_i \rangle$, y $D_j(x_i) = \delta_{ji} x_i \in \langle x_i \rangle$ para todo $i = 1, \dots, n$, lo cual quiere decir que $G \subseteq F$.

Pasamos ahora a demostrar que $F \subseteq G$. Para todo i , sea

$$F_i := \{D \in F : D(x_j) = 0 \text{ para todo } j < i\}. \quad (2-29)$$

Estos conjuntos satisfacen $F_i \subseteq F_{i+1} + G$. En efecto, si $D \in F_i$ podemos escribir $D(x_i) = f_i x_i$ para algún $f_i \in \Lambda$.

Para todo $j < i$, la ecuación (2-7) implica que

$$D(x_i)x_j = q_{ij}x_j D(x_i), \quad (2-30)$$

lo cual nos lleva a que

$$f_i x_i x_j = q_{ij} x_j f_i x_i, \quad (2-31)$$

Como $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$, (2-31) se convierte en

$$q_{ij} f_i x_j x_i = q_{ij} x_j f_i x_i, \quad (2-32)$$

esto nos dice que $f_i x_j = x_j f_i$. Por tanto x_j y f_i conmutan si $j < i$.

De lo anterior deducimos que todos los monomios que aparecen en la escritura de f_i conmutan con x_j , para todo $j < i$.

Consideremos ahora

$$\Gamma_i := \{v \in \mathbb{N} : \prod_k q_{ik}^{v_k} = 1\}. \quad (2-33)$$

Observe que si $v \in \Gamma_i$, entonces x^v conmuta con x_i .

Definimos

$$g_i := \sum_{v \in \Gamma_i} \lambda_v x^v \quad (2-34)$$

$$h_i := \sum_{v \notin \Gamma_i} \lambda_v \left(\prod_j q_{ij}^{v_j} - 1 \right)^{-1} x^v, \quad (2-35)$$

donde los λ_v están dados por la escritura única de f_i . Entonces

$$D(x_i) = [x_i, h_i] + g_i x_i. \quad (2-36)$$

En efecto, observemos que

$$\begin{aligned} x_i h_i &= x_i \sum_{v \notin \Gamma_i} \lambda_v \left(\prod_j q_{ij}^{v_j} - 1 \right)^{-1} x^v \\ &= \sum_{v \notin \Gamma_i} \lambda_v \left[\left(\prod_j q_{ij}^{v_j} - 1 \right)^{-1} \prod_j q_{ij}^{v_j} \right] x^v x_i. \end{aligned} \quad (2-37)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
x_i h_i - h_i x_i &= \sum_{v \notin \Gamma_i} \lambda_v \left(\prod_j q_{ij}^{v_j} - 1 \right)^{-1} \prod_j q_{ij}^{v_j} x^v x_i - \sum_{v \notin \Gamma_i} \lambda_v \left(\prod_j q_{ij}^{v_j} - 1 \right)^{-1} x^v x_i \\
&= \sum_{v \notin \Gamma_i} \lambda_v \left(\prod_j q_{ij}^{v_j} - 1 \right)^{-1} \left(\prod_j q_{ij}^{v_j} - 1 \right) x^v x_i \\
&= \sum_{v \notin \Gamma_i} \lambda_v x^v x_i.
\end{aligned} \tag{2-38}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \notin \Gamma_i} \lambda_v x^v x_i + g_i x_i &= f_i x_i \\
&= D(x_i).
\end{aligned} \tag{2-39}$$

Tomado $D' = D - [\cdot, h_i]$ notamos que $D' \in F_i$. En efecto, sabemos que $D \in F_i$ y que todos los monomios x^v que aparecen en la escritura de f_i , conmutan con x_j si $j < i$, por lo que $[x_j, h_i] = 0$. Por otra parte, la relación (2-7) aplicada a D' para todo $k > i$ implica que

$$\begin{aligned}
D'(x_i) x_k + x_i D'(x_k) &= q_{ik} [D'(x_k) x_i + x_k D'(x_i)] \\
g_i x_i x_k - q_{ik} x_k g_i x_i &= q_{ik} D'(x_k) x_i - x_i D'(x_k),
\end{aligned} \tag{2-40}$$

ya que los g_i conmutan con x_i tenemos que

$$g_i x_i x_k - q_{ik} x_k g_i x_i = q_{ik} D'(x_k) x_i - x_i D'(x_k), \tag{2-41}$$

como $x_k x_i = q_{ki} x_i x_k = q_{ik}^{-1} x_i x_k$,

$$\begin{aligned}
g_i x_i x_k - x_i x_k g_i &= q_{ik} D'(x_k) x_i - x_i D'(x_k) \\
x_i (g_i x_k - x_k g_i) &= q_{ik} D'(x_k) x_i - x_i D'(x_k) \\
x_i [g_i, x_k] &= q_{ik} D'(x_k) x_i - x_i D'(x_k).
\end{aligned} \tag{2-42}$$

Por otro lado, observemos que si $[g_i, x_k] = \sum_v \xi_v x^v$ entonces

$$\begin{aligned}
x_i [g_i, x_k] &= x_i (g_i x_k - x_k g_i) \\
&= x_i g_i x_k - x_i x_k g_i \\
&= g_i x_i x_k - q_{ik} x_k x_i g_i \\
&= q_{ik} g_i x_k x_i - q_{ik} x_k g_i x_i \\
&= q_{ik} (g_i x_k - x_k g_i) x_i \\
&= q_{ik} [g_i, x_k] x_i \\
&= q_{ik} \sum_v \xi_v x^v x_i,
\end{aligned}$$

lo cual quiere decir que el primer miembro de (2-42) posee monomios x^v con $\prod_l q_{il}^{v_l} = q_{ik}$, mientras que la segunda no contiene tales monomios. Si existieran tales monomios entonces tendríamos que $x_i x^v = \prod_l q_{il}^{v_l} x^v x_i = q_{ik} x^v x_i$, y por tanto $q_{ik} x^v x_i - x_i x^v = 0$, así estos monomios no aparecen en la representación.

Esto nos lleva a concluir que g_i conmuta con todos los x_k para $k > i$ y por lo tanto $g_i \in Z(\Lambda)$.

Finalmente, tenemos que $D' - g_i D_i \in F_{i+1}$, pues $D', D \in F_i$ y $D'(x_i) - g_i D_i(x_i) = g_i x_i - g_i x_i = 0$. Entonces $D = D' - g_i D_i + [\cdot, h_i] + g_i D_i \in F_{i+1} + G$. Luego hemos demostrado que

$$F = F_1 \subseteq F_2 + G \subseteq \cdots \subseteq F_{n+1} + G = G, \quad (2-43)$$

lo cual nos dice que $F \subseteq G$. Por tanto $F = G$.

✎

Corolario 2.2.3. Si $n = 2$, $E = \{0\}$ si, y sólo si, $q_{12} \neq 1$.

Demostración. En efecto, si $v \in \Lambda_i$, entonces $v_i = 0$ y además $q_{ij}^{v_j} = q_{ij}$, es decir, $1 = q_{ij}$. ✎

Corolario 2.2.4. Si $A = \bigotimes_{i=1}^p A_i$, con $A_j = k[x_i, y_i]$, $x_i y_i = q_i y_i x_i$ y $q_i \neq 1$ para $i = 1, \dots, p$, entonces $E = \{0\}$.

Demostración. Veamos cómo se comporta la matriz de multiparámetros para el caso de este producto tensorial. Cuando multiplicamos x_i por x_j o y_j con $i \neq j$ tenemos que $x_i x_j = x_j x_i$ y de la misma forma $x_i y_j = y_j x_i$, por lo cual podemos deducir que la matriz de multiparámetros es de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 1 & q_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ q_1^{-1} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & q_2 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & q_2^{-1} & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & q_p \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & q_p^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2-44)$$

Observamos que en cada fila y cada columna solo existe una entrada distinta de 1, y por tanto cualquier permutación de las filas y columnas de esta matriz cumple la misma propiedad.

Notemos y_k por x_{k+p} para todo k , $1 \leq k \leq p$. Si $v \in \Lambda_i$, entonces $v_i = 0$ y $\prod_k q_{kj}^{v_k} = q_{ij}$ con $i \neq j$. En particular, tomando $q_{ij} \neq 1$ se tiene que $1 = \prod_k q_{kj}^{v_k} = q_{ij}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\Lambda_i = \emptyset$ para cada $i = 1, \dots, p$. ✎

Corolario 2.2.5. *Supongamos que $q_{ij} = q$ para todo $i < j$ y q no es raíz de la unidad. Entonces $Z(\Lambda) = k$ y se tienen los siguientes casos*

(1) *Si $n = 3$, entonces $E = k\delta$ donde δ esta dado por*

$$\delta(x_1) = \delta(x_3) = 0 \text{ y } \delta(x_2) = x_1x_3.$$

(2) *Si $n \neq 3$, entonces $E = \{0\}$.*

Demostración. Si q no es raíz de la unidad, para todo $v \in \mathbb{N}$ y todo i ,

$$[x_i, x^v] = 0 \text{ si, y sólo si, } \sum_{j<i} v_j = \sum_{j>i} v_j.$$

En efecto, sabemos que x_i y x^v conmutan si, y sólo si, $\prod_j q_{ij}^{v_j} = 1$. Como en este caso $q_{ij} = q$ para $i < j$ entonces debemos tener $(\prod_{i<j} q^{v_j})(\prod_{i>j} q^{-v_j}) = 1$. Como q no es raíz de la unidad, entonces $\sum_{i<j} v_j = \sum_{i>j} v_j$.

Por lo tanto, cuando $i = 1, 2$ tenemos que $v_2 + v_3 + \dots + v_n = 0$ y $v_1 = v_3 + \dots + v_n$, respectivamente. Por lo tanto, $v_1 + v_2 = 0$, como cada $v_i \geq 0$ entonces $v_1 = \dots = v_n = 0$. En consecuencia, se tiene que $Z(\Lambda) = k$, pues cualquier monomio que conmute con x_i debe tener exponente $v = 0$.

Supongamos que existe i y v tal que $v \in \Lambda_i$, entonces $v_i = 0$ y $\prod_k q_{kj}^{v_k} = q_{ij}$. Como q no es raíz de la unidad y $q_{ij} = q$ para $i < j$, entonces

$$\sum_{k<j} v_k + \sum_{k>j} v_k = 1 \text{ si } i < j \tag{2-45}$$

o

$$\sum_{k<j} v_k + \sum_{k>j} v_k = -1 \text{ si } i > j. \tag{2-46}$$

En particular, se debe tener que $i \neq n$, ya que de lo contrario, tomando $j = n - 1$, tendríamos que

$$\sum_{k<n-1} v_k - v_n = -1 \quad (\text{según (2-46)}), \tag{2-47}$$

pero en este caso $v_n = 0$, es decir $\sum_{k<n-1} v_k = -1$ lo cual es una contradicción ya que $v_k \geq 0$.

Similarmente, $i \neq 1$, ya que suponiendo lo contrario, y tomando $j = 2$ tenemos

$$-\sum_{k>2} v_k = 1 \quad (\text{según (2-45)}), \tag{2-48}$$

lo cual no es posible, ya que $v_k \geq 0$ para cada k .

Para el caso en que $j = n$, tenemos que $\sum_{k < n} v_k = 1$, luego existe $l < n$ tal que $v_l = 1$, $v_k = 0$ para todo $k \neq l$ y $k < n$. Necesariamente $l < i$, ya que de lo contrario $\sum_{k < l} v_k - \sum_{k > l} v_k = 1$, lo cual no lleva a que $-v_n = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$\sum_{k < l} v_k - \sum_{k > l} v_k = -1. \quad (2-49)$$

Como $v_k = 0$ para $k \neq j$ y $k < n$, entonces solo nos queda, $-v_n = -1$.

Cuando $j = 1$, se tiene que

$$-\sum_{k > 1} v_k = -1, \text{ según (2-46)} \quad (2-50)$$

por lo que

$$\sum_{k > 1} v_k = 1, \quad (2-51)$$

lo cual requiere que $l = 1$, púes ya hemos deducido que $v_n = 1$.

Veamos ahora que $i = 2$. En efecto, si $i > 2$ podríamos considerar $1 < j = i - 1$, por lo cual

$$\sum_{k < i-1} v_k - \sum_{k > i+1} v_k = v_1 - v_n = 1, \quad (2-52)$$

lo cual es una contradicción, ya que $v_1 - v_n = 0$.

Luego para el caso en que $n \neq 3$, $E = \{0\}$. En efecto, se tiene que $i = 2$ y por tanto $\prod_k q_{kj}^{v_k} = q_{2j}$ para $j \neq 2$, esto equivalente a decir que $q_{1j}q_{nj} = q_{2j}$ para $j \neq 2$. Tomando $j \neq 1, 2, n$ se tiene que $1 < j < n$, por lo tanto, $1 = q_{1j}q_{nj} = qq^{-1} = q_{2j} = q$, lo que es una contradicción.

Finalmente, para el caso en que $n = 3$, $v_1 = 1$, $v_2 = 0$ y $v_3 = 1$, por lo cual existe una derivación D_{2v} tal que $D_{2v}(x_j) = \delta_{ij}x^v$, es decir

$$\begin{aligned} D_{2v}(x_1) &= 0 \\ D_{2v}(x_2) &= x_1x_3 \\ D_{2v}(x_3) &= 0. \end{aligned}$$

Dado el razonamiento anterior esta es la única derivación de este tipo y por tanto $E = kD_{2v}$.



3 AUTOMORFISMOS PARA EL ANILLO DE POLINOMIOS CUÁNTICOS.

Denotaremos por $End(\Lambda)$ al semigrupo de todos los endomorfismos de anillos de Λ que actúan como la identidad sobre D , y $Aut(\Lambda)$ es el grupo de todos los automorfismos de Λ , que actúan como la identidad sobre D , es decir, los elementos invertibles del semigrupo $End(\Lambda)$.

3.1. Automorfismos para el espacio cuántico.

En esta sección se asumirá que D es un campo de característica cero, $r = 0$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = id_D$. Para este caso, el anillo Λ de (2-2) lo denominaremos espacio cuántico.

Por notación, $Aut_L(\Lambda)$ es el grupo de automorfismos lineales de Λ , es decir, el conjunto de aquellos automorfismos que dejan estable el subespacio generado por los x_i .

Proposición 3.1.1. *Dos monomios $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ y $x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ conmutan si, y sólo si,*

$$\prod_{i < j} q_{ji}^{m_i s_j - s_i m_j} = 1. \quad (3-1)$$

Demostración. Supongamos que $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ y $x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ conmutan. Según las reglas de conmutación,

$$(x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n})(x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}) = \prod_{i < j} q_{ji}^{m_j s_i} x_1^{m_1 + s_1} \dots x_n^{m_n + s_n}, \quad (3-2)$$

y

$$(x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n})(x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}) = \prod_{i < j} q_{ji}^{s_j m_i} x_1^{m_1 + s_1} \dots x_n^{m_n + s_n}. \quad (3-3)$$

Como hemos supuesto que estos monomios conmutan, entonces

$$\prod_{i < j} q_{ji}^{s_j m_i} x_1^{m_1 + s_1} \dots x_n^{m_n + s_n} = \prod_{i < j} q_{ji}^{m_j s_i} x_1^{m_1 + s_1} \dots x_n^{m_n + s_n}, \quad (3-4)$$

por lo tanto, usando la representación única de los elementos de Λ , tenemos que

$$\prod_{i < j} q_{ji}^{s_j m_i} = \prod_{i < j} q_{ji}^{m_j s_i}, \quad (3-5)$$

así,

$$\prod_{i < j} q_{ji}^{m_i s_j - s_i m_j} = 1. \quad (3-6)$$

La demostración de la proposición recíproca consiste en realizar el análisis inverso al presentado anteriormente. \checkmark

Lema 3.1.2. *Una matriz $\alpha = (\alpha_{ij}) \in GL_n(D)$ define un automorfismo lineal de Λ si, y sólo si, verifica la siguiente relación para todo $i < j$ y $k \leq l$:*

$$\alpha_{ik} \alpha_{jl} (1 - q_{ij} q_{lk}) = \alpha_{il} \alpha_{jk} (q_{ij} - q_{lk}). \quad (3-7)$$

Demostración. Supongamos que la matriz α define un automorfismo lineal T de Λ , entonces para $i < j$,

$$\begin{aligned} T(x_i) &= \sum_k \alpha_{ik} x_k, \\ T(x_j) &= \sum_l \alpha_{jl} x_l, \end{aligned}$$

se tiene que

$$T(x_i x_j) = q_{ij} T(x_j x_i),$$

es decir,

$$\left(\sum_k \alpha_{ik} x_k \right) \left(\sum_l \alpha_{jl} x_l \right) = q_{ij} \left(\sum_l \alpha_{jl} x_l \right) \left(\sum_k \alpha_{ik} x_k \right). \quad (3-8)$$

Por otro lado, si $k \leq l$ el coeficiente de $x_k x_l$ del lado izquierdo debe ser igual al coeficiente de $x_k x_l$ del lado derecho. Por lo cual

$$\alpha_{ik} x_k \alpha_{jl} x_l + \alpha_{il} x_l \alpha_{jk} x_k = q_{ij} \alpha_{jk} x_k \alpha_{il} x_l + \alpha_{jl} x_l \alpha_{ik} x_k, \quad (3-9)$$

por lo que

$$\alpha_{ik} \alpha_{jl} + q_{lk} \alpha_{il} \alpha_{jk} = q_{ij} \alpha_{jk} \alpha_{il} + q_{ij} q_{lk} \alpha_{jl} \alpha_{ik}. \quad (3-10)$$

Así,

$$\alpha_{ik} \alpha_{jl} (1 - q_{ij} q_{lk}) = \alpha_{jk} \alpha_{il} (q_{ij} - q_{lk}). \quad (3-11)$$

Para probar el recíproco, observemos que (3-11) implica (3-8) (realizando los análisis contrarios), luego definiendo

$$T(x_i) = \sum_k \alpha_{ik} x_k, \quad (3-12)$$

para todo $i = 1, \dots, n$, se tiene que

$$T(x_i)T(x_j) = q_{ij}T(x_j)T(x_i) \text{ (según (3-8))}. \quad (3-13)$$

Observemos ahora que Λ es una k -álgebra generada por D y $X := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, por lo tanto, $\Lambda \cong D\{X\}/\langle x_i x_j - q_{ij} x_j x_i : i < j \rangle$, donde $D\{X\}$ es el álgebra libre en el alfabeto X .

Definiendo

$$\begin{aligned} T' : X &\longrightarrow \Lambda \\ x_i &\longmapsto T(x_i), \end{aligned} \quad (3-14)$$

y usando propiedad universal para el álgebra sobre el alfabeto X , existe un D -homomorfismo de anillos $\overline{T'} : D\{X\} \longrightarrow \Lambda$, tal que $\overline{T'}(x_i) = T'(x_i) = T(x_i)$. Observemos además, que $\overline{T'}$ es un homomorfismo de anillos sobreyectivo y $\ker(\overline{T'}) \supseteq \langle x_i x_j - q_{ij} x_j x_i : i < j \rangle$ (esta última se deduce de (3-13)).

