Reconocimiento de la 3-Esfera

Por

Joan Carlos Segura Aguilar

Trabajo presentado como requisito parcial para
optar al título de Magister en Ciencias Matemáticas

Directores

Edgar Arturo Ramos Navarrete

Carlos Mario Parra Londoño

Universidad Nacional

Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Julio de 2011

A mis queridos padres
Luis Luna y Nebis Aguilar,
a mi bella novia Nataly,
y en especial a Dios
por siempre ayudarme

Contenido

Resumen **v**

Abstract **vi**

Agradecimientos **vii**

Introducción **1**

1. Preliminares **5**

1.1. Poliedros y complejos 5

1.2. Variedades 7

1.3. Vecindades regulares 7

1.4. Asas 8

2. Espinas de 3-Variedades **9**

2.1. Colapso 9

2.2. Espinas 11

2.3. Poliedros simples y especiales 11

2.4. Espinas especiales 13

2.5. Espinas casi simples 15

2.6. Complejidad de una 3-variedad 17

3. Superficies 2-Normales **19**

3.1. Supeficies 2-normales en descomposiciones de asas 19

3.2. Superficies fundamentales 27

3.3. Suma de superficies 2-normales 28

3.4. Cortando a lo largo de superficies 2-normales 30

4. Enlaces en una 3-bola **34**

4.1. Discos de compresión y troncos coronados 34

4.1.1. Resultado principal de este capítulo 40

4.2. Posición delgada de enlaces 40

5. El Teorema de Rubinstein **49**

6. Algoritmo para Reconocer S^3 **63**

6.1. Esferas y bolas homológicas 63

6.2. El algoritmo 70

Bibliografía **72**

Resumen

El desarrollo de esta tesis consiste en describir el algoritmo de Rubinstein, el cual puede distinguir si una 3-variedad es o no es la 3-esfera. Detallaremos la versión de Matveev para este algoritmo. El algoritmo considera una 3-variedad por medio de la descomposición en asas generadas por una espina especial. Si la 3-variedad es una 3-esfera, un teorema de Rubinstein garantiza la existencia de una 2-esfera 2-normal contenida en la 3-variedad con la propiedad de que en la intersección de esta 2-esfera y al menos una bola (0-asa) de la descomposición en asas aparece al menos un cuadrilátero o un óctagono. El algoritmo busca tal 2-esfera y si no la encuentra, se concluye que la 3-variedad no es la 3-esfera. Si se encuentra una tal 2-esfera, se usa para cortar la 3-variedad en varias partes cada una de las cuales es una 3-variedad con "complejidad" menor, y de tal manera que la 3-variedad original es una 3-esfera si y sólo si cada una de las partes es la 3-esfera. Para determinar si una de las partes es la 3-esfera, el algoritmo es aplicado recursivamente, a menos que trivialmente sea la 3-esfera (su espina es un punto).

Palabras Claves

3-Variedades, Espinas Especiales, Superficie 2-Normal, Descomposición en Asas, Posición Delgada para Enlaces, El Teorema de Rubinstein.

Abstract

This thesis describes an algorithm by Rubinstein that distinguishes whether a 3-manifold is the 3-sphere or not. We give the details of Matveev's version of this algorithm. The algorithm considers a 3-manifold by means of the handle decomposition generated by a special spine. If the 3-manifold is the 3-sphere, a theorem by Rubinstein guarantees that there is a 2-normal 2-sphere contained in the 3-manifold with the property that in the intersection of this 2-sphere and at least one ball (0-handle) of the decomposition appears a quadrilateral or an octagon. The algorithm looks for such a 2-sphere and if it is not found, it is concluded that the 3-manifold is not the 3-sphere. If such a 2-sphere is found, it is used to cut the 3-manifold into several pieces which are 3-manifolds with smaller "complexity" and such that the original 3-manifold is a 3-sphere if and only if each of the pieces is a 3-sphere. To determine if one of the pieces is the 3-sphere, the algorithm is applied recursively, unless it is trivially the 3-sphere (its spine is a point).

keywords

3-Manifold, Special Spines, 2-Normal Surfaces, Handle Decompositions, Thin Position of Links, The Rubinstein Theorem.

Agradecimientos

Quiero expresar mis agradecimientos a:

Mis directores, el profesor Edgar Ramos y el profesor Carlos Parra, quienes en todo momento estuvieron al tanto de mi formación profesional, brindandome su amistad y confianza.

A todas esas personas que de alguna manera u otra compartieron conmigo los placeres del estudio de las matemáticas. En especial a mi gran y mejor amigo Hugo Galeano.

Introducción

Un problema fundamental de la topología algorítmica es describir un procedimiento el cual, dados dos espacios topológicos, puede determinar (en un número finito de pasos) si estos son homeomorfos . En este contexto un espacio topológico es dado por medio de una representación finita, la cual usualmente es una *triangulación*.

Problema del Homeomorfismo: *Dadas dos triangulaciones T y T', ¿son los espacios topológicos correspondientes homeomorfos ?*

Dada una pregunta genérica P (como la anterior), un *procedimiento de decisión* para P, o *un algoritmo para decidir* P es, informalmente, un programa de computador el cual para cada instancia concreta de P produce en un número finito de pasos una respuesta (correcta). La descripción formal de un algoritmo usa la noción de *máquina de Turing,* u otra de las nociones formales de computación que son equivalentes a estas.

Existen preguntas naturales *insolubles*, es decir, para las que no existe un procedimiento de decisión. Un ejemplo bien conocido es el *problema de la palabra*. Dado un grupo G descrito por medio de relaciones generadores g_i y relaciones r_j, y un producto de generadores γ:

$$G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_m; r_1, r_2, \ldots, r_n \rangle, \quad \gamma = g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_s},$$

se busca decidir si $\gamma = 1$ (el elemento identidad). Basado en esto, Markov [4] probó en 1958 que el problema del homeomorfismo para n-variedades es insoluble. El caso de 1-variedades es trivial y el de 2-variedades tiene una solución simple que ha sido conocida desde comienzos del siglo pasado: una 2-variedad compacta está determinada por su orientabilidad y su género. Lo anterior deja abierto el caso de 3-variedades compactas, donde sólo algunos casos parciales han sido resueltos.

El problema que se considera en esta tesis es el caso concreto en que una de las 3-variedades es simplemente la 3-esfera y se pregunta si otra 3-variedad dada por medio de, digamos una triangulación, es homeomorfa a la 3-esfera:

Reconocimiento de la 3-Esfera: *Dada una triangulación T de una 3-variedad, es T una 3-esfera ?*

En 1992, Rubinstein [8] describió un algoritmo para este problema, el cual hace uso de una extensión de la teoría de superficies normales desarrollada por Haken anteriormente (quien las usó también para la solución de problemas algorítmicos, incluyendo el problema de decidir si un nudo es trivial), y también de la teoría de superficies mínimas [2]. El elemento principal del algoritmo de Rubinstein es la existencia para una 3-esfera de una una 2-esfera *casi normal* embebida en ella, la cual se puede determinar algorítmicamente de manera similar a la usada para las superficies normales de Haken. En 1994, Thompson publicó una versión simplificada en la cual reemplaza la teoría de superficies mínimas con argumentos que usan el concepto de *posición delgada* de un enlace en una 3-bola [10]. Finalmente, en 1995 Matveev dió una presentación alternativa del algoritmo de Thompson en la que la 3-variedad se representa por medio de una *espina especial* [5].

El objetivo de esta tesis es dar una presentación completa del algoritmo de Thompson con la presentación de Matveev y su justificación. Nuestro tratamiento sigue el

enfoque que desarrolló Matveev en [6] para la presentación de este algoritmo.

El algoritmo lo resumimos a continuación. Dada una triangulación T de una 3-variedad M, el algoritmo procede de la siguiente manera:

1. Se determina $H_1(M)$, el primer grupo de homología de M.

   1.1. Si $H_1(M) \neq 0$, entonces M no es una 3-esfera y el procedimiento termina.

   1.2. Si $H_1(M) = 0$ entonces se continua con el siguiente paso (en este caso M es una 3-*esfera homológica*).

2. Se obtiene una espina especial P para M. (P es realmente una espina especial para $M \setminus B$ donde B es una 3-bola en M.)

3. Se busca una 2-esfera *2-normal* S en M usando P (la cual debe existir si M es una 3-esfera por el resultado de Rubinstein).

   3.1. Si S no existe, entonces M no es una 3-esfera y entonces el procedimiento termina.

   3.2. Si S existe, se usa S para particionar P en espinas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de 3-esferas homológicas $M_1, M_2, \ldots, M_n$, de tal manera que

      (i) cada P_i es una espina especial ó es un punto (si P_i es un punto, entonces M_i es una 3-esfera), y

      (ii) M es la suma conexa de $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

4. (Paso recursivo) Para cada P_i, M_i obtenida en el paso anterior, si P_i es una espina especial (no es un punto) entonces se aplican a P_i, M_i recursivamente los pasos 3 y 4. Si se obtiene que cada M_i es una 3-esfera, entonces la 3-variedad M inicial es una 3-esfera, y de lo contrario no los es. (Es decir, si en todas las ejecuciones recursivas nunca se falla en encontrar una 2-esfera 2-normal, entonces la 3-variedad inicial es la 3-esfera).

El desarrollo de ésta tesis esta distribuido de la siguiente forma:

- Preliminares. Aquí encontramos algunos conceptos muy básicos de topología
- Capítulo 2. En este cepítulo se define el concepto de espinas, espinas especiales y espinas casi simples y también se define la complejidad de una 3-variedad.
- Capítulo 3. En este capítulo definimos el concepto de superficies 2-normales en descomposicion de asas y vemos algunas de las propiedades asociadas a este concepto, como lo es el hecho de cortar a una 3-variedad a lo largo de una superficie 2-normal contenida en él.
- Capítulo 4. La primera sección de este capítulo contiene el enunciado de un teorema que se usara para la prueba del teorema de Rubinstein (a saber el teorema 4.2). En la sección siguiente de este capítulo se da una prueba de el teorema 4.2.
- Capítulo 5. En este capítulo tenemos el enunciado formal del teorema de Rubinstein y su demostración.
- Capítulo 6. En la primera sección definimos los conceptos de bolas y esferas homológicas y demostramos algunos resultados que nos ayudaran a constituir los pasos del algoritmo deseado. En la ultima sección de este capítulo tenemos la descipción del algoritmo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Poliedros y complejos

Un *poliedro convexo* es la envoltura convexa de un número finito de puntos en R^n. Los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_k \in R^n$ son llamados *dependientes* si existe un plano $(k-1)$-dimensional que los contenga, en caso contrario se llaman *independientes*. Un poliedro convexo generado por puntos independientes $x_0, x_1, \ldots, x_k$ es llamado un *simplejo k-dimensional*. Un *poliedro* es una unión de un número finito de poliedros convexos contenidos en algún R^n. Cualquier poliedro puede ser dividido en simplejos de modo muy preciso, esto es, cualquier dos simplejos o no se cruzan o se cruzan a lo largo de una cara común. Tal subdivisión es llamada *triangulación de el poliedro* y un poliedro con una triangulación fija es llamado un *complejo simplicial*. Es conveniente suponer que todas las caras de todos los simplejos de una triangulación también son simplejos de la triangulación.

Si v es un vértice de un complejo simplicial K, entonces la unión de todos los simplejos del complejo K, para los cuales v es un vértice, es llamado la estrella de v

y es denotado por $\mathrm{St}(v, K)$. La unión de todos los simplejos de la estrella $\mathrm{St}(v, K)$ para los cuales v no es un vértice es llamado el enlace del vértice v y es denotado por $\mathrm{lk}(v, K)$.

Un complejo simplicial L es llamado una subdivisión de un complejo simplicial K si sus realizaciones (el poliedro definido por L) coinciden y si cada simplejo del complejo L esta enteramente contenido en un cierto simplejo del complejo K. La subdivisión estrella centrada en un punto a dentro de K, es obtenida como sigue: simplejos que no contengan al punto a permanecen sin cambiar, y cada simplejo σ que contenga este punto es dividido en conos con vértice a sobre todas las caras del simplejo σ que no contengan el punto a. Si desarrollamos subdivisiones estrellas con centro en todos los simplejos del complejo K en un orden compatible haciendo decrecer la dimensión, obtenemos una *subdivisión derivada* K' del complejo K.

El concepto de complejo celular es conveniente definirlo por inducción. Un complejo celular de dimensión 0 es un conjunto finito de puntos. Un complejo celular de dimensión 1 es obtenido de pegar varias celdas uno-dimensionales (arcos) a lo largo de mapeos de sus bordes (par de puntos). Un complejo celular de dimensión 2 es construido pegando varias celdas dos-dimensionales (discos) a un complejo uno-dimensional a lo largo de un mapeo de sus círculos de borde, etc. En el caso general, un celda k-dimensional es entendida como una bola k-dimensional que es pegada a un complejo $(k-1)$-dimensional a lo largo de un mapeo de esferas de borde de esas bolas.

Sea K un complejo celular. Denotaremos el número de celdas de dimensión i por $c_i(K)$. Por definición, la *característica de Eluer* $\chi(K)$ es igual a $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i c_i(K)$. De la característica de Euler se conoce que es independiente de la escogencia de la subdivisión del complejo K en celdas. Para complejos simpliciales este hecho es

probado geométricamente si notamos que al subdividir una estrella no se afecta la característica de Euler del complejo.

1.2. Variedades

Un espacio topológico M es llamado una *n-variedad* si

- M es un espacio topológico de Hausdorff.
- M tiene una base contable.
- cada punto en M tiene una vecindad homeomorfa a R^n.

Por un espacio de Hausdorff, entendemos que cualquier dos puntos deben tener vecindades disjuntas. Por un espacio con una base contable, entendemos que puede ser cubierto por un número contable de vecindades.

Un espacio topológico M, Hausdorff y con base contable es llamado una variedad n-dimensional con borde si cada uno de sus puntos tiene una vecindad homeomorfa a R^n o al subespacio cerrado R^n_+. La unión de los puntos de la variedad M, que no tienen vecindades del primer tipo, es llamado borde de esta variedad y es denotado por ∂M.

1.3. Vecindades regulares

Sea T una triangulación de una variedad lineal por tramos y sea K un subcomplejo. Consideraremos la subvariedad $U(K) = \cup_{v \in K'} \mathrm{St}(v, T'')$, donde $\mathrm{St}(v, T'')$ hace referencia a la estrella del vértice v en la segunda subdivisión derivada T'' de la triangulación T, y la unión es tomada sobre todos los vértices de la primera subdivisión K'

del complejo K. La veriedad $U(K)$ es llamada *vecindad regular* del complejo K en T. El vecindario regular puede cambiar por una subdivisión estrella de la triangulación T, pero se puede verificar que existe una isotopía lineal por tramos fijada sobre K que envía la nueva vecindad en la antigua. Así que, los vecindarios regulares considerados bajo isotopía sobre K no cambian cuando cambiamos de subdivisiones estrellas. Esto implica que las vecindades regulares consideradas bajo isotopía son independientes de la triangulación T.

1.4. Asas

La operación de pegar un asa n-dimensional de índice λ a una variedad n-dimensional M con borde es como sigue. Representamos la n-bola estándar como producto directo $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ de bolas de dimensión λ y $n-\lambda$, y la pegamos a M a lo largo de cierto embebimiento $\varphi : (\partial D^\lambda) \times D^{n-\lambda} \to \partial M$. En tres dimensiones, por ejemplo, pegar un asa de índice 0 a una variedad M consiste en adicionar una bola separada, pegar un asa de índice 1 consiste en adicionar un cilindro $I \times D^2$, pegar un asa de índice 2 consiste en adicionar una placa $D^2 \times I$ y pegar una asa de índice 3 consiste en pegar una bola a lo largo de una esfera en ∂M.

Capítulo 2

Espinas de 3-Variedades

Deseamos estudiar la geometría y topología de 3-variedades. Para esto necesitamos la noción central de espina de una 3-variedad.

En esta tesis el concepto de espinas es relevante debido a que las 3-variedades las consideraremos expresadas en descomposiciones de asas generadas por espinas. Teniendo en cuenta el siguiente resultado asociado a este concepto: dada una espina de una 3-variedad podemos generar una descomposición en asas asociada a esta espina y dada una descomposición en asas de una 3-variedad podemos obtener una espina.

2.1. Colapso

Para definir espinas, necesitamos definir en forma precisa el concepto de colapso. Empezamos con la definición de *colapso elemental simplicial*

Sea K un complejo simplicial, y sea $\sigma^n, \delta^{n-1} \in K$ dos simplejos tal que σ sea principal; esto es, σ no es cara propia de algún otro simplejo en K, y δ es una cara libre de σ; esto es, δ no es cara propia de cualquier otro simplejo de K que no sea σ.

