Cálculo de la entropía de agujeros negros en función de las especies de partículas desde la perspectiva de un observador FIDO

David Leonardo Bernal Fino

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá D.C., Colombia
2025

Cálculo de la entropía de agujeros negros en función de las especies de partículas desde la perspectiva de un observador FIDO

David Leonardo Bernal Fino

Tesis presentada como requisito parcial para optar por el título de: Maestría en Física - Investigación
Magíster (M, MSc)

Director: Jose Robel Arenas Salazar
Profesor Titular
Bogotá D.C., Colombia - Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia
Línea de investigación: Termodinámica de agujeros negros
Entropía de Entanglement
Grupo de investigación:
Termodinámica de agujeros negros

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá D.C., Colombia
2025

Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo incondicional del profesor Robel Arenas quien, con su actuar humilde y sencillo, no solo me enseñó de física sino también los valores que todo científico debería practicar en su actuar profesional. También tengo gratitud total con mi familia que siempre me apoyó a pesar de las dificultades y con mis amigos que siempre estuvieron ahí para brindarme una mano.

Resumen

Cálculo de la entropía de agujeros negros en función de las especies de partículas desde la perspectiva de un observador FIDO

En el presente trabajo se realiza una comparación entre el cálculo de la entropía del cascarón negro por el método del colapso gravitacional y por la técnica de ‘‘Entanglement’’. Ambos métodos son acercamientos a una explicación formal de la entropía de Bekenstein - Hawking la cual es proporcional a un cuarto del área del horizonte de eventos y también al número de especies de partículas. En la sección 2 se exponen los temas fundamentales de la teoría para trabajar el tema. En la sección 3 se realiza la termodinámica del cascarón negro desde la dinámica del colapso gravitacional, pasando por el modelo de la pared de ladrillos que es precursor del modelo actual. En la sección 4 se realiza el cálculo de la entropía de entanglement partiendo de la formulación del ensamble de bosones libres en el vacío térmico, pasando por el formalismo de Umezawa - Takahashi hasta la integral de la entropía. Por último, en Discusión y conclusiones se expone un análisis de los modelos utilizados en el documento y se discute sobre el problema de las especies.

Palabras clave: Termodinámica, entropía, cascarón negro, colapso, estados de vacío, entanglement, observador FIDO, problema de las especies.

Abstract

Calculation of black hole entropy as a function of particle species from an FIDO observer perspective

In this paper, a comparison is made between the calculation of the black shell entropy using the gravitational collapse method and the entanglement technique. Both methods are approaches to a formal explanation of the Bekenstein-Hawking entropy, which is proportional to a quarter of the area of the event horizon and also to the number of particle species. Section 2 presents the fundamental topics of the theory for working on the subject. Section 3 presents the thermodynamics of the black shell from the dynamics of gravitational collapse, passing through the brick wall model, which is a precursor to the current model. Section 4 calculates the entanglement entropy starting from the formulation of the assembly of free bosons in the thermal vacuum, passing through the Umezawa-Takahashi formalism to the entropy integral. Finally, in the Discussion and Conclusions section, an analysis of the models used in the document is presented and the species problem is discussed.

Keywords: Thermodynamics, entropy, black shell, collapse, vacumm states, entanglement, FIDO observer, species problem.

Contenido

Agradecimientos II

Resumen III

Abstract IV

Contenido V

1 Objetivos 1
- 1.1 Objetivo general . . . 1
- 1.2 Objetivos específicos . . . 1

2 Introducción y marco teórico 2
- 2.1 El marco de referencia de Schwarzschild y sus patologías. . . . 2
  - 2.1.1 Trayectorias de rayos de luz . . . 3
  - 2.1.2 Coordenada tortuga . . . 5
  - 2.1.3 Coordenadas de Eddington - Finkelstein . . . 5
  - 2.1.4 Coordenadas de Kruskal - Szekeres . . . 7
  - 2.1.5 Tiempo en las coordenadas de Kruskal . . . 9
- 2.2 Ecuación de Klein - Gordon . . . 11
- 2.3 Ensamble gran canónico . . . 14

3 Termodinámica del colapso gravitacional 18
- 3.1 Dinámica del cascarón negro . . . 18
  - 3.1.1 Formalismo de Darmois - Israel . . . 18
  - 3.1.2 Ecuación de movimiento del cascarón . . . 26
  - 3.1.3 Solución Arenas-Castro a la ecuación de movimiento . . . 30
- 3.2 El modelo de la pared de ladrillos . . . 31
  - 3.2.1 Número total de modos de onda . . . 32
  - 3.2.2 Energía libre de Helmholtz . . . 33
  - 3.2.3 Entropía . . . 34
  - 3.2.4 Cálculo de la energía total . . . 35
- 3.3 Termodinámica del cascarón negro . . . 37
  - 3.3.1 Cálculo de la entropía del cascarón negro . . . 37
  - 3.3.2 Termodinámica del cascarón en colapso . . . 41

4 Entropía de Entanglement de Cascarones Negros **43**
4.1 Formalismo de Umezawa - Takahashi 43
4.1.1 Espacio de Fock 45
4.1.2 Ensamble de bosones libres 46
4.2 Campos térmicos en el espacio tiempo de Kruskal 47
4.2.1 Estados de vacío en el espacio maximalmente extendido 47
4.2.2 Densidad de energía térmica 51
4.2.3 Entropía de entanglement de Black Shells 57

5 Discusión y conclusiones **64**
5.1 Entropía a través de los modelos 64
5.2 El problema de las especies en el cascarón negro 66

A Apéndice : Método WKB **71**

Referencias Bibliográficas **74**

1 Objetivos

1.1 Objetivo general

- Describir la entropía de un black shell con respecto a un observador FIDO en función del número de especies.

