Extensiones Lineales de un Poset y Composiciones de Números Multipartitos

Aída Nelly Pacheco Pulido

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia

2012

Extensiones Lineales de un Poset y Composiciones de Números Multipartitos

Aída Nelly Pacheco Pulido

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Matemáticas

Director:
Doctor Agustín Moreno Cañadas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

A Felipe y Natalia, con todo mi amor.

Agradecimientos

Agradezco al profesor Agustín Moreno Cañadas por la dedicación y empeño con que siempre me acompañó durante el desarrollo del trabajo, también a la Universidad Nacional de Colombia por brindarme la oportunidad de ampliar mi formación académica, lo cual representa un gran avance en mi desempeño profesional.

Resumen

En este trabajo se estudian los conceptos de m-composiciones y m-particiones de un entero dado n; (es decir, matrices $m \times k$ con entradas enteras no negativas, y columnas no nulas, y tal que la suma de todas sus entradas es igual a n); Además, se estudian particiones cuyas partes están en progresión aritmética [7].

Los principales resultados son:

I. Se obtuvieron fórmulas para el número de algunas composiciones restringidas de un número multipartito $\alpha \neq 0$, en vectores fila de una matriz dada $m \times k$, con entradas enteras en progresión aritmética, tales fórmulas se obtienen usando el número de extensiones lineales de un poset dado $\mathcal{P}$ y algunas particiones-$\mathcal{P}$.

II. Se establecieron algunas biyecciones entre el conjunto de trayectorias reticulares de un poset dado $\mathcal{M}_k$ y algunos tipos de composiciones inducidas por dicho poset.

Palabras clave: Composición, extensiones lineales, trayectorias reticulares, número multipartito, conjuntos parcialmente ordenados, particiones-$\mathcal{P}$, números poligonales.

Abstract

In this work, we will study the concepts of m-compositions and m-partitions of a natural number n (i.e., $m \times k$ matrices with nonnegative integer entries, with columns different from the zero vector, and such that the sum of all its entries is equal to n); further studied partitions whose parts are in arithmetic progression.

The main results are:

I. We obtained formulas for the number of some restricted compositions of a multipartite number $\alpha \neq 0$, into row vectors of a given $m \times k$ integer matrix with entries in arithmetic progression, such formulas are obtained using the number of linear extensions of a poset $\mathcal{P}$ and some $\mathcal{P}$-partitions.

II. Were established some bijections between the set of lattice paths of a poset $\mathcal{M}_k$ and some types of compositions induced by said poset.

Keywords: Composition, linear extensions, lattices path, multipartite number, partially ordered sets, $\mathcal{P}$-partitions, polygonal numbers.

Contenido

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo se usará el número de extensiones lineales de un poset dado $\mathcal{P}$ y algunas particiones-$\mathcal{P}$, con el fin de obtener fórmulas para el número de algunas composiciones restringidas de un número multipartito dado, cuyas partes son vectores en los cuales las componentes son enteros en progresión aritmética.

Estas fórmulas nos permiten obtener alguna relación entre el número de composiciones restringidas de un entero positivo n, en partes que pueden ser: una suma de tres números octaedrales o números cuadrados, y el número de composiciones restringidas de n, en partes que pueden ser: una suma de cuatro cubos, con dos de ellos iguales, o congruentes a 1 (mod 6).

Una *partición* de un entero positivo n es una sucesión finita de enteros positivos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ tales que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r$ y $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$ Los λ_i, son llamados las *partes* de la partición [4]. Una *composición*, es una partición en la cual se tiene en cuenta el orden de los sumandos.

Un *número multipartito* es un vector no nulo, con coordenadas enteras no negativas, y una *partición de un número multipartito*, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ es un conjunto de vectores $(\beta_1^i, ..., \beta_r^i)$, $1 \leq i \leq s$ (sin importar el orden), tales que

$$\sum_{i=1}^{s} (\beta_1^i, ..., \beta_r^i) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$$

Si el orden de las partes es tenido en cuenta, llamamos a $(\beta_1^1, ..., \beta_r^1)$,...,$(\beta_1^s, ..., \beta_r^s)$, una *composición* de $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ [4].

La investigación es Teoría de Particiones, ha tenido un amplio recorrido a través de la historia. De hecho, durante varios siglos algunos de los matemáticos más notables han dedicado su trabajo a descubrir el patrón que tiene la forma en que los números enteros pueden ser descompuestos en sumas más pequeñas (particiones), tratando de encontrar una función que permita contar el número de particiones de un número natural n (en este trabajo denotamos la imagen obtenida por la aplicación de esta función a un número natural n, por $p(n)$).

Entre la correspondencia epistolar que Leibniz mantuvo con Bernoulli en el año 1669, aparece en una de sus cartas esta pregunta: Â¿De cuántas maneras podemos escribir un entero $n \geq 1$ como suma de enteros positivos? y, en palabras del propio Leibniz, “parece un problema difícil pero importante”. Más de 70 años después, es un profesor de la universidad de San Petersburgo, Naudé, quien formula esta pregunta a Euler.

De Partitio Numerorum (*Sobre particiones de números*), así tituló Euler el capítulo XVI de su libro *Introductio in Analysin Infinitorum* [13], el cual fue publicado en el año 1748, en él da comienzo a la Teoría de Particiones presentando muchos resultados relacionados con este tema, y proporcionando un método recursivo (funciones generantes) para encontrar el número de particiones de un número entero dado, cabe anotar que este método resulta ser demasiado lento y prácticamente inviable para aplicarlo a números enteros mayores a 200. También enuncia otro teorema, donde prueba que el número de particiones de un entero dado n en partes distintas es igual al número de particiones de n en partes impares, y además probó algunas relaciones entre productos y series infinitas, entre otros resultados.[13]

Posteriormente, en 1918, Hardy y Ramanujan proporcionaron una aproximación para dicha función, mediante una solución asintótica (utilizaron el método del círculo) que se convirtió en una herramienta poderosa para estudiar problemas aditivos de Teoría de números.

En 1937 Rademacher refinó el método del círculo y obtuvo una solución mediante una serie convergente, aunque el método era una gran mejora respecto a la fórmula exacta de Euler, requería sumar infinitamente muchos números que tienen infinitas cifras decimales.

En las siguientes décadas, la investigación en Teoría de Particiones continuó su evolución, siendo uno de los logros más notable el obtenido en el año 2011 por un equipo de matemáticos liderado por Ono, quienes descubrieron que las particiones de un número se comportan esencialmente como fractales; El producto de todo esto, es la obtención de la primera fórmula finita que permite calcular exactamente la cantidad de particiones que posee cualquier número entero. Este resultado ha permitido el desarrollo de una teoría matemática que permite ver las particiones como una súper estructura infinitamente repetida.

Adicionalmente, se agregaron algunas condiciones a las particiones, las cuales hacen referencia al número de partes y/o al tamaño de éstas; a este tipo de particiones se les denominó *particiones restringidas*, en las cuales se utilizan los Polinomios Gaussianos para encontrar su función generante. Estos polinomios tienen una aplicación especial en el área de Estadística, puesto que han servido para resolver algunas preguntas acerca de permutaciones y, recientemente han sido aplicados por Watson (1929) y Stanley (1972) en trabajos de combinatoria [23]

Un personaje muy importante, pero un matemático inusual fue MacMahon, su vida se desarrolló en la carrera militar, pero ésta era alternada con un especial interés por algunos temas de la matemática; en 1895 siendo presidente de The London Mathematical Society, presentó la parte I de su trabajo titulado *Memoir on the theory of the partitions of numbers* [19]. MacMahon hizo un trabajo pionero en Teoría de Invariantes, Teoría de Funciones Simétricas, Teoría de Particiones y combinatoria; en esta última disciplina escribió en dos volúmenes el libro titulado *Combinatory Analisis* (1915-1916) [18], el cual incluye tópicos sobre funciones simétricas, composiciones de números y particiones de números multipartitos, entre otros.

Entre las numerosas publicaciones de MacMahon, cabe mencionar que el artículo sobre Teoría de Particiones titulado *Note on the parity of the number which enumerates the partition of a number* (1921), es una corta descripción de la solución a un problema propuesto por Ramanujan a MacMahon en 1919; en el año de 1923 fueron publicados dos artículos más, *The connexion between the sums of the squares of the divisors and the number of partitions of a given number* y *The theory of modular partitions* que trata sobre una generalización de los Diagramas de Ferrers, utilizando también sus habilidades en computación, para determinar funciones generantes que enumeran cierto tipo de particiones.

La teoría de particiones en sus inicios fue explorada solamente para los números enteros, pero luego fue extendida a los números multipartitos (vectores no nulos, con coordenadas enteras no negativas), acerca de este tipo particular de particiones, MacMahon también presentó varios trabajos, algunos de ellos son: *The enumeration of the partitions of multipartite numbers* (1925) y *Euler's phi function and its connection with multipartite numbers* (1926).

Otros matemáticos que han estudiado el tema de particiones son Wright, quien en 1938 y con la coautoría de Hardy escribieron el libro *An Introduction to the Theory of Numbers*, Wright en [27], obtuvo fórmulas para el número de particiones de el número j-partito $(n_1, n_2, ..., n_j)$ en exactamente n partes y también para el de particiones de el número j-partito $(n_1, n_2, ..., n_j)$ en exactamente n partes diferentes, cuando $j > 1$, extendiendo de esta manera los resultados que habían sido obtenidos por MacMahon en [18], para el caso $j = 1$. Otros trabajos de relevancia en el área escritos por Wright son: el artículo *An Extension of a theorem of Gordon* [29] publicado en 1964, y [26], en particular en este último se estudian particiones restringidas, con k partes.

Carlitz presentó su trabajo sobre particiones de números bipartitos [10], en el año de 1963, en él prueba que para cada bipartito (n, m), el número de particiones sin restricciones de

(n, m) es igual al número de particiones de (n, m), en las cuales cada una de las partes es de una de las formas $(a-1, a), (a, a-1)$ o $(2a, 2a)$; esta identidad fue extendida a particiones multipartitas por Andrews en [3]. Debemos recordar que Carlitz y otros, estudiaron algunas particiones multipartitas restringidas [4], en particular particiones k-partitas de la forma:

$$(n_1, n_2, ..., n_k) = \sum_{j=1}^{r} (m_{1j}, m_{2j}, ..., m_{kj})$$

sujetas a la condición decreciente

$$min(m_{1j}, m_{2j}, ..., m_{kj}) \geq máx(m_{1j+1}, m_{2j+1}, ..., m_{kj+1}).$$

Uno de trabajos más recientes que se debe destacar es *Matrix Compositions* [21], realizado por Munarini, Poneti y Rinaldi (2009), en el que los autores extienden al caso m-dimensional las propiedades combinatorias de las composiciones ordinarias; interpretan combinatorialmente ciertos tipos de m-composiciones, estableciendo biyecciones entre algunas clases de poliminos y m-composiciones.

Por último, se debe recordar el trabajo presentado en 2006 por Grazzini, Munarini y otros colaboradores [15], en el cual, hacen una extensión a los conceptos de composición y partición de un número natural n, definiendo m-composiciones y m-particiones de n; (es decir matrices $m \times k$ con entradas enteras no negativas, con columnas no nulas, y tal que la suma de todas sus entradas es igual a n); además, dieron un algoritmo exhaustivo, para la generación de la clase de m-composiciones de enteros, con m fijado.