Definición 2.1. *La transición de K a $K \setminus (\sigma \cup \delta)$ es llamado un colapso elemental simplicial.*

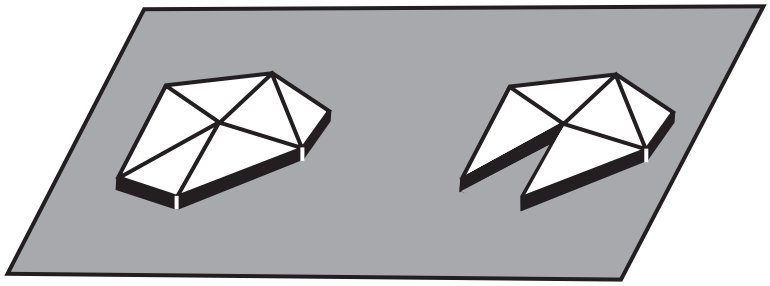


Figura 2.1. Colapso elemental simplicial

Definición 2.2. *Un poliedro P colapsa en un subpoliedro Q (notación $P \searrow Q$) si para alguna triangulación (K, L) del par (P, Q) el complejo K colapsa en L por una secuencia de colapsos elementales simpliciales.*

En general, no es necesario triangular a P para construir un colapso $P \searrow Q$; para este propósito podemos usar grandes bloques dentro de los simplejos. Es claro que cualquier celda n-dimensional B^n colapsa en cualquier cara $(n-1)$-dimensional $B^{n-1} \subset \partial B^n$. Sea $P = Q \cup B^n$, $Q \cap B^n = B^{n-1}$, donde B^n es una n-celda y B^{n-1} en una cara $(n-1)$-dimensional de B^n.

Definición 2.3. *La transición de P a Q es llamada un colapso poliedral elemental.*

Por un *colapso simplicial* de un complejo simplicial K en un subcomplejo L entenderemos cualquier secuencia de colapsos elementales que transforman K en L. Similarmente, un *colapso poliedral* es una secuencia de colapsos elementales poliedrales.

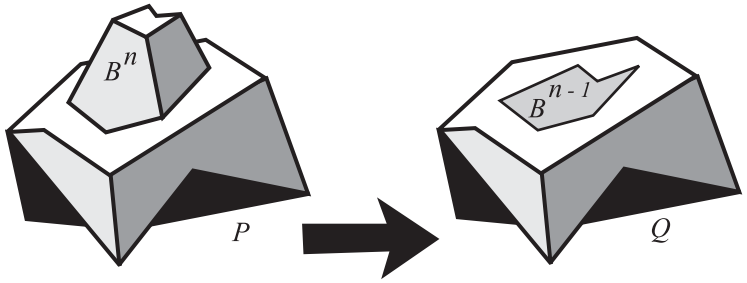


Figura 2.2. Colapso poliedral elemental

2.2. Espinas

Definición 2.4. *Sea M una 3-variedad compacta conexa con borde no vacio. Un subpoliedro $P \subset M$ se llama una espina de M si $M \searrow P$, esto es, M colapsa en P. Por una espina de de una 3-variedad cerrada conexa entenderemos una espina de $M \setminus \operatorname{Int} B^3$ donde B^3 es una 3-bola en M. Por una espina de una 3-variedad no conexa entendemos la unión de las espinas de sus componentes conexas.*

Teorema 2.1. *Las siguientes condiciones sobre un subpoliedro compacto $P \subset \operatorname{Int} M$ de una 3-variedad compacta M con borde son equivalentes:*

(a) P es una espina de M.

(b) M es homeomorfo a una vecindad regular de P en M.

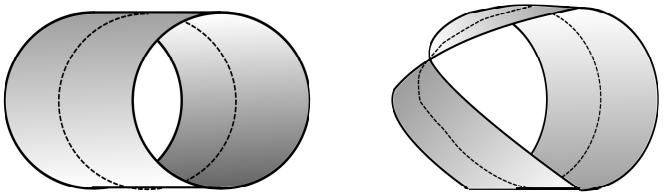
(c) La variedad $M \setminus P$ es homeomorfa a $\partial M \times [0, 1)$.

Demostración. Ver teorema 1.1.7 de [6] □

2.3. Poliedros simples y especiales

Una espina de una 3-variedad M nos proporciona información respecto a M. En particular, si $\partial M \neq \emptyset$ entonces cualquier espina P de M es homotópica a M y por

lo tanto determina el tipo de homotopía de M. Sin embargo es posible para dos variedades no homeomorfas tener la misma espina. Para un ejemplo simple, considere una banda de Möbius y un anillo 2-dimensional. Son dos 2-variedades que colapsan en un círculo, sin embargo ellas son claramente no homeomorfas.



Para eliminar esta dificultad, restringiremos nuestras clases de espinas a las que llamaremos *espinas especiales*. Pero primero debemos dar una definición para *poliedro simple*.

Definición 2.5. *Un poliedro compacto P es llamado simple si el enlace de cada punto $x \in P$ es homeomorfo a uno de los siguientes poliedros 1-dimensionales:*

- *Un círculo (tal punto x es llamado no singular)*
- *Un círculo con una línea diametral (tal punto x es llamado un punto triple)*
- *Un círculo con dos líneas diámetrales (tal punto x es llamado un vértice verdadero)*

Definición 2.6. *El conjunto de puntos singulares de un poliedro simple (el cual corresponde a la unión de vértices verdaderos y líneas triples) es llamado grafo singular del poliedro y es denotado por SP.*

Describiremos la estructura de un poliedro simple en detalles. Cada poliedro simple es naturalmente estratificado. Estratos de dimensión 2 (*2-componentes*) son las

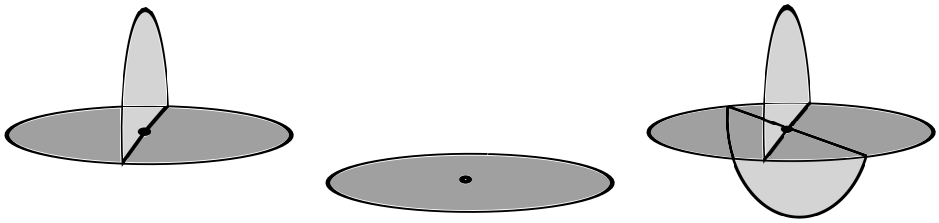


Figura 2.3

componentes conexas del conjunto de puntos no singulares. Estratos de dimensión 1 (*1-componentes*) consisten de líneas triples cerradas o abiertas, y los estratos de dimensión 0 son los vértices verdaderos.

Definición 2.7. *Un poliedro simple P es llamado especial si:*

1. *Cada 1-componente de P es una 1-celda abierta.*

2. *Cada 2-componente de P es una 2-celda abierta.*

2.4. Espinas especiales

Definición 2.8. *Una espina de una 3-variedad es llamada simple o especial si la espina es un poliedro simple o especial, respectivamente.*

Teorema 2.2. *Cualquier 3-variedad compacta posee una espina especial. Esta espina es algorítmicamente construible.*

Demostración. Ver teorema 1.1.13 de [6]. □

Para tener una idea de esta prueba veamos lo siguiente: Sea M una 3-variedad con borde no vacío y sea T una triangulación de M. Consideremos la descomposición en

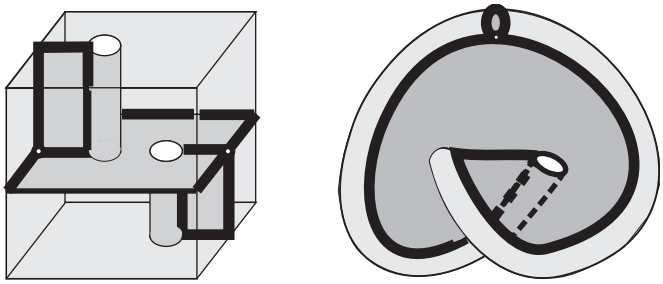


Figura 2.4. Como ejemplo de espinas especiales de B^3 tenemos la casa de Bing y oreja marina

asas generada por T, esto es, reemplazamos cada vértice de T por una bola (asa de índice 0), cada arista por una viga (asa de índice 1), y cada triángulo por una placa (asa de índice 2), ver figura 2.5. El resto de M consiste de asas de índice 3.

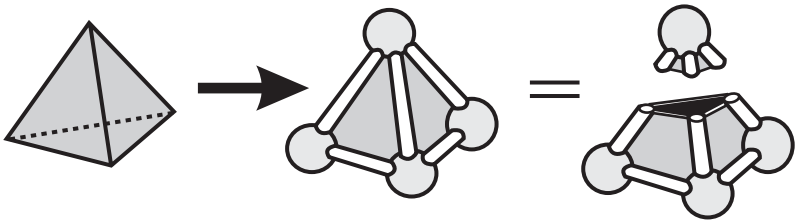


Figura 2.5. Paso de la triagulación a la descomposición en asas

Sea P la unión de los bordes de las bolas, vigas y placas anteriormente mencionados. Entonces se puede probar que P es una espina especial para la 3-variedad obtenida por suprimir de M un número de bolas abiertas igual al número de todas las asas mencionadas anteriormente. Luego se puede verificar la siguiente afirmación: Si M con $m > 1$ bolas suprimidas tiene una espina especial, entonces M con $m - 1$ bolas suprimidas también tiene una espina especial. La espina especial que se obtiene para M con $m - 1$ bolas suprimidas es algorítmicamente construible a partir de la espina especial de M con m bolas suprimidas. El método que se usa para obtener la

espina especial de M con $m-1$ bolas suprimidas es llamada en [6] como construcción de arco. Después de varios pasos podemos llegar a que M con una bola abierta suprimida tiene una espina especial P'. Si M es cerrado hemos acabado la prueba. Si no, aplicamos de nuevo la construcción de arco para unir la bola con una componente de $M \setminus P'$, así obtenemos una espina especial para $\partial M \times [0,1)$.

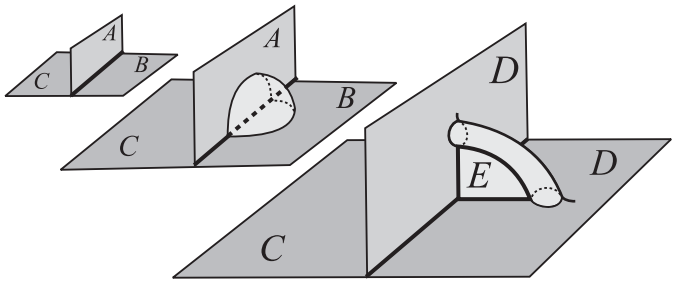


Figura 2.6. Construcción de arco

Teorema 2.3. *Si dos 3-variedades compactas y conexas tienen espinas especiales homeomorfas y las 3-variedades son ambas cerrados o ambos tienen borde no vacío, entonces estas 3-variedades son homeomorfas.*

Para la prueba ver teorema 1.120 de [6], en el cual se usa el siguiente lema.

Lema 2.4. *Sean $P_i \subset M_i$ poliedros especiales de 3-variedades M_i, $i = 1, 2$. Entonces cualquier homeomorfismo $h : P_1 \to P_2$ puede ser extendido a un homeomorfismo h_1 entre sus vecindades regulares.*

2.5. Espinas casi simples

Como vimos en la sección anterior cualquier homeomorfismo entre espinas especiales puede ser extendido entre las correspondientes variedades (teorema 2.3). De modo que

cualquier espina especial P de una 3-variedad M se puede usar como una presentación de M. Además, M puede ser reconstruido de una vecindad regular $N(SP)$ en P de grafo singular SP de P: empezamos con $N(SP)$. Podemos fácilmente reconstruir P por pegar 2-celdas a todos los círculos en $\partial N(SP)$, y entonces reconstruir M. Si M es orientable, entonces $N(SP)$ puede ser embebido en $\mathbb{R}^3$. Esta es una forma muy conveniente de presentar a M.

Teorema 2.5. *Para cualquier entero k existe solo un número finito de espinas especiales con k vértices verdaderos. Todas estas espinas pueden ser construidas algorítmicamente.*

Demostración. Ver teorema 2.1.1 de [6] □

Una idea natural de medir la complejidad de una 3-variedad es por el número de vértices verdaderos de su espina especial. Esta característica de las espinas especiales es conveniente debido al hecho de que solo un número finito de 3-variedades tienen una espina especial con un número dado de vértices verdaderos. Pero existen dos inconvenientes con las espinas especiales. El primero, es que las espina especiales no son aditivas respecto a la suma conexa. La segunda es que si nos restringimos sólo a espinas especiales nos hace perder la posibilidad de considerar muchas espinas que son naturales como un punto para una bola (y también para S^3), un círculo para un toro sólido, un plano proyectivo para el espacio RP^3. También utilizar solamente espinas especiales, algunas veces complica el trabajo.

Todas estas complicaciones tienen la misma raíz: la propiedad de ser especial no se hereda. En otras palabras, un subpoliedro de un poliedro especial puede no ser especial, incluso si no se puede colapsar en otro subpoliedro más pequeño. Por estos motivos daremos el concepto de espina casi simple, con la cual obtendremos varias propiedades para el manejo del algoritmo.

Definición 2.9. *Un poliedro compacto P es llamado casi simple si el enlace de cualquiera de sus puntos puede ser embebido en Γ_4, un grafo completo con 4 vértices. Una espina P de una 3-variedad es casi simple, si el es un poliedro casi simple.*

Dada una espina casi simple P. La *parte 1-dimensional* de P es definida como la clausura del conjunto de puntos con enlaces 0-dimensionales; lo cual significa que es un grafo. La *parte 2-dimensional* consiste de el conjunto de puntos cuyo enlace contiene un arco.

La noción de vértice verdadero, grafo singular, 2-componente de un poliedro casi simple son introducidos en la misma forma como para poliedro simple. Un vértice verdadero de un poliedro casi simple P es un punto con un enlace $L = \Gamma_4$, el grafo singular SP consiste de los puntos cuyos enlaces contienen un círculo con un diámetro, y una 2-componente son las componentes conexas del conjunto de todos los puntos cuyos enlaces contienen un círculo pero no contienen un círculo con un diámetro.

2.6. Complejidad de una 3-variedad

Definición 2.10. *La complejidad $c(P)$ de un poliedro simple P es igual al número de sus vertices verdaderos.*

Definición 2.11. *La complejidad $c(M)$ de una 3-variedad compacta M es igual a k si M posee una espina casi simple con k vertices verdaderos y no tiene una espina casi simple con un número menor de vertices verdaderos. En otras palabras,*

$$c(M) = \min_P c(P)$$

donde el mínimo es tomado sobre todas las espinas casi simples de M

Propiedad Aditiva de la Complejidad

Recordemos que la *suma conexa* $M_1 \# M_2$ de dos 3-variedades compactas M_1 y M_2 es definida como la variedad

$$(M_1 \setminus \operatorname{Int} B_1^3) \cup_h (M_2 \setminus \operatorname{Int} B_2^3)$$

donde $B_1^3 \subset \operatorname{Int} M_1$ y $B_2^3 \subset \operatorname{Int} M_2$ son 3-bolas, y h es un homeomorfismo entre sus bordes. Si las variedades son orientables, su suma conexa puede depender de la elección de h. En este caso $M_1 \# M_2$ denota cualquiera de la dos posible sumas conexas.

Para definir la suma conexa por el borde, consideremos dos discos $D_1 \subset \partial M_1$ y $D_2 \subset \partial M_2$ en el borde de las dos 3-variedades. Pegando a M_1 y M_2 por medio de la identificación de los disco a lo largo del homeomorfismo $h : D_1 \to D_2$. Equivalentemente, podemos pegar un asa de índice 1 a $M_1 \cup M_2$ tal que la base de la asa coincida con $D_1 \cup D_2$. La variedad obtenida es llamada *suma conexa por el borde* de M_1 y M_2 y es denotada por $M_1 \amalg M_2$. De lo anterior queda claro que $M_1 \amalg M_2$ depende de la elección de los discos D_1 y D_2 (si al menos una de las variedades tiene borde no conexo), y de la elección de h (homeomorfismos que difieren por reflexiones pueden generar resultados diferentes). De modo que la notación $M_1 \amalg M_2$ es ligeramente ambigua, como en la notación para la suma conexa. Cuando usamos la notación $M_1 \amalg M_2$ haremos referencia a una de las variedades obtenidas por el pegado descrito anteriormente.

Teorema 2.6. *Para cualquier 3-variedades M_1 y M_2 tenemos:*

1. $c(M_1 \# M_2) = c(M_1) + c(M_2)$

2. $c(M_1 \amalg M_2) = c(M_1) + c(M_2)$

Demostración. Ver teorema 2.2.9 de [6] □

Capítulo 3

Superficies 2-Normales

3.1. Supeficies 2-normales en descomposiciones de asas

El concepto de superficie 2-normal lo usaremos en esta tesis de la siguiente forma: garantizaremos la existencia de una 2-esfera que sea 2-normal y que este contenida en una 3-variedad. Luego cortaremos la 3-variedad a lo largo de esta 2-esfera y demostraremos que las 3-variedades obtenidas (que serían exactamente 2 3-variedades) en este corte tienen complejidad menor que la 3-variedad inicial. Teniendo en cuenta que todo este trabajo se llevara a cabo considerando las 3-variedades en descomposiciones de asas generadas por espinas especiales.

Aunque se va a usar el concepto de superficie 2-normales en descomposición de asas, definiremos superficies 2-normales en triangulaciones para generar una idea intuitiva de este concepto.