Como $\ker(\overline{T'}) \supseteq \langle x_i x_j - q_{ij} x_j x_i : i < j \rangle$, existe un D -homomorfismo de anillos

$$T : \Lambda \longrightarrow \Lambda, \quad (3-15)$$

tal que $T(x_i) = T'(x_i)$, el cual resulta sobreyectivo, ya que T' lo es. Resta ver que T es un homomorfismo inyectivo. Como Λ es noetheriano a derecha e izquierda y T es sobreyectivo, entonces T es inyectivo. Así, T es un automorfismo.

Finalmente, como $T(x_i)$ está en el subespacio generado por los x_k , para cada $i = 1, 2, \dots, n$, entonces T deja invariante el subespacio generado por los x_k , es decir, $T \in \text{Aut}_L(\Lambda)$ como se quería probar. \diamond

El siguiente lema permite usar las derivaciones de Λ para calcular o caracterizar $\text{Aut}(\Lambda)$ en algunos casos especiales del espacio cuántico. Notaremos por $D(\Lambda)$ a la subálgebra de $\text{End}_D(\Lambda)$ generada por las D -derivaciones de Λ , donde una D -derivación es entendida como una derivación de Λ que además es un D -homomorfismo.

Definición 3.1.3 (Derivación alta). Sea A una D -álgebra graduada, y consideremos el conjunto de funciones

$$d_l : A \longrightarrow A, \quad (3-16)$$

para $l \geq 0$. Decimos que $(d_l)_{l \geq 0}$ es una derivación alta de A , si $d_0 = id_A$ y para todo $x, y \in A$ y todo $l \geq 0$, $d_l(xy) = \sum_{i+j=l} d_i(x)d_j(y)$.

Lema 3.1.4. *Sea $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ una D -álgebra graduada tal que $A_0 = D$ y A es generada por A_1 . Sea $\sigma : A \rightarrow A$ un morfismo de D -álgebras, y supongamos que $\bigoplus_{i \geq 2} A_i \supseteq (\sigma - id)(A_1)$. Entonces para $l \geq 0$, existe $d_l \in D(A)$ tal que para todo $i \geq 0$, si $x \in A_i$, $d_l(x)$ es la componente homogénea de grado $i + l$ de $\sigma(x)$.*

Demostración. Por hipótesis, se tiene que $A_i = A_i^1$. Definimos el morfismo de D -álgebras

$$u : A \rightarrow A[t], \quad (3-17)$$

de la siguiente forma: para todo $x \in A_i$, $u(x) = \sum_{j \geq i} y_j t^{j-i}$, donde y_j son las componentes homogéneas de grado j de $\sigma(x)$, y escribimos $u(x) = \sum_{l \geq 0} d_l(x) t^l$.

Observamos que $(d_l)_{l \geq 0}$ es una derivación alta de A (véase [6], pág. 193), y dado que D es un campo de característica cero, el lema será consecuencia del siguiente resultado. \spadesuit

Lema 3.1.5. *Sea A un álgebra sobre un campo k de característica cero. Si $(d_l)_{l \geq 0}$ es una derivación alta de A , cada componente d_l está en $D(A)$.*

Demostración. Si $d = (d_l)_{l \geq 0}$ y $d' = (d'_l)_{l \geq 0}$ son dos derivaciones altas, podemos definir una derivación alta $d \cdot d'$ de la siguiente forma

$$(d \cdot d')_l := \sum_{i+j=l} d_i d'_j. \quad (3-18)$$

Por otro lado, dos derivaciones altas son equivalentes si para todo $l \geq 0$, $d'_l - d_l$ pertenece a la k -álgebra generada por $D(A)$ y d_0, \dots, d_{l-1} (esta relación es de equivalencia).

Mostremos usando inducción sobre $l \geq 0$, que existe una derivación alta d' equivalente a d tal que $d'_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, l$. Es claro que d'_{l+1} en este caso es una derivación.

A partir de d' podemos obtener una derivación alta de la siguiente forma:

$$d''_{i(l+1)} = \frac{1}{i!} (-d'_{l+1})^i, \quad y \quad (3-19)$$

$d''_j = 0$ para $j \neq i(l+1)$ para todo i .

Se tiene que $d' \cdot d''$ es una derivación alta equivalente a d' y por lo tanto a d , y verifica

$$(d' \cdot d'')_i = 0 \quad (3-20)$$

para todo i tal que $0 < i \leq l+1$.

Luego por inducción sobre l se llega a que para todo $l \geq 0$, $d_l \in D(A)$. \spadesuit

Para el siguiente teorema consideraremos la graduación de Λ , donde cada componente homogénea de grado i se notará como A_i .

Teorema 3.1.6. *Si $E = \{0\}$, entonces $\text{Aut}(\Lambda) = \text{Aut}_L(\Lambda)$.*

Demostración. Note en primer lugar que si $E = \{0\}$, para i fijo, existe al menos un j tal que $q_{ij} \neq 1$. Ya que de lo contrario $v = 0$ estaría en Λ_i .

Sea σ un automorfismo de Λ y supongamos que

$$\sigma(x_i) = \alpha_{i0} + \sum_k \alpha_{ik}x_k + f_i, \quad (3-21)$$

con $\alpha_{ik} \in D$ para todo $k \geq 0$, y f_i una suma de elementos homogéneos de grado mayor o igual que dos.

Como

$$\sigma(x_i)\sigma(x_j) = q_{ij}\sigma(x_j)\sigma(x_i), \quad (3-22)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(x_i)\sigma(x_j) &= (\alpha_{i0} + \sum_k \alpha_{ik}x_k + f_i)(\alpha_{j0} + \sum_t \alpha_{jt}x_t + f_j) \\ &= \alpha_{i0}\alpha_{j0} + \alpha_{i0}(\sum_t \alpha_{jt}x_t) + \alpha_{i0}f_j + (\sum_k \alpha_{ik}x_k)\alpha_{j0} + (\sum_k \alpha_{ik}x_k)(\sum_t \alpha_{jt}x_t) \\ &\quad + (\sum_k \alpha_{ik}x_k)f_j + f_i\alpha_{j0} + f_i(\sum_t \alpha_{jt}x_t) + f_i f_j, \end{aligned} \quad (3-23)$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} q_{ij}\sigma(x_j)\sigma(x_i) &= q_{ij}(\alpha_{j0} + \sum_t \alpha_{jt}x_t + f_j)(\alpha_{i0} + \sum_k \alpha_{ik}x_k + f_i) \\ &= q_{ij}(\alpha_{j0}\alpha_{i0} + \alpha_{j0}(\sum_k \alpha_{ik}x_k) + \alpha_{j0}f_i + (\sum_t \alpha_{jt}x_t)\alpha_{i0} \\ &\quad + (\sum_t \alpha_{jt}x_t)(\sum_k \alpha_{ik}x_k) + (\sum_t \alpha_{jt}x_t)f_i + f_j\alpha_{i0} \\ &\quad + f_j(\sum_k \alpha_{ik}x_k) + f_j f_i). \end{aligned} \quad (3-24)$$

Comparando los elementos homogéneos llegamos a que $\alpha_{i0}\alpha_{j0} = q_{ij}\alpha_{j0}\alpha_{i0}$, y también

$$\alpha_{i0}\alpha_{jt} + \alpha_{it}\alpha_{j0} = q_{ij}(\alpha_{j0}\alpha_{it} + \alpha_{jt}\alpha_{i0}). \quad (3-25)$$

Es decir,

$$\alpha_{i0}\alpha_{jt} - q_{ij}\alpha_{i0}\alpha_{jt} + \alpha_{it}\alpha_{j0} - q_{ij}\alpha_{it}\alpha_{j0} = 0; \quad (3-26)$$

y por tanto

$$(1 - q_{ij})(\alpha_{i0}\alpha_{jt} + \alpha_{it}\alpha_{j0}) = 0, \quad (3-27)$$

para todo $t \geq 0$.

Si $\alpha_{i0} \neq 0$, tomando $q_{ij} \neq 1$ y $t = 0$, entonces

$$(\alpha_{i0}\alpha_{j0} + \alpha_{j0}\alpha_{i0}) = 0, \quad (3-28)$$

de donde $\alpha_{j0} = 0$. Reemplazando α_{j0} en (3-27), deducimos que para $t \geq 0$, $\alpha_{i0}\alpha_{jt} = 0$, es decir, $\alpha_{jt} = 0$.

Según (3-22), (3-23), (3-24) se tiene

$$\alpha_{i0}f_j + \left(\sum_k \alpha_{ik}x_k\right)f_j + f_i f_j = q_{ij}(f_j\alpha_{i0} + f_j\left(\sum_k \alpha_{ik}x_k\right) + f_j f_i),$$

y dada la representación única de $\sigma(x_i)\sigma(x_j)$ se debe tener

$$\alpha_{i0}f_j - q_{ij}f_j\alpha_{i0} = (1 - q_{ij})\alpha_{i0}f_j = 0, \quad (3-29)$$

así $f_j = 0$ lo que indica $\sigma(x_j) = 0$, que es una contradicción, y por tanto $\alpha_{i0} = 0$.

Ya que la proposición también es válida para σ^{-1} , veamos que la matriz $(\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es invertible.

Es claro que si $a_i \in A_i$ con $i \geq 1$, $\sigma(a_i) \notin A_0$, pues de lo contrario σ no sería un automorfismo. Además, si $i \geq 2$ entonces $\sigma(a_i) \notin A_1$, ya que es producto de componentes de grado 1 o mayor.

Suponiendo que

$$\sigma^{-1}(x_k) = \sum_j \beta_{kj}x_j + f'_k, \quad (3-30)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(\sigma(x_i)) &= \sigma^{-1}\left(\sum_k \alpha_{ik}x_k + f_i\right) \\ &= \sum_k \alpha_{ik}\sigma^{-1}(x_k) + \sigma^{-1}(f_i) \\ &= \sum_k \alpha_{ik}\left(\sum_j \beta_{kj}x_j + f'_k\right) + \sigma^{-1}(f_i) \\ &= \sum_k \sum_j \alpha_{ik}\beta_{kj}x_j + \sum_k \alpha_{ik}f'_k + \sigma^{-1}(f_i), \end{aligned}$$

comparando componentes homogéneas, se llega a que

$$\alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{nj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Recíprocamente, aplicando el razonamiento a $\sigma\sigma^{-1}$ se tiene que $(\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es invertible y define un automorfismo lineal τ de Λ de la siguiente forma, $\tau(x_i) = \sum_k \alpha_{ik}x_k$ para $k = 1, \dots, n$.

Por lo tanto,

$$\sigma(x_i) = \tau(x_i) + f_i. \quad (3-31)$$

Luego se tiene que

$$\tau^{-1}\sigma(x_i) = x_i + \tau^{-1}(f_i). \quad (3-32)$$

Como ya hemos observado, $\tau^{-1}(f_i) \in \bigoplus_{i \geq 2} A_i$, por lo cual solo debemos considerar automorfismos de la forma $\delta(x_i) = x_i + f_i$, donde $f_i \in \bigoplus_{i \geq 2} A_i$.

Por otro lado, observemos que δ y Λ cumplen las hipótesis del lema 3.1.4, y puesto que $E = \{0\}$, entonces

$$Der(\Lambda) = Derint(\Lambda) + \bigoplus (kD_i), \quad (3-33)$$

y cada derivación de este tipo deja estable el ideal $\langle x_i \rangle$, por lo cual se concluye que cada d_j , del que habla el lema 3.1.4, cumple $d_j(x_i) \in \langle x_i \rangle$, y por tanto $\delta(x_i) \in \langle x_i \rangle$. Como el razonamiento también es válido para δ^{-1} , $\delta^{-1}(x_i) \in \langle x_i \rangle$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Luego tenemos que $\delta(x_i) = ax_i$ y $\delta^{-1}(x_i) = bx_i$ para algún $a, b \in \Lambda$, y así

$$\begin{aligned} x_i &= \delta^{-1}\delta(x_i) \\ &= \delta^{-1}(ax_i) \\ &= \delta^{-1}(a)\delta^{-1}(x_i) \\ &= \delta^{-1}(a)bx_i, \end{aligned} \quad (3-34)$$

como la representación de x_i es única, entonces $\delta^{-1}(a)b = 1$, pero dado que k es un campo, los únicos invertibles de Λ están en k^* , por lo tanto tenemos que $\sigma(x_i) \in k^*x_i$. Por otro lado, hemos supuesto $\delta(x_i) = x_i + f_i$, con lo cual concluimos que $\delta(x_i) = x_i$, es decir $\delta = id_\Lambda$.

Luego, $\tau^{-1}\sigma = id_\Lambda$. Aplicando el mismo razonamiento a $\sigma\tau^{-1}$, se deduce que $\sigma = \tau$, y por tanto $Aut(\Lambda) = Aut_L(\Lambda)$. \diamond

3.1.1. El plano cuántico.

Teorema 3.1.7. *Para el plano cuántico ($n = 2$), tenemos los siguientes casos:*

- (1) *Si $q_{12} \notin \{1, -1\}$, entonces $\text{Aut}(\Lambda)$ es isomorfo a $(k^*)^2$, que actúa naturalmente sobre $Dx_1 \oplus Dx_2$;*
- (2) *Si $q_{12} = -1$, entonces $\text{Aut}(\Lambda)$ es isomorfo al producto semidirecto $(k^*)^2 \rtimes \langle \tau \rangle$, donde τ es la simetría que intercambia x_1 y x_2 .*

Demostración. (1) Según el corolario 2.2.3, $E = \{0\}$ si, y sólo si, $q_{12} \neq 1$, y por 3.1.6 $\text{Aut}(\Lambda) = \text{Aut}_L(\Lambda)$. Además, una matriz $(\alpha_{ij}) \in GL_2(k)$ define un automorfismo lineal si, y sólo si, para $k \leq l$

$$\alpha_{1k}\alpha_{2l}(1 - q_{12}q_{lk}) = \alpha_{1l}\alpha_{2k}(q_{12} - q_{lk}). \quad (3-35)$$

Si $k = 1$ y $l = 2$, tenemos que

$$\alpha_{11}\alpha_{22}(1 - q_{12}q_{21}) = \alpha_{12}\alpha_{21}(q_{12} - q_{21}). \quad (3-36)$$

Como $q_{12}q_{21} = 1$, entonces

$$\alpha_{12}\alpha_{21}(q_{12} - q_{21}) = 0, \quad (3-37)$$

además $q_{12} - q_{21} \neq 0$ (ya que D es de característica cero), por lo tanto $\alpha_{12}\alpha_{21} = 0$.

Cuando $l = k = 1$,

$$\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - q_{12}q_{11}) = \alpha_{11}\alpha_{21}(q_{12} - q_{11}), \quad (3-38)$$

y cuando $l = k = 2$,

$$\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - q_{12}q_{22}) = \alpha_{12}\alpha_{22}(q_{12} - q_{22}). \quad (3-39)$$

Dado que $q_{ii} = 1$ para $i = 1, 2$, entonces (3-38) y (3-39) pueden escribirse como

$$\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - q_{12}) = \alpha_{11}\alpha_{21}(q_{12} - 1), \quad (3-40)$$

$$\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - q_{12}) = \alpha_{12}\alpha_{22}(q_{12} - 1) \quad (3-41)$$

respectivamente. Por lo tanto deducimos que

$$\alpha_{11}\alpha_{21} = -\alpha_{11}\alpha_{21} \quad (3-42)$$

$$\alpha_{12}\alpha_{22} = -\alpha_{12}\alpha_{22}. \quad (3-43)$$

Ahora, según (3-37), $\alpha_{12} = 0$ o $\alpha_{21} = 0$.

Si $\alpha_{12} = 0$ y $\alpha_{21} \neq 0$, la ecuación (3-42) nos dice que $\alpha_{11} = 0$, lo cual no es posible ya que la matriz α no sería invertible. Por lo tanto, si $\alpha_{12} = 0$ entonces $\alpha_{21} = 0$. Usando el mismo razonamiento deducimos que si $\alpha_{21} = 0$ entonces $\alpha_{12} = 0$.

Por lo tanto, todas las matrices invertibles que definen un automorfismo lineal, son de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}. \quad (3-44)$$

(2) Por otro lado, si $q_{12} = -1$, entonces $q_{21} = -1$, y la ecuación (3-35) puede escribirse como

$$\alpha_{1k}\alpha_{2l}(1 + q_{lk}) = \alpha_{1l}\alpha_{2k}(-1 - q_{lk}). \quad (3-45)$$

Tomando entonces $l = k = 1$, tenemos

$$\alpha_{11}\alpha_{21} = -\alpha_{11}\alpha_{21}, \quad (3-46)$$

y tomando $l = k = 2$, tenemos

$$\alpha_{12}\alpha_{22} = -\alpha_{12}\alpha_{22}. \quad (3-47)$$

Así,

$$\alpha_{12}\alpha_{22} = 0 \quad (3-48)$$

$$\alpha_{11}\alpha_{21} = 0. \quad (3-49)$$

Si $\alpha_{11} = 0$ (respectivamente α_{22}) se debe tener que α_{12} y α_{21} son distintos de cero, pues de lo contrario α no sería invertible, y así $\alpha_{22} = 0$ (respectivamente α_{11}). Luego para este caso, los automorfismos lineales están en correspondencia con las matrices invertibles de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} & 0 \\ 0 & \alpha_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3-50)$$

Si $\alpha_{11} \neq 0$ (respectivamente α_{22}), entonces $\alpha_{21} = 0$ (respectivamente α_{12}), por tanto $\alpha_{22} \neq 0$ (respectivamente α_{11}), lo cual implica que $\alpha_{12} = 0$ (respectivamente α_{21}). Luego para este caso, los automorfismos lineales están en correspondencia con las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2. \quad (3-51)$$

◇

3.1.2. El producto tensorial de planos cuánticos.

Repetimos las hipótesis y notación del corolario 2.2.4. Para $q_i = q_j$, notamos por σ_{ij} el automorfismo de A que intercambia x_i y x_j , y_i y y_j , y deja fijas las demás variables. Para $q_i = q_j^{-1}$, notamos por τ_{ij} el automorfismo de A que intercambia x_i y y_j , x_j y y_i , y deja fijas las demás variables. Sea G el grupo formado por los σ_{ij} y los τ_{ij} .

Teorema 3.1.8. *Aut(A) es isomorfo al producto semidirecto de $(D^*)^{2p}$ y G , donde el toro $(D^*)^{2p}$ actúa sobre el subespacio generado por los x_i, y_i .*

Demostración. Según 2.2.4 y 3.1.6, $Aut(A) = Aut_L(A)$.