En el presente trabajo se usan las ideas mencionadas anteriormente, para obtener biyecciones entre trayectorias reticulares de un poset dado $\mathcal{P}$ y cierto tipo de composiciones de números multipartitos. Estos resultados fueron publicados por la autora y otros colaboradores en [8] y han sido presentados en dos eventos nacionales: ALTENCOA4 en Mayo de 2010 en la ciudad de Tunja y en el XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas en Julio de 2011, en Bucaramanga.

Las particiones-$\mathcal{P}$ y el número de extensiones lineales de un poset dado $\mathcal{P}$, fueron utilizadas por A. M. Cañadas, A. N. Pacheco y A. M. Sora en [9], para obtener fórmulas para el número de composiciones restrigidas de orden superior de un entero positivo.

El trabajo se encuentra distribuído de la siguiente manera: en el capítulo 1 se dan algunas definiciones y notaciones referentes a Posets, trayectorias reticulares, particiones y particiones-$\mathcal{P}$; en el capítulo 2 se habla sobre números multipartitos, y los principales resultados son presentados en el capítulo 3, en la parte final se da la bibliografía utilizada para el desarrollo del trabajo.

Capítulo 2

Definiciones y notación

En este capítulo se presentan algunas de las definiciones básicas y notaciones concernientes a posets, grafos y particiones-$\mathcal{P}$.

2.1. Conjuntos Parcialmente Ordenados

Un *conjunto ordenado* (o *conjunto parcialmente ordenado* o *poset*), es una pareja ordenada de la forma $(\mathcal{P}, \leq)$, de un conjunto $\mathcal{P}$ y una relación binaria $\leq$, contenida en $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ llamada el *orden* (o el *orden parcial*) sobre $\mathcal{P}$, tal que $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva [11]. Los elementos de $\mathcal{P}$ son llamados los *puntos* del conjunto ordenado. Se escribirá $x < y$ para $x \leq y$ y $x \neq y$, en este caso diremos que x *es estrictamente menor que* y.

Un conjunto ordenado se llama *finito (infinito)* si y sólo si el conjunto fundamental es *finito (infinito)*. Usualmente, simplemente se dirá que $\mathcal{P}$ es un *conjunto ordenado*. Donde sea necesario especificar abiertamente la relación de orden, se escribirá $(\mathcal{P}, \leq)$.

Sea $\mathcal{P}$ un conjunto ordenado y sean $x, y \in \mathcal{P}$, se dice que y cubre a x si $x < y$ y $x \leq z < y$ implica $z = x$.

Se puede representar un conjunto finito ordenado $\mathcal{P}$, mediante una configuración de círculos (representando los elementos de $\mathcal{P}$) y líneas que los interconectan (muestran la relación de cubrimiento). A continuación se describe la construcción de un diagrama de este tipo:

(1) A cada punto $x \in \mathcal{P}$, asociarle un punto $p(x)$ del plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, representado por un pequeño círculo con centro en $p(x)$.

(2) Para cada par cubierto $x{<}y$ en $\mathcal{P}$, tomamos un segmento de línea $l(x, y)$ uniendo el círculo de $p(x)$ con el círculo de $p(y)$.

(3) (1) y (2) se llevan a cabo de tal forma que:

   (a) Si $x<y$, entonces $p(x)$ está más abajo que $p(y)$.

   (b) El círculo de $p(z)$ no intersecta el segmento de línea $l(x, y)$ si $z \neq x$ y $z \neq y$.

Una configuración que satisface (1)-(3) es llamada un *diagrama de Hasse* o *diagrama de* $\mathcal{P}$. Por otra parte, un diagrama puede ser utilizado para definir un conjunto finito ordenado.

En la figura que se da a continuación, se presenta un ejemplo para el conjunto ordenado $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$, en el cual $a < b < c < d < e$, y $f < c$.

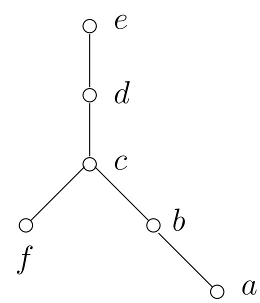

Fig. 1

En general, no es posible representar totalmente un conjunto infinito ordenado con un diagrama, pero si su estructura es suficientemente regular, con frecuencia puede ser sugerido mediante un diagrama.

Por supuesto, el mismo conjunto ordenado puede tener diferentes diagramas. La representación gráfica de posets, es tanto un arte como una ciencia y como veremos, un buen diagrama se convierte en una herramienta útil para el entendimiento y la prueba de teoremas [11].

Un conjunto ordenado C es llamado una *cadena* (o un *conjunto totalmente ordenado* o un *conjunto linealmente ordenado*) si y sólo si para todo $p, q \in C$ se tiene $p \leq q$ o $q \leq p$ (es decir, p y q son comparables). Por otra parte, un conjunto ordenado $\mathcal{P}$ es llamado una *anticadena* si $x \leq y$ en $\mathcal{P}$, sólamente si $x = y$. [11]

Una cadena C en un conjunto ordenado $\mathcal{P}$ se llamará una *cadena maximal* si y sólo si para toda cadena $K \subseteq \mathcal{P}$ con $C \subseteq K$, se tiene que $C = K$.

Si n es un entero positivo, se denota con $\mathbf{n}$ al subposet con la propiedad especial que cualesquiera dos elementos son comparables [24]; entonces un subposet $\mathcal{Q}$ de un poset $\mathcal{P}$ es convexo, si $y \in \mathcal{Q}$ siempre que $x < y < z$ en $\mathcal{P}$ y $x, z \in \mathcal{Q}$.

Si $(\mathcal{P}, \preccurlyeq)$ y $(\mathcal{Q}, \unlhd)$ son posets y f :$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ es una función de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$, entonces f es llamada una *función que preserva el orden* si y sólo si para todo $x, y \in \mathcal{P}$ se tiene que:

$$x \preccurlyeq y \Longrightarrow f(x) \unlhd f(y)$$

Si f :$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ es una biyección que preserva el orden, entre los posets $(\mathcal{P}, \preccurlyeq)$ y $(\mathcal{Q}, \unlhd)$, cuya inversa preserva el orden, se dice que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son isomorfos. En tal caso, se escribe $\mathcal{P} \cong \mathcal{Q}$.

Dados los conjuntos ordenados $(\mathcal{P}, \preccurlyeq)$ y $(\mathcal{Q}, \unlhd)$, entonces f :$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ se llama un *orden de incrustación*, si y sólo si f es inyectiva y para todo $x, y \in \mathcal{P}$ se tiene:

$$x \preccurlyeq y \Longleftrightarrow f(x) \unlhd f(y)$$

Si $(\mathcal{P}, \preccurlyeq)$ y $(\mathcal{Q}, \unlhd)$ son posets, entonces el *producto directo* (o cartesiano) de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, es el poset $(\mathcal{P} \times \mathcal{Q}, \preccurlyeq)$ sobre el conjunto $\{(x,y) : x \in \mathcal{P}, y \in \mathcal{Q}\}$ tal que $(x, y) \preccurlyeq (x', y')$ en $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, si $x \leq x'$ en $\mathcal{P}$ y $y \unlhd y'$ en $\mathcal{Q}$.

El diagrama de Hasse de $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ (cuando $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son finitos), se realiza dibujando el diagrama de Hasse de $\mathcal{P}$, remplazando cada uno de los elementos x de $\mathcal{P}$ por una copia $\mathcal{Q}_x$ de $\mathcal{Q}$ y conectando los elementos correspondientes de $\mathcal{Q}_x$ y $\mathcal{Q}_y$ (con respecto a algún isomorfismo $\mathcal{Q}_x \cong \mathcal{Q}_y$) si x y y están conectados en el diagrama de Hasse de $\mathcal{P}$.

Otra operación que se considera, es el *dual* de un poset $\mathcal{P}$, que corresponde al poset $\mathcal{P}^*$ sobre el mismo conjunto $\mathcal{P}$, pero tal que $x \leq y$ en $\mathcal{P}^*$ si y sólo si $y \leq x$ en $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}^*$ son isomorfos, entonces $\mathcal{P}$ es llamado *auto-dual*.

Un *ideal de orden* de un poset $(\mathcal{P}, \leq)$ es un subconjunto I de $\mathcal{P}$ tal que si $x \in I$ y $y \leq x$, entonces $y \in I$. $J(\mathcal{P})$ representará el conjunto de todos los órdenes ideales de $\mathcal{P}$, ordenados por inclusión. En particular, se define que el ideal de orden o *cono inferior* de $a \in \mathcal{P}$ será $a_\Delta = \{q \in \mathcal{P} : q \leq a\}$. Dualmente, $a^\nabla = \{q \in \mathcal{P} : a \leq q\}$ es el *filtro* o *cono superior* de a [22].

Se observa que anticadenas de k-elementos en $\mathcal{P}$ corresponden a elementos de $J(\mathcal{P})$ que cubren exactamente k-elementos.

Si x, y pertenecen a un poset $\mathcal{P}$, entonces una *cota superior* de x y y es un elemento $z \in \mathcal{P}$, satisfaciendo $x \leq z$ y $y \leq z$. La *mínima cota superior* de x y y es una cota superior z de x, y tal que cada cota superior w de x y y satisface $z \leq w$. Si una mínima cota superior de x y y existe, entonces claramente ésta es única y es denotada $x \vee y$. Cuando exista la *máxima cota inferior* $x \wedge y$, se puede definir de forma dual.

2.2. Retículos y Trayectorias Reticulares

Un *retículo* es un poset L, para el cual cada par de elementos tiene una mínima cota superior y una máxima cota inferior. Se dice que un poset $\mathcal{P}$ tiene un $\hat{0}$, si existe un elemento $\hat{0} \in \mathcal{P}$, tal que $\hat{0} \leq x$ para todo $x \in \mathcal{P}$. De manera similar, se dice que $\mathcal{P}$ tiene un $\hat{1}$, si existe un elemento $\hat{1} \in \mathcal{P}$, tal que $x \leq \hat{1}$ para todo $x \in \mathcal{P}$. Es claro que toda trayectoria finita tiene $\hat{0}$ y $\hat{1}$.

La unión y la intersección de órdenes ideales es de nuevo un orden ideal, ésto se tiene por la propiedad distributiva de la unión y la intersección entre conjuntos, en efecto, se tiene que $J(\mathcal{P})$ un retículo distributivo [24].

Una *trayectoria reticular* finita no negativa en el plano (con pasos unitarios a la derecha y abajo) es una secuencia $L = (v_1, v_2, ..., v_k)$, donde $v_i \in \mathbb{N}^2$ y $v_{i+1} - v_i = (1, 0)$ o $(0, -1)$ [24].

Dado un poset finito $\mathcal{P}$ con $|\mathcal{P}| = n$ en [24], se define como una *extensión de* $\mathcal{P}$ *a un orden total* o *extensión lineal de* $\mathcal{P}$, como una biyección que preserva el orden $\sigma : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{n}$. El número de extensiones de $\mathcal{P}$ a un orden total se denota por $e(\mathcal{P})$. Este valor también corresponde al número de cadenas maximales de $J(\mathcal{P})$.