Definición 3.1. *Sea T una triangulación de una 3-variedad M, que puede ser sin-*

gular. Una superficie cerrada F es llamada 2-normal si F esta en posición general respecto a T y cumple:

1. *La intersección de la superficie F con todo tetraedro consiste de discos. Estos discos serán llamados elementales.*

2. *El borde $\partial D \subset \partial\Delta^3$ de todo disco elemental $D \subset \Delta^3$ es normal y cruza cada arista máximo dos veces.*

Las posibles intersecciones entre las superficies 2-normales y los tetraedros de la triangulación corresponden a los siguientes:

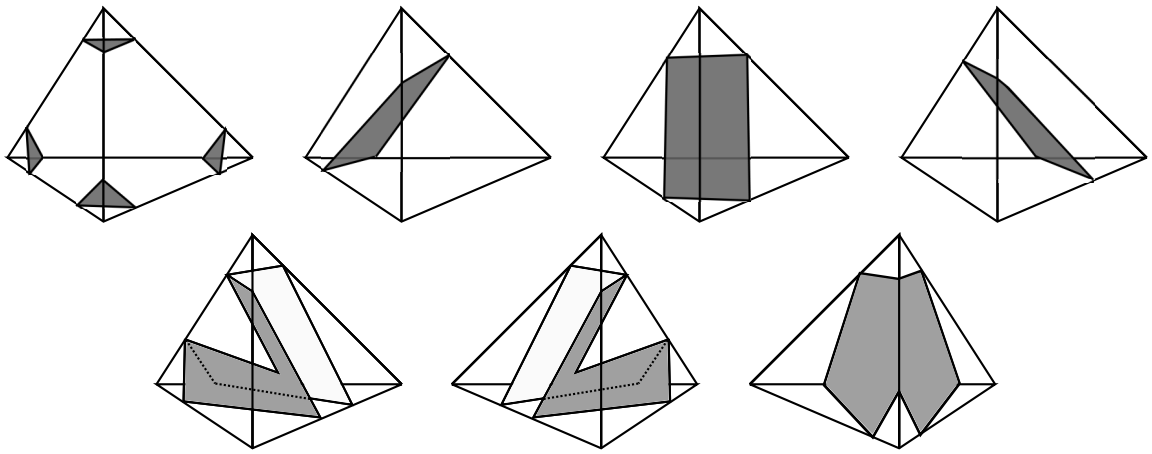


Figura 3.1

Ahora introduciremos los conceptos relacionados a 3-variedades en descomposición de asas. Toda 3-variedad M con borde no vacío puede ser descompuesta en asas de índices 0,1 y 2 llamadas *bolas*, *vigas* y *placas*, respectivamente. Una forma de lograr esto es usando la parte (b) del teorema 2.1 junto con el teorema 2.2, en la cual se consideran vecindades regulares de espinas especiales. Las bolas son obtenidas como vecindades regulares de los vértices verdaderos. Las vigas son obtenidas como

vecindades regulares de las líneas triples, y la placas como vecindades regulares de las 2-componentes. Teniendo en cuenta el comentario mencionado al inicio, estas serán las descomposiciones de asas que tendremos en cuenta para obtener los resultados deseados. En el caso que M sea cerrado, su descomposición de asas debe contener al menos una asa de índice 3.

Recordemos que al inicio del desarrollo de esta sección consideraremos cualquier descomposiciones de asas, esto mientras definimos algunos conceptos básicos, y posteriormente solo tendremos en cuenta las descomposiciones de asas generadas por las vecindades regulares de las espinas especiales.

Ahora cada viga y cada placa tiene una estructura de producto de la forma $D^2 \times I$. La diferencia entre ellas radica en que las vigas son pegadas a las bolas a lo largo de dos discos $D^2 \times \{0, 1\}$, mientras que las placas $D^2 \times I$ son pegados a la unión de bolas y vigas a lo largo de los anillos $\partial D^2 \times I$. La intersección de bolas y vigas es una colección de discos, cada uno de estos discos son llamados *islas*. Componentes conexas de la intersección de bolas con placas son llamadas *puentes*. En el borde de cada bola, el complemento de la unión de islas y puentes consiste de varias regiones conexas llamadas *lagos*. Ver figura 3.2

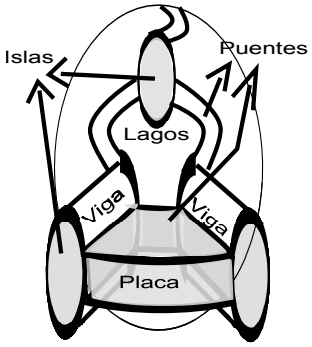


Figura 3.2. un fragmento de descomposición en asas

Sea ξ una descomposición de asas de una 3-variedad M.

Definición 3.2. *Una superficie cerrada $F \subset M$ es llamada 2-normal (con respecto a ξ) si se cumple:*

1. *F no cruza asas de índice 3.*

2. *F cruza cada placa $D^2 \times I$ en una colección de laminas paralelas de la forma $D^2 \times \{*\}$.*

3. *La intersección de la superficie F con cada viga $D^2 \times I$ tiene la forma $L \times I$, donde L es un sistema finito de curvas propias simples disjuntas en D^2. Aquí el disco D^2 puede ser identificado con la isla $D^2 \times \{0\}$ o bien con la isla $D^2 \times \{1\}$.*

4. *Ninguno de los sistemas L contiene una curva cerrada.*

5. *Ninguno de los sistemas L contiene un arco que tiene ambos extremos en la misma componente conexa de la intersección de el borde de la isla con los puentes (tal arco es llamado retorno de puente).*

6. *La intersección de F con cada bola consiste de discos (estos discos son llamados elementales).*

7. *La curva de borde C de todo disco elemental cruza cada puente máximo dos veces.*

Definición 3.3. *Una isotopia es normal si es invariante sobre las bolas, vigas y placas de la descomposición de asas ξ; es decir, una isotopía en normal si la isotopía restringida a las asas de la descomposición envía bolas en bolas, vigas en vigas y placas en placas.*

Definición 3.4 (Discos Elementales Equivalentes)**.** *Dos discos elementales D_1, D_2 en una bola B de ξ son llamados equivalentes si son normalmente isotópicos; esto es, si existe una isotopía de la bola B que envía un disco en otro y es invariante sobre las islas y puentes, es decir envía islas en islas y puentes en puentes.*

Definición 3.5. *Un disco elemental $D \subset B$ es de tipo k si su curva de borde l cruza k puentes, puede incluir repeticiones; es decir, si un puente es cruzado dos veces por l entonces este puente se cuenta dos veces (Recordemos que por la definición de disco elemental, l pasa por cada puente a lo mas dos veces)*

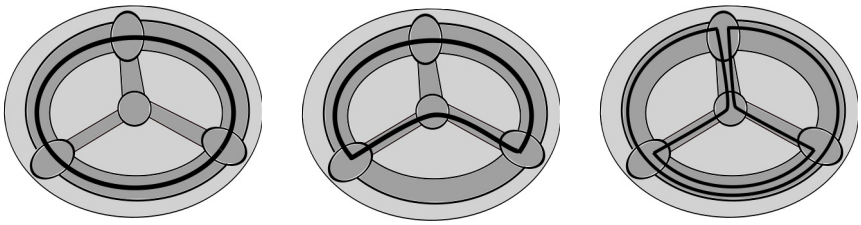
En particular, si ξ es una descomposición en asas generada por una espina simple, entonces podemos describir todos los discos elementales en una bola B de ξ (recordemos que las bolas de una descomposición de asas generada por una espina simple corresponden a las vecindades regulares de los vértices verdaderos de la espina)

Lema 3.1. *Sea B una bola de ξ correspondiente a un vértice verdadero de una espina simple P. Entonces todos de los disco elementales en B son del tipo 8, o del tipo 4, o del tipo 3. Cada tipo determina el correspondiente disco elemental en forma única bajo homeomorfismo de B que envía islas en islas, puentes en puentes, y lagos en lagos.*

Demostración. Ver lema 4.2.3 de [6]. □

Disco elementales del tipo 3 los llamaremos triángulos, discos elementales del tipo 4 los llamaremos cuadriláteros y discos elementales del tipo 8 los llamaremos octágonos.

Consideremos nuevamente cualquier descomposiciones de asas ξ. Usando la condición 7 de la definición 3.2, podemos mostrar fácilmente que toda bola de ξ contiene solo un número finito de discos elementales no equivalentes, ya que en cada bola hay un número finito de islas y puentes (en particular, para descomposiciones de asas



Un triágulo Un cuadrilátero Un octágono

Figura 3.3. Tipos de discos elementales

generadas por espinas simples hay por cada bola 3 octágonos, 3 cuadriláteros y 4 triangúlos). Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ los representantes de todas las clases de equivalencia, sin repeticiones, en todas las bolas de ξ. Una superficie 2-normal $F \subset M$ puede cruzar las bolas de ξ en varias copias paralelas a cada disco E_i. Sea $x_i = x_i(F)$ denota el número de estas copias. Así, a cada superficie 2-normal $F \subset M$ le hacemos corresponder una n-tupla $\bar{x}(F) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de enteros no negativos, esto es, un vector con coordenadas enteras no negativas. Así que, si Γ representa el conjunto de todas las superficies 2-normales y $\mathbb{Z}^n$ representa el conjunto de n-tuplas de enteros no negativos, podemos definir una función

$$\begin{aligned} \psi : \Gamma &\longmapsto \mathbb{Z}^n \\ F &\mapsto \psi(F) = \bar{x}(F) \end{aligned}$$

Dos superficies 2-normales F_1, F_2 se llaman *equivalentes* si existe una isotopía normal $h_t : M \to M$ que envía F_1 en F_2. Se puede ver que F_1, F_2 son equivalentes si y solo si $\bar{x}(F_1) = \bar{x}(F_2)$. Para cualquier clase de equivalencia de superficies 2-normales existe una correspondiente n-tupla $\bar{x}$. Así que, si $\bar{\Gamma}$ representa el conjunto de clases de equivalencias de Γ bajo la relación de equivalencia descrita anteriormente, podemos

definir una función inyectiva

$$\bar{\psi} : \bar{\Gamma} \longmapsto \mathbb{Z}^n$$
$$\bar{F} \mapsto \bar{\psi}(\bar{F}) = \psi(F) = \bar{x}(F)$$

Inversamente, dada una n-tupla $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de enteros no negativos queremos construir una superficie 2-normal. Esto es posible si sujetamos las n-tuplas de $\mathbb{Z}^n$ a las siguientes restricciones.

La primera restricción sobre las n-tuplas de $\mathbb{Z}^n$ es que dado $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ se debe cumplir que para todo $x_i, x_j > 0$, las clases de equivalencia de los discos E_i, E_j deben tener representantes disjuntos. Tal n-tupla será llamada *admisible*. Si una n-tupla $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ es admisible, entonces no solo por pares, sino también todos los E_i con $x_i > 0$ pueden ser escogidos disjuntos.

Para describir la segunda condición, sea $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una n-tuplas de $\mathbb{Z}^n$. Multipliquemos cada uno de los discos E_i en x_i copias paralelas. Por otro lado, consideraremos una viga $D^2 \times I$ de la descomposición, y en la isla $D^2 \times \{0\}$ escogemos un arco simple $l \times \{0\}$ que une dos puentes distintos en la isla $D^2 \times \{0\}$. Ahora contamos el número total de copias de $l \times \{0\}$ en la intersección de $D^2 \times \{0\}$ con todas las copias paralelas de todos los discos E_i, que resultan de multiplicar cada uno de los discos E_i en x_i copias paralelas. Dicho número se representa como una combinación lineal de las coordenadas del vector $\bar{x}$ con coeficientes 0, 1 y 2. El coeficiente de x_i en esta combinación lineal es:

- Cero si no hay discos de tipo E_i que cruzan a $D^2 \times \{0\}$.
- Uno si ∂E_i contiene exactamente un arco normalmente isotópico a $l \times \{0\}$.
- Dos si ∂E_i contiene exactamente dos arcos normalmente isotópicos a $l \times \{0\}$.

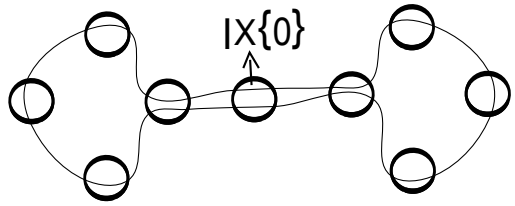


Figura 3.4. Este es un ejemplo en el que la intersección de E_i con el borde de un vertice verdadero donde produce exactamente dos arcos contenidos en ∂E_i normalmente isotópicos a $l \times \{0\}$.

El coeficiente de x_i no puede ser mayor que dos, pues de lo contrario ∂E_i contendria más de dos arcos normalmente isotópicos a $l \times \{0\}$, lo cual implicaría que la curva de borde del disco elemental E_i cruza mas de dos veces un puente, lo cual contradice la condición 7 de la definición 3.2. Así encontramos el número total de copias de $l \times \{0\}$ en la intersección de $D^2 \times \{0\}$ con todas las copias paralelas de todos los discos E_i, que resultan de multiplicar cada uno de los discos E_i en x_i copias paralelas.

Para el caso cuando la descomposición en asas es generada por una espina simple, el coeficiente de x_i no puede ser dos, ya que de lo contrario implicaría que ∂E_i contiene dos arcos normalmente isotópicos a $l \times \{0\}$. De modo que la curva de borde del disco elemental E_i cruza dos veces un par de puentes consecutivo (dos puentes separados por una isla). Teniendo en cuenta el lema 3.1, ninguno de los tipos de discos elementales cruza dos puentes consecutivos. De modo que el disco E_i no corresponde a ninguno de los discos permitidos.

En forma análoga a la cuenta hecha para $l \times \{0\}$, encontramos el número de copias del arco $l \times \{1\}$ en la intersección $D^2 \times \{1\}$ con todas las copias paralelas de todos los discos E_i. Si $\bar{x}$ corresponde a una superficie 2-normal, estos dos números deben ser iguales para todas las posibles elecciones de l. Así obtenemos un sistema de ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes enteros. Adicionando las siguientes

n desigualdades $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, encontramos el sistema $S(\xi)$, que llamaremos *sistema de balances*. Por lo tanto la segunda condición que tendremos en cuenta sobre las n-tuplas de $\mathbb{Z}^n$ es que deben ser solución del sistema de balances $S(\xi)$.

Ahora mostraremos que toda solución admisible del sistema de balances $S(\xi)$ corresponde a una superficie 2-normal. Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una solución admisible del sistema de balances $S(\xi)$. La admisibilidad de $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nos permite realizar discos elementales disjuntos en la bolas, y el hecho de que $\bar{x}$ sea solución nos dice que los discos pueden ser completados en las vigas y placas hasta llegar a una superficie 2-normal por adicionar bandas en las vigas y discos en los placas.

Así que, si $\mathcal{Z}$ denota el conjunto de n-tuplas que son soluciones admisibles del sistema de balances $S(\xi)$, podemos definir una función biyectiva

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{Z} &\longmapsto \bar{\Gamma} \\ \bar{x} &\mapsto \Psi(\bar{x}) = \bar{F} \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir el siguiente teorema

Teorema 3.2. *El conjunto de clases de equivalencias (bajo isotopía normal) de superficies 2-normales en M puede ser parametrizado por el conjunto de soluciones enteras no-negativas admisibles del sistema $S(\xi)$.*

3.2. Superficies fundamentales

Como las clases de equivalencias de las superficies 2-normales en M se pueden parametrizar por el conjunto de soluciones enteras no negativas de un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes enteros, introduciremos algunos conceptos relacionados con la teoría de ecuaciones lineales con coeficientes enteros.

Consideremos un sistema E de ecuaciones lineales homogéneas

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0; \qquad 1 \leqslant i \leqslant m$$

donde los a_{ij} son enteros.

Una solución entera no negativa $\bar{x}$ para el sistema E, se llama fundamental si $\bar{x}$ no puede ser presentado en la forma $\bar{x} = \bar{y} + \bar{z}$; donde $\bar{y}, \bar{z}$ son soluciones no triviales enteras y no negativas de E.

Teorema 3.3. *El conjunto de soluciones fundamentales para cualquier sistema E de ecuaciones lineales homogéneas es finito y puede ser construido de forma algorítmica. Cualquier solución entera no negativa para E puede ser presentada como una combinación lineal de las soluciones fundamentales con coeficientes enteros no negativos.*

Demostración. Ver teorema 3.2.8 de [6]. □

Del teorema 3.3 podemos concluir que el conjunto de soluciones fundamentales para el sistema de equivalencias es finito y puede ser construido de forma algorítmica. Por lo tanto el conjunto $\bar{\Gamma}$ es finito y puede ser construido algoritmicamente.

Diremos que una superficie es fundamental si ella corresponde a una solución fundamental admisible del sistema $S(\xi)$.

3.3. Suma de superficies 2-normales

El teorema 3.2 nos estimula a definir una suma en el conjunto $\bar{\Gamma}$ de clases de equivalencias de superficies 2-normales, la cual estaría dada por la suma de las correspondientes soluciones admisibles de $S(\xi)$. Para definir esta suma necesitamos el concepto de soluciones y superficies compatibles. Sean F_1 y F_2 superficies 2-normales en M y $\bar{x}(F_1)$

y $\bar{x}(F_2)$ las correspondientes soluciones admisibles de $S(\xi)$ asociadas a $\bar{F}_1$ y $\bar{F}_2$ respectivamente. Las soluciones $\bar{x}(F_1)$ y $\bar{x}(F_2)$ (y las superficies F_1 y F_2) son *compatibles* si para cualquier coordenada positiva $x_i(F_1)$, $x_j(F_2)$ las clases de equivalencia de los correspondientes discos elementales E_i, E_j tienen representantes disjuntos. Por lo tanto la solución $\bar{x}(F_1) + \bar{x}(F_2)$ es también solución admisible de $S(\xi)$.