1.2 Objetivos específicos

- Evidenciar la indistinguibilidad observacional entre un agujero negro con un ‘‘Black Shell"
- Mostrar que la entropía que se asocia al agujero negro se encuentra ubicada en el ‘‘Black shell"
- Mediante la mecánica estadística, calcular la entropía del ‘‘Black Shell"

2 Introducción y marco teórico

Toda esta sección tiene como referencia a los libros *Carrol* [2004], *Frolov & Novikov* [1997], *Charles W. Misner & Wheeler* [1973] y para la parte del espacio - tiempo maximalmente extendido se toma como referencia *Arenas* [2023] del curso de la Universidad Nacional de Colombia titulado ''Agujeros negros cuánticos''.

2.1 El marco de referencia de Schwarzschild y sus patologías.

La métrica de Schwarzschild describe un espacio-tiempo estático, esféricamente simétrico y en el vacío. Este elemento de línea se puede expresar en unas coordenadas generalizadas de las coordenadas esféricas usuales, a las cuales se les adiciona una coordenada temporal, con el objetivo de hacer una descripción en el marco de la relatividad general. Dentro del campo de la astrofísica, esta métrica puede describir el exterior de un objeto esférico masivo y su interacción gravitacional con cualquier otro objeto en el universo. Cada una de las coordenadas del sistema de referencia de Schwarzschild tiene un rango específico:

$$\begin{aligned} t &\in (-\infty, \infty) \\ r &\in [r_s, \infty) \\ \theta &\in [0, 2\pi] \\ \phi &\in [0, \pi]\,, \end{aligned} \tag{2-1}$$

donde $r_s = 2M$ es el radio de Schwarzschild. Explícitamente la métrica toma la siguiente forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2-2}$$

Esta métrica es bien comportada en los rangos presentados en (2-1). En particular, este espacio-tiempo puede describir un agujero negro, un objeto matemático en el cual surgen dos divergencias, una singularidad coordenada en $r = 2M$ (que es el horizonte de eventos) y otra en el punto coordenado $r = 0$ que es una singularidad irremovible. Así, cualquier tratamiento o teoría física que considere el sistema coordenado provisto por la métrica de Schwarzschild tiene como patología fundamental el punto $r = 0$, que es la principal dificultad que presenta esta métrica. Desde que nos mantengamos al margen de ella no debe representar un problema para toda la física que ocurre en el resto de la variedad ($r > 0$). La otra es una singularidad coordenada que diverge en el radio gravitacional (o radio de Schwarzschild donde $r = 2M$), es decir la parte temporal de la función métrica se hace cero y la parte radial diverge.

La estructura matemática fundamental para describir un espacio-tiempo es la métrica. En particular, al ubicarnos en coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) la forma matricial de la métrica de Schwarzschild se ve de la siguiente forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\theta} & g_{t\phi} \\ g_{rt} & g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ g_{\theta t} & g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi t} & g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(1-\frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2(\phi) \end{bmatrix}. \tag{2-3}$$

Gracias a la simetría de la métrica es posible considerar cambios nulos en los elementos angulares, es decir, $(d\theta = d\phi = 0 \rightarrow d\Omega = 0)$ y omitirlos en adelante. Esto es equivalente a decir que en cada punto coordenado (t, r) representa una 2-esfera. En este espacio-tiempo es posible ubicar partículas prueba y preguntarnos sobre su movimiento inercial, es decir, su movimiento geodésico. Como sabemos de la existencia de la singularidad coordenada en $r = 2m$, es interesante preguntarse sobre el destino de estas partículas prueba al acercarse a esta singularidad. El hecho de que la partícula atraviese el horizonte de eventos no implica que sufra algún cambio en su trayectoria geodésica. Son los observadores externos los que dejamos de ver cualquier tipo de evolución en el estado de movimiento de la partícula. En lo que sigue, se estudiará cualitativamente este comportamiento.

2.1.1 Trayectorias de rayos de luz

Los fotones viajan sobre curvas nulas en donde $ds = 0$. Por consiguiente, se puede despejar la trayectoria de esas partículas usando (2-2) obteniendo lo siguiente:

$$\frac{dt}{dr} = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}, \tag{2-4}$$

para un r grande la pendiente se acerca a ± 1, como ocurre en el espacio tiempo de Minkowski. Esto ocurre debido a que el espacio-tiempo de Schawrzschild es asintóticamente plano. Sin embargo, se evidencia que cuando se aproxima a $r = 2M$ se tiene que $\frac{dt}{dr} \rightarrow \pm\infty$ lo cual implica que el elemento de línea se vuelve como de tiempo, los conos de luz se cierran completamente y cualquier posible trayectoria que implique salir resulte imposible. También sucede que, visto desde un observador en el infinito, mientras el rayo de luz se acerca al radio de Schwarzschild parece que nunca llega a éste, al menos en este sistema de coordenadas se acerca asintóticamente al horizonte de sucesos. Al integrar la expresión (2-4) se obtiene la siguiente ecuación y su correspondiente gráfica:

