UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

ESTUDIO TEÓRICO DEL ESTADO DE ABRIKOSOV EN SUPERCONDUCTORES MESOSCÓPICOS

Sindy Jessenia Higuera Agudelo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Bogotá D.C, Colombia
2014

ESTUDIO TEÓRICO DEL ESTADO DE ABRIKOSOV EN SUPERCONDUCTORES MESOSCÓPICOS

Sindy Jessenia Higuera Agudelo

Trabajo Final presentado como requisito parcial para obtar al título de:
Magister en Ciencias-Física

Director:
Dr. José José Barba Ortega.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Bogotá D.C, Colombia
2014

Resumen

Se estudió teóricamente la configuración de vórtices en algunas muestras superconductoras sometidas a un campo magnético externo. Se analiza el efecto de las fluctuaciones térmicas en superconductores mesoscópicos cuadrados. Encontramos que la fortaleza de la barrera de Bean-Livingston depende de la condición de contorno, ya que en muestras con bordes o fronteras, los vórtices entran a la superficie después de que la velocidad crítica del condensado superconductor es alcanzada, los pares de Cooper se rompen y se crean pequeñas perturbaciones en los bordes, facilitando el ingreso de campo en la muestra, la entrada de vórtices en las muestras superconductoras mesoscópicas produce una disminución de las barreras superficiales. Por otro lado, estudiamos también, en particular, cuadrados y discos mesoscópicos con defectos en el interior, estos actúan como centro de anclaje de los vórtices. El estudio fué realizado mediante la solución numérica de las ecuaciones de Ginzburg-Landau dependientes del tiempo (TDGL) para los sistemas mencionados, empleamos el método de las variables de enlace. Encontramos la configuración de vórtices para éstas geometrías y calculamos las curvas de magnetización, energía libre, vorticidad, parámetro de orden en función del campo magnético aplicado. Verificamos que la configuración de vórtices y los campos críticos dependen fuertemente de los defectos en el interior y de la geometría del sistema. Para los casos en los que la muestra superconductora se encuentra en contacto con interfaces metálicas, varía la superconductividad en los bordes de la muestra, de acuerdo con el parámetro de De Gennes y los valores de magnetización, primer campo crítico, energía libre son altamente influenciados por el tipo de material en contacto.

Palabras Clave: Ginzburg-Landau, Superconductividad, Parámetro de De Gennes, Variables de enlace.

Abstract

We study theoretically the vortex configuration in some superconducting samples. We analyze the effect of thermal fluctuations in mesoscopic square superconductors. We found that the strength of the Bean- Livingston barrier depends on the boundary condition, because in samples with edges or frontiers, those vortices entering surface after to the condensate critical velocity is reached,the Cooper pairs are broken and these create and are originated little disturbances on the edges, this process facilitates the input vortices to the sample.The entry of vortices in a mesoscopic superconductor sample produces a decrease of surface barrier. On the other hand, we study also, in particular, mesoscopic superconducting squares and disk with defect inside, they acts as pinning center of vortices. We solved the time dependent Ginzburg-Landau equations (TDGL), using the link variable method.We found the vortex array for these geometries and calculated the magnetization curves, free energy, vorticity and order parameter as function of the external magnetic field. We verify that the vortex configuration and critical fields depends strongly on the defects inside and the system geometry. For the cases in which the superconducting sample is found to contact with a metallic interface , the superconductivity loss increases, according to the De Gennes parameter and the magnetization values, first critical field, free energy, are highly influenced by the type of material in contact.

Keywords: Ginzburg-Landau, Superconductivity, De Gennes Parameter, Link Variable.

Contenido

1. Introducción **2**
1.1. Estado del Arte 4
1.1.1. Estado de Vórtices en Muestras Superconductoras . . . 4

2. Introducción a la Superconductividad **8**
2.1. Historia de la Superconductividad 8
2.2. Termodinámica del Estado Superconductor 13
2.3. Teorías Fenomenológicas 17
2.3.1. Teoría de London: Electrodinámica de un Superconductor. 17
2.4. Teoría de Ginzburg Landau 19
2.4.1. Derivación de la Teoría Ginzburg-Landau 20
2.4.2. Primera Ecuación de Ginzburg-Landau 22
2.4.3. Segunda Ecuación de Ginzburg-Landau 24
2.4.4. Condiciones de Contorno 26
2.4.5. Escalas de Longitud Característica 27
2.4.6. Ecuación de Ginzburg-Landau Linealizada (Campos H_{c2} y H_{c3}) 30
2.4.7. Ecuaciones de Ginzburg-Landau Dependientes del Tiempo 33
2.4.8. Validez de la Teoría de Ginzburg-Landau 35
2.5. Superconductores de Tipo I y Tipo II 36
2.6. Estado de Vórtices 39
2.6.1. Red de Vórtices de Abrikosov y Estructura de Vórtices 40
2.7. Barrera Superficial en Muestras Mesoscópicas 44

3. Método Numérico **47**
3.1. Método ψU 47

3.1.1. Método ψU para las Ecuaciones TDGL 50
3.1.2. Método ψU para las Condiciones de Contorno 53
3.2. Expresiones para la Magnetización y el Fluxoide 56
3.2.1. Variables de Enlace: Coordenadas Polares 56

4. Estado de Vórtices en Muestras Superconductoras 60
4.1. Efectos del Ruido de Langevin sobre las Propiedades Magnéticas de un Superconductor Mesoscópico 60
4.1.1. Aspectos Teóricos 61
4.1.2. Resultados 63
4.2. Estructura Circular en una Muestra Superconductora 66
4.2.1. Aspectos Teóricos 66
4.2.2. Resultados 68
4.3. Efectos de Proximidad Debidos a la Inclusión de un Defecto en un Superconductor Mesoscópico 73
4.3.1. Aspectos Teóricos 73
4.3.2. Resultados 75
4.4. Solución de las Ecuaciones de Ginzburg-Landau con Diferentes Interfaces Extendidas a Múltiples Dominios Conectados 79
4.4.1. Resultados 80

5. Resumen y Conclusiones 84

6. Artículos Publicados durante la Maestría 87

Lista de Figuras

2.1. Heike Kamerlingh Onnes en compañía de su equipo de laboratorio, muestra el equipo con el que observó por primera vez la superconductividad. (*Foto de Wim Eradus*) 10
2.2. Efecto Meissner en una esfera superconductora en un campo magnético. Para la esfera izquierda $T > T_c$ en un material que se comporta como un conductor normal. Para la esfera de la derecha $T < T_c$ la esfera se torna superconductora. 12
2.3. Diagrama de fase $H-T$ para un superconductor: se muestra el comportamiento del campo magnético crítico en función de la temperatura. *Tomado de Vórtices en Superconductores María Pilar González, Javier Villegas Investigación y Ciencia, Julio* 2007 *Universidad Complutense* 15
2.4. Dependencia de la entropía con la temperatura del estado normal S_n y del estado superconductor S_s. La transición es de segundo orden tal que no hay discontinuidad en la entropía en T_c (γ es el coeficiente electrónico [34]). *Tomado de Poole Superconductivity.* 16
2.5. Dependencia del calor específico con la temperatura para el estado normal y para el estado superconductor. *Tomado de Poole Superconductivity* 17
2.6. Representación esquemática de la dependencia espacial del parámetro de orden con la longitud de extrapolación de De Gennes b en la interfaz entre un superconductor y un metal normal y superconductor/superconductor a mayor T_c. 27
2.7. Dependencia radial del parámetro de orden ψ y el campo magnético h en la condición de frontera superconductor/normal [1]. 29

2.8. Dependencia de las características de un superconductor semi-infinito en función del parámetro de GL. 37
2.9. Diagrama M-H para superconductores volumétricos de los tipos I y II. 38
2.10. Estructura de un vórtice superconductor: Zona central del vórtice. En esa zona central, el material y los electrones se encuentran en estado normal: la densidad de electrones superconductores n_s, se anula en el núcleo del vórtice. 41

3.1. (a) Puntos de la red donde se evalúan las diferentes variables discretizadas, (b) para simplificar la notación generalmente se utilizan los mismos índices 49
3.2. (a) Puntos de la red donde se evalúan las diferentes variables discretizadas. 57

4.1. Muestra superconductora en la configuración de campo perpendicular: Prisma rectangular infinito en el eje z cuya sección transversal es un cuadrado. 61
4.2. Magnetización en función del campo magnético aplicado para dos diferentes interfaces, con $b = \infty$ y $b = 10$, con y sin ruido de Langevin. 63
4.3. Número de Vórtices en función del campo magnético aplicado para dos diferentes interfaces, con $b = \infty$ y $b = 10$, con y sin ruido térmico 64
4.4. Energía libre de Gibbs en función del campo magnético aplicado para dos diferentes interfaces, con $b = \infty$ y $b = 10$, con y sin ruido térmico. 65
4.5. Geometría de las muestras estudiadas. Disco superconductor visión: superficie lateral (Izquierda) estado normal, (Mitad) estado superconductor, y (Derecha) estado normal sin el defecto. *(Se ha intruducido un agujero central, con el fin de eliminar problemas de convergencia en el centro del disco)* 67

4.6. Topología de la evolución temporal del patrón espacial del parámetro de orden para un disco con un defecto semicircular. Para $b = 0$ (abajo), $H_{01} = 0.80$ y para un $b \to \infty$ (arriba), $H_{01} = 1.09$; donde H_{01} es el valor del campo del primer ingreso de vórtices. Las regiones de color rojo y azul representan valores del parámetro de orden (también su fase $\Delta\Phi/2\pi$, cambia desde 0 a 1), el color rojo muestra representa estado superconductor, mientras que el color azul representa estado normal $|\psi| = 0$ en el estado normal y $|\psi| = 1$ en el estado superconductor. 69
4.7. Fase del parámetro de orden N representa el número de vórtices que entran al disco 70
4.8. Logaritmo del módulo del parámetro de orden, ésta gráfica permite verificar la información del número de vórtices entrantes, dada por la gráfica de la fase. 70
4.9. Inducción Magnética $\vec{\mathbf{h}}$ (i-l) para un disco con un defecto en $H_0 = 0.8, 0.85, 0.98, 1.0$ con $N = 2, 4, 6, 6$ para el caso $b = 0$. NS y S representan estados no estacionarios y estacionarios respectivamente. 71
4.10. Energía libre de Gibbs G, Magnetización $-4\pi M$, vorticidad $N\Phi_0$, y supercorriente J (Aquí $P(r, \theta)$ es equivalente a $g(r, \theta)$, descrito en el método numérico). 72
4.11. Superconductor en contacto con las dos diferentes interfaces . 74
4.12. (Figuras en Color) Magnetización $-4\pi M$ y el contorno del parámetro de orden $|\psi|$ (recuadros pequeños) como una función del campo magnético H_e para $S_d = 9\xi^2(T)$ y $S_d = 36\xi^2(T)$ con $b \to \infty$ (arriba) y $b = -2\xi(T)$ (abajo). 76
4.13. Curva de Magnetización $-4\pi M$ para $S_d = 324\xi^2(T)$ y $S_d = 144\xi^2(T)$ con $b = -2\xi(T)$ (superior) y $b = \infty$ (inferior) 77
4.14. Densidad de electrones superconductores para $S_d = 144\xi^2(T)$, (a) $b = \infty$, (b) $b = -2\xi(T)$ y $S_d = 324\xi^2(T)$, (c) $b = \infty$, (d) $b = -2\xi(T)$. N_d y N_s indica la vorticidad en el defecto y en la región superconductora respectivamente. *Color rojo: Estado superconductor, Color azul: Defecto Metálico, Color rosa: Defecto superconductor* 78

4.15. Arreglo de las muestras estudiadas. Película Superconductora uno de los lados de la película se encuentra en contacto con una capa delgada de material metálico el otro borde justo al frente, se encuentra en contacto con otro material superconductor, a la vez tenemos un defecto central (a) metálico (b) dieléctrico (c) superconductor. Por ello, tenemos múltiples interfaces dentro y fuera de la muestra. 80
4.16. (Figuras en color) Supercorriente para $b = 2\xi(0)$, $b \to \infty$ y $b = -2\xi(0)$ en el defecto para $H_e = 0.42H_{c2}(0)$ y $N = 4$. . . . 81
4.17. (Figuras a Color)Inducción magnética para una película con un defecto cuadrado. 82
4.18. (Figuras a Color) Magnetización $-4\pi M$ (Izquierda) y Energía libre de Gibbs G (Derecha) como una función del campo magnético para la película con el defecto cuadrado. 83

Lista de Tablas

4.1. Vorticidad para $S_d = 144\xi^2(0)$ y $b = \infty$ 79
4.2. Vorticidad para $S_d = 144\xi^2(0)$ y $b = -2\xi(T)$ 79
4.3. Vorticidad para $S_d = 324\xi^2(0)$ y $b \to \infty$ 79

Capítulo 1

Introducción

Por muchos años, el estado superconductor, atribuído a una atracción neta entre electrones [1], fue considerado una rara curiosidad existente a temperaturas demasiado bajas para ser de algún interés práctico. Sin embargo, la posibilidad de transportar energía eléctrica sin disipación ha servido de inspiración para lograr varias aplicaciones importantes tales como producción de campos magnéticos de gran intensidad, cruciales para estudios de resonancia magnética, creación de squids útiles para la detección de campos magnéticos muy pequeños como los generados por la actividad cerebral o trenes levitantes que pueden desplazarse a 500 $km/hora$, entre otros.

El éxito alcanzado en la actualidad tanto en las propiedades como en el rendimiento tecnológico sobresaliente de los superconductores, se debe en gran medida a la capacidad de manipular las entidades elementales que gobiernan su comportamiento, i.e. los cuantos de flujo magnético (vórtices) y los pares de Cooper [1]. Gran parte de la respuesta electromagnética de los superconductores está dominada por la disipación de energía debida al movimiento de vórtices. Esta es la razón última por la cual se mantiene aún hoy un esfuerzo por entender los mecanismos que gobiernan la dinámica de vórtices, lo que ha hecho de este tópico en particular un área muy activa tanto teórica como experimentalmente en los últimos años.

Antes de hablar directamente de vórtices, se debe empezar haciendo énfasis en que un material es considerado superconductor si presenta básicamente dos propiedades fundamentales: **diamagnetismo perfecto y resistividad eléctrica nula**. No obstante, el estado superconductor solo es posible en

[1] Los pares de Cooper representan los portadores de carga en el superconductor

temperaturas inferiores a una determinada temperatura crítica T_c, con campos magnéticos inferiores a un determinado campo crítico H_c y un valor de corriente inferior a la corriente crítica J_c, cuyos valores dependen de las propiedades del material.

En 1957, Alexei Abrikosov demostró que en un superconductor Tipo II, un campo magnético externo puede penetrar parcialmente en forma de vórtices cuantizados de flujo magnético. Este es el llamado estado mixto o *estado de Shubnikov*, en el cual se presenta una coexistencia entre el estado superconductor y el estado normal y aparece entre el primer y el segundo campo crítico termodinámico.

Como se ha mencionado, en el estado mezclado, el flujo magnético penetra en un superconductor de tipo II en forma de cuantos de flujo magnético $\phi_0 = \pi\hbar c/e$ ó vórtices de Abrikosov, los cuales en el estado de equilibrio constituyen una red regular. La presencia de tales vórtices en el interior del superconductor y su interacción con inhomogeneidades y defectos en el material determinan las propiedades magnéticas del superconductor y las posibilidades de la disipación de corriente, en general, la forma de equilibrio de vórtices de Abrikosov se asemeja a la distribución de líneas de fuerza del campo magnético externo. La penetración de los vórtices sobre las muestras superconductoras está bloqueda por la barrera de energía de Bean - Livingston, la cual existe cerca a la superficie y tiene un fuerte efecto sobre el movimiento de los vórtices en la dirección perpendicular a la superficie, mientras el campo magnético externo se va haciendo más fuerte, la barrera disminuye y finalmente desaparece completamente en campos cercanos al campo crítico termodinámico.

El problema de la coexistencia del orden magnético de largo alcance y la superconductividad es una de las preguntas que ha generado más interés en la Física de la Materia Condensada en la última década, y que continúa siendo un problema de gran interés científico [3]-[7]. Por un lado se descubrieron nuevos mecanismos de superconductividad donde la interacción magnética es el vehículo que genera la producción de los pares de Cooper. En otros casos, por ejemplo en la superconductividad de alta temperatura, descubierta en 1987, las interacciones antiferromagnéticas parecen tener un papel esencial, hecho que aún permanece enigmático [8]-[9]. En este mismo caso se demostró hace pocos años que la superconductividad y el magnetismo pueden coexistir en estructuras laminares como los ruteno-cupratos [10]-[11]. Es precisamente

dentro de este contexto que se recobró el interés por las propiedades magnéticas y de transporte de los óxidos de rutenio. Se puede observar también la existencia de superconductividad y magnetismo en sistemas artificiales híbridos superconductores-ferromagnetos, (S/F). Estos materiales, en particular pueden presentar nuevos fenómenos físicos interesantes como superconductividad de dominio reverso y de pared de dominio. Estos sistemas pueden ser proyectados y desarrollados experimentalmente a través de técnicas de nano estructuración [12] y pueden también ser modelados y estudiados teóricamente visando la obtención de los estados de equilibrio y al estudio de las configuraciones y dinámica de vórtices [13]-[16] en esos sistemas, así como la construcción de nuevos dispositivos capaces de modelar el campo magnético en una película superconductora.

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo estudiar la coexistencia de la superconductividad y el magnetismo en superconductores mesoscópicos desde el punto de vista teórico. Este abordaje tiene como objetivo el modelaje y estudio de los vórtices en superconductores tipo II en la presencia de un campo magnético y de nanoestructuras superconductoras-metal, superconductoras-superconductoras, superconductoras-aislantes utilizando la teoría de Ginzburg-Landau dependiente del tiempo [17]-[26]. El modelaje y estudio de las propiedades superconductoras de vórtices en muestras de diferente geometría es una herramienta poderosa para auxiliar la comprensión de las propiedades observadas en los sistemas experimentales escogidos, así como, permitir el desarrollo de nuevos dispositivos superconductores que utilicen como fenómeno básico de funcionamiento la coexistencia de superconductividad y magnetismo. Todo este esfuerzo en entender el estado de vórtices en superconductores es relativamente reciente de modo que hay aún varias preguntas sin respuesta. Este trabajo pretende contribuir en la elucidación de algunas de estas preguntas.

1.1. Estado del Arte

1.1.1. Estado de Vórtices en Muestras Superconductoras

Los vórtices son caracterizados generalmente por la circulación de la materia en torno a un núcleo. Huracanes, tifones y tornados son ejemplos de vórtices en la atmósfera, por otro lado a escala microscópica los vórtices

pueden ser observados en superconductores, superfluídos y condensados de Bose Einstein. En estos sistemas la circulación (cantidad relacionada con la integral de línea de campo en torno a un núcleo) está cuantizada, en nuestro caso, para materiales superconductores esto resulta en la cuantización del flujo magnético generado por un vórtice; bajo condiciones específicas los vórtices pueden ser tratados como partículas: interactúan mutuamente y con defectos en el material superconductor, como punto central de este trabajo se estudian muestras mesoscópicas superconductoras, en estos sistemas la dinámica de vórtices se encuentra regida por la competencia entre la interacción vórtice-vórtice y el potencial de confinamiento al que están sometidos. Este potencial surge debido tanto a la geometría de la muestra como a la existencia de centros de anclaje (generados por impurezas, cavidades, defectos, partículas magnéticas, etc). Los arreglos de vórtices tienden a seguir la geometría de la muestra y la distribución de centros de anclaje para baja densidad de vórtices. Para alta densidad de vórtices la interacción entre vórtices prevalece, resultando la red de Abrikosov.

Así, el éxito alcanzado en la actualidad, tanto en las propiedades como en el rendimiento sobresaliente de los superconductores, se debe en gran medida a la capacidad de describir y analizar los cuantos de flujo magnético: *los vórtices*. Algunos de los últimos temas de investigación relacionados con vórtices en superconductividad se citan a continuación:

Victor Moschalkov , et al, el 16 de Marzo de 2009 muestran los resultados de la existencia de un nuevo estado superconductor en la fase cristalina de MgB_2 donde se presentan propiedades combinadas de superconductores de tipo I y II ; se encontró una interacción atractiva entre vórtice-antivórtice a grandes distancias, y repulsiva a cortas distancias, lo cual establece patrones de vórtice no convencionales y permiten postularlo como un superconductor 1.5, acorde también a las simulaciones numéricas [2].

J. Barba-Ortega E. Sardella J. Albino Aguiar, en Septiembre de 2010 reportan la "Dinámica de vórtice antivórtice en un prisma mesoscópico superconductor "donde se estudia la dinámica de aniquilación de vórtice - antivórtice en un prisma mesoscópico superconductor [3].

[2]Victor Moschalkov, Mariela Meghini, T Nishio, Q.H. Chen, A.V. Silhanek, V.H. Dao, L.F.Chibotaru, N.D. Zhigadlo and J.Karpinski, Type 1.5 Superconductivity, Phys. Rev. Lett. 102, 117001 (2009.)

[3]J. Barba-Ortega, E. Sardella, J. Albino Aguiar, Vortex- Antivortex Dynamics in a

Andrey Chaves, F. M. Peeters, G. A. Farias, and M. V. Milosevic, en Marzo de 2011 reportan la interacción vórtice- vórtice en superconductores volumétricos empleando la Teoría de Ginzburg- Landau [4].

También en Marzo de 2011, *Chao-Yu Liu et-al*, publican un trabajo sobre estado de vórtices en capas superconductoras mesoscópicas, ellos hacen un estudio con la Teoría de Ginzburg Landau, de la estructura de vórtices en superconductores mesoscópicos anisotrópicos tridimensionales en presencia de un campo magnético uniforme, se incluye la anisotropía a través de la variación de T_c en diferentes capas de la muestra y se obtienen diferencias en los estados de vórtices y su energía libre [5].

Estudiando las propiedades del grafeno [6], *O. Oliveira, C.E. Cordeiro, A. Delfino, W. de Paula, and T. Frederico* hacen un estudio de la generación de vórtices y el gap en modelos de gauge del grafeno [7].

Por otro lado, uno de los temas de interés, en este último año, es la superconductividad de dos bandas, la superconductividad multibanda puede llegar a verse como un caso particular, pero representativo, de una superconductividad anisótropa. Bajo estas condiciones, ya no se habla de una variación del parámetro de orden superconductor en la misma capa de la superficie de Fermi, sino que éste es ahora diferente dependiendo de la capa de la superficie de Fermi considerada. Tal es la similitud con un superconductor anisótropo que ciertos autores han seguido un formalismo matemático análogo para tratar ambos tipos de superconductividad. Esta teoría, que se detalla para un superconductor de dos bandas, incluye procesos de interacción por emisión y

Mesoscopic Superconducting Prism with a Centered Antidot. Journal of Superconductivity and Magnetism (2011)

[4]Andrey Chaves, F. M. Peeters, G. A. Farias, and M. V. Milosevic ,Vortex-vortex interaction in bulk superconductors: Ginzburg-Landau theory. Phys. Rev. B 83, 054516 (2011).

[5]Chao-Yu Liu, G. R. Berdiyorov, and M. V. Milosevic, Vortex states in layered mesoscopic superconductors, Phys. Rev. B 83, 104524 (2011) Published March 31, (2011).

[6]Este material se convierte en superconductor a 5 Kelvin, lo cual supone una gran ventaja ya que permite utilizar helio líquido a 4.2 K como refrigerante, al igual que otros superconductores más convencionales como el niobio, y por tanto simplificar sus aplicaciones tecnológicas.

[7]O. Oliveira, C.E. Cordeiro, A. Delfino, W. de Paula, and T. Frederico, Vortex and gap generation in gauge models of graphene, Phys. Rev. B 83, 155419 (2011) Published April 11, (2011).

absorción de fonones entre electrones de una misma banda y entre electrones de bandas de distinto carácter, aunque la formación de pares de Cooper sea sólo posible entre electrones de la misma banda. A los procesos de interacción electrón fonón que implican a electrones de las dos bandas se les denomina procesos de scattering interbanda[8]

M. A. Silaev, reporta un estudio de flujo fraccional de vórtices y estado magnético no convencional en superconductores de dos bandas [9].

Tal como se logra apreciar, el estudio de vórtices en superconductores es un tema de investigación, sobre el cual, hay un sinnúmero de cuestiones por resolver. En general, cuando los vórtices son introducidos en un superconductor volumétrico, ellos forman la red triangular de Abrikosov, en el caso de superconductores mesoscópicos, para los cuales sus dimensiones son de un orden comparable con la longitud de coherencia ξ o bien, con la longitud de penetración λ diferentes configuraciones de vórtices pueden surgir debido a la interacción vórtice-vórtice y de los vórtices con las condiciones de frontera, ejemplo de esto, el trabajo de *H. Sano* donde el estado de vórtices en superconductores mesoscópicos, presenta cambios significativos en muestras superconductoras cuadradas de *Al*.

[8]C. C. Sung y V. K. Wong, Influence of nonmagnetic impurities on superconductors with overlapping bands, J. Phys. Chem. Solids 28, 1933 (1967).

[9]Mihail Silaev, Egor Babaev, Microscopic derivation of two-component Ginzburg-Landau model and conditions of its applicability in two-band systems. Physical Review B(2013)

Capítulo 2

Introducción a la Superconductividad

2.1. Historia de la Superconductividad

Durante el siglo XIX, surgieron grandes ideas científicas, las matemáticas recibieron un impulso, las publicaciones sobre la materia crecen exponencialmente en toda Europa. Los matemáticos comienzan a preocuparse por el rigor, la lógica y la abstracción. Florece la geometría y nace la física matemática. A principios del siglo XIX, Francia que era aún el centro cultural del mundo, lidera su desarrollo y las grandes escuelas de París son la guía para el resto de potencias. Pero Alemania pronto empieza a disputar la hegemonía del conocimiento, los trabajos excepcionales de Frederich Gauss llaman la atención del mundo, se formula la teoría de grupos, tan importante para la física; bajo la influencia de Riemann y Gauss, se extiende el uso del análisis vectorial en problemas de física; son épocas de un importante avance de la termodinámica entre otros temas. Las ecuaciones del electromagnetismo en su forma más sutil fueron escritas también en ésta época. Comenzaban los treinta años que cambiaron el devenir científico de la humanidad, nacían las ideas de la mecánica cuántica, se reformulaban los conceptos de tiempo y espacio planteados por Newton, y paralelamente nacía el interés exaltado por el estudio de las bajas temperaturas escondidas detrás del problema de la licuefacción de los gases, otro gran reto científico que surgía para los estudiosos de este crucial momento.