Se puede identificar una cadena maximal de $J(\mathcal{P})$ con un cierto tipo de trayectoria reticular en el espacio euclidiano, como sigue [24]. Sea $C_1, ..., C_k$ una partición de $\mathcal{P}$ en cadenas. Se define una transformación $\delta : J(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathbb{N}^k$ por:

$$\delta(I) = (|I \cap C_1|, |I \cap C_2|, ..., |I \cap C_k|)$$

Si se toma $\mathbb{N}^k$, con el orden natural del producto, entonces δ es un homomorfismo inyectivo de retículo que preserva la cobertura (y por lo tanto preserva el rango). Así, en particular $J(\mathcal{P})$ es isomorfo a un subretículo de $\mathbb{N}^k$.

Dado $\delta : J(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathbb{N}^k$, como se dio anteriormente, se define $\Gamma_\delta = \bigcup_T cx(\delta(T))$, donde cx denota la envoltura convexa en $\mathbb{R}^k$, T varía sobre todos los intervalos de $J(\mathcal{P})$ que son isomorfos a Ã¡lgebras booleanas. De tal manera que Γ_δ es un subconjunto compacto poliedral de $\mathbb{R}^k$.

Se debe observar entonces que el número de cadenas maximales en $J(\mathcal{P})$, es igual al número de trayectorias reticulares del origen $(0, 0, ..., 0) = \delta(\hat{0})$ a $\delta(\hat{1})$, con pasos de una unidad en la dirección de los ejes de coordenadas. En otras palabras, $e(\mathcal{P})$ es igual al número de maneras de escribir

$$\delta(\hat{1}) = v_1 + v_2 + ... + v_n \tag{2-1}$$

donde cada v_i es un vector con coordenadas unitarias en $\mathbb{R}^k$ y la suma $v_1 + v_2 + ... + v_i \in \Gamma_\delta$ para todo i.

Como un ejemplo, se toma $\mathcal{M} = \mathbf{2} \times \mathbf{n}$ con $C_1 = \{(2,j)/j \in \mathbf{n}\}$, $C_2 = \{(1,j)/j \in \mathbf{n}\}$. Se tiene que $\delta(J(\mathcal{M})) = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq i \leq j \leq n\}$. Para el caso particular en el que $n = 3$, se obtiene la fig. 2.

Por lo tanto, se observa que $e(\mathcal{M})$ es igual al número de trayectorias reticulares desde $(0,0)$ hasta (n,n), con pasos $(1,0)$ y $(0,1)$, los cuales nunca están por encima de la diagonal principal $x = y$ del plano (x,y). Se puede mostrar que $e(\mathbf{2} \times \mathbf{n}) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$. Estos números son llamados *Números de Catalán* [24].

$\mathcal{M}_n$ denota el poset $(\delta(J(\mathbf{2} \times \mathbf{n})), \preccurlyeq)$, donde

$$(i,j) \preceq (i',j') \quad \text{si y sólo si} \quad i \leq i' \text{ y } j \leq j' \tag{2-2}$$

En este caso, $\mathbb{N}$ ha sido dotado con el orden natural.

$\mathcal{M}_3 =$

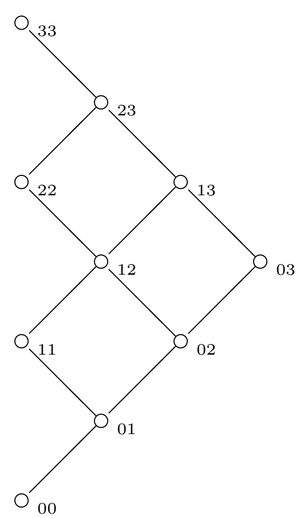

Fig. 2

[1]

[1] *La enumeración de trayectorias reticulares es un tema desarrollado ampliamente. El punto en este trabajo es que ciertos problemas de trayectorias reticulares son equivalentes a determinar $e(\mathcal{P})$, para un poset dado $\mathcal{P}$, o equivalente al problema de encontrar el número de algunas composiciones restringidas de un entero positivo n. Se usará la identidad (2-1), con el fin de obtener el número de algunas composiciones multipartitas (inducidas por un poset $\mathcal{M}_k$), de algún vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$, asociado en una forma adecuada al punto $(k,k) \in \mathcal{M}_k$.*

2.3. Particiones

Una *partición* de un entero positivo n es una sucesión finita de enteros positivos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ tales que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r \quad y \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$$

Los λ_i, son llamados las *partes* de la partición [4].

Algunas veces es necesario, escribir una partición λ, en términos del número de veces que cada parte λ_i ocurre. De forma tal que una partición λ de un entero positivo n se escribe: $\lambda = (1^{f_1} 2^{f_2} 3^{f_3} \cdots)$, donde f_i corresponde a la frecuencia de aparición de cada número.

La función partición $p(n)$ es una aplicación que asigna a cada entero el número de particiones de n si $n \geq 0$. Se tiene que si n es negativo $p(n) = 0$ y $p(0) = 1$.

Por ejemplo, a continuación se muestra que el número 6 tiene 11 particiones ($p(6) = 11$):

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$2 + 1 + 1 + 1 + 1$
$2 + 2 + 1 + 1$
$2 + 2 + 2$
$3 + 1 + 1 + 1$
$3 + 2 + 1$
$3 + 3$
$4 + 1 + 1$
$4 + 2$
$5 + 1$
6

En 1918, MacMahon publicó en Proceedings of London Mathematical Society una tabla que contenía los valores de $p(n)$ hasta $n = 200$, para este último valor MacMahon calculó que $p(200) = 3972999029388$, esto nos indica que hay más de tres billones de formas distintas de escribir 200 como suma de enteros positivos.

Estos resultados no pasaron inadvertidos para Ramanujan, quien entre otras relaciones observó que todos los enteros de la tabla en la progresión aritmética $4, 9, 14, ...$ tenían un número de particiones que era divisible por 5.

En la siguiente tabla se presentan algunos de los valores obtenidos por MacMahon:

Número n	NÂº de Particiones $p(n)$
1	1
2	2
3	3
4	5
5	7
10	42
20	627
30	5604
40	37338
50	204226
60	966467
70	4087968
80	15796476
90	56634173
100	190569292
200	3972999029388

Como se puede observar, el crecimiento de la función $p(n)$ no es exponencial como el de los números de Fibonacci, sino en la forma de $e^{\sqrt{n}}$.

La *función generante* $f(q)$ para la sucesión $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ es la serie de potencias:

$$f(q) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$$

donde las $f(q)$ frecuentemente son funciones analíticas en q.

Las funciones generantes fueron introducidas por Euler en 1748 en *Introductio in Analysin Infinitorum* [13], él utilizó las funciones generantes como una herramienta para descubrir propiedades interesantes de las particiones.

Por ejemplo, Euler probó el resultado de funciones generantes, para el conjunto de particiones con partes impares y el conjunto de particiones con partes distintas de un entero positivo n. El corolario que nos presenta este resultado, es consecuencia del siguiente teorema, cuya prueba se encuentra en [4].

Teorema 2.1. *Sea H un conjunto de enteros positivos y*

$$f(q) = \sum_{n \geq 0} P(''H'', n) q^n,$$

$$f_d(q) = \sum_{n \geq 0} P(''H''(\leq d), n) q^n.$$

Entonces para $|q| \leq 1$

$$\begin{aligned} f(q) &= \prod_{n\in H}(1-q^n)^{-1}, \\ f_d(q) &= \prod_{n\in H}(1-q^{(d+1)n})(1-q^n)^{-1} = \prod_{n\in H}(1+q^n+\cdots+q^{dn}). \end{aligned}$$

En el corolario que se da a continuación, se considera $\mathcal{O}$ como el conjunto de todas las particiones con partes impares y $\mathcal{D}$ como el conjunto de todas las particiones con partes distintas de n.

Corolario 2.2. *(*Euler*) Para todo n, el número de particiones de n en partes distintas, es igual al número de particiones de n en partes impares. Es decir, $P(\mathcal{D}, n) = P(\mathcal{O}, n)$.* □

Demostración. Por Teorema 2.1, se tiene que las funciones generantes para $P(\mathcal{D}, n)$ y $P(\mathcal{O}, n)$, son;

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} P(\mathcal{O}, n)q^n &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^{-1}, \\ \sum_{n\geq 0} P(\mathcal{D}, n)q^n &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n). \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n})}{(1-q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{2n-1})}. \tag{2-3}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n\geq 0} P(\mathcal{O}, n)q^n = \sum_{n\geq 0} P(\mathcal{D}, n)q^n. \tag{2-4}$$

Con esto, se tiene el resultado. □

Una *composición* es una partición en la cual es tenido en cuenta el orden de los sumandos. Por ejemplo, el número 5 tiene 7 particiones, y 16 composiciones.

2.4. Particiones-$\mathcal{P}$

La teoría de particiones-$\mathcal{P}$, la cual es una generalización de las particiones y la teoría de composiciones, fue introducida por Stanley en su tesis doctoral en 1972 [23].

Con el fin de dar una definición de particiones-$\mathcal{P}$ debemos definir conjuntos ordenados etiquetados. Si $(\mathbb{N}, \leq)$ es el conjunto de los números naturales, dotado con su orden natural y $(\mathcal{P}, \trianglelefteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, con $|\mathcal{P}| = p$, entonces un *etiquetamiento* w de $\mathcal{P}$ es una biyección $w : \mathcal{P} \to \{1, 2, ..., p\} \subset \mathbb{N}$.

w es llamado un *etiquetamiento estricto*, si

$$x \trianglelefteq y \quad \text{implica } w(x) \geq w(y).$$

Un conjunto ordenado, junto con un etiquetamiento w es llamado un *Conjunto Ordenado Etiquetado.*

En la siguiente figura, se muestra una partición-$(\mathcal{M}_3, w)$ de 22, en la cual se puede ver que $22 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, donde C_i denota el i-esimo número de Catalán.

En este caso se ha etiquetado $\mathcal{M}_3$ con una aplicación $w : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{P}$, tal que $\mathbb{P} = \{1, 2, ..., 10\}$, $w(i, 3) = 4 - i$, si $0 \leq i \leq 3$, $w(j, 2) = 7 - j$, si $0 \leq j \leq 2$, $w(k, 1) = 9 - k$, si $0 \leq k \leq 1$ y $w(0, 0) = 10$.

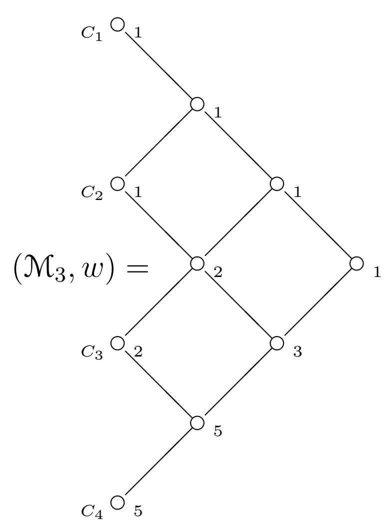

Fig. 3

En este trabajo, $\mathcal{A}(\mathcal{P}, w)$, denota la clase de todas las $(\mathcal{P}, w)$ particiones, se dice que dos etiquetamientos w, w' son equivalentes (denotado $w \sim w'$), si se tiene que $\mathcal{A}(\mathcal{P}, w) = \mathcal{A}(\mathcal{P}, w')$.