$$t = \pm\left[r + 2Mln(r-2M)\right] \tag{2-5}$$

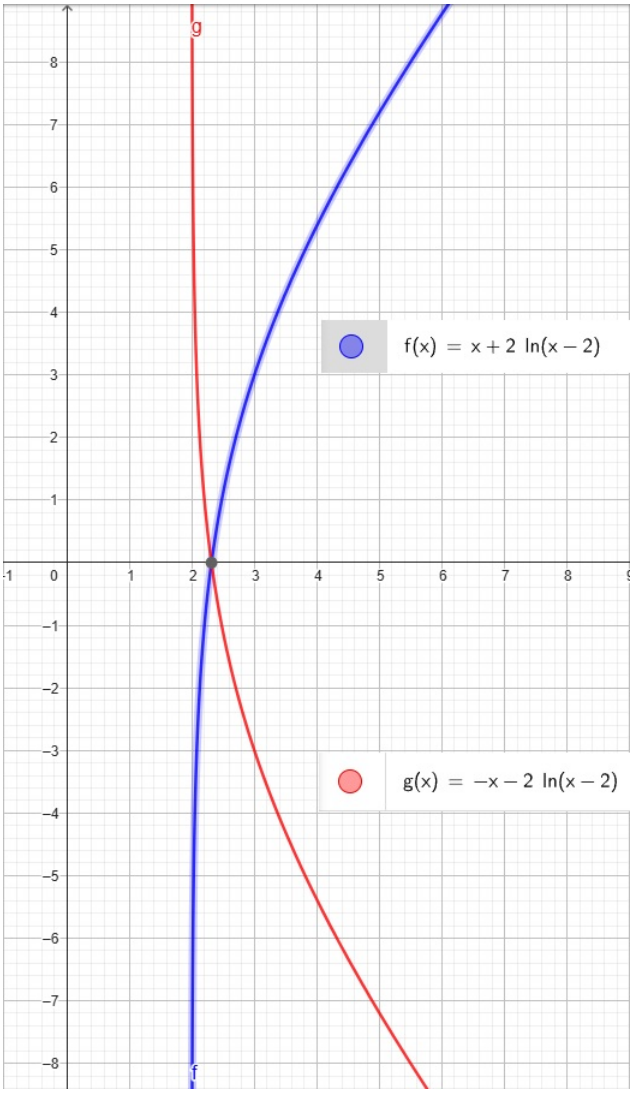

Figura 2-1: Gráficas de la trayectoria de los rayos de luz (2-5) que se acercan o se alejan del radio gravitacional $r = 2M$, donde $M = 1$. Realizada en Geogebra.

La solución positiva (azul en la figura **2-1**) muestra la trayectoria de los fotones que se encuentran en la última trayectoria posible que pueden salir desde el radio de Schwarzschild. Estos salen después de un tiempo infinito y tender asintóticamente asintóticamente a una trayectoria en el espacio-tiempo plano. Así mismo, la solución negativa (roja en la figura **2-1**) muestra la trayectoria de fotones que caen desde el infinito, como ocurre en el espacio plano al estar lejos de la fuente recorren una trayectoria recta. Debido a que se acercan asintóticamente al radio de Schwarzschild, en la gráfica se ve que les toma un tiempo infinito alcanzar $r = 2M$.

Así, las partículas que caen al agujero negro parecen congelarse en el tiempo justo cuando se encuentran sobre el horizonte de sucesos $r = 2M$ visto desde un observador en lo suficientemente lejos (''as if he felt ashamed for doing something as stupid as entering a black hole'' *Carrol* [2004]). Pero, la aparente inhabilidad de alcanzar el radio de Schwarzschild no ocurre si estamos en el marco de la partícula de prueba y el rayo de luz no tiene problema alguno para cruzar el horizonte de eventos y entrar al agujero negro. Desde el observador en el infinito se puede llegar a una interpretación incompleta de la parte matemática de este problema donde la métrica no contiene la información de lo que sucede con las partículas sobre el horizonte

ni cuando lo cruzan. Así, se encuentra una motivación para definir un marco de referencia con un sistema de coordenadas diferente que pueda expresar toda la física en un solo diagrama.

2.1.2 Coordenada tortuga

El problema con el marco de referencia de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) es que el término de la métrica:

$$g_{rr} = f(r)^{-1} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tag{2-6}$$

genera una divergencia en el elemento de línea ds^2 sobre el radio de Schwarzschild ya que, a diferencia de $g_{tt} = f(r)$ que se hace cero cuando $r = 2M$, en g_{rr} hay una división por cero. Por el camino de los rayos de luz también nos lleva a una divergencia ya que $dt/dr \to \infty$ a lo largo de las geodésicas radiales nulas que se aproximan a $r = 2M$. Avanzar en la dirección r se vuelve más y más lento con respecto a la coordenada t a medida que nos acercamos a $2M$ por lo que, si pudiéramos recoger ese comportamiento de "lentitud" en una nueva coordenada tal vez tendríamos un avance en la dirección de encontrar un sistema de coordenadas que construyan un marco de referencia que describa todas las trayectorias de las partículas sin patologías en la métrica. Podemos intentar de arreglar este problema reemplazando r con una coordenada que se mueva más despacio a lo largo de las geodésicas nulas, definiendo la coordenada "tortuga" r^* de la siguiente forma:

$$r^* = r + 2Mln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \quad \longrightarrow \quad dr = f(r)dr^* \tag{2-7}$$

El logaritmo tiene la función de hacer aparecer $f(r)$ en el diferencial de la coordenada tortuga para que al reemplazar en la métrica se cancele el $f(r)^{-1}$ y, en términos de la coordenada tortuga, la métrica de Schwarzschild se convierta en:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(-dt^2 + dr^{*\,2}\right) \tag{2-8}$$

Con este cambio de variable se resuelve un problema con respecto a los rayos nulos y es que, cuando $ds = 0$, entonces $dt = \pm r^*$, lo que retira la divergencia en el diagrama tiempo vs distancia y se llega a la métrica de Minkowski. Sin embargo, por este cambio amigable hay que pagar un precio el cual es que la superficie de interes en $r = 2M$ se ha enviado hasta menos infinito. Es decir, se arregló el problema por el lado de las trayectorias nulas pero surgió un nuevo problema con la coordenada sobre el radio de Schwarzschild.

2.1.3 Coordenadas de Eddington - Finkelstein

Ahora se cambia la coordenada temporal por una nueva que traiga información tanto de t como de r (implícitamente a través de r^*):

$$v = t + r^* \quad \longrightarrow \quad dv = dt + dr^* = dt + f(r)^{-1}dr \tag{2-9}$$

Retomando la coordenada radial original r pero reemplazando el tiempo coordenado con el nuevo tiempo v la métrica resulta:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + (dvdr + drdv) \tag{2-10}$$

Aquí se ve un resultado sustancial y es el hecho que, a pesar que el coeficiente métrico g_{vv} se cancela en el radio de Schwarzschild, no hay una divergencia real ya que no hay divisiones por cero. Así se ve de una vez por todas que sobre el radio de Schwarzschild existe una singularidad coordenada solo en las coordenadas de Schwarzschild originales. En este nuevo sistema de coordenadas la condición para las curvas radiales nulas se da por:

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & \text{Curvas radiales nulas entrantes,} \\ 2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & \text{Curvas radiales nulas salientes.} \end{cases} \tag{2-11}$$