La licuefacción de los gases era el problema, Olszeweski en Cracovia

y Kamerlingh Onnes en Leiden estaban trabajando en la licuefacción del hidrógeno, a este reto también se unió el escocés James Dewar, quien comprimió fuertemente el hidrógeno y lo introdujo en un recipiente de nitrógeno líquido ($-196°C$) para enfriarlo [27]. Luego dejó que se descomprimiera; repitió en ciclos el proceso, obteniendo cada vez menores temperaturas, esperó y finalmente el hidrógeno terminó cediendo, el líquido comenzó a fluir exactamente el 10 de Mayo de 1898, Dewar había logrado bajar hasta casi $-253°C$. Solo quedaba el Helio, ese elemento que se había encontrado primero en el Sol y se había identificado en 1895 en la tierra, ese elemento era muy escaso, obtenerlo era uno de los primeros problemas; es precisamente en este crucial punto de la historia de bajas temperaturas donde entra Kamerlingh Onnes, quién contribuiría con los dos grandes eventos que darían lugar al nacimiento de la física de bajas temperaturas. La licuefacción del helio y el descubrimiento de la superconductividad, ambos tuvieron lugar en el laboratorio de la Universidad de Leiden (Países Bajos) [28].

El estudio experimental de la licuefacción de gases para la obtención de bajas temperaturas o temperaturas próximas al cero absoluto **(0K)** llevaron al descubrimiento de la **superconductividad**, analizando específicamente, las etapas del experimento, Kamerlingh Onnes se rodeó de todo un equipo de técnicos y científicos encargados explícitamente de labores individuales y cada una de ellas bastante importante, desde conseguir el helio hasta vigilar cuidadosamente los parámetros físicos experimentales, por ello confió a *Gilles Holst* la medición de la resistencia de los materiales a muy bajas temperaturas que según la Ley de Mathissen, la resistencia de los materiales tiene dos componentes. Una se debe a las impurezas contenidas en el material y no depende de la temperatura se le conoce como *resistencia residual* y la otra se debe a las vibraciones de los átomos de la red alrededor de sus posiciones de equilibrio, la llamada *resistencia térmica*. Esta última debe tender a cero cuando la temperatura baja hasta cero Kelvin. Examinaron el platino y el oro primero, seguidamente empezaron a experimentar con el mercurio, tomaron un tubo en forma de U y lo llenaron parcialmente de este material, el tubo tenía unos contactos de platino a cada lado, de los cuales se conectaba el circuito de medición, todo iba normal, pero cuando se acercaron a temperaturas de las del helio líquido (por debajo de los 5 Kelvin), la resistencia del material desapareció. Era evidente que se había presentado un corto circuito en el sistema. Es natural pensó Onnes, que a esas temperaturas pasen cosas que aún no dominamos bien, y sugirió repetir el experimento [28]-[29].

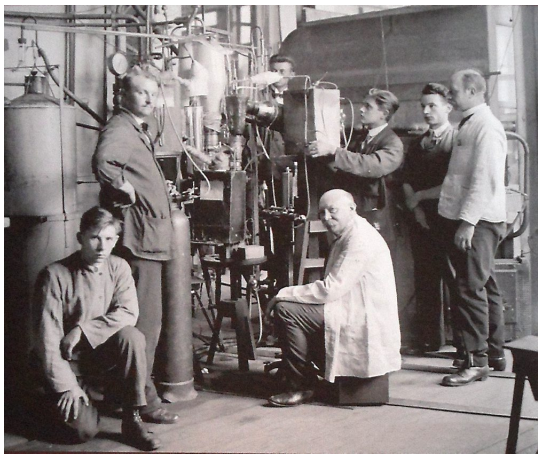

Figura 2.1: Heike Kamerlingh Onnes en compañía de su equipo de laboratorio, muestra el equipo con el que observó por primera vez la superconductividad. (*Foto de Wim Eradus*)

Holst obtuvo varias veces el mismo resultado. Onnes sugirió hacer un tubo en forma de W para medir la resistencia en sitios intermedios dentro del material. Repitieron la medida, otra vez el corto circuito!. Siempre a la misma temperatura la resistencia se hacía cero. Repitiendo una vez más el experimento, en un descuido técnico, no se vigiló el manómetro de tal manera que la presión permitió que la temperatura subiera por encima de los 4.2 K. Holst registró sorprendido, una resistencia finita. ¿De dónde venía ahora?, todo quedó claro, *no había corto circuito*. El efecto se producía exactamente a la misma temperatura y era reversible. Si se subía la temperatura una fracción de grado desaparecía, al bajar se restauraba la pérdida de la resistencia. [28]-[29].

Podemos hablar entonces, que un cambio en la resistencia eléctrica corresponde a una transición de fase que fue precisamente lo que se evidenció en el primer experimento, lo que lleva a identificar el rompimiento de simetría existente, el parámetro de orden de la transición, analizar las excitaciones elementales y clasificar los defectos topológicamente [30], en éste fenómeno en particular vamos de una fase normal a una nueva fase llamada fase superconductora. Así pues, podemos denominar transición de fase a un cambio en la forma en la que se presenta una sustancia sin alterar sus componentes y donde cada fase se encuentra en un estado de equilibrio en particular. Una

transición al estado superconductor es termodinámicamente reversible ya que si la temperatura comienza a aumentar nuevamente después de llegar a la temperatura crítica (T_c) volvemos a obtener el estado normal. Una (T_c) sirve para hacer caracterización de los superconductores y es común identificarlos de acuerdo con ésta. Existen dos tipos de superconductores los de **tipo I (SCI)** o **convencionales** y los de **tipo II SCII** que presentan estado de vórtices.

Las transiciones de fase se encuentran asociadas con la idea de simetría, así, un sistema muy desordenado tiene una alta simetría [31]. En caso de los superconductores una transición de fase aparece debido a un cambio de temperatura entonces cuanto menor sea la temperatura del sistema estará menos desordenado. Cuando un material llega al estado superconductor sucede un "ordenamiento " y por tanto se altera o se quiebra alguna simetría [32].

Cuando se alcanza una temperatura T_c, los electrones, asumiendo que son los responsables de la superconductividad se muestran más ordenados en un nuevo estado de la materia, éstos, no se comportan de un modo convencional cuando están en la fase superconductora, los electrones más externos, actuan libremente como un gas conocido como el gas de Fermi [33].

De esta manera, teniendo la idea de que la superconductividad representa un rompimiento de simetría debido al cambio de fase podemos especificar con base en los primeros principios experimentales planteados por Kamerlingh Onnes y su equipo, y posteriores investigadores curiosos y apasionados del tema, que una de las características más importantes de los superconductores es que son susceptibles a los efectos de los campos magnéticos. En el año 1933 Walter Meissner y Robert Ochsenfeld descubrieron el **diamagnetismo perfecto** este consiste en la desaparición total del flujo del campo magnético en el interior de un material superconductor por debajo de su temperatura crítica. . Midiendo la distribución de flujo en el exterior de muestras de plomo y estaño, enfriados por debajo de su temperatura crítica, encontraron que las líneas de campo magnético son expulsadas del interior del material, por lo que éste se comporta como un diamagneto perfecto. Este efecto ocurre cuando un campo magnético externo es aplicado y produce corrientes en la superficie del material que generan un campo magnético que repele a otro [1]-[2]. Existe entonces un cierto campo magnético crítico H_c que destruye la superconductividad en un material sin importar si se encuentra por debajo de su temperatura crítica. Para una temperatura $T < T_c$ tenemos un campo magnético crítico que destruye el estado superconductor (Figura. 2.2):

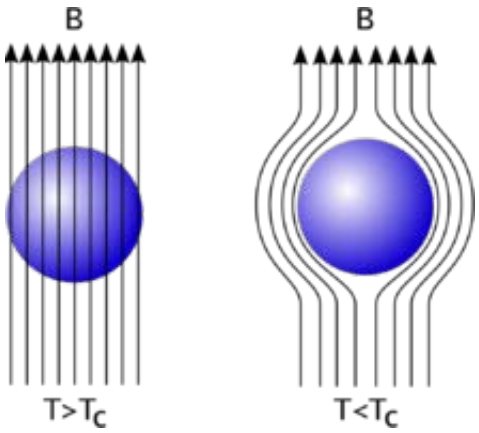

Figura 2.2: Efecto Meissner en una esfera superconductora en un campo magnético. Para la esfera izquierda $T > T_c$ en un material que se comporta como un conductor normal. Para la esfera de la derecha $T < T_c$ la esfera se torna superconductora.

Además de la observación del campo magnético crítico se dedujo también una corriente crítica por arriba de la cual el material pierde el estado superconductor. Los hermanos London establecieron en 1935 [34] las ecuaciones constitutivas que junto con las **ecuaciones de Maxwell** describen el comportamiento electromagnético de estos materiales. Los experimentos fueron develando también un comportamiento muy particular de la capacidad calorífica para temperaturas inferiores o iguales a la transición superconductora, junto a la existencia de un estado llamado **estado mixto**, donde algunos superconductores dejan de ser diamagnetos perfectos y dejan entrar parte del campo magnético pero de una manera muy particular: en **cuantos de flujo o vórtices** que pueden llegar a conformar en el interior una "red ordenada" [35].

Una de las teorías más importantes de la superconductividad, desarrollada para intentar explicar el fenómeno del estado mixto, es la teoría de Ginzburg-Landau, que tiene una lista importante de contribuciones a la comprensión de la fenomenología de los superconductores. Actualmente cuando surge un novedoso resultado experimental o teórico es común que como primer reflejo se quiera preguntar sobre las ecuaciones de Ginzburg Landau, ya que en la medida en la que ha aumentado nuestra comprensión sobre la superconductividad también la complejidad de los materiales y de la física involucrada.

Entre 1911 y 1957, los estudiosos de la superconductividad estuvieron atentos a toda nueva idea para aplicarla a la explicación de este fenómeno, la comprensión de este nuevo estado, requirió primero, del descubrimiento y la descripción de la mecánica cuántica, cuya formulación se desarrolló durante "los treinta años que cambiaron el mundo". Pero la mecánica cuántica no fue suficiente, fue necesario aún que los métodos de la teoría de campos fuesen inventados, lo cual ocurrió después de la Segunda Guerra Mundial. Y más aún, que se encontrara la forma de aplicarlos a problemas de estado sólido, lo cual ocurrió a comienzos de la década de los 50. En 1957, con la teoría de Bardeen, Cooper y Schrieffer (BCS) termina una de las más apasionantes batallas del pensamiento científico al lograr la formulación de la primera explicación coherente del fenómenos de la superconductividad que, por más de 40 años, permaneció inexplicado.

2.2. Termodinámica del Estado Superconductor

La transición entre las fases normal y superconductora de un metal, está asociada a su comportamiento magnético a bajas temperaturas, para entablar el formalismo de la termodinámica de superconductores debemos empezar hablando de la energía libre, ya que en cualquier sistema el estado más estable es aquel que tiene la energía libre más baja. Al considerar el campo magnético crítico de un superconductor [1], estamos interesados en la energía libre de Gibbs, debido a que es necesario comparar la diferencia en la contribución magnética a la energía libre de las dos fases, superconductora y normal, cuando están en el mismo campo aplicado [32].

La energía libre de Gibbs de un cuerpo en un campo magnético puede escribirse como

$$G = U - TS + PV - \mu_0 H_a M, \tag{2.1}$$

donde U es la energía interna, S la entropía, P la presión, V el volumen, μ_0 la permeabilidad del vacío, H_a el campo magnético aplicado y M el momento magnético por unidad de volumen. Si P y H_a son constantes,

[1] Campo magnético crítico: Campo en el cual se destruye el estado superconductor

$$dG = dU - TdS - SdT + PdV - \mu_0 H_a dM,$$

y de la primera ley de la termodinámica,

$$dU = TdS - PdV - \mu_0 H_a dM,$$

por consiguiente tenemos que:

$$dG = -SdT \text{ y } S = -(\tfrac{\partial G}{\partial T})_{P,H_a}$$

en forma similar pero ahora con T constante obtenemos:

$$\mu_0 M = -(\frac{\partial G}{\partial H})_{P,T}$$

La aplicación de un campo magnético incrementa la energía libre de un superconductor por una cantidad $\frac{1}{2}\mu_0 H_a^2$. El campo magnético crítico H_c, es el campo requerido para aumentar la energía libre del estado superconductor en una cantidad mayor a la del estado normal. Por lo tanto, la diferencia de energía libre en el estado normal y el estado superconductor en presencia de un campo magnético aplicado viene dada por,

$$G_n(T, H_a) - G_s(T, H_a) = \frac{1}{2}\mu_0(H_c^2 - H_a^2)$$

Como se puede ver la energía libre de Gibbs G_s aumenta con el cuadrado del campo magnético aplicado, es decir,

$$G_s(T, H_a) - G_s(T, 0) = \frac{1}{2}\mu_0(H_a^2)$$

Por lo tanto, teniendo en consideración que H_a no depende de la temperatura, la diferencia de entropía por unidad de volumen del estado normal y el estado superconductor viene dada por:

$$S_n - S_s = -\mu_0 H_c \frac{dH_c}{dT} \tag{2.2}$$

Por otra parte, si se mide el campo magnético crítico de un superconductor variando la temperatura, se encuentra que tiene un comportamiento representado por el de la (Figura 2.3), como podemos observar, cae desde un valor H_0 para temperaturas muy bajas, y luego llega a cero cuando se alcanza la temperatura de transición.

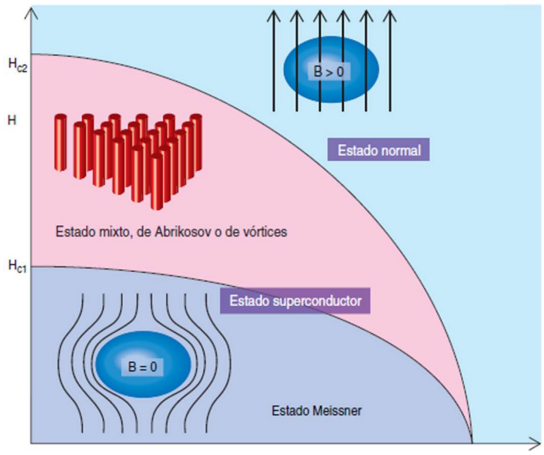

Figura 2.3: Diagrama de fase $H - T$ para un superconductor: se muestra el comportamiento del campo magnético crítico en función de la temperatura. *Tomado de Vórtices en Superconductores María Pilar González, Javier Villegas Investigación y Ciencia, Julio* 2007 *Universidad Complutense*

Al diagrama de la Figura. 2.3 se le llama diagrama de fase para el superconductor, de este diagrama podemos ver que un metal no puede ser superconductor para cualquier combinación de la temperatura y el campo magnético aplicado [32].
La expresión para el campo magnético crítico en función de la temperatura, viene dada por:

$$H_c = H_0[1 - (T/T_c)^2] \tag{2.3}$$

podríamos destacar que no hay un significado físico fundamental en la relación parabólica del campo crítico con la temperatura. Por otra parte el campo magnético crítico H_c, disminuye cuando la temperatura aumenta, es decir, $\frac{dH_c}{dT}$ es negativa, por lo tanto,

$$S_n - S_s > 0 \Rightarrow S_n > S_s$$

El campo magnético crítico se hace cero cuando la temperatura aumenta hasta $T = T_c$, de donde podemos ver que,

$$S_n - S_s = 0$$

es decir, a esta temperatura $S_n = S_s$. En el otro límite, cuando $T = 0$, por la tercera ley de la termodinámica $S_n = S_s$

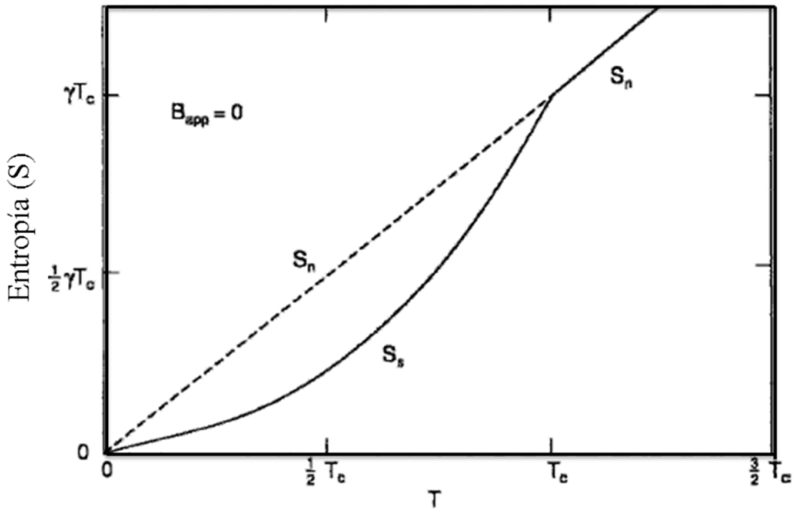

Figura 2.4: Dependencia de la entropía con la temperatura del estado normal S_n y del estado superconductor S_s. La transición es de segundo orden tal que no hay discontinuidad en la entropía en T_c (γ es el coeficiente electrónico [34]). *Tomado de Poole Superconductivity.*

Del hecho de que las entropías para el estado normal y para el estado superconductor deban ser iguales en $T = 0$, podemos deducir que $\frac{dH_c}{dT}$ debe ser cero ya que $H_c \neq 0$ en $T = 0$.

Por otro lado, gran parte de la comprensión de la fenomenología superconductora ha surgido de medidas de calor específico, la curva de la Fig.2.4, muestra el comportamiento del calor específico de un superconductor típico tipo I, en ausencia de un campo magnético aplicado. La curva para el estado normal, puede obtenerse haciendo medidas en un campo magnético suficientemente fuerte, de tal forma que rompa el estado superconductor y así poder pasar al estado normal.

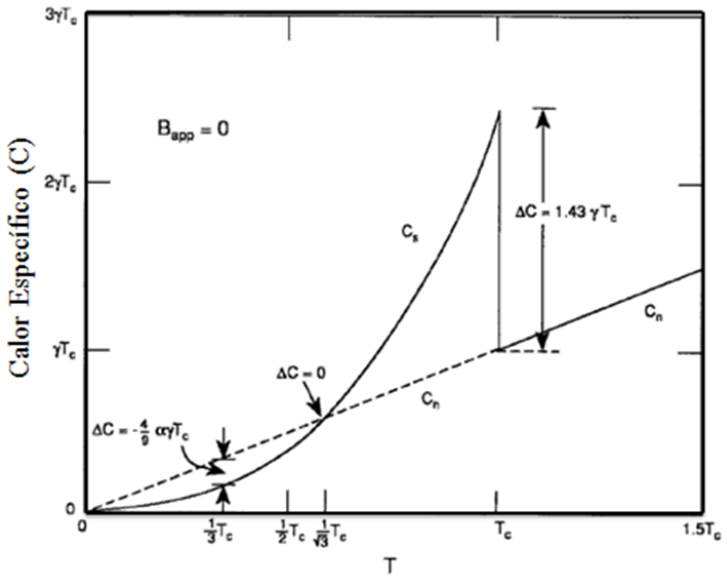

Figura 2.5: Dependencia del calor específico con la temperatura para el estado normal y para el estado superconductor. *Tomado de Poole Superconductivity*

2.3. Teorías Fenomenológicas

2.3.1. Teoría de London: Electrodinámica de un Superconductor.

Un modelo que logre describir el fenómeno de la superconductividad como una caida de resistividad, debe ser compatible con las ecuaciones de Maxwell, con este propósito, una de los primeras teorías fenomenológicas que se planteó fue propuesta por los hermanos **F. y H. London** (1935) ellos propusieron un modelo con dos ecuaciones para los campos eléctricos y magnéticos microscópicos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Lambda \mathbf{j_s}) = \mathbf{E}, \tag{2.4}$$

$$\nabla \times (\Lambda \mathbf{j_s}) = \mathbf{E} = -\mathbf{h}, \tag{2.5}$$

Con $\mathbf{\Lambda}$ un parámetro fenomenológico a determinar que caracteriza al material superconductor. El modelo de London, es un modelo de dos fluidos, ya que se tienen dos tipos de electrones, los normales y los superconductores,

de hecho se considera que todos los electrones de conducción son electrones que se encuentran en la fase superconductora.

$$\rho = \rho_s + \rho_n \tag{2.6}$$

El modelo de los dos fluidos permite establecer la idea de densidad de corriente j, mediante un flujo de electrones; $\mathbf{j}$ es una suma de corriente normal y de supercorriente asociadas a los electrones normales y superconductores respectivamente, $j = j_n + j_s$. Definimos la supercorriente j_s como

$$j_s = e\rho_s v_s, \tag{2.7}$$

donde e es la carga y v_s la velocidad de los electrones superconductores. Usando la ecuación de movimiento de una partícula cargada sometida a un campo eléctrico:

$$m\frac{\partial \mathbf{v_s}}{\partial t} = e\mathbf{E}$$

Empleando la derivada temporal en la ecuación 2.7, e igualando con la ecuación de movimiento obtenemos fácilmente:

$$\frac{m}{e^2\rho_s}\frac{\partial j_s}{\partial t} = E$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación 2.4, de esta manera hemos encontrado la forma del parámetro fenomenológico Λ:

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{m}{e^2\rho_s}$$

Ahora, sustituimos en la otra ecuación de London, ecuación 2.5, la ecuación de Maxwell, $\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j}$, y usando identidades vectoriales obtenemos una ecuación diferencial,

$$\nabla^2\mathbf{h} - \nabla \cdot \mathbf{h} - \frac{1}{\Lambda}\mathbf{h} = \nabla^2\mathbf{h} - \frac{1}{\Lambda}\mathbf{h} = 0 \tag{2.8}$$

donde $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$. Esta ecuación diferencial tiene una solución donde h_0 va desde la frontera del material al interior del superconductor,

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{h_0} e^{-r/\sqrt{\Lambda}} \tag{2.9}$$

Por tanto, podemos relacionar Λ con una longitud de penetración que llamaremos λ_L^2 para $\mathbf{h}(r)$, tal que

$$\lambda_L = \sqrt{\Lambda} = \sqrt{\frac{m}{e^2 \rho_s}} \tag{2.10}$$

que está definida como la longitud de penetración de London, la cual mide la penetración del campo magnético en el interior del material.

A pesar de la importancia del modelo de London, el cual predice algunas características de la electrodinámica para materiales superconductores, éste no esclarece satisfactoriamente la coexistencia del estado normal y superconductor en los **SCII.**

2.4. Teoría de Ginzburg Landau

Si bien la teoría de London fue muy importante en la comprensión de la superconductividad tiene una suposición muy fuerte y es que la densidad electrónica es constante en el espacio. La teoría no permite calcular correctamente la destrucción de la superconductividad por un campo magnético o una corriente.

En orden a tratar de solucionar este problema, nace una de las teorías más poderosas que ha sido desarrollada para explicar el fenómeno de la superconductividad: la teoría de Ginzburg Landau, que siguiendo el criterio general de la teoría sobre transiciones de Landau y Lifshitz expone a la superconductividad como una **transición de fase de segundo orden** en la que el parámetro de orden varía continuamente y no hay calor latente. La teoría de Ginzburg-Landau se caracteriza por ser una teoría intuitiva, el parámetro de orden que caracteriza la transición, se anula en la fase desordenada, y será diferente de cero en la fase ordenada [35].

En este caso, con intención de tener en cuenta los efectos cuánticos, se elige un parámetro de orden complejo $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\varphi(r)}$ tal que $|\psi(\mathbf{r})|^2$ es proporcional a la densidad de pares de Cooper, $n_s(\mathbf{r})$. Así, ψ puede ser interpretada como una pseudofunción de onda de los portadores de carga

del superconductor. Aquí, contrario a la teoría de London, n_s no es necesariamente homogénea en el espacio. Otro de los postulados básicos es que próximo a la transición de fase, ψ es pequeño y con variaciones suaves en el espacio, de modo que la energía libre de Helmholtz puede ser expandida en potencias de $|\psi|^2$ y del potencial vector $\mathbf{A}$.

2.4.1. Derivación de la Teoría Ginzburg-Landau

Energía Libre

Cerca a T_c la energía libre de Gibbs puede ser expandida como [35]:

$$G_s = G_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*}\left|\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi\right|^2 + \frac{h^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{h}-\mathbf{h_0}}{4\pi}\cdot\mathbf{h}_0 \tag{2.11}$$

Donde h es el campo magnético microscópico en un punto dado del superconductor y G_n es la densidad de energía libre de un superconductor en el estado normal cuando no se aplica campo. Cuando aplicamos el campo, la densidad de energía libre de un superconductor, en el estado normal está dada por $G_{nH} = G_n + h_0^2/8\pi$, este último término representa la densidad de energía magnética [36].

- La primera parte de la ecuación 2.11 es una expansión de la densidad de energía libre para un superconductor homogéneo en ausencia de un campo magnético externo, en potencias de $|\psi|^2$ cerca a la temperatura crítica en el campo cero $T_{c0} \equiv T_c(H_0 = 0)$,

$$G_{sH} = G_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4, \tag{2.12}$$

donde α y β son coeficientes fenomenológicos provenientes de la expansión de la energía, y estos caracterizan el material, el coeficiente α es negativo y depende de la temperatura, tal que $\alpha \propto (T - T_{c0})$, mientras que β es una constante positiva. De la ecuación 2.11 la densidad de pares de Cooper correspondiente a la energía libre mínima en temperaturas por debajo de T_c, puede ser calculada como:

$$|\psi_0|^2 = -\alpha/\beta \tag{2.13}$$

- El siguiente término es la energía cinética de los pares de Cooper:

$$\frac{1}{2m^*}|(-\imath\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A})\psi|^2, \tag{2.14}$$

La masa de los pares de Cooper m^* es dos veces la masa de un electrón, y la carga de los pares de Cooper de igual manera, es dos veces la carga de un electrón e. Si estamos en ausencia de campos, la densidad de energía cinética de un partícula de masa m^* viene a ser:

$$\frac{1}{2m^*}|(-\imath\hbar\nabla\psi)|^2, \tag{2.15}$$

Ahora, para una partícula de carga $2e$ moviéndose en un campo magnético con un potencial vector $\mathbf{A}$, el operador $-\imath\hbar\nabla$ puede ser modificado por:

$$-\imath\hbar\nabla \rightarrow -\imath\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}, \tag{2.16}$$

- Entre los últimos términos encontramos la densidad de energía magnética $\mathbf{h}^2/8\pi$.

- El último término describe la reducción del campo magnético debido a la penetración del campo, es decir:

$$-\frac{\mathbf{h} - \mathbf{h}_0}{4\pi} \cdot \mathbf{h_0}, \tag{2.17}$$

La energía libre de Gibbs total de un superconductor es,

$$\mathcal{G}_{sh} = \mathcal{G}_{nh} + \int \left(\alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 \frac{1}{2m^*} \left| \left(-\imath\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \right)$$

$$\left(\frac{h^2}{8\pi} + \frac{h_0^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{h}\cdot\mathbf{h_0}}{4\pi}\right) dV \tag{2.18}$$

Notemos que la integración se realiza en el espacio completo V, por otro lado podemos apreciar que G_{Sh} es un funcional de $\psi(\mathbf{r})$ y $\mathbf{A(r)}$. Minimizar G_{Sh} con respecto a estas dos funciones llevará a las ecuaciones de Ginzburg Landau.