Definamos ahora la suma sobre las clases de equivalencias de superficies 2-normales de M: Supongamos que las clases de superficies 2-normales $\bar{F}_1$ y $\bar{F}_2$ corresponden a soluciones admisibles $\bar{x}(F_1)$ y $\bar{x}(F_2)$ de $S(\xi)$, si las soluciones (y las supeficies) son compatibles, entonces $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \overline{F_1 + F_2}$ corresponde a la superficie 2-normal $\Psi(\bar{x}(F_1) + \bar{x}(F_2))$.

Veamos que esta suma esta bien definida: En efecto sean F_1, F_2, R_1, y R_2 superficies 2-normales tales que F_1 es compatible con R_1 y F_2 es compatible con R_2 y además $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$ y $\bar{R}_1 = \bar{R}_2$; y sean $\bar{x}(F_1)$, $\bar{x}(F_2)$, $\bar{x}(R_1)$, $\bar{x}(R_2)$ las respectivas soluciones admisibles. Como $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$ y $\bar{R}_1 = \bar{R}_2$ entonces $\bar{x}(F_1) = \bar{x}(F_2)$ y $\bar{x}(R_1) = \bar{x}(R_2)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\bar{F}_1 + \bar{R}_1 &= \overline{F_1 + R_1} \\
&= \Psi(\bar{x}(F_1) + \bar{x}(R_1)) \\
&= \Psi(\bar{x}(F_2) + \bar{x}(R_2)) \\
&= \overline{F_2 + R_2} \\
&= \bar{F}_2 + \bar{R}_2
\end{aligned}$$

de modo que $\bar{F}_1 + \bar{R}_1 = \bar{F}_2 + \bar{R}_2$

Ahora por el teorema 3.3, el conjunto de superficies fundamentales forman una base en la siguiente forma: cada superficie 2-normal en M puede ser presentada como una suma (con coeficientes enteros no negativos) de superficies fundamentales.

3.4. Cortando a lo largo de superficies 2-normales

Sea M una 3-variedad con borde no vacío. Existe una estrecha relación entre descomposición en asas y espinas de M. En efecto, sea ξ una descomposición en asas de M en bolas, vigas y placas sin asas de indice 3. Colapsando las bolas, vigas y placas de ξ en sus puntos de núcleos, arcos de núcleos, y discos de núcleos, encontramos una espina P de M. Por construcción, P esta equipada con una descomposición celular natural en las celdas de nucleo de las asas. Reciprocamente, sea P una *espina celular* de M, esto es, una espina equipada con una descomposición celular. Reemplacemos cada vertice de P por una bola, cada arista por una viga, y cada 2-celda por una placa. Así encontramos una descomposición en asas ξ de una vecindad regular $N(P)$ de P en M. Ahora como $\partial M \neq \emptyset$, $N(P)$ puede ser identificado con toda la variedad M, así ξ puede ser considerado como una descomposición en asas de M.

Consideremos una superficie 2-normal $F \subset M$ y denotemos por M_F la 3-variedad obtenida por cortar a M a lo largo de F. Investigaremos el comportamiento de ξ y P bajo este corte.

Como F es 2-normal, descompone las asas de ξ en asas del mismo indice. Ya que la intersección de F con cada asa de ξ son discos, y como cada asa de ξ son bolas, entonces cortar a ξ a lo largo de F equivale a cortar a cada asa a lo largo de cada uno de estos disco. Ahora, el cortar a lo largo de estos discos a cada asa mantiene la estructura de pegado, de modo que al realizar este corte obtenemos asas del mismo índice.

Las nuevas asas obtenidas por este corte forman una nueva descomposición de asas ξ_F que corresponde a M_F. Denotemos por P_F la correspondiente espina celular de M_F. Así que cada asa de ξ_F va a estar contenida en una correspondiente asa de ξ. Esta relación de inclusión induce un mapeo celular $\varphi : P_F \to P$ (un mapeo es celular

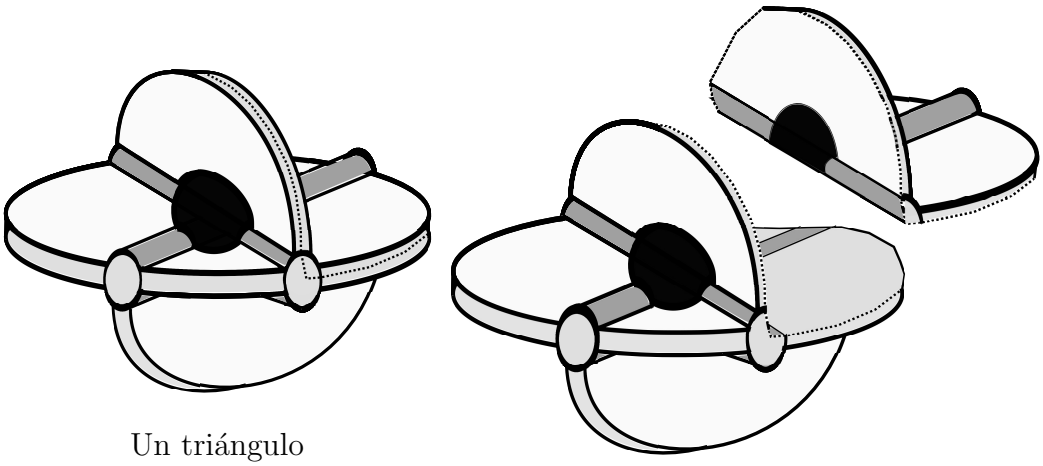
si envía celdas en celdas). Para cualquier vertice v de P_F, el mapeo φ, por ser celular, induce un mapeo entre enlaces; $\varphi_v : \mathrm{lk}(v, P_F) \to \mathrm{lk}(w, P)$, donde $w = \varphi(v)$.

Lema 3.4. *Suponga que una descomposición de asas ξ de una 3-variedad M con borde no vacío corresponde a una espina celular casi simple P de M. Sea F una superficie 2-normal en M, y sean ξ_F, P_F y φ la descomposición en asas inducida, la espina celular de M_F, y el mapeo celular $\varphi : P_F \to P$. Entonces P_F es casi simple, y para cualquier vértice v de P_F y el correspondiente vértice $w = \varphi(v)$ de P el mapeo inducido $\varphi_v : \mathrm{lk}(v, P_F) \to \mathrm{lk}(w, P)$ es un embebimiento.*

Demostración. Ver lema 4.2.1 de [6] □

Lema 3.5. *Supongamos que una descomposición en asas ξ de una 3-variedad M con borde no vacío corresponde a una espina celular casi simple P de M. Sea F una superficie 2-normal conexa en M, y sean ξ_F la descomposición en asas inducida de M_F, P_F la espina celular de M_F, y $\varphi : P_F \to P$ el mapeo celular. Entonces $c(P_F) \leqslant c(P)$ y $c(P_F) = c(P)$ si y solo si todos los discos elementales de F en las bolas de los vértices verdaderos son del tipo* 3.

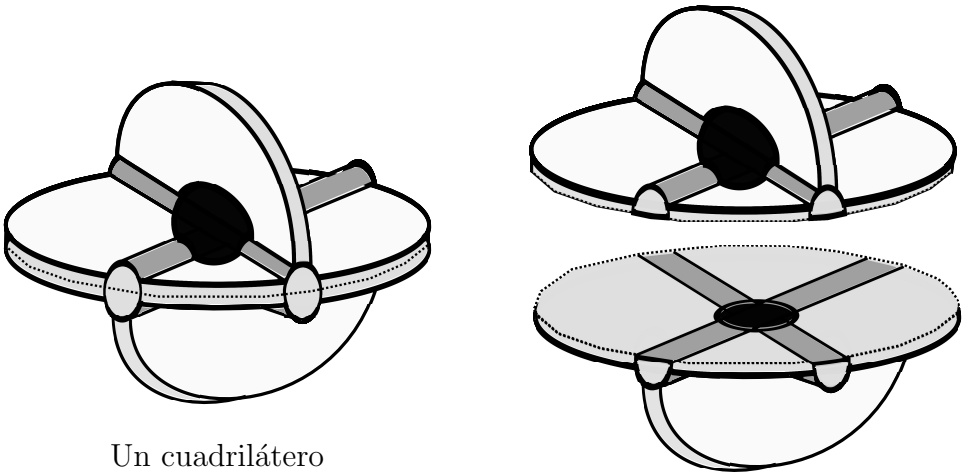
Demostración. Ver corolario 4.2.5 de [6]. □



Un triángulo

Cortando a lo largo del triángulo

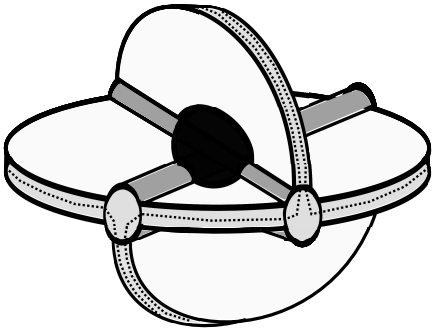
Figura 3.5



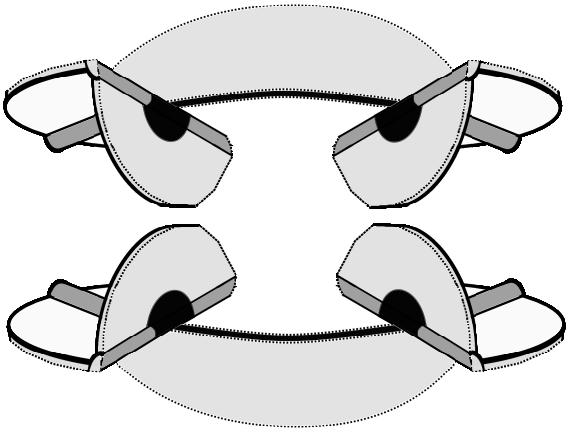
Un cuadrilátero

Cortando a lo largo del cuadrilátero

Figura 3.6



Un octágono



Cortando a lo largo del octágono

Figura 3.7

Capítulo 4

Enlaces en una 3-bola

Uno de los resultados mas importantes para nuestro propósito es el teorema de Rubinstein, en el cual se demuestra la existencia de una 2-esfera 2-normal contenida en una 3-bola (donde la 3-bola esta expresada en descomposición de asas), donde la intersección de esta 2-esfera con algún vértice verdadero de la descomposición en asas de la 3-bola contiene al menos un octágono o un cuadrilátero. De modo que cualquier 3-variedad que no contenga una 2-esfera con estas características no es una 3-bola. Este resultado realmente será crucial para la construcción del algoritmo que reconoce a S^3.

En este capítulo construiremos un resultado usado para demostrar el teorema de Rubinstein. Este es resultado del teorema 4.2.

4.1. Discos de compresión y troncos coronados

En esta sección presentaremos las definiciones involucradas para la enunciación del teorema 4.2, y también demostraremos el lema 4.1 que nos ayudará con el manejo de los conceptos que veremos a continuación.

Sea S una 2-esfera en el interior de una 3-bola cerrada B^3. S divide a B^3 en dos partes, la *parte superior de* S, la cual contiene ∂B^3, y la *parte inferior de* S. Todo lo que este en la parte superior de S esta *arriba de* S, y todo lo que este en la parte inferior esta *abajo de* S.

Definición 4.1. *Un arco α en B^3 es llamado un arco superior para S, si los puntos extremos de α están en S y pequeños segmentos iniciales y terminales de α están arriba de S; α es un arco inferior, si los pequeños segmentos están abajo de S.*

Definición 4.2. *Definimos un enlace en una 3-bola B^3, como una colección finita de arcos propios disjuntos en B^3. Un enlace $L = l_1 \cup l_2 \cup \cdots \cup l_k$ en B^3 es trivial si existen discos disjuntos $D_1, D_2, \ldots, D_k$ en B^3 tal que $D_i \cap L = l_i$ es un arco en ∂D_i y $D_i \cap \partial B^3$ es el arco complementario de ∂D_i.*

Definición 4.3. *Sean L un enlace en B^3 y $S \subset \operatorname{Int} B^3$ una 2-esfera que cruza transversalmente a L. Un disco $D \subset B^3$ es llamado un disco de compresión superior para S (mas precisamente, para $S \cup L$) si ∂D puede ser representado como la unión de un arco superior α y un arco $\beta \subset S$ tal que $D \cap L = \alpha$ y $\partial\alpha = \partial\beta$. Si la misma condición se cumple, pero α es un arco inferior, entonces D es un disco de compresión inferior. En ambos casos β es llamado la base de D.*

Definición 4.4. *Un disco de compresión superior para S y un disco de compresión inferior para S son llamados independiente si la intersección de sus arcos base es vacío ó consiste de uno de sus puntos extremos.*

Definición 4.5. *Una corona es una colección finita de arcos disjuntos en el interior de una 3-bola B^3. Por un tronco entenderemos la imagen $G = \lambda(D^2 \times I)$ de un embebimiento $\lambda : D^2 \times I \to B^3$ tal que $G \cap \partial B^3 = \lambda(D^2 \times \{1\})$. Los discos $\partial_0 G = \lambda(D^2 \times \{0\})$ y $\partial_1 G = \lambda(D^2 \times \{1\})$ son llamados, respectivamente, bases inferior y*

superior del tronco. Curvas de la forma $\lambda(\{*\} \times I)$ se conocen como generadoras del tronco.

Definición 4.6. *Sean C y G una corona y un tronco en B^3, respectivamente, tal que todos los puntos extremos de C están sobre $\partial_0 G$, y ellos son exactamente la intersección entre C y G. Entonces $C \cup G$ es llamado un tronco coronado.*

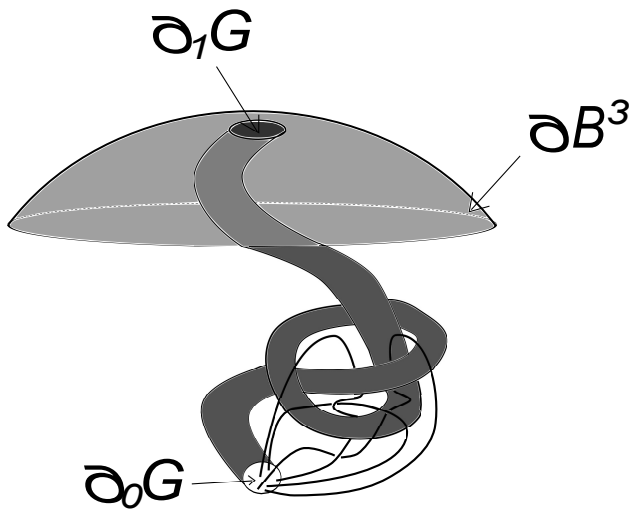


Figura 4.1. Un ejemplo de un tronco coronado dentro de B^3

Lema 4.1. *Sean $C \cup G$, $C' \cup G'$ tronco coronado tal que $C \cup \partial_0 G$ y $C' \cup \partial_0 G'$ son isotópicos. Entonces existe una isotopía $(B^3, \partial B^3) \to (B^3, \partial B^3)$ que envía a $C \cup G$ en $C' \cup G'$.*

Demostración. En primer lugar demostraremos, bajo ciertas condiciones, que podemos empujar un subarco l de la corona a través de una porción $\lambda(D^2 \times I_1)$ del tronco $G = \lambda(D^2 \times I)$, donde I_1 es un subíntervalo de I. Veremos que este movimiento puede ser realizado por medio de una isotopía del tronco coronado. Más precisamente lo que queremos mencionar es lo siguiente:

si existe un disco D en B^3 que satisface lo siguiente:

1. $D \cap G$ es un disco $\lambda(D^2 \times \{a\})$, donde $a \in \operatorname{Int} I$; esto es,

$$D \cap G = D \cap \lambda(D^2 \times I) = \lambda(D^2 \times \{a\})$$

2. $D \cap C$ es un arco l en ∂D; esto es, $D \cap C = l$ donde l es un arco tal que $\partial D = l \cup (\partial D - l)$

3. D no tiene otro punto en común con $C \cup G$; esto es,

$$D \cap (C \cup G) = (D \cap C) \cup (D \cap G) = l \cup \lambda(D^2 \times \{a\})$$

entonces $C \cup G$ es isotópico a $(C \cup G)_l$, donde $(C \cup G)_l$ consiste de reemplazar l por el arco complementario

$$l' = \partial D - \operatorname{Int} l$$

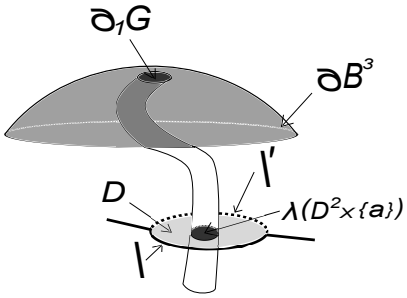


Figura 4.2

De lo anterior queda claro que $(D \cup G)_l$ es un tronco coronado.