En este sistema de coordenadas los conos de luz permanecen bien comportados incluso sobre el radio de Schwarzschild y esa superficie es un valor coordenado finito. Así, no hay problema en trazar los caminos de las trayectorias nulas o como de tiempo a través de la superficie. En el sistema de coordenadas (v, r) se puede cruzar el horizonte de eventos en caminos dirigidos al futuro pero no se puede cruzar en caminos dirigidos al pasado. Esto no parece razonable desde el punto que se busca una solución independiente del tiempo. Para ver las trayectorias que se dirigen hacia el pasado se define la variable u de la siguiente forma:

$$u = t - r^* \quad \longrightarrow \quad du = dt - dr^* = dt - f(r)^{-1} dr \tag{2-12}$$

Podemos escoger u en vez de v, para tal caso la métrica resulta idéntica a la que tiene solo v pero donde esta v resulta u y tiene un menos en el paréntesis de los productos cruzados entre du y dr:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - (dudr + drdu) \tag{2-13}$$

Ambas, u y v conforman el conjunto de coordenadas conocidas como ‘‘Eddington - Finkelstein’’. Desde esta métrica si se puede pasar el horizonte de eventos a lo largo de curvas dirigidas al pasado. Ahora surge un hecho que puede resultar sorprendente: Se pueden seguir curvas dirigidas al futuro o al pasado que atraviesen el radio de Schwarzschild pero se llega a lugares diferentes. Esto, de alguna manera, es de esperar desde que las definiciones de las coordenadas de Eddington-Finkelstein en donde se mantiene constante v y se hace decrecer a r, se llega a un tiempo que diverge (tiende a infinito). Por otro lado, si se mantiene u constante y se decrece r, se llega a un tiempo que tiende a menos infinito. Así, hay que extender el espacio-tiempo en dos direcciones diferentes, una hacia el futuro y otra hacia el pasado.

Este nuevo sistema se encuentra naturalmente adaptado a las geodésicas nulas que caen al agujero negro y se encuentran caracterizadas por las rectas $v = \mathbf{cte}$ que entran, mientras que las salientes del agujero negro satisfacen $u = \mathbf{cte}$. Cambiando ambas coordenadas (t y r) por (u y v) se tiene el nuevo elemento de línea:

$$ds^2 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(dvdu + dudv) \tag{2-14}$$

En donde r y t están definidas por las siguientes fórmulas:

$$\frac{1}{2}(v-u) = r^* = r + 2M\ln\left(\frac{r}{2M}-1\right) \;\rightarrow\; dr = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)(dv-du) \tag{2-15}$$

$$t = \frac{1}{2}(v+u) \;\rightarrow\; dt = \frac{1}{2}(dv+du) \tag{2-16}$$

En este punto, lamentablemente, se ha reintroducido la ‘‘degeneración’’ inicial ya que, en estas coordenadas la localización de $r = 2M$ es infinitamente lejos. Es decir, sobre el radio de Schwarzschild se tiene $v = -\infty$ y $u = \infty$. Así, la siguiente tarea es cambiar las coordenadas a unas que traigan esos infinitos hasta puntos finitos y poder, así, hacer un análisis correcto sin singularidades no esenciales.

2.1.4 Coordenadas de Kruskal - Szekeres

Con el objetivo de traer los infinitos que surgen cuando $r = 2M$ en las coordenadas v y u según los puntos a los cuales divergen, se aplican las siguientes sustituciones con funciones exponenciales:

$$V = e^{v/4M} \tag{2-17}$$

$$U = -\,e^{-u/4M} \tag{2-18}$$

Las cuales, en términos de las coordenadas originales t y r se definen como:

$$V = \left(\frac{r}{2M}-1\right)^{1/2} e^{(r+t)/4M} \tag{2-19}$$

$$U = -\left(\frac{r}{2M}-1\right)^{1/2} e^{(r-t)/4M} \tag{2-20}$$

Con estas coordenadas, la métrica de Schwarzschild toma la siguiente forma:

$$ds^2 = -\frac{16M^3}{r}e^{-r/2M}(dVdU + dUdV) \tag{2-21}$$

Con este sistema de coordenadas se puede evidenciar que $r = 2M$ no representa una singularidad real, es decir, un punto en el que se pierda información de la física de las partículas que cruzan el radio gravitacional del agujero negro. Ambas coordenadas U y V son coordenadas nulas, lo que se puede ver con sus derivadas parciales que son vectores nulos $\partial/\partial v'$ y $\partial/\partial u'$. Pero, sería más amigable usar unas coordenadas que tengan la misma naturaleza que las coordenadas de Schwarzschild, donde hay una como-d- tiempo y una como-de-espacio, para poder realizar interpretaciones físicas un poco más aterrizadas. Para esto, podemos definir otras coordenadas basadas en U y V que tengan las cualidades que se desean:

$$T = \frac{1}{2}(V+U) = \left(\frac{r}{2M}-1\right)^{1/2} e^{r/4M}\sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{2-22}$$

$$Z = \frac{1}{2}(V-U) = \left(\frac{r}{2M}-1\right)^{1/2} e^{r/4M}\cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{2-23}$$

Aquí T toma el rol de la coordenada temporal, que además es como de tiempo, y Z toma el rol de la coordenada espacial, que además es como de espacio. No se toma R para guardar la letra para otras variables más adelante. Con estas coordenadas la métrica toma la forma:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \left(-dT^2 + dZ^2\right) + r^2 d\Omega^2 \tag{2-24}$$

Donde r esta definido implícitamente como:

$$T^2 - Z^2 = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{r/2M} \tag{2-25}$$