2.4.2. Primera Ecuación de Ginzburg-Landau

Para obtener el mínimo de la energía libre de Gibbs derivamos la expresión 2.18 con respecto a ψ^* [37]:

$$\int \left(\alpha|\psi|\delta\psi^* + \beta\psi|\psi|^2\delta\psi^* + \frac{1}{2m^*}\varphi\left|\left(-\imath\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\delta\psi\right|^2\right) dV' \tag{2.19}$$

donde

$$\varphi = \left(-\imath\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi, \tag{2.20}$$

V' es el volumen de la muestra. La integración se restringe al volumen V' ya que fuera de esta región el parámetro de orden ψ es cero. El último término de la ecuación 2.19 es equivalente a escribir:

$$\frac{\imath\hbar}{2m^*}\int \varphi\cdot\nabla\delta\psi^* dV' - \frac{2e}{2m^*c}\int \varphi\cdot\mathbf{A}\delta\psi^* dV', \tag{2.21}$$

Y puede simplificarse a:

$$\frac{\imath\hbar}{2m^*}\left[-\int \delta\psi^*\nabla\cdot\varphi dV' + \int \nabla\cdot(\delta\psi^*\varphi)dV'\right] - \frac{2e}{2m^*c}\int \varphi\cdot\mathbf{A}\delta\psi^* dV'. \tag{2.22}$$

Al hacer uso de la identidad vectorial:

$$\nabla\cdot(\delta\psi^*\varphi) = \varphi\cdot\nabla\delta\psi^* + \delta\psi^*\nabla\cdot\varphi$$

Sustituyendo la identidad anterior en la ecuación 2.19 obtenemos que:

$$\int \left[\alpha\psi\delta\psi^* + \beta\psi|\psi|^2\delta\psi^* - \frac{\imath\hbar}{2m^*}\delta\psi^*\nabla\cdot\varphi + \frac{\imath\hbar}{2m^*}\nabla\cdot(\delta\psi^*\varphi) - \frac{2e}{2m^*c}\varphi\cdot\mathbf{A}\delta\psi^*\right]dV' = 0 \tag{2.23}$$

Usando el **teorema de Gauss** $\int \nabla\cdot\mathbf{A}dV' = \oint \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}dS'$ la ecuación 2.22 se transforma a:

$$\int \left[\alpha\psi\delta\psi^* + \beta\psi|\psi|^2\delta\psi^* - \frac{\imath\hbar}{2m^*}\nabla\cdot\varphi - \frac{2e}{2m^*c}\varphi\cdot\mathbf{A}\delta\psi^*\right]dV' + \frac{\imath\hbar}{2m^*}\oint_{S'}\mathbf{n}\cdot\delta\psi^*\varphi dS' = 0, \tag{2.24}$$

donde S' es la superficie de la muestra, de esta forma:

$$\int \left[\alpha\psi\delta\psi^* + \beta\psi|\psi|^2\delta\psi^* - \frac{\imath\hbar}{2m^*}\nabla\cdot\varphi - \frac{2e}{2m^*c}\varphi\cdot\mathbf{A}\delta\psi^*\right]dV' = 0 \tag{2.25}$$

y

$$\frac{\imath\hbar}{2m^*}\oint_{S'}\mathbf{n}\cdot\delta\psi^*\varphi dS' = 0 \tag{2.26}$$

Sustituyendo la ecuación 2.20 en las expresiones 2.24 y 2.25 y usando $\nabla\psi\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\nabla\psi + (\nabla\cdot\mathbf{A})\psi = \mathbf{A}\cdot\nabla\psi$ y sabiendo que $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, se obtiene:

$$\int \left[\alpha\psi\delta\psi^* + \beta\psi|\psi|^2\delta\psi^* - \frac{1}{2m^*}\left(-\imath\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi\delta\psi^*\right]dV' = 0 \tag{2.27}$$

y

$$\frac{\imath\hbar}{2m^*}\oint_{S'}\mathbf{n}\cdot\delta\psi^*\left(-\imath\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi dS' = 0 \tag{2.28}$$

Las expresiones 2.27 y 2.28 son válidas para una función arbitraria $\delta\psi^*$, de ésta manera obtenemos la ecuación de la teoría de Ginzburg- Landau y su condición de frontera [37].

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*}\left(-\imath\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi = 0, \tag{2.29}$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(-\imath\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi|_{frontera} = 0 \tag{2.30}$$

$\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie del superconductor.

De Gennes, usando la teoría microscópica BCS, generalizó esta condición para interfaces superconductor/metal o superconductor/superconductor a T_c más alta:

$$\mathbf{n} \cdot \left(-\imath\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi|_s = \frac{i}{b}\psi|_s, \tag{2.31}$$

donde b es una constante real arbitraria. Este parámetro fenomenológico b caracteriza los efectos de frontera sobre el parámetro de orden.

2.4.3. Segunda Ecuación de Ginzburg-Landau

Para minimizar la energía libre de Gibbs variamos la ecuación (2.18) esta vez con respecto al potencial vector $\mathbf{A}$ [37]

$$\frac{1}{2m^*}\int \left[\left(-\frac{2e}{c}\delta\mathbf{A}\psi^* \right) \cdot \left(-\imath\hbar\nabla\psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\psi \right) + \left(\imath\hbar\nabla\psi^* - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\psi^* \right) \cdot \left(-\frac{2e}{c}\delta\mathbf{A}\psi \right) \right] dV +$$

$$\frac{1}{4\pi}\int (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{h}_0) \cdot \nabla \times \delta\mathbf{A} dV = 0, \tag{2.32}$$

con $\mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{A}$, y V el volumen del espacio completo, la variación $\delta(\mathbf{h})^2 = \delta(\nabla \times \mathbf{A})^2$ se ha escrito como $2\nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \delta\mathbf{A}$. Usando la identidad vectorial:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{r}$$

y tomando $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{h}_0$ y $\mathbf{a} = \delta\mathbf{a}$ encontramos:

$$\frac{1}{2m^*}\int \left[\left(-\frac{2e}{c}\delta\mathbf{A}\psi^* \right) \cdot \left(-\imath\hbar\nabla\psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\psi \right) + \left(\imath\hbar\nabla\psi^* - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\psi^* \right) \cdot \left(-\frac{2e}{c}\delta\mathbf{A}\psi \right) \right] dV +$$

$$\frac{1}{4\pi}\int \left[\delta\mathbf{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} + div(\delta\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{h_0}))\right]dV = 0 \tag{2.33}$$

Haciendo uso del teorema de Gauss la última parte de la ecuación 2.32 puede ser escrita como:

$$\int div(\delta\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{h}_0))dV = \oint_S d\mathbf{S}\cdot[\delta\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{h_0})], \tag{2.34}$$

Combinando los primeros términos de la ecuación (2.32) se llega a:

$$\int\left[\frac{\imath\hbar e}{m^*c}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)+\frac{4e^2}{m^*c^2}|\psi|^2\mathbf{A}+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}\right]\cdot\delta\mathbf{A}dV=0 \tag{2.35}$$

Para un $\delta\mathbf{A}$ arbitrario, la ecuación (2.34) puede ser cero, únicamente si la expresión en el paréntesis cuadrado es cero:

$$\frac{\imath\hbar e}{m^*c}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)+\frac{4e^2}{m^*c^2}|\psi|^2\mathbf{A}+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=0 \tag{2.36}$$

la densidad de corriente j_s en el material superconductor, puede ser descrita mediante la ecuación de Maxwell:

$$\mathbf{j}_s=\frac{c}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}, \tag{2.37}$$

y consecuentemente obtenemos la segunda ecuación de la teoría de Ginzburg-Landau:

$$\mathbf{j}_s=-\frac{\imath\hbar e}{m^*}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi*)-\frac{4e^2}{m^*c|\psi|^2\mathbf{A}}, \tag{2.38}$$

2.4.4. Condiciones de Contorno

Cuando aplicamos las ecuaciones de Ginzburg Landau a una muestra finita se hace necesario introducir condiciones de contorno. Una condición de frontera para el potencial vector A es aquélla en la cual el campo magnético en la superficie del superconductor s debe ser igual al campo magnético externo aplicado H_e [38]:

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{n}}|_s = \mathbf{H_e} \times \hat{\mathbf{n}}|_s, \tag{2.39}$$

donde $\hat{n}$ es la componente normal a la superficie del superconductor. La condición de frontera para la interfaz superconductor/vacío puede escribirse como:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left(-\imath\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A}\right) \psi \mid_s = 0 \tag{2.40}$$

Esta condición asegura que la corriente no puede atravesar la interfaz superconductor vacío.

De Gennes, usando la teoría microscópica BCS, generalizó esta condición para las fronteras superconductor/metal y superconductor/superconductor para una T_c más alta (Figura 2.6) [39]

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left(-\imath\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A}\right) \psi|_s = \frac{\imath}{b}\psi \mid_s, \tag{2.41}$$

donde b es una constante real arbitraria. Este parámetro fenomenológico b caracteriza los efectos de frontera sobre el parámetro de orden. Explícitamente, cuando el parámetro de orden $|\psi|$ en la frontera es extrapolado linealmente, $|\psi| \to 0$ a una distancia b de la frontera. Así pues, el parámetro b determina las siguientes condiciones de frontera:

1. La interfaz superconductor/vacío o superconductor/aislante está determinada por $b \to \infty$, lo cual significa que las supercorrientes no pueden fluir fuera del superconductor debido a la contaminación con los electrones normales.

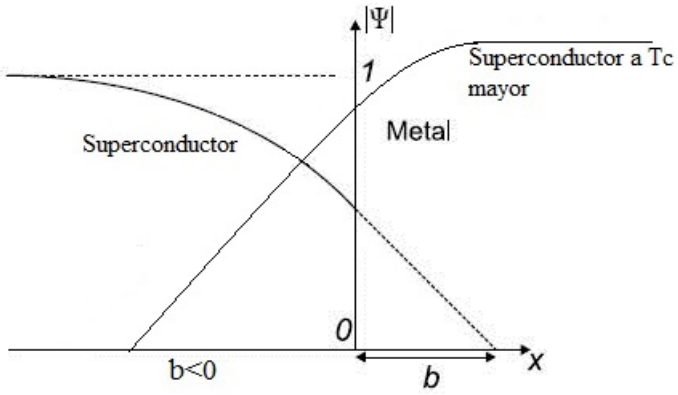

Figura 2.6: Representación esquemática de la dependencia espacial del parámetro de orden con la longitud de extrapolación de De Gennes b en la interfaz entre un superconductor y un metal normal y superconductor/superconductor a mayor T_c.

2. $b > 0$ describe una interfaz superconductor/metal, lo que causará una supresión de la superconductividad en los bordes de la muestra

3. La interfaz superconductor/superconductor ocasionará que a mayor temperatura crítica se pueda modelar la condición $b < 0$, llevando a un aumento de la superconductividad en la frontera.

4. Para $b = 0$, esta condición de contorno presenta las mismas características que la condición de contorno de Dirichlet $\psi|_s = 0$ y es idealizada para analizar un superconductor con una alta densidad de defectos normales en la interfaz.

2.4.5. Escalas de Longitud Característica

La teoría de Ginzburg-Landau introduce dos importantes longitudes características: la longitud de penetración de London λ que caracteriza la distancia en la cual el campo magnético puede variar sobre la superficie del superconductory la longitud de coherencia ξ que es la distancia en la cual varía el parámetro de orden.

Podemos derivar éste parámetro de la primera ecuación de Ginzburg-Landau [39], analizamos un superconductor semi-infinito con superficie plana

en $x = 0$. Para una situación en ausencia de campos y corrientes, la ecuación 2.29 en forma unidimensional es:

$$\alpha\psi + \beta\psi^3 - \frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2}{dx^2}\psi = 0 \tag{2.42}$$

La solución no nula describe un estado superconductor uniforme dado por:

$$\psi = \psi_0 = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \tag{2.43}$$

Cerca a la superficie del superconductor, por ejemplo, el valor de $\psi(x)$ es diferente de ψ_0. Al calcular la longitud sobre la cual el parámetro de orden puede variar, resulta útil escribir ψ en variables adimensionales, tal que $\psi = f\psi_0$.

Tomando en cuenta que $\alpha < 0$ la Ecuación 2.41 se convierte en:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}\frac{d^2f}{dx^2} - f + f^3 = 0, \tag{2.44}$$

lo cual significa que la longitud característica sobre la cual f y por lo tanto ψ puede cambiar está dada por:

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}}. \tag{2.45}$$

Ya que α depende de la temperatura tal que

$$\alpha \propto (1 - T/T_{c0})^{-1/2} \tag{2.46}$$

Ahora, relacionando $\xi(T)$ con la longitud de coherencia ξ_0, obtenida por medio de la teoría microscópica [1], obtenemos:

$$\xi(T) = 0.74\frac{\xi_0}{\sqrt{1-t}} \quad \text{para} \quad l_{el} \gg \xi_0, \tag{2.47}$$

$$\xi(T) = 0.855\sqrt{\frac{\xi_0 l_{el}}{1-t}} \quad \text{para} \quad l_{el} \ll \xi_0, \tag{2.48}$$

donde l_{el} es el camino libre medio elástico de los electrones normales. Las expresiones anteriores son válidas sólamente para temperaturas próximas a T_c. Estos límites son conocidos como límite "limpio"para $l_{el} \gg \xi_0$, y límite "sucio"para $l_{el} \ll \xi_0$ [35].

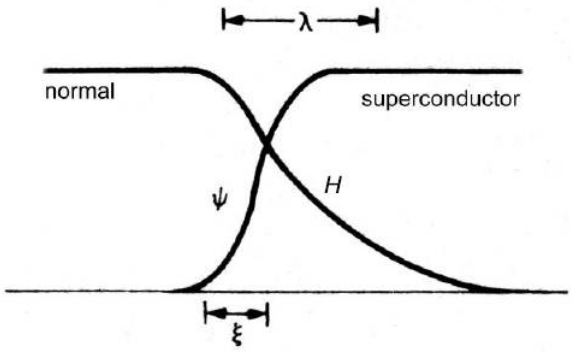

Figura 2.7: Dependencia radial del parámetro de orden ψ y el campo magnético h en la condición de frontera superconductor/normal [1].

Longitud de penetración λ. La escala de longitud típica sobre la cual el campo magnético $\mathbf{h}$ puede variar dentro del superconductor es la longitud de penetración $\lambda(T)$. Esta longitud puede ser derivada en forma similar de la segunda ecuación de Ginzburg- Landau [39]. Vamos a considerar la situación donde $\psi = \psi_0$ y tomar el rotacional de ambos lados de la ecuación 2.37

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{4e^2}{m^* c}|\psi|^2 \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.49}$$

Usando la ecuación de Maxwell $\nabla \times \mathbf{h} = \frac{4\pi \mathbf{j}_s}{c}$, tenemos:

$$\mathbf{h} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = 0, \tag{2.50}$$

y la longitud característica sobre la cual el campo magnético $\mathbf{h}$ puede variar está dada por,

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{m^* c^2}{16\pi e^2 |\psi_0|^2}} = \sqrt{\frac{m^* c^2}{8\pi e^2 n_s}} = \sqrt{\frac{m^* c^2 \beta}{16\pi |\alpha| e^2}}, \tag{2.51}$$

donde la densidad de electrones superconductores $n_s = 2|\psi_0|^2 = 2|\alpha|/\beta$ y la masa de los pares de Cooper es dos veces la masa del electrón $2m^*$. También la longitud de penetración varia como una función de la temperatura, de la forma:

$$\lambda(T) \propto (1 - T/T_{c0})^{-1/2}, \tag{2.52}$$

Ya que $|\psi_0|^2 \propto |\alpha| \propto (T_{c0} - T)$.La relación entre la longitud de penetración dependiente de la temperatura y la longitud de penetración de London para una temperatura próxima al cero absoluto, difieren para materiales puros y sucios [1]-[3]

$$\lambda(T) = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{2}}(1 - T/T_{c0})^{-1/2} \quad \text{cuando} \quad l_{el} \gg \xi_0 \quad \text{puro}, \tag{2.53}$$

$$\lambda(T) = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\xi_0}{1.33 l_{el}}}(1 - T/T_{c0})^{-1/2} \quad \text{cuando} \quad l_{el} \ll \xi_0 \quad \text{sucio}, \tag{2.54}$$

Un resultado importante en las ecuaciones anteriores es que en el límite "sucio", si l_{el} decrece (el superconductor es más impuro), $\lambda(T)$ crece, en tanto que, $\xi(T)$ decrece. Así para todas las temperaturas y materiales impuros tenemos en general, $\lambda(T) \gg \xi(T)$. Los superconductores de alta temperatura crítica tienen una longitud de coherencia del orden de $\xi(T) = 1.2 - 1.5nm$ y un camino libre medio típico del orden de $l_{el} \sim 15nm$, luego podemos considerar estos materiales dentro del límite "limpio". Se debe notar que $\xi(T)$ y $\lambda(T)$ tienen el mismo comportamiento para $T \to T_c$. Esto hace posible introducir un nuevo parámetro específico de cada material, el llamado **parámetro de Ginzburg-Landau** $\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$, el cual es independiente de la temperatura, y su valor es muy importante para determinar el tipo de superconductor [37].

2.4.6. Ecuación de Ginzburg-Landau Linealizada (Campos H_{c2} y H_{c3})

Como ya se ha mencionado, existen dos tipos de superconductores, los de tipo I, son materiales que presentan estado Meissner hasta un campo crítico

H_c; si se excede este valor ocurre una destrucción completa de la superconductividad. Los superconductores de tipo II, presentan estado Meissner hasta un campo crítico inferior H_{c1} (pueden ser decenas o centenas de gauss). Con un aumento del campo el sistema presenta un estado mixto, caracterizado por la penetración de líneas de flujo magnético cuantizadas que atraviesan la muestra hasta que el campo alcanza un valor de segundo campo crítico H_{c2} (puede ser centenas de teslas) donde la superconductividad es destruída. Para muestras finitas existe un tercer campo crítico, $H_{c3} > H_{c2}$, en el cual el material presenta superconductividad en una determinada región superficial del orden de $\sim \xi(T)$ [37].

Mostraremos aquí cómo se pueden linealizar las ecuaciones de Ginzburg-Landau y usarlas para obtener H_{c2} y H_{c3}.

Las ecuaciones de Ginzburg-Landau linealizadas pueden ser aplicadas en casos donde $|\psi| \ll 1$, "o sea la densidad"de vórtices es alta, ya que el parámetro de orden tiende a decaer. Tales casos, incluyen películas finas de espesor $d \ll \xi(T)$ y superconductores en general a una temperatura y campo magnético muy próximos a la línea de transición $T_c(H)$. Por otra parte, en este caso, tenemos que todos los efectos de blindaje debido a las supercorrientes son despreciables, ya que todas son proporcionales a $|\psi|^2$. Como consecuencia se obtiene una única ecuación para $|\psi|$ con $\mathbf{A}$=$\mathbf{A}_{externo}$.

Próximo a la transición del estado superconductor al estado normal, $\psi \to 0$, podemos considerar que el campo magnético aplicado H_e no será expelido del interior de la muestra, al asumir que el término $\beta|\psi|^2\psi$ es despreciable comparado con los términos lineales en ψ en la primera ecuación de **GL**, es decir que $\mathbf{A}\approx \mathbf{A}_{externo}$. Bajo estas condiciones obtenemos una versión linealizada de la primera ecuación de Ginzburg-Landau (ecuación de Ginzburg Landau linealizada (LGL)) de la siguiente forma:

$$\left(-i\nabla - \frac{e^*}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2 \psi = -\frac{2m^*\alpha(T)}{\hbar^2}\psi = \frac{1}{\xi^2(T)}\psi \tag{2.55}$$

Esta ecuación es formalmente idéntica a la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m^* y carga e^* en presencia de un campo magnético uniforme H_e, con valores propios de energía $-\alpha$.

Ahora, si disminuimos gradualmente el campo aplicado desde el estado normal, podemos calcular el campo magnético en el cual la superconductividad comienza a "nuclear" en el interior de una muestra voluminosa

(idealmente infinita), llamado el H_{c2} o segundo campo crítico termodinámico. Resolviendo la ecuación 2.55 para $\nabla \times \mathbf{A}$=$\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_{c2}$, hallamos una solución para un valor de energía menor, obteniendo:

$$-\alpha = \frac{e^*\hbar}{m^*c} H_{c2} \tag{2.56}$$

Relacionando H_c con H_{c2} obtenemos [1]-[2]:

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2(T)} = \sqrt{2}\kappa H_c. \tag{2.57}$$

Es bueno recordar que los cálculos que conducen a la ecuación 2.55 son considerados para regiones superconductoras lejos del borde del material. De hecho, la nucleación siempre ocurre en la superficie.

Veremos ahora el efecto de los bordes sobre las propiedades del superconductor. Asumiendo un plano semi-infinito (radio de curvatura $\gg \xi(T)$), en $x > 0$, sus bordes estan en contacto con el vacío lo que nos permite aplicar la condición de contorno (2.29). Simplificamos el problema tomando $\mathbf{H}_e$=$H_e\ \hat{\mathbf{z}}$ paralelo a la superficie yz del superconductor. Además seleccionando el gauge de London $\mathbf{A}$=$xH_e\ \hat{\mathbf{y}}$ y procurando soluciones de la forma $\psi(x, y) = e^{iky} f(x)$, podemos escribir la Ec. (2.55) y su condición de frontera como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{2m^*}(\hbar\kappa - e^2 H_e x)f = -\alpha f \tag{2.58}$$

$$\frac{df}{dx}\ |_{x=0} = 0 \tag{2.59}$$

La ecuación (2.59) es semejante a la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico simple con frecuencia $\omega_c = (|e^*|H_e)/(2m^*)$ y la energía $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$. Para $n = 0$ y $k_z = 0$, tenemos:

$$\psi(x, y) \sim e^{\imath ky} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\xi^2}} \tag{2.60}$$

Observemos que la condición (2.59) se satisface de forma adecuada para $x_0 \gg \xi(T)$ ya que la función de onda del estado fundamental del oscilador armónico es una gaussiana centrada en x_0 con amplitud despreciable en la

superficie. Para el caso opuesto, $x_0 = 0$, la función de onda también satisface la condición (2.59), ya que la derivada del pico de la gaussiana (centrada en $x_0 = 0$) es cero. No obstante, para el caso intermedio $x_0 \sim \xi$ existe un autovalor de energía menor que el presentado para el caso volumétrico. Un cálculo detallado, muestra un valor óptimo de $x_0 = 0.59\xi(T)$, indicando que la presencia de una superficie favorece la nucleación. Entonces:

$$-\alpha = 0.59\frac{|e^*\hbar|H_{c3}}{2m^*}, \tag{2.61}$$

Donde H_{c3} es el tercer campo crítico asociado con el estado de la superconductividad superficial. Los campos críticos Hc_2 y Hc_3 están relacionados mediante la siguiente expresión [39]:

$$H_{c3} = 2.4\kappa H_c = 1.69H_{c2} \tag{2.62}$$

La superconductividad superficial persiste para campos magnéticos altos en superconductores de tipo II y para superconductores de tipo I con $0.42 < \kappa < 0.70$.

2.4.7. Ecuaciones de Ginzburg-Landau Dependientes del Tiempo

Las ecuaciones de Ginzburg-Landau dependientes del tiempo (TDGL) fueron deducidas de la teoría BCS por L.P. Gor'kov y M.Eliashberg [41]. El modelo de Ginzburg Landau dinámico sirve, además del obvio propósito de estudiar la dinámica de superconductores, también para encontrar el estado de equilibrio termodinámico partiendo de una situación fuera del equilibrio. En su forma normalizada, las ecuaciones TDGL pueden escribirse como [42]:

$$\frac{1}{D}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \imath\frac{2e}{\hbar}\mu\right)\psi + \frac{1}{\xi^2(T)}(|\psi|^2 - 1)\psi + \left(-\imath\nabla - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\psi = 0, \tag{2.63}$$

$$\mathbf{j_s} = \sigma\left(-\nabla\mu - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) + \frac{\hbar c^2}{8\pi e\lambda^2(T)}Re\left[\bar{\psi}\left(-\imath\nabla - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\psi\right], \tag{2.64}$$

$$\rho = \frac{\mu - \phi}{4\pi\lambda_f^2}. \tag{2.65}$$

Completan la teoría, las ecuaciones de Maxwell que relacionan el potencial escalar $\phi(r)$ y el potencial vector $\mathbf{A}$ con la densidad de corriente $\mathbf{j}_s$ y la densidad de carga ρ, μ es el potencial electroquímico dividido entre la carga electrónica e, y λ_f es la longitud de Fermi. Despreciamos por ahora la diferencia entre μ y ϕ. El parámetro de orden ψ y su conjugado $\bar{\psi}$ están divididos por su valor de equilibrio en ausencia de campos, $\psi_\infty(T) = [mc^2/8\pi e^2\lambda^2(T)]^{1/2}$. D y σ son respectivamente las constantes de difusión y de conductividad en el estado normal y se definen en la teoría microscópica BCS [43]:

$$\frac{4\pi\lambda^2(T)\sigma}{c^2} = \frac{\xi^2(T)}{12D} = \frac{\pi\hbar}{96K_BT_c}\left[1 - \frac{T}{T_c}\right]^{-1} \equiv t_0\left[1 - \frac{T}{T_c}\right]^{-1}, \tag{2.66}$$

Donde t_0 es el tiempo de relajación característico del parámetro de orden. Introducimos ahora una transformación de calibre para el potencial escalar y el potencial vector con el fin de preservar la invarianza en las ecuaciones TDGL:

$$\psi \longrightarrow \psi e^{\imath\frac{2e}{\hbar c}\chi}, \tag{2.67}$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi, \tag{2.68}$$

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi. \tag{2.69}$$

donde χ es un campo escalar arbitrario. Escogiendo el calibre del potencial eléctrico cero para todos los tiempos, lo eliminamos en las ecuaciones TDGL, $\phi = 0$. Para facilitar el análisis de los resultados, escribimos las ecuaciones Ec. (2.63) y Ec. (2.64) en forma adimensional; el parámetro de orden ψ en unidades de $\psi_\infty(T)$; las distancias en unidades de $\xi(0) = \sqrt{\hbar^2/4m\alpha(0)T_c}$; el tiempo en unidades de $t_0 = \pi\hbar/(96K_BT_c)$; H_e en unidades de $H_{c2}(0) = (2\pi\xi(0)^2)^{-1}\Phi_0$; $\mathbf{A}$ en unidades de $H_{c2}(0)\xi(0)$; y la temperatura T en unidades de T_c. Finalmente, las ecuaciones TDGL pueden ser escritas como:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{\eta}[(\imath\nabla + \mathbf{A})^2\psi + (1-T)(|\psi|^2 - 1)\psi] + \frac{\zeta_\psi(\mathbf{r},t)}{\sqrt{1-T}}, \tag{2.70}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (1-T)Re[\bar{\psi}(-\imath\nabla - \mathbf{A})\psi] - \kappa^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \zeta_A(\mathbf{r},T), \tag{2.71}$$

donde $\eta = t_\psi/t_A$ es proporcional a la relación existente entre los tiempos característicos para ψ y $\mathbf{A}$, y fueron determinados por la teoría BCS para varios casos límite. Usamos $\eta = 1$ si suponemos el modelo de Drude para el estado normal, $\eta = 12$ para superconductores con impurezas magnéticas [41] y $\eta = 5.79$ para superconductores con acoplamiento débil [44], los términos $\frac{\zeta_\psi(\mathbf{r},t)}{\sqrt{1-T}}$ y $\zeta_A(\mathbf{r},T)$ corresponden a fluctuaciones de ruído térmico de las cuales hablaremos en la sección de resultados. Sin embargo, la teoría microscópica, es construída asumiendo una interacción entre electrones tipo BCS el cual es determinante al seleccionar el valor de η. Por otro lado, las ecuaciones TDGL son generales ya que no dependen de un modelo microscópico específico. En nuestro caso, consideramos que el parámetro de orden o el potencial vector magnético poseen un mismo tiempo de relajación, luego $\eta = 1$.