La mayoría de los conceptos que se han dado, pueden ser extendidos a posets infinitos. Por ejemplo, la noción de particiones-$\mathcal{P}$ puede ser extendida de tal forma que se cumplan las siguientes condiciones de finitud:

1. Para cada elemento $x \in \mathcal{P}$, existe una partición-$\mathcal{P}$, tal que $\sigma(x) > 0$
2. Sólo hay un número finito de particiones-$\mathcal{P}$ de un entero dado n.

Por lo tanto, si $\mathcal{P}$ es un poset, entonces una aplicación de orden revertido $w : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ es un etiquetamiento de $\mathcal{P}$, si $|\{x \in \mathcal{P} : w(x) > 0\}| < \infty$. En este caso, se tiene que un etiquetamiento w de $\mathcal{P}$ es una partición-$\mathcal{P}$ de n, si $\sum_{x\in\mathcal{P}} w(x) = n$ [4].
[2]

2.5. Algunos resultados sobre Particiones-$\mathcal{P}$

Stanley en su tesis doctoral, incluye las particiones-$\mathcal{P}$ [23], en ella describe la siguiente relación (denotada por a_n), entre el número de algunas particiones-$\mathcal{P}$ de un entero positivo n, y el número $e(\mathcal{P})$ de extensiones de $\mathcal{P}$ a un orden total. En este caso se considera que $|\mathcal{P}| = p$:

$$a_n = \frac{e(\mathcal{P})n^{p-1}(1+o(\frac{1}{n}))}{p!(1-p)!} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Para demostrar esta relación, se requieren algunas definiciones y corolarios previos [23], los cuales se presentan a continuación:

Proposición 2.3. *El número $e(\mathcal{P})$ de biyecciones preservando el orden (o etiquetamiento natural) es igual al número de cadenas maximales en $J(\mathcal{P})$,*

Definición: Si $(\mathcal{P}, w)$ denota un conjunto etiquetado ordenado con elementos $x_1, ...x_p$. Se definen las funciones generantes $U_m(\mathcal{P}, w; x)$ y $U(\mathcal{P}, w; x)$ (denotadas abreviadamente $U_m(\mathcal{P}, w)$ y $U(\mathcal{P}, w)$) por:

$$U_m(\mathcal{P}, w) = \sum_{\sigma\in a(\mathcal{P},w;m)} x^{\sigma(1)+\sigma(2)+...+\sigma(p)}.$$

$$U(\mathcal{P}, w) = \sum_{\sigma\in a(\mathcal{P},w)} x^{\sigma(1)+\sigma(2)+...+\sigma(p)}.$$

Por lo tanto

[2] *Se han considerado sólo los casos para los cuales las particiones-$\mathcal{P}$ son aplicaciones que revierten el orden. El caso en el que dichas particiones conservan el orden, se define de manera dual.*

$$U(\mathcal{P}, w) = \lim_{m\to\infty} U_m(\mathcal{P}, w) = F(\mathcal{P}, w; x, x, ..., x).$$

El coeficiente de x^n en $U_m(\mathcal{P}, w)$ es igual al número de particiones-$(\mathcal{P}, w; m)$ de n. Note que $U_m(\mathcal{P}, w)$ es un polinomio en x.

Si w es un etiquetamiento natural, el símbolo w es omitido de la notación. Por lo tanto, si w es un etiquetamiento natural, se escribirá $F(\mathcal{P})$ para $F(\mathcal{P}, w)$; $U(\mathcal{P})$ para $U(\mathcal{P}, w)$, etc.. Similarmente, si w es una etiquetamiento estricto se escribirá $F(\mathcal{P})$ para $F(\mathcal{P}, w)$; $U(\mathcal{P})$ para $U(\mathcal{P}, w)$, etc.

Proposición 2.4. *Se define*

$$F(\mathcal{P}, w) = \sum \frac{\rho(P_1)\rho(P_2)...\rho(P_{k-1})}{(1-\rho(P_1))...(1-\rho(P_k))}, \tag{2-5}$$

En este caso las suma se hace sobre todas las cadenas $w-$*compatibles* de órdenes ideales de $\mathcal{P}$.

De la anterior proposición, se tienen los siguientes corolarios:

Corolario 2.5. *Se tiene:*

$$U(\mathcal{P}, w; 1) = \tfrac{W(\mathcal{P},w;x)}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^p)},$$

donde $W(\mathcal{P}, w; x)$ es un polinomio en x.

Corolario 2.6. *Con $W(\mathcal{P}, w; x)$, definido por el corolario 2.5, se tiene:*

$$W(\mathcal{P}, w; 1) = e(\mathcal{P}),$$

En particular, si a_n denota el número de particiones-$(\mathcal{P}, w)$ de n, entonces

$$a_n = \tfrac{e(\mathcal{P})n^{p-1}(1+o(\frac{1}{n}))}{p!(1-p)!} \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty.$$

Demostración. Cuando cada $x_i = x$ en (2-5) y cada término de (2-5) se coloca sobre el denominador $(1-x)(1-x^2)...(1-x^p)$, entonces el numerador tendrá un factor de la forma $(1-x^p)$, y por lo tanto se anulan en $x_i = 1$, excepto para aquellos términos donde $k = p$.

Estos términos con $k = p$, aparecerán si y solo si la cadena $\phi = \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset ... \subset \mathcal{P}_k = \mathcal{P}$ es una cadena maximal de órdenes ideales de $\mathcal{P}$, e inversamente cada cadena maximal de órdenes ideales produce un término $\rho(P_1)\rho(P_2)...\rho(P_{k-1})/(1-\rho(P_1))...(1-\rho(P_k))$, con $k = p$.

Cada uno de tales términos, aporta 1 a $W(\mathcal{P}, w; 1)$, así, $W(\mathcal{P}, w; 1)$ es igual al número de cadenas maximales de órdenes ideales de $\mathcal{P}$. Por la proposición (2.3), se tiene que $W(\mathcal{P}, w; 1) = e(\mathcal{P})$.

La fórmula asintótica para a_n se obtiene de técnicas estándar para estimar coeficientes en la expansión de funciones racionales. Todos los polos de $U(\mathcal{P}, w; x)$ están situados en el círculo unitario y el polo con multiplicidad más grande está en $x = 1$, con multiplicidad p. El desarrollo en series de Laurent de $U(\mathcal{P}, w; x)$ alrededor de $x = 1$ tiene la forma

$$U(\mathcal{P}, w; x) = \tfrac{e(\mathcal{P})}{(1-x^p)p!} + o((x-1)^{1-p}),$$

Por lo tanto,

$$a_n = \tfrac{(-1)^n e(\mathcal{P}}{p!}\tbinom{-p}{n}(1 + o(\tfrac{1}{n})) = \tfrac{e(\mathcal{P})n^{p-1}(1+o(\frac{1}{n}))}{p!(1-p)!},$$

Capítulo 3

Números Multipartitos

En este capítulo, se dan algunas definiciones y los resultados más relevantes acerca de números multipartitos, los cuales son la herramienta fundamental para el desarrollo de este trabajo.

Recordemos que un *número multipartito* es un vector no nulo, con coordenadas enteras no negativas, y una *partición de un número multipartito*, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ es un conjunto de vectores $(\beta_1^i, ..., \beta_r^i)$, $1 \leq i \leq s$ (sin importar el orden), tales que

$$\textstyle\sum_{i=1}^{s}(\beta_1^i, ..., \beta_r^i) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$$

(aquí, como se dijo anteriormente, todos los vectores son no nulos y con coordenadas enteras no negativas).

Si el orden de las partes es tenido en cuenta, llamamos a $(\beta_1^1, ..., \beta_r^1)$,...,$(\beta_1^s, ..., \beta_r^s)$, una *composición* de $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ [4].

$P = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r; m)$ denota el número de particiones de $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ con m partes, y $c(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r; m)$ denota el número de composiciones de $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ con m partes.

Como ejemplo, se tiene que $P = (2, 1, 1; 2) = 5$, esto es, hay cinco particiones del vector $(2, 1, 1)$ en dos partes: $(2, 1, 0)(0, 0, 1)$, $(2, 0, 1)(0, 1, 0)$, $(2, 0, 0)(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)(1, 0, 0)$; y el número de composiciones $c(2, 1, 1; 2) = 10$, ya que cada una de las cinco particiones produce dos composiciones.

Se utiliza $P(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$ para denotar el número total de particiones y $c(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$, para denotar el número de composiciones de $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$. En adelante, $c(0, 0, ..., 0) = \frac{1}{2}$.[4]
Notemos que:

$$\sum_{m \geq 1} P = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r; m) = P(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r),$$

y,

$$\sum_{m\geq 1} c(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r; m) = c(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r),$$

3.1. Problema de Simon Newcomb

El problema que vamos a presentar, es un problema que fue resuelto completamente en 1907, por MacMahon y retomado por Andrews en [2], como una aplicación de la teoría de composiciones. El problema fue sugerido por el fallecido profesor Newcomb, este famoso astrónomo se distraía, jugando un solitario, en el cual giraba las cartas de una baraja y las colocaba en un montón mientras los valores estuvieran en orden no decreciente, cuando la carta que giraba tuviera un valor menor que la precedente, empezaba un nuevo montón. Deseaba saber la probabilidad de que se pudiera formar un número dado de montones cuando hubiera girado la baraja completa [17]. La solución de MacMahon a este problema, se basa en funciones generatrices.

Este problema se puede traducir en permutaciones de un multiconjunto, recordemos que un *multiconjunto* se define como una pareja ordenada (M, f), donde M es un conjunto y f es una función de M a los enteros no negativos, tal que para cada $m \in M$, $f(m)$ es llamada la *multiplicidad* de m. Cuando M es un conjunto finito $\{m_1, m_2, ..., m_r\}$ se escribe $(M, f) = \left\{m_1^{f(m_1)} m_2^{f(m_2)} ... m_r^{f(m_r)}\right\}$.

Digámoslo de la siguiente manera: se toma un paquete de cartas de cualquier especificación, se tiene que hay m_1 cartas marcadas con 1, m_2 cartas con 2, m_3 con 3 y así sucesivamente; se barajan y se comienzan a repartir sobre una mesa, siempre y cuando las cartas que aparezcan tengan un valor mayor o igual que la anterior, éstas son colocadas en un mismo paquete, pero si el valor es menor, se inicia un nuevo paquete y así sucesivamente hasta que todas las cartas han sido repartidas.

Se pide encontrar la probabilidad de que al seguir este procedimiento resulten m, o a lo sumo m paquetes [4]. Para esto, se toma $N(m_1, m_2, ..., m_r; n)$ para denotar el número de permutaciones de $1^{m_1} 2^{m_2} ... r^{m_r}$ con exactamente n series (una serie en la permutación $\xi_1 \xi_2 ... \xi_{m_1 + ... + m_r}$ es una subsucesión maximal de la forma $\xi_i \leq \xi_{i+1} \leq \xi_{i+2} \leq ... \xi_{j-1} \leq \xi_j$). Se tendrá la respuesta al problema de Simon Newcomb, si se puede encontrar una expresión para $N(m_1, m_2, ..., m_r; n)$.

