UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática

Carlos Mario Aranzazu Muñoz

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2013

Secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática

Carlos Mario Aranzazu Muñoz

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
MSc. Fernando Puerta Ortiz

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2013

Dedicatoria

A: mi esposa Nancy, hermanos y amigos por el apoyo que siempre me han brindado.

Agradecimientos

Agradezco a los empleados, docentes y asesores de la Universidad Nacional por la paciencia que me han tenido y por brindarme de una manera tan desinteresada y profesional sus conocimientos. Igualmente a directivos y compañeros docentes de la Institución Educativa Villa Turbay por su colaboración.

Resumen

Con base en un modelo fundamentado en teorías de aprendizaje, particularmente la del aprendizaje significativo, propuesto por el profesor brasileño Marco Antonio Moreira y al cual llamó unidad de enseñanza potencialmente significativa UEPS, se diseñaron tres de estas unidades para enseñar con cada una de ellas, aspectos relacionados con el tema de la función cuadrática. La primera unidad se dedicó a la enseñanza del concepto de función cuadrática y sus diferentes representaciones algebraicas; con la segunda se abordó la enseñanza de la metodología para representar gráficamente una función cuadrática a partir de sus puntos notables y con la tercera se enseña a aplicar la función cuadrática para resolver problemas de la vida real. Los resultados de la propuesta son satisfactorios pues en las tres unidades se ha logrado capturar el espíritu de la metodología de UEPS para el aprendizaje significativo, donde la principal recomendación está orientada a implementar la propuesta como una prueba piloto en una institución educativa con el fin de evaluar su efectividad.

Palabras clave: aprendizaje significativo, unidades de enseñanza potencialmente significativas, función cuadrática.

Abstract

Based on a model supported by learning theories, particularly the significant learning, proposed by Professor Marco Antonio Moreira from Brazil and which he called potentially significant teaching unit PSTU, were designed three of these units to teach each of them, aspects related to the topic of the quadratic function. The first unit is dedicated to teaching the concept of quadratic function and its various algebraic representations, with the second addressed the teaching methodology to graph a quadratic function from its significant points and the third is taught to apply the quadratic function to solve real life problems. The results from this proposal are satisfactory because in the three units have captured the spirit of the methodology PSTU for meaningful learning, where the main recommendation is directed to implement the proposal as a pilot project in an educational institution in order to evaluate the effectiveness.

Key words: meaningful learning, teaching units potentially significant, quadratic function.

Contenido

Pág.

Resumen V

Abstract V

Lista de figuras IX

Lista de tablas XI

Introducción 1

Capítulo 1. Referente teórico: el aprendizaje significativo y las UEPS 4

1.1 El aprendizaje significativo 4

1.1.1 Diferencias entre el aprendizaje significativo y el aprendizaje mecánico 5

1.1.2 Condiciones requeridas para el aprendizaje significativo 6

1.1.3 Recomendaciones desde la teoría del aprendizaje significativo para la elaboración de materiales didácticos 7

1.2 Las unidades de enseñanza potencialmente significativas –UEPS 7

1.2.1 Secuencia de las UEPS 8

1.2.2 Principios de las UEPS 9

1.3 La función cuadrática 12

Capítulo 2. Secuencia para enseñar el concepto de función cuadrática y sus diferentes representaciones algebraicas 13

2.1 Objetivo 13

2.2 Secuencia 13

2.2.1 Etapa uno. Aspectos a enseñar 13

2.2.2 Etapa dos: Indagación por conocimientos previos 13

2.2.3 Etapa tres. Situación problema inicial 14

2.2.4 Etapa cuatro. Primera presentación del tema 14

2.2.5 Etapa cinco. Segunda presentación del tema y nuevas situaciones problema 15

2.2.6 Etapa seis. Tercera presentación del tema y nuevas situaciones problema 19

2.2.7 Etapa siete. Evaluación del aprendizaje en la UEPS 20

2.2.8 Etapa ocho. Evaluación de la propia UEPS 20

Capítulo 3. UEPS secuencia para enseñar la representación gráfica de la función cuadrática a partir de sus puntos característicos 21

3.1 Objetivo 21

3.2 Secuencia 21

3.2.1 Etapa uno. Aspectos a enseñar 21

3.2.2 Etapa dos: Indagación por conocimientos previos 21

3.2.3 Etapa tres. Situaciones problema iniciales..... 22

3.2.4 Etapa cuatro. Primera presentación del tema 25

3.2.5 Etapa cinco. Segunda presentación del tema y nuevas situaciones problema 30

3.2.6 Etapa seis. Tercera presentación del tema y nuevos ejemplos..... 32

3.2.7 Etapa siete. Evaluación del aprendizaje en la UEPS 39

3.2.8 Etapa ocho. Evaluación de la UEPS..... 39

Capítulo 4. Secuencia para enseñar a resolver problemas de optimización mediante la función cuadrática 40

4.1 Objetivo 40

4.2 Secuencia 40

4.2.1 Etapa uno. Aspectos a enseñar 40

4.2.2 Etapa dos: Indagación por conocimientos previos 41

4.2.3 Etapa tres. Situaciones problema iniciales..... 41

4.2.4 Etapa cuatro. Primera presentación del tema 46

4.2.5 Etapa cinco. Segunda presentación del tema y nuevos ejemplos..... 47

4.2.6 Etapa seis. Tercera presentación del tema y nuevos ejemplos..... 52

4.2.7 Etapa siete. Evaluación del aprendizaje de los estudiantes..... 57

4.2.8 Etapa ocho. Evaluación de la UEPS..... 57

Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones 58

5.1 Conclusiones 58

5.2 Recomendaciones 59

ANEXO 1. Clasificación de la I.E. Villa Turbay en pruebas ICFES 60

ANEXO 2. Fotografías de la práctica “¿Dónde cabe más?” I.E. Villa Turbay 61

Glosario 62

Bibliografía 64

Lista de figuras

Pág.

Figura 1: Mapa conceptual de la UEPS …… 11

Figura 2: Situación problema 1. UEPS 2 …… 22

Figura 3: Situación problema 2. UEPS 2 …… 23

Figura 4: Situación problema 3. UEPS 2…….. 24

Figura 5: Puntos principales de una parábola vertical…… 26

Figura 6: Coordenadas de algunos puntos por donde pasa la gráfica de la función $f(x) = -x^2 - 2$ 28

Figura 7: Trazo de la función $f(x) = -x^2 - 2$ 28

Figura 8: Trazos de parábolas típicas que representan funciones cuadráticas. 32

Figura 9: Puntos característicos de la parábola que representa la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ……..... 35

Figura 10: Trazo de la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 35

Figura 11: Puntos característicos de la parábola que representa la función $f(x) = -x^2 - 2x - 8$ …… 38

Figura 12: Trazo de la gráfica de la función $f(x) = -x^2 - 2x - 8$ …… 38

Figura 13: Primera situación problema. Etapa 3 UEPS 3 …… 42

Figura 14: Segunda situación problema. Etapa 3 UEPS 3 ……. 43

Figura 15: Figura rectangular formada con la cinta de enmascarar adherida a una superficie plana ……. 44

Figura 16: Tarjetas de cartulina ubicadas al interior de la figura rectagular…….. 45

Figura 17: Gráfica de la función cuadrática aplicada en la solución de un problema de optimización ……. 51

Figura 18: Gráfica de la función cuadrática aplicada en la solución de un problema de economía …….. 56

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1. Resultados históricos de las pruebas ICFES de la I.E. Villa Turbay …….. 1

Tabla 2. Diferencias fundamentales entre aprendizaje significativo y memorístico ….. 5

Introducción

Uno de los principales problemas que se advierte en la educación básica y media secundaria es el relacionado con el corto tiempo que un aprendizaje se mantiene en la estructura mental de algunos estudiantes. En el caso de estudiantes de bachillerato esta problemática se traduce además en bajos resultados en las pruebas ICFES, así por ejemplo, en la Institución Educativa Villa Turbay se le planteó a un grupo de 65 estudiantes del grado décimo la pregunta sobre lo que sabían acerca de la función cuadrática, la gran mayoría manifestaron haberlo olvidado o dieron respuestas erróneas.

Por otra parte, los resultados en las pruebas ICFES que ha obtenido la Institución Educativa Villa Turbay a lo largo de sus ocho años de funcionamiento del bachillerato muestran que el desempeño de los alumnos no ha sido el mejor, tal como se puede apreciar en la tabla 1.

Tabla 1. Resultados históricos de las pruebas ICFES de la I.E. Villa Turbay[1]

Año	Categoría
2005	Bajo
2006	****
2007	Bajo
2008	Medio
2009	Bajo
2010	Bajo
2011	Medio
2012	******

Fuente: ICFES

La problemática que afronta la Institución Educativa Villa Turbay, no es ajena a la que se viene presentando en la mayoría de las instituciones de educación pública en Colombia

[1]En el año 2006, la institución no contaba con el grado once y no se conocieron los resultados del año 2012. El informe completo fue extraído de la página del ICFES y se puede observar en el Anexo 1.

donde se presenta un bajo desempeño de los colegios públicos frente a los privados, prueba de ello es que en las Pruebas ICFES 2012 en el listado de los 100 mejores colegios del país no aparece ningún colegio oficial (ICFES, 2012).

Teniendo en cuenta esta problemática, lo que se advierte a primera vista es que los alumnos no están adquiriendo un aprendizaje significativo que les permita ponerse a la par de los estudiantes de colegios privados y mejorar su desempeño en las pruebas del ICFES, de ahí que una de las principales preocupaciones de los docentes de los planteles oficiales debería ser la de lograr en sus alumnos un aprendizaje significativo en oposición al aprendizaje mecánico y memorístico. En el área de las matemáticas, que entre otras cosas, es la que más dificultades en el aprendizaje presenta entre los alumnos, el reto de lograr un aprendizaje significativo es aún mayor, pues la resolución de problemas matemáticos por parte del alumno, requiere en muchos casos la memorización de fórmulas y teoremas.

Ahora bien, la importancia del presente trabajo es que brinda las herramientas para que los docentes puedan lograr un aprendizaje significativo en los alumnos utilizando Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas (UEPS), que es una secuencia didáctica que se compone de ocho pasos, diseñada por el Profesor Marco Antonio Moreira del Instituto de Física de la UFRGS (*Universidade Federal do Rio Grande do Sul*) de Brasil y que está fundamentada en las teorías de aprendizaje significativo.

Las UEPS que se proponen en el presente trabajo están orientadas a la enseñanza de la función cuadrática, no obstante, la bondad del modelo radica en que dicha secuencia didáctica puede ser aplicada para abordar diferentes temas, no sólo en la enseñanza de las matemáticas, sino también de las demás ciencias. En este sentido, el alcance del presente trabajo está encuadrado en presentar una propuesta de enseñanza significativa de la función cuadrática utilizando la secuencia didáctica de aprendizaje significativo basado en UEPS de Moreira, para lo cual se presentan tres secuencias didácticas.

La metodología a emplear estará orientada a aplicar la secuencia de las UEPS propuesta por Moreira al aprendizaje significativo, en los alumnos, de la función cuadrática, para ello se desarrollarán las ocho etapas descritas por el autor.

Para ser consecuentes con lo planteado hasta aquí, el objetivo general de este trabajo es el de diseñar tres unidades de enseñanza potencialmente significativa (UEPS), para la enseñanza de la función cuadrática y como objetivos específicos se plantean tres:
i) Proponer un modelo basado en UEPS para que los estudiantes aprendan significativamente, qué es una función cuadrática y cómo obtener otras representaciones algebraicas equivalentes a partir de su expresión polinómica, ii) Proponer un modelo basado en UEPS para que los estudiantes aprendan significativamente cómo graficar una función cuadrática a partir de una expresión polinómica y iii) Proponer un modelo basado en UEPS para que los estudiantes aprendan significativamente cómo resolver problemas de optimización mediante la función cuadrática.

Para cumplir con los objetivos propuestos, el trabajo ha sido dividido en cinco capítulos. En el primer capítulo se presentan los fundamentos teóricos del aprendizaje significativo y de las UEPS propuestas por Moreira.

En el segundo capítulo se presenta la secuencia para enseñar el concepto de función cuadrática y sus diferentes representaciones algebraicas, en el tercer capítulo, se presenta la secuencia para enseñar la representación gráfica de la función cuadrática a partir de sus puntos característicos, en el cuarto capítulo, se presenta la secuencia para enseñar el procedimiento para resolver un problema de optimización utilizando la función cuadrática todo ello enmarcado en la propuesta de Moreira bajo el enfoque de UEPS.

Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones del trabajo como respuesta a los objetivos planteados.

Capítulo 1. Referente teórico: el aprendizaje significativo y las UEPS

1.1 El aprendizaje significativo

La teoría del aprendizaje significativo fue propuesta por primera vez en 1963 por David P. Ausubel en su obra *The Psychology of Meaningful Verbal Learning* y ampliada en 1968 en su obra *Educational Psychology. A Cognitive View* obra que fue traducida al español en 1976 bajo el título de *Psicología Educativa. Un Punto de Vista Cognoscitivo* (Arroyo, 1992).

Para Ausubel, el aprendizaje significativo se da cuando el sujeto logra relacionar la nueva información recibida con información previamente asimilada, de acuerdo con Zarzar *"un aprendizaje es significativo cuando la información nueva es relacionada de una manera lógica y no arbitraria con información que ya posee el alumno"* (Zarzar, 2000, pág. 28). Sobre las bases de la teoría del aprendizaje significativo, Penchansky y San Martín señalan lo siguiente:

La teoría de Ausubel parte de la base de que en la mente del individuo existe una estructura cognoscitiva a la cual se van incorporando los nuevos conocimientos. Dicha estructura se halla formada por un grupo de esquemas de conocimiento anteriormente adquiridos, organizados como conceptos genéricos.

Ante una nueva situación, el equilibrio existente entre los esquemas que constituyen la estructura cognoscitiva se rompe, produciéndose así una diferenciación entre ellos; sólo cuando la nueva información se asimila a algunos de los esquemas existentes, el equilibrio se restablece, produciéndose el aprendizaje (Penchasky & San Martín, 2004).