Según 3.1.2, una matriz invertible (α_{ij}) define un automorfismo si, y sólo si, se tienen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \alpha_{i,k}\alpha_{j,k+p} &= \alpha_{i,k+p}\alpha_{j,k} & \text{si } |i-j| \neq p, & \quad 1 \leq k \leq p, \\ \alpha_{i,k}\alpha_{i+p,l} &= -\alpha_{i,l}\alpha_{i+p,k} & \text{si } |l-k| \neq p, & \quad 1 \leq i \leq p, \\ \alpha_{i,k}\alpha_{i+p,k+p}(1 - q_i q_k^{-1}) &= \alpha_{i,k+p}\alpha_{i+p,k}(q_i - q_k^{-1}), & \text{si } 1 \leq i, k \leq p. \end{aligned}$$

Estas condiciones son equivalentes a: cada fila y cada columna de (α_{ij}) tiene una y sola una entrada no nula; y para $1 \leq i, k \leq p$,

$$\alpha_{i,k} \neq 0 \text{ si, y sólo si, } \alpha_{i+p,k+p} \neq 0, \quad (3-52)$$

lo que implica que $q_i = q_j$ y,

$$\alpha_{i+p,k} \neq 0 \text{ si, y sólo si, } \alpha_{i,k+p} \neq 0, \quad (3-53)$$

lo que implica que $q_j = q_k^{-1}$.

Entonces es fácil deducir el resultado enunciado. ✎

3.1.3. El espacio cuántico uniparamétrico.

Teorema 3.1.9. *Supongamos que $q_{ij} = q$ para todo $i < j$, y q no es raíz de la unidad. Se tienen los siguientes casos:*

- (1) Si $n = 3$, todos los automorfismos σ de Λ son de la forma $\sigma(x_i) = \alpha_i x_i$, $\sigma(x_2) = \alpha_2 x_2 + \beta x_1 x_3$, $\sigma(x_3) = \alpha_3 x_3$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in D^*$ y $\beta \in k$; así $Aut(\Lambda)$ es isomorfo al producto semidirecto $k \rtimes (D^*)^3$.
- (2) Si $n \neq 3$, $Aut(\Lambda)$ es isomorfo a $(D^*)^n$.

Demostración. Si $n \neq 3$, según el lema 3.1.2, una matriz invertible $\alpha = (\alpha_{ij})$ define un automorfismo si, y sólo si, para $i < j$ y $k \leq l$, $\alpha_{ik}\alpha_{jl}(1 - qq^{-1}) = \alpha_{il}\alpha_{jk}(q - q^{-1})$.

Por tanto tenemos que para $i < j$ y $k \leq l$, $\alpha_{il}\alpha_{jk} = 0$, lo cual implica que α es una matriz diagonal.

Si $n = 3$, repitiendo la demostración de la proposición 3.1.6 para x_1 y x_3 , teniendo en cuenta que según el corolario 2.2.5 toda derivación deja estable los ideales $\langle x_1 \rangle$ y $\langle x_3 \rangle$, vemos que todo automorfismos σ satisface

$$\sigma(x_1) = \alpha_1 x_1, \quad \sigma(x_3) = \alpha_3 x_3, \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_3 \in k^*. \quad (3-54)$$

Por otro lado, tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} x_1 \sigma(x_2) &= q \sigma(x_2) x_1 \\ \sigma(x_2) x_3 &= q x_3 \sigma(x_2), \end{aligned}$$

las cuales implican que $\sigma(x_2) = \alpha_2 x_2 + \beta x_1 x_3$, con $\alpha_2 \in k^*$ y $\beta \in k$.

Considerando H como el subgrupo de automorfismos σ , tales que $\sigma(x_1) = x_1$, $\sigma(x_2) = x_2 + \beta x_1 x_3$ y $\sigma(x_3) = x_3$, con $\beta \in k$. Vemos que H es isomorfo a k como grupo aditivo y que además H es normal en $(k^*)^3$, lo cual termina la demostración. ✦

Todos los resultados contenidos en esta sección pueden consultarse en [1].

3.2. Automorfismos para el anillos de polinomios cuánticos genérico.

En esta sección presentaremos los resultados obtenidos por V.A. Artamonov en [2] y [3] para endomorfismos y automorfismos de polinomios cuánticos. Podrán notar que la demostración del teorema 3.2.1 es un poco distinta a la presentada en [2], sin embargo guarda la misma esencia, solo que se ha presentado de forma un tanto distinta.

Teorema 3.2.1 ([2]). *Sea k un campo (no necesariamente de característica 0) con un conjunto de homomorfismos $\alpha_1, \dots, \alpha_n = id_k$. Supóngase que $r = 0$ y los multiparámetros q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, $n \geq 3$, son independientes en el grupo multiplicativo k^* . Si λ es un endomorfismo de Λ y $\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_n) \neq 0$ entonces λ es un automorfismo y $Aut(\Lambda) = (k^*)^n$.*

Demostración. Consideremos el orden lexicográfico sobre $\mathbb{N}^n \cup \{0\}$ y sobre el conjunto de monomios de Λ . Si $\lambda(x_i)$ y $\lambda(x_j)$ son no nulos, supongamos que ellos tienen monomio principal $\lambda_i x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$ y $\lambda_j x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$, respectivamente. Como λ es un automorfismo, tenemos que

$$\lambda(x_i)\lambda(x_j) = q_{ij}\lambda(x_j)\lambda(x_i). \quad (3-55)$$

Como Λ es un dominio, entonces el monomio principal de $\lambda(x_i x_j)$ es

$$(\lambda_i x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n})(\lambda_j x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}),$$

y por tanto

$$\prod_{s < r} (q_{rs})^{l_r t_s} = q_{ik} \prod_{s < r} (q_{rs})^{t_r l_s}. \quad (3-56)$$

Como los q_{ij} son independientes, suponiendo que $i > j$ se debe cumplir que para $r \neq s$

$$l_r t_s = \delta_{ri} \delta_{sj} + t_r l_s. \quad (3-57)$$

Si $l_p \neq 0$ para algún $p \neq i, j$ entonces tenemos que para cada índice $q \neq p$

$$l_q t_p = t_q l_p,$$

y por lo tanto, $t_q = t_p l_q l_p^{-1}$. En particular cuando $q = i, j$

$$\begin{aligned} t_i &= t_p l_i l_p^{-1}, \\ t_j &= t_p l_j l_p^{-1}, \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} l_i t_j - l_j t_i &= l_i t_p l_j l_p^{-1} - l_j t_p l_i l_p^{-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual contradice (3-57). Así, $l_p = 0$ para $p \neq i, j$. Similarmente se prueba que $t_p = 0$ si $p \neq i, j$.

Por lo tanto, los coeficientes principales de $\lambda(x_i)$ y $\lambda(x_j)$ tiene la forma $\lambda_i x_i^{l_i} x_j^{l_j}$ y $\lambda_j x_i^{t_i} x_j^{t_j}$, donde $l_i t_j - l_j t_i = 1$.

Como por hipótesis existe una tercera variable x_u tal que $\lambda(x_u) \neq 0$. Aplicando el mismo argumento a (i, u) y a (j, u) se tiene que l_j, t_i son cero y que el coeficiente principal de $\lambda(x_u)$ tiene la forma

$$\lambda_u x_i^{d_i} x_u^{d_u} = \lambda_u x_j^{d_j} x_u^{d_u}, \quad (3-58)$$

lo cual implica que $d_i = d_j = 0$.

Por lo tanto, $l_i t_j = 1$ y $l_i d_u = 1$, es decir, $l_i = t_j = d_u = 1$, pues en este contexto $r = 0$. \checkmark

Para esta sección asumiremos que el anillo Λ de la definición 2.1.2 es un anillo genérico.

Teorema 3.2.2 ([3]). *Sea Λ un anillo de polinomios cuánticos genérico con $r = n \geq 2$. Entonces Λ es un anillo simple.*

Demostración. Sea I un ideal bilátero en Λ . Escójase en I un elemento no nulo

$$f = \sum a_{l_1, \dots, l_n} x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}, \quad l_1, \dots, l_n \geq 0, \quad (3-59)$$

cuyo término principal

$$a_{s_1, \dots, s_n} x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}, \quad a_{s_1, \dots, s_n} \in D^*, \quad (3-60)$$

es minimal respecto al orden lexicográfico de los índices.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $s_1 > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} x_2 f x_2^{-1} &= \sum \alpha_2(a_{l_1, \dots, l_n}) (q_{21} x_1)^{l_1} \cdots (q_{2n} x_n)^{l_n} \\ &= \sum \alpha_2(a_{l_1, \dots, l_n}) q_{21}^{l_1} \cdots q_{2n}^{l_n} d_{l_1, \dots, l_n} x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}, \end{aligned} \quad (3-61)$$

donde $d_{l_1, \dots, l_n} \in N$. Tomando

$$z = \alpha_2(a_{s_1, \dots, s_n}) q_{21}^{s_1} \cdots q_{2n}^{s_n} d_{s_1, \dots, s_n} a_{s_1, \dots, s_n}^{-1} \in D^*. \quad (3-62)$$

Entonces $g = z f - x_2 f x_2^{-1} \in I$, y si $g \neq 0$, el término principal de g es menor que el término principal de f , que es imposible. Por tanto, tenemos que

$$z a_{l_1, \dots, l_n} = \alpha_2(a_{l_1, \dots, l_n}) q_{21}^{l_1} \cdots q_{2n}^{l_n} d_{l_1, \dots, l_n}. \quad (3-63)$$

Supóngase que $(l_1, \dots, l_n) < (s_1, \dots, s_n)$ con respecto al orden lexicográfico y $a_{l_1, \dots, l_n} \neq 0$. De (3-59) y (3-63)

$$\alpha_2(a_{s_1, \dots, s_n}) q_{21}^{s_1} \cdots q_{2n}^{s_n} d_{s_1, \dots, s_n} a_{s_1, \dots, s_n}^{-1} a_{l_1, \dots, l_n} = \alpha_2(a_{l_1, \dots, l_n}) q_{21}^{l_1} \cdots q_{2n}^{l_n} d_{l_1, \dots, l_n}, \quad (3-64)$$

y por tanto en D^*/N ,

$$q_{21}^{s_1} \cdots q_{2n}^{s_n} N = q_{21}^{l_1} \cdots q_{2n}^{l_n} N. \quad (3-65)$$

Ya que $q_{21} = q_{12}^{-1}$, $q_{22} = 1$ y q_{12}, \dots, q_{2n} son independientes en D^*/N , tenemos que $s_1 = l_1$, $s_3 = l_3, \dots, s_n = l_n$. Similarmente, considerando la conjugación por x_1 se obtiene que $s_2 = l_2$. Así $(l_1, \dots, l_n) = (s_1, \dots, s_n)$, lo que es una contradicción.

Hemos probado entonces que f es un monomio. Sin embargo, como $r = n$ y cada variable x_i es invertible en Λ , cada monomio es invertible en Λ , y por lo tanto $I = \Lambda$. \diamond

A continuación presentaremos un resultado mucho más general que el dado por el teorema 3.2.1. Este resultado puede consultarse en [3], aunque su enunciado, al igual que su demostración, han sido modificados un poco.

Teorema 3.2.3. *Supóngase que $\lambda \in \text{End}(\Lambda)$ y que existen al menos tres índices $1 \leq i, j, t \leq n$ tal que $\lambda(x_i), \lambda(x_j), \lambda(x_t) \neq 0$. Entonces existen elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in D$ y un entero $\epsilon = \pm 1$ tal que $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$, y*

$$\lambda(x_w) = \lambda_w x_w^\epsilon. \quad (3-66)$$

Demostración. Consideremos el orden lexicográfico natural sobre el conjunto de índices \mathbb{Z}^n y sobre el conjunto de monomios en las variables x_1, x_2, \dots, x_n . Sean a_i , $i = 1, \dots, n$, los términos más pequeños (respectivamente los principales) de $\lambda(x_i)$.

Observe que el término más pequeño (respectivamente, el principal) de un producto de elementos en Λ es igual al producto de los términos más pequeños (respectivamente, los principales) de los factores. Así tenemos que

$$a_i a_j = q_{ij} a_j a_i. \quad (3-67)$$

Si $\lambda(x_i), \lambda(x_j) \neq 0$,

$$\begin{aligned} a_i &= \beta x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} \text{ y} \\ a_j &= \xi x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}, \end{aligned} \quad (3-68)$$

donde $\beta, \xi \in D^*$.

Entonces se tiene que

$$a_i a_j = \beta \xi \left(\prod_{r>s} q_{rs}^{l_r t_s} \right) \cdot \eta x_1^{l_1+t_1} \cdots x_n^{l_n+t_n}, \quad (3-69)$$

y

$$q_{ij} a_j a_i = q_{ij} (\xi \beta \left(\prod_{r>s} q_{rs}^{t_r l_s} \right) \eta') x_1^{l_1+t_1} \cdots x_n^{l_n+t_n}. \quad (3-70)$$

Así

$$\beta \xi \left(\prod_{r>s} q_{rs}^{l_r t_s} \right) \cdot \eta = q_{ij} (\xi \beta \prod_{r>s} q_{rs}^{t_r l_s}) \cdot \eta'. \quad (3-71)$$

Es decir,

$$\prod_{r>s} q_{rs}^{l_r t_s} \equiv q_{ij} \prod_{r>s} q_{rs}^{t_r l_s} \pmod{N}. \quad (3-72)$$

Supóngase que $i > j$. Ya que las imágenes de q_{rs} , $n \geq r > s \geq 1$ son independientes en D^*/N , se tiene que para $r \neq s$

$$l_r t_s = \delta_{ri} \delta_{sj} + t_r l_s. \quad (3-73)$$

Por ejemplo, si $l_p \neq 0$ y $p \neq i, j$, entonces para cada índice $q \neq p$,

$$t_q = t_p l_s l_p^{-1}. \quad (3-74)$$

En particular, cuando $q = i$

$$t_i = t_p l_i l_p^{-1}, \quad (3-75)$$

y cuando $q = j$

$$t_j = t_p l_j t_p^{-1}, \quad (3-76)$$

De donde tenemos que

$$l_i t_j - l_j t_i = l_i t_p l_j l_p^{-1} - l_j t_p l_i l_p^{-1} = 0, \quad (3-77)$$

lo cual es una contradicción.

Tenemos entonces que $l_p = 0$. Similarmente probamos que $t_p = 0$ si $p \neq i, j$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} a_i &= \beta x_i^{l_i} x_j^{l_j}, \\ a_j &= \xi x_i^{t_i} x_j^{t_j}, \end{aligned} \quad (3-78)$$

donde $l_i t_j - l_j t_i = 1$.

Por hipótesis existe una tercera variable x_u tal que $\lambda(x_u) \neq 0$. Aplicando el argumento anterior a (i, u) y a (j, u) se tiene que

$$a_u = \delta x_u^{r_u} x_i^{r_i} = \delta x_u^{r_u} x_j^{r_j}. \quad (3-79)$$

Finalmente, $r_i = r_j = 0$, y por tanto $a_u = \delta x_u^{r_u}$. Similarmente $a_i = \beta x_i^{l_i}$ y $a_j = \xi x_j^{t_j}$, con $l_i t_j = 1$, lo cual implica que $l_i = t_j = \epsilon = \pm 1$.

Aplicando el mismo argumento al término principal de $\lambda(x_i)$ obtenemos un resultado similar para algún $\epsilon' = \pm 1$ para el término principal. Si $\epsilon = \epsilon'$ el teorema está probado.

Supongamos que $r = 0$, entonces en este caso $\epsilon = \epsilon' = 1$ para todo $\lambda(x_i) \neq 0$, con lo cual el término principal y el más pequeño son iguales.

Si $r > 0$, consideremos $1 \leq i \leq r$, con lo cual $\lambda(x_i) \in \Lambda^*$. Si $\epsilon = -1$ y $\epsilon' = 1$, entonces

$$\lambda(x_i) = \lambda'_i x_i^{-1} + \sum_s \lambda''_i(s) x_i^{m_{i1}(s)} \cdots x_n^{m_{in}(s)} + \lambda'_i x_i, \quad (3-80)$$

donde $\lambda'_i, \lambda''_i(s), \lambda'''_i \in D^*$, y la suma se hace sobre algunos de los índices

$$(m_{i1}(s), \dots, m_{in}(s)) \in \mathbb{Z}^n. \quad (3-81)$$

tales que

$$(0, \dots, 0, \overbrace{-1}^i, 0, \dots, 0) < (m_{i1}(s), \dots, m_{in}(s)) < (0, \dots, 0, \overbrace{1}^i, 0, \dots, 0). \quad (3-82)$$

Como λ_i y λ'_i son invertibles, entonces $\lambda(x_i)$ no es invertible, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\epsilon = \epsilon'$.

✎

Comentario 3.2.4. Si $r < n$ y $\lambda(x_i) \neq 0$ para algún $i > r$, entonces en el teorema 3.2.3, $\epsilon = 1$.

Ejemplo 3.2.5. A continuación se mostrará un endomorfismo del anillo polinomios cuánticos, para el que $r < n$ pero $\epsilon = -1$.

Consideremos $D = \mathbb{R}$ (el campo de los números reales), $n = 4$, $r = 3$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = id_{\mathbb{R}}$. Además, consideremos la siguiente matriz de multipárametros,

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ * & 1 & 7 & 11 \\ * & * & 1 & 13 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}. \quad (3-83)$$

Podemos considerar el anillo de polinomios cuánticos

$$\mathcal{O}_q := \mathbb{R}_q[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, x_3^{\pm 1}, x_4], \quad (3-84)$$

el cual resulta genérico.

Para construir un endomorfismo de \mathcal{O}_q , consideramos $\mathbb{R}\{X\}$, la \mathbb{R} -álgebra en el alfabeto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3\}$, y la función $X \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}_q$, tal que $\theta(x_i) = x_i^{-1}$, $1 \leq i \leq 3$, $\theta(y_i) = x_i$, $1 \leq i \leq 3$, y $\theta(x_4) = 0$. Entonces tenemos un homomorfismo de álgebras $\mathbb{R}\{X\} \xrightarrow{\theta'} \mathcal{O}_q$ con $\theta'(x_i) = \theta(x_i)$ para $1 \leq i \leq 4$ y $\theta'(y_i) = \theta(y_i)$ para $1 \leq i \leq 3$.

Observemos que, homomorfismo θ' satisface

$$\theta'(x_i y_i - 1) = x_i^{-1} x_i - 1 = 1 - 1 = 0 \quad (3-85)$$

$$\theta'(x_i x_j - q_{ij} x_j x_i) = 0 \quad (3-86)$$

$$\theta'(x_i y_j - q_{ij}^{-1} y_j x_i) = x_i^{-1} x_j - q_{ij}^{-1} x_j x_i^{-1} = 0. \quad (3-87)$$

Por otro lado, el álgebra $\mathcal{O}_q \cong \mathbb{R}\{X\}/I$, donde $I = \langle x_i x_j - q_{ij} x_j x_i, x_i y_j - q_{ij}^{-1} y_j x_i, x_k y_k - 1 : 1 \leq i \leq 4, 1 \leq k \leq 3 \rangle$. Así, hemos encontrado un homomorfismo $\theta' : \mathbb{R}\{X\} \rightarrow \mathcal{O}_q$ tal que $\theta'(I) = 0$. Entonces existe un homomorfismo $\bar{\theta} : \mathbb{R}\{X\}/I \rightarrow \mathcal{O}_q$ con $\bar{\theta}(x_i) = \theta'(x_i)$ para $1 \leq i \leq 4$ y $\bar{\theta}(y_i) = \theta'(y_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Es decir, encontramos un endomorfismo del anillo de polinomios cuánticos \mathcal{O}_q donde $\epsilon = -1$ y $r < n$.