Este sistema de coordenadas (T, R, θ, ϕ) se llaman las coordenadas de Kruskal-Szekres. Con estas nuevas coordenadas las curvas nulas radiales lucen como el espacio plano (Minkowski) en el infinito: $T = \pm Z + \mathbf{cte}$. Estas coordenadas presentan una enorme ventaja y ganancia ya que, a diferencia de las coordenadas de Eddington-Finkelstein (y la coordenada tortuga por si sola), el horizonte de eventos en $r = 2M$ no esta infinitamente lejos ni contiene divergencias en la métrica. De hecho, esta bien definido por: $T = \pm Z$, lo cual es consistente con que sea una superficie nula. Más generalmente, se puede considerar las superficies de radio constante $r = \mathbf{cte}$ de la siguiente forma:

$$r = \mathbf{cte} \;\longrightarrow\; T^2 - Z^2 = \mathbf{cte} \tag{2-26}$$

Lo que resulta ser hipérbolas en el plano Z-T. Además, las superficies constantes t están dadas por:

$$t = \mathbf{cte} \;\longrightarrow\; \frac{T}{Z} = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{2-27}$$

Las cuales definen lineas rectas que pasan a través del origen con una pendiente de la función tangente hiperbólica. Dichas lineas rectas empiezan horizontales cuando $t = 0$ y se van inclinando a medida que t avanza hasta infinito y la tangente tiende a ± 1 donde se resulta otra vez en $T = \pm Z$. Dicha superficie en $(t \to \pm\infty)$ es de hecho $r = 2M$, el radio de Schwarzschild.

Singularidades no esenciales

Una singularidad no esencial es aquella en la que ninguna cantidad escalar formada con el tensor de Riemann se vuelve singular, es decir que diverja en algún punto del espacio. Esto implica que los invariantes escalares derivados del tensor de Riemann, como el escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{2-28}$$

permanecen finitos. En esencia, estas singularidades resultan ser aparentes ya que no representan una patología física inherente sino que son artefactos de las coordenadas elegidas por lo que pueden eliminarse mediante un cambio de coordenadas. El tensor de Ricci se obtiene contrayendo el tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \tag{2-29}$$

y los componentes del tensor de Riemann se calculan a partir de los símbolos de Christoffel $\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}$. Si se calcula el tensor de Riemann sobre el horizonte de eventos $r = 2M$ y se contrae para encontrar el tensor de Ricci se encuentra que todos son cero. Con lo anterior, al trazar el tensor de Ricci para encontrar el escalar se encuentra que ese escalar es cero lo que es una cantidad finita que no diverge y no existe una singularidad esencial en ese punto del espacio. Esto indica que es una singularidad removible mediante un cambio de coordenadas. Por ejemplo usando las coordenadas de Kruskal en donde la métrica se extiende analíticamente a través de $r = 2M$, se evidencia en la métrica 2-21 que no hay divergencias si se ubica en el radio de Schwarzschild.

2.1.5 Tiempo en las coordenadas de Kruskal

Nótese que a este punto surge un hecho y es que, para los efectos de la interpretación física, tenemos más de una variable que puede ser interpretada como el tiempo. Para empezar, no se ha descartado el tiempo de las coordenadas de Schwarzschild completamente, se esta utilizando como un parámetro de las coordenadas de Kruskal. Así mismo, en las coordenadas de Kruskal se definió una variable de forma que su naturaleza fuera ‘‘como de tiempo’’, y se le llamó T con el objetivo de sugerir que hereda el rol del tiempo como el parámetro que marca la evolución en las geodésicas de la variedad. Por otro lado, las coordenadas nulas U y V también son de alguna forma tiempos debido a que contienen las variables t y r en sus definiciones por lo que no son exclusivamente tiempos o distancias pero si contienen ambos la información de la evolución de las geodésicas en la variedad. Tampoco excluimos las variables nulas U y V ya que coinciden con los horizontes de eventos en el diagrama de Kruskal representando el límite entre las trayectorias ‘‘como de tiempo’’ y ‘‘ como de espacio’’. Además de todas las variables que pueden ser identificadas como tiempos, hay otro hecho y es que de las superficies de radio constante $r = \mathbf{cte}$ resultan en hipérbolas las cuales tienen la siguiente forma:

$$\frac{Z^2}{a^2} - \frac{T^2}{a^2} = 1 \tag{2-30}$$

La expresión anterior surge de tomar las definiciones (2-23) y (2-22), elevarlas al cuadrado, restarlas y definir la constante a como:

$$a^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} \tag{2-31}$$

En el desarrollo que lleva a la expresión (2-30) se usa la identidad $\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1$ lo que lleva a que desaparezca el tiempo de Schwarzschild de la ecuación y resulte independiente del tiempo. Podemos ver que dichas hipérbolas resultan en trayectorias de partículas donde no varía su distancia de Schwarzschild r para todos los tiempos, es decir que son trayectorias estables entorno a la singularidad. Siendo así, moverse en el diagrama de Kruskal sobre una de las ramas de las hipérbolas es morverse en dirección del tiempo. De hecho, en la región derecha avanzar en la dirección de abajo hacia arriba implica avanzar hacia el futuro en el tiempo. En el diagrama **2-2** se ven más claro estas ideas.

En el diagrama **2-2** se ven las ramas de la hipérbola en las regiones I y III (en R y L), en donde la partícula que sigue esa trayectoria permanece a una distancia constante de la singularidad. Sin embargo, el tiempo avanza en la dirección entre un evento posicionado en el punto A hacia un evento posicionado en el punto B. El hecho evidente que la hipérbola tiene dos ramas lleva a otro hecho para nada evidente y es que en la rama izquierda también esta corriendo el tiempo pero aquí ocurre algo interesante: No es el mismo tiempo. El que no haya un tiempo único implica una dificultad al momento de construir una teoría sobre esta geometría que se está planteando. Siendo así, en este nuevo conjunto de coordenadas vale la pena preguntarse por la naturaleza de las coordenadas que se han definido.