En este sentido, el aprendizaje significativo requiere que el profesor se convierta en una especie de intermediario del conocimiento, donde a partir de métodos de enseñanza adaptables y flexibles, es el alumno quien finalmente logra incorporar ese conocimiento a

sus conocimientos previos para que de esta manera se pueda dar un aprendizaje y no una memorización del conocimiento que se le transmite.

1.1.1 Diferencias entre el aprendizaje significativo y el aprendizaje mecánico

El aprendizaje significativo de Ausubel se opone al aprendizaje memorístico, por repetición o mecánico y su teoría está más enfocada a lograr en el alumno una *memorización comprensiva* que permita al sujeto comprender lo aprendido y asegurar su funcionalidad de modo que el conocimiento adquirido pueda adaptarse a nuevas situaciones futuras (Arroyo, Castelo, & Pueyo, 1997). Las diferencias entre uno y otro aprendizaje saltan a la vista, pues como señala Díaz Alcaraz el aprendizaje mecánico presenta dificultad para utilizarlo fuera del contexto en que fue aprendido y se reproduce de la misma manera en que fue memorizado (Díaz, 2002). Las principales diferencias entre estos dos tipos de aprendizaje se presentan en la tabla a continuación.

Tabla 2. Diferencias fundamentales entre aprendizaje significativo y memorístico

APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	APRENDIZAJE MEMORÍSTICO
Incorporación sustantiva, no arbitraria y no verbalista de nuevos conocimientos en la estructura cognitiva.	Incorporación no sustantiva, arbitraria y verbalista de nuevos conocimientos en la estructura cognitiva.
Esfuerzo deliberado por relacionar los nuevos conocimientos con conceptos de nivel superior, ya existentes en la estructura cognitiva.	Ningún esfuerzo por integrar los nuevos conocimientos con conceptos ya existentes en la estructura cognitiva.
Aprendizaje relacionado con experiencias, con hechos u objetos.	Aprendizaje no relacionado con experiencias, con hechos u objetos.
Implicación afectiva para relacionar los nuevos conocimientos con aprendizajes anteriores.	Ninguna implicación afectiva para relacionar los nuevos conocimientos con aprendizajes anteriores.

Fuente: Novak y Gowin citados por Díaz (2002, Pág. 121).

Es importante señalar que a diferencia del aprendizaje mecánico, memorístico o por repetición, el aprendizaje significativo centra su atención en que el conocimiento que recibe el alumno tenga significado y sentido para él, pues de otra manera, lo más

probable es que se limite a memorizar lo aprendido con lo cual el conocimiento adquirido se olvidaría rápidamente y aunque se recordara, el alumno no estaría en capacidad de aplicar dicho conocimiento a la realidad (Méndez, 2006).

1.1.2 Condiciones requeridas para el aprendizaje significativo

De acuerdo con Zarzar Charur para que se pueda dar un aprendizaje significativo es necesario que se presenten cuatro condiciones fundamentales: la motivación del alumno, la comprensión del material, la elaboración activa de esa información y su aplicación a situaciones reales (Zarzar, 2000).

- **La motivación.** Es necesario que el alumno se sienta motivado, lo cual se traduce en un compromiso real con el proceso de aprendizaje, en ganas de estudiar y de aprender.

- **La comprensión.** Se requiere que los alumnos comprendan el material o la información que se está trabajando en clase, en este sentido, es responsabilidad del docente utilizar términos que estén al alcance de los alumnos y tratar de simplificar lo complejo. Cualquier actividad que contribuya a mejorar la comprensión de un tema es válida siempre y cuando cumpla con su objetivo.

- **La participación activa.** Se debe brindar a los alumnos la posibilidad de participar en el estudio, análisis, discusión y elaboración de la información recibida. Si bien la motivación y la comprensión son condiciones importantes, se trata de condiciones previas, necesarias pero no suficientes, pues el aprendizaje significativo se empieza a dar cuando los alumnos asumen un papel activo y empiezan a trabajar sobre la información recibida.

- **La relación con la vida real.** Consiste en la aplicación o utilización de la información recibida, para la solución de problemas reales o posibles, y para la satisfacción de necesidades reales de los alumnos (Zarzar, 2000). Este es quizás uno de los principales reclamos que suelen hacer los alumnos a sus profesores cuando preguntan para qué les sirve en la vida diaria la información que están recibiendo, satisfacer esta condición es a veces difícil lo cual no significa que el docente no pueda hacer una presentación del tema recurriendo a ejemplos de la vida real.

1.1.3 Recomendaciones desde la teoría del aprendizaje significativo para la elaboración de materiales didácticos

Ausubel citado por Arroyo, Castelo y Pueyo formula las siguientes recomendaciones para lograr un aprendizaje significativo:

Estimular un enfoque activo, crítico, reflexivo y analítico por parte del alumno.

Fomentar la presentación de ideas con vocabulario propio y desde la experiencia y estructura mental del alumno.

Seleccionar y orientar los contenidos del área en torno a los principios que posean las cualidades explicitas e integradoras más amplias y generales.

Organizar los contenidos de acuerdo con los principios de diferenciación progresiva y reconciliación integradora (Arroyo, Castelo, & Pueyo, 1997, pág. 13).

1.2 Las unidades de enseñanza potencialmente significativas –UEPS

Las UEPS fueron propuestas por Marco Antonio Moreira quien señala que las UEPS "Son secuencias de enseñanza fundamentadas teóricamente, orientadas al aprendizaje significativo, no mecánico, que pueden estimular la investigación aplicada en enseñanza, es decir la investigación dedicada directamente a la práctica de la enseñanza en el día a día de las clases" (Moreira, 1993, pág. 2). Según el autor, el objetivo de las UEPS está orientado a "desarrollar unidades de enseñanza potencialmente facilitadoras del aprendizaje significativo de temas específicos de conocimiento declarativo y/o procedimental" (Pág. 2).

El trabajo desarrollado por Moreira en torno a las UEPS tiene como sustento teórico la Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel; las teorías de educación de Joseph D. Novak y de D.B. Gowin; la teoría interaccionista social de Lev Vygotsky; la teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud; la teoría de los modelos mentales de Philip

Johnson-Laird y la teoría del aprendizaje significativo crítico desarrollada por él (Moreira, 1993, pág. 2). De acuerdo con el autor la filosofía de las UEPS se resume en que sólo se puede hablar de enseñanza cuando hay aprendizaje y que dicho aprendizaje para ser llamado como tal debe ser significativo, en este sentido, la enseñanza es el medio y el aprendizaje significativo es el fin.

1.2.1 Secuencia de las UEPS

Cada una de las UEPS se compone de ocho pasos. En el primer paso se define lo que se va a enseñar, tanto en lo relacionado con el conocimiento declarativo, como con el conocimiento procedimental.

En el segundo paso, se plantean actividades con las que se busca indagar por los conocimientos previos del estudiante, y que son importantes para el aprendizaje significativo del tema que se va a enseñar.

En el tercer paso, se plantean situaciones problema teniendo en cuenta el conocimiento previo de los estudiantes y que a su vez lo preparen para la introducción del nuevo conocimiento.

En el cuarto paso, el docente presenta el conocimiento mediante una breve exposición oral teniendo en cuenta la diferenciación progresiva, es decir, empezando con aspectos mas generales, siguiendo con aspectos más específicos para después, plantear una actividad colaborativa que sea trabajada en pequeños grupos y socializada en el grupo grande.

En el quinto paso, se desarrolla una nueva presentación retomando los aspectos más generales e importantes del tema pero con un nivel más alto de complejidad con relación a la primera presentación. Se dan nuevos ejemplos y se destacan las semejanzas y diferencias con respecto a las situaciones problema y a los ejemplos ya trabajados, promoviendo con esto la reconciliación integradora.

Después de la segunda presentación, se plantea una actividad colaborativa que lleve a los estudiantes a interactuar socialmente negociando significados, contando con el profesor como mediador.

En el sexto paso, se da continuidad al proceso de diferenciación progresiva retomando las características más relevantes del contenido, pero buscando la reconciliación integradora. Después de la tercera presentación, se proponen nuevas situaciones problema en un nivel más alto de complejidad, para que sean resueltas en actividad colaborativa y socializadas en grupo grande, contando con el profesor como mediador.

En el séptimo paso, se realiza una evaluación de desempeño del estudiante, basada tanto en la evaluación formativa como en la evaluación sumativa.

En el octavo paso, se evalúa la propia UEPS, se considerará exitosa si la evaluación de desempeño de los estudiantes evidencia aprendizaje significativo.

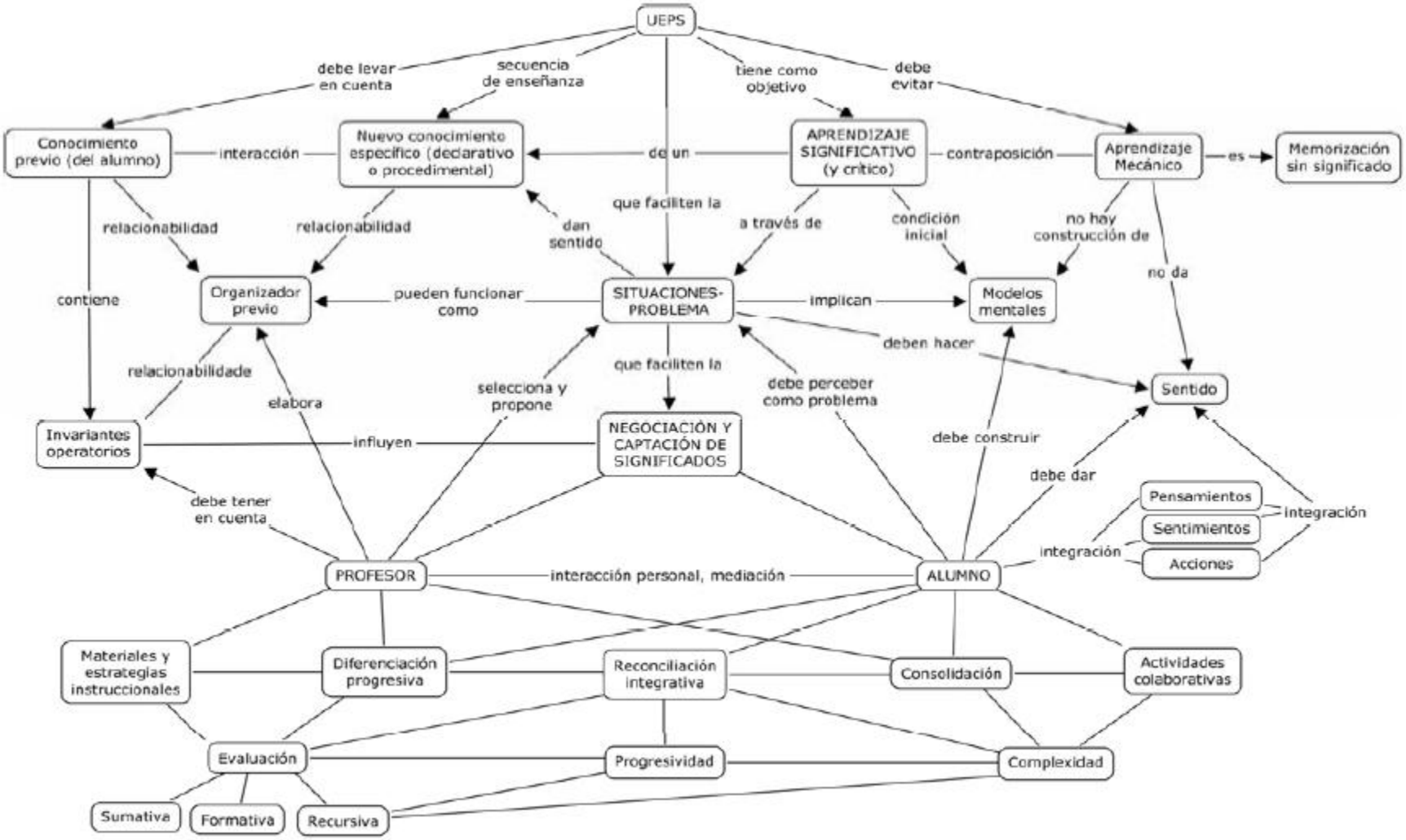
1.2.2 Principios de las UEPS

Haciendo acopio de las premisas planteadas por otros autores y premisas propias, Moreira, señala que las UEPS se fundamentan en los siguientes principios:

- El conocimiento previo es la variable que más influye en el aprendizaje significativo (Ausubel).
- Pensamientos, sentimientos y acciones están integrados en el ser que aprende; esa integración es positiva, constructiva, cuando el aprendizaje es significativo (Novak).
- Es el alumno quien decide si quiere aprender significativamente determinado conocimiento (Ausubel; Gowin).
- Organizadores previos muestran la relación entre nuevos conocimientos y conocimientos previos.
- Las situaciones-problema son las que dan sentido a nuevos conocimientos (Vergnaud); deben ser pensadas para despertar la intencionalidad del alumno para el aprendizaje significativo.

- Situaciones-problema pueden funcionar como organizadores previos.
- Las situaciones-problema deben ser propuestas en niveles crecientes de complejidad (Vergnaud).
- Frente a una nueva situación, el primer paso para resolverla es construir, en la memoria de trabajo, un modelo mental funcional, que es un análogo estructural de esa situación (Johnson-Laird).
- En la organización de la enseñanza, hay que tener en cuenta la diferenciación progresiva, la reconciliación integradora y la consolidación (Ausubel).
- La evaluación del aprendizaje significativo debe ser realizada en términos de búsqueda de evidencias.
- El papel del profesor es el de proveedor de situaciones-problema, cuidadosamente seleccionadas, de organizador de la enseñanza y mediador de la captación de significados de parte del alumno (Vergnaud; Gowin).
- La interacción social y el lenguaje son fundamentales para la captación de significados (Vygotsky).
- Un episodio de enseñanza supone una relación tríadica entre alumno, docente y materiales educativos, cuyo objetivo es llevar el alumno a captar y compartir significados que son aceptados en el contexto de la materia de enseñanza (Gowin).
- El aprendizaje debe ser significativo y crítico, no mecánico (Moreira).
- El aprendizaje significativo crítico es estimulado por la búsqueda de respuestas (cuestionamiento) en lugar de la memorización de respuestas conocidas, por el uso de la diversidad de materiales y estrategias educacionales, por el abandono de la narrativa en favor de una enseñanza centrada en el alumno (Moreira, 1993, pág. 3).