2.4.8. Validez de la Teoría de Ginzburg-Landau

Como ya se ha mencionado, la teoría GL, está basada en las transiciones de fase de segundo orden de Landau, será necesario discutir algunos puntos para interpretar su validez [45]:

1. Landau asume en su teoría de transiciones de fase de segundo orden que la energía libre puede ser expandida en potencias de $|\psi|^2$ [46]. Pero esta expansión en el ámbito general no es válida, ya que en presencia de efectos de corto alcance, donde la electrodinámica se torna no local, ésta asunción no funciona del todo. Sin embargo, después Gorko'v mostró teóricamente que la expansión de Landau es válida en el caso de los superconductores [41].

2. ψ es una función que varía suavemente sobre distancias del orden de ξ_0. Una condición necesaria para la validez de la teoría es, además, $\xi(T) \gg \xi_0$ ó

$$\frac{T_{c0} - T}{T_{c0}} \ll 1, \tag{2.72}$$

es decir, la temperatura, debe ser cercana a T_{c0}, la temperatura crítica a campo cero.

3. La aproximación de la electrodinámica local será válida únicamente si **H** y **A** son funciones que varian suavemente sobre las distancias del orden de ξ_0. Además es necesario que, $\lambda(T) \gg \xi_0$ ó,

$$\frac{T_{c0} - T}{T_{c0}} \ll \left[\frac{\lambda_L(0)}{\xi_0}\right]^2, \tag{2.73}$$

lo cual manifiesta de nuevo que la temperatura debe ser cercana a T_{c0}.

Aunque la teoría de Ginzburg-Landau, ha sido derivada únicamente cerca a la transición superconductor/normal resulta válida en rangos mucho mayores. En particular, en superconductores mesoscópicos la teoría de Ginzburg-Landau ha sido usada satisfactoriamente en un largo intervalo de temperaturas. De Gennes demostró que la teoría GL es válida para cualquier temperatura en presencia de campos magnéticos fuertes. En diferentes trabajos se compara los datos de mediciones de corriente crítica en películas finas de aluminio con los previstos por las teorías BCS y GL, mostrando que las dos teorías arrojan los mismos resultados para temperaturas tan bajas como $T \sim 0.1T_c$.

2.5. Superconductores de Tipo I y Tipo II

Como ya se ha mencionado, los superconductores pueden ser clasificados en dos categorías dependiendo de su valor de campo crítico, y el valor del parámetro de Ginzburg-Landau, $\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$:

$$\kappa < 1/\sqrt{2} \rightarrow \quad \text{superconductores tipo I,}$$

$$\kappa > 1/\sqrt{2} \rightarrow \quad \text{superconductores tipo II.}$$

Los superconductores de alta T_c pertenecen al segundo grupo; la dependencia de las características de un superconductor semiinfinito en función del parámetro GL[2] se muestra en la Figura 2.8:

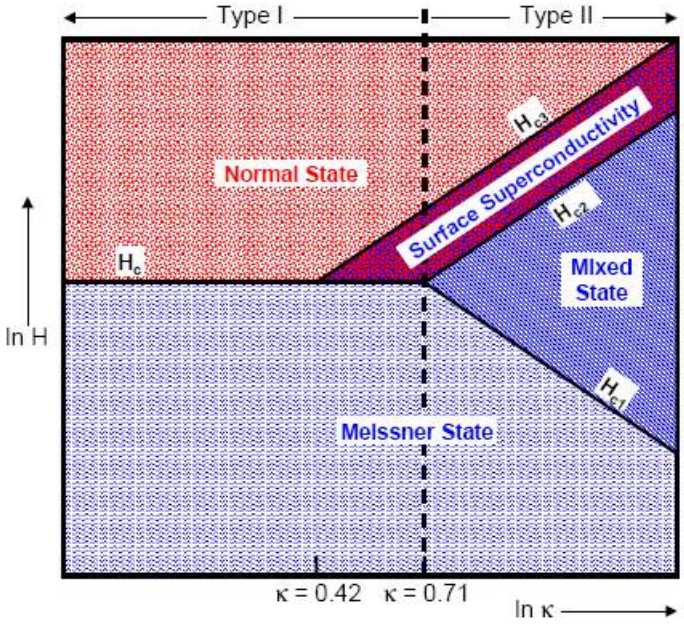

Figura 2.8: Dependencia de las características de un superconductor semiinfinito en función del parámetro de GL.

De esta forma, tenemos que para $\kappa < 0.42$ el superconductor es de tipo I. Por otro lado, para campos por debajo del campo crítico termodinámico $\mathbf{H}_c$ el superconductor está en el estado Meissner y todo el flujo es expelido de la muestra. Justo en el campo crítico, el campo magnético penetra la muestra, la superconductividad es destruída y la muestra retorna al estado normal. Para $0.42 < \kappa < \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.71$, la superconductividad permanece en superconductores de tipo I, pero en este suceso, el estado Meissner no cambia inmediatamente al estado normal con el aumento del campo. En el campo $\mathbf{H}_c$, el flujo puede penetrar la parte interna de la muestra, mientras que una

[2]parámetro de Ginzburg-Landau

capa aún es superconductora en la superficie de la muestra. En el segundo campo crítico el flujo magnético puede penetrar la muestra en unidades cuantizadas de flujo $\phi_0 = hc/2e$, llamadas **vórtices**. Abrikosov encontró que estos vórtices forman una *red triangular dentro del superconductor*, ésta sería la conocida "red de vórtices de Abrikosov". Así pues, el estado es llamado el estado de Abrikosov o el estado mixto, en la región $\mathbf{H}_{c2} < \mathbf{H}_0 < \mathbf{H}_{c3}$ solo hay superconductividad en una pequeña capa delgada, mientras que en el interior de la muestra ésta se encuentra en el estado normal. Para superconductores volumétricos de tipo II el tercer campo crítico es apróximadamente igual a $1.69\mathbf{Hc}_2$, para campos mayores a H_{c3}, la superconductividad es destruída y la muestra se encuentra completamente en el estado normal.

Los campos críticos $\mathbf{H}_c, \mathbf{H}_{c1}, \mathbf{H}_{c2}$ guardan dependencia con la temperatura. El diagrama de la Figura 2.9 muestra los comportamientos descritos.

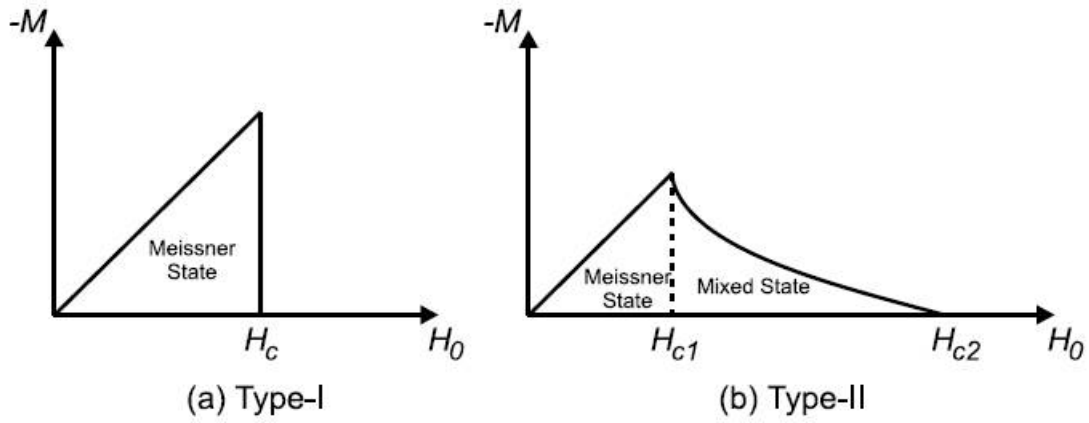

Figura 2.9: Diagrama M-H para superconductores volumétricos de los tipos I y II.

Los dos tipos de superconductores también tienen diferente comportamiento respecto a la magnetización en función del campo magnético externo. En la figura 2.9 se define la magnetización como:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} - \mathbf{H}_0), \tag{2.74}$$

la inducción magnética es $\mathbf{B} = \langle \mathbf{H} \rangle$ y $\mathbf{H}_0$ es el campo magnético aplicado.

En $\mathbf{H}_0 < \mathbf{H}_c$ un superconductor volumétrico de tipo I se encuentra en el estado Meissner y todo el flujo es expelido de la muestra: $\langle \mathbf{H} \rangle = 0$ y $-4\pi\mathbf{M} = \mathbf{H_0}$. En campos grandes, el campo aplicado penetra dentro del superconductor el cual se convierte en normal $\langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{H}_0$ y $\mathbf{M} = 0$. Los superconductores de tipo II están en el estado Meissner en $\mathbf{H}_0 < \mathbf{H}_{c1}$ y $-4\pi\mathbf{M} = \mathbf{H}_0$. En el estado mixto ($\mathbf{H}_{c1} < \mathbf{H}_0 < \mathbf{H}_{c2}$) el valor absoluto de la magnetización $|\mathbf{M}|$ decrece cuando el campo incrementa, hasta que desaparece en el segundo campo crítico.

Por otro lado la energía superficial es diferente para los superconductores tipo I y tipo II [45]. La expulsión del campo externo incrementa la energía del superconductor en un factor $\mathbf{H}^2/8\pi$ por unidad de volumen, de acuerdo a esto se espera que sea energéticamente favorable el aparecimiento de regiones normales en el superconductor. La creación de tales regiones normales requiere una interface con energía superficial negativa σ_{ns}. Los dos tipos de superconductores tienen un comportamiento diferente con respecto a la energía superficial:

$$\text{Tipo I}: \quad \sigma_{ns} > 0,$$

$$\text{Tipo II}: \quad \sigma_{ns} < 0.$$

2.6. Estado de Vórtices

Los vórtices son movimientos espirales alrededor de un centro de rotación, ó también pueden asumirse como un flujo turbulento donde las líneas de corriente presentan un patrón circular o espiral. En el caso de la superconductividad un vórtice es un flujo turbulento que gira y las líneas de corriente presentan un patrón circular que cargan un cuanto de flujo magnético. Aparecen de forma natural en el estado de Abrikosov y pueden ser vistos como singularidades existentes en el superfluido electrónico.

Cuantización del Flujo Magnético

La superconductividad es uno de los pocos fenómenos en donde se observa fácilmente la cuantización de cantidades físicas a escalas macroscópicas. Esto

se debe a que $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{\imath\varphi(\mathbf{r})}$, es una función univaluada y el cambio de fase a través de cualquier circuito cerrado es múltiplo de 2π. Así como la condición análoga en la función de onda trae como consecuencia la cuantización del momento angular, en este caso la consecuencia es la cuantización de una cantidad llamada fluxoide, que solo puede tomar valores que sean múltiplos enteros de $\phi_0 = hc/2e$.
En ausencia de corrientes el fluxoide encerrado por un circuito coincide con el flujo del campo magnético ϕ a través de la superficie encerrada por el circuito. Esta es la característica universal del estado superconductor.

Un Anillo Superconductor

Las implicaciones de la cuantización del flujo son muchas. Por ejemplo de dicha cuantización puede desprenderse fácilmente la propiedad de conducción perfecta. Para ver eso suponemos, que un anillo hecho de material superconductor, en el estado normal $T > T_c$ se somete a un campo magnético pequeño, tal que justo el flujo concatenado por el anillo es ϕ_0. Luego se enfría el material por debajo de T_c de forma que pasa al estado superconductor y posteriormente se apaga la fuente del campo externo. Por ley de Faraday aparecen corrientes en el anillo que se oponen a la variación dB/dt. Si la resistencia del material no es nula (como ocurre en cualquier material normal) esas corrientes decaerán rápidamente y el campo magnético en el interior del anillo se anulará. Ahora bien: si las corrientes pudiesen decaer en el superconductor, durante el estado transitorio, el flujo atrapado no cumplirá con el principio de cuantización (tendría que ser menor que ϕ_0 y mayor que cero). Por lo tanto, la cuantización del flujo implica que las corrientes superconductoras generadas fluirán sin decaer.

2.6.1. Red de Vórtices de Abrikosov y Estructura de Vórtices

La teoría que describe el estado mixto se debe a Alexei Abrikosov y fue dada a conocer después de que Feynman describió los vórtices como excitaciones del He líquido superfluido [38]. La teoría de Abrikosov considera los vórtices como objetos magnéticos que, en equilibrio termodinámico, permiten la relajación del campo magnético exterior, excluido por las corrientes Meissner. Con el fin de minimizar la energía del estado superconductor, Abrikosov

encontró que en el estado fundamental, los tubos de flujo ó vórtices, se distribuyen en el material formando una red con simetría cuadrada, en 1964 se demostró teóricamente que una configuración de vórtices con simetría hexagonal tiene menos energía que una red cuadrada. Por otro lado, en el estado mixto cada vórtice está caracterizado por un núcleo de tamaño $\xi(T)$ donde el parámetro de orden se encuentra deprimido por corrientes superconductoras que circulan alrededor del núcleo y decaen en una longitud $\lambda(T)$ [1]-[2])(ver figura 2.10)

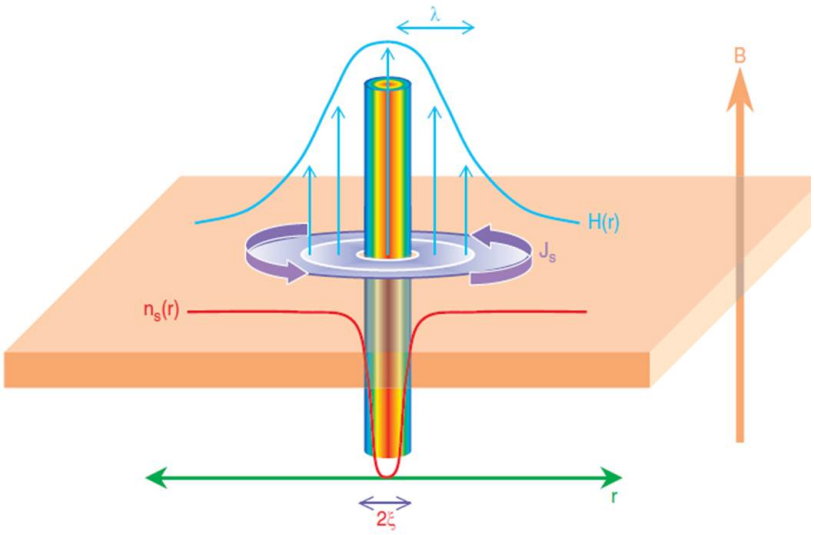

Figura 2.10: Estructura de un vórtice superconductor: Zona central del vórtice. En esa zona central, el material y los electrones se encuentran en estado normal: la densidad de electrones superconductores n_s, se anula en el núcleo del vórtice.

Errores numéricos podrían haber llevado a pensar a Abrikosov que una red cuadrada era energéticamente más favorable que una red triangular. No obstante W. M. Kleiner [47] mostró que era mucho más factible llegar al estado de mínima energía con una red triangular (red de Abrikosov). Como ya sabemos la naturaleza negativa de la energía superficial del superconductor en contacto con una región de fase normal σ_{ns}, induce a la formación de múltiples regiones normales, con la finalidad de maximizar la superficie, y así minimizar la energía libre.

En el llamado límite de London, $\xi \ll \lambda$ podemos considerar que $|\psi|^2$ es constante en todo el espacio excepto en el núcleo donde solo la fase es relevante en la variación espacial de ψ. Si tomamos el rotacional de la segunda ecuación de Ginzburg-Landau, tenemos:

$$\nabla \times \mathbf{j_s} = \frac{e^*}{m^*}|\psi|^2 \left(\hbar \nabla \times \nabla\varphi - \frac{e^*}{c} \nabla \times \mathbf{A} \right) \tag{2.75}$$

$$\frac{c^2 \Phi_0}{8\pi^2 \lambda^2} (\nabla \times \nabla\varphi) - \frac{c}{4\pi\lambda^2} \mathbf{h}. \tag{2.76}$$

Consideremos ahora, la presencia de un vórtice i paralelo al eje z, localizado en $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ en el plano xy. Entonces, integrando Ec. (2.75), obtenemos [48]:

$$\int d^2 r \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \mathbf{j_s} = \frac{c^2 \Phi_0}{8\pi^2 \lambda^2} \int d^2 r \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \nabla\varphi) - \frac{c}{4\pi\lambda^2} \int d^2 r \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{h} \tag{2.77}$$

$$\frac{c^2 \Phi_0}{8\pi^2 \lambda^2} \oint d\mathbf{l} \cdot \nabla\varphi - \frac{c}{4\pi\lambda^2} \int d^2 r \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{h}$$

$$\frac{c^2 \Phi_0}{8\pi^2 \lambda^2} 2\pi L - \frac{c}{4\pi\lambda^2} \int d^2 r \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{h}$$

En esta última relación L representa el número de cuantos de flujo magnético contenido en el vórtice. Así la voriticidad es una función fuente de $v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$ de un vórtice definida como:

$$v(\mathbf{r}, \mathbf{r_i}) = \hat{\mathbf{z}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_i}) L. \tag{2.78}$$

Superconductores Mesoscópicos

El régimen mesoscópico es aquél, en el cual, un pequeño número de vórtices está confinado en un pequeño volumen de muestra o visto de otra manera, cuando el tamaño de la muestra es del orden del tamaño de los vórtices. Cuando esto sucede, la interacción entre los vórtices y las corrientes superficiales comienza a ser comparables con la interacción de los vórtices entre sí, y el efecto más inmediato es que los vórtices dejan de acomodarse en una red de

Abrikosov. Las propiedades magnéticas dependen entonces fuertemente del tamaño y la geometría de la muestra [49]-[51].

La importancia que adquiere la interacción entre los vórtices y las corrientes superficiales Meissner, hace que el comportamiento de los superconductores mesoscópicos sea bien diferente del comportamiento de las muestras macroscópicas.

Energía de un Vórtice

Mientras más próximos estemos a H_{c1} es energéticamente más favorable el aparecimiento de vórtices en un superconductor de tipo II. Podemos calcular la energía extra E_l por unidad de longitud del vórtice y así determinar el valor de H_{c1}. Por definición, en $H_e = H_{c1}$, la energía libre de Gibbs debe ser continua. Así:

$$H_{c1} = \frac{4\pi E_l}{\Phi_0}. \tag{2.79}$$

Basándonos en la teoría de London, la energía de un sistema superconductor es la suma de la energía cinética del superfluído y la energía derivada del campo aplicado. Tenemos:

$$E_s = \frac{1}{2}\int n_s m^* \mathbf{V}_s^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi}\int |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}. \tag{2.80}$$

Usando $\mathbf{j}_s = n_s e^* \mathbf{V_s}$ y la relación 2.4, obtenemos:

$$E_s = \frac{2\pi}{c^2}\int \mathbf{j_s^2}(\mathbf{r})\lambda^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi}\int |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \tag{2.81}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int [\lambda^2 |\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 + |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2] d\mathbf{r}. \tag{2.82}$$

Por medio de la integración por partes podemos escribir la relación 2.82 como:

$$E_s = \frac{1}{8\pi}\int [\lambda^2 \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})) + |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2] d\mathbf{r} + \frac{\lambda^2}{8\pi}\oint [\mathbf{h}(\mathbf{r}) \times \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})] \cdot \hat{\mathbf{n}} dr. \tag{2.83}$$

La primera integral del lado derecho de la ecuación 2.83 es igual a cero, ya que no tenemos en cuenta el núcleo del vórtice. La integral de línea de 2.83 se resuelve usando dos caminos circulares, uno de radio $r_1 \to \infty$ y otro de radio $r_2 \to \xi$, entonces, recordando, que $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = h(r)\hat{\mathbf{z}}$, de la ecuación 2.83 obtenemos:

$$E_s = -\frac{\lambda^2}{8\pi} \oint \left[\mathbf{h}(r) \nabla \left(\phi \frac{\partial h_z}{\partial r} \right) \right] \cdot \hat{n} d^2 r \tag{2.84}$$

$$= \frac{\lambda^2}{8\pi} \left[h \frac{dh}{dr} 2\pi r \right]_{r=\xi} - \left[h \frac{dh}{dr} 2\pi r \right]_{r=\infty}$$

En el primer término usamos una expansión asintótica para $\xi \ll r \ll \lambda$, tal que podemos escribir:

$$h(r) \approx \frac{L\phi_0}{2\pi\lambda^2} \left[ln \frac{\lambda}{r} + 0.12 \right]. \tag{2.85}$$

El segundo término del lado derecho en 2.84 se anula, ya que $h(r \to \infty) = 0$ de modo que la energía de la línea del vórtice $E_s = E_l$, está dada por:

$$E_l \sim \left[\frac{L\Phi_0}{\lambda} \right]^2 ln\kappa. \tag{2.86}$$

De la expresión 2.86 podemos observar que $E_l \propto L^2$, por lo cual es energéticamente más favorable tener un sistema de dos vórtices con un cuanto de flujo independiente, o al revés, un vórtice con dos cuantos de flujo. Así pues, el valor de campo para el cual entra el primer vórtice es:

$$H_{c1} = 4\pi \frac{E_l}{\Phi_0} \approx \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} = \frac{H_c}{\sqrt{2\kappa}} ln\kappa \tag{2.87}$$

2.7. Barrera Superficial en Muestras Mesoscópicas

En muestras con bordes o fronteras, los vórtices entran por la superficie, después de que la velocidad crítica del condensado superconductor es alcanzada, los pares de Cooper se rompen y se crean pequeñas perturbaciones en los bordes, facilitando esto el ingreso de campo a la muestra. Por otra parte las contribuciones de energía, asociadas a la nucleación de los vórtices a través

de las corrientes de apantallamiento ocasionadas por la presión magnética ejercida por el campo y por la presencia de la frontera en muestras finitas, forman en conjunto la llamada barrera de *Bean Livingston*.

En años recientes ha habido un importante interés teórico y experimental en el estudio de la física de los vórtices a escala mesoscópica [64]-[67]. El tamaño de estos sistemas implica que la geometría de la muestra y la interacción entre los vórtices y la superficie se tornan relevantes. La interacción entre los vórtices y la superficie se manifiesta fundamentalmente en la existencia de la barrera energética y la entrada de vórtices, descubierta por Bean y Livingston [68]. Esta barrera retrasa la penetración de vórtices y genera estados metaestables. Ignorando los efectos superficiales, la penetración de campo magnético comienza a ser energéticamente favorable a partir del primer campo crítico H_{c1}. Sin embargo la barrera superficial evita la entrada de vórtices hasta un campo mayor H_p en el cual desaparace la barrera. H_p, conocido también como el campo de sobrecalentamiento, está asociado con el pico en las curvas de magnetización y está influenciado por la presencia de irregularidades en la superficie.

El estudio de la barrera superficial ha renovado su interés recientemente en los superconductores mesoscópicos. Por ejemplo, Enomoto y Okada [69] a través de las soluciones numéricas de las ecuaciones de Ginzburg-Landau dependientes del tiempo (TDGL), estudiaron la influencia de la temperatura y las irregularidades superficiales sobre la barrera de energía superficial.

Las barreras de Bean Livingston aparecen porque las corrientes de apantallamiento Meissner circulan en dirección contraria a las corrientes superconductoras que conforman un vórtice de prueba que intenta entrar a la muestra. Típicamente esto se entiende como una competencia entre diferentes fuerzas. Por una lado la repulsión entre el vórtice y las corrientes de apantallamiento superficiales y por otro lado, la fuerza atractiva entre el vórtice dentro de la muestra y su imágen.

Una geometría importante de investigación experimental en los superconductores mesoscópicos es en discos superconductores [68]-[71]. El estudio de discos superconductores fue iniciado por Buisson *et al* [64] en discos de radio $\sim 7\mu m$. Avances recientes en las técnicas de microfabricación y la medición permiten la obtención y el estudio de discos superconductores de tamaños comparables con la longitud de coherencia $\xi \approx 0.3\mu m$ [66].

En películas superconductoras delgadas la distinción entre la superconductividad de tipo I y de tipo II depende no sólamente del parámetro de Ginzburg-Landau κ sino que también depende de un factor extremadamente importante: el espesor de la muestra; de los resultados experimentales, la longitud de penetración efectiva de London $\Lambda = \lambda^2/d$ se incrementa considerablemente en películas con espesor $d \ll \lambda$. El estado de vórtices puede aparecer en películas delgadas manufacturadas con un material con $\kappa < 1/\sqrt{2}$; en este caso se debe introducir el parámetro efectivo de Ginzburg Landau $\kappa^* = \Lambda/\xi$, el cual define el tipo de superconductividad: tipo I cuando $\kappa^* < 1/\sqrt{2}$ y tipo II, cuando $\kappa^* > 1/\sqrt{2}$. En muestras mesoscópicas, la distinción entre superconductores de tipo I y de tipo II está determinada no solo por κ y el espesor d, sino también por las dimensiones de la muestra [85]. En muestras mesoscópicas confinadas hay una competencia entre la red triangular de Abrikosov y la geometría de la muestra.

Capítulo 3

Método Numérico

En el presente capítulo describiremos el método numérico de las variables de enlace empleado para la solución de las ecuaciones de Ginzburg-Landau dependientes del tiempo (TDGL). Mostramos una de las formas de discretizar tanto las ecuaciones TDGL como las condiciones de contorno para nuestro problema.

3.1. Método ψU

Dentro de las diferentes formas de resolver numéricamente un problema continuo, se encuentra la de presentarlo como un problema en el espacio discretizado que lo aproxima a una solución exacta. En este caso, se reduce el problema original, cuando los parámetros que definen la discretización particular utilizada tienden a cero. Un método numérico más versátil, pero más rapido y más fácil de programar que el método de elementos finitos (FEM) [52]-[55] es el método de diferencias finitas (FDM) [56]. La idea básica de éste método comienza por definir una malla rectángular uniforme de $N_i \times N_j$ elementos y dos vectores ortogonales en $\mathbf{R}^2$ de módulos a_i, a_j (ver Figura 3.1). Así pues, la técnica de diferencias finitas está basada en aproximaciones que permiten reemplazar ecuaciones diferenciales por ecuaciones de diferencias finitas; estas aproximaciones de diferencias finitas están en forma algebráica, y las soluciones están relaciondas con las mallas. Una solución en diferencias finitas involucra tres partes:

1. Dividir la solución en los nodos de las mallas

2. Aproximar las ecuaciones diferenciales mediante diferencias finitas equivalentes que relacionan las soluciones a las mallas.