Veamos ahora que $C \cup G$ es isotópico a $(C \cup G)_l$. En efecto, como $C \subset \operatorname{Int} B^3$ y $G \cap \partial B^3 = \partial_1 G$, entonces $(C \cup G) \cap \partial B^3 = \partial_1 G$. Por lo tanto existe una esfera $S \subset \operatorname{Int} B^3$ tal que $S \cap (C \cup G) = \lambda(D^2 \times \{b\})$, donde $b \in (a, 1) \subset I$ (S es paralela a ∂B^3, y también muy cercana). Sea D_S una vecindad regular de $\lambda(D^2 \times \{b\})$ en S.

Por otro lado, como $\lambda : D^2 \times I \to B^3$ es un embebimiento, G no se cruza con el mismo; y además, como $C \cap G \subset \partial_0 G$, podemos garantizar la existencia de un anillo

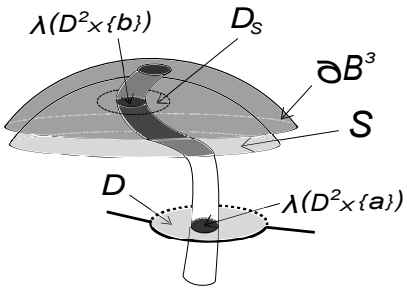


Figura 4.3

A_S tal que cada componente de borde de A_S corresponda a el borde de los discos D_S y D respectivamente, y además

$$A_S \cap (C \cup G) = D \cap C = l$$

$$A_S \cap S = \partial A_S \cap \partial D_S = \partial D_S \ ; \ A_S \cap D = \partial A_S \cap \partial D = \partial D$$

$$\partial A_S = \partial D_S \cup \partial D$$

(en calidad de A_S se podría pensar en el borde de una vecindad regular de $\lambda(D^2 \times [b, a])$, el cual claramente es un anillo. Con algo de trabajo se puede hacer coincidir los bordes de este anillo con los bordes de los discos D_S y D y así generar el anillo A_S). De modo que A_S es un tubo obtenido al recorrer alrededor de la porción del tronco $\lambda(D^2 \times [b, a])$ desde el disco D_S hasta el disco D cruzando a $C \cup G$ solo en l.

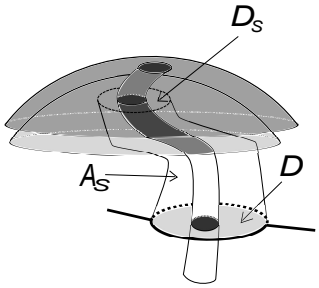


Figura 4.4

Sea

$$S_1 = (S - D_S) \cup A_S \cup D$$

Claramente S_1 es una esfera, pues $(S - D_S)$ y D son discos y A_S es un anillo, donde cada componente de borde de A_S corresponde a el borde de los discos $S - D_S$ y D. Ahora sea $D_1 = S_1 - D$, como D es un disco entonces D_1 es un disco, y es tal que $\partial D_1 = \partial D = l \cup (\partial D - l)$ y $D_1 \cap (C \cup G) = l$. Ahora simplemente deformamos l en $l' = \partial D_1 - \operatorname{Int} l$, a través de D_1. Por lo tanto $G \cup C$ es isotópico a $(G \cup C)_l$.

En segundo lugar se puede demostrar, bajo condiciones parecidas a las anteriores, que podemos empujar una porción del tronco a través de otra porción de el mismo tronco. Este movimiento puede ser realizado por medio de una isotopía del tronco coronado. Para verificar esto, podemos suponer que la porción del tronco que se va ha mover es muy delgada, y operando en la misma forma anterior. La única diferencia con el proceso anterior es que la porción $\lambda(D^2 \times [a, b])$ (haciendo referencia al proceso anterior) del tronco no debe contener parte de la porción del tronco que se va a mover.

Ahora resulta facíl verificar el lema. Reemplazando $C \cup G$ por un tronco coronado, el cual es isotópico a $C \cup G$ (hasta el termino de denotarla también por $C \cup G$), Podemos suponer que $\partial_1 G = \partial_1 G'$ y $C \cup \partial_0 G = C' \cup \partial_0 G'$, fácilmente usando técnicas de teoría de nudos se puede demostrar que $C \cup G$ puede ser transformado en $C' \cup G'$ por medio de deformaciones y movimientos isotópicos de los tipos anteriores. $\square$

Definición 4.7. *Sea $C \cup G \subset B^3$ un tronco coronado. A $C \cup G$ le asociamos un enlace $L \subset B^3$ que consiste de la corona y los generadores del tronco que une los puntos extremos de la corona con ∂B^3. Nos referiremos a $C \cup G$ como un tronco coronado que representa a L.*

Definición 4.8. *Sea L un enlace en B y $S \subset \operatorname{Int} B^3$ una 2-esfera que cruza transversalmente a L. Diremos que L admite un tronco inverso (con respecto a S), si existe*

un tronco coronado $C \cup G$ que representa L tal que la base inferior $\partial_0 G$ del tronco está contenida en S y el tronco se aproxima a S por abajo.

4.1.1. Resultado principal de este capítulo

Teorema 4.2. *Para cualquier enlace no trivial L en B existe una 2-esfera $S \subset \operatorname{Int} B$ transversal a L tal que se cumple lo siguiente:*

1. *$S \cup L$ admite discos de compresión superiores estrictos y discos de compresión inferiores estrictos.*

2. *$S \cup L$ no admite un par de discos de compresión independientes.*

3. *$S \cup L$ no admite un tronco inverso.*

La prueba de este teorema esta basada en los conceptos de posición delgada de enlaces, los cuales desarrollaremos en la siguiente sección y al final daremos una prueba para este teorema.

4.2. Posición delgada de enlaces

Denotemos por B^3 la bola estándar unitaria en el espacio euclidiano R^3 centrada en el origen O. Sea un enlace $L \subset B^3$ que consiste de un arco propio suave en B^3 que no pasa a través del origen O. Considerar la foliación $\mathcal{F}_0$ de $B^3 \setminus \{O\}$ con esferas S_r, $0 < r \leq 1$, centradas en el origen O (r es el radio de S_r). Es conveniente separar estas esferas en dos tipos: *esferas transversas*, que cruzan transversalmente a L, y *esferas singulares* que contienen puntos de tangencia. Nos referiremos a la esferas como *esferas de nivel*, teniendo en mente la *función altura* $h : B^3 \to R$ dada por la regla $h(S_r) = r$.

Definición 4.9. *Un enlace $L \subset B^3$ esta en posición general (con respecto a $\mathcal{F}_0$) si se cumple lo siguiente:*

1. *Existe solo un número finito de esferas singulares en $\mathcal{F}_0$.*

2. *Cada esfera singular en $\mathcal{F}_0$ contiene exactamente un punto de tangencia.*

3. *Todos los puntos de tangencia son puntos mínimos o máximos con respecto a la restricción de h sobre L. Aquí entendemos mínimos y máximos locales.*

Al quitar de B^3 todas las esferas singulares. Encontramos una colección de 3-variedades. Una de las variedades es una bola abierta, otra es homeomorfa a $S^2 \times (0, 1]$, y todas las otras son homeomorfas a $S^2 \times (0, 1)$. Al hacer estos cortes partimos a L en varios arcos abiertos y semiabiertos.

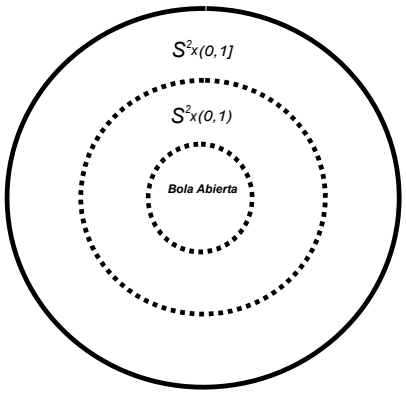


Figura 4.5. B^3 cortado por dos esferas singulares

Definición 4.10. *El número total $w(L)$ de arcos en que las esferas singulares descomponen a L es llamado el ancho de L.*

El ancho de un enlace no es una característica invariante bajo isotopía. Sin embargo, si la isotopía es $\mathcal{F}_0$-regular, esto es, que en cada momento el enlace esta en

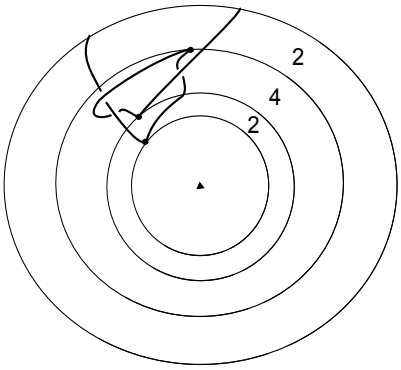


Figura 4.6. Enlace en posición delgada de ancho 2+4+2=8

posición general, entonces el ancho es preservado. Además, el ancho es preservado bajo una $\mathcal{F}_0$-regular homotopía, cuando la intersección de L con el mismo es permitida. El único requerimiento es que los puntos máximos y mínimos ni aparecen ni desaparecen, y nunca están en la misma esfera de nivel.

Definición 4.11. *Un enlace $L \subset B^3$ esta en posición delgada si el tiene el mínimo ancho sobre todos lo enlaces isotópicos a L.*

Lema 4.3. *Sean $L \subset B^3$ un enlace, $S_r \subset B^3$ una esfera de nivel transversa, y $l \subset L$ un arco superior para S_r. Reemplazamos l por un arco superior $l' \subset B^3$ que tiene los mismos puntos extremos y tal que l' tiene solo un punto máximo, este punto máximo esta por debajo de el máximo global de l, y el enlace $L' = (L \backslash l) \cup l'$ (no necesariamente isotópico a L) esta en posición general. Entonces $w(L') \leq w(L)$.*

Demostración. Escogemos un arco superior $l'' \subset B^3$ tal que:

1. $\partial l'' = \partial l$

2. l'' contiene solo un punto máximo

3. La altura del máximo de l'' es igual a la altura del máximo global de l.

Entonces cada esfera singular para el enlace $L'' = (L \setminus l) \cup l''$ es una esfera singular para L, y el número de arcos de L'' entre cualquier dos esfera singulares vecinas no es mayor que el número de arcos de L entre las mismas dos esferas. De modo que $w(L'') \leqslant w(L)$.

Ahora deformamos l'' en l' manteniendo sus puntos extremos fijos, de modo que en todo momento de la deformación siempre haya un solo punto máximo, el cual siempre está estrictamente por debajo del punto máximo de l''.

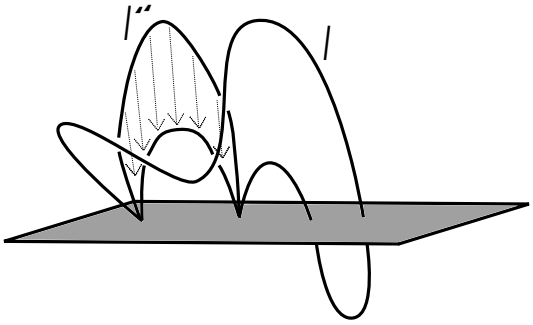


Figura 4.7

Durante la deformación l'' puede cruzar con el resto de L''. Cuando el punto máximo de l'' pasa a través de otra esfera de nivel singular $S_{r'}$ de L'', el ancho de L'' es preservado si $S_{r'}$ contiene un punto máximo de L'', y decrece en cuatro si contiene un punto mínimo. De donde $w(L') \leqslant w(L)$.

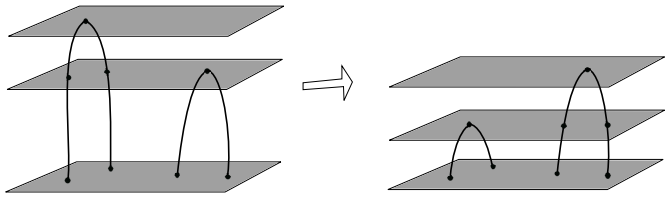


Figura 4.8. El ancho se preserva

$\square$

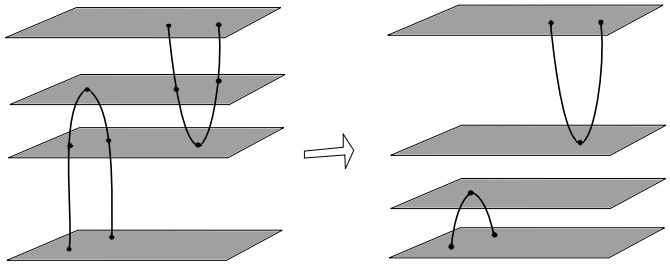


Figura 4.9. El ancho disminuye en 4

Un enunciado análogo para arcos inferiores es también cierto. De hecho, sea $l \subset L$ y $l' \subset B^3$ dos arcos inferiores con los mismos puntos extremos tal que el único punto mínimo de l' esta arriba del punto mínimo global de l. Entonces al reemplazar l por l' no se incrementa el ancho.

Lema 4.4. *Sea $L \subset B^3$ un enlace en posición general y S_r una esfera de nivel transversa. Supongamos que S_r admite un par de discos de compresión independientes respecto a L. Entonces L es isotópico a un enlace de ancho menor.*

Demostración. Sean D_u y D_l un par de discos de compresión independientes respecto a L. Digamos que D_u es un disco de compresión superior para S_r; tal que $\partial D_u = \alpha_u \cup \beta_u$ donde α_u corresponde al arco superior a S_r y β_u corresponde al arco de base de D_u, y D_l es un disco de compresión inferior para S_r; tal que $\partial D_l = \alpha_l \cup \beta_l$ donde α_l corresponde al arco inferior a S_r y β_l corresponde al arco de base de D_l. Entonces L es isotópico a un enlace

$$L_1 = (L \setminus (\alpha_u \cup \alpha_l)) \cup (\beta_u \cup \beta_l)$$

(tal isotopía puede ser obtenida por deformar a α_u en β_u a través de D_u, de igual forma se deforma α_l en β_l por medio de D_l). Realizamos un pequeño movimiento de β_u a un arco superior α'_u, donde α'_u tiene solo un punto máximo. Similarmente,

Realizamos un pequeño movimiento de β_l a un arco inferior α'_l, donde α'_l tiene solo un punto mínimo. Estos movimientos se realizan fijando los extremos de los arcos. Consideremos el enlace

$$L' = (L \setminus (\alpha_u \cup \alpha_l)) \cup (\alpha'_u \cup \alpha'_l).$$

Se sigue del lema 4.3 que $w(L') \leqslant w(L)$ (hay que resaltar que en la construcción L' es isotópico a L). Ahora como el movimiento de β_u a α'_u es muy pequeño, al igual que el movimiento de β_l a α'_l; podemos asumír que no hay esferas de nivel singulares entre el nivel del punto máximo de α'_u y el nivel de el punto mínimo α'_l. Por lo tanto podemos hacer disminuir $w(L')$ poniendo α'_u debajo de S_r y α'_l encima de S_r. En la grafica se muestra un ejemplo para el caso cuando α'_u y α'_l no tienen puntos en común y para el caso cuando α'_u y α'_l tienen un punto en común.

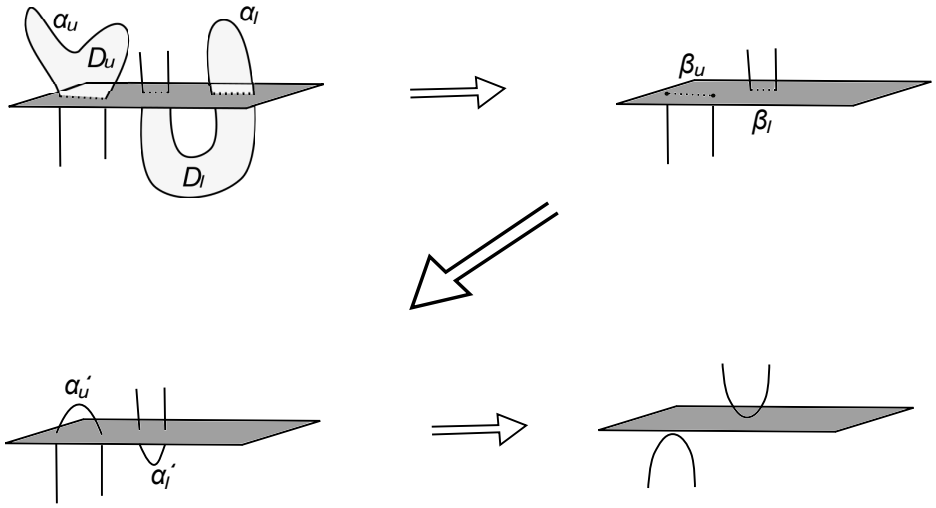


Figura 4.10. Para el caso cuando los discos de compresión son disjuntos

El máximo de α'_u y el mínimo de α'_l o cambian de lugar o se eliminan entre si (entendiendo cambiar de lugar como cambiar de máximo a mínimo y de mínimo a

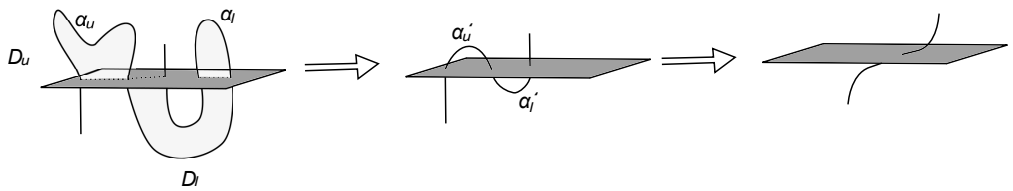


Figura 4.11. Para el caso cuando los discos de compresión se cruzan

máximo). En ambos casos encontramos un enlace que tiene un ancho estrictamente menor que el de L. $\square$

Lema 4.5. *Sea $L \subset B^3$ un enlace en posición general. Supongamos que L admite una tronco inverso con respecto a una esfera de nivel S. Entonces L es isotópico a un enlace de ancho menor.*

Demostración. Sea $C \cup G$ un tronco coronado que representa a L tal que la base inferior $\partial_0 G$ del tronco esta contenido en S y se aproxima a S por debajo. Podemos escoger a $C \cup G$ de tal forma que en el borde de $\partial_0 G$ se encuentre un arco de C. Veamos esto; si inicialmente $C \cup G$ no cumple esta condición, entonces podemos disminuir el radio del borde de $\partial_0 G$ hasta obtener que al menos uno de los arcos de C esté sobre este borde, claramente esto generara otro tronco $\widetilde{G}$. Así lograremos dar un tronco coronado $C \cup \widetilde{G}$ que funciona como presentación para L y es al que en el borde de $\partial_0 \widetilde{G}$ se encuentra un arco de C.