Figura 1: Mapa conceptual de la UEPS



Fuente: (Moreira, 1993, pág. 7)

1.3 La función cuadrática

Se denomina función cuadrática a una función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales dados, con $a \neq 0$ (Clapham, 2004).

La gráfica de una función cuadrática es un tipo especial de curva llamada parábola. Las funciones cuadráticas tienen múltiples usos en la vida real, por ejemplo se pueden emplear para resolver problemas de máximos y mínimos, es decir, aquellos donde se requiere establecer los valores de la variable independiente para los cuales, la variable dependiente alcanza su valor máximo o mínimo.

Ibáñez y García (2005) señalan además la importancia de la función cuadrática en otras áreas diferentes de las matemáticas como por ejemplo la física. Las funciones cuadráticas sirven además para determinar acontecimientos reales como por ejemplo la trayectoria de una pelota lanzada al aire, la forma que toma una cuerda floja sobre la cual se desplaza un equilibrista, el recorrido desde el origen, con respecto al tiempo transcurrido, cuando una partícula es lanzada con una velocidad inicial, entre otras.

En otras disciplinas las funciones cuadráticas también son utilizadas, por ejemplo en Ingeniería Civil para resolver problemas específicos tales como la construcción de puentes colgantes que se encuentran suspendidos en uno de los cables amarrados a dos torres. En Biología las funciones cuadráticas son ampliamente utilizadas para estudiar los efectos nutricionales de los organismos (Ibáñez & García, 2005).

Capítulo 2. Secuencia para enseñar el concepto de función cuadrática y sus diferentes representaciones algebraicas

2.1 Objetivo

Mediante esta secuencia se enseñará el concepto de función cuadrática, y sus distintas formas de representación algebraica.

2.2 Secuencia

2.2.1 Etapa uno. Aspectos a enseñar

a) Declarativos: Qué es una función cuadrática y formas algebraicas equivalentes de representarla.
b) Procedimentales**:** Transformar una expresión algebraica de una función cuadrática, en otras expresiones equivalentes.

2.2.2 Etapa dos: Indagación por conocimientos previos

Se presenta a los estudiantes el siguiente cuestionario para que sea respondido en forma individual.

Cuestionario

1. ¿Qué es una función matemática?
2. Escribir una función en forma polinomial de segundo grado con una variable.
3. Dadas las siguientes expresiones algebraicas, establecer cuáles de ellas son equivalentes.

(a) $x.x$

(b) $x^2 - 16$

(c) $(x+4)(x-4)$

(d) $x^2 + 2x$

(e) $x(x+2)$

(f) $(x+1)^2$

(g) $(x+1)(x+1)$

(h) x^2

(i) $(x+3)(x+1)$

(j) $(x-(-3))(x-(-1))$

4. Hallar una expresión equivalente por el método de completación de cuadrados para cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

(a) $x^2 + 4x + 5$

(b) $-2x^2 + 8x - 3$

Tiempo asignado para el trabajo: 40 minutos

2.2.3 Etapa tres. Situación problema inicial

Con base en la función polinómica de segundo grado: $f(x) = ax^2 + bx + c$, el docente formulará las siguientes preguntas:

a) ¿Qué pasaría con el grado del polinomio si a tomara el valor de cero?

b) ¿Qué pasaría con el grado del polinomio si b tomara el valor de cero?

c) ¿Qué pasaría con el grado del polinomio si c tomara el valor de cero?

Tiempo asignado para el trabajo: 15 minutos

2.2.4 Etapa cuatro. Primera presentación del tema

El docente iniciará la clase exponiendo lo siguiente:

Una función cuadrática es aquella que puede escribirse como una forma polinómica de segundo grado, es decir como: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Donde a, b y c, son constantes reales, pero a debe ser distinto de cero; b y c no tienen restricciones. El término ax^2 se denomina término cuadrático, El término bx se denomina término lineal y el término c, se denomina término independiente.

Luego, el docente solicita a los estudiantes que den ejemplos de este tipo de funciones.

A continuación, el docente propondrá un taller como el siguiente, para resolver en grupos de 3 estudiantes.

Taller para resolver en equipos de 3 estudiantes:

Para las siguientes funciones cuadráticas, identificar los parámetros a, b y c

(a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

(b) $g(x) = 2x^2 - 1$

(c) $h(x) = x^2$

(d) $s(x) = -x^2 + 4x$

(e) $m(x) = 1 + x^2 + 7x$

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 10 minutos
Tiempo asignado para la socialización en el grupo grande: 15 minutos.

2.2.5 Etapa cinco. Segunda presentación del tema y nuevas situaciones problema

El docente propondrá a los estudiantes las siguientes situaciones problema.

Primera situación problema: Establecer, si es posible, los números reales a y b tales que $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$, den como resultado el trinomio del lado izquierdo; de no ser posible explicar la razón.

(a) $f(x) = x^2+2x+1$ $\qquad$ $f(x) = (x+a)(x+b)$

(b) $g(x) = x^2-1$ $\qquad$ $g(x) = (x+a)(x+b)$

(c) $h(x) = x^2+1$ $\qquad$ $h(x) = (x+a)(x+b)$

(d) $m(x) = x^2+2x+3$ $\qquad$ $m(x) = (x+a)(x+b)$

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 25 minutos
Tiempo asignado para la socialización: 40 minutos.

Intervención del docente: El docente iniciará la clase exponiendo lo siguiente:

A la expresión $f(x) = (x+1)(x+1)$, se le llama: forma factorizada de la función $f(x) = x^2+2x+1$ y, al valor (-1), se le llama raíz ó cero de dicha función; pues cuando la función se evalúa en este valor, ésta se hace cero.

El docente agregará que la forma (general) factorizada de una función cuadrática es: $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$. Nos centraremos en el caso donde r_1 y r_2 son constantes (reales) y reciben el nombre de raíces de la función ó ceros de la función; a es el coeficiente del término cuadrático.

Expresiones como $h(x) = x^2+1$, no se pueden expresar de la forma factorizada con raíces reales, pues se trata de un polinomio irreducible, es decir no se puede expresar como un producto de dos expresiones polinómicas de coeficientes reales de grado uno y por lo tanto no tiene raíces reales.

- **Segunda situación problema:**

(a) ¿Siempre será posible pasar una función cuadrática de forma polinómica, a forma factorizada con raíces reales? ¿Por qué si? , ¿Por qué no?
(b) ¿En qué casos será posible, pasar una función cuadrática de forma polinómica a forma factorizada?
(c) ¿Qué procedimiento(s) algebraico(s), permitirá(n) pasar de una forma polinómica a forma factorizada?

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 30 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 30 minutos.

- **Tercera situación problema:**

¿Siempre será posible pasar una función cuadrática de forma factorizada, a forma polinómica? ¿Por qué si? , ¿Por qué no?

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 20 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 20 minutos

- **Cuarta situación problema:**

¿En qué se parecen y en qué se diferencian cada una de las siguientes parejas de funciones cuadráticas?

$f(x) = x^2 + 2x + 1$	$f(x) = (x+1)^2$
$g(x) = x^2 + 3$	$g(x) = (x-0)^2 + 3$
$h(x) = 2x^2 + 3x + 4$	$h(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 15 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 10 minutos.

Intervención del docente: El docente iniciará la clase exponiendo lo siguiente:

La función cuadrática: $f(x) = 2(x-0)^2+1,$ es la forma canónica de la función $f(x) = 2x^2+1$, y al punto de coordenadas $(0,1)$, se le llama vértice de la función.

El docente agregará que la forma canónica de una función cuadrática es:

$f(x) = a(x-x_v)^2+y_v$. Donde (x_v, y_v), son las coordenadas de un punto característico de una función cuadrática llamado vértice y a, es el coeficiente del término cuadrático.

- **Quinta situación problema:** El docente propondrá a los estudiantes la siguiente situación problema.

(a)¿Siempre será posible pasar una función cuadrática de forma polinómica, a forma canónica? ¿Por qué si? , ¿Por qué no?
(b)¿Qué procedimiento(s) algebraico(s), permitirá(n) pasar una función cuadrática de forma polinómica a forma canónica?

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 20 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 20 minutos

- **Sexta situación problema:**

¿Siempre será posible pasar una función cuadrática de forma canónica, a forma polinómica? ¿Por qué si? , ¿Por qué no?

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 15 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 15 minutos

Taller para resolver por equipos:
Expresar las siguientes funciones polinómicas, en su forma canónica.

(a) $f(x) = x^2+2x-15$

(b) $g(x) = x^2+2x+3$ (Sugerencia aplicar el método de completación de cuadrados)

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 20 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 20 minutos

2.2.6 Etapa seis. Tercera presentación del tema y nuevas situaciones problema

Nuevas situaciones problema:
Dadas las siguientes dos funciones cuadráticas, expresadas de tres formas diferentes.

(a) $f(x) = x^2 + 10x + 25$ $\quad f(x) = (x+5)(x+5)$ $\quad f(x) = (x+5)^2$

(b) $g(x) = x^2 + 5x + 6$ $\quad g(x) = (x+3)(x+2)$ $\quad g(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

Establecer para cada una de ellas:

(a) Las raíces o ceros de la función
(b) El vértice de la función

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 20 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 20 minutos

- **Situación problema:**

Analizar las siguientes afirmaciones y argumentar mediante ejemplos, si son ciertas o falsas.

a) Solo cuando una función cuadrática tenga raíces reales, se puede pasar de la forma polinómica a la forma factorizada, pero siempre se puede pasar de la forma factorizada a la forma polinómica.
b) Siempre será posible pasar de la forma polinómica a la forma canónica y viceversa.
c) Siempre será posible pasar de la forma factorizada a la forma canónica, pero no siempre en sentido contrario.

d) Pasar de la forma polinómica a la forma canónica, siempre será posible, pero en algunos casos es necesario aplicar el método de factorización llamado completación de cuadrados.

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 30 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 30 minutos

2.2.7 Etapa siete. Evaluación del aprendizaje en la UEPS

Evaluación individual:

1) ¿Qué es una función cuadrática?
2) Mencionar tres formas algebraicas para representar una función cuadrática.
3) Dada la siguiente función cuadrática:

$f(x) = x^2 + 3x + 2$

(a) Expresarla en forma factorizada.
(b) Expresarla en forma canónica.

Tiempo asignado: 45 minutos

2.2.8 Etapa ocho. Evaluación de la propia UEPS

Evidencias de aprendizaje significativo por parte del estudiante y que debe observar el docente:

¿Sabe explicar qué es una función cuadrática y sus características?
¿Comprende y explica las diferentes expresiones de una misma función cuadrática?
¿Sustenta por qué algunas funciones cuadráticas no se pueden expresar en forma factorizada?
¿Al observar la expresión algebraica de una función cuadrática, argumenta si tiene o no raíces reales y en caso de tenerlas, sabe cómo establecerlas?
¿Al observar la expresión algebraica de una función cuadrática, sabe cómo identificar su vértice?

Capítulo 3. UEPS secuencia para enseñar la representación gráfica de la función cuadrática a partir de sus puntos característicos

3.1 Objetivo

Mediante esta UEPS se enseñará a graficar cualquier función cuadrática, a partir de sus puntos característicos.

3.2 Secuencia

3.2.1 Etapa uno. Aspectos a enseñar

El docente dará a conocer los conceptos que se van a enseñar en esta unidad; ellos son:

a) Declarativos**:**
Puntos característicos de la gráfica de una función cuadrática y su definición.

b) Procedimentales**:**
Trazar en el plano cartesiano la gráfica de una función cuadrática estableciendo los puntos principales de la parábola.

3.2.2 Etapa dos: Indagación por conocimientos previos

Se presenta a los estudiantes el siguiente cuestionario para que sea respondido en forma individual.

Cuestionario

1. ¿Qué es una función cuadrática?
2. Escribir la forma polinomial general de una función cuadrática, presentar un ejemplo.
3. Dada la función cuadrática $f(x) = x^2 + 3x + 2$, hallar sus raíces reales.
4. ¿Qué es una función par y qué característica tiene su gráfica?
5. Dada la función cuadrática $f(x) = x^2$, establecer si es par o impar.

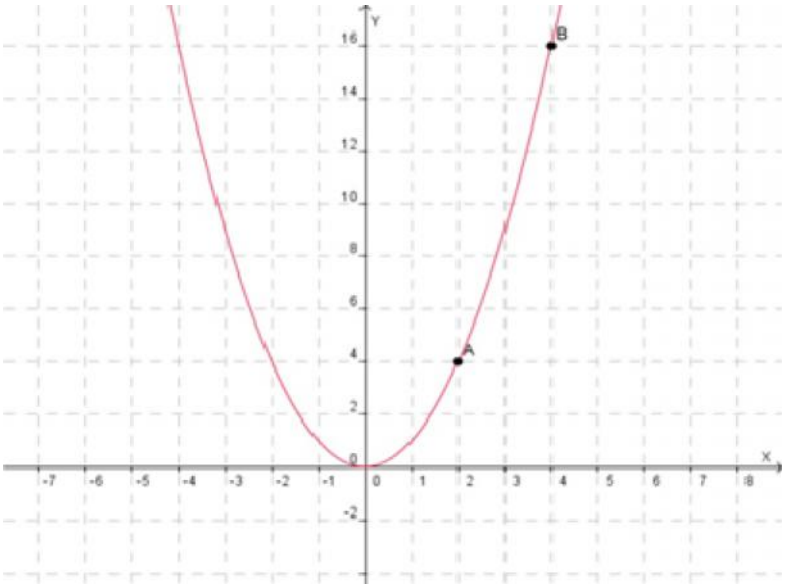
Tiempo asignado para el trabajo: 40 minutos

3.2.3 Etapa tres. Situaciones problema iniciales

Situación problema uno.