Corolario 3.2.6. *Si $\lambda(x_{r+1}), \dots, \lambda(x_n) \neq 0$, en la situación del teorema 3.2.3, entonces λ es un automorfismo de Λ . En particular cualquier endomorfismo inyectivo de Λ es un automorfismo.*

4 AUTOMORFISMOS PARA EXTENSIONES PBW TORCIDAS.

4.1. Definiciones y propiedades

Definición 4.1.1 (Extensión PBW torcida). Sean R y A anillos, decimos que A es una extensión *PBW* torcida de R , si las siguientes condiciones se tienen:

- (1) $R \subseteq A$.
- (2) Existe un número finito de elementos $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, tales que A es un R -módulo libre a izquierda con base

$$\text{Mon}(A) := \text{Mon}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} := \{x^t = x^{t_1} \cdots x_n^{t_n} : t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n\}.$$

- (3) Para cada $1 \leq i \leq n$ y $r \in R \setminus \{0\}$ existe $c_{ir} \in R \setminus \{0\}$ tal que

$$x_i r - c_{ir} x_i \in R.$$

- (4) Para cada $1 \leq i, j \leq n$ existe $c_{ji} \in R \setminus \{0\}$ tal que

$$x_j x_i - c_{ji} x_i x_j \in R + R x_i + \cdots + R x_n.$$

En esta situación escribimos $A = \sigma(R)\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$.

Proposición 4.1.2. *Sea A una extensión PBW torcida de R . Entonces, para cada $1 \leq i \leq n$, existe un endomorfismo de anillos inyectivo $\sigma_i : R \rightarrow R$ y una σ_i -derivación $\delta_i : R \rightarrow R$ tal que*

$$x_i r = \sigma_i(r) x_i + \delta_i(r),$$

para cada $r \in R$.

Demostración. Véase [4].



Definición 4.1.3. Sea A una extensión PBW torcida.

(a) A es **cuasi-conmutativa** si las condiciones (3) y (4) de la definición 4.1.1 son reemplazadas por

(3') Para cada $1 \leq i \leq n$ y $r \in R \setminus \{0\}$ existe $c_{ir} \in R \setminus \{0\}$ tal que

$$x_i r = c_{ir} x_i$$

(4') Para cada $1 \leq i, j \leq n$ existe $c_{ij} \in R \setminus \{0\}$ tal que

$$x_i x_j = c_{ij} x_j x_i.$$

(b) A es **biyectiva** si σ_i son biyectivas para cada $1 \leq i \leq n$ y c_{ij} es invertible para cada $1 \leq i \leq j \leq n$.

Por notación, si $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, escribimos $\sigma_1^{l_1} \circ \sigma_2^{l_2} \circ \dots \circ \sigma_n^{l_n}$ como σ^l .

4.2. Reglas de conmutación para extensiones PBW torcidas cuasi-conmutativas.

Al igual que para los anillos polinomios cuánticos torcidos, como lo veremos en el capítulo 5, podemos establecer algunas reglas para multiplicar monomios en A , siempre que A sea una extensión cuasi-conmutativa de R y los c_{ij} sean invertibles para $1 \leq i, j \leq n$.

Sea A una extensión PBW torcida de R , es claro que el conjunto de elementos invertibles R^* de R es un grupo multiplicativo. Definimos N como el subgrupo de R^* generado por el subgrupo derivado $[R^*, R^*]$ de R^* y los elementos de la forma $z^{-1}\sigma_i(z)$ para $z \in R^*$ e $i = 1, \dots, n$ (donde los σ_i están dados por la proposición 4.1.2). Notamos además que este subgrupo es normal en R^* y R^*/N es un grupo abeliano.

Proposición 4.2.1. *Sea A una extensión cuasi-conmutativa R con los c_{ij} invertibles para $1 \leq i, j \leq n$. Entonces se tiene que*

$$(1) \quad x_i x_j^t = c_{ij} \sigma_j(c_{ij}) \sigma_j^2(c_{ij}) \cdots \sigma_j^{t-1}(c_{ij}) x_j^t x_i \text{ para } t \in \mathbb{N}.$$

$$(2) \quad \sigma_i^n(z) = z z^{-1} \sigma_i(z) \sigma_i(z)^{-1} \sigma_i^2(z) \sigma_i^2(z)^{-1} \cdots \sigma_i^{n-1}(z) \sigma_i^{n-1}(z)^{-1} \sigma_i^n(z) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } z \in R^*, \text{ es decir, } \sigma_i^n(z) = z \cdot d, \text{ donde } d \in N.$$

(3)

$$x_i x_j^t = (c_{ij}^t \cdot d) x_j^t x_i, \tag{4-1}$$

para todo $t \in \mathbb{N}$ y algún $d \in N$.

(4)

$$x_i^t x_j^s = (c_{ij}^{ts} \cdot d) x_j^s x_i^t, \quad (4-2)$$

para algún $d \in N$ y todo $t, s \in \mathbb{N}$.

(5)

$$(x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n})(x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n}) = ([\prod_{i < j} c_{ji}^{t_j s_i}] \cdot d) x_1^{t_1 + s_1} x_2^{t_2 + s_2} \cdots x_n^{t_n + s_n}, \quad (4-3)$$

para todo $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{N}$ y algún $d \in N$.

Demostración. (1) Sea $t \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} x_i x_j^t &= c_{ij} x_j x_i x_j^{t-1} \\ &= c_{ij} x_j c_{ij} x_j x_i x_j^{t-2} \\ &= c_{ij} \sigma_j(c_{ij}) x_j^2 x_i x_j^{t-2} \\ &\quad \vdots \\ &= c_{ij} \sigma_j(c_{ij}) \cdots \sigma_j^{t-2}(c_{ij}) x_j^{t-1} x_i x_j \\ &= c_{ij} \sigma_j(c_{ij}) \cdots \sigma_j^{t-2}(c_{ij}) x_j^{t-1} c_{ij} x_j x_i \\ &= c_{ij} \sigma_j(c_{ij}) \cdots \sigma_j^{t-2}(c_{ij}) \sigma_j^{t-1}(c_{ij}) x_j^t x_i \end{aligned}$$

(2) La demostración de este hecho es inmediata dado que los σ_i son inyectivos (proposición 4.1.2) y que z es invertible. En efecto, como $z \in R^*$ y σ_i es inyectivo, entonces $\sigma_i^k(z) \neq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y por tanto $\sigma_i^k(z) \in R^*$, por lo cual podemos escribir $\sigma_i^n(z)$ como

$$\sigma_i^n(z) = z z^{-1} \sigma_i(z) \sigma_i(z)^{-1} \sigma_i^2(z) \sigma_i^2(z)^{-1} \cdots \sigma_i^{n-1}(z) \sigma_i^{n-1}(z)^{-1} \sigma_i^n(z). \quad (4-4)$$

De lo anterior, deducimos inmediatamente que $\sigma_i^n(z) = z \cdot d$, para algún $d \in N$.

(3) Tenemos que

$$x_i x_j^t = c_{ij} \sigma_j(c_{ij}) \sigma_j^2(c_{ij}) \cdots \sigma_j^{t-2}(c_{ij}) \sigma_j^{t-1}(c_{ij}) x_j^t x_i.$$

Usando (1) y (2) se tiene que

$$c_{ij} \sigma_j(c_{ij}) \sigma_j^2(c_{ij}) \cdots \sigma_j^{t-1}(c_{ij}) = c_{ij} \cdot (c_{ij} \cdot d_1) \cdot (c_{ij} \cdot d_2) \cdots (c_{ij} \cdot d_{t-1}),$$

para algunos $d_i \in N$, $1 \leq i \leq t-1$. Según la definición de N y la conmutatividad de R^*/N se tiene que

$$c_{ij} \sigma_j(c_{ij}) \sigma_j^2(c_{ij}) \cdots \sigma_j^{t-1}(c_{ij}) \equiv c_{ij}^t \pmod{N}, \quad (4-5)$$

con lo cual $c_{ij} \sigma_j(c_{ij}) \sigma_j^2(c_{ij}) \cdots \sigma_j^{t-1}(c_{ij}) = c_{ij}^t \cdot d$, para algún $d \in N$. Por lo tanto, $x_i x_j^t = (c_{ij}^t \cdot d) x_j^t x_i$ para algún $d \in N$.

(4) Sean $s, t \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
x_i^t x_j^s &= x_i^{t-1} (c_{ij}^s \cdot d') x_j^s x_i \\
&= \sigma_i^{t-1} (c_{ij}^s \cdot d') x_i^{t-1} x_j^s x_i \\
&= \sigma_i^{t-1} (c_{ij}^s \cdot d') x_i^{t-2} (c_{ij}^s \cdot d') x_j^s x_i^2 \\
&= \sigma_i^{t-1} (c_{ij}^s \cdot d') \sigma_i^{t-2} (c_{ij}^s \cdot d') x_i^{t-2} x_j^s x_i^2 \\
&\quad \vdots \\
&= \sigma_i^{t-1} (c_{ij}^s \cdot d') \sigma_i^{t-2} (c_{ij}^s \cdot d') \cdots \sigma_i (c_{ij}^s \cdot d') x_i x_j^s x_i^{t-1} \\
&= \sigma_i^{t-1} (c_{ij}^s \cdot d') \sigma_i^{t-2} (c_{ij}^s \cdot d') \cdots \sigma_i (c_{ij}^s \cdot d') (c_{ij}^s \cdot d') x_j^s x_i^t,
\end{aligned}$$

con $d' \in N$.

Usando (2) tenemos que

$$\sigma_i^{t-1} (c_{ij}^s \cdot d') \sigma_i^{t-2} (c_{ij}^s \cdot d') \cdots \sigma_i (c_{ij}^s \cdot d') (c_{ij}^s \cdot d') = (c_{ij}^s \cdot d_{t-1}) (c_{ij}^s \cdot d_{t-2}) \cdots (c_{ij}^s \cdot d_1) (c_{ij}^s \cdot d_0),$$

para algunos $d_i \in N$ con $i = 0, \dots, t-1$. Por lo tanto,

$$\sigma_i^{t-1} (c_{ij}^s \cdot d') \sigma_i^{t-2} (c_{ij}^s \cdot d') \cdots \sigma_i (c_{ij}^s \cdot d') (c_{ij}^s \cdot d') \equiv c_{ij}^{st} \pmod{N},$$

y así

$$x_i^t x_j^s = (c_{ij}^{ts} \cdot d) x_j^s x_i^t, \quad (4-6)$$

para algún $d \in N$.

(5) La demostración de este hecho se obtiene usando (2), (3), (4) y las propiedades de N .

◇

4.3. Automorfismos para extensiones PBW torcidas.

Sea A una extensión PBW torcida de R , entendemos $End(A)$ como los endomorfismos del anillo A que dejan fijo los elementos de R y $Aut(A)$ es el conjunto de elementos invertibles de $End(A)$.

Definición 4.3.1. Sea A una extensión PBW torcida de R con c_{ij} invertibles para $1 \leq i, j \leq n$. Diremos que A es una **extensión PBW torcida genérica o general** si los c_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, son independientes en R^*/N .

Cuando no haya lugar a confusión nos referiremos a este tipo de extensiones simplemente como una extensión genérica o general.

Teorema 4.3.2. Sean $A = \sigma(R)\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, una extensión cuasi-conmutativa genérica y $\lambda \in \text{End}(A)$. Si x_i es tal que $\lambda(x_i) \neq 0$, el coeficiente principal (según el orden lexicográfico) de $\lambda(x_i)$ es invertible, y existen al menos tres índices i, j, u para los que esto sucede, entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$ tales que $\lambda(x_w) = \lambda_w x_w$, para $w = 1, \dots, n$.

Demostración. Consideremos el orden lexicográfico para los exponentes de los monomios en A . Supongamos que $\lambda(x_i)$ y $\lambda(x_j)$ son no nulos, y que ellos tienen monomio principal $\lambda_i x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$ y $\lambda_j x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$ respectivamente. Como los coeficientes principales de $\lambda(x_i)$ y $\lambda(x_j)$ son invertibles, sabemos que el coeficiente principal del producto es igual al producto de los coeficientes principales. Por otro lado, sabemos que $x_i x_j = c_{ij} x_j x_i$, por lo cual, $\lambda(x_i x_j) = c_{ij} \lambda(x_j x_i)$, es decir $\lambda(x_i) \lambda(x_j) = c_{ij} \lambda(x_j) \lambda(x_i)$. El monomio principal del término de la derecha debe ser igual al monomio principal del término de la izquierda, es decir

$$(\lambda_i x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n})(\lambda_j x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}) = c_{ij} (\lambda_j x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n})(\lambda_i x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}). \quad (4-7)$$

Así,

$$\lambda_i \sigma^l(\lambda_j)(x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n})(x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}) = c_{ij} \lambda_j \sigma^t(\lambda_i)(x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n})(x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}),$$

donde $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ y $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Usando la propiedad (5) de la proposición 4.2.1 obtenemos que

$$\lambda_i \sigma^l(\lambda_j) \left(\prod_{s < r} c_{rs}^{l_r t_s} \cdot d \right) x_1^{l_1+t_1} x_2^{l_2+t_2} \cdots x_n^{l_n+t_n} = c_{ij} \lambda_j \sigma^t(\lambda_i) \left(\prod_{s < r} c_{rs}^{t_r l_s} \cdot d' \right) x_1^{l_1+t_1} x_2^{l_2+t_2} \cdots x_n^{l_n+t_n}.$$

Usando la representación única de los elementos de A , y la propiedad (2) de la proposición 4.2.1, se obtiene

$$\lambda_i \lambda_j \left(\prod_{s < r} c_{rs}^{l_r t_s} \right) \equiv c_{ij} \lambda_i \lambda_j \left(\prod_{s < r} c_{rs}^{t_r l_s} \right) \text{ mód}(N). \quad (4-8)$$

Dado que A es una extensión genérica y suponiendo que $i > j$, se debe cumplir que

$$l_r t_s = \delta_{ri} \delta_{sj} + t_r l_s. \quad (4-9)$$

Si $l_p \neq 0$ para algún $p \neq i, j$ entonces tenemos que para cada índice $q \neq p$

$$l_q t_p = t_q l_p,$$

y por lo tanto, $t_q = t_p l_q l_p^{-1}$. En particular, cuando $q = i, j$

$$\begin{aligned} t_i &= t_p l_i l_p^{-1}, \\ t_j &= t_p l_j l_p^{-1}, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} l_i t_j - l_j t_i &= l_i t_p l_j l_p^{-1} - l_j t_p l_i l_p^{-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual contradice (4-9). Así $l_p = 0$ para $p \neq i, j$. Similarmente se prueba que $t_p = 0$ si $p \neq i, j$.

Por lo tanto, los coeficientes principales de $\lambda(x_i)$ y $\lambda(x_j)$ tiene la forma $\lambda_i x_i^{l_i} x_j^{l_j}$ y $\lambda_j x_i^{t_i} x_j^{t_j}$, donde $l_i t_j - l_j t_i = 1$.

Como por hipótesis existe una tercera variable x_u tal que $\lambda(x_u) \neq 0$. Aplicando el mismo argumento a (i, u) y a (j, u) se tiene que l_j, t_i son cero y que el coeficiente principal de $\lambda(x_u)$ tiene la forma

$$\lambda_u x_i^{d_i} x_u^{d_u} = \lambda_u x_j^{d_j} x_u^{d_u}, \quad (4-10)$$

lo cual implica que $d_i = d_j = 0$.

Por lo tanto $l_i t_j = 1$ y $l_i d_u = 1$, es decir, $l_i = t_j = d_u = 1$.

Luego para cada $1 \leq i \leq n$, $\lambda(x_i) = \lambda_i x_i$, con λ_i invertible.

◇

Corolario 4.3.3. *Si A es una extensión PBW torcida de R y $\lambda \in \text{End}(A)$ son como en el teorema 4.3.2 y cada $\lambda(x_i) \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, entonces λ es un automorfismo de A . En particular, si λ es un homomorfismo de anillos inyectivo, λ es un automorfismo.*

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} \lambda(x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}) &= \lambda(x_1)^{l_1} \lambda(x_2)^{l_2} \cdots \lambda(x_n)^{l_n} \\ &= (\lambda_1 x_1)^{l_1} (\lambda_2 x_2)^{l_2} \cdots (\lambda_n x_n)^{l_n}. \end{aligned} \quad (4-11)$$

Usando la propiedad (2) de la proposición 4.2.1 y las propiedades de N , se tiene que

$$\lambda(x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}) = (\lambda_1^{l_1} \cdot u_1 \cdot x_1^{l_1}) (\lambda_2^{l_2} \cdot u_2 \cdot x_2^{l_2}) \cdots (\lambda_n^{l_n} \cdot u_n \cdot x_n^{l_n}),$$

para algunos $u_i \in N$ e $i = 1, \dots, n$.

Aplicando las propiedades de conmutación y de N , así como la propiedad (2) de la proposición 4.2.1, llegamos a que

$$\lambda(x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}) = \left(\prod_k \lambda_k^{l_k} \right) \cdot u \cdot x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}, \quad (4-12)$$

para algún $u \in N$.

Como por hipótesis cada $\lambda_i \in R^*$ y $N \subseteq R^*$, entonces $(\prod_k \lambda_k^{l_k}) \cdot u \in R^*$, y por tanto podemos considerar $\lambda(x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}) = d \cdot x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}$, para algún $d \in R^*$.

Si $\lambda(\sum_{l \in \mathbb{N}^n} a_l x^l) = 0$ entonces $\sum_{l \in \mathbb{N}^n} a_l d_l x^l = 0$, donde d_l es invertible. Dada la representación única de cada elemento de A se concluye que cada $a_l d_l = 0$ para $l \in \mathbb{N}^n$. Como cada d_l es invertible, entonces $a_l = 0$ para cada l , es decir, $\sum_{l \in \mathbb{N}^n} a_l x^l = 0$, lo cual prueba la inyectividad de λ .

Similarmente, si $p = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} a_l x^l$ entonces $p' = \sum_{l \in \mathbb{N}^n} a_l d_l^{-1} x^l$ satisface $\lambda(p') = p$, lo cual prueba la sobreyectividad de λ . \checkmark

Note que todo endomorfismo considerado en el teorema 4.3.2 es un endomorfismo filtrado. En particular, cuando D es un anillo de división, todo endomorfismo de Λ es filtrado.