Sea c un arco de C que esta sobre el borde $\partial_0 G$. Nos Trasladamos hacia arriba desde uno de los extremos de c que se encuentra sobre el borde de $\partial_0 G$ hasta el primer punto máximo de c, este máximo lo denotaremos por A. La parte recorrida de c será denotada por l. Ahora construiremos un nuevo tronco G' con la misma base inferior de G. Primero, a partir de $\partial_0 G$ bajamos un poco sin cruzar esferas singulares de nivel, al tiempo que adelgazamos el tronco tanto como sea necesario. Luego, subimos siguiendo el recorrido de l, muy cerca de l, hasta el nivel de A. Finalmente, segui-

mos monotónicamente hacia arriba hasta llegar a ∂B^3. De lo anterior, la intersección $C \cap G'$ debe consistir de los puntos extremos de C. Uniendo estos puntos con ∂B^3 por generadores de G', obtenemos un nuevo enlace $L' \subset B^3$ el cual tiene la misma corona y el nuevo tronco G'. Entonces por el lema 4.3 concluimos que $w(L') \leqslant w(L)$.

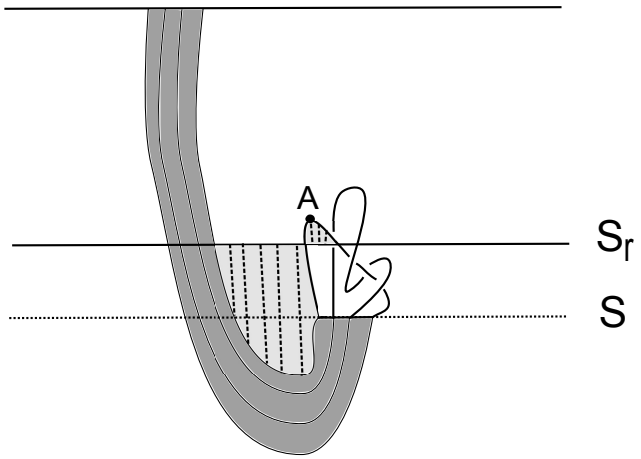


Figura 4.12. Dos discos de compresión independientes para S

Probaremos que una esfera de nivel S_r, que se encuentra por debajo del nivel de A, admite un par de discos de compresión independientes. De hecho, el disco de compresión superior de este par contiene a A, el inferior puede ser fácilmente construido por usar el hecho que G' sube rápidamente y va muy cerca de l.

Por lo tanto, del lema 4.1 obtenemos que $C \cup G$ es isotópico a $C \cup G'$ y por lo tanto L y L' son isotópicos. Mientras que el lema 4.4 asegura la existencia de un enlace L'' tal que L'' y L son isotópicos y además se cumple que $w(L'') < w(L')$, esto se debe al hecho que vimos anteriormente respecto a que S_r admite un par de discos de compresión. Así demostramos que existe el enlace L'' isotópico a L tal que $w(L'') < w(L)$ $\square$

Demostración del Teorema 4.2. Es suficiente probar el teorema para la bola estándar

B^3. Pongamos a L en posición delgada. Cualquier enlace en B^3 contiene un punto mínimo, y cualquier enlace no trivial contiene al menos un punto máximo (con respecto a la función de altura h). Por lo tanto existe una esfera de nivel transversa $S = S_r \subset B^3$ tal que la primera esfera singular S_{max} arriba de S contiene un punto máximo de L, mientra la primera esfera singular S_{min} abajo de S contiene un punto mínimo de L. Veremos que S satisface 1), 2) y 3) del teorema 4.2.

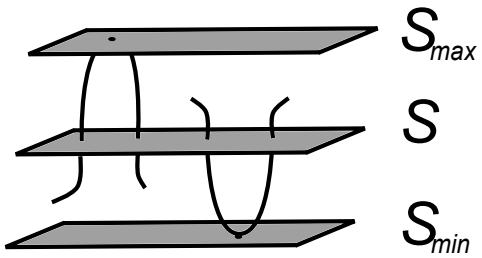


Figura 4.13

Para probar 1) notemos que una esfera transversa S' inmediatamente abajo de S_{max} admite un evidente disco de compresión superior que contiene el único punto máximo de L en S_{max}. Como la porción de L entre S_{max} y S es la unión de arcos monótonos, existe una isotopía $B^3 \to B^3$ que envía S_{max} en S y es invariante en L. De modo que S también admite un disco de compresión superior estricto. Los mismos argumentos muestran la existencia de un disco de compresión inferior estricto.

Como L está en posición delgada, las conclusiones 2) y 3) son satisfechas para cualquier esfera de nivel transversa, en particular, para S (ver los lemas 4.4 y 4.5). $\square$

Capítulo 5

El Teorema de Rubinstein

Como ya lo mencionamos al inicio del capítulo anterior, el teorema de Rubinstein es una de los resultados mas importantes para el desarrollo de esta tesis. El enunciado es el siguiente:

Teorema 5.1 (Teorema de Rubinstein)**.** *Para toda espina especial P de la bola estándar B^3 existe una 2-esfera 2-normal $S \subset B^3$ tal que la intersección de S con al menos una bola de la descomposición de asas ξ_P contiene un cuadrilátero o un octágono.*

Para la prueba desarrollaremos la siguiente sección, donde introduciremos algunos conceptos relacionados.

Demostración del teorema

Definición 5.1. *Sea P una espina especial de la bola estándar B^3 y ξ_P la correspondiente descomposición en asas. Consideremos una placa $D^2 \times I$ de ξ_P. Un arco*

$l = \{*\} \times I$, donde $\{*\}$ es un punto sobre D^2, es llamado un arco transversal de la placa.

Definición 5.2. *Un enlace $L(\xi_P) \subset M$ que consiste de todos los arcos transversales de cada placa (uno por cada placa) es llamado un enlace dual de la correspondiente descomposición ξ_P.*

Lema 5.2. *Para cualquier espina especial P de B^3 el enlace dual $L(\xi_P)$ es no trivial.*

Demostración. Ver lema 5.2.8 de [6]. □

Demostración del teorema 5.1. Sea P una espina especial de B^3, y ξ_P la correspondiente descomposición en asas. Por el lema 5.2, el enlace dual $L = L(\xi_P)$ es no trivial. Por el teorema 4.2 existe una 2-esfera $S \subset \operatorname{Int} B^3$ transversal a L tal que:

1. $S \cup L$ admite un disco de compresión superior estricto y un disco de compresión inferior estricto.

2. $S \cup L$ no admite un par de discos de compresión independiente.

3. $S \cup L$ no admite un tronco inverso.

Ahora como S es transversal a L, $S \cap L$ es una unión finita de puntos contenidos en las placas. Para cada uno de estos puntos existe un discos en S homeomorfo a un disco del plano (discos cerrados). Tomamos estos discos en S tan pequeños como sea necesario, de tal forma que resulten contenidos en las placas (recordemos que L esta contenido en la unión de todos las placas). Por medio de una isotopía de B^3 relativa a L dilatamos estos discos en S hasta el punto en que la intersección de S con todas las placas sean la unión de estos discos. Enderezando apropiadamente estos discos, podemos ver que existe una isotopía de B^3 relativa a L tal que en el

homeomorfismo final de la isotopía la intersección de S con cada placa $D^2 \times I$ consiste de laminas del tipo $D^2 \times \{*\}$. En esta parte solo consideraremos esferas que cumplan con esta propiedad, tales esferas serán llamadas *seminormales*, y entenderemos por una *isotopía seminormal* de B^3 a una isotopía de B^3 que es invariante en todas las placas (no en todas las asas como en las isotopías normales). Por lo tanto S es una esfera seminormal. Por último, por posición general existe una isotopía de B^3 tal que en el homeomorfismo final la intersección de S con cada isla es una unión finita de arcos (cerrados o abiertos).

El problema principal es eliminar los retornos de puentes, esto es, arcos abiertos que pertenecen a la intersección de S con las islas y tales que cada arco abierto tiene sus puntos extremos en un mismo puente. Sea v un retorno de puente que pertenece a una isla J y tiene sus puntos extremos en un puente b. Diremos que v es un *retorno superior* si el arco $l_v \subset J \cap b$ entre los puntos extremos de v es un arco superior para S, y un *retorno inferior* si l_v es inferior.

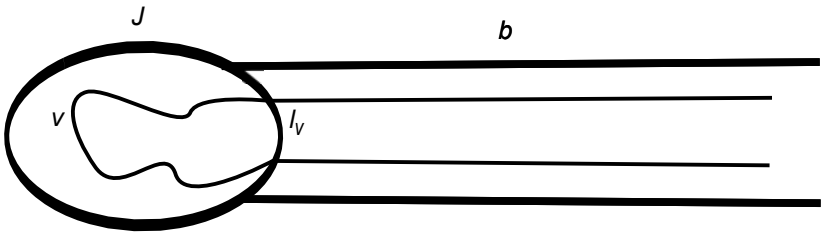


Figura 5.1

Las siguientes tres observaciones son cruciales para la prueba (Las verificaremos en seguida)

i) Cada retorno de puente v superior o inferior determina un disco de compresión D_v para S superior o inferior respectivamente, no necesariamente estricto.

ii) S no puede tener al mismo tiempo retornos superiores e inferiores.

iii) Lo anterior también es cierto para toda esfera seminormalmete isotópica a S.

Veamos que (i) es cierto; sea v un retorno de puente superior que pertenece a una isla J y tiene sus puntos extremos en un puente b; donde el puente b esta contenido en una placa d. Como J es un disco, $v \cup l_v$ acota un disco en J. Sea $D'_v \subset J$ el disco acotado por $v \cup l_v$ en J.

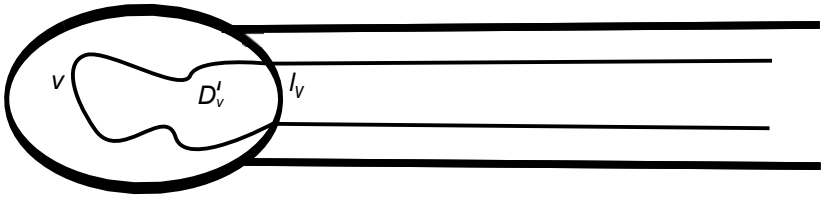


Figura 5.2

Sean v_1 y v_2 los puntos extremos del arco v, de modo que $v_1, v_2 \in b \cap J$. Ahora como la intersección de S con cada placa consiste de laminas de la forma $D^2 \times \{*\}$ y $v_1, v_2 \in b \subset d$, existen h_1, h_2 laminas diferentes (de la intersección de S con la placa d) tales que $v_1 \in h_1$ y $v_2 \in h_2$.

Sean v^1, v^2 tales que $v^1 = h_1 \cap L$ y $v^2 = h_2 \cap L$ (recordar que la intersección de L con cada placa consiste de un arco transversal a S). Sean v_1v^1 un arco en h_1 tal que sus puntos extremos son v_1 y v^1. Análogamente definimos v_2v^2. Como h_1 y h_2 son laminas diferentes se tiene que $h_1 \cap h_2 = \emptyset$ y por lo tanto $v_1v^1 \cap v_2v^2 = \emptyset$. Ahora como $L \cap d$ es un arco transversal, sea α_v el arco en L tal que sus puntos extremos son v^1 y v^2. Consideremos el disco $D''_v \subset d$ acotado por $l_v \cup v_1v^1 \cup \alpha_v \cup v_2v^2$. Enderezando apropiadamente los arcos v_1v^1 y v_2v^2, podemos considerar que D''_v es la banda recta que une l_v con α_v de tal forma que $D''_v \cap L = \alpha_v$.

Es claro que $D'_v \cap D''_v = l_v$, de modo que $D_v = D'_v \cup D''_v$ es un disco acotado por $v \cup v_1v^1 \cup \alpha_v \cup v_2v^2$ y es tal que $D_v \cap L = \alpha_v$. Podemos notar que D_v es un disco de

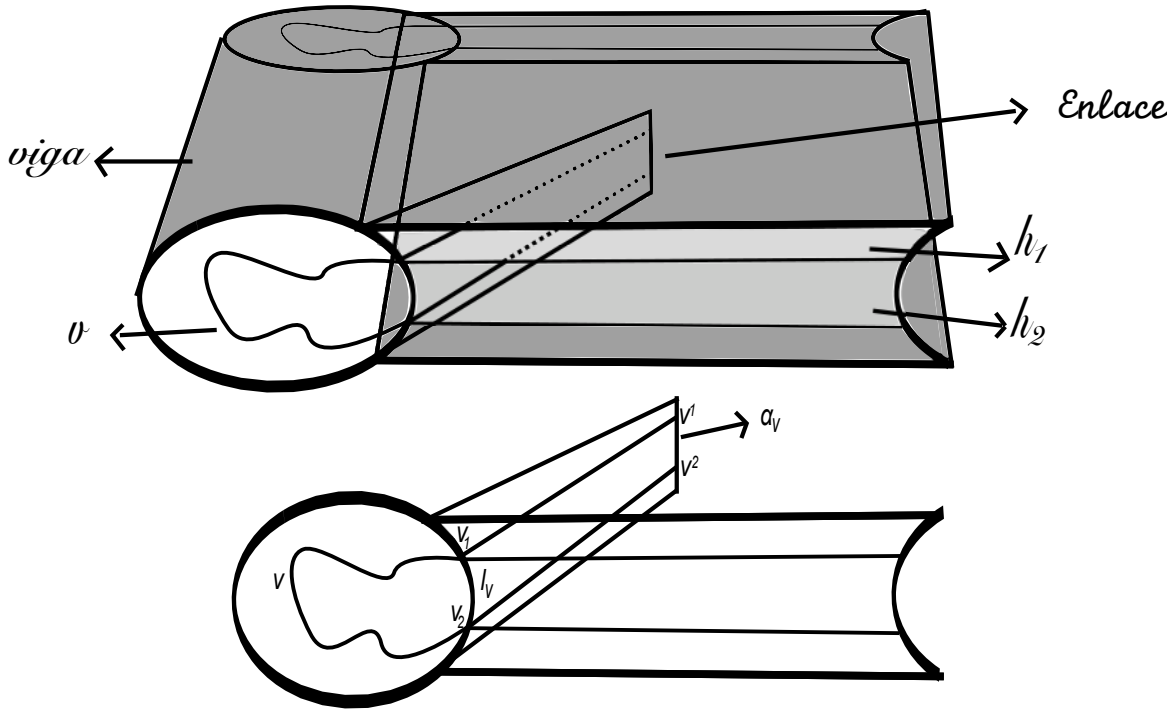


Figura 5.3

compresión superior para $S \cup L$ donde $\partial D_v = \beta_v \cup \alpha_v$ siendo $\beta_v = v \cup v_1 v^1 \cup v_2 v^2 \subset S$ la base de D_v y $D_v \cap L = \alpha_v$ con α_v arco superior para S (ya que l_v es un arco superior para S). Hay que notar que D_v no necesariamente es un disco de compresión superior estricto, pues en la contrucción el retorno de puente v no necesariamente es el más interior.