Dada la siguiente representación gráfica (figura 2).

Figura 2: Situación problema 1. UEPS 2



a) Establecer la ecuación del eje de simetría.

b) Identificar las coordenadas de los puntos A y B y las de sus correspondientes puntos simétricos.

c) Establecer si la función tiene raíces reales, en caso afirmativo, identificar cuántas y cuáles son esas raíces.

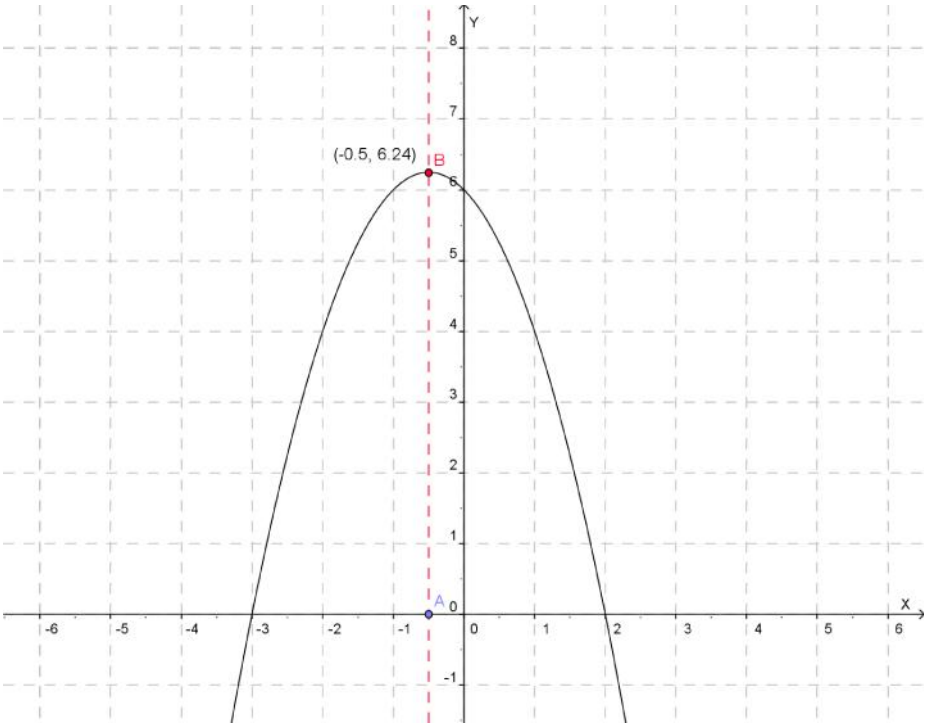
d) ¿Cuáles son las coordenadas del punto intercepto con el eje y?

e) ¿La función alcanza un punto máximo o un punto mínimo?, establecer sus coordenadas.

Situación problema dos.

Dada la siguiente representación gráfica (figura 3).

Figura 3: Situación problema 2. UEPS 2



Establecer:

a) Cuál es la ecuación del eje de simetría.

b) Establecer si la función tiene raíces reales, en caso afirmativo, identificar cuántas y cuáles son esas raíces.

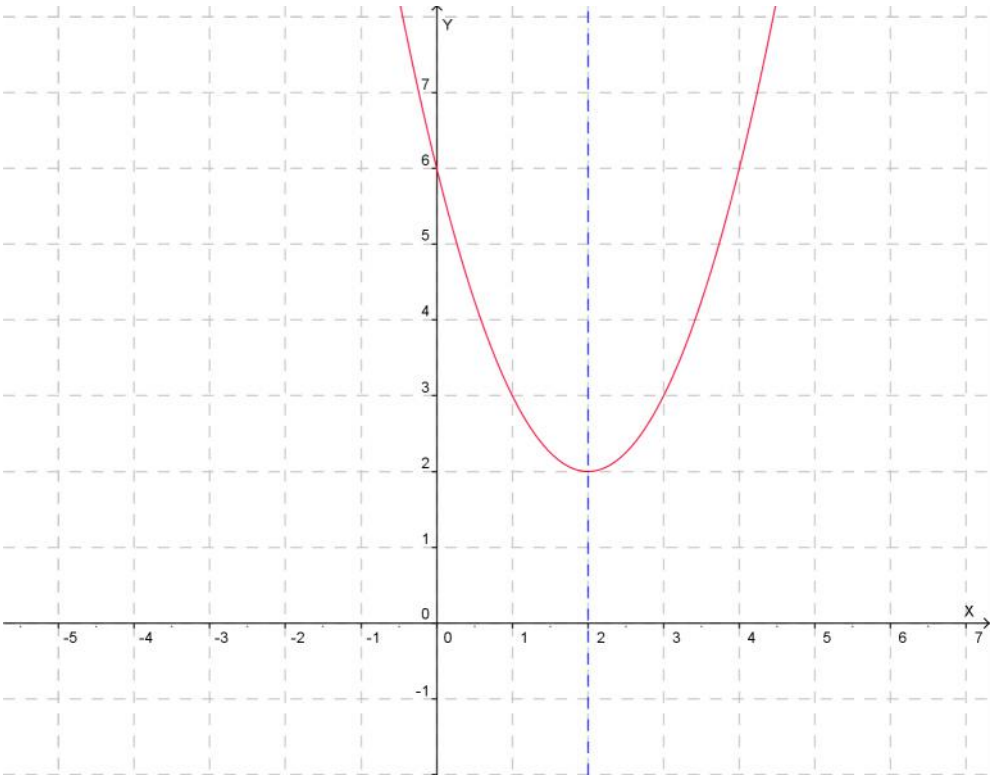
c) ¿Cuáles son las coordenadas del punto intercepto con el eje y?

d) ¿La función alcanza un punto máximo o un punto mínimo?, establecerlo.

Situación problema tres.

Dada la siguiente representación gráfica (figura 4).

Figura 4: Situación problema 3. UEPS 2



Establecer:

a) Cuál la ecuación del eje de simetría.

b) Establecer si la función tiene raíces reales, en caso afirmativo, identificar cuántas y cuáles son esas raíces.

c) ¿Cuáles son las coordenadas del punto intercepto con el eje y?

d) ¿La función alcanza un punto máximo o un punto mínimo?, establecerlo.

Situación problema cuatro

¿Todas las funciones cuadráticas tendrán raíces reales?, ¿Cómo se evidencia dicha situación en su respectiva gráfica?

Situación problema cinco

¿Cómo saber si una función cuadrática tiene raíces reales o no, a partir de la expresión polinómica general: $f(x) = ax^2 + bx + c$, es decir, antes de graficar?

Situación problema seis

¿Por qué es importante conocer si una función es simétrica con respecto a un eje, cuando se quiere graficar a partir de su expresión algebraica?

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 50 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 50 minutos

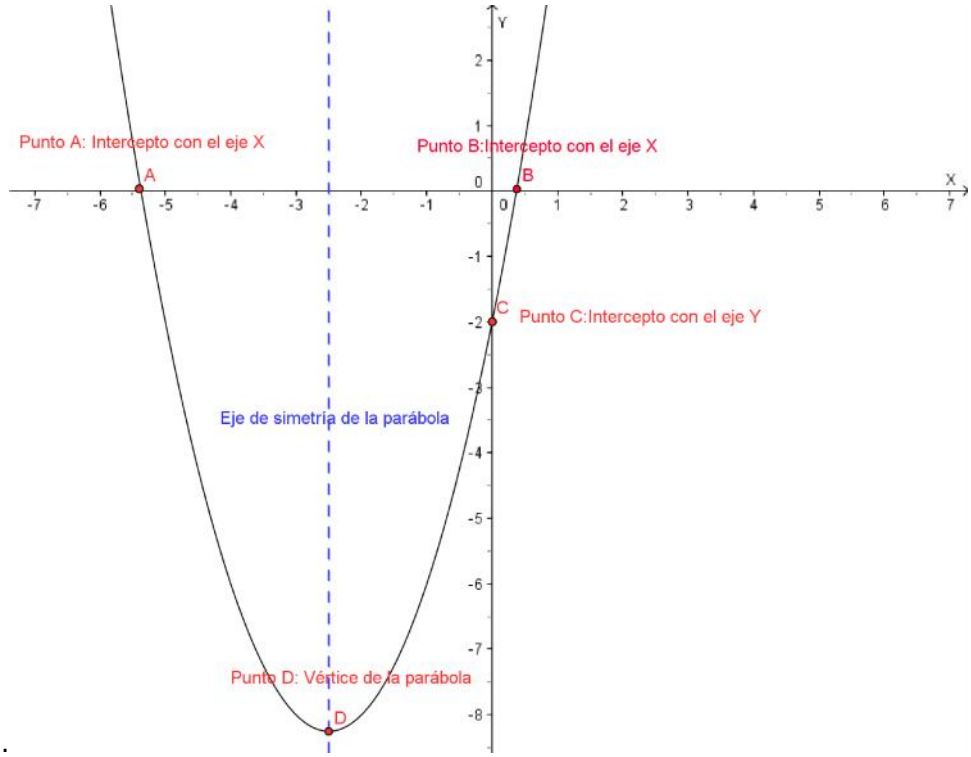
3.2.4 Etapa cuatro. Primera presentación del tema

El docente iniciará la clase exponiendo lo siguiente:

Recordemos que la representación polinómica para la función cuadrática: es $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c, son constantes reales, pero a debe ser distinto de cero.

La representación gráfica de función cuadrática recibe el nombre de parábola vertical. A continuación se presentará y explicará el esquema de una parábola en el plano cartesiano, en ella se identificarán sus puntos principales (figura 5).

Figura 5: Puntos principales de una parábola vertical



.

Elementos característicos de una parábola vertical:

Eje de simetría: Es la recta vertical simétrica con respecto a la parábola.

El vértice: Es el único punto donde se intersectan el eje de simetría y la parábola.

Interceptos con el eje x: Son aquellos puntos donde la parábola corta dicho eje; cabe anotar que no toda parábola se intercepta con el eje x.

Intercepto con el eje y: Es el punto donde la parábola corta al eje y; dicho punto siempre existirá.

Trazo de la gráfica de una función cuadrática mediante tabulación.

Para trazar la gráfica de una función cuadrática se elabora una tabla de dos columnas una para la variable independiente x y otra para la variable dependiente y. Se obtienen los puntos que se consideren suficientes para trazar la función.

Ejemplo: Trazar la gráfica de la función $f(x) = -x^2 - 2$ mediante tabulación.

Procedimiento:

1. Evaluemos la función en siete valores cualquiera de x (valores negativos y positivos)

$f(-3) = -(-3)^2 - 2 = -9 - 2 = -11$

$f(-2) = -(-2)^2 - 2 = -4 - 2 = -6$

$f(-1) = -(-1)^2 - 2 = -1 - 2 = -3$

$f(-0) = -(-0)^2 - 2 = -0 - 2 = -2$

$f(1) = -(1)^2 - 2 = -1 - 2 = -3$

$f(2) = -(2)^2 - 2 = -4 - 2 = -6$

$f(3) = -(3)^2 - 2 = -9 - 2 = -11$

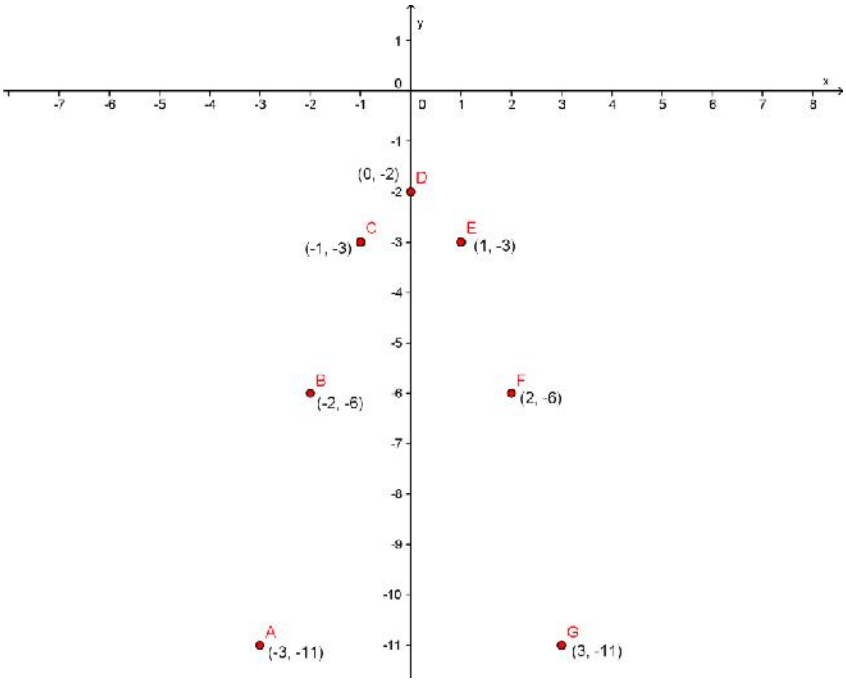
Construcción de la tabla de valores

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-11	-6	-3	-2	-3	-6	-11

2. Ubiquemos en el plano cartesiano las siete parejas ordenadas

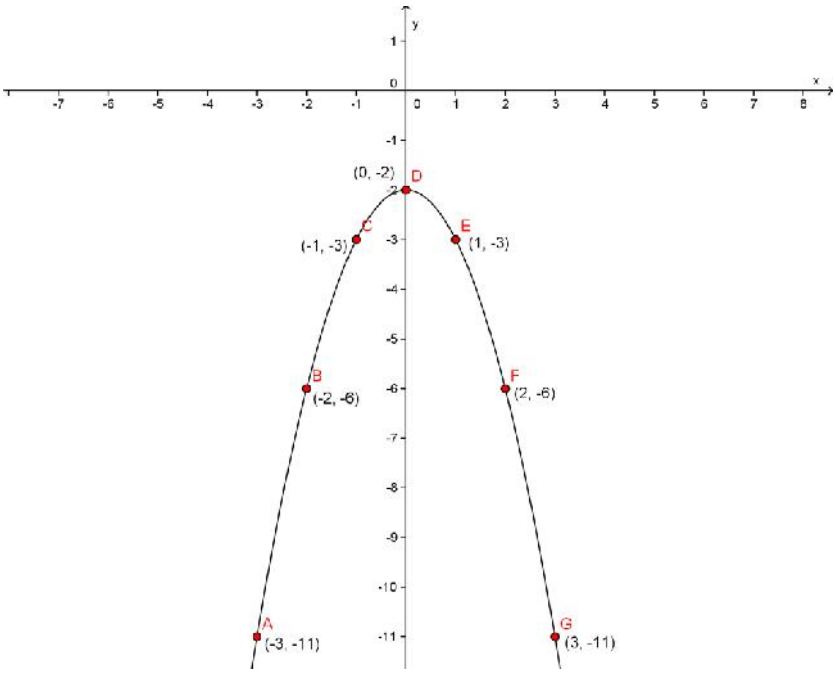
Gráfica resultante (figura 6)

Figura 6: Coordenadas de algunos puntos por donde pasa la gráfica de la función $f(x) = -x^2 - 2$



3. Unir los puntos ubicados en el plano cartesiano (figura 7)

Figura 7: Trazo de la función $f(x) = -x^2 - 2$



A partir de la gráfica realizada de la función cuadrática $f(x) = -x^2 - 2$, se observa:

a) La parábola abre hacia abajo.

b) El eje de simetría de la parábola: Es el eje y, es decir, está dado por la ecuación $x = 0$

c) El vértice: es el punto $(0, -2)$.

d) Las raíces o ceros de la parábola: No tiene ya que la parábola no corta al eje x.

e) Intercepto con el eje y: El punto $(0, -2)$

A continuación, el docente propondrá un taller como el siguiente, para resolver en grupos de 3 estudiantes.