3. Solucionar las ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones de frontera.

Las ecuaciones de Ginzburg-Landau dependientes del tiempo pueden resolverse numéricamente usando el método de diferencias finitas para las derivadas espaciales y el método de Euler para la derivada temporal [51],[57], ya que las ecuaciones TDGL, son ecuaciones invariantes bajo transformaciones de calibre, tenemos como resultado de la aplicación directa del método que los sistemas discretos que se aproximan a las ecuaciones diferenciales pueden no ser invariantes de calibre para toda la extensión de la malla. Es posible que esa falta de invarianza permanezca cuando se extrapola a un resultado en el contínuo [58]. Por lo tanto, una alternativa es proponer un sistema discreto que sea invariante de calibre. Este tipo de esquema da lugar a las denominadas **teorías de calibre reticulares** *(lattice gauge theories)* que es el estudio de las teorías de calibre espacio-temporales que ha sido discretizada a una red [59]. En el caso de las ecuaciones TDGL usaremos un sistema discreto similar al método de diferencias finitas (FDM), el cual permitirá una descripción natural del sistema. Las ecuaciones discretizadas aquí son las ecuaciones TDGL:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{\eta}[(\imath\nabla + \mathbf{A})^2\psi + (1-T)(|\psi|^2 - 1)\psi], \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (1-T)Re[\bar{\psi}(-\imath\nabla - \mathbf{A})\psi] - \kappa^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}. \tag{3.2}$$

La característica fundamental que debemos tener en cuenta será la invarianza del esquema discreto frente a las denominadas transformaciones de calibre en la malla *(lattice gauge transformation)* que constituye la versión discretizada de la simetría de calibre que las ecuaciones TDGL satisfacen. Escribimos nuevamente la relación (2.67), ahora en forma discreta:

$$\psi_{\mathbf{n}} \to \psi_{\mathbf{n}} e^{i\chi n}, \tag{3.3}$$

$$\langle A_\mu \rangle_{\mathbf{n},\mathbf{n}+\mu} \to \langle A_\mu \rangle_{\mathbf{n},\mathbf{n}+\mu} + \frac{\chi_{\mathbf{n}+\mu} - \chi_{\mathbf{n}}}{a_\mu}, \tag{3.4}$$

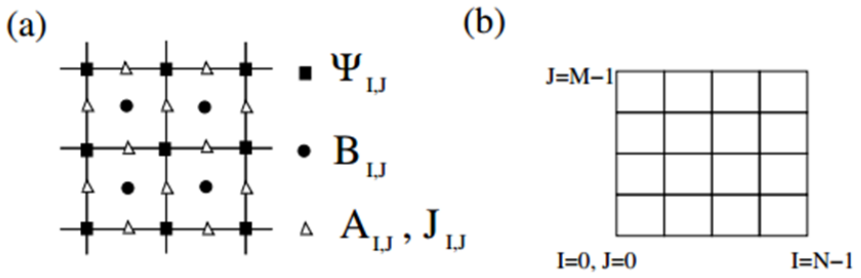

Figura 3.1: (a) Puntos de la red donde se evalúan las diferentes variables discretizadas, (b) para simplificar la notación generalmente se utilizan los mismos índices

donde $\mathbf{n} = (n_i, n_j)$ es un vector que localiza los puntos de la malla y μ representa dos vectores ortogonales que definen las translaciones de la red $\hat{\mu} = \hat{i}, \hat{j}$. El campo χ es un campo escalar real continuo y diferenciable en todo el dominio, en el caso discreto definido en los sitios de la malla, en cuanto al potencial vector $\mathbf{A}$ se encuentra definido en dos puntos vecinos (enlaces). Definiremos otras variables, denominadas variables de enlace asociadas a las uniones entre los puntos cuya finalidad sea sustituir el potencial vector escrito en las ecuaciones discretas de modo que permanezcan invariantes con relación a las transformaciones de calibre. Tenemos:

$$U_{\mu,n} = \exp\left(-\imath \int_{n}^{n+\mu} A_\mu d\mu\right) = \exp(-\imath a_\mu \langle A_\mu \rangle_{n,n+\mu}), \tag{3.5}$$

con $\mu = i, j$. Para estas variables las transformaciones de calibre resultan en:

$$U_{\mu,n} \to U_{\mu,n} \exp(-\imath \chi_{(n+\mu)} - \chi_n). \tag{3.6}$$

Podemos verificar las siguientes propiedades de las variables de enlace: $U_{-\mu,n+\mu} = \bar{U}_{\mu,n}$, donde $\bar{U}$ es el complejo conjugado de U. Usando esta propiedad definimos la siguiente relación:

$$U_{\alpha,n} = U_{i,n} U_{j,n+i} \bar{U}_{i,n+j} \bar{U}_{j,n}, \tag{3.7}$$

donde n indica el vértice inferior izquierdo de cada celda unitaria (que corresponde a un área mínima definida por cuatro puntos vecinos de la red). Es importante notar que, la selección del sistema discreto no es única, ya que siempre podemos sumar términos que tiendan a cero en cuanto tomamos un límite al contínuo. Para el caso de las ecuaciones TDGL, los sitios en el interior del dominio tenemos:

$$\psi_n(t+\Delta t) = \psi_n(t) + \frac{\Delta t}{\eta}\left[\Sigma_\mu \frac{U_{\mu,n}\psi_{n+\mu} - 2\psi_n + \bar{U}_{\mu,n-\mu}\psi_{n-\mu}}{a_\mu^2}\right] - \tag{3.8}$$

$$\left[(1-T)(\bar{\psi}_n\psi_n - 1)\psi_{i,j}\right],$$

$$U_n(t+\Delta t) = U_n(t) + \Delta t\left[\imath(1-T)U_{\mu,n}Im(\bar{\psi}_n U_{\mu,n}\psi_{n+\mu})\right] + \tag{3.9}$$

$$\left[\epsilon_{\mu\mu^\perp\kappa}\frac{\kappa^2}{a_{\mu^\perp}^2}U_{\mu,n}(U_{\alpha,n}\bar{U}_{\alpha,n-\mu^\perp} - 1)\right]$$

Donde $\epsilon_{\mu\mu^\perp\kappa}$ es el tensor totalmente asimétrico de Levi-Chivita, y el símbolo $\mu^\perp$ denota la componente normal de la malla a μ y a κ. Del lado izquierdo los valores de las variables son dados en el tiempo $t+\Delta t$ y del lado derecho en el tiempo t. Enseguida veremos cómo cada uno de los términos del sistema discreto seleccionado se aproxima a los términos de las ecuaciones diferencialses TDGL.

3.1.1. Método ψU para las Ecuaciones TDGL

Para derivar la forma discretizada de las ecuaciones TDGL, reescribiremos las definiciones (3.5)y (3.6) para el espacio bidimensional (x, y) considerando una malla de $N_x \times N_y$ celdas unitarias, de tamaño $a_x \times a_y$ [57],[60]. Así:

$$\mathfrak{U}^x = \exp\left(-i\int_{x_0}^{x} A_x(\xi, y, t)d\xi\right), \tag{3.10}$$

$$\mathfrak{U}^y = \exp\left(-i\int_{y_0}^{y} A_y(x, \eta, t)d\eta\right), \tag{3.11}$$

$$U^x_{i,j} = \bar{U}^x_{i,j} U^x_{i+1,j}, \tag{3.12}$$

$$U^y_{i,j} = \bar{U}^y_{i,j} U^y_{i+1,j}, \tag{3.13}$$

Aquí $U^x_{i,j}$ es una variable de enlace en la dirección x con $1 \leq i \leq N_x + 1, 1 \leq j \leq N_y$, asociado al enlace vertical de la malla. Como ya se había mencionado, $\psi_{i,j}$, está definido en los puntos, con $1 \leq i \leq N_x + 1$, y $1 \leq j \leq N_y + 1$, aproximado a un valor del parámetro de orden en la posición x_i, y_i. Considerando un campo magnético aplicado $\mathbf{H}_e(\mathbf{t})$ espacialmente uniforme, donde $\mathbf{H}_e(t) = H_e(t)\hat{z}$ y el campo local $\mathbf{h} = (0, 0, h_z)$ y utilizando las definiciones (3.10)-(3.13), podemos escribir cada término de las ecuaciones 3.1 y 3.2 como:

$$(-i\nabla)^2|_x \psi = -\bar{\mathfrak{U}}^x \partial^2_{xx}(\bar{\mathfrak{U}}^x \psi) - \bar{\mathfrak{U}}^y \partial^2_{yy}(\bar{\mathfrak{U}}^y \psi), \tag{3.14}$$

$$(-i\nabla)|_x \psi = (-i\partial_x - \mathbf{A}x)\psi = -i\bar{\mathfrak{U}}^x \partial_x(\mathfrak{U}^x \psi), \tag{3.15}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{h} = (\partial_y h_z, -\partial_x h_z, 0). \tag{3.16}$$

Una aproximación de segundo orden en (x_i, y_i) del término (3.14) nos lleva a la siguiente relación:

$$\begin{aligned}(-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi|_{(x_i,y_i)} = &-\frac{U^x_{i,j}\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}^x_{i-1,j}\psi_{i-1,j}}{a_x^2} + \\ &- \frac{U^y_{i,j}\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}^y_{i,j-1}\psi_{i,j-1}}{a_y^2} + \varepsilon(a_x^2 + a_y^2)\end{aligned} \tag{3.17}$$

Calculando las derivadas en $(x_i + \frac{a_x}{2}, y_i)$ $(x_i, y_i + \frac{a_y}{2})$, la relación (3.15) puede ser escrita como:

$$Re[\bar{\psi}(-i\partial_x - \mathbf{A}_x)\psi]|_{x_i + \frac{ax}{2}, y_i} = \frac{1}{a_x} Im(\bar{\psi}_{i,j} U^x_{i,j} \psi_{i+1,j}) + \varepsilon(a_x^2), \tag{3.18}$$

$$Re[\bar{\psi}(-i\partial_y - \mathbf{A}_y)\psi]|_{x_i, y_i + \frac{ay}{2}} = \frac{1}{a_y} Im(\bar{\psi}_{i,j} U^y_{i,j} \psi_{i+1,j}) + \varepsilon(a_y^2),$$

Debemos introducir una variable auxiliar L_{ij}, análoga a la relación (3.7), con el objetivo de escribir de una forma más compacta los términos de la ecuación (3.16). Esta variable nos indica una circulación local del potencial vector en cada celda unitaria dentro del dominio computacional, o sea, el flujo local en cada celda:

$$\begin{aligned} L_{i,j} &= U^x_{ij} U^y_{i+1,j} \bar{U}^x_{i,j+1} \bar{U}^y_{ij} \\ &= \exp(-i \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}) \\ &= \exp(-i \int \int h_z dS) \\ &\approx \left[-i a_x a_y h_z (x_i + \frac{a_x}{2}, y_i + \frac{a_y}{2}) \right] [1 + \varepsilon(a_x^4 + a_y^4)]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Escribiendo la ecuación (3.16) en términos de esta nueva variable, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[h_z(x_i + \frac{a_x}{2}, y_i) \right] &= \frac{1}{a_x a_y^2} (\bar{L}_{i,j-1} L_{i,j} - 1) + \varepsilon(a_x^2 + a_y^2), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[h_z(x_i, y_i + \frac{a_y}{2}) \right] &= \frac{-1}{a_x^2 a_y} (\bar{L}_{i,j} L_{i-1,j} - 1) + \varepsilon(a_x^2 + a_y^2). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Aproximamos ahora el término de variación temporal del potencial vector $\partial_t \mathbf{A}$, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[A_x(x_i + \frac{a_x}{2}, y_i, t) \right] &= \frac{i}{a_x} \bar{U}^x_{i,j} \frac{\partial}{\partial t} U^x_{i,j} + \varepsilon(a_x^2), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[A_y(x_i, y_i + \frac{a_y}{2}, t) \right] &= \frac{i}{a_y} \bar{U}^y_{i,j} \frac{\partial}{\partial t} U^y_{i,j} + \varepsilon(a_y^2), \end{aligned} \tag{3.21}$$

y por último, para la derivada temporal usamos el método de Euler, que se basa en un proceso de integración numérica:

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\psi_n^{t+\Delta t} - \psi_n^t}{\Delta t}, \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial t} = \frac{i}{a_\mu U_{\mu,n}} \frac{U_{\mu,n}^{t+\Delta t} - U_n^t}{\Delta t}. \tag{3.23}$$

Finalmente con ayuda de las relaciones (3.14-3.23) reescribimos la primera ecuación TDGL:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial t} = & \frac{U_{i,j}^x \psi_{i,j} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i-1,j}^x \psi_{i-1,j}}{\eta a_x^2} + \frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i,j-1}^y \psi_{i,j-1}}{\eta a_y^2} \\ & - \frac{1-T}{\eta}(\bar{\psi}_{i,j}\psi_{i,j} - 1)\psi_{i,j}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Para la segunda ecuación TDGL tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_{i,j}^x}{\partial t} &= -i(1-T)U_{i,j}^x Im(\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^x \psi_{i+1,j}) - \frac{\kappa^2}{a_y^2} U_{i,j}^x (\bar{L}_{i,j-1} L_{i,j} - 1), \\ \frac{\partial U_{i,j}^y}{\partial t} &= -i(1-T)U_{i,j}^y Im(\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^y \psi_{i,j+1}) - \frac{\kappa^2}{a_x^2} U_{i,j}^y (\bar{L}_{i,j} L_{i-1,j} - 1).\end{aligned} \tag{3.25}$$

3.1.2. Método ψU para las Condiciones de Contorno

Las ecuaciones (3.24)y (3.25) no están definidas bajo las condiciones de contorno. Una vez calculados los valores para los puntos interiores, las variables en los puntos de la superficie s son calculados empleando las condiciones de contorno de las ecuaciones Ginzburg-Landau.

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [(-i\nabla - \mathbf{A})\psi]|_s = \frac{i}{b}\psi \mid_s, \tag{3.26}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{n}}|_s = \mathbf{H_e} \times \hat{\mathbf{n}}|_s. \tag{3.27}$$

Consideramos ahora tres casos particulares para el valor de b: para $b \to \infty$, para $b \neq 0$, para $b = 0$, que conduce directamente a $\psi|_s = 0$.

1. $b \to \infty$, se simula una interface superconductor-vacío, la cual siginifica que las supercorrientes no pueden fluir fuera del superconductor. De esta forma considerando una frontera perpendicular al eje μ, la condición (3.26) implica que $(-i\partial\mu - A_\mu)\psi = -i\bar{\mathcal{U}}^\mu \partial_\mu(\mathcal{U}^\mu\psi) = 0$. La condición (3.27) implica que $L_{i,j} = \exp(-ia_x a_y H_e)$. Describiendo más detalladamente las condiciones de contorno, consideramos $i = 1$ como la frontera izquierda, $i = N_x + 1$ como la frontera derecha, $j = 1$ como la frontera inferior y $j = N_y + 1$ como la frontera superior. De esta forma podemos escribir la condición de contorno para el campo magnético:

$$U^y_{i,j} = e^{ia_x a_y H_e} U^x_{i,j} U^y_{2,j} \bar{U}^x_{i,j+1}, \quad U^x_{i,1} = e^{-ia_x a_y H_e} \bar{U}^y_{i+1,1} U^x_{i,2} U^x_{i,2} U^{y_{i,1}}$$

$$U^y_{N_{x+1},j} = e^{ia_x a_y H_e} U^x_{i,j} U^y_{2,j} \bar{U}^x_{i,j+1}, \quad U^x_{i,1} = e^{-ia_x a_y H_e} \bar{U}^y_{i+1,1} U^x_{i,2} U^x_{i,2} U^{y_{i,1}}$$

Para el parámetro de orden ψ:

$$\psi_{i,1} = U^y_{i,1}\psi_{i,2}, \quad \psi_{i,j} = U^x_{i,j}\psi_{2,j}, \tag{3.28}$$

$$\psi_{i,N_y+1} = \bar{U}^y_{i,N_y}\psi_{iN_y}, \quad \psi_{N_x+1,j} = \bar{U}^x_{N_x,j}\psi_{iN_x,j},$$

Lo que nos indica que tenemos un sistema con condiciones de contorno cerradas en x y y, "o sea", una muestra rectangular finita en el plano xy sin flujo de corriente fuera del material.

2. $b \neq 0$; $b > 0$ describe una interfaz superconductor/metal, que causará una supresión de la superconductividad en los bordes de la muestra. La interfaz superconductor/superconductor a mayor temperatura crítica es modelada con la condición $b < 0$, conduciendo a un aumento de la superconductividad en la frontera. La condición de contorno para el campo magnético es igual al caso 1. La condición de contorno para el parámetro de orden, es:

$$\psi_j = (1 - a_y b^{-1})(\psi_{2,j} U^x_{1,j}), \quad \psi_{N_x+1,j} = (1 - a_x b^{-1})\psi_{N_x,j} \bar{U}^x_{N_x,j} \quad (3.29)$$

3. Para $b = 0$, tenemos la condición de contorno de Dirirchlet $\psi_{N_x}|_s = 0$ la cual en nuestro caso representa una muestra con una gran cantidad de defectos en la superficie.

4. Por último, consideramos condiciones de contorno periódicas en uno de los dos ejes. De este modo, exigimos solo que los puntos inferiores y superiores de la malla tengan el mismo valor. Las condiciones de contorno periódicas para ψ y U son:

$$\psi_{i,1} = \psi_{i,N_y}, \quad U^x_{i,1} = U^x_{i,N_y}, \quad (3.30)$$

$$\psi_{i,N_y+1} = \psi_{i,2}, \quad U^x_{i,N_y+1} = U^x_{i,2}, . \quad (3.31)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, vemos que la suposición básica para la aplicabilidad del método es que la cantidad $a_\mu \langle A_\mu \rangle_{(n,n+\mu)}$ sea pequeña (por lo menos un orden de magnitud menor que la unidad). Esto nos lleva a requerir que la malla sea fina, es decir, a_μ es pequeño donde A_μ es grande, tal situación trae grandes restricciones, principalmente en el caso de los superconductores de tipo II, ya que el campo puede penetrar en forma de vórtices, los cuales alcanzan grandes valores de h_z, lo que implica grandes valores de $a_\mu \langle A_\mu \rangle$. Otra limitación ahora, es la de aplicar el método que surge al elegir el paso temporal Δt con el método de Euler. Una regla práctica para la selección de Δt [61] es:

$$\Delta t \leq min \frac{\zeta^2 \eta}{4}, \frac{\zeta^2}{4\kappa^2}, . \quad (3.32)$$

$$\zeta^2 = \frac{2}{a_x^{-2} + a_y^{-2}}.$$

En nuestras ecuaciones, la selección del paso temporal, está relacionada con el tamaño de la malla y con el valor del parámetro GL.

3.2. Expresiones para la Magnetización y el Fluxoide

A medida que se resuelven las ecuaciones temporales, es conveniente monitorear algunas magnitudes características que nos permiten evaluar el desarrollo del programa computacional. Como tales magnitudes escogemos la magnetización y el fluxoide. Notemos la expresión matemática para cada una de ellas:
La magnetización se calcula de la forma usual [1]:

$$M_z(t) = \frac{\langle B_z \rangle - H_e}{4\pi} \approx -\frac{\Sigma_\alpha arg(U_{\alpha,n})/a_i a_j}{4\pi} - H_e \tag{3.33}$$

Calculamos el fluxoide como una circulación de gradiente de fase del parámetro de orden, tenemos:

$$L = \frac{1}{\Phi_0} \oint \nabla\phi ds \approx \frac{1}{2\pi} \Sigma_{\alpha\epsilon\Gamma} arg(\bar{\psi}_\alpha \psi_{\alpha+1}), \tag{3.34}$$

Donde α corre en sentido positivo, a la frontera exterior del dominio superconductor Γ o cualquier otro dominio de interés moderado completamente dentro del superconductor.
Finalizamos así la descripción del método de las variables de enlace empleado en esta tesis para el caso de dominios conexos el cual puede ser generalizado y aplicado para el caso de dominios múltiplemente conectados [1]

3.2.1. Variables de Enlace: Coordenadas Polares

Dentro del desarrollo de esta tesis, se podrán encontrar simulaciones con cuadrados y discos finos, para los cuadrados empleamos el método numérico anteriormente explicado, pero para discos finos debemos hacer la transformación a coordenadas polares:

Discretizamos las ecuaciones TDGL de un sector circular (para más detalles ver [62]). Usamos nuevamente el formalismo de las variables de enlace

[1] Un dominio DD se dice que es conexo cuando todo el contorno cerrado en D no contiene singularidades o una función es analítica en todos los puntos. Caso contrario es múltiplemente conexo.

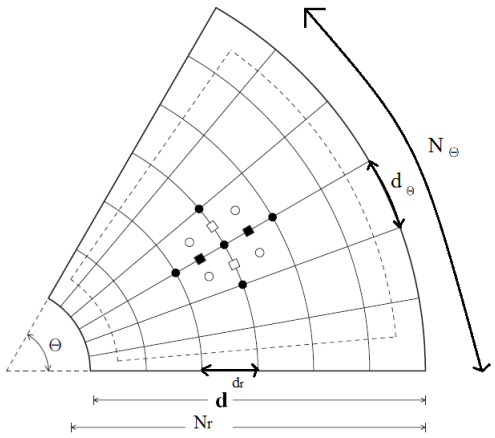

Figura 3.2: (a) Puntos de la red donde se evalúan las diferentes variables discretizadas.

para evitar no sólamente la divergencia de la derivada del parámetro de orden en la superficie, sino también para obtener la discretización de las ecuaciones Ginzburg- Landau, las cuales preservan la invarianza de calibre en estas ecuaciones [57],[63]. Vamos a definir las siguientes variables discretas.

$$\begin{aligned} U_{\rho,i,j} &= \bar{\mathcal{U}}_\rho(\rho_i,\theta_j)\mathcal{U}_\rho(\rho_{i+1},\theta_j) = \exp\left(-ia_\rho A_{\rho,i,j}\right) \ , \\ U_{\theta,i,j} &= \bar{\mathcal{U}}_\theta(\rho_i,\theta_j)\mathcal{U}_\theta(\rho_i,\theta_{j+1}) = \exp\left(-i\rho_i a_\theta A_{\theta,i,j}\right) \ , \end{aligned} \tag{3.35}$$

Para todo $\{1 \le i \le N_\rho \ , 1 \le j \le N_\theta{+}1\}$, y $\{1 \le i \le N_\rho{+}1 \ , 1 \le j \le N_\theta\}$.

$$L_{i,j} = \exp\left(-i \oint_{\partial D} \mathbf{A}\cdot \, d\mathbf{r}\right) = \exp\left(-i \int_D h_z \, \rho \, d\rho d\theta\right) = \exp\left(-ia_\rho \rho_{i+1/2} a_\theta h_{z,i,j}\right) \tag{3.36}$$

Para todo $\{1 \le i \le N_\rho \ , 1 \le j \le N_\theta\}$, donde D es el dominio de una celda unitaria limitada por un camino cerrado ∂D. Aquí se han empleado el Teorema de Stokes y la regla del punto medio para integración numérica. Una simple inspección de la ecuación (3.36) lleva a $L_{i,j} = U_{\rho,i,j}U_{\theta,i+1,j}\bar{U}_{\rho,i,j+1}\bar{U}_{\theta,i,j}$.

Las condiciones de frontera fueron tales que, sea $\mathbf{n}$ un vector normal unitario a la interfaz. Se asumirá que la densidad de corriente normal no desaparece en la interfaz (i.e. $(-i\nabla - \mathbf{A})\psi \cdot \mathbf{n} = 0$).

Es conveniente introducir el vector de campo auxiliar $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_\rho, \mathcal{U}_\theta)$ en coordenadas polares, el cual está definido, mediante:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\rho(\rho,\theta) &= \exp\left(-i\int_{\rho_0}^{\rho} A_\rho(\theta,\xi)\,d\xi\right) , \\ \mathcal{U}_\theta(\rho,\theta) &= \exp\left(-i\int_{\theta_0}^{\theta} A_\theta(\xi,\rho)\rho\,d\xi\right) , \end{aligned} \tag{3.37}$$

donde (ρ_0, θ_0) punto de referencia arbitrario. Al introducir este vector de campo en en las TDGL, estas se convierten en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{\bar{\mathcal{U}}_\rho}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial(\mathcal{U}_\rho\psi)}{\partial\rho}\right] + \frac{\bar{\mathcal{U}}_\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2(\mathcal{U}_\theta\psi)}{\partial\theta^2} \\ &\quad +(1-T)\psi(1-|\psi|^2) , \\ \beta\frac{\partial A_\rho}{\partial t} &= (1-T)\mathrm{Im}\left[\bar{\mathcal{U}}_\rho\bar{\psi}\frac{\partial(\mathcal{U}_\rho\psi)}{\partial\rho}\right] - \kappa^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial\theta} , \\ \beta\frac{\partial A_\theta}{\partial t} &= (1-T)\mathrm{Im}\left[\frac{\bar{\mathcal{U}}_\theta\bar{\psi}}{\rho}\frac{\partial(\mathcal{U}_\theta\psi)}{\partial\theta}\right] - \kappa^2\frac{\partial h_z}{\partial\rho} . \end{aligned} \tag{3.38}$$

Podemos mostrar que la implementación discreta de ésta condición es la siguiente:

$$\begin{aligned} \psi_{1,j} &= \gamma U_{\rho,1,j}\psi_{2,j} , \\ \psi_{N_\rho+1,j} &= \gamma\bar{U}_{\rho,N_\rho,j}\psi_{N_\rho,j} , \end{aligned} \tag{3.39}$$

y

$$\begin{aligned} \psi_{i,1} &= \gamma U_{\theta,i,1}\psi_{i,2} , \\ \psi_{i,N_\theta+1} &= \gamma\bar{U}_{\theta,i,N_\theta}\psi_{i,N_\theta} . \end{aligned} \tag{3.40}$$

Unificamos la condición de frontera bajo la introducción del parámetro γ. Por conveniencia ésta notación nos permite obtener un mejor análisis de los resultados. Así $0 < \gamma < 1$ simula interfaz superconductor/metal ($b > 0$); superconductor/superconductor con temperatura crítica mayor está descrito con $\gamma > 1$ ($b < 0$); $\gamma = 0$ representa una superficie en el estado normal ($b = 0$); y $\gamma = 1.0$ simula la interface superconductor/vacío ($b \to \infty$).