Capítulo 4

Principales Resultados

En esta sección se utilizarán cierto tipo de m-composiciones, para construir biyecciones entre conjuntos de trayectorias reticulares en un poset dado $\mathcal{M}_k = (\delta(J(\mathbf{2}\times\mathbf{k})), \preceq)$ y algunos tipos de composiciones inducidas por $\mathcal{M}_k$. En estos casos, se considerará que el vértice $(k,k) \in \mathcal{M}_k$ es una trayectoria reticular.

Mediante la siguiente construcción se puede definir una biyección entre el conjunto de trayectorias reticulares en un poset dado $\mathcal{M}_k$ y algunas composiciones multipartitas.

Se debe observar que el conjunto de vértices de una trayectoria reticular $L = (i_0, j_0)||(k,k) \in \mathcal{M}_k = \delta(J(\mathbf{2}\times\mathbf{k}))$, con $L \neq (k,k)$, se puede construir recursivamente, estableciendo la siguiente igualdad:

$$(i_{t+1}, j_{t+1}) = (i_t + \epsilon_t, j_t + 1 - \epsilon_t), \tag{4-1}$$

$0 \leq t \leq 2k-(i_0+j_0+1)$, donde $\epsilon_t \in \{0,1\}$, $\quad \epsilon_0 = 0$ si $(i_0, j_0) = (0,0)$, $\quad$ y $\quad \epsilon_{2k-(i_0+j_0+1)} = 1$.

Se define la traslación $T : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ por:

$$T(i,j) = (i', j') = (j+1, i+1), \text{ para todo } (i,j) \in \mathbb{N}^2. \tag{4-2}$$

Aplicando esta traslación al conjunto de vértices de la trayectoria reticular, se observa que la imagen $T(\delta(J(\mathbf{2}\times\mathbf{k})))$, dotada con el orden del producto $\preceq$ (ver 2-2), es claramente isomorfa a $\mathcal{M}_k$ para todo $k \geq 1$. Por lo tanto, existe una biyección entre los correspondientes conjuntos de trayectorias reticulares. Se tiene entonces que L es una trayectoria reticular en el poset $\mathcal{M}_k$ si y sólo si su imagen $T(L)$, mediante la traslación definida, es una trayectoria reticular en $T(\delta(J(\mathbf{2}\times\mathbf{k})))$ (asumimos que en $T(L)$ $(i'_{t+1}, j'_{t+1}) = (i'_t + \epsilon_t, j'_t + 1 - \epsilon_t)$, con $\epsilon_{2k'-(i'_0-j'_0+1)} = 0$).

El poset $(T(\delta(J(\mathbf{2}\times\mathbf{k}))), \preceq)$ se denota por $\mathcal{M}'_k$.

A cada trayectoria reticular $T(L) = (i'_0, j'_0)||(k', k') \in \mathcal{M}'_k$, $T(L) \neq (k', k')$, le podemos asociar un sistema de la forma $(F_L, H(L, i'_0, j'_0))$, donde F_L es una aplicación $F_L : V(T(L))\backslash\{(i'_0, j'_0)\} \to \mathbb{N}$ tal que para $1 \leq t \leq 2k' - (i'_0 + j'_0)$:

$$F_L(i'_t, j'_t) = \begin{cases} i'_t - 1 & \text{si } \ \epsilon_{t-1} = 1, \\ j'_t - 1 & \text{si } \ \epsilon_{t-1} = 0. \end{cases}$$

$H(L, i'_0, j'_0)$ es una matriz entera $(2k' - (i'_0 + j'_0)) \times q$ ($q \geq 1$ fijo), dada por la siguiente suma:

$$H(L, i'_0, j'_0) = A(L, i'_0, j'_0) + M(L, i'_0, j'_0)K(L, i'_0, j'_0). \tag{4-3}$$

donde, $A(L, i'_0, j'_0) = (a_{ij})$ es una matriz entera $2k' - (i'_0 + j'_0) \times q$, tal que $a_{ij} = 1$, para todo $1 \leq i \leq 2k' - (i'_0 + j'_0)$ y $1 \leq j \leq q$.

$M(L, i'_0, j'_0) = (m_{rs})$ es una matriz entera $(2k' - (i'_0 + j'_0)) \times (2k' - (i'_0 + j'_0))$, tal que:

$$\begin{aligned} &m_{r1} = F_L(i'_r, j'_r), \quad \text{para todo} \quad 1 \leq r \leq 2k' - (i'_0 + j'_0), \\ &m_{rs} = m_{r(s-1)} \qquad \text{para todo} \quad 2 \leq s \leq 2k' - (i'_0 + j'_0). \end{aligned} \tag{4-4}$$

$K(L, i'_0, j'_0) = (k_{rs})$ es una matriz entera $2k' - (i'_0 + j'_0) \times q$, tal que:

$$\begin{aligned} &k_{11} = n \quad \text{es un entero positivo fijo,} \\ &k_{1s} = k_{r(s-1)} + 1, \quad \text{si} \quad 2 \leq s \leq q, \\ &k_{rs} = 0, \quad \text{en otro caso.} \end{aligned} \tag{4-5}$$

$\alpha(i'_0, j'_0, k_0, n, q)$ denota un vector $1 \times q$, para $n \geq 1$ y con coordenadas que son de la forma:

$$\alpha(i'_0, j'_0, k_0, n, q) = (p^{n+2}_{i'_0 j'_0 k_0}, p^{n+3}_{i'_0 j'_0 k_0}, \ldots, p^{n+q+1}_{i'_0 j'_0 k_0}),$$

donde k_0 es un entero positivo fijo, y para cada $2 \leq t \leq q + 1$ se cumple la expresión:

$$p^{n+t}_{i'_0 j'_0 k_0} = p^{n+t}_{i'_0} + p^{n+t}_{j'_0} + p^{n+t}_{k_0}.$$

En este caso, $p^n_k = \frac{1}{2}[(n - 2)k^2 - (n - 4)k]$ denota el correspondiente *número poligonal* de orden n y rango k.

Una composición $c = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}\}$ de un vector α, se dice que es del tipo $\mathcal{M}((i'_0, j'_0), k_0, k', n, q)$, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ son las filas de una matriz $H(L, r_0, s_0)$. Además se tiene que $\alpha_{m+1} = \alpha(r_0, s_0, k_0, n, q)$ para alguna trayectoria reticular $T(L) = (r_0, s_0)||(k', k')$, donde $T(L) \neq (k', k')$, en un poset $\mathcal{M}'_k$. El vértice $(i'_0, j'_0) \in \mathcal{M}'_k$, también se tiene la relación $(r_0, s_0) \in (i'_0, j'_0)^{\triangledown}$ y k_0, n, q son algunos enteros positivos.

Se tiene entonces que cada elemento α_i de la composición anterior, corresponde a la i-ésima fila de la matriz $H(L, r_0, s_0)$, para todo $1 \leq i \leq 2k' - (r_0 + s_0)$, y además que:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{2k'-(r_0+s_0)} \alpha_i + \alpha(r_0, s_0, k_0, n, q). \tag{4-6}$$

Se considera que un vector de la forma:

$$\alpha(k', k', k_0, n, q) = (p^{n+2}_{k'k'k_0}, p^{n+3}_{k'k'k_0}, \ldots, p^{n+q+1}_{k'k'k_0})$$

define una composición (trivial) de tipo $\mathcal{M}((i'_0, j'_0), k_0, k', n, q)$, para todo $1 \leq j'_0 \leq i'_0 \leq k'$ y k_0 fijo.

Por lo tanto, cualquier composición de tipo $\mathcal{M}((i'_0, j'_0), k_0, k', n, q)$ es generada por una trayectoria reticular de la forma $T(L) = (r, s)||(k', k') \in \mathcal{M}'_k$ a través de un sistema de correspondencia $(F_L, H(L, r, s))$ con $i'_0 \leq r \leq k'$, $j'_0 \leq s < k'$. Se asocia el vector $\alpha(k', k', k_0, n, q)$ a la trayectoria reticular (k', k').

1

2

Se presenta un ejemplo de este tipo de composiciones, tomando en particular los siguientes valores: $k' = 3$, $k_0 = 1$, $q = 4$, y $n = 1$, para obtener las composiciones de tipo $\mathcal{M}((1,1), 1, 3, 1, 4)$ de $\alpha(3, 3, 1, 1, 4) = \begin{bmatrix} 13 & 19 & 25 & 31 \end{bmatrix}$:

$H(L, 3, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$.

$\alpha(3, 2, 1, 1, 4) = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 18 & 22 \end{bmatrix}$.

$\mathcal{M}'((3, 2), 1, 3, 1, 4) = \{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 14 & 18 & 22 \end{bmatrix}\}$.

---

[1] *Observemos que las filas en las matrices $H(L, r, s)$ han sido construidas, de tal forma que sus entradas están en progresión aritmética. En este caso, si $m_{i1} = t$ en la matriz $M(L, r, s)$, entonces la i-ésima fila de $H(L, r, s)$ tiene la forma $[h_{i1}, h_{i1} + t, \ldots, h_{i1} + (q-1)t]$, con $h_{i1} = 1 + nt$, y $n \geq 1$ fijo.*

$\mathcal{M}'_k$ es un poset fijado y $c(\alpha; (i'_0, j'_0), k_0, n, q, \mathcal{M}_k)$ denota el número de composiciones de tipo $\mathcal{M}((i'_0, j'_0), k_0, k', n, q)$ de un número multipartito dado α, siempre que i'_0, j'_0, k_0, n y q sean enteros positivos fijos.

[2] *En adelante, $\overline{\mathcal{M}}((i'_0, j'_0), k_0, k', n, q)$ se utiliza para denotar el conjunto de todas las composiciones de tipo $\mathcal{M}((i'_0, j'_0), k_0, k', n, q)$ de $\alpha(k', k', k_0, n, q)$, donde, i'_0, j'_0, k_0, k', n y q son enteros positivos fijos. Notemos que:*

$$|\overline{\mathcal{M}}((i'_0, j'_0), k_0, k', n, q)| = c(\alpha(k', k', k_0, n, q); (i'_0, j'_0), k_0, n, q, \mathcal{M}_k).$$

$\overline{\mathcal{M}}((3,2),1,3,1,4) = \mathcal{M}'((3,2),1,3,1,4) + \overline{\mathcal{M}}((3,3),1,3,1,4).$

$\overline{\mathcal{M}}((3,3),1,3,1,4) = \{\alpha(3,3,1,1,4)\}.$

$\mathcal{M}'((3,2),1,3,1,4) = \overline{\mathcal{M}}((3,2),1,3,1,4) - \overline{\mathcal{M}}((3,3),1,3,1,4).$

$$H(L,3,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

$\alpha(3,1,1,1,4) = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 14 & 17 \end{bmatrix}$

$\mathcal{M}'((3,1),1,3,1,4) = \{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 11 & 14 & 17 \end{bmatrix}\}.$

$\overline{\mathcal{M}}((3,1),1,3,1,4) = \mathcal{M}'((3,1),1,3,1,4) + \overline{\mathcal{M}}((3,2),1,3,1,4).$

$\mathcal{M}'((3,1),1,3,1,4) = \overline{\mathcal{M}}((3,1),1,3,1,4) - \overline{\mathcal{M}}((3,2),1,3,1,4).$

$$H(L,2,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

$\alpha(2,2,1,1,4) = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$

$\mathcal{M}'((2,2),1,3,1,4) = \{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}\}.$

$\overline{\mathcal{M}}((2,2),1,3,1,4) = \mathcal{M}'((2,2),1,3,1,4) + \overline{\mathcal{M}}((3,2),1,3,1,4).$

$\mathcal{M}'((2,2),1,3,1,4) = \overline{\mathcal{M}}((2,2),1,3,1,4) - \overline{\mathcal{M}}((3,2),1,3,1,4).$

$$H(L_1,2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$H(L_0,2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$\alpha(2,1,1,1,4) = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

$\mathcal{M}'((2,1),1,3,1,4) = \{\{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}\}$,
$\{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}\}\}$.