1. Graficar la función cuadrática $f(x) = x^2$ mediante tabulación y determinar:

a) Hacia dónde abre la parábola.

b) El eje de simetría de la parábola.

c).El vértice.

d) Las raíces o ceros de la parábola.

e) El intercepto con el eje y.

2. Graficar la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x$ mediante tabulación y determinar:

a) Hacia donde abre la parábola.

b) El eje de simetría de la parábola.

c).El vértice.

d) Las raíces o ceros de la parábola.

e) Intercepto con el eje y.

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 40 minutos

Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 40 minutos

3.2.5 Etapa cinco. Segunda presentación del tema y nuevas situaciones problema

El docente expondrá lo siguiente: Las características principales de una parábola como por ejemplo, hacia donde abre, su eje de simetría, las coordenadas del vértice, las coordenadas del intercepto con el eje y , las coordenadas de los interceptos con el eje x (si existen), las brinda la expresión polinomial de cada función; veamos:

Expresión polinomial de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$

Información	Operación a realizar
¿Hacia donde abre la parábola?	Observar el valor de a.si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. La función tiene un valor mínimo. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo. La función tiene un valor máximo.
Eje de simetría	Calcular $\frac{-b}{2a}$. El eje de simetría es la recta $x = \frac{-b}{2a}$
Coordenadas del vértice	Evaluar la función en $x = \frac{-b}{2a}$, completando la pareja ordenada $[\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})]$
Coordenadas del intercepto con el eje y	Observar que $f(0) = c$, entonces el intercepto es el punto$(0, c)$

¿Existen interceptos con el eje x?	Establecer el discriminante. $\Delta = b^2 - 4ac$, Si $\Delta > 0$, la función tiene dos raíces reales diferentes. Si $\Delta = 0$, la función tiene dos raíces reales iguales. Si $\Delta < 0$, la función no tiene raíces reales.
Coordenadas de los interceptos con el eje x (si existen)	Se hallan, resolviendo la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

A continuación planteará las siguientes situaciones problema.

Situaciones problema: Trazar las gráficas de funciones cuadráticas, con esta información:

Gráfica uno:

a) Que abra hacia arriba.

b) Ecuación del eje de simetría: $x = 1$

c) Coordenadas del vértice: $(1, -9)$

d) Que pase por el punto: $(3, -5)$

Gráfica dos:

a) Que abra hacia abajo

b) Ecuación del eje de simetría: $x = -1$

c) Coordenadas del vértice: $(-1, -2)$

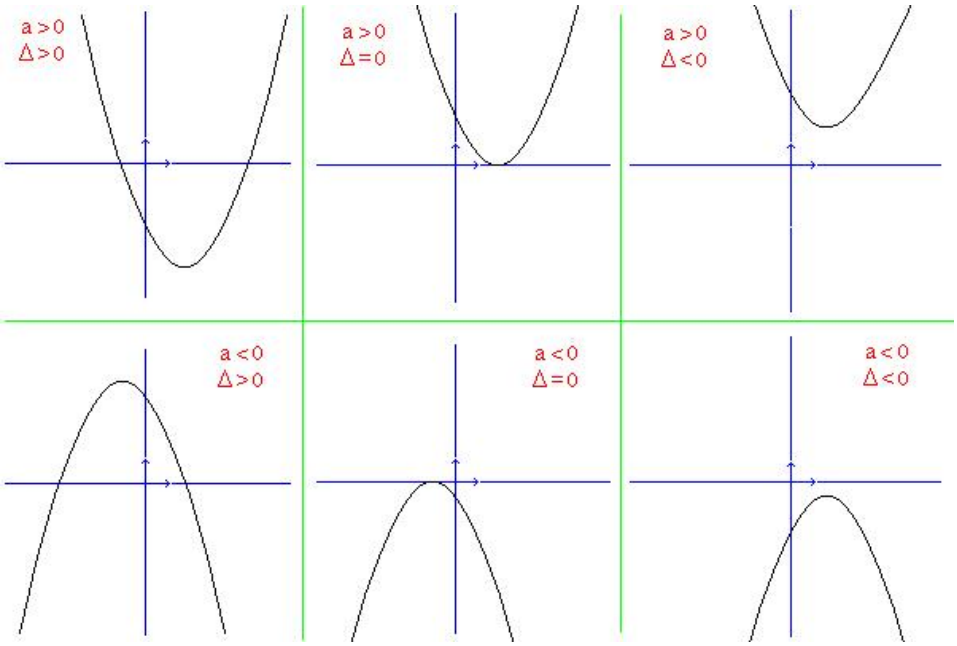
d) Que pase por el punto: $(-3, -6)$

Tiempo asignado para el trabajo por grupos: 30 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 60 minutos

3.2.6 Etapa seis. Tercera presentación del tema y nuevos ejemplos

El docente expondrá lo siguiente: Dependiendo del coeficiente del término cuadrático a y del discriminante de la función $\Delta = b^2 - 4ac$, en la expresión polinomial de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, una parábola puede presentarse en cualquiera de las seis ubicaciones siguientes (figura 8).

Figura 8: Trazos de parábolas típicas que representan funciones cuadráticas.



Fuente:http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Segundo_grado_curvas.png

El docente expondrá lo siguiente: Además del procedimiento de tabulación para graficar una función cuadrática, existe otro más ágil en el que se determinan sólo los puntos principales por donde pasará la parábola como son: El eje de simetría, el vértice, el intercepto con el eje y y los interceptos con el eje x (en caso que existan). Luego desarrollará algunos ejemplos en donde, a partir de una función cuadrática en forma polinómica, construirá su respectiva gráfica.

Ejemplo 1: Trazar la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Recordemos la expresión general de una ecuación de segundo grado
$f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$

Identifiquemos los coeficientes
$a = 1$, $b = 2$, $c = 1$

Concavidad: La parábola es cóncava hacia arriba pues $a > 0$

Ecuación del eje de simetría

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2)}{2(1)} = \frac{-(2)}{2} = -1$$

La ecuación del eje de simetría es $x = -1$

Coordenadas del vértice:

$$\left[\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$$

Evaluando la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$ en $x = -1$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 1$$

$f(-1) = 1 - 2 + 1$

$f(-1) = 0$

El vértice tiene coordenadas $(\mathbf{-1}\ ,\ \mathbf{0})$

Cortes con el eje x:

Se hallarán las raíces de $x^2 + 2x + 1 = 0$

Observemos que $x^2 + 2x + 1$, es un cuadrado perfecto.

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x+1)(x+1) = 0$

$x + 1 = 0$

$\boldsymbol{x = -1}$

Coordenadas del punto donde la gráfica corta al eje x: $\mathbf{(-1, 0)}$

Obsérvese que en este caso coincide el vértice.

Cortes con el eje y:

Se obtiene evaluando la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$ en $x = 0$

$f(0) = (0)^2 + 2(0) + 1$

$f(0) = 1$

Coordenadas del punto donde la gráfica corta al eje y: $\mathbf{(0\ ,1)}$**.**

Los puntos que se establecieron anteriormente se observan en la figura 9 y el trazo de la gráfica resultante, se observa en la figura 10.

Figura 9: Puntos característicos de la parábola que representa la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$

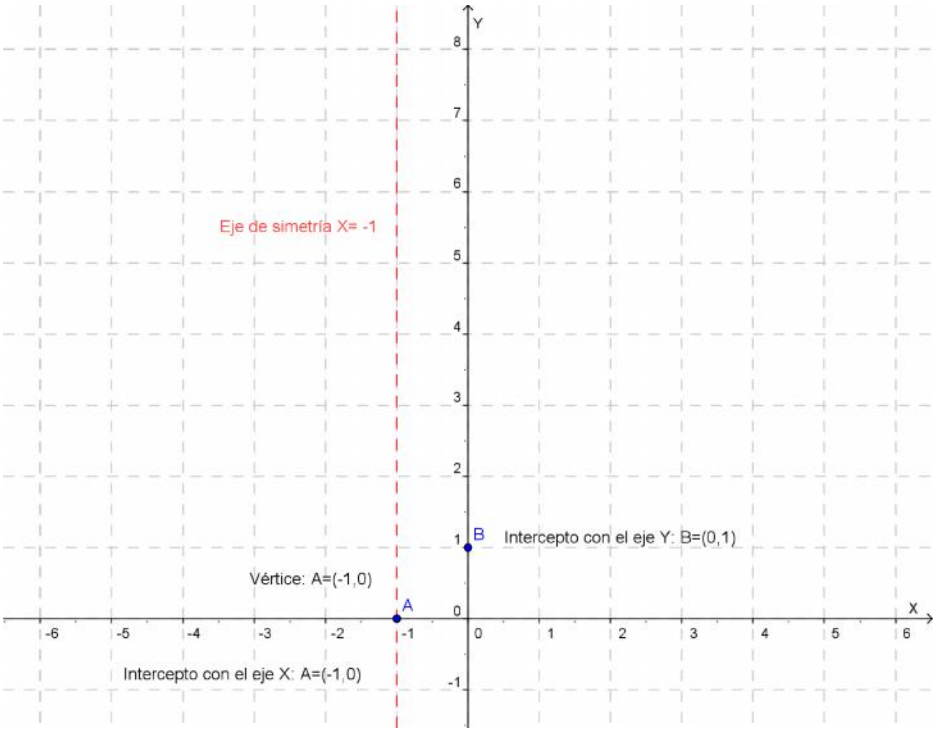
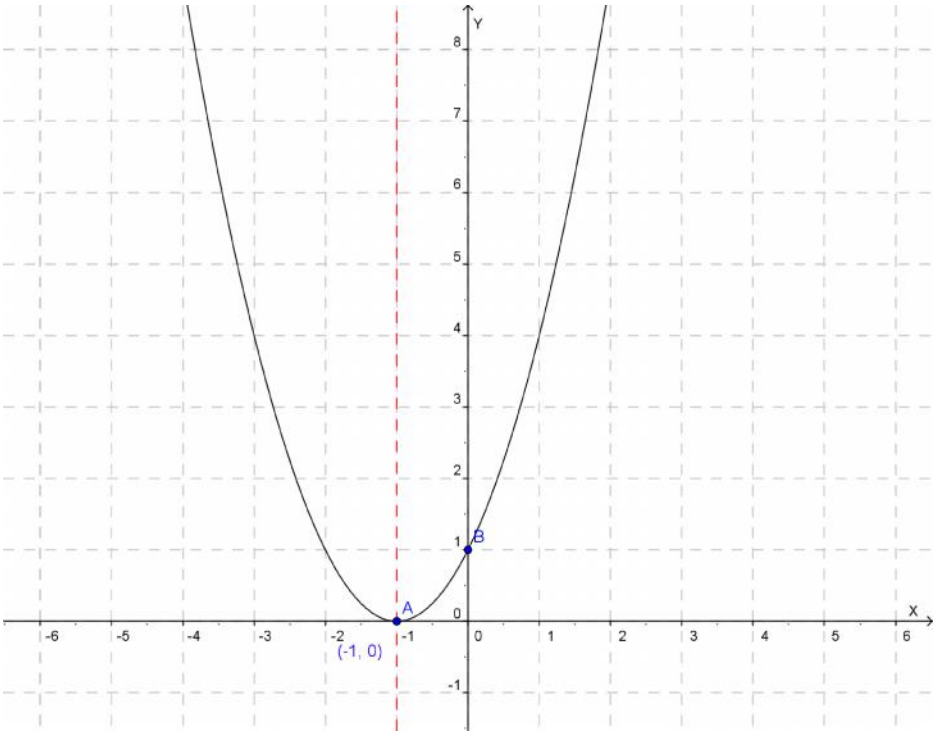


Figura 10: Trazo de la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$



Ejemplo 2: Trazar la gráfica de la función $f(x) = -x^2 - 2x - 8$

Recordemos la expresión general de una ecuación de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$

Identifiquemos los coeficientes

$a = -1$, $b = -2$, $c = -8$

Concavidad: La función es cóncava hacia abajo pues $a < 0$

Ecuación del eje de simetría

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$

Luego el eje de simetría es la recta con ecuación $x = -1$

Coordenadas del vértice:

$[\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})]$

Evaluando la función $f(x) = -x^2 - 2x - 8$ en $x = -1$

$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) - 8$

$f(1) = -1 + 2 - 8$

$f(1) = -7$

Lo que significa que el vértice tiene coordenadas $(\mathbf{-1}\ ,\ \mathbf{-7})$

Cortes con el eje x:

Estableciendo el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$,

$\Delta = (-2)^2 - 4(-1)(-8)$

$\Delta = 4 - 32$

$\Delta = -28$

Como $\Delta < 0$, significa que la función no tiene raíces reales y por lo tanto la parábola no cortará el eje x.