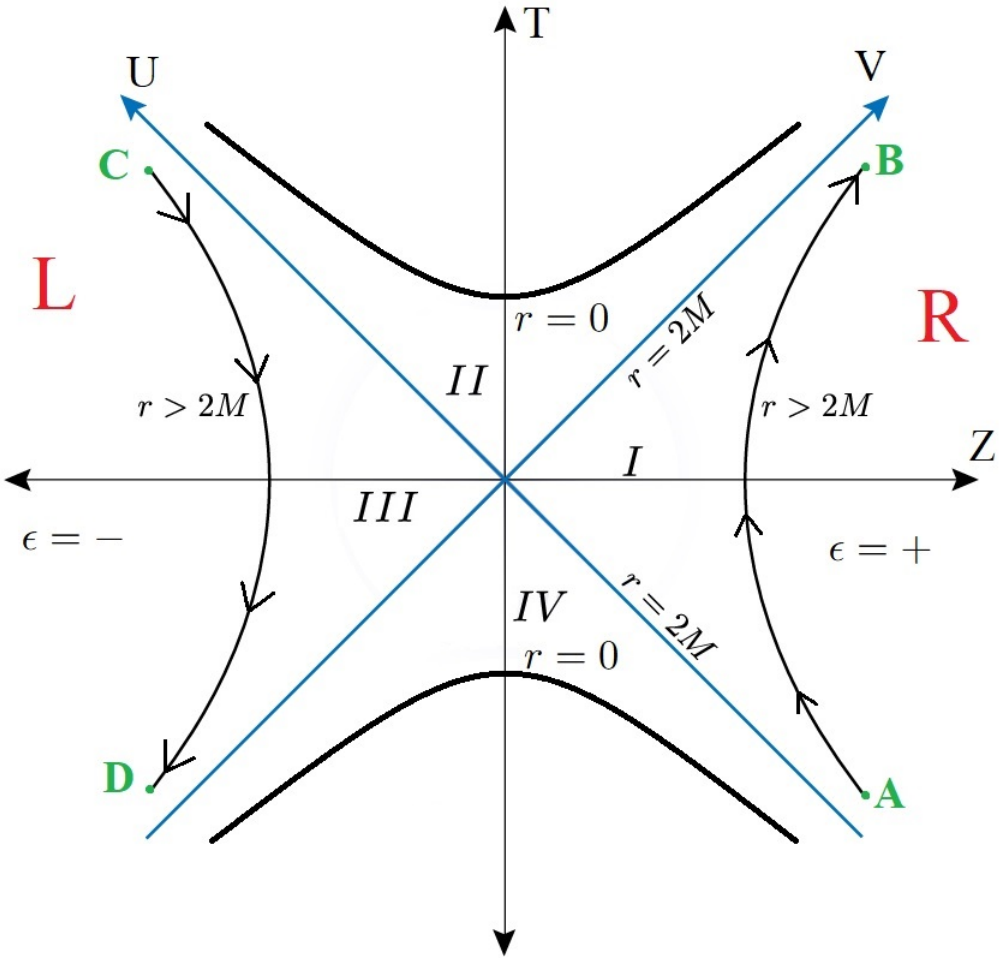

Figura 2-2: Diagrama del espacio tiempo de Kruskal en donde se identifican las variables nulas U y V, así como se establece la dirección del tiempo de Schwarzschild y se encuentra su dualidad debido a la expansión maximal.

Para resolver el dilema de los tiempos hay que distinguirlos entre regiones y plantear un nuevo tiempo global t_ϵ en donde la nueva variable ϵ solo puede tomar dos valores: +1 o -1. Esta definición de la variable ϵ es para poder ubicar cualquier evento que se quiera trabajar en alguna parte del diagrama, si esta en la región R o en la región L. No se van a considerar las regiones II ni la IV ya que dichas regiones implican atravesar el horizonte de eventos. Ahora, este nuevo tiempo global t_ϵ va a conectar la variable temporal en distintas regiones lo cual resulta imposible considerando los números reales pero, haciendo una extensión a los números complejos de la variable t_ϵ definida de la siguiente forma:

$$t_\epsilon = \begin{cases} t + ib & \text{si } \epsilon = +, \\ t - ib & \text{si } \epsilon = - \end{cases} \tag{2-32}$$

Donde b es el valor de lo que se desplaza en el eje imaginario del plano complejo. Con esta definición del tiempo se establece el hecho que ambos tiempos van en direcciones opuestas. De hecho, a lo largo del tiempo de Kruskal T ve que mientras un tiempo va hacia el futuro (el tiempo de la región R), el otro tiempo va hacia el pasado (el tiempo de la región L).

Se define ahora la siguiente función:

$$\Theta_\epsilon = \frac{1}{2}\left[\Theta(-\epsilon U) + \Theta(\epsilon V)\right] \tag{2-33}$$

La utilidad de la función anterior esta en el hecho que nos ayudará a ubicarnos en el espacio tiempo de Kruskal ya que la función toma valores distintos dependiendo de la región del diagrama donde nos ubiquemos. Dentro de la función se usa la tradicional función paso de Heaviside la cual es igual a cero cuando su argumento es menor o igual a cero, y toma valor igual a uno si su argumento es mayor que cero. Siendo así, haciendo el análisis en las regiones R y L, se puede ver lo siguiente: En la región R la variable nula U toma valores menores a cero (es decir que es negativa) mientras que la variable nula V toma valores mayores a cero (es positiva) haciendo que en la nueva función θ_ϵ, en la primera función escalón tengamos un valor positivo y en la segunda también por lo que ambas sumadas dan 2 y la función toma el valor 1. A continuación se hace el cálculo para R y para L:

$$\Theta_{\epsilon=+1}(R) = \frac{1}{2}\left[\Theta(-(\epsilon=+1)(-|U|)) + \Theta((\epsilon=+1)(|V|))\right] = \frac{1}{2}\left[1+1\right] = 1 \tag{2-34}$$

$$\Theta_{\epsilon=-1}(R) = \frac{1}{2}\left[\Theta(-(\epsilon=-1)(-|U|)) + \Theta((\epsilon=-1)(|V|))\right] = \frac{1}{2}\left[0+0\right] = 0 \tag{2-35}$$

$$\Theta_{\epsilon=+1}(L) = \frac{1}{2}\left[\Theta(-(\epsilon=+1)(|U|)) + \Theta((\epsilon=+1)(-|V|))\right] = \frac{1}{2}\left[0+0\right] = 0 \tag{2-36}$$

$$\Theta_{\epsilon=-1}(L) = \frac{1}{2}\left[\Theta(-(\epsilon=-1)(|U|)) + \Theta((\epsilon=-1)(-|V|))\right] = \frac{1}{2}\left[1+1\right] = 1 \tag{2-37}$$