Caso Disco Fino

También tenemos un dominio del disco superconductor fino dado por $(x, y, z) \in R^3, |z| < dg(x, y)$, para todo (x, y). Aquí $g(x, y)$, es alguna función que describe la topología sobre la superficie del disco fino y d es el espesor del disco.
Para este caso, tenemos que solucionar solo la primera ecuación de Ginzburg-Landau, ya que como el disco superconductor es fino, el campo interno es igual al campo externo, por lo tanto el vector potencial magnético es una variable conocida y el problema se reduce a solucionar la ecuación del parámetro de orden:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{g(r,\theta)}(i\nabla + \mathbf{A}_0) \cdot g(r,\theta)(i\nabla + \mathbf{A}_0)\psi + (1-T)\psi(1-|\psi|^2) \quad (3.41)$$

Capítulo 4

Estado de Vórtices en Muestras Superconductoras

Supongamos un superconductor tipo II, con un campo magnético aplicado intermedio entre el valor inferior y el valor superior. Será pues, un superconductor en el estado de vórtices. Nos podemos hacer varias preguntas, ¿Cómo entran esos vórtices?, ¿De manera desordenada u ordenada?, ¿Podemos saber algo de su estructura?, ¿Se mueven los vórtices?; si se mueven, ¿es controlable ese movimiento?. Con el fin de responder algunas de estas preguntas, en este capítulo, aplicamos las ecuaciones TDGL en el estudio del comportamiento de vórtices en un superconductor tipo II, para diferentes geometrías con defectos en su interior, en particular, cuadrados mesoscópicos superconductores, discos finos sometidos a un campo magnético externo perpendicular a su superficie.

4.1. Efectos del Ruido de Langevin sobre las Propiedades Magnéticas de un Superconductor Mesoscópico

En esta sección presentamos los resultados de los efectos que inducen las fluctuaciones térmicas en el comportamiento magnético de cuadrados mesoscópicos superconductores. Estudiamos el efecto de la simetría cuadrada sobre la entrada de vórtices al variar el campo magnético en ausencia de fluctuaciones térmicas.

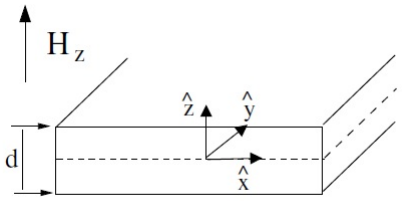

Figura 4.1: Muestra superconductora en la configuración de campo perpendicular: Prisma rectangular infinito en el eje z cuya sección transversal es un cuadrado.

El análisis teórico de superconductores convencionales (baja temperatura) no incluye los efectos de fluctuaciones térmicas, pues a nivel teórico y experimental se presentan estados metaestables donde la configuración de vórtices no es influenciada fuertemente por este tipo de fluctuaciones. Como lo hemos mencionado anteriormente, se presenta un comportamiento muy diferente para los superconductores de alta temperatura crítica, donde la entrada de vórtices es altamente motivada por una especie de activación térmica [51],[72]. De esta manera las fluctuaciones térmicas mejoran sustancialmente la variación del parámetro de orden. Analizamos dos diferentes interfaces simuladas mediante la longitud de extrapolación de De Gennes b. $b \to \infty$, describe una interface superconductor-vacío o en su defecto superconductor-aislante, y $b > 0$ simula una interface superconductor-metal, esta última condición hace que la superconductividad sea depreciada en la superficie [73]. Para analizar el estado superconductor de la muestra mesoscópica, resolvemos numéricamente las ecuaciones Ginzburg-Landau dependientes del tiempo con el término adicional del ruido térmico de Langevin y condiciones de contorno generales [1],[57],[74]. Analizamos la influencia de las fluctuaciones térmicas en un superconductor tipo II, mostramos que estas fluctuaciones disminuyen el valor del primer campo crítico termodinámico para las interfaces analizadas, mientras que el segundo campo crítico es independiente de la interface y del ruído térmico.

4.1.1. Aspectos Teóricos

El ruído de Langevin, se ve representado por el efecto de las fluctuaciones térmicas que son una fuente de desorden y tiene consecuencias significativas

en los diagramas de fase de vórtices y por lo tanto afecta las propiedades termodinámicas de la muestra. El parámetro fundamental que gobierna el tamaño de las fluctuaciones térmicas se conoce como " *el número de Ginzburg* , (E)" dado mediante la siguiente expresión [64],[73],[74],[40]:

$$E = [\kappa_B T_c / H_c^2(0)\xi^3(0)]^2/2, \tag{4.1}$$

E es el número de Ginzburg, que gobierna la fortaleza de las fluctuaciones térmicas, mide el peso de la energía de las fluctuaciones térmicas en T_c, respecto de la energía de condensación en el volumen de coherencia a $T = 0$ teóricamente el número de Ginzburg, es del orden de 10^{-8}, para nuestro trabajo se realizón un teste para órdenes de 10^{-5} hasta 10^{-8} obteniéndose resultados interesantes respecto a la curva de magnetización, por otro lado, por denajo de 10^{-5} no se encuentran resultados significativos (para un análisis más detallado de estos valores, ver por ejemplo referencia 22). Ya que el objetivo, en el presente esquema de trabajo, es determinar la influencia directa de fluctuaciones térmicas en una muestra superconductora mesoscópica cuadrada, se resuelven numéricamente las ecuaciones Ginzburg-Landau dependientes del tiempo para el parámetro de orden Ψ y el potencial vector $\mathbf{A}$ a campo eléctrico cero, pero con el término adicional del ruido térmico de Langevin, las cuales se expresan matemáticamente como [75],[40]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{1}{\eta}[(1-T)\Psi(1-|\Psi|^2) - (-\imath\nabla - \mathbf{A})^2\Psi] + \frac{\zeta_\Psi(\mathbf{r},t)}{\sqrt{1-T}} \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= (1-T)Im[\Psi^*(\nabla - \imath\mathbf{A})\Psi] - \kappa^2\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} + \vec{\zeta}_A(\mathbf{r},T) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Las Longitudes están en unidades de la longitud de coherencia $\xi(0)$, $|\psi|$ en términos de Ψ_∞, tiempos en $t_0 = \pi\hbar/(96K_BT_c)$, el potencial vector $\mathbf{A}$ en unidades de $H_{c2}(0)\xi(0)$, el campo magnético H en unidades de $H_{c2}(0)$ y temperatura en unidades de T_c. Aquí η es igual a la relación del tiempo característico para la relajación de $\mathbf{A}$ y el tiempo para la relajación de Ψ. El ruido de Langevin se encuentra normalizado conforme el número de Ginzburg que relaciona directamente el efecto de los cambios de temperatura, y es del orden de 10^{-8}, para nuestro estudio particular es del orden de 10^{-5} ya que queda dentro del rango establecido. Usamos la condiciones de contorno propias para interfaces superconductor/vacío y superconductor/ metal.

4.1.2. Resultados

Los parámetros usados en nuestra simulación son $\kappa = 5.0$, valor característico para un superconductor tipo II, y una temperatura $T = 0,5T_c$. La muestra está dividida en una malla cuadrada $9\xi(0)\times 9\xi(0)$, el campo magnético externo aplicado H_e está aumentando linealmente en el tiempo desde 0 hasta 1 con intervalos $\Delta H_e = 10^{-3}$.

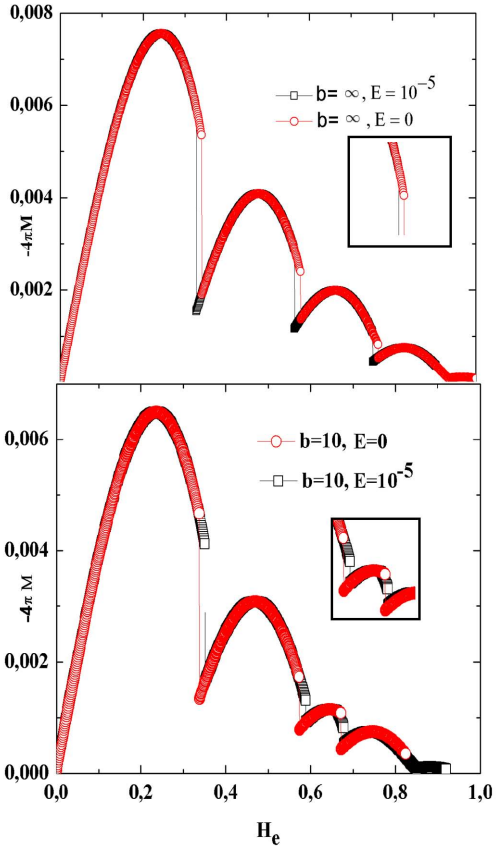

Figura 4.2: Magnetización en función del campo magnético aplicado para dos diferentes interfaces, con $b = \infty$ y $b = 10$, con y sin ruido de Langevin.

En la Fig.4.2, mostramos, las curvas de magnetización $-4\pi M$ en función del campo magnético aplicado H_e para las dos interfaces mencionadas, considerando los efectos de fluctuaciones térmicas ($E = 10^{-5}$) y sin efectos del ruido térmico de Langevin ($E = 0$). Las curvas de magnetización exhiben

una serie de picos, los cuales indican la entrada de vórtices, si se analiza cuidadosamente la Fig. 4.2 se observa que las curvas de magnetización que corresponden a la situación con $E = 10^{-5}$, muestra que los picos caen a campos levemente menores que para las curvas con $E = 0$, lo cual puede indicar efectivamente, que las fluctuaciones facilitan la entrada del flujo magnético cuantizado a la muestra superconductora, la primera línea de caída vertical para la interfaz $b = \infty$ con $E = 0$ tiene un valor de $H_{c1} = 0.341H_e$, mientras que con el efecto de las fluctuaciones térmicas $E = 10^{-5}$, tiene un valor $H_{c1} = 0.328H_e$, lo que arrojaría una diferencia porcentual del 1.3 %. De igual forma para la interfaz $b = 10$, la primera línea de caída vertical, con $E = 0$, tiene un valor $H_{c1} = 0.357H_e$, con $E = 10^{-5}$, el valor del primer campo crítico es de $H_{c1} = 0.338H_e$, la diferencia porcentual es del 1.9 %.

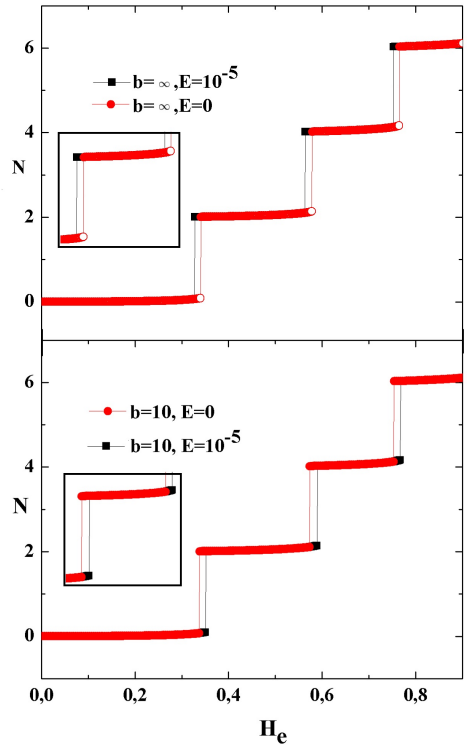

Figura 4.3: Número de Vórtices en función del campo magnético aplicado para dos diferentes interfaces, con $b = \infty$ y $b = 10$, con y sin ruido térmico

La figura 4.3 muestra la vorticidad N en función del campo magnético aplicado H_e. En estas curvas podemos apreciar una transición regular de N a $N+2$ vórtices en las dos interfaces estudiadas. Vemos que el primer campo crítico está en concordancia con el hallado para la curva de magnetización 4.2. Este hecho corrobora la coherencia de nuestros resultados numéricos.

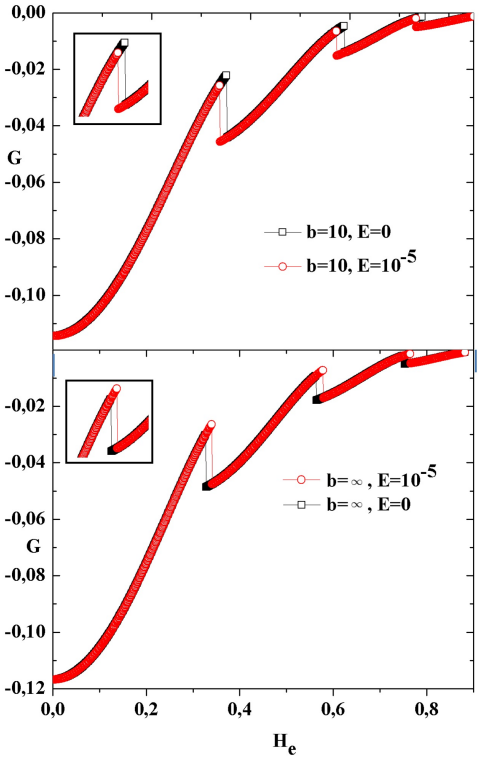

Figura 4.4: Energía libre de Gibbs en función del campo magnético aplicado para dos diferentes interfaces, con $b = \infty$ y $b = 10$, con y sin ruido térmico.

La curva de energía libre de Gibbs G en función del campo magnético externo H_e está representada en la Figura 4.4. De igual forma que la curva de magnetización, la curva de energía libre presenta una serie de discontinuidades o saltos, donde cada uno de ellos identifica la entrada de uno o varios vórtices. Observamos que la energía es mayor cuando no hay efecto de fluctuaciones térmicas. El ruido térmico permite la entrada de vórtices para campos menores diferente a los casos en los que no se toman estos efectos de

fluctuaciones.

En conclusión resolvimos numéricamente las ecuaciones de Ginzburg-Landau dependientes del tiempo, con el término adicional del ruído térmico de Langevin para diferentes condiciones de contorno. Al analizar las curvas de magnetización, número de vórtices y energía libre de Gibbs en función del campo magnético aplicado, notamos que el efecto de las fluctuaciones térmicas para un superconductor mesoscópico se encuentra apreciablemente en el valor del primer campo crítico. Al comparar nuestros resultados para dos interfaces diferentes y considerar $E = 0$ y $E = 10^{-5}$.

Trabajo publicado en Revista Colombiana de Física Vol. 43, No.3 de 2011

4.2. Estructura Circular en una Muestra Superconductora

En esta sección estudiamos una geometría en forma de disco que contiene una estructura semicircular en su interior (un defecto), solucionamos las ecuaciones de Ginzburg-Landau dependientes del tiempo, pero esta vez, aplicamos el método numérico en coordenadas polares, debido al cambio de geometría también descrito en el capítulo tres de ésta tesis.

Resulta bastante importante estudiar muestras superconductoras con puntos de anclaje, imperfecciones o defectos, de hecho este tipo de investigación ha sido objeto de debate en los últimos años, pues ésta configuración origina diferentes comportamientos respecto a la entrada y salida de los vórtices en la muestra. En trabajos anteriores realizados [76] se reportó la influencia de un defecto circular sobre la configuración de vórtices en un disco superconductor mesoscópico considerando una interfaz superconductor/vacío ($b \to \infty$), mediante la solución de las ecuaciones de Ginzburg-Landau dependientes del tiempo se calculó energía libre de Gibbs, vorticidad, supercorriente, inducción magnética y densidad de electrones superconductores.

4.2.1. Aspectos Teóricos

Primero definimos la geometría como un disco superconductor que contiene en su interior un defecto que tiene una forma particular: una barrera

semicircular, además está inmerso en un medio aislante en presencia de un campo magnético uniforme perpendicular $\mathbf{H_0}$. Las TDGL son:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -(i\nabla + \mathbf{A})^2\psi + (1-T)\psi(1-|\psi|^2) \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (1-T)\mathrm{Re}\left[\bar{\psi}(-i\nabla - \mathbf{A})\psi\right] - \kappa^2 \nabla \times \mathbf{h} \tag{4.4}$$

Recordando la teoría descrita en el capítulo 2, las ecuaciones dinámicas se complementan con las condiciones de frontera apropiadas para el parámetro de orden [74]

$$(-i\nabla - \mathbf{A})\psi \cdot \mathbf{n} = \frac{i\hbar}{b}\psi|_n \Rightarrow \begin{cases} b \to \infty \Rightarrow (\nabla - i\mathbf{A})\psi_n \doteq 0 \\ b = 0 \Rightarrow \psi|_n = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

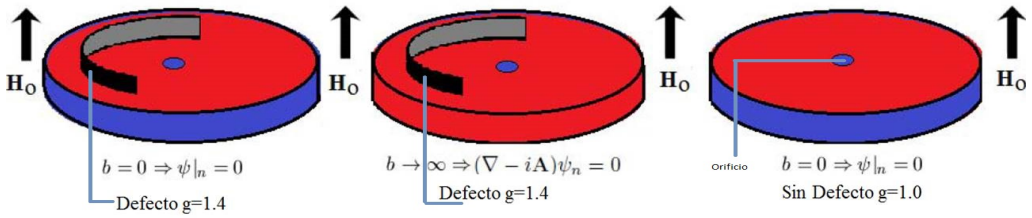

Figura 4.5: Geometría de las muestras estudiadas. Disco superconductor visión: superficie lateral (Izquierda) estado normal, (Mitad) estado superconductor, y (Derecha) estado normal sin el defecto. *(Se ha intruducido un agujero central, con el fin de eliminar problemas de convergencia en el centro del disco)*

b es el parámetro de De Gennes y $\hat{n}$ es el vector unitario perpendicular a la superficie del superconductor, $b \to \infty$ tenemos la condición usual de superconductor/vacío, es decir, $\hat{n} \cdot (\nabla - i\mathbf{A})\psi = 0$ y $\psi|_n \neq 0$, asume que la densidad de corriente normal desaparece en la interfaz. Por otro lado, la interfaz superconductor/aislante $b \sim \xi^2(0)/a$, donde a es la distancia interatómica. Para superconductores de baja temperatura b tiene un valor bastante grande ($\sim 1cm$). Refiriéndonos a valores positivos (negativos) para b simulamos interfaces superconductor/metal (superconductor/superconductor) y

bajo estas condiciones en general tendremos que $(\nabla - i\mathbf{A})\psi_n \neq 0$ y $\psi_n \neq 0$. $\psi_n = 0$ simula una gran cantidad de defectos en la interfaz, y esta nos permitirá tomar $b = 0$ en la ecuación 4.7, la condición de frontera habitual en mecánica cuántica pero no tan usual en las ecuaciones de Ginzburg-Landau de la superconductividad [74],[1]. Despreciaremos la dependencia z del parámetro de orden, la razón se fundamenta en el espesor del disco, ya que d es mucho menor que la longitud de coherencia [1]. Entonces $\mathbf{H_0} = \nabla \times \mathbf{A_0}$ dentro del disco y la ecuación 4.3 pueden escribirse como:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{g(r,\theta)}(i\nabla + \mathbf{A_0}) \bullet g(r,\theta)(i\nabla + \mathbf{A_0})\psi + (1-T)\psi(1-|\psi|^2) \quad (4.6)$$

$g(r,\theta)$ es alguna función que describe la topología superficial del disco (Recordando sección Variables de Enlace Coordenadas Polares), $g = 1.0$ representa una superficie homogénea, $g > 1$ simula un pilar y $g < 1$ un hueco (Ver Figura. 4.5).

4.2.2. Resultados

Los parámetros usados en nuestra simulación numérica para una película delgada de Al puro (asumiendo $\xi(0) = 1.2\ \mu m$, $T_c = 1.7K$, $T = 0.85$), son: Radio del disco $R = 9.0\xi(0)$ con un pequeño hueco central de radio $r_i = 0.1\xi$, para quitar problemas de convergencia; el valor del defecto es $g(r,\theta) = 1.45$ en un rango $0 \leq \theta \leq \pi$ y $r = R/2$.

La Figura 4.6 muestra la evolución dinámica del parámetro de orden usando $b = 0$ (abajo) y $b \to \infty$ (arriba). Para $b \to \infty$ el parámetro de orden en la frontera es diferente de cero en el estado Meissner. Por otro lado, cuando la barrera de energía superficial de Bean-Livingston es alcanzada justo en el punto de la frontera, el parámetro de orden tiene una depreciación hasta que se hace cero. En este punto un vórtice entra a la muestra y después el parámetro de orden justo en la frontera empieza a incrementarse de nuevo y regresa a su valor diferente de cero. Caso contrario sucede para $b = 0$ ya que se observa una suave entrada de los vórtices (Figura4.6 (superior)), para un superconductor con alta densidad de defectos en su superficie el

[1] Superconductor mesoscópico

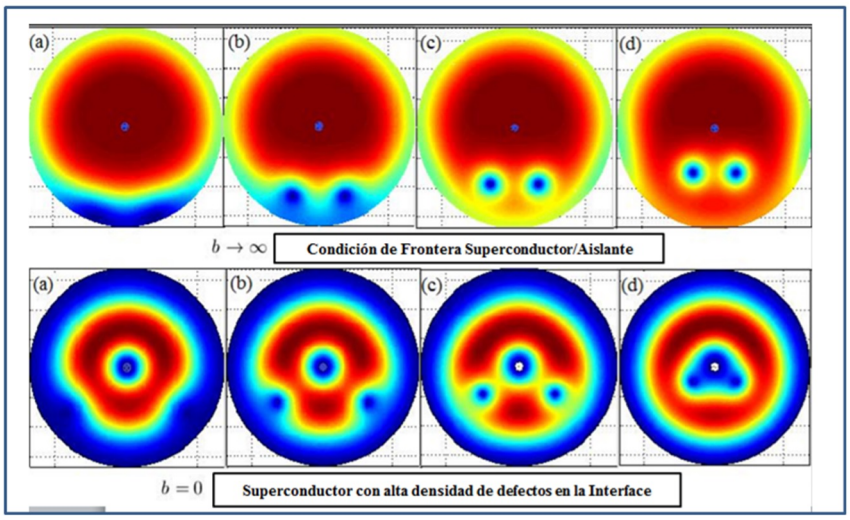

Figura 4.6: Topología de la evolución temporal del patrón espacial del parámetro de orden para un disco con un defecto semicircular. Para $b = 0$ (abajo), $H_{01} = 0.80$ y para un $b \to \infty$ (arriba), $H_{01} = 1.09$; donde H_{01} es el valor del campo del primer ingreso de vórtices. Las regiones de color rojo y azul representan valores del parámetro de orden (también su fase $\Delta\Phi/2\pi$, cambia desde 0 a 1), el color rojo muestra representa estado superconductor, mientras que el color azul representa estado normal $|\psi| = 0$ en el estado normal y $|\psi| = 1$ en el estado superconductor.

parámetro de orden en la interfaz es cero. Así solo una pequeña deformación de la superficie permite la penetración de un vórtice. La barrera superficial de energía es mayor en el caso $b \to \infty$ pues no es necesario que se deprecie el parámetro de orden en la superficie [81].

La Figura 4.8 muestra el logaritmo del módulo del parámetro de orden $|\psi|$ (e-h) y su fase en la figura 4.7 $\Delta\Phi$ (a-d). La figura 4.9 muestra la inducción magnética $\vec{\mathbf{h}}$ (i-l) para un disco con un defecto y $b = 0$ en campos magnéticos $H_0 = 0.8, 0.85, 0.98, 1.0$ con $N = 2, 4, 6, 6$ vórtices. $\psi = 0$ en la superficie permite la penetración de un vórtice y la barrera superficial es mucho menor. La fase permite determinar el número de vórtices en una región dada mediante el conteo de la variación en un camino cerrado alrededor de ésta región. Si la vorticidad en la región es N, entonces la fase cambia con $2\pi N$. Cuando el defecto se encuentra dentro de la muestra, la simetría circular se rompe y el

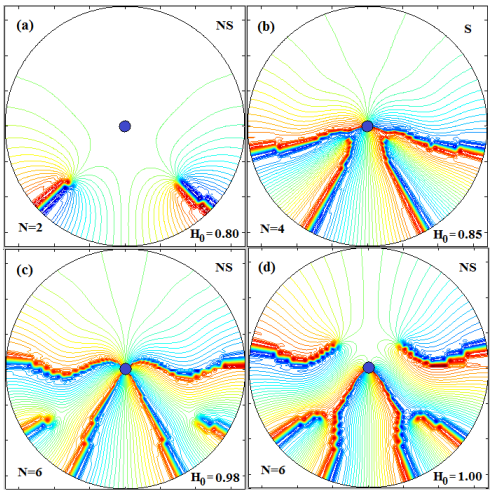

Figura 4.7: Fase del parámetro de orden N representa el número de vórtices que entran al disco

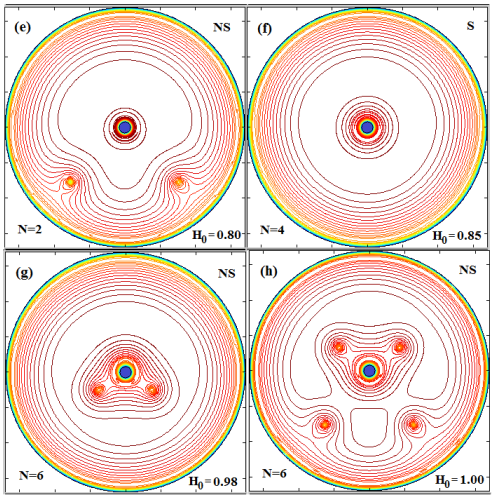

Figura 4.8: Logaritmo del módulo del parámetro de orden, ésta gráfica permite verificar la información del número de vórtices entrantes, dada por la gráfica de la fase.

defecto actúa como un centro de anti-anclaje, es posible observar la primera entrada de dos vórtices, el estado del vórtice cambia desde el estado Meissner a un estado de multivórtices con vorticidad $N = 2$ en un campo magnético

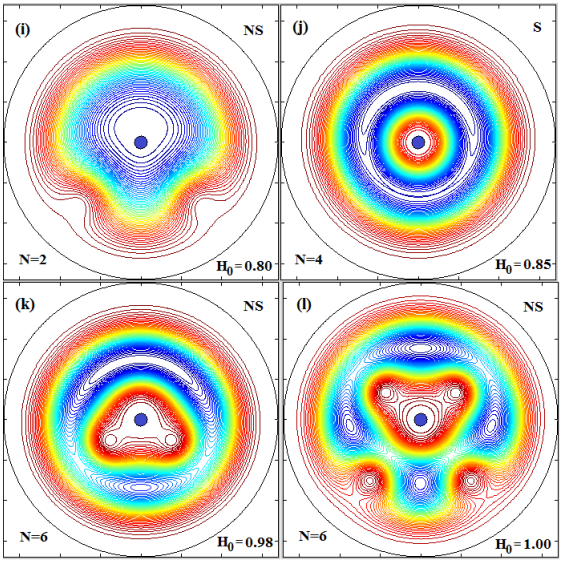

Figura 4.9: Inducción Magnética $\vec{\mathbf{h}}$ (i-l) para un disco con un defecto en $H_0 = 0.8, 0.85, 0.98, 1.0$ con $N = 2, 4, 6, 6$ para el caso $b = 0$. NS y S representan estados no estacionarios y estacionarios respectivamente.

$H_0 = 0.8$ con transiciones pares de vórtices desde $N = 2$ a $N + 2$. Para campos magnéticos bajos encontramos un estado de vórtices estable formando un vórtice gigante central con vorticidad $N = 4$ en $H_0 = 0.85$.