Cortes con el eje y:

Se obtiene evaluando la función $f(x) = -x^2 - 2x - 8$ en $x = 0$

$f(0) = -(0)^2 - 2(0) - 8$

$f(0) = -8$

Coordenadas del punto donde la gráfica corta al eje y: $(0, -8)$

Establecer las coordenadas de un tercer Punto

Evaluando la función $f(x) = -x^2 - 2x - 8$ en $x = 1$

$f(1) = -(1)^2 - 2(1) - 8$

$f(1) = -1 - 2 - 8$

$f(1) = -11$

Coordenadas de un tercer punto $(1, -11)$.

Los puntos que se establecieron anteriormente se observan en la figura 11 y el trazo de la gráfica resultante, se observa en la figura 12.

Figura 11: Puntos característicos de la parábola que representa la función $f(x) = -x^2 - 2x - 8$

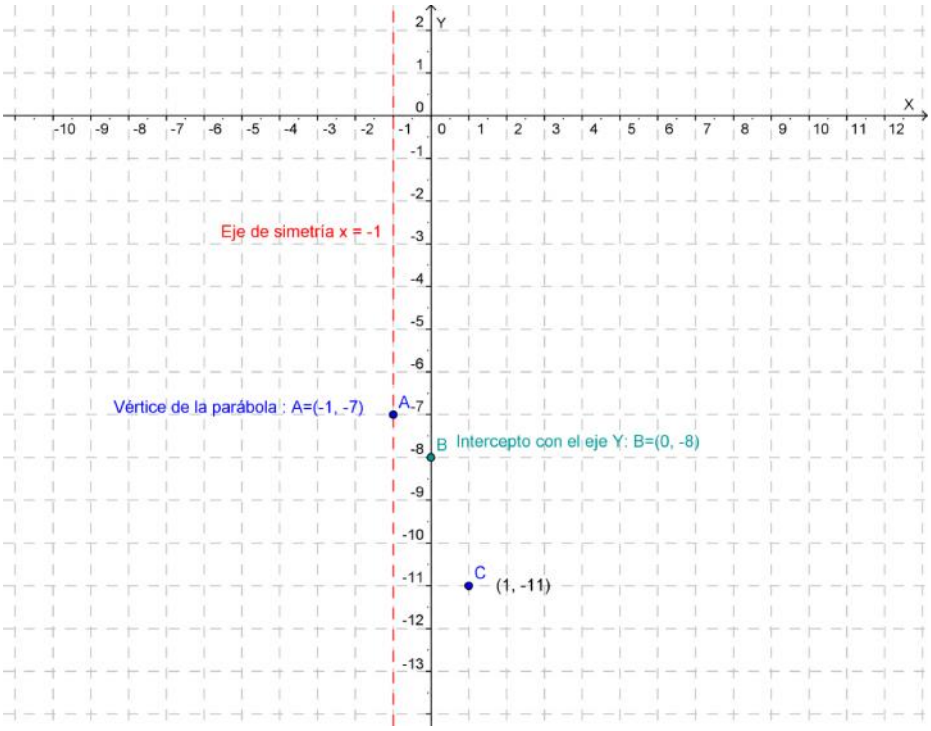
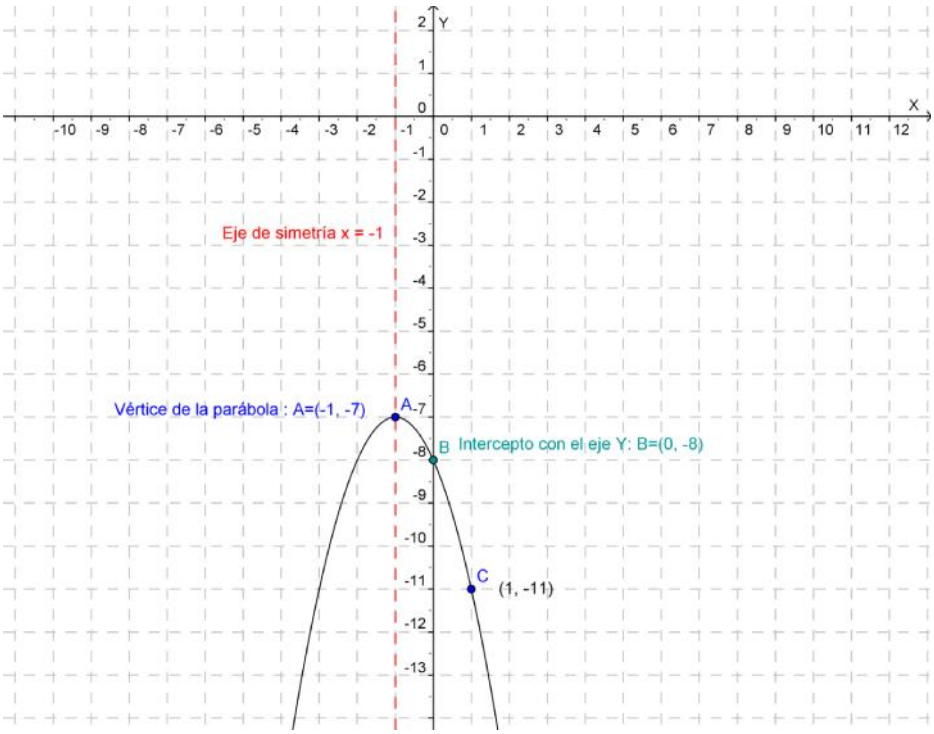


Figura 12: Trazo de la gráfica de la función $f(x) = -x^2 - 2x - 8$



El docente formulará la siguiente pregunta:

¿Cuál de los dos procedimientos, “tabulación” ó “puntos característicos”, consideran el más eficiente y rápido para graficar y por qué?

Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 10 minutos

3.2.7 Etapa siete. Evaluación del aprendizaje en la UEPS

Evaluación individual:

Trazar la gráfica de las siguientes funciones

1. $f(x) = 2x^2 - 6x$

2. $f(x) = -2x^2 - 6x + 8$

Tiempo asignado: 45 minutos

3.2.8 Etapa ocho. Evaluación de la UEPS

Evidencias de aprendizaje significativo por parte del estudiante y que debe observar el docente:

¿A partir de la gráfica de una función cuadrática, identifica e interpreta sus partes principales?
¿Con base en la expresión algebraica de una función cuadrática, hace conjeturas sobre las propiedades de su gráfica?
¿Explica el procedimiento para trazar la gráfica de una función cuadrática?

Capítulo 4. Secuencia para enseñar a resolver problemas de optimización mediante la función cuadrática

4.1 Objetivo

Mediante esta UEPS se enseñará acerca de la aplicación que tiene la función cuadrática en la solución de problemas de optimización.

4.2 Secuencia

4.2.1 Etapa uno. Aspectos a enseñar

El docente dará a conocer los conceptos que se van a enseñar en esta unidad; ellos son:

a) Declarativos**:**
Tipos de problemas de optimización que se pueden resolver mediante la función cuadrática.
Ecuación de restricción en la solución de problemas de optimización mediante la función cuadrática.
Función objetivo en la solución de problemas de optimización mediante la función cuadrática.

b) Procedimentales**:**
Establecer algebraicamente la función cuadrática representativa de un problema de optimización.
Hallar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática de acuerdo con el objetivo que plantea el problema.

4.2.2 Etapa dos: Indagación por conocimientos previos

Se presenta a los estudiantes el siguiente ejercicio para que sea realizado en forma individual.

1. Hallar el valor máximo o mínimo (ordenada del vértice) de las siguientes funciones cuadráticas:

a) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

b) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

Recordar:

El eje de simetría es la recta $x = \frac{-b}{2a}$

Coordenadas del vértice: $[\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})]$

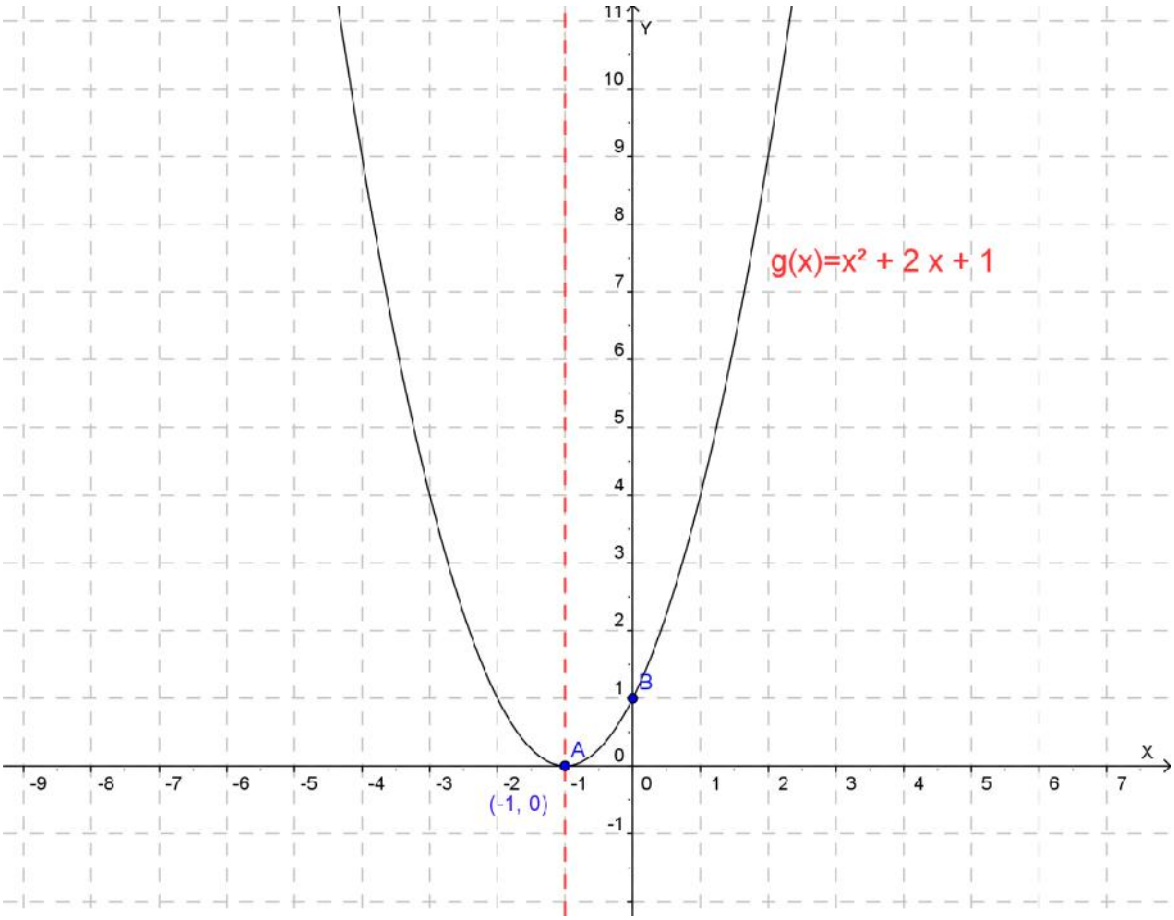
Tiempo asignado para el trabajo: 30 minutos

4.2.3 Etapa tres. Situaciones problema iniciales

El docente propone la siguiente situación problema:

Con base en la Figura 13, responder los enunciados a, b y c.

Figura 13: Primera situación problema. Etapa 3 UEPS 3



a. ¿La función $g(x)$ tiene un máximo o un mínimo?

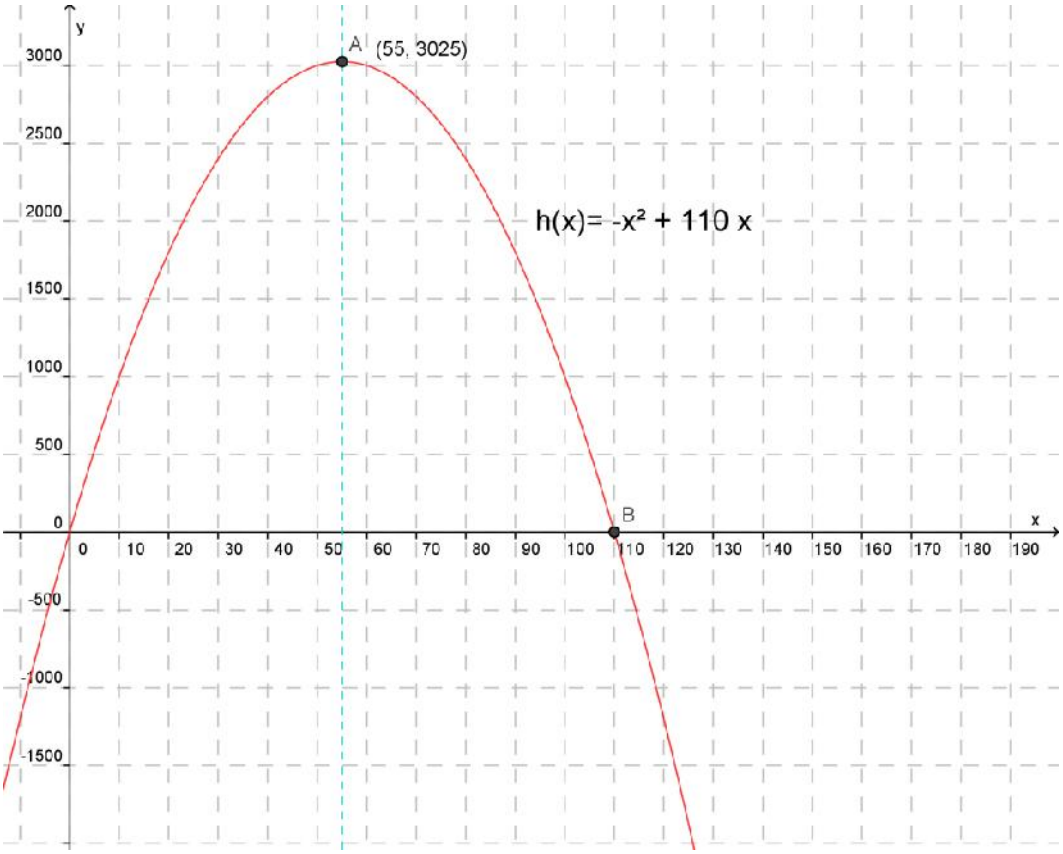
b. ¿Cuál es el valor mínimo o máximo que toma la variable dependiente $g(x)$?

c. ¿Para qué valor de la variable independiente x, la variable dependiente $g(x)$, toma su valor mínimo ó máximo?