Comentario 4.3.4. Observemos que si A es una extensión *PBW* torcida cuasiconmutativa genérica de R , no existen endomorfismos tal que $\lambda(x_i), \lambda(x_j) \in R^*$. En efecto, si $\lambda(x_i) = a$ y $\lambda(x_j) = b$, con $a, b \in R^*$, entonces se debe cumplir que $ab = c_{ij}ba$, con lo cual, $c_{ij} = aba^{-1}b^{-1} \in [R^*, R^*] \subseteq N$, y por tanto A no sería genérica.

Por otro lado, no existe endomorfismo de una extensión genérica tal que $\lambda(x_i) = a \in R^*$ y $\lambda(x_j)$ tenga coeficiente principal invertible, para algún i, j . De lo contrario, tendríamos que

$$a\lambda_j x^t = c_{ij}\lambda_j x^t a,$$

donde $\lambda_j x^t$ es el término principal de $\lambda(x_j)$, lo cual nos lleva a que

$$a\lambda_j x^t = c_{ij}\lambda_j \sigma^t(a) x^t, \quad (4-13)$$

dada la representación única de los elementos en A y las propiedades de conmutación mostradas en esta sección, se tiene que $a\lambda_j = c_{ij} \cdot \lambda_j \cdot a \cdot d$, con $d \in N$. Luego $c_{ij} \equiv 1 \pmod{N}$, lo cual es una contradicción.

Definición 4.3.5. ([9]) Sea A una extensión *PBW* torcida de R con endomorfismos σ_i , $1 \leq i \leq n$, como en la proposición 4.1.2.

- (1) Para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Si $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, entonces $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$.

- (2) Para $X = x^\alpha \in \text{Mon}(A)$, $\exp(x^\alpha) := \alpha$ y $\deg(x^\alpha) := |\alpha|$.
- (3) Sea $0 \neq f \in A$, $t(f)$ es el conjunto finito de términos que conforman f , es decir, si $f = c_1 X_1 + \cdots + c_t X_t$, con $X_i \in \text{Mon}(A)$ y $c_i \in R \setminus \{0\}$, entonces $t(f) := \{c_1 X_1, \dots, c_t X_t\}$.
- (4) Sea f como en (3), entonces $\deg(f) := \max\{\deg(X_i)\}_{i=1}^t$.

Teorema 4.3.6. *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo R . Entonces, A es un anillo filtrado con filtración dada por*

$$F_m := \begin{cases} R, & \text{si } m = 0, \\ \{f \in A : \deg(f) \leq m\}, & \text{si } m \geq 1 \end{cases} \quad (4-14)$$

y el correspondiente anillo graduado $\text{Gr}(A)$ es una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa de R . Además, si A es biyectiva, entonces $\text{Gr}(A)$ es una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa biyectiva.

Demostración. véase [10] o [9]. ✦

Proposición 4.3.7. *Sean A y B anillos filtrados, con filtración $\{F_p(A)\}_{p \in \mathbb{Z}}$ y $\{F_p(B)\}_{p \in \mathbb{Z}}$. Sea $f : A \rightarrow B$, un homomorfismo filtrado. Entonces,*

- (1) f induce un homomorfismo graduado

$$\text{Gr}(A) \longrightarrow \text{Gr}(B). \quad (4-15)$$

- (2) *Su f es inyectivo y estricto, es decir, para cada $p \in \mathbb{Z}$, $f(F_p(A)) \subseteq \text{Im}(f) \cap F_p(B)$, entonces $\text{Gr}(f)$ es inyectivo. Además, si la filtración es positiva, el recíproco es válido.*
- (3) *Si f es sobreyectivo y estricto, entonces $\text{Gr}(f)$ es sobreyectivo. Además, si la filtración es positiva, el recíproco es válido.*

Demostración. (1) Como f es un homomorfismo filtrado, entonces $f(F_p(A)) \subseteq F_p(B)$ para cada $p \in \mathbb{Z}$, y se induce la función

$$\begin{aligned} \text{Gr}(A)_p = F_p(A)/F_{p-1}(A) & \xrightarrow{\text{Gr}(f)_p} F_p(B)/F_{p-1}(B) = \text{Gr}(B)_p, \\ \overline{m_p} & \longmapsto \overline{f(m_p)}, \end{aligned} \quad (4-16)$$

con $\overline{m_p} := m_p + F_{p-1}(A)$, $m_p \in F_p(A)$ y $\overline{f(m_p)} := f(m_p) + F_{p-1}(B)$.

Notamos que $\text{Gr}(f)_p$ está bien definida y es un homomorfismo de grupos abelianos. Realizamos la suma directa externa de estos homomorfismos y obtenemos el homomorfismo de grupos abelianos

$$\begin{aligned} \text{Gr}(f) : \text{Gr}(A) & \longrightarrow \text{Gr}(B) \\ (\overline{m_p})_{p \in \mathbb{Z}} & \longmapsto (\overline{f(m_p)})_{p \in \mathbb{Z}}. \end{aligned} \quad (4-17)$$

Resta ver que $Gr(f)$ es un homomorfismo de anillos: Como $Gr(f)(Gr(A)_p) = Gr(f)_p(Gr(A)_p) \subseteq Gr(B)_p$, y además $Gr(f)(\overline{a_p b_p}) = \overline{f(a_p b_p)} = Gr(f)(\overline{a_p})Gr(f)(\overline{b_p})$.

La demostración de (2) y (3) son análogas a la demostración presentada en [8] para la proposición 2.2.11, dado que para esta demostración solo se hace uso de las propiedades de la filtración y de la estructura de grupo. \diamond

Teorema 4.3.8. *Sean A una extensión PBW torcida de R y λ un endomorfismo filtrado de A , tales que*

(1) A es genérica,

(2) para cada $\lambda(x_i) \neq 0$, $\lambda(x_i) \notin F_0(A)$, el coeficiente principal (según el orden lexicográfico) es invertible, y existe al menos tres índices i, j, u para los que esto sucede.

Entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y a_1, a_2, \dots, a_n en R , tal que $\lambda(x_w) = a_w + \lambda_w x_w$, para $w = 1, \dots, n$.

Demostración. Como λ es un homomorfismo filtrado, se induce un homomorfismo $Gr(\lambda) : Gr(A) \rightarrow Gr(A)$. Observamos que $Gr(\lambda)(x_i + F_0) = \lambda(x_i) + F_0 \neq 0$, para aquellos x_i tales que $\lambda(x_i) \neq 0$. Luego todas las hipótesis del teorema 4.3.2 se cumplen para $Gr(A)$ y $Gr(\lambda)$, por lo que $Gr(\lambda)(x_i) = \lambda_i x_i + F_0$ para algún $\lambda_i \in R^*$.

Finalmente, como $\lambda(x_i) + F_0 = \lambda_i x_i + F_0$, entonces $\lambda(x_i) = \lambda_i x_i + a_i$, para algún $a_i \in F_0 = R$ y para todo $i = 1, \dots, n$. \diamond

Corolario 4.3.9. *Si A es una extensión PBW torcida de R y $\lambda \in End(A)$ son como en el teorema 4.3.8 y cada $\lambda(x_i) \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, entonces λ es un automorfismo de A .*

Demostración. Como $Gr(\lambda)(x_i + F_0) \neq 0$ para todo i , el corolario 4.3.3 asegura que $Gr(\lambda)$ es un automorfismo para $Gr(A)$. Dado que la filtración es positiva, entonces λ es un automorfismo estricto de A , según la proposición 4.3.7.

Además, $\lambda(x_i) = a_i + \lambda_i x_i$ para cada $1 \leq i \leq n$, donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R^*$ y $a_1, \dots, a_n \in R$. \diamond

Observemos que cuando λ es un endomorfismo inyectivo, podemos omitir la condición $\lambda(x_i) \notin F_0(A)$, ya que de lo contrario λ no sería inyectivo.

Corolario 4.3.10. *Si A es una extensión PBW torcida genérica de R con $n \geq 3$, y λ un endomorfismo inyectivo filtrado tal que el coeficiente principal de $\lambda(x_i)$ es invertible para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces λ es un automorfismo.*

4.4. Automorfismos para extensiones *PBW* torcidas sobre dominios de Ore a izquierda.

En esta sección caracterizaremos el grupo de automorfismos de una extensión *PBW* torcida de un anillo R , que además es un dominio de Ore a izquierda. Para ello consideremos los siguientes resultados que pueden consultarse en [9].

Teorema 4.4.1 ([9]). *Sea A una extensión *PBW* torcida cuasi-conmutativa de R . Entonces*

- (1) *A es isomorfo a un anillo de polinomios torcidos iterados de tipo endomorfismo.*
- (2) *Si A es biyectiva, entonces cada endomorfismo es biyectivo.*

Para la demostración del teorema anterior, se establece un isomorfismo de anillos con el anillo de polinomios iterados $B := R[z_1; \theta_1] \cdots [z_n; \theta_n]$, donde

$$\begin{cases} \theta_1 = \sigma_1, \\ \theta_j : R[z_1; \theta_1] \cdots [z_{j-1}; \theta_{j-1}] \longrightarrow R[z_1; \theta_1] \cdots [z_{j-1}; \theta_{j-1}], \\ \theta_j(z_i) = c_{ji}z_i \text{ para } 1 \leq i < j \leq n, \theta_j(r) = \sigma_j(r) \text{ para } r \in R, \end{cases} \quad (4-18)$$

donde los σ_i son dados por la proposición 4.1.2.

Teorema 4.4.2 ([9]). *Sea R un anillo y $S \subset R$ un subconjunto multiplicativo tal que*

- (1) *$S^{-1}R$ existe,*
- (2) *$\sigma(S) \subseteq S$.*

Entonces $S^{-1}(R[x; \sigma, \delta]) \cong (S^{-1}R[x; \bar{\sigma}, \bar{\delta}])$, con

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}R & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & S^{-1}R \\ \frac{a}{s} & \longmapsto & \frac{\sigma(a)}{\sigma(s)} \end{array} \quad (4-19)$$

y

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}R & \xrightarrow{\bar{\delta}} & S^{-1}R \\ \frac{a}{s} & \longmapsto & -\frac{\delta(s)}{\sigma(s)} \frac{a}{s} + \frac{\delta(a)}{\sigma(s)}. \end{array} \quad (4-20)$$

Según la demostración presentada en [9], el homomorfismo de anillos $\psi : R[x; \sigma, \delta] \longrightarrow S^{-1}R[x; \bar{\sigma}, \bar{\delta}]$, en la propiedad universal para el anillo de fracciones del conjunto multiplicativo S , está dado por $\psi(\sum_i a_i x^i) = \sum_i \frac{a_i}{1} x^i$.

Corolario 4.4.3 ([9]). Sea R un anillo, $S \subset R$ un subconjunto multiplicativo, y

$$A := R[x_1, \sigma_1, \delta_1] \cdots [x_n, \sigma_n, \delta_n],$$

un anillo de polinomios iterados tal que

- (1) $S^{-1}R$ existe,
- (2) $\sigma_i(S) \subseteq S$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Entonces

$$S^{-1}A \cong (S^{-1}R)[x_1; \overline{\sigma}_1, \overline{\delta}_1] \cdots [x_n; \overline{\sigma}_n, \overline{\delta}_n], \quad (4-21)$$

con

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}R & \xrightarrow{\overline{\sigma}_i} & S^{-1}R \\ \frac{a}{s} & \longmapsto & \frac{\sigma_i(a)}{\sigma_i(s)} \end{array} \quad (4-22)$$

y

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}R & \xrightarrow{\overline{\delta}_i} & S^{-1}R \\ \frac{a}{s} & \longmapsto & -\frac{\delta_i(s)}{\sigma_i(s)} \frac{a}{s} + \frac{\delta_i(a)}{\sigma_i(s)}. \end{array} \quad (4-23)$$

Aplicando de forma iterada el resultado y la construcción hecha en el teorema 4.4.2 (véase [9]), llegamos a que la función $\psi : A \longrightarrow (S^{-1}R)[x_1; \overline{\sigma}_1, \overline{\delta}_1] \cdots [x_n; \overline{\sigma}_n, \overline{\delta}_n]$, en la propiedad universal para el anillo de fracciones de A respecto a S esta dado por $\psi(\sum_t a_t x^t) = \sum_t \frac{a_t}{1} x^t$.

Proposición 4.4.4. Sea $A = R[x_1, \theta_1] \cdots [x_n, \theta_n]$ un anillo de polinomios torcidos iterados de tipo endomorfismo, donde $\theta_i|_R$ es un endomorfismo inyectivo de R para $1 \leq i \leq n$, y $\theta_i(x_j) = c_{ij}x_j$, para cada $1 \leq j < i \leq n$ con c_{ij} invertible a izquierda. Entonces A es una extensión *PBW* torcida cuasi-conmutativa de R con endomorfismos $\sigma_i = \theta_i|_R$.

Demostración. La demostración se hará usando inducción sobre n .

Cuando $n = 1$, tenemos que $A = R[x_1, \theta_1]$ es una extensión cuasi-conmutativa de R (véase [9]).

Supongamos que $A' = R[x_1, \theta_1] \cdots [x_{n-1}, \theta_{n-1}]$ es una extensión *PBW* torcida cuasi-conmutativa de R , y consideremos $A = R[x_1; \theta_1] \cdots [x_n; \theta_n] = A'[x_n; \theta_n]$ que es una extensión *PBW* torcida cuasi-conmutativa de A' . Luego

- (1) $R \subseteq A' \subseteq A$.

(2) Todo elemento p de A se puede escribir como

$$p = \sum_{j=0}^n a_j x_n^j, \quad (4-24)$$

con $a_j \in A'$, pues A es una extensión PBW torcida de A' .

Por hipótesis de inducción, $a_j = \sum_l a_{jl} x^l$, con $a_{jl} \in R$ y $l = (l_1, \dots, l_{n-1})$.

Luego

$$p = \sum_{j=0}^n \sum_l a_{jl} x^l x_n^j, \quad (4-25)$$

por lo cual, cada elemento $p \in A$ puede representarse como combinación lineal de $Mon(A) := Mon\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Veamos que $Mon(A)$ es una R -base para A . Supongamos que $0 = \sum_t a_t x^t$ con $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ y $a_t \in R$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^s \sum_{\{t:t_n=i\}} a_t x^t, \text{ donde } s \text{ es el mayor exponente que aparece para } x_n \\ &= \sum_{i=0}^s \sum_{\{t:t_n=i\}} a_t x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n} \\ &= \sum_{i=0}^s \left(\sum_{\{t:t_n=i\}} a_t x_1^{t_1} \cdots x_{n-1}^{t_{n-1}} \right) x_n^i. \end{aligned}$$

Como $A = \sigma(A')\langle x_n \rangle$, $\sum_{\{t:t_n=i\}} a_t x_1^{t_1} \cdots x_{n-1}^{t_{n-1}} \in A'$, y la representación de cero es única considerando A como A' -módulo, se tiene que $\sum_{\{t:t_n=i\}} a_t x_1^{t_1} \cdots x_{n-1}^{t_{n-1}} = 0$ para cada i .

Finalmente, como $A' = \sigma(R)\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ entonces $\sum_{\{t:t_n=i\}} a_t x_1^{t_1} \cdots x_{n-1}^{t_{n-1}} = 0$ implica que cada $a_t = 0$, con lo cual hemos probado que cero tiene representación única como R -módulo en los generadores $Mon(A)$. Por lo tanto, $Mon(A)$ es una R -base para A .

(3) Si $r \in R \setminus \{0\}$ entonces $x_i r = \theta_i(r) x_i$, pero por hipótesis sabemos que $\theta_i(r) \in R \setminus \{0\}$, ya que θ_i es inyectivo en R . Luego existe $c_{ir} := \theta_i(r)$ tal que $x_i r - c_{ir} x_i = 0 \in R$.

- (4) Si $j < i$, $x_i x_j = \theta_i(x_j) x_i = c_{ij} x_j x_i$, como adicionalmente, c_{ij} es invertible a izquierda, entonces $c_{ji} x_i x_j = x_j x_i$, donde c_{ji} es el inverso a izquierda de c_{ij} . Luego hemos encontrado $c_{ij} \in R$ no nulo, tal que $x_i x_j - c_{ij} x_j x_i = 0 \in R + Rx_1 + \cdots + Rx_n$.

Así tenemos que A es una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa de R .

Finalmente, observemos que $x_i r = \theta_i(r) x_i$ para todo i , lo cual nos dice, dada la representación única de los elementos de A , que $\sigma_i(r) = \theta_i(r)$ para todo $r \in R$. \diamond

Teorema 4.4.5. *Sea A una extensión PBW torcida cuasi-conmutativa de un dominio de Ore a izquierda R con endomorfismos σ_i dados en la proposición 4.1.2. Entonces para $S = R \setminus \{0\}$, $S^{-1}A \cong \sigma(S^{-1}R)\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ es una extensión cuasi-conmutativa de $S^{-1}R$, donde los $\bar{\sigma}_i$ para $\sigma(S^{-1}R)\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, son tales que*

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i : S^{-1}R &\longrightarrow S^{-1}R \\ \frac{a}{s} &\longmapsto \frac{\sigma_i(a)}{\sigma_i(s)}, \end{aligned} \quad (4-26)$$

y $\psi : A \longrightarrow S^{-1}A$ de la definición del anillo de fracciones a izquierda es tal que

$$\psi\left(\sum_t a_t x^t\right) = \sum_t \frac{a_t}{1} x^t, \quad (4-27)$$

para todo $\sum_t a_t x^t \in A$.

Demostración. Como R es un dominio de Ore a izquierda, entonces $S := R \setminus \{0\}$ es un sistema multiplicativo de R , y por tanto, de A .

Como A es cuasi-conmutativa entonces según el teorema 4.4.1, $A \cong R[x_1; \theta_1] \cdots [x_n; \theta_n]$, tal que

$$\begin{cases} \theta_1 = \sigma_1, \\ \theta_j : R[x_1; \theta_1] \cdots [x_{j-1}; \theta_{j-1}] \longrightarrow R[x_1; \theta_1] \cdots [x_{j-1}; \theta_{j-1}], \\ \theta_j(x_i) = c_{ji} x_i \text{ para } 1 \leq i < j \leq n, \theta_j(r) = \sigma_j(r) \text{ para } r \in R, \end{cases} \quad (4-28)$$

donde los σ_i son dados por la proposición 4.1.2.

Por otro lado, observemos que para todo $r \in S$, $\theta_i(r) = \sigma_i(r) \in S$. Así, según el teorema 4.4.2 y el corolario 4.4.3, podemos considerar

$$S^{-1}(R[x_1; \theta_1] \cdots [x_n; \theta_n]) \cong (S^{-1}R)[x_1; \bar{\theta}_1] \cdots [x_n; \bar{\theta}_n],$$

con

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}R & \xrightarrow{\bar{\theta}_i} & S^{-1}R \\ \frac{a}{s} & \longmapsto & \frac{\theta_i(a)}{\theta_i(s)} = \frac{\sigma_i(a)}{\sigma_i(s)}. \end{array}$$

Observemos que $\bar{\theta}_i(\frac{a}{s}) = \frac{\theta_i(a)}{\theta_i(s)} = \frac{\sigma_i(a)}{\sigma_i(s)} = \bar{\sigma}_i(\frac{a}{s})$ para cada $(\frac{a}{s}) \in S^{-1}R$, donde $\bar{\sigma}_i$ esta dado por la propiedad universal de $S^{-1}R$ con homomorfismo ψ' .