Veamos ahora la prueba de la observación (ii), supongamos que S tiene al mismo tiempo retornos superiores e inferiores. Sean v y w retornos superior e inferior respectivamente. Por la observación (i), v y w determinan discos de compresión D_v y D_w superiores e inferiores respectivamente. Digamos que $\partial D_v = \beta_v \cup \alpha_v$ donde $\beta_v \subset S$ y $D_v \cap L = \alpha_v$ con α_v arco superior para S y además $\partial \beta_v = \partial \alpha_v$; de manera análoga, $\partial D_w = \beta_w \cup \alpha_w$ donde $\beta_w \subset S$ y $D_w \cap L = \alpha_w$ con α_w arco inferior para

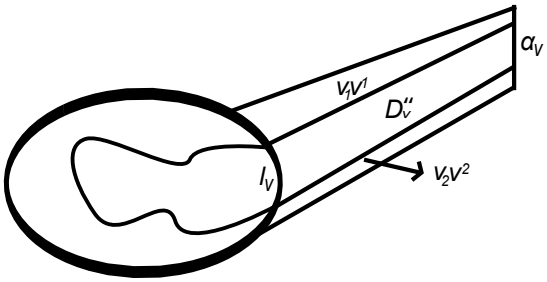


Figura 5.4

S y además $\partial\beta_w = \partial\alpha_w$. Es fácil ver que β_v y β_w tienen a lo mas un punto extremo común; pues si coincidieran en los dos extremos entonces $\alpha_v = \alpha_w$, de modo que α_v sería un arco superior e inferior a S, lo cual es absurdo. Por otro lado, como S esta embebido, obtenemos que los retornos v y w son disjuntos. Por lo tanto, podemos probar que los arcos de base son disjuntos o tienen exactamente un punto extremo en común. En efecto, supongamos que $\beta_v \cap \beta_w \neq \emptyset$. De la construcción en la observación (i), tenemos que $\beta_v = v \cup v_1v^1 \cup v_2v^2 \subset S$ y $\beta_w = w \cup w_1w^1 \cup w_2w^2 \subset S$, donde v_i, v^i, w_j, w^j con $i, j \in \{1, 2\}$ son como en la construcción de la observación (i). Ahora como $v \cap w = \emptyset$ y $\beta_v \cap \beta_w \neq \emptyset$ entonces para algún $i \in \{1, 2\}$ y para algún $j \in \{1, 2\}$ se tiene que $v_iv^i \cap wjw^j \neq \emptyset$. Como $v_iv^i \subset h_i$ y $w_jw^j \subset h_j$ y $v_iv^i \cap wjw^j \neq \emptyset$ entonces $h_i = h_j$ (donde h_i y h_j son como en la construcción de la observación (i)). De modo que $v^i = h_i \cap L = h_j \cap L = w^j$; es decir que β_v y β_w tienen al menos un punto extremo común. Pero como vimos anteriormente que β_v y β_w tienen a lo mas un punto extremo en común, tenemos que β_v y β_w tienen exactamente un punto extremo en común. Así queda probado que β_v y β_w son disjuntos o tienen exactamente un punto extremo en común. Esto implica que D_v y D_w son discos de compresión independientes. Lo cual es absurdo, pues por las propiedades de S se tiene que no admite un par de discos de compresión independientes.

Veamos la propiedad (iii), sea Z una esfera seminormalmente isotópica a S. De modo que la intersección de Z con cada placa $D^2 \times I$ consiste de laminas de la forma $D^2 \times \{*\}$, así que toda la costrucción hecha para S se puede hacer ahora para Z. Con esto último quedan probadas las observaciones anteriores.

Es conveniente dividir lo que sigue de esta prueba en varios pasos:

Paso 1: *S es seminormalmente isotópica a una esfera S_l que tiene un retorno de puente inferior y a una esfera S_u que tiene un retorno de puente superior.*

En efecto, consideremos un disco D de compresión inferior estricto para S (recordemos que S admite un disco de compresión superior estricto y uno inferior estricto). De modo que $D \cap L$ es solo una componente de L, por lo tanto D puede ser forzado hacia afuera de todos las placas excepto de el placa $P_1 = D^2 \times I$ que contiene el arco $c = D \cap L$. Además podemos organizar a D de tal forma que $D \cap P_1$ consista de una banda recta D'' que une c con un arco α en el borde de una isla J. La parte restante D' de D esta en la unión de las bolas y las vigas. Escogemos una isotopía seminormal de B^3 que encoge D' a lo largo de el mismo a un disco $D_1 \subset J$. Esta isotopía envía a S en una esfera seminormal S_l que tiene un retorno de puente inferior.

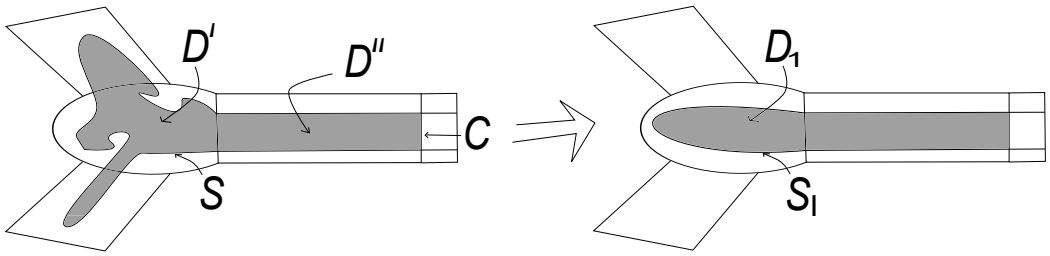


Figura 5.5

Podemos concluir que existe una isotopía seminormal que envía a S_l en S. Similarmente, empezando con un disco de compresión superior estricto para S, podemos construir una isotopía seminormal que envía a S en una esfera S_u que tiene retornos

de puente superiores.

Paso 2 *Existe una esfera seminormal $S' \subset B^3$ que es seminormalmete isotópica a S tal que S' no tiene retornos de puentes.*

La idea consiste en considerar una familia $\{h_t(S_l), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ de esferas seminormales que relacionan via isotopía a S_l con S_u. La existencia de tal familia se sigue del paso 1. La esfera $S_l = h_0(S_l)$ tiene un retorno de puente inferior, la esfera $S_u = h_1(S_l)$ tiene un retorno de puente superior, y nunca veremos simultáneamente retornos de ambos tipos. Por lo tanto para algún t la esfera $h_t(S_l)$ no tiene retornos de puente de superiores ni tampoco retornos de puente inferiores.

La prueba rigurosa de esto último esta basada en el hecho conocido que cualquier isotopía ambiente de una variedad puede ser reemplazada por una composición de movimientos locales de modo que cada movimiento es fijado fuera de una bola pequeña. Reemplazamos la isotopía h_t que envía a S_l en S_u por una composición de movimientos locales seminormales tal que lo siguiente es cierto:

(a) Antes y después de cada movimiento la esfera desplazada esta en posición general con respecto a las islas.

(b) Las bolas de soporte de cada movimiento cruzan a lo más una isla.

Consideremos la secuencia $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n$ de esferas seminormales obtenida por una aplicación sucesiva de los movimientos. Existen dos posibilidades: La primera es que al menos una de las esferas no tiene retornos de puente (lo que concluiría la prueba del paso 2), y la segunda es que existe i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, tal que S'_i tiene retornos de puente inferiores mientras S'_{i+1} tiene un retornos de puente superiores.

Consideremos la segunda posibilidad. Por construcción, S'_i y S'_{i+1} coinciden en una vecindad de cualquier isla, excepto posiblemente en una isla J. Todos los retornos de

puente de S'_i son inferiores, mientras que todos los retornos de puente de S'_{i+1} son superiores. Por lo tanto S'_i tiene retornos de puente solo en la isla J. En otro caso un retorno de puente inferior de S'_i en cualquier otra isla J' debe ser un retorno de puente superior de S'_{i+1}, que es imposible. De hecho, el movimiento local que envía a S'_i en S'_{i+1} permanece fija en una vecindad de J' y esto no puede convertir un arco inferior en uno superior.

Para quitar de J los retornos de puente, presentamos la viga que contiene a J como $D^2 \times I$ tal que $J = D^2 \times \{1\}$. Sea $D^2 \times [0, \epsilon]$ es una vecindad pequeña en la viga de la otra isla $D^2 \times \{0\}$, que no contiene retornos de puente. Entonces estiramos linealmente $D^2 \times \{0\}$ hasta que su tamaño sea el de toda la viga $D^2 \times I$ y extendemos el estiramiento a una isotopía seminormal de B^3. Esta isotopía convierte S'_i en una esfera seminormal S' sin retornos de puente.

Paso 3 *Cualquier curva en la intersección de S' con el borde de cualquier bola B de ξ_P cruza cada puente de B a lo mas dos veces.*

Asumamos lo contrario, supongamos que existe una curva cerrada C en la intersección de S' con ∂B que cruza un puente b de B mas de dos veces. De estos escogemos tres segmentos adyacentes I_1, I_2, I_3 (respecto al puente) tal que I_2 esta entre I_1 y I_2.

Escogemos un punto inicial y una orientación para C tal que, atravesando C, se cruce consecutivamente los segmentos I_1, I_2, I_3. Para $i = 1, 2, 3$ denotemos por x_i^- y x_i^+ el punto inicial y el punto terminal de I_i con respecto a la orientación. Entonces el arco de C entre x_1^+, x_2^- y el arco l_1 en ∂b entre los mismos puntos acotan un disco D_1 en ∂B (recordemos que $C \subset \partial B$). Similarmente, el arco en C entre x_2^+, x_3^- y el arco l_2 en ∂b entre los mismos puntos acotan un disco D_2 en ∂B.

Los interiores de D_1, D_2 pueden cruzar lagos y estos están contenidos en ∂B^3. Para evitar esto, empujamos ligeramente el interior de estos discos hacia el interior

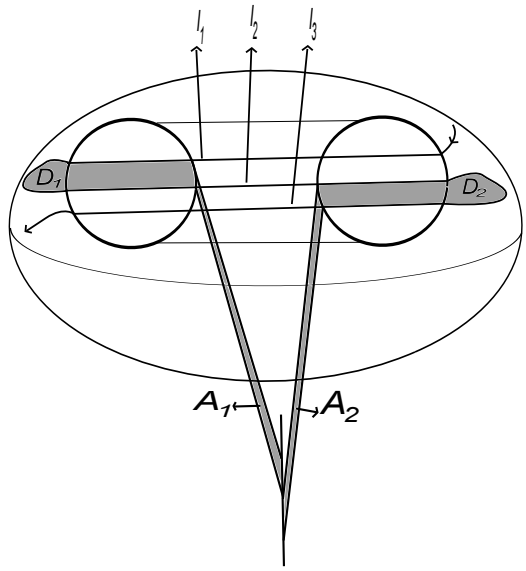


Figura 5.6

de B^3 sin mover los bordes de estos discos. Ahora como se hizo en la justificación de la observación 1 de esta prueba, anexamos a cada disco D_i, $i = 1, 2$ una banda recta A_i contenida en la placa $D^2 \times I$ tal que $\partial A_i \subset l_i \cup L \cup S$. Así encontramos dos discos de compresión independientes cuyos arcos de base tienen un punto extremo en común. Esto contradice la propiedad de que S no admite discos de compresión independientes.

Analicemos las propiedades de S' comparándolas con la definición 3.2 de superficies 2-normales. La primera condición es satisfecha de manera automática, pues no hay asas de índice 3. La segunda se cumple pues S' es seminormal. La condición 5 se cumple, pues en el paso 2 fue escogida S' con esta propiedad. Es muy fácil verificar la condición 3 utilizando el truco usado anteriormente para finalizar la prueba del paso 2: para cada viga $D^2 \times I$ estiramos linealmente una vecindad pequeña $D^2 \times [0, \epsilon]$ de la isla $D^2 \times \{0\}$ hasta que su tamaño sea el de toda la viga $D^2 \times I$ y extendemos el estiramiento a una isotopía seminormal de B^3. En el paso 3 probamos una versión de

la condición 7. La diferencia radica en que no sabemos si la intersección de S' con las bolas de ξ_P son discos, pero lo que si sabemos por el paso 3 es que cualquier curva de borde en la intersección de S' con los bordes de cualquier bola B de ξ_P cruza cada puente a lo mas dos veces.

Ahora nuestra atención la ponemos en las condiciones 4 y 6 de la definición 3.2. Si S' cumple con estas condiciones, entonces ya hemos encontrado la 2-esfera 2-normal que buscamos. Supongamos que S' no cumple con estas condiciones. Por lo tanto se puede concluir que S' contiene tubos; es decir, existe una bola o una viga de la descomposición en asas ξ_P tal que su intersección con S' es isotópico a $S^1 \times I$. Es conveniente presentar S' como una suma conexa de esferas 2-normales, es decir, como una colección $S_1, S_2, \ldots, S_k$ de esferas 2-normales conectadas por tubos delgados. Los tubos pueden estar anudados y enlazados, y pueden ir del interior de una a otro. Mas precisamente, las esferas $S_1, S_2, \ldots, S_k$ pueden ser obtenidas de S' de la siguiente forma. Reemplace la intersección de S' con todas las bolas B de ξ_P por una colección de discos en B teniendo el mismo borde de $S' \cap \partial B$. Después de realizar este proceso, los tubos contenidos en las vigas y en las bolas de ξ se convierten en esferas. Así retirando todas las esferas que quedan contenidas en la unión de bolas y vigas de ξ. Entonces las esferas restantes (las que cruzan las placas) son las esferas que habíamos mencionado, son las de la colección $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Así se generan las esfera de la colección $S_1, S_2, \ldots, S_k$ tal que S' es igual a la colección $S_1, S_2, \ldots, S_k$ conectadas por tubos delgados.

Paso 4 *Al menos una de las esferas $S_1, S_2, \ldots, S_k$ contiene un cuadrilátero o un octágono.* Supongamos lo contrario, supongamos que la intersección de todas las esferas $S_1, S_2, \ldots, S_k$ con las bolas de ξ_P corresponden a piezas triangulares; de modo que la intersección de cada S_i con cada bola de ξ_P es de la forma siguiente:

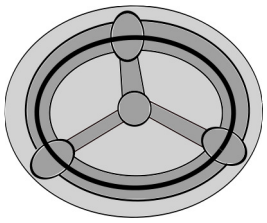


Figura 5.7

De modo que cada S_i es normalmente paralela ∂B^3; es decir, cada arco transversal de cada placa cruza a cada S_i exactamente dos veces.

Ahora, Si $k = 1$, entonces $S_1 = S'$; recordemos que S' admite discos de compresión superior; así que existe un arco transversal l de $L(\xi_P)$ que cruza a S' mas de dos veces (por lo menos cuatro veces), lo cual contradice que S' sea normalmente paralelo a ∂B^3.

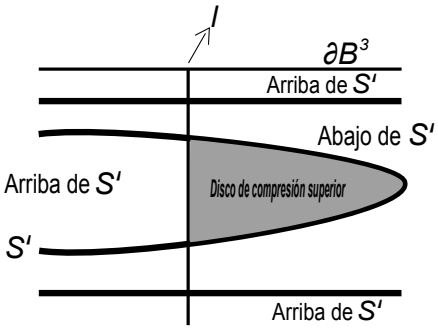


Figura 5.8

Supongamos que $k \geqslant 2$. Sin perdida de generalidad podemos asumir que S_1 es la esfera mas exterior de la colección. Sea S_2 la próxima esfera. Consideremos la parte superior U de B^3 con respecto a S_2. Presentamos a U como $S_2 \times I$ tal que $U \cap L = E \times I$, donde $E = S_2 \cap L$ y es tal que

- $E \times \{0\} = E \subset S_2$.

- $E \times \{1\} \subset \partial B^3$.

Como S_2 es paralela a ∂B^3, entonces cada arco transversal de L cruza a S_2 exactamente dos veces. Por lo tanto E es un conjunto finito de S_2. Sea D^2 un disco en S_2 que contiene a E y no tiene puntos en común con los tubos, esto es; $D^2 \subset S'$. De modo que cada arco transversal de L cruza a D^2 exactamente dos veces, pues $D^2 \subset S_2$. Note que una vecindad pequeña de D^2 en la parte superior U pertenece a la parte inferior de S_1.

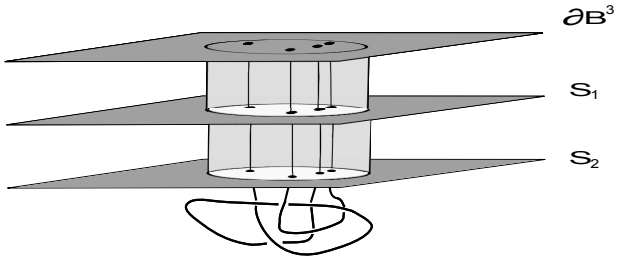


Figura 5.9

Sea $G = D^2 \times I$, claramente G es un cilindro y es tal que:

- $\partial_0 G = D^2 \times \{0\} \subset S_2$
- $\partial_1 G = D^2 \times \{1\} \subset \partial B^3$
- $U \cap L = E \times I \subset G$

Sea $C = L \setminus (E \times (0, 1])$, claramente C es una colección finita de de arcos disjuntos. Además todos los puntos extremos de C pertenecen a $\partial_0 G$. También podemos notar que C esta contenido en la parte inferior de S'. Por lo tanto C se aproxima a S' por debajo y además los puntos extremos de C son los únicos puntos en $C \cap G$, pues G esta contenido en la parte superior de S'.

Por lo tanto $G \cup C$ es una representación de un tronco con corona de L, de modo que L admite un tronco inverso con respecto a S'. Esto contradice las propiedades de $S' \cup L$. Así concluimos que al menos una de las S_i contiene un cuadrilátero o un octágono.