$\overline{\mathcal{M}}((2,1),1,3,1,4) = \mathcal{M}'((2,1),1,3,1,4) + (\overline{\mathcal{M}}((3,1),1,3,1,4) \cup \overline{\mathcal{M}}((2,2),1,3,1,4))$.

$\mathcal{M}'((2,1),1,3,1,4) = \overline{\mathcal{M}}((2,1),1,3,1,4) - (\overline{\mathcal{M}}((3,1),1,3,1,4) \cup \overline{\mathcal{M}}((2,2),1,3,1,4))$.

$$H(L_1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$H(L_0,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$\alpha(1,1,1,1,4) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

$\mathcal{M}'((1,1),1,3,1,4) =$
$\{\{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\}$,
$\{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\}\}$.

$\overline{\mathcal{M}}((1,1),1,3,1,4) = \mathcal{M}'((1,1),1,3,1,4) + \overline{\mathcal{M}}((2,1),1,3,1,4)$.

$\mathcal{M}'((1,1),1,3,1,4) = \overline{\mathcal{M}}((1,1),1,3,1,4) - \overline{\mathcal{M}}((2,1),1,3,1,4)$.

Por lo tanto, el número de composiciones $|\overline{\mathcal{M}}((1,1),1,3,1,4)| = 8 = C_1 + C_2 + C_3$ que corresponde a la suma de los tres primeros números de Catalán, con $k_0 \geq 1$ fijo.

A continuación se presenta un resultado que fue obtenido utilizando la construcción que se definió previamente y mediante la cual se determinó la existencia de una biyección entre el conjunto de trayectorias reticulares de $\mathcal{M}'_k$ y el conjunto de composiciones de tipo $\mathcal{M}((1,1), k_0, k', n, q)$ con k_0, k', n y q fijo:

Teorema 4.1. *Si k_0, k', q y n son enteros positivos fijos, entonces*

$$|\overline{\mathcal{M}}((1,1), k_0, k', n, q)| = \sum_{j=1}^{k'} e(\boldsymbol{2} \times \boldsymbol{j}) = \sum_{j=1}^{k'} C_j.$$

Demostración. Se debe mostrar que para k_0, k', n y q fijo, alguna composición multipartita no-trivial $c = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}\}$ de tipo $\mathcal{M}((1,1), k_0, k', n, q)$ satisface la siguiente condición:

$$\alpha(k', k', k_0, n, q) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_l + \alpha_{m+1}. \tag{4-7}$$

Para probar esto, se debe observar que los vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ son las filas de una matriz $H(L, i', j')$, donde $i' = 2k' - m - j'$, $j' \leq i'$, $i' \leq k'$, $j < k'$. La imagen de L, definida por la traslación, es una trayectoria reticular de la forma: $T(L) = (i', j')||(k', k') \in \mathcal{M}'_k$.

En tal caso, si $H_g = (h_{1g}, h_{2g}, \ldots, h_{mg})$ denota la g-ésima columna de $H(L, i', j')$, entonces H_g se puede obtener definiendo una partición-$\mathcal{M}'_k$, que se denota por w^{n+g+1}, tal que:

$$w^{n+g+1} : \mathcal{M}'_k \to \mathbb{N}$$

$$w^{n+g+1}(r, s) = p_r^{n+g+1} + p_s^{n+g+1} + p_{k_0}^{n+g+1} \ (k_0 \geq 1, \text{ fijo}).$$

En particular, una trayectoria reticular $L' \in \mathcal{M}'_k$, con un conjunto de vértices de la forma $V(L') = \{(i'_l, j'_l) \mid 0 \leq l \leq 2k' - (i'_0 + j'_0)\}$, $(i'_0, j'_0) = (2k' - m - j', j')$ es etiquetada por una única sucesión de la forma (ver 4-1):

$$p_{i'_0 j'_0 k_0}^{n+g+1} \leq p_{i'_1 j'_1 k_0}^{n+g+1} \leq \cdots \leq p_{i'_t j'_t k_0}^{n+g+1} \leq \cdots \leq p_{k' k' k_0}^{n+g+1}.$$

Por lo tanto, la h_{sg} entrada de la matriz $H(L, i', j')$, está dada por:

$$h_{sg} = h_{s1} + (g-1) F_L(i'_s, j'_s) = p_{i'_s j'_s k_0}^{n+g+1} - p_{i'_{(s-1)} j'_{(s-1)} k_0}^{n+g+1}, \quad \text{para todo } 1 \leq s \leq m,$$

donde, $h_{s1} = 1 + n F_L(i'_s, j'_s)$.

En consecuencia, para todo $1 \leq g \leq q$, se tiene que:

$$\sum_{s=1}^{m} h_{sg} = p_{k' k' k_0}^{n+g+1} - p_{i'_0 j'_0 k_0}^{n+g+1}.$$

Por lo tanto, la g-ésima coordenada del vector $\sum_{l=1}^{m}\alpha_l + \alpha_{m+1}$, tiene la forma:

$$p^{n+g+1}_{k'k'k_0} - p^{n+g+1}_{i'_0 j'_0 k_0} + p^{n+g+1}_{i'_0 j'_0 k_0} = p^{n+g+1}_{k'k'k_0}, \quad \text{para todo } 1 \leq g \leq q. \tag{4-8}$$

La anterior identidad nos permite concluir la fórmula (4-7).

Teniendo en cuenta que existe una biyección entre el conjunto de composiciones de tipo $\mathcal{M}((1,1), k_0, k', n, q)$ y el conjunto de trayectorias reticulares de $\mathcal{M}'_k$, se puede obtener la fórmula para $|\overline{\mathcal{M}}((1,1), k_0, k', n, q)|$.

En la figura 3, se puede observar que:

$$\mathcal{M}'((i,j), k_0, k', n, q) = \overline{\mathcal{M}}((i,j), k_0, k', n, q) - \bigcup_{(r,s)\in(i,j)^{\triangledown}\setminus\{(i,j)\}} \overline{\mathcal{M}}((r,s), k_0, k', n, q).$$

Por lo tanto, los números $|\overline{\mathcal{M}}((r,s), k_0, k', n, q)|$ satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia,:

$|\mathcal{M}'((i,j), k_0, k', n, q)| = |\mathcal{M}'((i, j+1), k_0, k', n, q)| + |\mathcal{M}'((i+1, j), k_0, k', n, q)|$, cuando $(i, j+1)$, $(i+1, j) \in \mathcal{M}'_k$.

Además,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}'((h,h), k_0, k', n, q)| &= |\mathcal{M}'((h+1, h), k_0, k', n, q)|, \quad 1 \leq h < k', \\
|\mathcal{M}'((k', h), k_0, k', n, q)| &= 1, \quad \text{para todo } 1 \leq h \leq k', \\
|\mathcal{M}'((k'-1, k'-1), k_0, k', n, q)| &= 1, \\
|\mathcal{M}'((k'-1, k'-2), k_0, k', n, q)| &= 2.
\end{aligned} \tag{4-9}$$

De las anteriores expresiones se obtiene que el número de composiciones $|\mathcal{M}'((k'-1, h), k_0, k', n, q)| = k' - h$, para todo $1 \leq h \leq k'-1$, y para cada $1 \leq j \leq k'$ fijo. Además se tiene que:

$$\sum_{i=j}^{k'} |\mathcal{M}'((i,j), k_0, k', n, q)| = |\overline{\mathcal{M}}((j,j), k_0, k', n, q)| = C_{k'-j+1}, \tag{4-10}$$

donde C_t es el t-ésimo número de Catalán. El número C_{t-1}, con $t > 1$, corresponde al número total de trayectorias reticulares desde $(k'-t+1, k'-t+1)$ hasta (k', k') en $\mathcal{M}'_k$.

Por lo tanto, la fórmula anterior nos permite concluir:

$$\sum_{j=1}^{k'} \sum_{i=j}^{k'} |\mathcal{M}'((i,j), k_0, k', n, q)| = |\overline{\mathcal{M}}((1,1), k_0, k', n, q)| = \sum_{j=1}^{k'} C_{k'-j+1}, \tag{4-11}$$

y con esta identidad, se tiene el resultado buscado. $\square$

4.0.1. Composiciones de tipo $\mathcal{O}$

En esta sección, se definirán identidades entre el número de composiciones de tipo $\mathcal{M}((1,1),k_0,k',n,q)$ de $\alpha(k',k',k_0,n,q)$ para algunos enteros positivos fijos, k_0,k',n,q (denotado por $|\overline{\mathcal{M}}((1,1),k_0,k',n,q)|$), y el número de composiciones de un entero positivo n en partes que pueden ser, o la suma de tres números octaedrales, o cuadrado de números.

Se tiene que la expresión $\mathcal{O}_n = \frac{n(2n^2+1)}{3}$, con $n \geq 1$ nos da el valor del n-ésimo *número octaedral*, en este trabajo, se toma $\mathcal{O}_{rsk_0}$ para denotar una suma de la forma $\mathcal{O}_r + \mathcal{O}_s + \mathcal{O}_{k_0}$ con k_0 fijo.

Una composición $c = \{z_0, z_1, \ldots, z_t\}$ de un entero positivo n es de *tipo* $\mathcal{O}((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0)$ (r_0, s_0, k_0, k_1 y k_2 son enteros positivos fijos, tales que $s_0 \leq r_0$, $r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$), si y sólo si c satisface las siguientes reglas $(a_{\mathcal{O}})$-$(d_{\mathcal{O}})$:

$(a_{\mathcal{O}})$ $z_0 = \mathcal{O}_{rsk_0}$, para algún $r_0 \leq r \leq k_1$, y $s_0 \leq s \leq k_2$.

$(b_{\mathcal{O}})$

$$n = \mathcal{O}_{rsk_0} + z_1 + \cdots + z_t \tag{4-12}$$

donde $t = (k_1+k_2)-(r+s)$ y para cada $1 \leq i \leq (k_1+k_2)-(r+s)$, $\quad z_i = (m_i^2 + (m_i+1)^2)$, para algún entero positivo m_i.