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\psi'} & S^{-1}R \\ \sigma_i \downarrow & & \nearrow \bar{\sigma}_i \\ R & & \\ \psi' \downarrow & & \\ S^{-1}R & & \end{array} \quad (4-29)$$

Tenemos que $\bar{\sigma}_i$ es inyectivo ya que ψ' es inyectivo, pues R no tiene divisores de cero y σ_i es inyectivo. Luego se tiene que $\bar{\theta}_i$ es inyectivo en $S^{-1}R$. Por otro lado, según el corolario 4.4.3 se tiene que $\bar{\theta}_i(x_j) = \frac{c_{ij}}{1}x_j$.

En consecuencia, tenemos un anillo de polinomios iterados de tipo endomorfismos

$$(S^{-1}R)[x_1; \bar{\theta}_1] \cdots [x_n; \bar{\theta}_n],$$

de tal forma que $\bar{\theta}_i$ es un endomorfismo inyectivo de $S^{-1}R$ para $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, usando el teorema 4.4.4, $(S^{-1}R)[x_1; \bar{\theta}_1] \cdots [x_n; \bar{\theta}_n]$ es una extensión *PBW* torcida cuasi-conmutativa de la forma $\sigma(S^{-1}R)\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, con endomorfismos $\bar{\sigma}_i$.

Finalmente, $\sigma(S^{-1}R)\langle x_1, \dots, x_n \rangle = (S^{-1}R)[x_1; \bar{\theta}_1] \cdots [x_n; \bar{\theta}_n] \cong S^{-1}(R[x_1; \theta_1] \cdots [x_n; \theta_n]) \cong S^{-1}A$, en donde ψ esta dada para este caso en la demostración del teorema 4.4.2 y coincide con la dada en este teorema.

✓

En los siguientes resultados se asumirá que $S^{-1}A$ es una extensión *PBW* torcida genérica.

Teorema 4.4.6. *Sean A una extensión cuasi-conmutativa genérica de un dominio de Ore a izquierda R y $\lambda \in \text{End}(A)$, tales que existen al menos tres índices i, j, t , con $\lambda(x_i), \lambda(x_j), \lambda(x_t) \neq 0$. Entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R$ tales que $\lambda(x_w) = \lambda_w x_w$, para todo $1 \leq w \leq n$.*

Demostración. Consideremos el sistema multiplicativo $S := R \setminus \{0\}$, entonces $S^{-1}R$ existe, y según el teorema 4.4.5 podemos considerar $S^{-1}A$. Sea $\lambda \in \text{End}(A)$, entonces podemos encontrar $\bar{\lambda} \in \text{End}(S^{-1}A)$ usando propiedad universal para $S^{-1}A$, púes $\lambda(S) = S \subseteq (S^{-1}A)^*$, de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\psi} & S^{-1}A \\
 \lambda \downarrow & & \nearrow \bar{\lambda} \\
 A & & \\
 \psi \downarrow & & \\
 S^{-1}A & &
 \end{array}, \quad (4-30)$$

donde $\bar{\lambda}$ satisface $\psi\lambda = \bar{\lambda}\psi$.

Por otro lado, notemos que ψ es inyectivo, pues S no tiene divisores de cero en A , por lo cual, podemos considerar $A \subseteq S^{-1}A$. Entonces, suponiendo que $\lambda(x_i) = \sum a_{it}x^t$ para cada $1 \leq i \leq n$, se tiene que $\bar{\lambda}(x_i) = \psi(\lambda(x_i)) = \sum \frac{a_{it}}{1}x^t$.

De lo anterior, si $\bar{\lambda}(x_i) = 0$, entonces $\sum \frac{a_{it}}{1}x^t = 0$, lo cual quiere decir que $\psi(a_{it}) = \frac{a_{it}}{1} = 0$ para todo $t \in \mathbb{N}^n$. Dada la inyectividad de ψ , se concluye que $a_{it} = 0$ para todo $t \in \mathbb{N}^n$, y por tanto $\lambda(x_i) = \sum a_{it}x^t = 0$.

Luego, existen al menos tres índices i, j, t , tales que $\bar{\lambda}(x_i), \bar{\lambda}(x_j), \bar{\lambda}(x_t) \neq 0$, y como $S^{-1}A$ es una extensión cuasi-conmutativa genérica de $S^{-1}R$ (según el teorema 4.4.5), usando el mismo razonamiento que en el teorema 4.3.2, $\bar{\lambda}(x_i) = \frac{a_i}{1}x_i$ para cada $1 \leq i \leq n$.

En efecto, $S^{-1}A$ es una extensión cuasi-conmutativa de $S^{-1}R$, en donde los elementos no nulos de R son invertibles, y por hipótesis los c_{ij} con $1 \leq i < j \leq n$ son independientes en $S^{-1}A$. Entonces, las hipótesis del teorema 4.3.2 se satisfacen para $S^{-1}A$ y $\bar{\lambda}$, por lo cual existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in S^{-1}R$, tales que $\bar{\lambda}(x_w) = \lambda_w x_w$ para $w = 1, \dots, n$. Por otro lado, tenemos también que $\bar{\lambda}(x_w) = \sum \frac{a_{wt}}{1}x^t$, luego comparando ambas escritura, y dada la representación única de los elementos de $S^{-1}A$, se tiene que $\psi(a_{wt}) = \frac{a_{wt}}{1} = 0$ si $t \neq w$, y $\psi(a_{ww}) = \frac{a_{ww}}{1} = \lambda_w$,

donde w se entiende, en este caso como $(0, 0, \dots, \underbrace{1}_w, \dots, 0)$. Dado que ψ es inyectivo, concluimos que $a_{tw} = 0$ para $t \neq w$, y por lo tanto $\lambda(x_w) = a_w x_w$ para cada $w = 1, \dots, n$. \diamond

Corolario 4.4.7. Si A y $\lambda \in \text{End}(A)$ son como en el teorema 4.4.6 y λ es inyectivo, entonces existen $\lambda_i \in R \setminus \{0\}$, $1 \leq i \leq n$, tal que

$$\lambda(x_w) = \lambda_w x_w \text{ para cada } w = 1, \dots, n. \quad (4-31)$$

En particular, si $\lambda \in \text{Aut}(A)$ entonces λ tiene la forma (4-31).

Comentario 4.4.8. Cuándo $\lambda \in \text{Aut}(A)$, se puede concluir además, que $\lambda_w \in R^*$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Corolario 4.4.9. *Si A es una extensión PBW torcida genérica de un dominio de Ore a izquierda R , y λ es un endomorfismo filtrado, tal que si $\lambda(x_i) \neq 0$, $\lambda(x_i) \notin F_0(A)$, entonces existen $a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$ tal que*

$$\lambda(x_i) = a_i + \lambda_i x_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4-32)$$

En particular, si λ es inyectiva, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R \setminus \{0\}$.

4.5. Ejemplos y consideraciones.

Como un hecho interesante, note que los Corolarios 4.3.3 y 4.3.9 nos recuerdan la Conjetura de Dixmier para álgebras de Weyl. La conjetura generalizada de Dixmier establece que todo endomorfismo del álgebra de Weyl $A_n(k)$ es un automorfismo (Véase [11], [12]).

De otra parte, a continuación presentamos un listado de ejemplos para los cuales se podrían aplicar los resultados de este capítulo:

(1) Anillos de polinomios torcidos iterados $R[x_1; \sigma_1, \delta_1] \cdots [x_n; \sigma_n, \delta_n]$ bajo las siguientes condiciones:

- (1) Para $1 \leq i \leq n$, σ_i es biyectivo.
- (2) Para cada $r \in R$ y $1 \leq i \leq n$, $\sigma_i(r), \delta_i(r) \in R$.
- (3) Para $i < j$, $\sigma_j(x_i) = cx_i + d$, con $c, d \in R$ y c invertible.
- (4) Para $i < j$, $\delta_j(x_i) \in R + Rx_1 + \cdots + Rx_n$.

En particular,

- Polinomios cuánticos torcidos con $r = 0$.

(2) Anillos de polinomios torcidos iterados de tipo endomorfismo bajo las consideraciones de la proposición 4.4.4 con parámetros invertibles.

(3) **Álgebras de difusión:** Un álgebra de difusión \mathcal{A} es generada por $\{D_i, x_i : 1 \leq i \leq n\}$ sobre k con relaciones

$$\begin{aligned} x_i x_j &= x_j x_i \quad 1 \leq i, j \leq n, \\ x_i D_j &= D_j x_i \quad 1 \leq i, j \leq n, \\ c_{ij} D_i D_j - c_{ji} D_j D_i &= x_j D_i - x_i D_j, \quad i < j, \quad c_{ij}, c_{ji} \in k^*. \end{aligned} \quad (4-33)$$

En este caso, $\mathcal{A} \cong \sigma(k[x_1, \dots, x_n])\langle D_1, \dots, D_n \rangle$.

(4) Dentro de las álgebra cuánticas encontramos los siguientes casos:

- **Análogo multiplicativo de las álgebras de Weyl.** En este caso, la k -álgebra $\mathcal{O}_n(\lambda_{ij})$ es generada por x_1, \dots, x_n sujeta a las siguientes relaciones

$$x_j x_i = \lambda_{ji} x_i x_j, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

donde $\lambda_{ji} \in k \setminus \{0\}$. Notamos que

$$\mathcal{O}_n(\lambda_{ij}) \cong \sigma(k)\langle x_1, \dots, x_n \rangle \cong \sigma(k[x_1])\langle x_2, \dots, x_n \rangle.$$

- **Álgebras de polinomios torcidos 3-dimensionales \mathcal{A} .** Estas álgebras están dadas por las relaciones

$$yz - \alpha zy = \lambda, \quad zx - \beta xz = \mu, \quad xy - \gamma yz = \nu,$$

tales que $\lambda, \mu, \nu \in k + kx + ky + kz$, y $\alpha, \beta, \gamma \in k \setminus \{0\}$; así $\mathcal{A} \cong \sigma(k)\langle x, y, z \rangle$. Según [10], hay quince álgebras de polinomios torcidos 3-dimensionales no isomorfas.

- **El álgebra de operadores diferenciales $D_q(S_q)$ sobre un espacios cuántico S_q .** Sea k un anillo conmutativo, y sea $q = (q_{ij})$ una matriz con entradas en k^* tal que $q_{ii} = 1 = q_{ij}q_{ji}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Entonces la k -álgebra S_q es generada por los x_i , $1 \leq i \leq n$, sujeta a las siguientes relaciones

$$x_i x_j = q_{ij} x_j x_i.$$

El álgebra $D_q(S_q)$ de operadores q -diferenciales sobre S_q es definida por

$$\partial_i x_j - q_{ij} x_j \partial_i = \delta_{ij} \text{ para cada } i, j.$$

Las relaciones entre los ∂_i son dadas por

$$\partial_i \partial_j = q_{ij} \partial_j \partial_i \text{ para cada } i, j.$$

Por lo tanto, $D_q(S_q) \cong \sigma(\sigma(k)\langle x_1, \dots, x_n \rangle)\langle \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$.

Todos los ejemplos de extensiones *PBW* torcidas aquí mencionados, así como muchos otros, pueden consultarse en [10].

5 AUTOMORFISMOS PARA POLINOMIOS CUÁNTICOS TORCIDOS.

5.1. Definición

Definición 5.1.1 (Anillo de polinomios cuánticos torcidos). Sea R un anillo con una matriz fija de parámetros $q := (q_{ij}) \in M_n(R)$, $n \geq 2$, tal que $q_{ii} = 1 = q_{ij}q_{ji} = q_{ji}q_{ij}$ para cada $1 \leq i, j \leq n$, y supóngase también un sistema de automorfismos de R , $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. El anillo de polinomios cuánticos torcidos sobre R , notado por $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ o $R_{q,\sigma}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n]$, es definido como sigue:

$$(1) \quad R \subseteq R_{q,\sigma}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n].$$

$$(2) \quad R_{q,\sigma}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n] \text{ es un } R\text{-módulo libre a izquierda con base}$$

$$\{x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} : l_i \in \mathbb{Z} \text{ para } 1 \leq i \leq r \text{ y } l_i \in \mathbb{N} \text{ para } r+1 \leq i \leq n\}.$$

$$(3) \quad \text{Los elementos } x_1, \dots, x_n \text{ satisfacen las siguientes relaciones}$$

$$x_i x_i^{-1} = 1 = x_i^{-1} x_i, \quad 1 \leq i \leq r, \tag{5-1}$$

$$x_i x_j = q_{ij} x_j x_i, \quad 1 \leq i, j \leq n, \tag{5-2}$$

$$x_i r = \sigma_i(r) x_i, \quad r \in R, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{5-3}$$

Los anillos de polinomios cuánticos torcidos introducidos por Lezama son una generalización de los anillos de polinomios cuánticos trabajados por Artamonov (véase [3]), ya que en la definición 5.1.1 se asume que R puede ser un anillo cualquiera, mientras que en [3] se supone que el anillo de coeficientes R es por lo menos un anillo de división.

Cuando todos los automorfismos son triviales, escribimos $R_q[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n]$, y este anillo es llamado el anillo de polinomios cuánticos sobre R . Si $R = k$ es un campo, entonces $k_{q,\sigma}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n]$ es el álgebra de polinomios cuánticos. Para los automorfismos triviales obtenemos el álgebra de polinomios cuánticos simplemente notada por

\mathcal{O}_q .

$R_{q,\sigma}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n]$ puede ser visto como una localización de una extensión *PBW* torcida. En efecto, tenemos una extensión *PBW* torcida cuasi-conmutativa biyectiva

$$A := \sigma(R)\langle x_1, \dots, x_n \rangle, \quad (5-4)$$

con $x_i r = \sigma_i(r) x_i$ y $x_j x_i = q_{ji} x_i x_j$, $1 \leq i, j \leq n$; si tomamos $S := \{r x^l : r \in R^*, x^l \in \text{Mon}\{x_1, \dots, x_r\}\}$, entonces S es un subconjunto multiplicativo de A y

$$S^{-1}A \cong R_{q,\sigma}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n] \cong AS^{-1}. \quad (5-5)$$

Cuando $r = 0$, $R_{q,\sigma}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n] = R_{q,\sigma}[x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n]$ es el espacio cuántico torcido n -multiparamétrico sobre R , y cuando $r = n$, este coincide con $R_{q,\sigma}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, es decir, con el toro cuántico torcido n -multiparamétrico sobre R (véase [10] y [9]).

5.2. Reglas de multiplicación.

Cuando R es un anillo arbitrario, es claro que el conjunto de elementos invertibles R^* de R es un grupo multiplicativo. Definimos N como el subgrupo multiplicativo de R^* generado por el grupo derivado $[R^*, R^*]$ de R^* y los elementos de la forma $z^{-1}\sigma_i(z)$ para $z \in R^*$ y $i = 1, \dots, n$. Notamos además que este subgrupo es normal en R^* y R^*/N es un grupo abeliano.

La normalidad de N en R^* puede demostrarse usando el teorema de correspondencia, en efecto, sabemos que existe una correspondencia biunívoca entre los subgrupos normales de R^* que contienen a $[R^*, R^*]$ y los subgrupos normales de $R^*/[R^*, R^*]$ (que es abeliano), por lo cual $N/[R^*, R^*]$ es normal en $R^*/[R^*, R^*]$ y así N es normal en R^* .

Comentario 5.2.1. Si $a, b \in R^*$ entonces $a \cdot b = b \cdot a \cdot u$, para algún $u \in N$. En efecto, considerando la imagen de $a \cdot b$ en R^*/N , tenemos que $a \cdot b = b \cdot a \pmod{N}$, por lo tanto $a \cdot b = b \cdot a \cdot u$, para algún $u \in N$.

Algunas propiedades que se pueden deducir para $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ son las siguientes:

Proposición 5.2.2. *Si $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ es un anillo de polinomios cuánticos torcidos sobre R , entonces*

$$(1) \quad x_i^{-1} r = \sigma_i^{-1}(r) x_i^{-1} \text{ para cada } r \in R \text{ y } 1 \leq i \leq r.$$

$$(2) \quad x_i x_j^{-1} = \sigma_j^{-1}(q_{ij}^{-1}) x_j^{-1} x_i \text{ para } 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq r.$$

$$(3) \quad \sigma_i^n(z) = z z^{-1} \sigma_i(z) \sigma_i(z)^{-1} \sigma_i^2(z) \sigma_i^2(z)^{-1} \dots \sigma_i^{n-1}(z)^{-1} \sigma_i^n(z) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } z \in R^*, \text{ lo cual además implica que } \sigma_i^n(z) = z \cdot d \text{ donde } d \in N.$$

(4) $\sigma_i^{-n}(z) = \sigma_i^{-n}(z)\sigma_i^{-n+1}(z)^{-1}\sigma_i^{-n+1}(z)\sigma_i^{-n+2}(z)^{-1}\sigma_i^{-n+2}(z)\cdots\sigma_i^{-1}(z)^{-1}\sigma_i^{-1}(z)z^{-1}z$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in R^*$. Además $\sigma_i^{-n}(z) = z \cdot u'$ con $u' \in N$.

(5) $x_i x_j^u = q_{ij}\sigma_j(q_{ij})\sigma_j^2(q_{ij})\cdots\sigma_j^{u-1}(q_{ij})x_j^u x_i$ para $u \in \mathbb{N}$.

(6) $x_i x_j^{-u} = \sigma_j^{-1}(q_{ij}^{-1})\sigma_j^{-2}(q_{ij}^{-1})\cdots\sigma_j^{-u}(q_{ij}^{-1})x_j^{-u} x_i$ para cada $u \in \mathbb{N}$.

(7) $x_i x_j^n = (q_{ij}^n \cdot d)x_j^n x_i$, con $d \in N$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(8) $x_i^t x_j^s = (q_{ij}^{ts} \cdot u)x_j^s x_i^t$, para algún $u \in N$, y para todo $t \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}$.

(9) $x_i^{-t} x_j^s = (q_{ij}^{-ts} \cdot u)x_j^s x_i^{-t}$, para algún $u \in N$, y para todo $t \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}$.

(10) $(x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n})(x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}) = \left(\prod_{i < j} q_{ji}^{t_j s_i}\right) \cdot u \cdot x_1^{t_1 + s_1} \cdots x_n^{t_n + s_n}$, para algún $u \in N$.