$\square$

Capítulo 6

Algoritmo para Reconocer S^3

6.1. Esferas y bolas homológicas

Definición 6.1. *Sea M una variedad cerrada. Diremos que M es una esfera homológica si $H_1(M; Z) = 0$.*

Definición 6.2. *Sea M una variedad tal que $\partial M = S^2$. Diremos que M es una bola homológica si $H_1(M; Z) = 0$.*

Veamos algunas observaciones relacionadas con esferas homológicas y bolas homológicas

Observación.

1. *Todos los grupos homológicos de una esfera homológica o una bola homológica coinciden con los correspondientes grupos de homología de S^3 y B^3, respectivamente.*

2. *Partir una esfera homológica M a lo largo de una esfera $S^2 \subset M$, divide a M en dos bolas homológicas M_1 y M_2, tales que $\partial M_1 = S^2 = \partial M_2$.*

3. *Partir una bola homológica M a lo largo de un disco $D^2 \subset M$ embebido propiamente, divide a M en dos bolas homológicas M_1 y M_2, tales que $D^2 \subset \partial M_1$ y $D^2 \subset \partial M_2$.*

4. *Si una 3-variedad M contine un plano proyectivo entonces* $\mathrm{H}_1(M; Z) \neq 0$.

La primera observación se deduce del "teorema de dualidad de Poincare"(teorema 5.3.17 en [11]) y la proposición 5.2.17 de [11]. Las observaciones 2 y 3 se deducen como aplicación de la secuencia de Mayer-Vietoris. Usando el corolario 8.9 del capítulo 6 en [1] podemos justificar la observación 4.

Hay que mencionar que una esfera homológica no necesariamente es S^3. Ver ejemplo en la sección 8.4.1 de [9].

Lema 6.1. *Sea ξ_P una descomposición en asas correspondiente a una espina especial P de una esfera homológica M. Asumamos que existe una esfera 2-normal $S \subset \operatorname{Int} \xi_P \subset M$ que contiene al menos un cuadrilátero o un octágono. Entonces existen esferas homológicas M_1, M_2 y sus espinas casi simples P_1, P_2 tal que $M = M_1 \# M_2$ y*

$$c(P_1) + c(P_2) < c(P).$$

Las esferas M_i y las espinas P_i se pueden construir algorítmicamente.

Demostración. Como M es una esfera homológica, M es cerrado y por lo tanto existe una 3-bola D^3 tal que

$$M \setminus \operatorname{Int} D^3 = \xi_P.$$

Sea M_S la veriedad obtenida por cortar a M a lo largo de S. Nuevamente como M es una esfera homológica M_S corresponde a dos bolas homológicas, digamos M_1' y M_2'; es decir,

$$M_S = M_1' \cup M_2'$$

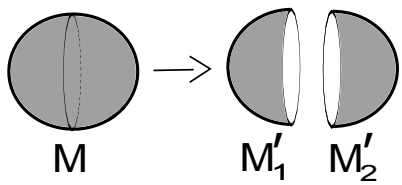


Figura 6.1

Ahora como $D^3 \cap \xi_P = \partial\xi_P = \partial D^3$ y $S \subset \operatorname{Int}\xi_P$ tenemos que $D^3 \cap S = \emptyset$ y como $D^3 \subset M$ entonces $D^3 \subset M_S$. Así que solo una de las bolas homológicas debe contener a D^3, sin perdida de generalidad supongamos que M_2' contiene a D^3. Sea $M_2'' = M_2' \setminus \operatorname{Int} D^3$, de modo que M_2'' tiene los mismo grupos de homología que $S^2 \times I$. Ahora como $S \subset \xi_P$ y S es 2-normal, S descompone las asas de ξ_P en asas del mismo indice; así que al cortar ξ_P a lo largo de S encontramos nuevas descomposiciones en asas ξ_P^1 y ξ_P^2.

De todo lo anterior tenemos lo siguiente:

1. Al cortar a M a lo largo de S obtenemos a $M_S = M_1' \cup M_2'$, luego

$$\begin{aligned} M_S \setminus \operatorname{Int} D^3 &= (M_1' \cup M_2') \setminus \operatorname{Int} D^3 \\ &= M_1' \cup (M_2' \setminus \operatorname{Int} D^3) \\ &= M_1' \cup M_2'' \end{aligned}$$

2. $M \setminus \operatorname{Int} D^3 = \xi_P$, y al cortar a ξ_P a lo largo de S se obtiene ξ_P^1 y ξ_P^2.

Así que las nuevas asas obtenidas al cortar al ξ_P a lo largo de S forman una descomposición en asas, $\xi_P^1 \cup \xi_P^2$, para $M_1' \cup M_2''$. Colapsando las bolas, vigas y placas de $\xi_P^1 \cup \xi_P^2$ a sus puntos de nucleo, arcos de nucleo y 2-celdas de nucleo, respectivamente, encontramos una espina P_S para $\xi_P^1 \cup \xi_P^2$, de modo que P_S es una espina para $M_1' \cup M_2''$. Ahora por el lema 3.4 P_S es una espina casi simple de $\xi_P^1 \cup \xi_P^2$, y por tanto de $M_1' \cup M_2''$. Como $\xi_P^1 \cup \xi_P^2$ no es conexo, sean P_1 y P_2'' las espinas de ξ_P^1 y ξ_P^2, respectivamente. De modo que $P_S = P_1 \cup P_2''$ y es tal que P_1 es espina casi simple de M_1' y P_2'' es una espina casi simple de M_2''.

Ahora si S es normal, por hipótesis S contiene al menos un cuadrilátero. Aplicando el lema 3.5 obtenemos que $c(P_1) + c(P_2'') = c(P_1 \cup P_2'') = c(P_S) < c(P)$. Ahora si S contiene al menos un octágono, obtenemos que $c(P_1) + c(P_2'') = c(P_1 \cup P_2'') = c(P_S) < c(P)$, Ya que al partir un vértice verdadero por un octágono, el vértice verdadero es destruido.

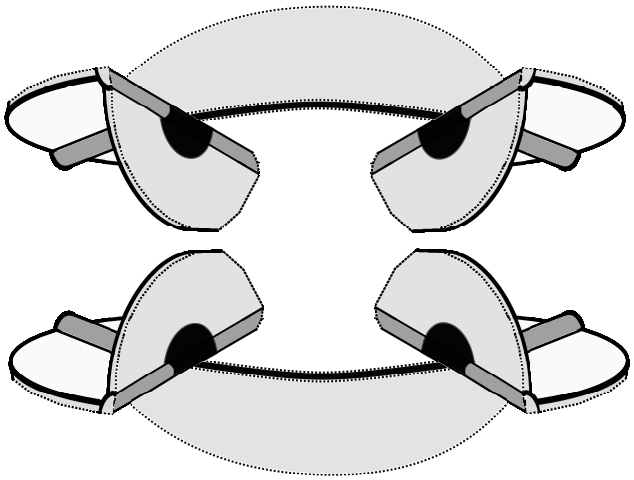


Figura 6.2

Por lo tanto en cualquiera de los casos anteriores

$$c(P_1) + c(P_2'') = c(P_1 \cup P_2'') = c(P_S) < c(P).$$

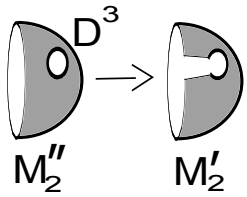


Figura 6.3

Sean M_1 la variedad obtenida por pegar una 3-bola por el borde a el borde de M_1' y M_2 la variedad obtenida por pegar una 3-bola por el borde a el borde de M_2'. Como M_1' y M_2' son bolas homológicas entonces M_1 y M_2 son esferas homológicas.

Ahora como P_1 es una espina casi simple para M_1' entonces P_1 es una espina casi simple para M_1. Construyamos ahora una espina casi simple para M_2. En efecto, recordemos que P_2'' es una espina casi simple de M_2'' y M_2'' tiene los mismos grupos de homológias que $S^2 \times I$. Sea P_2 la espina casi simple que se obtiene por perforar a P_2'' en una 2-componente, de modo que P_2 es una espina casi simple de la variedad que se obtiene por conectar las dos componentes de borde de M_2'' por medio de un tubo delgado que cruza la 2-componente agujerada de P_2'' en un disco meridional del tubo. Recordemos que las dos componentes de borde de M_2'' son esferas, de modo que al conectar sus componentes de borde por medio de un tubo la variedad obtenida tendra solo una componente de borde la cual sera una esfera; esto es, la variedad obtenida es homeomorfa a M_2'.

De modo que podemos decir que P_2 es una espina casi simple de M_2', por lo tanto P_2 es una espina casi simple de M_2.

Es claro que perforar una 2-componente de P_2'' no incrementa el número de vértices verdaderos. Por lo tanto

$$c(P_1) + c(P_2) < c(P).$$

$\square$

Lema 6.2. *Para cualquier espina casi simple P de una esfera homológica M existe una colección finita algorítmicamente construible de esferas homológicas M_i y sus espinas $P_i \subset M_i$, $1 \leq i \leq n$, tal que M es la suma conexa de $M_1, \ldots, M_n$, $\sum_{i=1}^{n} c(P_i) \leq c(P)$, y para cada i la espina P_i es o un punto o una espina especial.*

Demostración. Sea M' es una vecindad regular de P en M. Como M es una esfera homológica M' es una bola homológica.

PASO 1. Supongamos que P posee partes 1-dimensionales. Consideremos un arco ℓ en la parte 1-dimensional. Como M' es una vecindad regular de P en M, M' posee un tubo alrededor de ℓ, por lo tanto M' posee un disco propio $D \subset M'$ que intercepta transversalmente a ℓ en un punto. D descompone a M' en dos bolas homológicas, de modo que M' es la suma conexa de estas dos bolas homológicas. Sus espinas casi simple se pueden obtener quitando ℓ de P.

PASO 2. Supongamos que P posee una 2-componente que contiene una curva cerrada simple l no trivial que preserva orientación. Como M' es una vecindad regular de P en M, l tiene una copia $l' \subset \partial M'$ y un tubo t que une a l con l' tal que $t \cap P = l$. Ahora como $\partial M' = S^2$, l' acota un disco $D' \subset \partial M'$. Sea $D = D' \cup t$, así construimos un disco $D \subset M'$ tal que $D \cap P = \partial D = l$. Ahora por el teorema 2.1 $M' \setminus P$ es homeomorfo a $\partial M' \times [0,1) = S^2 \times [0,1)$, y como $D \cap P = \partial D = l$ se tiene que D corta una 3-bola V en $M' \setminus P$. Si penetramos a V a través de un hueco en otra 2-componente de el borde libre de V, encontramos después de colapsar una nueva espina casi simple de M' con igual o menor número de vértices verdaderos.

PASO 3. Desarrollando los pasos 1 y 2 la cantidad de veces que sea posible, encontramos una colección finita de espinas casi simple P_i de bolas homológicas M_i'. Donde cada P_i no tiene partes 1-dimensionales (esto es, un poliedro simple), y no tiene 2-componentes que contengan curvas cerradas simples no trivial que preser-

va orientación, $1 \leq i \leq n$. Todo poliedro homológicamente trivial que posee estas propiedades es un punto ó especial.

Para completar llenamos los bordes de M_i' con 3-bolas y encontramos la colección de esferas homológicas M_i deseadas. Por construcción, M es la suma conexa de M_i.

$\square$

Lema 6.3. *Dada una 3-esfera homológica M, una espina especial P de M, y la correspondiente descomposición en asas ξ_P. Existe un algoritmo el cual determina si existe o no una esfera 2-normal S en M que contiene un cuadrilátero o un octágono.*

Si la respuesta es afirmativa, entonces el algoritmo construye una de estas esferas. Además esta esfera construida por el algoritmo resulta ser fundamental.

Demostración. Primero mostraremos que si ξ_P contiene un esfera 2-normal S que contiene un cuadrilátero o un octágono, entonces existe una esfera 2-normal S' que contiene un cuadrilátero o un octágono y además es una superficie fundamental. En efecto, si S es fundamental no hay nada que hacer. Supongamos que S no es fundamental, es decir, S puede ser expresada como suma de superficies fundamentales F_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ (pueden existir repeticiones de las F_i). Ahora claramente ninguna de las F_i es un plano proyectivo ya que el primer grupo de homología de un plano proyectivo es Z_2 y $\mathrm{H}_1(M; Z) = 0$. Ahora como la caracteristica de Euler de una esfera es 2, se debe cumplir que:

$$2 = \chi(S) = \sum_{i=1}^{n} \chi(F_i)$$

y como

$$\chi(F_i) = 2 - 2g_i \leqslant 2 \text{ donde } g_i \text{ corresponde al genero de cada } F_i.$$

De modo que existe al menos un i tal que $\chi(F_i) = 2$; es decir, al menos una de las F_i es una esfera. Sin perdida de generalidad supongamos que F_1 es una esfera.

Veamos que F_1 contiene al menos un cuadrilátero o un octágono. Supongamos lo contrario; es decir, todos los discos elementales en F_1 son triángulos. Por medio de una isotopía normal transformamos F_1 en F_1'; donde F_1' es una esfera muy cercana al borde $\partial\xi_P$ de tal forma que $F_1' \cap F_i = \emptyset$ para todo i, $i \neq 1$. Ahora como F_1 y F_1' son superficies equivalentes, se tiene que:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} F_i \\ &= F_1 + \sum_{i=2}^{n} F_i \\ &= F_1' + \sum_{i=2}^{n} F_i \end{aligned}$$

donde esta ultima suma genera una superficie no conexa (pues $F_1' \cap F_i = \emptyset$ para todo $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$). Lo cual es absurdo pues S es conexa. Por lo tanto F_1 contiene un cuadrilátero o un octágono. Así en calidad de S' tomamos a F_1.

Así el algoritmo puede se fácilmente construido. Ya que las superficies fundamentales son finitas, de modo que buscando entre ellas una 2-esfera que contenga un cuadrilátero o un octágono. □

6.2. El algoritmo

El algoritmo lo resumimos a continuación. Dada una triangulación T de una 3-variedad M, el algoritmo procede de la siguiente manera:

1. Se determina $H_1(M)$, el primer grupo de homología de M (por el teorema 11.5 de [7] los grupos de homología son computables).

   1.1. Si $H_1(M) \neq 0$, entonces M no es una 3-esfera y el procedimiento termina.

1.2. Si $H_1(M) = 0$ entonces se continua con el siguiente paso (en este caso M es una 3-*esfera homológica*).

2. Se construye una espina especial P para M, la cual es posible obtener por el teorema 2.2. (P es realmente una espina especial para $M \setminus B$ donde B es una 3-bola en M.)

3. Buscamos una 2-esfera 2-normal S en M que contenga un cuadrilátero o un octágono (la cual debe existir si M es una 3-esfera por el resultado de Rubinstein). Por el lema 6.3 existe un algoritmo que decide si M contiene o no contiene una esfera 2-normal que contenga un cuadrilátero o un octágono.

   3.1. Si S no existe, entonces M no es una 3-esfera y entonces el procedimiento termina.

   3.2. Si S existe, se usa S para particionar P en espinas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de 3-esferas homológicas $M_1, M_2, \ldots, M_n$, de tal manera que

   (i) cada P_i es una espina especial ó es un punto (si P_i es un punto, entonces M_i es una 3-esfera), y

   (ii) M es la suma conexa de $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

   Esto es posible aplicando primero el lema 6.1, y luego si es necesario se aplica el lema 6.2 (las espinas resultantes de aplicar el lema 6.1 son casi simples, no se tiene certeza si son espinas especiales. Al aplicar el lema 6.2 se corrige este detalle y se convierten las espinas en especiales o en puntos).

4. (Paso recursivo) Para cada P_i, M_i obtenida en el paso anterior, si P_i es una espina especial (no es un punto) entonces se aplican a P_i, M_i recursivamente los pasos 3 y 4. Si se obtiene que cada M_i es una 3-esfera, entonces la 3-variedad M inicial es una 3-esfera, y de lo contrario no los es. (Es decir, si en todas las ejecuciones recursivas nunca se falla en encontrar una 2-esfera 2-normal, entonces la 3-variedad inicial es la 3-esfera).

Bibliografía

[1] Bredon, G. E *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, (1993).

[2] Haken, W *Theorie der Normalflachen*, (German) Acta, Math, **105**, 245-375 (1962).

[3] Hatcher, A *Algebraic Topology*, Second Edition, Cambridge University press, United States of America(2002).

[4] Markov, A *Unsolvability of the problem of homeomorphy*,(Russian), Proc. Internat. Congress Math. (1958), 300-306.

[5] Matveev, S. V *Algorithms for the recognition of the three-dimensional sphere*, (Russian) Mat. Sb., **186**, no. 5, 695-710 (1995).

[6] Matveev, S. V *Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifold*, Second Edition, Springer-Verlag, Russia (2007).

[7] Munkres, J. R. *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1984.

[8] Rubinstein, J. H *The solution to the recognition problem for S^3*, lectures, Haifa, Israel, May 1992.

[9] Stillwell, J *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Second Edition, Springer-Verlag, New York Inc(1980–1993).

[10] Thompson, A *Thin position and the recognition problem for S^3*, Math. Res. Lett., **1**, no. 5, 613-630 (1994).

[11] C. R. F. Maunder *Algebraic Topology*, Dover Publications, INC. Mineola, New York(1980)