Con esta función se puede definir de forma más conveniente el tiempo:

$$t_\epsilon = \left(t + \frac{1}{2}\frac{i\pi}{k_0}\right)\Theta_\epsilon + \left(t - \frac{1}{2}\frac{i\pi}{k_0}\right)\Theta_{-\epsilon} \tag{2-38}$$

Esta expresión ya representa un tiempo más global en el espacio - tiempo maximalemente extendido comparado con el inicial. Pero, quisiéramos considerar un tiempo que nos permita utilizarlo en una relación de orgotonalidad ubicando específicamente un evento en dicho espacio y poniéndole un nuevo subíndice primado:

$$t_{\epsilon\epsilon'} = \left(t + \frac{1}{2}\frac{i\pi}{k_0}\epsilon'\right)\Theta_\epsilon + \left(t - \frac{1}{2}\frac{i\pi}{k_0}\epsilon'\right)\Theta_{-\epsilon} \tag{2-39}$$

2.2 Ecuación de Klein - Gordon

Esta sección tiene como referencia a *Birrell & Davies* [1982].

La ecuación de Klein - Gordon surge de la necesidad de plantear una ecuación para partículas relativistas en el surgimiento de la mecánica cuántica. La relatividad especial es un ingrediente esencial en la mecánica cuántica ya que, a nivel microscópico las partículas se mueven a velocidades tan altas que se acercan a la velocidad de la luz. El planteamiento empieza considerando la energía relativista de una partícula:

$$E^2 = \vec{p}^{\,2}\,c^2 + m^2c^4 \tag{2-40}$$

Ahora, trayendo de la mecánica cuántica, la interpretación de los operadores momento y energía, se puede hacer el siguiente cambio en la ecuación:

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow E^2 \rightarrow -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2-41}$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla \longrightarrow \vec{p}^{\,2} \rightarrow -\hbar^2\nabla^2 \tag{2-42}$$

Reescribiendo la ecuación dejando cero a la derecha y aplicando los operadores enunciados, se tiene:

$$E^2 - \vec{p}^{\,2}\,c^2 - m^2c^4 = 0 \tag{2-43}$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\hbar^2\nabla^2 - m^2c^4 = 0 \tag{2-44}$$

Teniendo en cuenta que la derivada temporal, en notación tensorial, es la derivada de la componente cero y el operador nabla trae las derivadas espaciales (componentes 1, 2 y 3), entonces se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
-\partial_0^2 + c^2\hbar^2\partial_i^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} &= 0\\
(-1)\partial_t\partial_t + (1)\partial_x\partial_x + (1)\partial_y\partial_y + (1)\partial_z\partial_z - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} &= 0\\
\eta^{00}\partial_0\partial_0 + \eta^{11}\partial_1\partial_1 + \eta^{22}\partial_2\partial_2 + \eta^{33}\partial_3\partial_3 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} &= 0\\
\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} &= 0\\
\Box - B^2 &= 0
\end{aligned} \tag{2-45}$$

Note que se hizo $B = \frac{mc}{\hbar}$. Si se usan unidades naturales, es decir $c = \hbar = 1$, se tiene que $B = m$. Ahora, note que hasta este punto se tiene un operador. Este operador se convierte en una ecuación al ponerle una función o un campo:

$$\left(\Box - B^2\right)\psi = 0 \tag{2-46}$$

Lo anterior es considerando la signatura $(-+++)$, si se usa la signatura $(+---)$ la ecuación toma la forma:

$$\left(\Box + B^2\right)\psi = 0 \tag{2-47}$$

Para el resto del presente documento, se tomará la signatura $(-+++)$. Esta ecuación contiene segundas derivadas en función del tiempo y el espacio por lo que cualquier conjunto o combinación de soluciones tendrá un término exponencial de la siguiente manera:

$$\psi = \psi(t, \vec{r}) = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} \tag{2-48}$$

En donde $\omega^2 = k^2 + m^2$, con k los números de onda que enumeran los modos de oscilación de las posibles soluciones. Note que si escribimos la ecuación de la forma:

$$\Box\psi = B^2\psi \tag{2-49}$$

Lo cual puede ser interpretado como que B^2 es valor propio del operador D'Alembertiano con estado propio ψ. Podemos revisar recordando la definición del operador D'alembertiano que nos lleva a:

$$\Box\psi = \left[-E^2 + |\vec{p}|^2\right] Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t} = \left[-E^2 + |\vec{p}|^2\right]\psi = B^2\psi = m^2\psi \tag{2-50}$$

Recuperando las constantes que se hicieron igual a 1, se obtiene:

$$\Box\psi = \left[-\frac{E^2}{\hbar^2c^2} + \frac{|\vec{p}|^2}{\hbar^2}\right]\psi = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi \tag{2-51}$$

En donde se encuentra que $B = m$, recordando que las constantes fundamentales se hacen iguales a 1. La expresión anterior confirma lo sugerido en la ecuación de Klein - Gordon ya que corresponde con el planteamiento de la energía para una partícula relativista tratado al inicio del presente documento.

Ya encontramos una solución para la ecuación de Klein - Gordon, solo falta encontrar el factor constante A el cual aparece al aplicar algunas consideraciones extra, pero para el desarrollo que sigue no va a ser necesario. Ahora, para este tipo de ecuaciones existe el concepto de superposición la cual consiste en que se puede superponer todas las posibles soluciones a la ecuación como una combinación lineal de las mismas. Así, puedo escribir toda una familia de soluciones a la ecuación de la siguiente forma:

$$\psi(t,\vec{r}) = \sum_k a_k u_k \;\longrightarrow\; u_k = u_k(t,\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t} \tag{2-52}$$

En donde se consideran todas las posibles ecuaciones de onda parametrizadas por su número de onda k, que sean solución de la ecuación de Klein - Gordon. El número de onda esta relacionado con la frecuencia y la masa mediante:

$$\omega^2 = k^2 + m^2 \tag{2-53}$$

$$k = |\vec{k}| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2\right)^{1/2} \tag{2-54}$$

Donde k viene de la norma del vector número de onda cuyas componentes pueden tomar cualquier valor y ser tantas como tantas ondas haya en la superposición ($-\infty < k_i < \infty$), y tiene tantas componentes como dimensiones espaciales tenga el espacio (para un espacio de 3 dimensiones espaciales y una temporal, suma sobre las 3 dimensiones espaciales tomando $n = 4$).