Demostración. (1) Si $1 \leq i \leq r$ y $r \in R$, tenemos que $rx_i = x_i\sigma_i^{-1}(r)$, luego $x_i^{-1}rx_i = \sigma_i^{-1}(r)$, lo cual quiere decir, $x_i^{-1}r = \sigma_i^{-1}(r)x_i^{-1}$.

(2) Sabemos que $x_i x_j = q_{ij}x_j x_i$, por lo cual, $x_j x_i = q_{ij}^{-1}x_i x_j$. Luego $x_j x_i x_j^{-1} = q_{ij}^{-1}x_i$, y así, $x_i x_j^{-1} = x_j^{-1}q_{ij}^{-1}x_i$. Finalmente, usando (1) concluimos que $x_i x_j^{-1} = \sigma_j^{-1}(q_{ij}^{-1})x_j^{-1}x_i$.

(3) Como z es invertible y $\sigma_i \in \text{Aut}(R)$, entonces $\sigma_i^n(z) \in R^*$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego es evidente que

$$\sigma_i^n(z) = z z^{-1} \sigma_i(z) \sigma(z)^{-1} \sigma_i^2(z) \sigma_i^2(z)^{-1} \cdots \sigma_i^{n-1}(z)^{-1} \sigma_i^n(z),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \in R^*$. Finalmente, si $z \in R^*$, $z^{-1}\sigma_i(z) \in N$, por lo cual $\sigma_i^n(z) = z \cdot u$, para algún $u \in N$.

(4) Realizando el mismo análisis que en (3), tenemos

$$\sigma_i^{-n}(z) = \sigma_i^{-n}(z)\sigma_i^{-n+1}(z)^{-1}\sigma_i^{-n+1}(z)\sigma_i^{-n+2}(z)^{-1}\sigma_i^{-n+2}(z)\cdots\sigma_i^{-1}(z)^{-1}\sigma_i^{-1}(z)z^{-1}z,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in R^*$. Por otro lado, observemos que $\sigma_i^{-1}(z)z^{-1} \in N$ para todo $z \in R^*$. En efecto, tomando $w = \sigma_i^{-1}(z)$, se tiene que $z = \sigma_i(w)$, y así $\sigma_i^{-1}(z)z^{-1} = w\sigma_i(w)^{-1} \in N$. Por lo tanto, $\sigma_i^{-n}(z) = u' \cdot z$ para algún $u' \in N$. Dado que N es normal en R^* , existe $u \in N$ tal que $\sigma_i^{-n}(z) = z \cdot u$.

(5) Realicemos la demostración usando inducción sobre u . Si $u = 1$, entonces $x_i x_j = q_{ij}^1 x_j x_i = q_{ij} x_j x_i$.

Supongamos que la proposición es cierta para $u = n - 1$, veamos que también es cierta para $u = n$.

$$\begin{aligned} x_i x_j^n &= x_i x_j^{n-1} x_j \\ &= q_{ij}\sigma_j(q_{ij})\sigma_j^2(q_{ij})\cdots\sigma_j^{n-2}(q_{ij})x_j^{n-1}x_i x_j, \end{aligned}$$

entonces

$$x_i x_j^n = q_{ij} \sigma_j(q_{ij}) \sigma_j^2(q_{ij}) \cdots \sigma_j^{n-2}(q_{ij}) x_j^{n-1} q_{ij} x_j x_i.$$

Aplicando la definición 5.1.1, se tiene que

$$x_i x_j^n = q_{ij} \sigma_j(q_{ij}) \sigma_j^2(q_{ij}) \cdots \sigma_j^{n-2}(q_{ij}) \sigma_i^{n-1}(q_{ij}) x_j^n x_i.$$

(6) Realicemos la demostración usando inducción sobre u . Si $u = 1$, tenemos (2).

Si $u = 2$, entonces

$$\begin{aligned} x_i x_j^{-2} &= \sigma_j^{-1}(q_{ij}^{-1}) x_j^{-1} x_i x_j^{-1} \\ &= \sigma_j^{-1}(q_{ij}^{-1}) x_j^{-1} \sigma_j^{-1}(q_{ij}^{-1}) x_j x_i \\ &= \sigma_j^{-1}(q_{ij}^{-1}) \sigma_j^{-2}(q_{ij}^{-1}) x_j^{-2} x_i. \end{aligned}$$

Supongamos que la proposición es cierta para $u = n - 1$, veamos que también es cierta para $u = n$.

$$\begin{aligned} x_i x_j^{-n} &= x_i x_j^{-(n-1)} x_j^{-1} \\ &= \sigma_j^{-1}(q_{ij}^{-1}) \sigma_j^{-2}(q_{ij}^{-1}) \cdots \sigma_j^{-n+1}(q_{ij}^{-1}) x_j^{-n+1} x_i x_j^{-1} \\ &= \sigma_j^{-1}(q_{ij}^{-1}) \sigma_j^{-2}(q_{ij}^{-1}) \cdots \sigma_j^{-n+1}(q_{ij}^{-1}) x_j^{-n+1} \sigma_j^{-1}(q_{ij}^{-1}) x_j^{-1} x_i \\ &= \sigma_j^{-1}(q_{ij}^{-1}) \sigma_j^{-2}(q_{ij}^{-1}) \cdots \sigma_j^{-n+1}(q_{ij}^{-1}) \sigma_j^{-n}(q_{ij}^{-1}) x_j^{-n} x_i. \end{aligned}$$

(7) Usando (3) y (4), tenemos que

$$x_i x_j^n = q_{ij} \cdot (q_{ij} \cdot u_1)(q_{ij} \cdot u_2) \cdots (q_{ij} \cdot u_{n-1}) x_j^n x_i,$$

para $n \geq 0$ y $u_i \in N$. Como $q_{ij} \in R^*$ y $N \subseteq R^*$, podemos considerar la imagen de $q_{ij} \cdot (q_{ij} \cdot u_1)(q_{ij} \cdot u_2) \cdots (q_{ij} \cdot u_{n-1})$ en R^*/N , y dada la conmutatividad de R^*/N tenemos que

$$q_{ij} \cdot (q_{ij} \cdot u_1)(q_{ij} \cdot u_2) \cdots (q_{ij} \cdot u_{n-1}) \equiv q_{ij}^n \pmod{N}.$$

Por lo tanto, $x_i x_j^n = (q_{ij}^n \cdot u) x_j^n x_i$ para algún $u \in N$. La demostración para el caso en que $n \leq 0$ es similar. Note además que para realizar la demostración también es posible aplicar la propiedad de normalidad de N .

(8) Usando (5) y (6), para $t \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x_i^t x_j^s &= x_i^{t-1} x_i x_j^s \\ &= \sigma_i^{t-1}(q_{ij}^s u') x_i^{t-1} x_j^s x_i \\ &= \sigma_i^{t-1}(q_{ij}^s u') \sigma_i^{t-2}(q_{ij}^s u') x_i^{t-2} x_j^s x_i^2 \\ &\quad \vdots \\ &= \sigma_i^{t-1}(q_{ij}^s u') \sigma_i^{t-2}(q_{ij}^s u') \cdots \sigma_i(q_{ij}^s u')(q_{ij}^s u') x_j^s x_i^t, \end{aligned}$$

donde $u' \in N$. Aplicando (3), (4) y las propiedades de N concluimos que

$$x_i^t x_j^s = (q_{ij}^{ts} u) x_j^s x_i^t,$$

para algún $u \in N$.

(9) Si $s, t \in \mathbb{N}$, de acuerdo a (8),

$$x_j^s = x_i^{-t} (q_{ij}^{st} u) x_j^s x_i^t,$$

lo cual nos dice que

$$x_j^s x_i^{-t} = \sigma_i^{-t} (q_{ij}^{st} \cdot u) x_i^{-t} x_j^s,$$

y por lo tanto,

$$(\sigma_i^{-t} (q_{ij}^{st} u))^{-1} x_j^s x_i^{-t} = x_i^{-t} x_j^s, \quad (5-6)$$

de nuevo aplicando (3) y (4) se tiene que (5-6) toma la forma

$$(q_{ij}^{st} u')^{-1} x_j^s x_i^{-t} = x_i^{-t} x_j^s. \quad (5-7)$$

Aplicando las propiedades mencionadas para N se tiene que (5-7) es equivalente a

$$(q_{ij}^{-ts} u'') x_j^s x_i^{-t} = x_i^{-t} x_j^s$$

para algún $u'' \in N$.

Así de (8) y (9) podemos deducir la siguiente regla de multiplicación más general

$$x_i^t x_j^s = (q_{ij}^{ts} u) x_j^s x_i^t,$$

para todo $s, t \in \mathbb{Z}$ y algún $u \in N$.

(10) Finalmente, es claro que usando los resultados anteriores podemos deducir que

$$(x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n}) (x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}) = \left(\left[\prod_{i < j} q_{ji}^{t_j s_i} \right] u \right) x_1^{t_1 + s_1} x_2^{t_2 + s_2} \cdots x_n^{t_n + s_n},$$

donde $u \in N$.



Definición 5.2.3. El anillo de polinomios cuánticos torcidos $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ de R , se dirá **genérico o general** si los multiparámetros q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, son independientes en R^*/N .

5.3. Automorfismos para anillos de polinomios cuánticos torcidos.

Entendemos $End(\mathcal{O}_{q,\sigma})$ como los endomorfismos del anillo $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ que dejan fijo los elementos de R y, $Aut(\mathcal{O}_{q,\sigma}) \subseteq End(\mathcal{O}_{q,\sigma})$ es el conjunto de elementos invertibles de $End(\mathcal{O}_{q,\sigma})$. Entonces, podemos decir que cada $\lambda \in End(\mathcal{O}_{q,\sigma})$ es además un R -homomorfismo a izquierda de $\mathcal{O}_{q,\sigma}$.

Teorema 5.3.1. *Sean $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{q,\sigma}$ el anillo de polinomios cuánticos torcidos genérico del anillo R con $r = 0$, $n \geq 3$ y $\lambda \in End(\mathcal{O})$. Si para cada $1 \leq i \leq n$, $\lambda(x_i) \neq 0$, y el coeficiente principal es invertible, entonces λ es un automorfismo.*

Demostración. Consecuencia directa del corolario 4.3.3, ya que \mathcal{O} puede considerarse como una extensión cuasi-conmutativa biyectiva de R . \square

Teorema 5.3.2. *Supóngase que $\gamma \in End(\mathcal{O})$ y se cumple:*

- (1) *para cada $\gamma(x_i) \neq 0$ el coeficiente principal y el más pequeño son invertibles y,*
- (2) *existen al menos tres índices distintos $1 \leq i, j, t \leq n$ tal que $\gamma(x_i), \gamma(x_j), \gamma(x_t) \neq 0$.*

Entonces existen elementos $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in R$ y un entero $\epsilon = \pm 1$ tal que $\gamma_1, \dots, \gamma_n \neq 0$, y

$$\gamma(x_w) = \gamma_w x_w^\epsilon, \quad w = 1, 2, \dots, n. \quad (5-8)$$

Demostración. Seguiremos el esquema de la demostración del teorema 3.2.3.

Consideremos el orden lexicográfico sobre el conjunto de índices \mathbb{Z}^n y sobre el conjunto de monomios en x_1, \dots, x_n . Sea $\gamma \in End(\mathcal{O}_{q,\sigma})$ y note por a_i , $i = 1, \dots, n$, el término más pequeño (el término principal) de $\gamma(x_i)$.

Supongase que $\gamma(x_i), \gamma(x_j) \neq 0$. Observe que el término más pequeño (el principal) de un producto de polinomios no nulos en $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ es igual a el producto de los términos más pequeños (el principal) de cada factor. Por otro lado, (5-2) en la definición 5.1.1 implica que

$$a_i a_j = q_{ij} a_j a_i. \quad (5-9)$$

Supongamos que $a_i = \beta x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$ y $a_j = \xi x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$, donde $\beta, \xi \in R^*$. Así

$$(\beta x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n})(\xi x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}) = q_{ij} (\xi x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n})(\beta x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}).$$

Usando las reglas de multiplicación para monomios en $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ obtenemos

$$\beta \sigma^l(\xi) \left(\prod_{s < r} q_{rs}^{l_r t_s} \right) d x_1^{l_1+t_1} \cdots x_n^{l_n+t_n} = q_{ij} \xi \sigma^t(\beta) \left(\prod_{s < r} q_{rs}^{t_r l_s} \right) d' x_1^{l_1+t_1} \cdots x_n^{l_n+t_n}, \quad (5-10)$$

por lo tanto,

$$\prod_{s < r} q_{rs}^{l_r t_s} \equiv q_{ij} \prod_{s < r} q_{rs}^{t_r l_s} \quad \text{Mód}(N). \quad (5-11)$$

Supongamos que $i > j$. Ya que las imágenes de q_{rs} , $n \geq r > s \geq 1$, son independientes en R^*/N , para $r \neq s$

$$l_r t_s = \delta_{ri} \delta_{sj} + t_r l_s. \quad (5-12)$$

Si $l_p \neq 0$ y $p \neq i, j$, para cada índice $q \neq p$

$$l_p t_q - l_q t_p = 0, \quad (5-13)$$

y por tanto $t_q = t_p l_q l_p^{-1}$. En particular

$$t_i = t_p l_i l_p^{-1} \quad \text{y} \quad t_j = t_p l_j l_i^{-1}, \quad (5-14)$$

esto es

$$l_i t_j - l_j t_i = l_i t_p l_j l_p^{-1} - l_j t_p l_i l_p^{-1} = 0, \quad (5-15)$$

lo que contradice (5-12). Así $l_p = 0$ para todo $p \neq i, j$. Similarmente, podemos probar que $t_p = 0$ si $p \neq i, j$.

Por lo tanto,

$$a_i = \beta x_i^{l_i} x_j^{l_j} \quad \text{y} \quad a_j = \xi x_i^{t_i} x_j^{t_j}, \quad (5-16)$$

donde $t_i t_j - l_j t_i = 1$.

Por hipótesis existe una tercera variable x_u tal que $\gamma(x_u) \neq 0$. El argumento anterior aplicado a los pares de índices (i, u) y (j, u) muestran que

$$a_u = \delta x_u^{r_u} x_i^{r_i} = \delta x_u^{r_u} x_j^{r_j} \quad (5-17)$$

con $\delta \in D^*$.

Finalmente $r_i = r_j = 0$, que es $a_u = \delta x_u^{r_u}$. Similarmente $a_i = \beta x_i^{l_i}$, $a_j = \xi x_j^{t_j}$ con $l_i t_j = 1$, y por tanto, $l_i = t_j = \epsilon = \pm 1$.

Aplicando el mismo argumento al término principal de $\gamma(x_i)$ obtenemos un resultado similar para algún $\epsilon' = \pm 1$ para el término principal. Si $\epsilon = \epsilon'$ el teorema está probado.

Supongamos que $r = 0$, entonces en este caso $\epsilon = \epsilon' = 1$ para todo $\gamma(x_i) \neq 0$, con lo cual el término principal y el más pequeño son iguales.

Si $r > 0$, consideremos $1 \leq i \leq r$, con lo cual $\gamma(x_i) \in \mathcal{O}^*$. Si $\epsilon = -1$ y $\epsilon' = 1$, entonces

$$\gamma(x_i) = \gamma'_i x_i^{-1} + \sum_s \gamma''_i(s) x_i^{m_{i1}(s)} \cdots x_n^{m_{in}(s)} + \gamma''_i x_i, \quad (5-18)$$

donde $\gamma''_i(s) \in R$, $\gamma'_i, \gamma''_i \in R^*$ y la suma se hace sobre algunos de los índices

$$(m_{i1}(s), \dots, m_{in}(s)) \in \mathbb{Z}^n, \quad (5-19)$$

tales que

$$(0, \dots, 0, \overbrace{-1}^i, 0, \dots, 0) < (m_{i1}(s), \dots, m_{in}(s)) < (0, \dots, 0, \overbrace{1}^i, 0, \dots, 0). \quad (5-20)$$

Como γ'_i y γ''_i son invertibles, entonces $\gamma(x_i)$ no es invertible, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\epsilon = \epsilon'$.

✎

Corolario 5.3.3. *Si $\gamma(x_{r+1}), \dots, \gamma(x_n) \neq 0$, en la situación del teorema 5.3.2, entonces γ es un automorfismo de \mathcal{O} . En particular cualquier endomorfismo inyectivo de \mathcal{O} es un automorfismo.*

5.4. Automorfismos para el anillo de polinomios cuánticos torcidos sobre un dominio de Ore.

Lema 5.4.1 ([5]). *Sea S un conjunto multiplicativo de R , tal que $S^{-1}R$ existe. Entonces, dados $s_1, \dots, s_n \in S$, existen $r_1, \dots, r_n \in R$, tales que $r_1 s_1 = r_2 s_2 = \cdots = r_n s_n \in S$, es decir, $Rs_1 \cap \cdots \cap Rs_n \neq 0$.*

Corolario 5.4.2. *Sea S un conjunto multiplicativo de R , tal que $S^{-1}R$ existe. Dados $s_1, \dots, s_n \in S$ y $r_1, \dots, r_n \in R$, existen $s \in S$ y $b_1, \dots, b_n \in R$, tales que $sr_i = b_i s_i$ para $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Aplicando la condición de Ore a r_i y s_i para $i = 1, \dots, n$, existen $c_i \in R$ y $s'_i \in S$, tales que, $c_i s_i = s'_i r_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Aplicando el lema 5.4.1 a los s'_i , existen $a_i \in R$ tales que $s := a_1 s'_1 = a_2 s'_2 = \cdots = a_n s'_n \in S$. Luego tenemos que

$$a_i c_i s_i = a_i s'_i r_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5-21)$$

tomando $b_i := a_i c_i$, tenemos que $b_i s_i = sr_i$ para $i = 1, \dots, n$.

✎

Proposición 5.4.3. *Sea R un anillo y $S \subseteq R$ un sistema multiplicativo. Si $Q := S^{-1}R$ existe, entonces cada conjunto finito $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ de elementos de Q posee un común denominador, es decir, existen $r_1, \dots, r_n \in R$ y $s \in S$ tal que $q_i = \frac{r_i}{s}$ para cada $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. véase [5]. ✦

De aquí en adelante, R se considera un dominio de Ore a izquierda y el sistema multiplicativo sobre el cual trabajaremos será $S := R \setminus \{0\}$.

Consideremos $\mathcal{O}_{q,\sigma} := R_{q,\sigma}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n]$ y $S := R \setminus \{0\}$, donde R es un dominio de Ore, queremos ver que

$$S^{-1}\mathcal{O}_{q,\sigma} \cong (S^{-1}R)_{q,\bar{\sigma}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n], \quad (5-22)$$

donde $\bar{\sigma}_i : S^{-1}R \rightarrow S^{-1}R$, se obtiene extendiendo σ_i usando propiedad universal para $S^{-1}R$. En efecto, sea $\psi : R \rightarrow S^{-1}R$, con $\psi(r) = \frac{r}{1}$, tenemos que ψ es inyectiva ya que R es un dominio, por lo tanto $\psi\sigma_i$ es inyectiva, y $\psi\sigma_i(S) \subseteq (RS^{-1})^*$. Luego existe un único homomorfismo $\bar{\sigma}_i$ tal que $\bar{\sigma}_i\psi = \psi\sigma_i$.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\psi} & S^{-1}R \\ \sigma_i \downarrow & & \nearrow \bar{\sigma}_i \\ R & & \\ \psi \downarrow & & \\ S^{-1}R & & \end{array} \quad (5-23)$$

Por otro lado, como $\psi\sigma_i$ es inyectivo, entonces $\bar{\sigma}_i$ es inyectivo. Veamos entonces que es también sobreyectivo, es decir $\bar{\sigma}_i$ es un automorfismo para $S^{-1}R$.