Segunda situación problema:

Con base en la figura 14, responder los enunciados a, b y c.

Figura 14: Segunda situación problema. Etapa 3 UEPS 3



a. ¿La función $h(x)$ tiene un máximo o un mínimo?

b. ¿Cuál es el valor mínimo o máximo que toma la variable dependiente $h(x)$?

c. ¿Para qué valor de la variable independiente x, la variable dependiente $h(x)$, toma su valor mínimo ó máximo?

Tercera situación problema.

El docente plantea a los estudiantes en un trabajo por equipos, un concurso que ganará el que con 120 centímetros de cinta de enmascarar, logre construir una figura rectangular en la que pueda ubicar el mayor número de tarjetas de cartulina, en otras palabras, la figura que tenga la mayor área que la de los demás equipos. Se deja como condición que las tarjetas no se traslapen y no queden partes de ellas por fuera de la figura. Esta

actividad fue desarrollada en la Institución Educativa Villa Turbay; algunas fotografías se incluyen en el anexo 2.

Nombre del concurso "¿en dónde cabe más?"

A cada equipo, se le hace entrega de un kit compuesto por: Tarjetas de cartulina 5x5 cms., tira de cinta de enmascarar de 120 centímetros de longitud, flexómetro, tijeras y un formato para registro de resultados.

Etapas de la actividad:

Primera etapa: Cada equipo trabajando en forma independiente, debe formar con los 120 centímetros de cinta de enmascarar, adhiriéndola a una superficie plana, una figura rectangular (figura 15). Para ello tienen la libertad de cortar la cinta en los tamaños que deseen.

Figura 15: Figura rectangular formada con la cinta de enmascarar adherida a una superficie plana

Segunda etapa de la actividad:

Colocar las tarjetas al interior de la figura rectangular (figura 16) teniendo en cuenta que no se traslapen y no queden partes de las tarjetas por fuera de la figura.

Figura 16: Tarjetas de cartulina ubicadas al interior de la figura rectagular.

Tercera etapa de la actividad:

Cada equipo, basado en su figura, registrará los siguientes datos:

a) El valor de la medida de sus dos dimensiones largo y ancho.

b) El valor de la medida del área.

c) La cantidad de tarjetas que pudieron acomodar en el interior de la figura.

Cuarta etapa de la actividad:

Cada uno de los equipos presenta a todo el grupo su figura con las tarjetas en su interior. Con base en la información socializada, cada equipo diligenciará la siguiente planilla

	Largo (Cms)	Ancho (Cms)	Área (Cms^2)	Cantidad Tarjetas ubicadas dentro del rectángulo
Equipo 1				
Equipo 2				
Equipo 3				
Equipo 4				

Seguidamente contestará el presente cuestionario:

Cuestionario para contestar en equipos

¿Cuál fue el valor para el área máxima registrada?
¿Cuál fue el valor para el largo de la figura rectangular que permitió el área máxima registrada?
¿Cuál fue el valor para el ancho de la figura rectangular que permitió el área máxima registrada?
¿Qué condición (restricción) de longitud, debía tener el perímetro para cada una de las figuras formadas por cada equipo?
¿De las tres medidas ancho, largo y área cual de ellas es la variable dependiente y cuál o cuáles son las independientes?
¿Cuál será el máximo valor que pueda alcanzar el área de la figura rectangular?

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 50 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 60 minutos

4.2.4 Etapa cuatro. Primera presentación del tema

El docente iniciará la clase exponiendo lo siguiente: un problema de optimización es aquel donde se requiere maximizar o minimizar algo. Los problemas que abordaremos son aquellos que involucran dos variables independientes y una sola variable dependiente; por ejemplo problemas como los siguientes:

1. Hallar dos números positivos cuya suma sea 110 y cuyo producto sea máximo.
2. Un granjero desea proteger un campo rectangular con una cerca y dividirlo en dos campos rectangulares más pequeños mediante otra cerca paralela a uno de los costados del campo. Tiene disponible 3000 yardas de cerca. Determinar las dimensiones si se desea obtener la mayor área protegida.
3. La diferencia de dos números es 20. Hallar tales números de modo que su producto sea lo más pequeño posible.

A continuación, el docente propone una actividad en equipos de tres estudiantes. Plantear:

a) Un problema de optimización que requiera maximizar.
b) Un problema de optimización que requiera minimizar.

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 10 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 20 minutos

4.2.5 Etapa cinco. Segunda presentación del tema y nuevos ejemplos

El docente expondrá lo siguiente:

La solución a un problema de optimización mediante la función cuadrática, se puede desarrollar en tres fases; en la primera se establece algebraicamente la función a optimizar, en la segunda se halla el valor máximo o mínimo de la función y en la tercera se presenta la gráfica representativa del problema.

Para establecer algebraicamente la función a optimizar, es decir la primera fase, se desarrollan los siguientes cuatro pasos:

1. Identificación algebraica de las variables; dos independientes y una dependiente que es la que se quiere optimizar.
2. Establecer algebraicamente la ecuación de restricción. Es aquella que tiene carácter de condición y relaciona las dos variables independientes.
3. Establecer dos ecuaciones equivalentes a la ecuación de restricción; Significa que una de las variables queda expresada en términos de la otra.
4. Establecer la función a optimizar; expresando la variable dependiente en términos de una sola de las variables independientes.

Ejemplo de solución a un problema de optimización mediante la función cuadrática.

Problema: La diferencia de dos números es 20. Hallar tales números de modo que su producto sea lo más pequeño posible.

Solución:

Primera fase:

Paso 1. Identificación algebraica de las variables

Variables independientes:

x = Número mayor

y = Número menor

Variable dependiente:

$P(x,y)$ = Producto entre dos números x y y .

Paso 2. Establecer algebraicamente la ecuación de restricción

Ecuación de restricción:

$x - y = 20$

Paso 3. Establecer dos ecuaciones equivalentes a la ecuación de restricción.

Ecuación de restricción original: $x - y = 20$

Ecuación equivalente: $x = 20 + y$

Ecuación equivalente: $y = x - 20$

Paso 4. Establecer la función a optimizar.

Función a optimizar con dos variables: $P(x,y) = x.y$

Función a optimizar con una variable: $P(x) = x.(x - 20)$

$\boldsymbol{P(x) = x^2 - 20x}$ **.** Esta es la función cuadrática a optimizar, en este caso a minimizar.

Segunda fase:

De acuerdo con el problema se trata de hallar el mínimo valor de la función:

$P(x) = x^2 - 20x$

Recordemos la expresión general de una ecuación de segundo grado

$f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$

Identifiquemos los coeficientes

$a = 1$, $b = -20$, $c = 0$

Concavidad: La función es cóncava hacia arriba pues $a > 0$. La función tiene un mínimo.

Ecuación del eje de simetría

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-20)}{2(1)} = \frac{20}{2} = 10$

Luego el eje de simetría es la recta con ecuación $x = 10$

Lo anterior significa que el número mayor que hace que el producto sea lo más pequeño posible es el número 10.

Remplazado $x = 10$ en la ecuación de restricción equivalente $y = x - 20$

Se obtiene:

$y = 10 - 20$

$y = -10$

Lo anterior significa que el número menor que hace que el producto sea lo más pequeño posible, es el número -10.

Coordenadas del vértice:

$[\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})]$

Evaluando la función $P(x) = x^2 - 20x$ en $x = 10$

$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = P(10) = (10)^2 - 20(10)$

$P(10) = 100 - 200$

$P(10) = -100$

Lo anterior significa que el producto más pequeño posible entre dos números cuya diferencia es 20, es -100.

Tercera fase

Representación gráfica:

Cortes con el eje x:

Estableciendo el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$,

$\Delta = (-20)^2 - 4(1)(0)$

$\Delta = 400 - 0$

$\Delta = 400$

Como $\Delta > 0$, significa que la función tiene dos raíces reales y por lo tanto la parábola cortará el eje x en dos puntos.

Cortes con el eje x:

Se hallarán las raíces de $x^2 - 20x = 0$

$x^2 - 20x = 0$

$(x)(x - 20) = 0$

$x = 0$ ó $x - 20 = 0$

$x = 20$

Coordenadas de los puntos donde la gráfica corta al eje x: $(0, 0)$ y $(20, 0)$

Cortes con el eje y:

Se obtiene evaluando la función $P(x) = x^2 - 20x$ en $x = 0$

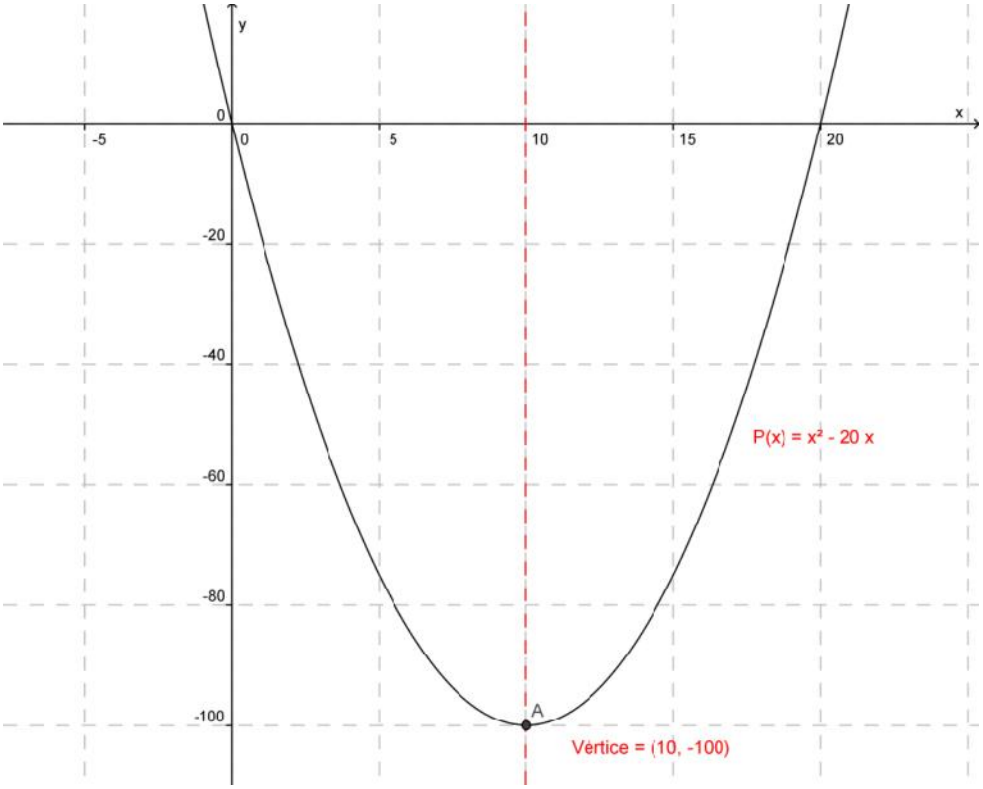
$f(0) = (0)^2 \ - 20(0)$

$f(0) = 0$

Coordenadas del punto donde la gráfica corta al eje y: $(0\ ,0)$

El trazo de la gráfica se muestra en la figura 17.

Figura 17: Gráfica de la función cuadrática aplicada en la solución de un problema de optimización



El docente propondrá la siguiente actividad para ser trabajada en equipos de tres estudiantes.

Trabajo en equipos

Solucionar el siguiente problema de optimización.

Problema: Hallar dos números positivos cuya suma sea 110 y cuyo producto sea máximo.

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 30 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 60 minutos

4.2.6 Etapa seis. Tercera presentación del tema y nuevos ejemplos

El docente expondrá lo siguiente: la función cuadrática también tiene aplicación en la solución de problemas propios de la economía; a continuación se plantea y resuelve uno de estos problemas.

Problema

Una compañía ofrece instalar bombillas a un costo de $300 cada una si el pedido es de 40 unidades o menos. Para conseguir mejores contratos, la compañía propone que si se compran más de 40 bombillas, el precio por unidad se reducirá en 5 veces el número de bombillas adicionales a 40. ¿Cuántas bombillas por encima de las 40 deben negociarse para que los ingresos por venta sean los mayores posibles?

Solución:

Paso 1: Identificación algebraica de las variables.
Variables independientes:
x: Cantidad de bombillas por encima de 40 bombillas.

$P(x)$: Precio final de cada bombilla, por compras superiores a 40 bombillas.

$C(x)$: Cantidad definitiva de bombillas vendidas.

Variable dependiente:
$I(x)$: Ingresos por venta de bombillas ($).

Paso 2. Establecer algebraicamente las ecuaciones de restricción.

Ecuaciones de restricción:

$P(x) = 300 - 5x$

$C(x) = 40 + x$

Paso 3. Establecer la función a optimizar.

Función a optimizar: $I(P,C) = P(x).C(x)$

Función a optimizar con una variable: $I(x) = (300 - 5x)(40 + x)$

$I(x) = 12000 + 300x - 200x - 5x^2$

$\boldsymbol{I(x) = -5x^2 + 100x + 12000}$ **: Función a optimizar (en este caso a maximizar)**

Segunda fase:

Hallar el valor máximo o mínimo de acuerdo con el objetivo que plantea el problema.

De acuerdo con el problema se trata de hallar el máximo valor de la función.

$I(x) = -5x^2 + 100x + 12000$

Recordemos la expresión general de una ecuación de segundo grado:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$

Identifiquemos los coeficientes

$a = -5$, $b = 100$, $c = 12000$

Concavidad: La función es cóncava hacia abajo pues $a < 0$. La función tiene un máximo.