Se puede apreciar en la figura 4.10 que la energía libre de Gibbs G, la magnetización $-4\pi M$, vorticidad $N\Phi_0$ y super-corriente J, dependen fuertemente de la presencia del defecto. El crecimiento de la magnetización en la figura 4.10 cuando el campo magnético disminuye, significa que la presencia de la estructura hace que el material sea más diamagnético. La disminución en el número de eventos en que salen los vórtices en el disco sin defecto cuando el campo magnético desciende se relaciona con el hecho de que el defecto permite menos vórtices dentro de la muestra. También se puede observar en la figura 4.10 que la magnetización es menor para el mismo campo magnético externo (hay menos vórtices). Para ambas muestras, el campo crítico termodinámico superior e inferior se da en el mismo valor $H_{02} = 1.1$. Pero cuando el campo magnético está disminuyendo, la expulsión de los vórtices sucede a campos diferentes, dos vórtices permancen dentro de la muestra a campo magnético cero debido a la presencia del defecto; mientras que si el disco está sin defecto los vórtices permanecen en la muestra a un campo magnéti-

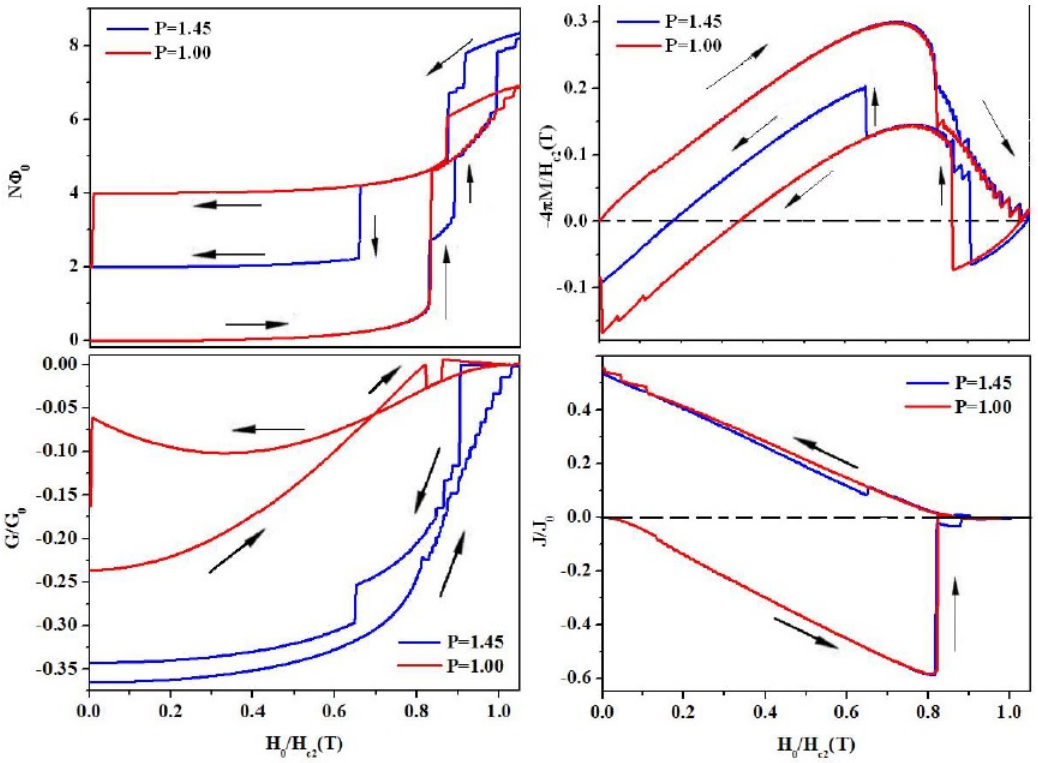

Figura 4.10: Energía libre de Gibbs G, Magnetización $-4\pi M$, vorticidad $N\Phi_0$, y supercorriente J (Aquí $P(r,\theta)$ es equivalente a $g(r,\theta)$, descrito en el método numérico).

co muy bajo $H_0 = 0.05$. Puede notarse claramente que la corriente J, la magnetización M, la vorticidad N, y la energía G tienen una serie de discontinuidades señalando que uno o más vórtices salen o entran a la muestra. Con la presencia del defecto es posible tener un mejor control del número de vórtices a campo magnético cero que en un disco plano. Por otro lado, hay una pequeña demora al ser expulsados los vórtices en presencia del defecto y el superconductor empieza a comportarse con una corriente inducida mucho mayor $0.2 \leq H_0 \leq 0.65$.

(Trabajo publicado en Modern Physics Letters B Vol. 27, No. 12 (2013) 1350087 (7 pages))

4.3. Efectos de Proximidad Debidos a la Inclusión de un Defecto en un Superconductor Mesoscópico

Uno de los temas de mayor importancia en superconductividad es conseguir que aumente la corriente crítica del material; es decir, el intervalo de corriente por debajo del cual el sistema actúa como superconductor: sin disipar, ni gastar energía al paso de la corriente. Si se introducen defectos adecuados en el material, se favorecerá que los vórtices permanezcan anclados y, por lo tanto, no haya disipación al pasar corriente. Cuando la intensidad de la corriente inyectada supera el valor de la corriente crítica, los vórtices se desanclan y el material conduce con resistencia (disipa)[91].

Un nuevo campo del estudio de la superconductividad ha despertado interés: introducir defectos en el material para conseguir que, cuando se aplique una corriente superior a la crítica, el movimiento de vórtices y la consiguiente disipación puedan guiarse artificialmente.

Con el objetivo de analizar el impacto de la inclusión de defectos en muestras superconductoras, en ésta sección estudiamos efectos de las condiciones de frontera y anclaje causados por un agujero presente en el interior de una muestra superconductora mesoscópica que tiene una geometría cuadrada. Solucionamos las ecuaciones de Ginzburg-Landau dependientes del tiempo para la muestra superconductora, que se encuentra en presencia de un campo externo aplicado perpendicular a su superficie. Analizamos los efectos de proximidad y anclaje, de acuerdo al número de vórtices dentro del hueco o defecto presente en la muestra superconductora, en este punto, nuestro objetivo es investigar y describir el comportamiento de la configuración de vórtices dependiendo del tamaño de la muestra superconductora y del defecto dentro de la misma, para ello, calculamos el parámetro de orden superconductor, la vorticidad, magnetización y campos críticos en función del campo magnético externo aplicado.

4.3.1. Aspectos Teóricos

En una muestra superconductora tipo II, la corriente crítica bajo la cual la muestra puede transmitir energía eléctrica sin ninguna pérdida, está limitada por los defectos estructurales, condiciones de frontera y la dinámica de

vórtices, por lo que resulta conveniente introducir dentro del superconductor centros o puntos de anclaje para controlar el movimiento de vórtices y consecuentemente tener control sobre la capacidad de transporte de corriente. Con este objetivo, diferentes trabajos publicados, han mostrado la inclusión de defectos de diferente topología, según resultados obtenidos teóricamente, se ha logrado demostrar que los campos críticos magnéticos son independientes de la geometría de los defectos, sin embargo, el arreglo de vórtices puede mejorar significativamente el transporte de corriente. Experimentalmente, en el laboratorio, desde hace tiempo, hay la posibilidad de dibujar, mediante técnicas ordinarias de fotolitografía "motivos o redes"(*arrays*) de tamaño micrométrico. Los fotones hacen de pincel para escribir y dibujar el patrón deseado. La obtención reciente de polímeros sensibles a la ilumiación, no por fotones, sino por electrones, permite disminuir el tamaño de los motivos. Con esta técnica se puede fabricar una lámina delgada superconductora en cuyo interior se hayan introducido defectos nanométricos ordenados de un tamaño parecido al de los parámetros superconductores relevantes. Estos defectos actuarán como centro de anclaje de los vórtices[92]-[95].

Para tal fin, analizamos el estado superconductor en un cuadrado mesoscópico con un defecto central (geometría cuadrada) 4.11, en presencia de un campo magnético externo aplicado perpendicular a su superficie. Calculamos la magnetización y vorticidad para dos diferentes condiciones de frontera $b = -2\xi(T)$ simulando una capa delgada de material superconductor con temperatura crítica mayor en contacto con el borde exterior de la muestra y $b \to \infty$, simulando una interfaz dieléctrica externa en función del campo magnético.

Figura 4.11: Superconductor en contacto con las dos diferentes interfaces

4.3.2. Resultados

Analizamos las curvas de magnetización de un cuadrado mesoscópico superconductor de área $S_L = 36\xi(T) \times 36\xi(T)$ con un defecto central. Consideramos el área del defecto S_d para cinco diferentes valores, $S_d = 324\xi^2(T), 144\xi^2(T), 36\xi^2(T), 9\xi^2(T)$ y $S_d = 0$, y para dos diferentes condiciones de frontera internas $b = -2\xi(T)$ y $b \to \infty$. Por otro lado, para los fines de nuestra simulación, escogimos los siguientes parámetros: espaciamiento entre la malla $a_x = a_y = 0.3$, una temperatura fija $T = 0.53$ y el prámetro de Ginzburg-Landau $\kappa = 5.0$. El campo magnético aplicado varía adiabáticamente en pasos de $\Delta H = 10^{-5}$.

En la figura 4.12 graficamos la magnetización $-4\pi M$ como una función del campo magnético para los casos $S_d = 9\xi^2(T)$ y $S_d = 36\xi^2(T)$ y $b \to \infty$ (arriba) y $b = -2\xi(T)$ (abajo). Los recuadros pequeños de la figura, 4.12 representan el contorno del parámetro de orden $|\psi|$ para $S_d = 9\xi^2(T)$. En la Fig. 4.12 (superior)(a) observamos la inminente entrada de vórtices para un primer campo crítico $H_1 = 0.1$, cuando se incrementa el campo magnético entran $N = 4$ vortices (N indica la vorticidad), los vórtices se quedan en la región superconductora en $H_e = 0.15$ (Para ésta misma figura 4.12 (superior)(b)) a campos críticos mayores $H_e = 0.4$, $N = 44$ vórtices permanecen en la región superconductora. Para este caso, podemos notar que no hay vórtices en el defecto, debido a su pequeño tamaño. Ahora, analicemos el gráfico presentado en la parte inferior, podemos notar $N = 0, 6, 17$ vortices en $H_e = 0.1, 0.15, 0.4$ respectivamente, si comparamos con la condición $b \to \infty$ podemos ver que hay un menor número de vórtices para el mismo campo magnético, esto se debe a la fuerza repulsiva del defecto superconductor. Por otro lado, podemos observar, menos saltos en la curva de magnetización para el caso $b = -2\xi(T)$, hay menor transición de vórtices, debido a que existe una mayor barrera de energía superficial del defecto.

En la Figura 4.13 graficamos la magnetización $-4\pi M$ como una función del campo magnético para una muestra cuadrada con un defecto central de área $S_d = 144\xi^2(T)$ y $S_d = 324\xi^2(T)$ lleno de un material dieléctrico caracterizado por $b \to \infty$ (inferior) y por otro material superconductor a una temperatura crítica mayor $b = -2\xi(T)$ (superior). Podemos notar que la presencia del defecto causa una notable caída del primer campo de penetración y causa un notable cambio cualitativo en la curva de magnetización. Por otro lado, podemos notar que el valor máximo de la curva de magnetización depende de b y los valores de S_d, por ejemplo, para $S_d = 144\xi^2(T)$, $b = -2\xi(T)$,

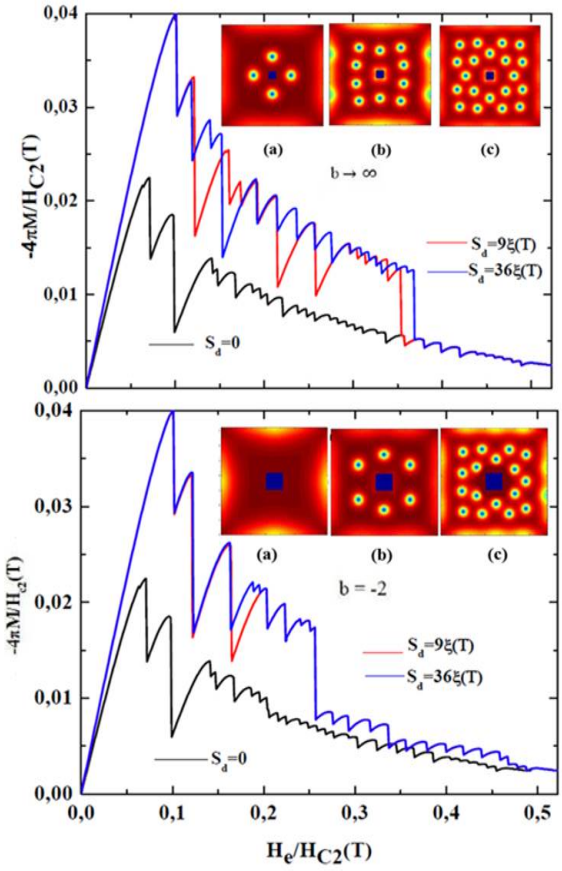

Figura 4.12: (Figuras en Color) Magnetización $-4\pi M$ y el contorno del parámetro de orden $|\psi|$ (recuadros pequeños) como una función del campo magnético H_e para $S_d = 9\xi^2(T)$ y $S_d = 36\xi^2(T)$ con $b \to \infty$ (arriba) y $b = -2\xi(T)$ (abajo).

el valor máximo de la magnetización es $M_{max} = -0.0223$ y para $b \to \infty$ es $M_{max} = -0.038$. Para las muestras estudiadas el segundo campo crítico es independiente de S_d y b.

La densidad de electrones superconductores se grafica en la figura Fig. 4.14 para un defecto con área $S_d = 144\xi^2(T)$ y $S_d = 324\xi\xi^2(T)$. En las figuras 4.14 (a,b) podemos ver que los cuatro primeros vórtices son atraídos hacia el centro del defecto dieléctrico, formando un vórtice gigante con vorticidad

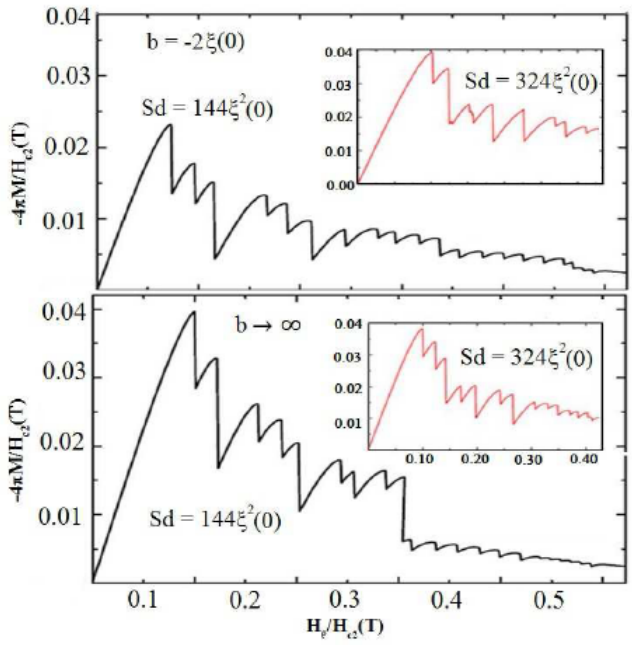

Figura 4.13: Curva de Magnetización $-4\pi M$ para $S_d = 324\xi^2(T)$ y $S_d = 144\xi^2(T)$ con $b = -2\xi(T)$ (superior) y $b = \infty$ (inferior)

$N_d = 4$. Cuando se incrementa el campo magnético más vórtices entran a la muestra, tenemos: $N_d = 8$ están dentro del defecto y $N_s = 12$ ($N_s = 4$) se sitúan en la región superconductora. Los vórtices que entran en el defecto no se pueden ver, sin embargo, se encuentran allí. De otra parte, se presenta un cambio en la fase, en la región del defecto igual a $\Delta\phi = 16\pi$ ($\Delta\phi = 0$), (las figuras 4.14(derecha (a))(derecha (b)), en estas figuras podemos apreciar que la fuerza repulsiva del centro de antianclaje hace que cambie un poco la geometría circular de los vórtices, esto se debe a que los vórtices que se encuentran dentro del defecto repelen a los que se han quedado en la región superconductora.

En las tablas 4.1-4.3 mostramos el campo magnético H_e y la vorticidad en la muestra:

Podemos observar una secuencia de las transiciones, en tanto que el campo magnético se incrementa. Las muestras con $S_d = 9\xi^2(0)$ y $S_d = 36\xi^2(0)$ no permiten vórtices dentro del defecto debido a las restricciones de tamaño.

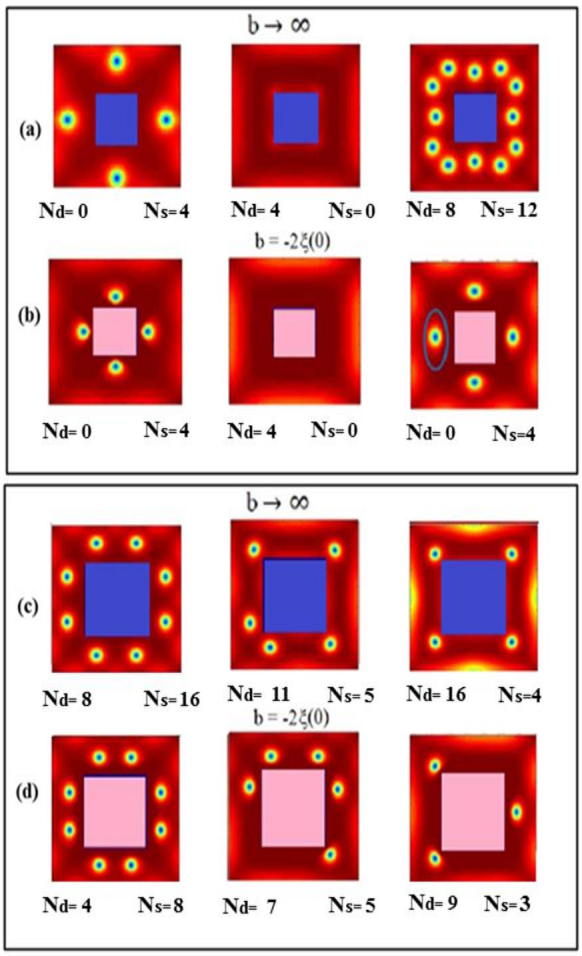

Figura 4.14: Densidad de electrones superconductores para $S_d = 144\xi^2(T)$, (a) $b = \infty$, (b) $b = -2\xi(T)$ y $S_d = 324\xi^2(T)$, (c) $b = \infty$, (d) $b = -2\xi(T)$. N_d y N_s indica la vorticidad en el defecto y en la región superconductora respectivamente. *Color rojo: Estado superconductor, Color azul: Defecto Metálico, Color rosa: Defecto superconductor*

(Trabajo presentado en 21st Latin American Symposium on Solid State Physics (SLAFES) 2013, Villa de Leyva, Boyacá, Colombia, aceptado para publicación en Physica B 2014.)

H_e	N_d	N_s	N total
0.1	4	0	4
0.124	4	4	8
0.16	4	16	20
0.31	4	24	28

Tabla 4.1: Vorticidad para $S_d = 144\xi^2(0)$ y $b = \infty$

H_e	N_d	N_s	N total
0.105	4	0	4
0.131	4	12	16
0.161	8	16	24
0.187	8	24	32

Tabla 4.2: Vorticidad para $S_d = 144\xi^2(0)$ y $b = -2\xi(T)$

H_e	N_d	N_s	N total
0.105	4	0	4
0.228	11	5	16
0.270	16	4	20
0.284	16	20	36

Tabla 4.3: Vorticidad para $S_d = 324\xi^2(0)$ y $b \to \infty$

4.4. Solución de las Ecuaciones de Ginzburg-Landau con Diferentes Interfaces Extendidas a Múltiples Dominios Conectados

Es bien sabido que las propiedades de un superconductor mesoscópico son influenciadas por la geometría de la muestra, defectos estructurales e interfaces, por tanto el comportamiento de la entrada y anclaje de vórtices, es estudiado desde el punto de vista experimental y teórico, de tal manera, se encontró que en el estado superconductor/normal la frontera de la fase H-T de las estructuras revelan un comportamiento fluctuante causado por la formación de diferentes configuraciones estables de vórtices en este muestra [82]-[85]. En esta sección analizamos el estado superconductor de una película mesoscópica al igual que en la sección anterior con un defecto central en

presencia de un campo magnético externo aplicado H_e. Los dos lados externos de la película están en contacto con un material metálico mientras que los otros dos lados se encuentran en contacto con un material superconductor. Consideramos tres casos para la capa delgada en contacto con los lados internos del defecto central 1) material metálico 2) material dieléctrico y 3) un material superconductor con temperatura crítica mayor. Calculamos la magnetización, energía libre y densidad de electrones superconductores.

Recordemos el uso de las condiciones de frontera de De Gennes:

$$(-i\nabla - \mathbf{A})\psi \cdot \mathbf{n} = \frac{i\hbar}{b}\psi|_n \Rightarrow \begin{cases} b \to \infty \Rightarrow \text{Superconductor/Dieléctrico} \\ b < 0 \Rightarrow \text{Sup/Sup a mayor } T_c \\ b > 0 \Rightarrow \text{Superconductor/Metal} \end{cases} \tag{4.7}$$

Siendo $\mathbf{n}$ un vector unitario normal a la interfaz [1],[74].

4.4.1. Resultados

Los parámetros usados en nuestra simulación fueron: $\kappa = 2.17$, el cual corresponde a un valor para una película delgada de Nb con espesor d (asumiendo $\xi(0) = 380$ nm,$T_c = 3.7K$, $d \approx 60$ nm), $T = 0$, las dimensiones de la muestra y del defecto interno son $S_h = 20\xi(0) \times 6\xi(0)$ y $S_d = 4\xi(0) \times 4\xi(0)$ respectivamente. El tamaño de la celda unitaria es de 0.25×0.25. Usamos $b = 0.2\xi(0)$ para la interfaz metálica externa y $b = -2.75\xi(0)$ para la interfaz superconductora externa. Por otro lado, para el defecto tenemos las siguientes valores del parámetro de de Gennes: $b = 2\xi(0)$, $b = -2\xi(0)$ y $b \to \infty$ respectivamente.

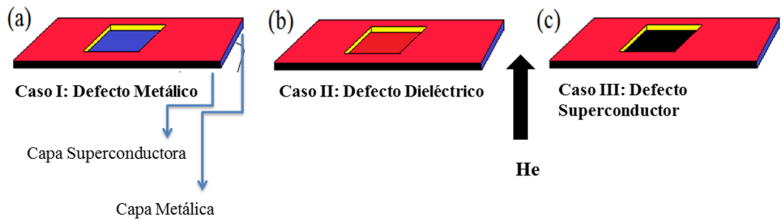

Figura 4.15: Arreglo de las muestras estudiadas. Película Superconductora uno de los lados de la película se encuentra en contacto con una capa delgada de material metálico el otro borde justo al frente, se encuentra en contacto con otro material superconductor, a la vez tenemos un defecto central (a) metálico (b) dieléctrico (c) superconductor. Por ello, tenemos múltiples interfaces dentro y fuera de la muestra.

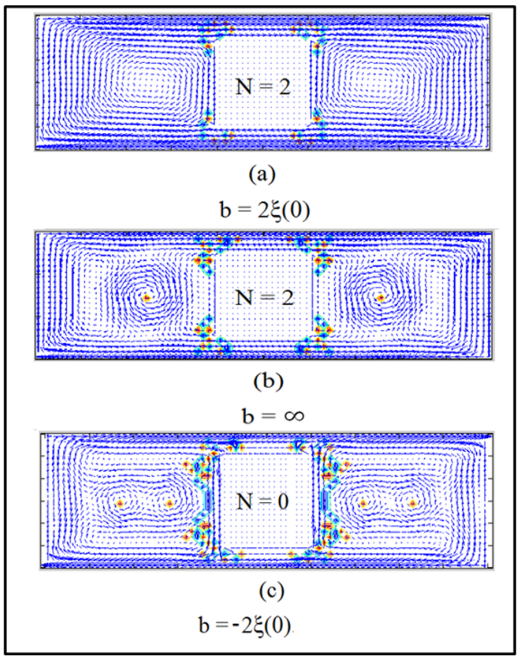

Figura 4.16: (Figuras en color) Supercorriente para $b = 2\xi(0)$, $b \to \infty$ y $b = -2\xi(0)$ en el defecto para $H_e = 0.42H_{c2}(0)$ y $N = 4$.

En la Fig.4.16 graficamos el contorno de la supercorriente para una película con $b = -2\xi(0)$, $b \to \infty$ y $b = 2\xi(0)$ en el defecto para $H_e = 0.42H_{c2}(0)$ y una misma vorticidad $N = 4$. Podemos observar que para $b = -2\xi(0)$ no hay vórtices dentro del defecto, esto se debe a las fuerzas de repulsión del material superconductor con una temperatura crítica mayor.

En la Fig.4.17 graficamos la inducción magnética para una película con $b = -2\xi(0)$, $b \to \infty$ y $b = 2\xi(0)$ en el defecto. Podemos notar que la inducción magnética decrece, en tanto, decrece b para el mismo campo magnético.

En la Fig. 4.18 mostramos la magnetización $-4\pi M$ (izquierda), energía libre G (derecha) y el parámetro de orden $|\psi|$ (recuadros pequeños a la izquierda), como una función del campo magnético para $b = -2\xi(0)$, $b \to \infty$ y $b = 2\xi(0)$. Podemos apreciar de éstas figuras que para el primer H_1 y el segundo H_2 la penetración de vórtices es dependiente de las condiciones internas de frontera.