$(c_{\mathcal{O}})$ Si $S = \{s_0(r,s), s_1(r,s), \ldots, s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r,s)\}$ es el conjunto de sumas parciales dadas en (4-12). Entonces se tiene que $s_0(r,s) = \mathcal{O}_{rsk_0}$ y $s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r,s) = \mathcal{O}_{k_1k_2k_0}$. En efecto, para todo $0 \leq i \leq (k_1+k_2)-(r+s)$, se tiene que, $s_i(r,s) = \mathcal{O}_{pqk_0}$, para algún $r \leq p \leq k_1$, $s \leq q \leq k_2$. En tal caso, $s_{i+1}(r,s) \in \{\mathcal{O}_{p(q+1)k_0}, \mathcal{O}_{(p+1)qk_0}\}$, para todo $0 \leq i \leq (k_1+k_2)-(r+s+1)$.

$(d_{\mathcal{O}})$ $\mathcal{O}_{k_1k_2k_0}$ es una composición (trivial) de tipo $\mathcal{O}((i_0',j_0'),(k_1,k_2),k_0)$ para todo $1 \leq j_0' \leq i_0' \leq k_1$, $1 \leq j_0' \leq k_2$ y k_0 fijo.

El conjunto de todas las composiciones de tipo $\mathcal{O}((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0)$, con $1 \leq s_0 \leq r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$ y $k_0 \geq 1$ se denota por $\mathcal{O}$.

A continuación se presentan las composiciones de tipo $\mathcal{O}((1,1),(3,3),1)$ del número $39 = \mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_3 + 1$:

39,

$13 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2$,

$26 + 2^2 + 3^2$,

$21 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$,

$8 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$,

$8 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2$,

$3 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2$,

$3 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$.

El teorema 4.1, y la biyección descrita entre composiciones de tipo $\mathcal{M}((1,1), k_0, k', n, q)$ y el conjunto de trayectorias reticulares en $\mathcal{M}'_k$ (ver nota 2), nos permiten presentar el siguiente resultado:

Corolario 4.2. *Sea* $c(\mathcal{O}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0); \alpha)$ *el número de composiciones de tipo* $\mathcal{O}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$ *de un número positivo* α*, entonces*

$|\overline{\mathcal{M}}((1,1), k_0, k', n, q)| = c(\mathcal{O}((1,1), (k', k'), m_0); \mathcal{O}_{k'k'm_0})$*, donde* k', k_0, m_0, n *y* q *son enteros positivos fijos.*

Demostración. Se observa que cualquier composición $c = \{z_0, z_1, \ldots, z_t\}$ de tipo $\mathcal{O}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$ satisface la condición:

$$\mathcal{O}_{k_1 k_2 k_0} = \sum_{h=0}^{t} z_h.$$

Por lo tanto, se debe mostrar que existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de composiciones de tipo $\mathcal{O}((1,1), (k', k'), m_0)$ y el conjunto de trayectorias reticulares de $\mathcal{M}'_k$. Para probar esto, se define una partición-$\mathcal{M}'_k$, denotada por $w^{\mathcal{O}} : \mathcal{M}'_k \to \mathbb{N}$, tal que:

$$w^{\mathcal{O}}(i', j') = \mathcal{O}_{i'j'm_0}. \tag{4-13}$$

Para todo $(i', j') \in \mathcal{M}'_k$. En tal caso, una trayectoria reticular $(i'_0, j'_0)||(k', k') \in \mathcal{M}'_k$ (ver 4-1) es etiquetada por una única sucesión de la forma:

$$\mathcal{O}_{i'_0 j'_0 m_0} \leq \mathcal{O}_{(i'_0+\epsilon_0)(j'_0+1-\epsilon_0)m_0} \leq \cdots \leq \mathcal{O}_{(i'_{t-1}+\epsilon_{t-1})(j'_{t-1}+1-\epsilon_{t-1})m_0} \leq \cdots \leq \mathcal{O}_{k'k'm_0}$$

donde, para $0 \leq t \leq 2k' - (i'_0 + j'_0 - 1)$, se tiene que:

$$\mathcal{O}_{(i'_{(t+1)} j'_{(t+1)} k_0)} - \mathcal{O}_{(i'_t j'_t k_0)} = \begin{cases} j'^2_t + j'^2_{t+1} & \text{si } \epsilon_t = 0, \\ i'^2_t + i'^2_{t+1}, & \text{si } \epsilon_t = 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, cada trayectoria reticular $(r, s)||(k', k') \in \mathcal{M}'_k$ define una única composición de tipo $\mathcal{O}((r_0, s_0), (k', k'), m_0)$ de $\mathcal{O}_{k'k'm_0}$, en la cual $r_0 \leq r \leq k'$, $s_0 \leq s < k'$ (en este caso, el vértice (k', k') define la composición trivial $\mathcal{O}_{k'k'm_0}$ de tipo $\mathcal{O}((1,1), (k', k'), m_0)$.

Se tiene por definición, que cada composición de tipo $\mathcal{O}((i', j'), (k', k'), m_0)$ induce una única trayectoria reticular de la forma $(i', j')||(k', k') \in \mathcal{M}'_k$, entonces se puede concluir que, el conjunto de composiciones de tipo $\mathcal{O}((1,1),(k',k'),k_0)$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto de trayectorias reticulares de $\mathcal{M}'_k$.

Por lo tanto, el número $\mathcal{L}$ de tales trayectorias reticulares, es igual al número de composiciones de tipo $\mathcal{O}((1,1),(k',k'),m_0)$. Ya que según el teorema 4.1, $\mathcal{L} = |\overline{\mathcal{M}}((1,1),k_0,k',n,q)|$, se tiene el resultado. $\square$

Se define una aplicación $U : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$, tal que $U(r,s) = (r+s_0-1, s+s_0-1)$, para todo $(r,s) \in \mathbb{N}^2$, donde s_0 es un entero positivo fijo.

Si se toma la biyección definida por (4-2), entonces se puede afirmar que $U(T(\delta(J(\mathbf{2}\times\mathbf{k}))))$ es un encaje de $J(\mathbf{2}\times\mathbf{k})$ en $\mathbb{N}^2$.

El poset $(U(T(\delta(J(\mathbf{2}\times\mathbf{k})))), \preceq)$ definido por la relación descrita en (2-2), se denota por $\mathcal{M}''_k$. Nótese que, $\mathcal{M}'_k \cong \mathcal{M}''_k$ para todo $k \geq 1$. Además, se tiene que L es una trayectoria reticular en $\mathcal{M}'_k$ si y sólo si su imagen $U(L)$ es una trayectoria reticular en $\mathcal{M}''_k$.

El siguiente resultado es una consecuencia del teorema 4.1, corolario 4.2, y el isomorfismo $\mathcal{M}'_k \cong \mathcal{M}''_k$, descrito anteriormente (ver nota 2):

Corolario 4.3. *el número de composiciones*

$$c(\mathcal{O}((s_0,s_0),(k'+s_0-1,k'+s_0-1),m_0);\mathcal{O}_{(k'+s_0-1)(k'+s_0-1)m_0})$$

es igual al número de composiciones de tipo $\mathcal{M}((1,1),k_0,k',n,q)$ *del número* $\alpha(k',k',k_0,n,q)$*, donde* k_0,k',m_0*,* n,q *y* s_0 *son enteros positivos fijos.*

Demostración Los argumentos usados en la prueba del corolario 4.2, con la partición-$\mathcal{M}'_k$, denotada por $u^{\mathcal{O}} : \mathcal{M}'_k \to \mathbb{N}$, tal que:

$$u^{\mathcal{O}}(x,y) = \mathcal{O}_{(x+s_0-1)(y+s_0-1)m_0}, \text{ para todo } (x,y) \in \mathcal{M}'_k,$$

nos permite concluir que $u^{\mathcal{O}}$ induce una biyección entre el conjunto de composiciones de tipo $\mathcal{O}((s_0,s_0),(k'+s_0-1,k'+s_0-1),m_0)$ y el conjunto $\mathcal{L}$ de trayectorias reticulares en $\mathcal{M}'_k$. Puesto que $\mathcal{L} = |\overline{\mathcal{M}}((1,1),k_0,k',n,q)|$, se tiene el resultado. $\square$

4.0.2. Composiciones de tipo $\mathcal{Q}$

En esta sección se definirán biyecciones entre un subconjunto de $\mathcal{O}$ y un conjunto de composiciones restringidas, cuyas partes son: o una suma de cuatro cubos con dos de ellos iguales, o congruentes a 1 (mod 6).

Si q_i denota el i-ésimo cubo, p_i^5 denota el i-ésimo número pentagonal y r_0, s_0, k_0, k_1, k_2 son enteros positivos fijos tales que $s_0 \leq r_0$, $r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$, se dice que una composición

$\lambda = \{y_0, y_1, \ldots, y_t\}$ de un entero positivo n, es de *tipo* $\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$ si satisface las siguientes reglas $(a_{\mathcal{Q}})$-$(d_{\mathcal{Q}})$:

$(a_{\mathcal{Q}})$ $y_0 = \mathcal{Q}_{rsk_0} = q_r + q_s + 2q_{k_0}$, para algún $r_0 \leq r \leq k_1$, $s_0 \leq s \leq k_2$.

$(b_{\mathcal{Q}})$

$$n = \mathcal{Q}_{rsk_0} + y_1 + y_2 + \cdots + y_t, \tag{4-14}$$

donde $t = (k_1 + k_2) - (r + s)$, y para cada $1 \leq i \leq (k_1 + k_2) - (r + s)$, $y_i = \frac{p^5_{2\mu+1} + \mu + 1}{2}$, para algún $\mu \geq 1$. Se observa que, $y_i \equiv 1 \pmod 6$.

$(c_{\mathcal{Q}})$ cada suma parcial $s_0(r, s), s_1(r, s), \ldots, s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r, s)$ dada en (4-14), tiene la forma:

$$s_i(r, s) = \mathcal{Q}_{pqk_0} \quad \text{con} \quad s_{i+1} \in \{\mathcal{Q}_{(p+1)qk_0}, \mathcal{Q}_{p(q+1)k_0}\},\ 0 \leq i \leq (k_1 + k_2) - (r + s + 1)$$

para algunos enteros positivos p, q, $r \leq p \leq k_1$, $s \leq q \leq k_2$. En este caso:

$$s_0(r, s) = \mathcal{Q}_{rsk_0}, \quad \text{y} \quad s_{(k_1+k_2)-(r+s)}(r, s) = \mathcal{Q}_{k_1k_2k_0}.$$

$(d_{\mathcal{Q}})$ $\mathcal{Q}_{k_1k_2k_0}$ es una composición (trivial) de tipo $\mathcal{Q}((i_0', j_0'), (k_1, k_2), k_0)$ para todo $1 \leq j_0' \leq i_0' \leq k_1$, $1 \leq j_0' \leq k_2 \leq k_1$ y $k_0 \geq 1$ fijo.

El conjunto de todas las composiciones de tipo $\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$, con $1 \leq s_0 \leq r_0 \leq k_1$, $s_0 \leq k_2 \leq k_1$ y $k_0 \geq 1$, se denota por $\mathcal{Q}$.