Ecuación del eje de simetría

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(100)}{2(-5)} = \frac{-100}{-10} = 10$$

Luego el eje de simetría es la recta con ecuación $x = 10$

Lo anterior significa que:

Se pueden negociar **hasta 10 bombillas** por encima de las 40 para que el ingreso por ventas sea máximo.

El precio final de cada bombilla sería:

$300 - 5x = 300 - 5(10)$

$300 - 50 = 250$

Lo anterior significa que:

El precio final de cada bombilla sería de 250 pesos.

Coordenadas del vértice:

$[\frac{-b}{2a}, I(\frac{-b}{2a})]$

Evaluando la función $I(x) = -5x^2 + 100x + 12000$ en $x = 10$

$I\left(\frac{-b}{2a}\right) = I(10) = -5(10)^2 + 100(10) + 12000$

$I(10) = -500 + 1000 + 12000$

$I(10) = 12500$

Lo anterior significa que el ingreso máximo sería de **12.500 pesos**.

Tercera fase: representación gráfica

Cortes con el eje x:

Estableciendo el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$,

$\Delta = (-100)^2 - 4(-5)(12000)$

$\Delta = 10000 + 240000$

$\Delta = 250000$

Como $\Delta > 0$, significa que la función tiene dos raíces reales y por lo tanto la parábola cortará el eje x en dos puntos.

Cortes con el eje x:

Se hallarán las raíces de $-5x^2 + 100x + 12000 = 0$

$-5x^2 + 100x + 12000 = 0$

$5x^2 - 100x - 12000 = 0$ (Multiplicando la ecuación anterior por -1)

$x^2 - 20x - 2400 = 0$ (Dividiendo la ecuación anterior por 5)

$(x - 60).(x + 40) = 0$

$x - 60 = 0$ ó $x + 40 = 0$

$x = 60$ ó $x = -40$

Cortes con el eje y:

Se obtiene evaluando la función $I(x) = -5x^2 + 100x + 12000$ en $x = 0$

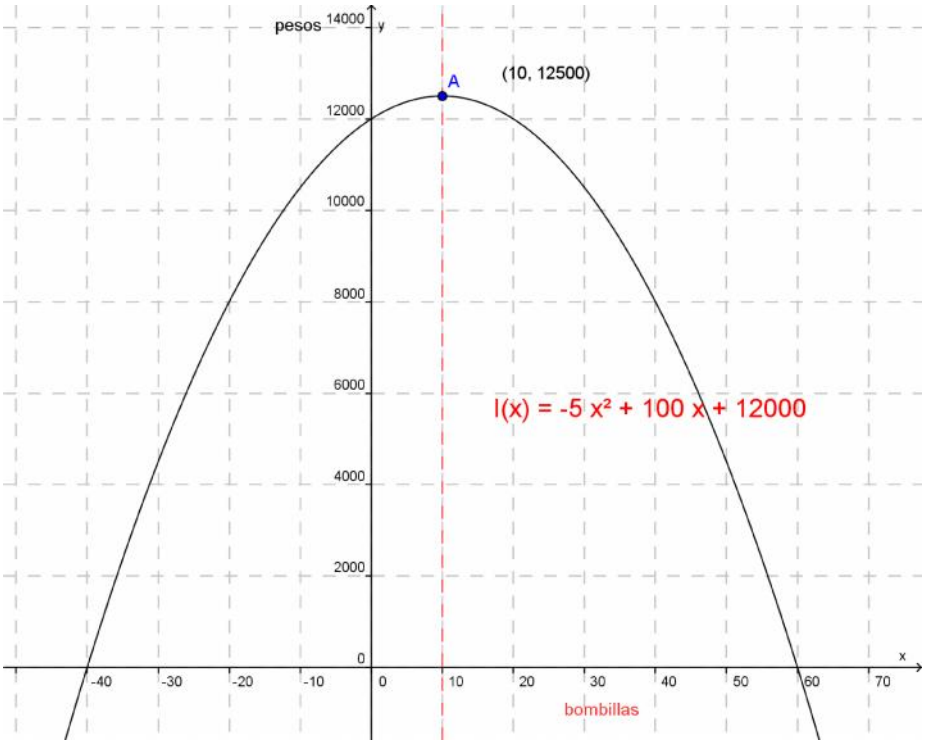
$f(0) = -5(0)^2 + 100(0) + 12000$

$f(0) = 12000$

Coordenadas del punto donde la gráfica corta al eje y: $(\mathbf{0}, \mathbf{12000})$

El trazo de la gráfica se muestra en la figura 18.

Figura 18: Gráfica de la función cuadrática aplicada en la solución de un problema de economía



El docente propondrá el siguiente problema para ser trabajado en equipos de tres estudiantes.

Trabajo en equipos. Resolver el siguiente problema de optimización.

Problema:

Si el número de turistas que hace un recorrido en autobús a una ciudad es exactamente 30, una empresa cobra $20 por persona. Para aprovechar la capacidad del autobús, la empresa propone que si viajan más de 30 turistas, el precio por pasajero se reducirá en 0,5 veces el número de pasajeros adicionales a 30. ¿Cuál es el número de turistas que debe llevar un autobús para maximizar los ingresos de la empresa?

Tiempo asignado para el trabajo por equipos: 30 minutos
Tiempo asignado para la socialización con todo el grupo: 60 minutos

4.2.7 Etapa siete. Evaluación del aprendizaje de los estudiantes

Evaluación individual:

Resolver el siguiente problema aplicando la función cuadrática.

Problema:

Un ganadero quiere cercar un campo rectangular con 3600 metros de malla, para usarlo como potrero. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del campo que permiten la mayor área cercada con la malla disponible?

Tiempo asignado: 45 minutos

4.2.8 Etapa ocho. Evaluación de la UEPS

Evidencias de aprendizaje significativo por parte del estudiante y observadas por el docente:

¿Modela mediante una función cuadrática un problema de optimización?
¿Interpreta la solución de un problema optimización con base en la gráfica resultante?
¿Explica el procedimiento para resolver un problema optimización utilizando la función cuadrática?

Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Las secuencias descritas en el capítulo 2 permiten concluir que mediante la adopción de una metodología de enseñanza significativa sustentada en el modelo de Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas (UEPS) de Moreira, es posible que los estudiantes aprendan significativamente, qué es una función cuadrática y cómo obtener otras representaciones algebraicas equivalentes a partir de su expresión polinómica.

Las bondades del modelo resultan evidentes si se observa que tiene en cuenta las situaciones problemáticas que se podrían presentar en el aprendizaje de las funciones cuadráticas, permitiendo además realizar un control en cada una de las fases el cual está orientado a verificar que el aprendizaje de los estudiantes sea significativo. Es de resaltar que el modelo tal y como está planteado, permite espacios dedicados a la motivación de los estudiantes, pues este factor es de suma importancia para alcanzar el éxito en el proceso de enseñanza de las funciones cuadráticas.

En lo relativo a la enseñanza acerca de cómo graficar una función cuadrática a partir de una expresión polinómica, el modelo planteado ofrece todas las herramientas indispensables para que los estudiantes logren un aprendizaje significativo, igual que en el desarrollo del anterior objetivo, se tuvieron en cuenta situaciones problemáticas que pudieran dificultar el aprendizaje con espacios destinados a motivar al estudiante en el aprendizaje del tema.

En términos generales, se puede concluir que el modelo planteado resulta conveniente y práctico para la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática, pero lo más importante es que permite espacios para que estudiante y docente interactúen de tal manera que pueda existir una socialización del conocimiento donde serán los estudiantes los encargados de hacer ver al docente las fallas que se puedan estar dando en la forma en que se enseña el tema, pues no se puede ignorar que como señala Moreira es el alumno quien decide si quiere aprender significativamente determinado conocimiento.

5.2 Recomendaciones

La principal recomendación que se hace en el presente trabajo, es la de implementar el modelo de las UEPS para el aprendizaje significativo de la función cuadrática como prueba piloto en alguno de los establecimientos de enseñanza oficial del país, preferiblemente en uno que tenga históricamente un bajo desempeño en las pruebas ICFES en el área de Matemáticas, esto con el fin de evaluar el modelo en la vida real y hacer los ajustes pertinentes.

La prueba piloto estaría orientada a evaluar el grado de aprendizaje registrado por los alumnos en la resolución de los problemas relacionados con la función cuadrática, más importante aún sería poder observar cómo aplican los estudiantes el conocimiento adquirido sobre el tema, a la realidad cotidiana de sus vidas. En este sentido, la recomendación es que en la prueba piloto se evalúen los cuatro aspectos fundamentales del aprendizaje significativo, es decir: La motivación de los estudiantes por aprender el tema, la comprensión que logren de las funciones cuadráticas, la participación activa en las clases y las relaciones o posibles aplicaciones en la vida real de la función cuadrática.

Finalmente se recomienda, extender la aplicación de las UEPS en la enseñanza no solo de las matemáticas, sino también de las demás ciencias donde sea apropiado hacerlo.

ANEXO 1. Clasificación de la I.E. Villa Turbay en pruebas ICFES

CLASIFICACIÓN DE PLANTELES

Datos de la institución			
Nombre Oficial	INSTITUCION EDUCATIVA VILLA TURBAY		
Código	**122952**	Calendario	A
Departamento	ANTIOQUIA	Municipio	MEDELLIN

Periodo	Geografía	Química	Física	Biología	Historia	Filosofía	Matemática	Lenguaje	Ciencias Sociales	Inglés	Categoría	Evaluados	% de Evaluados	Naturaleza	Jornada
No se reporta categoría 2012, por lo dispuesto en el artículo 5 de la Resolución 569 de 2011. Cualquier inquietud, comuníquese con la Línea de Atención al Ciudadano: 018000 110858 – 57 (1) 3077008.															
2011 **		6	7	6		6	6	7	7	6	MEDIO	34	**(94.44 %)**	OFICIAL	MAÑANA
2010 *		6	6	6		6	6	6	7	6	BAJO	40	**(100 %)**	OFICIAL	MAÑANA
2009 *		6	6	6		7	5	6	7	6	BAJO	24		OFICIAL	MAÑANA
2008 *		6	7	6		8	6	7	8	6	MEDIO	21		OFICIAL	MAÑANA
2007 *		6	7	6		5	6	7	5	5	BAJO	22		OFICIAL	MAÑANA
2005	4	5	7	7	6	6	6	7			BAJO	7		OFICIAL	MAÑANA

«««««««««»»»»»»»»»

*** Resolución 489 de octubre de 2008.pdf**

ANEXO 2. Fotografías de la práctica “¿Dónde cabe más?” I.E. Villa Turbay

.

Glosario

Actividad colaborativa: Resolución de tareas y talleres en grupos pequeños de dos a cuatro estudiantes, pero que luego serán socializadas con la totalidad de estudiantes.

Aprendizaje significativo: Aprendizaje con significado, comprensión, capacidad de explicar y de aplicar el conocimiento adquirido a nuevas situaciones.

Conocimiento declarativo: Es aquel que puede ser verbalizado.

Conocimiento previo: Conocimientos ya existentes en la estructura cognitiva del estudiante.

Conocimiento procedimental: Habilidades cognitivas que se requieren para saber hacer algo.

Diferenciación progresiva: Principio programático de la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel, significa que al inicio de la enseñanza, se deben presentar los conceptos más generales e inclusivos del tema y progresivamente, abordar las especificidades.

Evaluación formativa: Es la que evalúa el progreso del estudiante a lo largo de una fase de su aprendizaje, es una evaluación continua que se ocupa de los significados enseñados y el proceso de captación por el estudiante.

Evaluación sumativa: Es la que pretende evaluar el alcance de determinados objetivos al final de una fase de aprendizaje; se basa en exámenes finales.

Negociación de significados: Es un intercambio de significados entre el profesor que ya domina los significados aceptados en el contexto y se los presenta al alumno quien debe exteriorizar al profesor cómo está captando esos significados. Si esta captación no corresponde a los significados contextualmente aceptados en la materia de enseñanza, el profesor debe presentarlos otra vez, de otra forma, y el alumno debe exteriorizarlos

nuevamente; esto puede ocurrir varias veces hasta que el aprendiz comparta los significados aceptados en el contexto de la materia de enseñanza.

Reconciliación integradora: Principio programático de la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel, según el cual la enseñanza debe explotar relaciones entre ideas, conceptos y proposiciones, registrando semejanzas y diferencias importantes, reconciliando discrepancias reales o aparentes.

Situación problema: Tarea, explicación de un fenómeno, de una aparente contradicción, la construcción de un mapa conceptual, etc., no es la aplicación rutinaria de algún algoritmo.

UEPS: Unidad de enseñanza potencialmente significativa. Son “secuencias de enseñanza fundamentadas teóricamente y orientadas al aprendizaje significativo”.

Bibliografía

Arroyo, A., Castelo, A., & Pueyo, M. d. (1997). *El departamento de orientación: atención a la diversidad.* España: Narcea Ediciones.

Arroyo, S. (1992). *Teoría y práctica de la escuela actual.* España: siglo XXI Editores.

Clapham, C. (2004). *Diccionario de matemáticas.* España: Editorial Complutense S.A.

Díaz, F. (2002). *Didáctica y currículo: un enfoque constructivista.* España: Ediciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Hostetler, L. (2008). *Precálculo, 7ª edición.* México: Reverté Ediciones.

Ibáñez, P., & García, G. (2005). *Matemáticas IV. Precálculo.* México: Thomson Editores.

ICFES. (2012). *Pruebas Saber 11.* Bogotá: ICFES.

Méndez, Z. (2006). *Aprendizaje y cognición.* Costa Rica: Editorial EUNED.

Moreira, M. A. (1993). *Unidades de Enseñanza Potencialmente-UEPS.* Porto Alegre: Instituto de Física UFRGS.

Penchasky, L., & San Martín, H. (2004). *El nivel inicial. Estructuración, orientaciones para la práctica.* Argentina: Ediciones Colihue.

Zarzar, C. (2000). *La didáctica grupal.* Mexico: Editorial Progreso.