Tenemos $H_1 = 0.391$ y $H_2 = 0.402$ cuando usamos $b = -2\xi(0)$, $H_1 =$

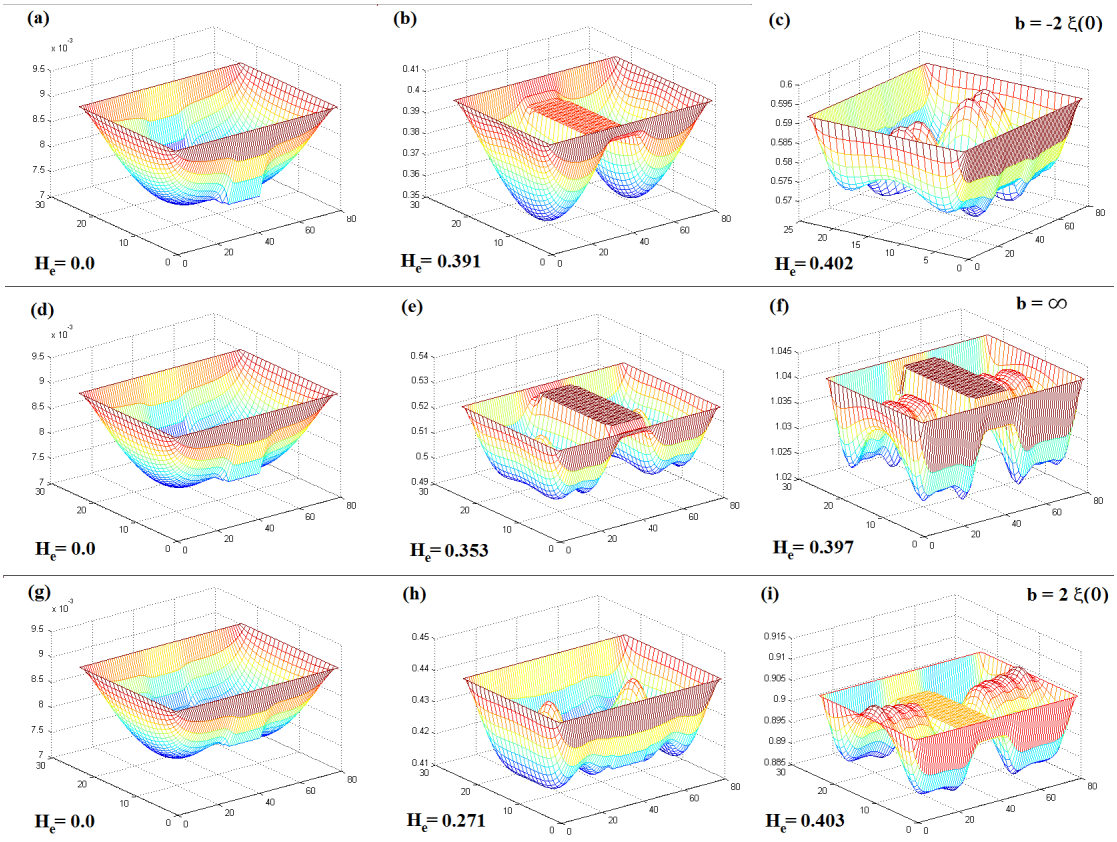

Figura 4.17: (Figuras a Color)Inducción magnética para una película con un defecto cuadrado.

0.353 y $H_2 = 0.397$ para $b \to \infty$ y $H_1 = 0.271$ y $H_2 = 0.403$ para $b = 2\xi(0)$. En los recuadros pequeños de la Fig. 4.18 (izquierda) mostramos el contorno de la gráfica del parámetro de orden para (a) $N = 2$ en $H_1 = 272, 0.354, 0.392$ y (b) $N = 4$ en $H_2 = 404, 0.398, 0.403$ para $b = 2\xi(0)$, $b = \infty$ y $b = -2\xi(0)$, respectivamente, (N indica la vorticidad). Debido a las condiciones de frontera los dos primeros vórtices entran en la muestra a pesar de que el borde se encuentra en contacto con la barrera de energía superficial más baja, por lo tanto son atraídos fácilmente hacia el defecto dieléctrico o metálico formando un vórtice gigante con vorticidad $N = 2$. Resulta de bastante interés observar que la presencia de la capa superconductora dentro del defecto actúa como una especie de fuerza repulsiva que detiene o previene la entrada de vórtices.

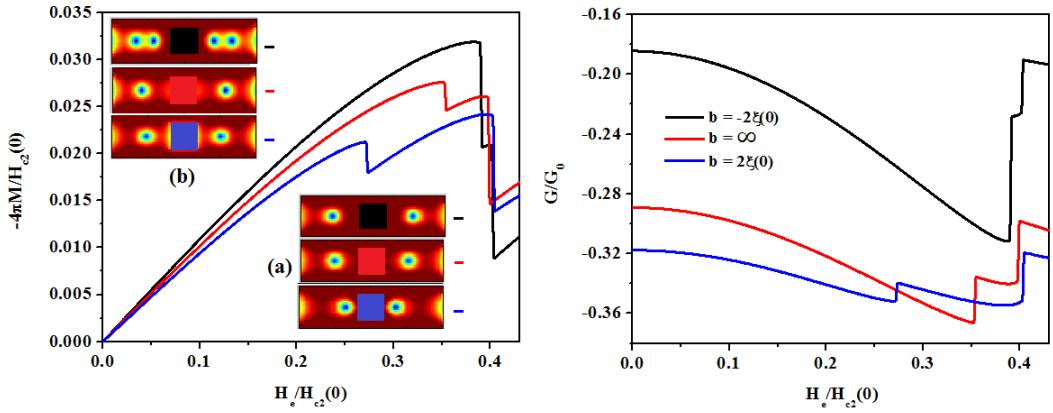

Figura 4.18: (Figuras a Color) Magnetización $-4\pi M$ (Izquierda) y Energía libre de Gibbs G (Derecha) como una función del campo magnético para la película con el defecto cuadrado.

(***Trabajo presentado en el International Conference on Mathematical Modeling in Physical Science (ICMSQUARE 2013), Praga, República Checa aceptado para publicación en Journal of Physics Conference Series, 2014***).

Capítulo 5

Resumen y Conclusiones

Cuando estudiamos superconductores mesoscópicos, es decir, muestras con alguna de sus dimensiones comparables al tamaño de la longitud de coherencia $\xi(T)$ o de la longitud de penetración $\lambda(T)$, observamos que tanto sus propiedades termodinámicas, como la configuración o arreglo de vórtices, en muchos casos, es propia de la estructura geométrica analizada. Con el fin de analizar los fenómenos físicos que se suceden en un superconductor mesoscópico, en ésta tesis, estudiamos de forma teórica, algunas cantidades termodinámicas, como la magnetización, energía libre de Gibbs, densidad de electrones superconductores, corriente crítica; este estudio se realizó para diferentes configuraciones simulando muestras superconductoras, mediante la solución numérica de las ecuaciones de Ginzburg-Landau dependientes del tiempo (TDGL) utilizando el método de campos de calibre con variables de enlace.

En primera instancia, estudiamos el efecto de las fluctuaciones térmicas sobre las propiedades magnéticas de un superconductor mesoscópico, de acuerdo a los resultados obtenidos, podemos concluir, que cuando las fluctuaciones térmicas son pequeñas, del orden de las que se observan en superconductores de baja T_c, las fluctuaciones térmicas no son relevantes. Por otro lado, cuando las fluctuaciones térmicas son fuertes, del orden de las que aparecen en superconductores de alta T_c, influyen en el valor del primer campo crítico, esto se logró apreciar en la curva de magnetización. Al comparar nuestros resultados para dos diferentes interfaces y considerar $E = 0$ y $E = 10^{-5}$ se aprecia que los picos para las curvas de magnetización caen para valores diferentes de H_e, calculamos una diferencia porcentual en H_{c1} de 1.3 % para un parámetro de De Gennes $b \to \infty$ y 1.9 % para $b = 10$,

concluyendo que la naturaleza de la interfaz determina los valores de H_{c1} mientras H_{c2} permanece invariable.

Ahora, estudiamos un disco fino, con un defecto en su interior que tiene forma de barrera semicircular, nuestro objetivo fue estudiar los efectos físicos que tendría este defecto sobre las propiedades termodinámicas de la muestra, nuestros resultados mostraron que el primer campo de penetración de vórtices y campos críticos superiores son independientes de la naturaleza del defecto, debido a que su fuerza de anclaje es pequeña. Por otro lado, encontramos que, dos vórtices permanecen dentro de la muestra a campo magnético cero, debido a los efectos de anclaje del defecto, lo cual favorecería el paso de corriente en el superconductor. Para el caso $b \to \infty$ los vórtices que logran entrar encuentran una barrera de penetración mucho más fuerte, mientras que para el caso de $b = 0$, los vórtices entrantes lo hacen suavemente, pues la condición $|\psi| = 0$ ya se ha cumplido en la interfaz.

Uno de los temas de mayor relevancia en superconductividad es conseguir que aumente la corriente crítica del material, es decir, el intervalo de corriente por debajo de la cual el material se comporta como superconductor: sin disipar, ni gastar energía al paso de la corriente, para ello la inclusión de defectos en el material para conseguir que cuando se aplique una corriente superior a la crítica el movimiento de vórtices y la consiguiente disipación puedan guiarse artificialmente se ha convertido en uno de los tópicos de más pesquisa. Por ello, Independiente a lo anterior, la presencia de una capa superconductora delgada en contacto con la superficie interna del defecto, actúa como centro de antianclaje modificando medianamente la geometría circular de los vórtices, esta pequeña deformación del vórtice no se presenta en la muestra con el defecto central en contacto con material dieléctrico, incluso cuando dentro del defecto hay presencia de vórtices. Hay menos número de vórtices al mismo campo magnético y menos saltos en la curva de magnetización, tal que es posible hablar de una barrera de energía superficial interna debido a la presencia de la capa superconductora en el defecto, esta barrera será mayor para valores menores de $|b|$.

Por último estudiamos el efecto de la naturaleza de un defecto central sobre las propiedades termodinámicas de una película superconductora mesoscópica. Tomamos tres valores diferentes para el parámetro de De Gennes $b = -2\xi(0)$ y $b = 2\xi(0)$ simulan un defecto con una superficie interna en contacto con una capa superconductora y una capa metálica respectivamente y $b \to \infty$, simula un material dieléctrico. Nuestros resultados muestran

que la primera y segunda entrada de vórtices para campos H_1 y H_2 depende fuertemente de la naturaleza del defecto. También, debido a la alta fuerza de repulsión del defecto superconductor, no hay presencia de vórtices dentro del defecto para campos magnéticos bajos.

Capítulo 6

Artículos Publicados durante la Maestría

- *Efectos del Ruído de Langevin sobre las Propiedades magnéticas de un Superconductor Mesoscópico*, J. Barba Ortega, S.J. Higuera, Miryam R. Joya. Revista Colombiana de Física, Vol. 43, No. 3 de 2011.
- *Half Circular Pillar in a Superconducting Sample*, J. Barba Ortega, S.J. Higuera, J. Albino Aguiar. Modern Physics Letters B, Vol. 27, No. 12 (2013) 1350087.
- *Proximity effect enhancement induced by a superconducting defect*, Sindy J. Higuera, J. Albino Aguiar, J. Barba-Ortega, aceptado para publicación Physica B, 2014.
- *Solution of the Ginzburg-Landau equations with different interfaces extended to multiply connected domains*, J. Barba-Ortega, Sindy J. Higuera, Miryam R. Joya, aceptado para publicación en Journal of Physics Conference Series, 2014
- *Efecto de un Defecto Superconductor sobre los Pares de Cooper de una Muestra Mesoscópica*, Sindy Jessenia Higuera Agudelo, Heli Barba Molina, José José Barba Ortega, en revisión Dyna Universidad Nacional de Colombia- sede Medellín.

Bibliografía

[1] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, Mc Graw -Hill, Inc. 1975.

[2] L. P. Gor'kov. Zh, Eksperimi Teor. Fiz., 36, 1918 ;37, 833 (1959); Translation Soviet Phys. JETP,9, 1364; 10, 593 (1960)

[3] C. Paulsen, *Coexistence of superconductivity and ferromagnetism in URhG*, Nature 413, 613-616 (2001).

[4] C. Pfleiderer,M. Uhlarz, S.M. Hayden, R. Vollmer, H. V. Loéhneysen, N.R. Bernhoeft, G.G. Lonzarich, *Coexistence of superconductivity and ferromagnetism in the d-bandmetal* $ZrZn_2$, Nature 412, 58-61 (2001).

[5] N.J. Curro, T. Caldwell, E.D. Bauer, L.A. Morales, M.J. Graf, Y. Bang, A.V. Balats ky, J.D. Thompson, J. L. Sarrao, *Unconventional superconductivity in* $PuCoGa_5$, Nature 434, 62-625 (2005).

[6] A.I. Buzdin, *Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures*, Rev. Mod. Phys. 77, 935-976 (2005).

[7] K-H. Muller, V.N. Narozhnyi, *Interaction of superconductivity and magnetism in borocarbide superconductors*, Rep. Prog. Phys. 64, 943-1008 (2001).

[8] N. Szabo, A. Ostlund, Modern Quantum Chemistry, *Introduction to Advanced Electronic Structure Theory*, (Dover Publications, New York, USA, 1996).

[9] D.A. Bonn, *¿Are high-temperature superconductors exotic?* Nat. Phys. 2, 159-168 (2006).

[10] S. Sanna, G. Allodi, G. Concas, A.D. Hillier, R. De Renzi, *Nanoscopic Coexistence of Magnetism and Superconductivity in $YBa_2Cu_3O_6x$ Detected by Muon Spin Rotation*, Phys. Rev. Lett. 93, 207001 (2004).

[11] C. Bernhard, J.L. Tallon, C. Niedermayer y T. Blasius, *Coexistence of ferromagnetism and superconductivity in the hybrid ruthenate-cuprate compound $RuSr_2GdCu_2O_8$ studied by muon spin rotation and dc magnetization*. Phys. Rev. B 59, 14099 (1999).

[12] T. Nachtrab, C. Bernhard, C. Lin, D. Koelle, R. Kleiner, *The ruthenocuprates: natural superconductor-ferromagnet multilayers*, C. R. Physique 7, 68-85 (2006).

[13] N. Taira, M. Wakeshima, Y. Hinatsu, *Magnetic properties of ruthenium pyrochlores $R_2Ru_2O_7$ (R = Rare Heart)*, J. Phys. Condens. Matter 11, 6983-6990 (1999).

[14] J. Barba-Ortega, Doctoral Thesis, *Configuração de vórtices e efeitos de interface em supercondutores mesoscopicos* UFPE - Brasil, 2007.

[15] M.V. Milosevic, G.R. Berdiyorov, and F. M. Peeters, *Mesoscopic Field and Current Compensator Based on a Hybrid Superconductor-Ferromagnet Structure*, Phys. Rev. Lett 95, 147004 (2005).

[16] M.V. Milosevic and F. M. Peeters, *Vortex-Antivortex Nucleation in Magnetically Nanotextured Superconductors: Magnetic Field-Driven and Thermal Scenarios*, Phys. Rev. Lett 94, 227001 (2005).

[17] D. Gropp, H. G. Kaper, G. K. Leaf, D. M. Levine, M. Palumbo, and V. M. Vinokur, J. Comput. phys. 123, 254 (1996).

[18] J. Barba-Ortega, A. Becerra, J. Albino Aguiar, *Two dimensional vortex structures in a superconductor slab at low temperatures*. Physica C 470, 225 (2010).

[19] L. Cabral, J. Barba-Ortega, C. C. de Souza, J. Albino Aguiar, *Vortex properties of mesoscopic superconducting samples*. Physica C 470, 786 (2010).

[20] E. Sardella, P. N. Lisboa-Filho and W. A. Ortiz, *Temperature-dependent vortex motion in a square mesoscopic superconducting cylinder: Ginzburg-Landau calculations*, Phys. Rev. B 74, 014512 (2006).

[21] G.C. Buscaglia, C. Bolech in: J. Berger, J. Rubinstein (Eds.), *Connectivity and Superconductivity*, Springer, 2000.

[22] R. Kato, Y. Enomoto and S. Maekawa, *Effects of the surface boundary on the magnetization process in type II superconductors*, Phys. Rev. B 47, 13, 8016 (1993).

[23] M. Lange, M. J. Van Bael, Y. Bruynseraede, V V. Moshchalkov, *Nanoengineered Magnetic-Field-Induced Superconductivity*, Phys. Rev. Lett 90 197006 (2003).

[24] A. V. Silhanek, W. Gillijns, V. V. Moshchalkov, V. Metlushko, B. Ilic, *Tunable pinning in Superconducting films with magnetic microloops*, Appl. Phys. Lett 89, 182505 (2006).

[25] A. Kanda, B. J. Baelus, F. M. Peeters, K. Kadowaki, and Y. Ootuka, Phys. Rev. Lett.93,257002 (2004).

[26] J. Roberto Ibarra, *La materia a muy bajas temperaturas*, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UANL Marzo, (2008), Vol XI.

[27] J. M. Daarns, J. P. Carbotte and R. Baquero, J.Low Temperature. Physics., 35,547 (1979).

[28] R. Baquero. *Brief Introduction to Superconductivity*, editado por la UPTC, Colombia, R. Baquero, Primera edición oct. 2006 ISBN 978-958-660-111-5.

[29] J. P. Sethna, *Entropy, Order Parameters, and Complexity, Laboratory of Atomic and Solid State Physics*, Cornell University, Ithaca, NY 14853-2501 Clarendon Press- Oxford (2011).

[30] F. J. Poveda Cuevas, *Estudo de Vórtices em Supercondutores e Teoria de Campos*, Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, (2009).

[31] R. Baquero, O. Navarro, *Ideas Fundamentales de la Superconductividad* (Cinvestav,Universidad Autónoma de México, México D. F., México, 2007). L. E.Young, S. A. Ramírez, R. Baquero, Rev. Col. Fís. **38**, No. 2, 2006.

[32] M. Mueller, *Fundamentals of Quantum Chemistry Molecular Spectroscopy and Modern Electronic Structure Computations* (Kluwer academic publisher, New York University Press, Princeton, USA, 2002).

[33] F. London and H. London, *The Electromagnetic Equations of the Supraconductor*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 149(866):71, 1935.

[34] C. P. Poole Jr, H. A. Farach, R. J. Creswick, Department of Physics and Astronomy University of South Carolina Columbia, South Carolina. Ruslan Prozorov, Ames Laboratory Department of Physics and Astronomy, Iowa State University, Ames Iowa, Second edition 2007.

[35] V. V. Schmidt, P. Muller, A. V. Ustinov, *The Physics of Superconductors: Introduction to Fundamentals and Appplications* (Springer- Verlag, Berlin Heidelberg, 1997).

[36] B. J. Baelus and F. M. Peeters, *Hall potentiometer in the ballistic regime*, Appl. Phys. Lett. 74, 1600-1602 (1999).

[37] J. J. Barba, L. R. Cabral and J. Albino Aguiar. **Brazilian Journal of Physics. 36** 3B 1029, (2006).

[38] P. G. De Gennes. *Superconductivity of Metals and Alloys*. W.A. Benjamin, Inc., 1966.

[39] J. B. Ketterson and S. N. Song. *Introduction to Superconductivity*. Cambridge University Press, 1999.

[40] L. P. Gor'kov and G. M. Éliashberg. Soviet Physics. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 27:328, 1968.

[41] R. S. Thompson and C. R. Hu, *Dynamic Structure of Vortices in Superconductors*. Physical Review Letters, 27(20): 1352, 1971.

[42] R. Kato, Y. Enomoto, and S. Maekawa. *Effects of the Surface Boundary on the Magnetization Process in Type-II Superconductors*. Physical Review B, 47(13):8016,1993.

[43] L. Kramer and R. J. Watts-Tobin. *Theory of Dissipative Current-Carrying States in Superconducting Filaments*. Physical Review Letters, 40: 1041,1978.

[44] D. Saint James, G. Sarma, and E. J. Thomas, Type II Superconductivity (Pergamon Press, Oxford, 1969).

[45] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Statistical Physics, 3rd edn., part 1 (Pergamon Press, Oxford, 1980).

[46] W. H. Kleiner, L. M. Roth, and S. H. Autler. *Bulk Solutions of Ginzburg-Landau Equations for Type II Superconductors: Upper Critical Field Region.* Physical Review,133(5A):A1226,1964.

[47] C. C. Souza Silva. *Propriedades de Equilíbrio e de Transporte da Matéria de Vórtices em Nanoestructuras Superconductoras*. PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Julho 2003.

[48] V. A. Shweigert y F. M. Peeters, Phys Rev. B **60**, 3084 (1999).

[49] B. J. Baelus, F. M. Peeters y V. A. Shweigert Phys Rev. B **61**, 9734 (2000).

[50] A. D. Hernandez y D. Domínguez Phys Rev. B **65**, 144529 (2002).

[51] Q. Du, M. D. Gunzburger, y J. S. Peterson. *Computer Simulation of type II Superconductivity Including Pinning Phenomena*. Physical Review B, 51(22):16194, 1995.

[52] Q. Du, M. D. Gunzburger, y J. S. Peterson. *Analysis and Aproximation of the Ginzburg-Landau Model of Superconductivity*. SIAM Review, 34(1):54,1992.

[53] Q. Du, M. D. Gunzburger, y J. S. Peterson. *Solving the Ginzburg-Landau Equation by Finite Element Methods*. Physical Review B, 46(14): 9027,1992.

[54] A. Doelman. *Finite Dimensional Models of the Ginzburg-Landau Equations*. Nonlinarity, 4:231,1991.

[55] T. Winiecki y C. S. Adams. *A Fast Semi- Implicit Finite- Difference Method for the TDGL equations*. Journal of Computational Physics, 179:127,2002.

[56] W. D. Groop, H. G. Kaper, G. L. Leaf, D. M. Levine, M. Palumbo, V. M. Vinokur, J. Comp. Phys. **123**, 254 (19976).

[57] K. G. Wilson. Confinement of Quarks. Physical Review D, 10:2445, 1974.

[58] M. Creutz, Quarks, Gluons and Lattices. Cambridge University Press, 1983.

[59] G. C. Buscaglia, C. Bolech and A. López. Connectivity and Superconductivity, 2000.

[60] W. Press, B. Flannery, S. Tenkolshy y W. Vetterling. *Numerical Recipes, the Art of Scientific Computing*. Cambridge Univ., 1988.

[61] J. Barba-Ortega, E. Sardella, J. Albino Aguiar, Supercond. Sci. Technol.24, 015001 (2011).

[62] J. Berger and J. Rubinstein, Phys. Rev. B. **59**, 8896 (1999).

[63] O. Buisson, P.Gandit, R. Rammal, Y. Y. Wang y B. Pannetier, Phys. Lett. A **150**, 36 (1990).

[64] C. A. Bolle, V. Aksyuk, F. Pardo, P. L. Gammel, E. Zeldov, E. Bucher, R. Boie, D. J. Bishop, y D. Nelson, Nature **399**, 43 (1999).

[65] A. K. Geim, S. V. Dubonos, J. G. S. Lok, M.Henini y J. C. Maan, Nature **396**, 144(1998).

[66] J. J. Palacios, Phys. Rev. Lett. **84**,1796 (2000).

[67] C. P. Bean y J. D. Livingston, Phys. Rev. Lett. **12**,14 (1964).

[68] Y. Enomoto y K. Okada, J.Phys.Cond. Matter **9**, 1023 (1997).

[69] V. A. Shweigert y F. M. Peeters, Phys. Rev. B **57** 13817 (1998).

[70] P. S. Deo, V. A. Shweigert y F. M. Peeters, Phys. Rev. B **59** 6039 (1998).

[71] V. V. Moschalkov, L. Gielen, C. Strunk, R. Jonckheere, X. Qiu, C. Van Haesendock, and Y. Bruynseraedae, Nature (London) 373, 319 (1995).

[72] J. J. Barba, *Configuração de vórtices e efeitos de interface em supercondutores mesoscópicos*,tese de doutorado, Universidad Federal de Pernambuco, Julho(2007).

[73] De Gennes P. G. Andisnon, *Superconductivity of metals and alloys*, Wesley ed. (1966).

[74] G. Blatter, M. V. Feigelman, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin and V. M. Vinokur, Rev. Mod. Phys. 66, 1125 (1994).

[75] G. R. Berdiyorov, M. V. Milosevic, and F. M. Peeters, Phys. Rev. Lett **96**, 207001 (2006).

[76] G. C. Buscaglia, C. Bolech and A. López,*Connectivity and Superconductivity*, J. Berger, and J. Rubinstein (Eds.), Springer,(2000).

[77] J. Berger and J. Rubinstein, Phys. Rev. B. **59**, 8896 (1999).

[78] J. Barba-Ortega, Edson Sardella, J. Albino Aguiar, Physica C, **485**, 49 (2013).

[79] J. Barba-Ortega, Edson Sardella, J. Albino Aguiar, E. H. Brandt, Physica C, **479**, 49 (2012).

[80] D. Ray, C.J. Olson Reichhardt, B. Janko, C. Reichhardt, Phys. Rev. Lett. **110**, 267001 (2013).

[81] V. V. Moshchalkov, L. Gielen, C. Strunk, R. Jonckheere, X. Qiu, C. Van Haesendonck, and Y. Bruynseraede, Nature (London) 373, 319 (1995).

[82] G. R. Berdiyorov, S. H. Yu, Z. L. Xiao, F. M. Peeters, J. Hua, A. Imre, and W. K. Kwok. Phys. Rev. **B** 80, 064511 (2009).

[83] G. Zha, M. V. Milosevic, S.-P. Zhou, and F. M. Peeters. Phys. Rev. **B** 84, 132501 (2011).

[84] W. Gillijns, M. V. Milosevic, A. V. Silhanek, V. V. Moshchalkov, and F. M. Peeters. Phys. Rev. **B** 76, 184516 (2007).

[85] M. P. González, J. Villegas, E. M. González y J. L. Vincent, *Vórtices en Superconductores, Investigación y ciencia*, Junio (2007)

[86] V. Silhanek, L. Van Look, R. Jonckheere, B. Y. Zhu, S. Raedts, and V. V. Moshchalkov, Phys.Rev. **B** 72, 014507 (2005).

[87] Y. L. Wang, M. L. Latimer, Z. L. Xiao, R. Divan, L. E. Ocola, G. W. Crabtree, and W. K. Kwok, Phys.Rev. **B** 87, 220501 (2013).

[88] M. Motta, F. Colauto, W. A. Ortiz, J.Fritzsche, J. Cuppens, W. Gillijns, V. V. Moshchalkov, T. H. Johansen, A. Sanchez, A. V. Silhanek. Appl. Phys. Lett. **102**, 212601 (2013).

[89] V. R. Misko and Franco Nori, Phys. Rev. **B** 85, 184506 (2012).

[90] W. J. Zhang, S. K. He, H. F. Liu, G. M. Xue, H. Xiao, B. H. Li, Z. C. Wen, X. F .Han, S. P. Zhao, C. Z. Gu, X. G. Qiu, and V. V. Moshchalkov, Europhys. Lett. **99**, 37006 (2012).

[91] G-Q. Zha, M. V. Milosevic, Shi-Ping Zhou, and F. M. Peeters Phys. Rev. **B** 84, 132501 (2011). G. R. Berdiyorov, M. V. Milosevic, and F. M. Peeters, Phys. Rev. Lett. **96**, 207001 (2006).

[92] V. R. Misko, S. Savelev, and F. Nori, Phys. Rev. **B** 74, 024522 (2006).

[93] V. R. Misko, D. Bothner, M. Kemmler, R. Kleiner, D. Koelle, F. M. Peeters, and F. Nori, Phys. Rev. B **82**, 184512 (2010).

[94] J. Barba-Ortega, E. Sardella, and J. A. Aguiar, Mod. Phys. Lett. **B** 27, 4 1350025 (2013).

[95] A. V. Silhanek, W. Gillijns, V. V. Moshchalkov, B. Y. Zhu, J. Moonens, and L. H. A. Leunissen, Appl. Phys. Lett. **89**, 152507 (2006).

[96] J. Barba-Ortega, Edson Sardella, and J. Albino Aguiar and F. M. Peeters, Physica C **487**, 47 (2013).