Consideremos $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$, dado que σ_i es un automorfismo, existen $a' \in R$ y $s' \in S$, tal que $\sigma_i(a') = a$ y $\sigma_i(s') = s$, luego tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i\left(\frac{a'}{s'}\right) &= \bar{\sigma}_i\left(\frac{1}{s'} \cdot \frac{a'}{1}\right) \\ &= \bar{\sigma}_i\left(\frac{1}{s'}\right)\bar{\sigma}_i\left(\frac{a'}{1}\right) \\ &= \bar{\sigma}_i\psi(s')^{-1}\bar{\sigma}_i\psi(a') \\ &= (\psi\sigma_i(s'))^{-1}\psi\sigma_i(a') \\ &= \psi(s)^{-1}\psi(a) \\ &= \left(\frac{s}{1}\right)^{-1}\frac{a}{1} \\ &= \frac{a}{s}, \end{aligned} \quad (5-24)$$

por lo tanto, $\bar{\sigma}_i$ es un homomorfismo de anillos sobreyectivo.

Como $R_{q,\sigma}[x_1, \dots, x_n]$ existe, visto como anillo de polinomios iterados de tipo endomorfismo, $(S^{-1}R)_{q,\bar{\sigma}}[x_1, \dots, x_n]$ también existe, según el teorema 4.4.5. Por lo tanto,

$$(S^{-1}R)_{q,\bar{\sigma}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n]$$

existe, usando la caracterización para anillos de polinomios cuánticos torcidos mediante localización (véase [9]).

Veamos que $S^{-1}\mathcal{O}_{q,\sigma}$ también existe.

(1) Si $f = a_{t_1}x^{t_1} + \dots + a_{t_n}x^{t_n} \in \mathcal{O}_{q,\sigma}$, y $f \cdot s = 0$ para algún $s \in S$, entonces

$$\begin{aligned} f \cdot s &= a_{t_1}\sigma^{t_1}(s)x^{t_1} + \dots + a_{t_n}\sigma^{t_n}(s)x^{t_n} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{5-25}$$

luego, se tiene que $a_{t_i}\sigma^{t_i}(s) = 0$. Como σ_i son automorfismos, $\sigma^{t_i}(s) \neq 0$ y por tanto $a_{t_i} = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. Es decir, $f = 0$ y $s \cdot f = 0$.

(2) Sea $f \in \mathcal{O}_{q,\sigma}$ y $s \in S$. Existen $r \in S$ y $b_{t_i} \in R$ tales que $r \cdot a_{t_i} = b_{t_i} \cdot \sigma^{t_i}(s)$ para $i = 1, \dots, n$.

Tomando $g = b_{t_1}x^{t_1} + \dots + b_{t_n}x^{t_n}$, se tiene que

$$\begin{aligned} g \cdot s &= (b_{t_1}x^{t_1} + \dots + b_{t_n}x^{t_n})s \\ &= b_{t_1}x^{t_1}s + \dots + b_{t_n}x^{t_n}s \\ &= b_{t_1}\sigma^{t_1}(s)x^{t_1} + \dots + b_{t_n}\sigma^{t_n}(s)x^{t_n} \\ &= r \cdot a_{t_1}x^{t_1} + \dots + r \cdot a_{t_n}x^{t_n} \\ &= r(a_{t_1}x^{t_1} + \dots + a_{t_n}x^{t_n}) \\ &= r \cdot f. \end{aligned} \tag{5-26}$$

Así, S y $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ satisface la condición de Ore a izquierda.

De (1) y (2), concluimos que $S^{-1}\mathcal{O}_{q,\sigma}$ existe. Para ver el isomorfismo deseado, veamos que $(S^{-1}R)_{q,\bar{\sigma}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n]$ satisface las condiciones en la definición de anillo de fracciones a izquierda respecto a S (véase [8]).

(1) Consideremos la función

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathcal{O}_{q,\sigma} &\longrightarrow (S^{-1}R)_{q,\bar{\sigma}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n] \\ \sum a_t x^t &\longmapsto \sum \frac{a_t}{1} x^t. \end{aligned} \tag{5-27}$$

Veamos que φ es un homomorfismo de anillos.

a) Sean $\sum a_t x^t$ y $\sum b_t x^t$ elementos en $\mathcal{O}_{q,\sigma}$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\sum a_t x^t + \sum b_t x^t\right) &= \varphi\left(\sum (a_t + b_t) x^t\right) \\
&= \sum \frac{(a_t + b_t)}{1} x^t \\
&= \sum \left(\frac{a_t}{1} + \frac{b_t}{1}\right) x^t \\
&= \sum \frac{a_t}{1} x^t + \sum \frac{b_t}{1} x^t \\
&= \varphi\left(\sum a_t x^t\right) + \varphi\left(\sum b_t x^t\right). \tag{5-28}
\end{aligned}$$

b) Para ver que φ es multiplicativa, es suficiente ver esta propiedad para los monomios ax_i y bx_j .

Cuando $i < j$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(ax_i bx_j) &= \varphi(a\sigma_i(b)x_i x_j) \\
&= \frac{a\sigma_i(b)}{1} x_i x_j \\
&= \frac{a}{1} \frac{\sigma_i(b)}{1} x_i x_j \\
&= \frac{a}{1} x_i \frac{b}{1} x_j \\
&= \varphi(ax_i) \varphi(bx_j). \tag{5-29}
\end{aligned}$$

Por otro lado, cuando $i > j$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi(ax_i bx_j) &= \varphi(a\sigma_i(b)x_i x_j) \\
&= \varphi(a\sigma_i(b)q_{ij}x_j x_i) \\
&= \frac{a\sigma_i(b)q_{ij}}{1} x_j x_i \\
&= \frac{a}{1} \frac{\sigma_i(b)}{1} \frac{q_{ij}}{1} x_j x_i \\
&= \frac{a}{1} x_i \frac{b}{1} x_j \\
&= \varphi(ax_i) \varphi(bx_j). \tag{5-30}
\end{aligned}$$

Dada la aditividad de φ y la forma de representar los elementos de $\mathcal{O}_{q,\sigma}$, se tiene la propiedad deseada.

(2) Si $r \in R \setminus \{0\}$, entonces $\varphi(r) = \frac{r}{1} \in (S^{-1}R_{q,\bar{\sigma}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n])^*$, es decir, $\varphi(S) \subseteq (S^{-1}R_{q,\bar{\sigma}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n])^*$.

- (3) Si $f = \sum a_t x^t \in \mathcal{O}_{q,\sigma}$ y $\varphi(f) = 0$, entonces $\sum \frac{a_t}{1} x^t = 0$. Usando la representación única de los elementos de $\mathcal{O}_{q,\sigma}$, concluimos que $\frac{a_t}{1} = 0$ para cada $t \in \mathbb{Z}^r \times \mathbb{N}^{n-r}$. Como R es un dominio concluimos que $a_t = 0$, y por tanto, $f = 0$.

Suponiendo que $\varphi(f) = 0$, tenemos que $1 \in R \setminus \{0\} = S$ y $1 \cdot f = 0$. Recíprocamente, si existe $s \in S$ tal que $s \cdot f = 0$, concluimos que $f = 0$, y por tanto, $\varphi(f) = 0$. Así, la propiedad (3) para un anillo de fracciones sobre un sistema multiplicativo S se satisface. Observemos además, que φ es inyectivo.

- (4) Sea $f = \frac{a_1}{s_1} x^{t_1} + \dots + \frac{a_n}{s_n} x^{t_n}$, con $a_i \in R$ y $s_i \in S$ para cada $i = 1, \dots, n$. Según la proposición 5.4.3, existen $s \in S$ y $b_1, \dots, b_n \in R$ tal que $\frac{a_i}{s_i} = \frac{b_i}{s}$ para $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f &= \frac{a_1}{s_1} x^{t_1} + \dots + \frac{a_n}{s_n} x^{t_n} \\ &= \frac{b_1}{s} x^{t_1} + \dots + \frac{b_n}{s} x^{t_n} \\ &= \left(\frac{s}{1}\right)^{-1} \left(\frac{b_1}{1} x^{t_1} + \dots + \frac{b_n}{1} x^{t_n}\right) \\ &= \varphi(s)^{-1} \varphi(b_1 x^{t_1} + \dots + b_n x^{t_n}). \end{aligned} \tag{5-31}$$

Luego, cada elemento f de $\mathcal{O}_{q,\bar{\sigma}} := S^{-1}R_{q,\bar{\sigma}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}, x_{r+1}, \dots, x_n]$ puede escribirse como $f = \varphi(s)^{-1} \varphi(g)$, para algún $s \in S$ y $g \in \mathcal{O}_{q,\bar{\sigma}}$.

Concluimos entonces que $S^{-1}\mathcal{O}_{q,\sigma}$ existe y, $S^{-1}\mathcal{O}_{q,\sigma} \cong \mathcal{O}_{q,\bar{\sigma}}$ como deseábamos.

Para ver la demostración del siguiente resultado, observemos como se extienden los endomorfismos $\lambda \in \text{End}(\mathcal{O}_{q,\sigma})$ a $\bar{\lambda} \in \text{End}(\mathcal{O}_{q,\bar{\sigma}})$.

Lema 5.4.4. Si $\lambda \in \text{End}(\mathcal{O}_{q,\sigma})$, existe $\bar{\lambda} \in \text{End}(\mathcal{O}_{q,\bar{\sigma}})$, es decir, $\bar{\lambda}(\frac{a}{s}) = \frac{a}{s}$, para cada $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$.

Demostración. Consideremos el homomorfismo $\varphi\lambda : \mathcal{O}_{q,\sigma} \rightarrow \mathcal{O}_{q,\bar{\sigma}}$, el cual satisface $\varphi\lambda(S) \subseteq (\mathcal{O}_{q,\bar{\sigma}})^*$. Entonces existe $\bar{\lambda} \in \text{End}(\mathcal{O}_{q,\bar{\sigma}})$ tal que $\varphi\lambda = \bar{\lambda}\varphi$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{q,\sigma} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_{q,\bar{\sigma}} \\ \lambda \downarrow & & \nearrow \bar{\lambda} \\ \mathcal{O}_{q,\sigma} & & \\ \varphi \downarrow & & \\ \mathcal{O}_{q,\bar{\sigma}} & & \end{array} \tag{5-32}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}\left(\frac{a}{s}\right) &= \bar{\lambda}\left(\frac{1}{s} \frac{a}{1}\right) \\
&= \bar{\lambda}\left(\frac{s}{1}\right)^{-1} \bar{\lambda}\left(\frac{a}{1}\right) \\
&= \bar{\lambda}(\varphi(s))^{-1} \bar{\lambda}(\varphi(a)) \\
&= \varphi(\lambda(s))^{-1} \varphi(\lambda(a)) \\
&= \varphi(s)^{-1} \varphi(a) \\
&= \frac{a}{s}.
\end{aligned} \tag{5-33}$$

✦

En los siguientes resultados supondremos que $S^{-1}\mathcal{O}_{q,\sigma}$ es un anillo de polinomios cuánticos torcidos genérico.

Teorema 5.4.5. *Sea $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ un anillo de polinomios cuánticos torcidos genérico sobre un dominio de Ore R . Si $\lambda \in \text{End}(\mathcal{O}_{q,\sigma})$, y existen al menos tres índices i, j, u con $\lambda(x_i), \lambda(x_j), \lambda(x_u)$ no nulos, entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$ tal que $\lambda(x_w) = \lambda_w x_w^\epsilon$ para $w = 1, \dots, n$ y $\epsilon = \pm 1$.*

Demostración. Observemos en primer lugar que si $\lambda(x_i) \neq 0$, entonces $\bar{\lambda}(x_i) \neq 0$, y por tanto, existen al menos tres índices i, j, u , tales que $\bar{\lambda}(x_i), \bar{\lambda}(x_j), \bar{\lambda}(x_u) \neq 0$. En efecto, $0 \neq \varphi(\lambda(x_i)) = \bar{\lambda}(\varphi(x_i)) = \bar{\lambda}(x_i)$. Además, de acuerdo a las hipótesis, $\mathcal{O}_{q,\bar{\sigma}}$ es un anillo de polinomios cuánticos torcidos genérico sobre un anillo de división $S^{-1}R$. Luego existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in S^{-1}R$, tales que, $\bar{\lambda}(x_w) = \lambda_w x_w^\epsilon$ para $w = 1, \dots, n$ y $\epsilon = \pm 1$ (usando 5.3.2).

Supongamos que $\lambda(x_i) = \sum a_t x^t$, entonces $\sum \frac{a_t}{1} x^t = \varphi(\lambda(x_i)) = \bar{\lambda}(\varphi(x_i)) = \bar{\lambda}(x_i) = \lambda_i x_i^\epsilon$.

Dada la representación única de los elementos de $\mathcal{O}_{q,\bar{\sigma}}$, $\frac{a_t}{1} = 0$ si $t \neq (0, 0, \dots, \overbrace{\epsilon}^i, \dots, 0) =: i$ y $\lambda_i = \frac{a_i}{1}$. Por lo tanto, $a_t = 0$ si $t \neq i$, es decir, $\lambda(x_i) = a_i x_i^\epsilon$.

Así, podemos concluir que

$$\lambda(x_w) = \lambda_w x_w^\epsilon, \quad i = 1, \dots, n, \tag{5-34}$$

para $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$ y $\epsilon = \pm 1$.

✦

Corolario 5.4.6. *Si $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ es como en el teorema 5.4.5, y $\lambda \in \text{Aut}(\mathcal{O}_{q,\sigma})$. Entonces, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R^*$, tales que,*

$$\lambda(x_w) = \lambda_w x_w^\epsilon, \tag{5-35}$$

para $w = 1, \dots, n$ y $\epsilon = \pm 1$.

5.5. Ejemplos y consideraciones.

Es importante mencionar que el anillo de polinomios cuánticos torcidos en la definición 5.1.1, puede entenderse como una extensión *PBW* torcida quasi-conmutativa biyectiva sobre el anillo de polinomios torcidos de Laurent $B := R[x_1^{\pm 1}; \theta_1] \cdots [x_r^{\pm 1}; \theta_r]$ (véase [5]), donde

$$\begin{aligned}\theta_i(x_j) &= q_{ij}x_j \text{ para } j < i, \\ \theta_i(r) &= \sigma_i(r) \text{ para cada } r \in R.\end{aligned}$$

Por lo cual, los resultados obtenidos en el capítulo 4 pueden aplicarse directamente a anillos de polinomios cuánticos torcidos bajo las consideraciones anteriores (cuando sea posible). Sin embargo, la importancia del capítulo 5 radica en los siguientes hechos:

- (1) Como línea de trabajo, nos habíamos plantado el seguir las ideas que presenta Artamonov en sus artículos, los cuales consisten esencialmente en la manipulación del anillo de coeficientes, y en las propiedades que pueden extraerse de él.
- (2) Al considerar $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ con coeficientes en B , las reglas de conmutación estarían definidas sobre B^* , que incluye a x_i para $i = 1, \dots, r$, por lo cual, los elementos $u \in N$ podrían ser monomios en las variables invertibles, los cuales no son invariantes bajo la acción de los endomorfismos que consideramos en este trabajo.
- (3) Al considerar $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ como un anillo de polinomios cuánticos torcidos genérico sobre R , es posible que el mismo anillo no sea genérico sobre B . En efecto, si $\mathcal{O}_{q,\sigma}$ es visto como una extensión *PBW* torcida sobre B , entonces $x_i^{-1}\sigma_j(x_i) = \sigma_i^{-1}(q_{ji}) \in N(B)$ ($N(B)$ representa el subgrupo normal de B^* considerado para las reglas de multiplicación en este caso), lo cual nos dice que $q_{ji} \in N(B)$ si $i < r$. Por lo tanto, la extensión no sería genérica sobre B .

Ejemplo 5.5.1. Todos los resultados obtenidos en este capítulo pueden aplicarse a cualquier anillo de polinomios cuánticos genérico Λ , como por ejemplo a la \mathbb{R} -álgebra considerada en el ejemplo 3.2.5.

Finalmente, Al igual que algunos resultados similares del capítulo anterior, el Corolario 5.3.3 también nos recuerda en cierta forma, la conjetura de Dixmier.

Bibliografía

- [1] ALEV, J. ; CHAMARIE, M.: Dérivations et automorphismes de quelques algèbres quantiques. En: *Communications in Algebras* 20 (1992), Nr. 6 [2](#), [26](#)
- [2] ARTAMONOV, V.A.: Quantum polynomial algebras. En: *Journal of Mathematical Sciences* 87 (1997), Nr. 3 [26](#)
- [3] ARTAMONOV, V.A. ; WISBAUER, R: Homological properties of Quantum Polynomials. En: *Algebras and representation Theory* 4 (2001), Nr. 3 [5](#), [26](#), [28](#), [50](#)
- [4] GALLEGO, C. ; LEZAMA, O.: Gröbner bases for ideals of skew *PBW* extensions. En: *Communications in Algebras* 39 (2011), p. 50–75 [33](#)
- [5] GOODEARL, K.R. ; WARFIELD, JR.: *An introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. Cambridge University press, 2004 [57](#), [58](#), [63](#)
- [6] JACOBSON, N.: *Lectures in abstract algebra III. Theory of fields and Galois Theory*. Springer-Verlang, 1975 [19](#)
- [7] KHARCHENKO, V.K.: *Automorphisms and derivations of associative rings*. Edt. Kluwer Academic Publisher, 1991 [6](#)
- [8] LEZAMA, O.: *Cuaderno de álgebra, Álgebra homológica*. 2013 [41](#), [59](#)
- [9] LEZAMA, O. ; FAJARDO, A. ; GALLEGO, C. ; REYES, M.: *Constructive Homological Algebra over skew PBW extensions*. in preparation [3](#), [39](#), [40](#), [42](#), [43](#), [51](#), [59](#)
- [10] LEZAMA, O. ; REYES, M.: Some homological properties of skew *PBW* extensions. En: *to appear in comm. in Algebra*. [2](#), [40](#), [49](#), [51](#)
- [11] TSUCHIMOTO, Y.: Endomorphisms of Weyl algebra and p -curvatures. En: *Osaka J. Math.* 42 (2005) [48](#)
- [12] VAN DEN ESSEN, A.: Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. En: *Progress in Mathematics* 190 (2000) [48](#)