Las siguientes son las ocho composiciones de tipo $\mathcal{Q}((1, 1), (3, 3), 1)$ que tiene el número $56 = q_3 + q_3 + 2q_1$.

56,

$37 + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 37 + 19,$

$30 + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 30 + 7 + 19,$

$11 + \frac{p_5^5+2+1}{2} + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 11 + 19 + 7 + 19,$

$11 + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 11 + 7 + 19 + 19,$

$18 + \frac{p_5^5+2+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 18 + 19 + 19,$

$4 + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 4 + 7 + 19 + 7 + 19,$

$4 + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_3^5+1+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} + \frac{p_5^5+2+1}{2} = 4 + 7 + 7 + 19 + 19.$

El resultado que se da a continuación, acerca de composiciones de tipo $\mathcal{Q}$, es una consecuencia del Teorema 4.1 y los corolarios 4.2 y 4.3.

Corolario 4.4. *Sea* $c(\mathcal{Q}((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0);\alpha)$ *el número de composiciones de tipo* $\mathcal{Q}((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0)$ *de un número positivo* α*, entonces*

$$c(\mathcal{Q}((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0);\mathcal{Q}_{k_1k_2k_0}) = c(\mathcal{O}((r_0-s_0+s_1,s_1),(k_1-s_0+s_1,k_2-s_0+s_1),m_0);\mathcal{O}_{h_1h_2m_0}),$$

donde k_0,k_1,k_2,m_0,r_0,s_0 *y* s_1 *son enteros positivos fijos tales que* $s_0 \le s_1$, $s_0 \le r_0 \le k_1$, $s_0 \le k_2 \le k_1$, $h_1 = k_1 - s_0 + s_1$, *y* $h_2 = k_2 - s_0 + s_1$.

Demostración. Al igual que en la anterior demostración, se observa que cualquier composición $c = \{y_0, y_1, \ldots, y_t\}$ de tipo $\mathcal{Q}((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0)$, satisface la condición:

$$\mathcal{Q}_{k_1k_2k_0} = \sum_{h=0}^{(k_1+k_2)-(r_0+s_0)} y_h.$$

En este caso, si $r_0, s_0, k_1, k_2,$ y k' son enteros positivos fijos, tales que $r_0 \le k_1 \le k'$, $s_0 \le k_2 \le k'$, $k_2 \le k_1$ y $s_0 \le r_0$, entonces $w^{\mathcal{Q}}$ denota la partición-$(k_1,k_2)_\triangle$, tal que :

$w^{\mathcal{Q}} : Q = (k_1,k_2)_\triangle \to \mathbb{N}$, con:

$$w^{\mathcal{Q}}(i',j') = \begin{cases} \mathcal{Q}_{i'j'k_0}, & \text{si } r_0 \le i' \le k_1,\ s_0 \le j' \le k_2. \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

(recordemos que, $(k_1,k_2)_\triangle = \{(i',j') \in \mathcal{M}'_k \mid (i',j') \preceq (k_1,k_2)\}$, $(r_0,s_0)^\triangledown = \{(i',j') \in \mathcal{M}'_k \mid (r_0,s_0) \preceq (i',j')\}$)

Entonces, cualquier trayectoria reticular $L = (i'_0,j'_0)||(k_1,k_2)$ en $Q \cap (r_0,s_0)^\triangledown$, es etiquetada por una única sucesión de la forma:

$$\mathcal{Q}_{i'_0j'_0k_0} \le \mathcal{Q}_{(i'_0+\epsilon_0)(j'_0+1-\epsilon_0)k_0} \le \cdots \le \mathcal{Q}_{(i'_{t-1}+\epsilon_{t-1})(j'_{t-1}+1-\epsilon_{t-1})k_0} \le \cdots \le \mathcal{Q}_{k_1k_2k_0},$$

donde

$$\mathcal{Q}_{(i'_{(t+1)}j'_{(t+1)}k_0)} - \mathcal{Q}_{(i'_tj'_tk_0)} = \begin{cases} \frac{p^5_{(2i'_t+1)}+i'_t+1}{2}, & \text{si } \epsilon_t = 1, \\ \frac{p^5_{(2j'_t+1)}+j'_t+1}{2}, & \text{si } \epsilon_t = 0 \end{cases}$$

si $0 \le t \le (k_1+k_2) - (i'_0+j'_0-1)$.

Luego, cada trayectoria reticular en $Q \cap (r_0,s_0)^\triangledown$ induce una única composición de tipo $\mathcal{Q}((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0)$ (en este caso, se asume que el vértice (k_1,k_2) es una trayectoria reticular que induce la composición trivial $\mathcal{Q}_{k_1k_2k_0}$ de tipo $\mathcal{Q}((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0)$).

Por definición se tiene que cada composición de tipo $\mathcal{Q}((r_0,s_0),(k_1,k_2),k_0)$ determina una única trayectoria reticular en $Q \cap (r_0,s_0)^\triangledown \subseteq \mathcal{M}'_k$. Por lo tanto, se puede ver que existe una biyección entre esta clase de composiciones y el conjunto de trayectorias reticulares en $Q \cap (r_0, s_0)^{\triangledown}$.

Utilizando la partición-$\mathcal{M}'_k$, definida en (4-13) y la biyección que hay entre el conjunto de trayectorias reticulares en $Q \cap (r_0, s_0)^{\triangledown}$ y el conjunto de composiciones de tipo $\mathcal{O}((r_0, s_0), (k_1, k_2), m_0)$, se puede concluir que existe una biyección entre composiciones de tipo $\mathcal{O}((r_0, s_0), (k_1, k_2), m_0)$ y composiciones de tipo $\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0)$.

Finalmente, se define una transformación biyectiva $T' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$, tal que:

$$T'(i, j) = (i - s_0 + s_1, j - s_0 + s_1).$$

Por lo tanto, si $\mathcal{N}_k$ denota el poset $(T'(T(\delta(J(\mathbf{2} \times \mathbf{k})))), \preceq)$, entonces $\mathcal{M}'_k$ es isomorfo a $\mathcal{N}_k$, y el número N de trayectorias reticulares en $T'(Q \cap (r_0, s_0)^{\triangledown}) \subseteq \mathcal{N}_k$ es igual al número de trayectorias reticulares en $Q \cap (r_0, s_0)^{\triangledown} \subseteq \mathcal{M}'_k$.

Puesto que el conjunto de trayectorias reticulares en el poset definido por la traslación $T'(Q \cap (r_0, s_0)^{\triangledown})$ es una correspondencia biyectiva con el conjunto de composiciones de tipo $\mathcal{O}((r_0 - s_0 + s_1, s_1), (k_1 - s_0 + s_1, k_2 - s_0 + s_1), m_0)$ de $\mathcal{O}_{h_1 h_2 m_0}$, y

$$N = c(\mathcal{Q}((r_0, s_0), (k_1, k_2), k_0); \mathcal{Q}_{k_1 k_2 k_0}),$$

entonces, se tiene el resultado. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

5.1. Conclusiones

- La Teoría de Particiones y Composiciones, es un campo en el cual se ha trabajado desde hace muchos años, llegando a nuevos conceptos como el de particiones-$\mathcal{P}$, el cual, junto con el número de extensiones lineales de un poset dado, nos permitieron en el desarrollo de este trabajo, obtener fórmulas para el número de composiciones restringidas de un número multipartito.

- Utilizando un tipo particular de composiciones inducidas por un poset, y el conjunto de trayectorias reticulares de éste, se logró determinar que existe una biyección entre estas dos cantidades.

5.2. Recomendaciones

- Como una ampliación de este trabajo, se puede definir una nueva restricción para las composiciones de un número multipatito y definir una biyección con el conjunto de trayectorias reticulares del poset definido por dichas composiciones.

Bibliografía

[1] G.E. Andrews, *The Theory of Compositions I: The Ordered Factorizations of n and Conjecture of C. Long*, Vol. **18**, Canadian Math. Bull., 1975.

[2] ———, *The Theory of Compositions II: Simon Newcomb's Problem*, Vol. **18**, Utilitas Math., 1975.

[3] ———, *An Extension of Carlitz's Bipartition Identity*, Vol. 63, American Mathematical Society, 1977.

[4] ———, *The Theory of Partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[5] G.E. Andrews and S. T. Soh, *The Theory of Compositions IV: Compositions with Designated Summands*, Vol. **18**, American Mathematical Society, 2000.

[6] G. Birkhoff, *On the combination of subalgebras*, Proc. Cambridge Phil. Soc, 1933.

[7] S. Bouroubi and N.B. Tani, *Integer partitions into arithmetic progressions with an odd common difference*, Integers, 2009.

[8] M. A. O. Angarita A. M. Cañadas A. N. P. Pulido and A. M. S. Arcos, *On Some Linear Extensions of a Poset and Compositions of Multipartite Numbers*, Vol. **18**, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 2010.

[9] A. N. Pacheco Pulido and A. M. Sora Arcos A. M. Cañadas, *On Some Higher Dimensional Compositions*, Vol. **21**, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 2011.

[10] L. Carlitz, *Some Generating Functions*, Duke Math., 1963.

[11] B.A. Davey and H.A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[12] R. Diestel, *Graph Theory*, 3rd ed., Springer, New York, 2005.

[13] L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum*, SAEM Thales y Real Soc. Mat. Esp. Editores: Antonio Durán y Francisco Javier Pérez Fernández, 2000.

[14] B. Gordon, *Two Theorems on Multipartite Partitions*, Journal London Math. Soc., 1963.

[15] E. Munarini E. Grazzini M. Poneti and S. Rinaldi, *m-compositions and m-partitions: exhaustive generation and Gray code*, P.U.M.A., 2006.

[16] G.H. Hardy and S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc., 1918.

[17] D. E. Knuth, *The Art of computer Programming. Sorting and Searching*, Vol. III, Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1987.

[18] P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, 2 vols., Cambridge University Press, Cambridge (Reprinted: Chelsea, New York, 1960), 1915.

[19] ———, *Memoir on the Theory of the Partitions of Numbers*, Part I, Phil Trans., 1897.

[20] A.O. Munagi, *Combinatorics of integer partitions in arithmetic progression*, Integers, 2010.

[21] M. Poneti and S. Rinaldi E. Munarini, *Matrix compositions*, J.I.S, 2009.

[22] B. S. W. Schröder, *Ordered Sets An Introduction*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[23] R. P. Stanley, *Ordered structures and partitions*, Memories of Amer. Math. Soc., Amer. Math. Soc., Providence, 1972.

[24] ———, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[25] Z. Star, *An Asiymptotic Formula in the Theory of Compositions*, Aequationes Math., University of Waterloo, 1975.

[26] E. M. Wright, *Partitions of Multipartite Numbers into k parts*, J. für. Math., 1941.

[27] ———, *Partitions of Multipartite Numbers*, Proc. Amer. Math. Soc., 1956.

[28] ———, *Partitions of Multipartite Numbers into a fixed Number of Parts*, Proc. London Math. Soc., 1961.

[29] ———, *An Extension of a theorem of Gordon*, Glasgow Mathematical, Cambridge University Press, Cambridge, 1965.