Ahora, una solución completa incluiría la suma no solo de todos los posibles k sino también la combinación lineal de los estados complejos conjugados del estado que se esta considerando. Así, se va a expandir el campo y a establecer de la siguiente forma:

$$\phi(t,\vec{r}) = \sum_k \left[a_k u_k(t,\vec{r}) + a_k^\dagger u_k^*(t,\vec{r}) \right] \tag{2-55}$$

Por el momento el coeficiente a que expande cada una de las funciones, y sus conjugadas, no se han definido más allá de ser coeficientes de expansión. Pero, para teorías más completas que se enunciarán más adelante se identificarán como operadores por lo que también deben ser conjugados cuando acompañan la función conjugada y por eso se coloca la notación del hermítico conjugado $a^\dagger$.

Las funciones del conjunto de soluciones en las que se expande el campo de la ecuación de Klein - Gordon cumplen con la siguiente relación de ortogonalidad:

$$(u_k(t,\vec{r}), u_k^*(t,\vec{r})) = -i \int_\Sigma \left[u_k(t,\vec{r}) \partial_t u_k^*(t,\vec{r}) - u_k^*(t,\vec{r}) \partial_t u_k(t,\vec{r}) \right] dx^3 \tag{2-56}$$

Donde se integra sobre la superficie del espacio que se esta considerando, en este caso un espacio de 4 dimensiones en el cual se considera el tiempo constante ya que se hace la evaluación del campo en cada instante de tiempo.

2.3 Ensamble gran canónico

Esta sección tiene como referencia a *Pathria & Beale* [2011] y *W. Greiner & Stöcker* [1995].

En mecánica estadística se quiere modelar sistemas sobre los cuales suceden diversos tipos de fenómenos a diversos tipos de escalas. Todos esos fenómenos se encuentran conectados los unos de los otros y mantienen, de alguna forma, una jerarquía. Los fenómenos de escalas más grandes son vistos como consecuencia de fenómenos a escalas más pequeñas y así sucesivamente hasta las partículas fundamentales. Sabemos que la termodinámica nos plantea unas variables macroscópicas basadas en unos fenómenos microscópicos de las partículas del sistema que estemos trabajando con las condiciones que se estén trabajando: Sea aislado, abierto, cerrado, sólido, fluido, con procesos reversibles, irreversibles, etc. Siendo entonces que variables como el volumen, la presión y la temperatura, que son variables macroscópicas y determino para sistemas que se pueden construir en un laboratorio de secundaria, están determinadas por variables microscópicas como la energía interna de las partículas que conforman el sistema, la velocidad de las partículas, la densidad de partículas, su organización, etc.

Entonces, con el objetivo de facilitar el estudio de los sistemas compuestos se plantean los ensambles como un conjunto de subsistemas que se encuentran todos bajo las mismas condiciones y en su totalidad conforman el sistema total que se quiere trabajar. Si los sistemas están aislados, es decir, no interactúan entre sí, es un ensamble microcanónico. Ahora, cuando el sistema se encuentra en contacto con un baño térmico y puede intercambiar energía (y únicamente energía) con ese reservorio, se le llama un ensamble canónico. Ahora, el sistema que puede intercambiar partículas y energía con el reservorio se llama ensamble gran canónico. En particular es de alto interés el ensamble gran canónico ya que va a ser el que se va a aplicar en el presente documento.

Antes de definir el ensamble gran canónico, se considera un sistema aislado para el cual tenemos un valor de partículas y energía iniciales el cual es constante. Se divide ese sistema en dos subsistemas en donde la

suma de las magnitudes de ambos son las magnitudes del sistema global. Uno de los dos subsistemas será el sistema de estudio mientras que el otro subsistema corresponde a un baño térmico lo suficientemente grande con el que puede compartir partículas y energía el sistema de estudio. Entonces, denotamos con los subíndices T las magnitudes del sistema global, con los subíndices S las magnitudes del sistema en estudio y por último, con subíndices R las magnitudes del baño térmico (reservorio):

$$E_T = E_S + E_R \tag{2-57}$$
$$N_T = N_S + N_R \tag{2-58}$$

El sistema de estudio, sobre el que se construye el ensamble gran canónico, es un sistema abierto ya que puede intercambiar partículas y energía con el baño térmico, el otro sistema que hace parte del sistema total. Este planteamiento como dos subsistemas conectados entre sí que pueden intercambiar partículas y energía es equivalente a considerar el sistema de estudio inmerso en el reservorio. Aquí se trabaja con las variables T, V y μ las cuales son variables independientes. Se establece el potencial químico el cual establece la energía que implica añadir o retirar una partícula del sistema de estudio. Para un baño térmico lo suficientemente grande, que no ve cambiadas sus magnitudes globales al intercambiar energía y materia con el sistema en estudio, el potencial químico solamente depende de las propiedades del baño. Ahora, como el número de partículas y energía esta siendo alterado por los intercambios entre sistema y baño, se considera el valor promedio y el valor más probable de partículas y energía establecidos por el potencial químico y la temperatura respectivamente. Para un baño térmico descomunalmente grande comparado con el sistema en estudio se cumple que el número de partículas del baño es muy cercano al número de partículas del sistema global, mientras que con la energía ocurre algo similar:

$$\frac{E_S}{E_T} = 1 - \frac{E_R}{E_T} \to 0 \ , \quad E_R \approx E_T \tag{2-59}$$
$$\frac{N_S}{N_T} = 1 - \frac{N_R}{N_T} \to 0 \ , \quad N_R \approx N_T \tag{2-60}$$

El ensamble gran canónico considera la división del sistema de estudio en $\mathcal{N}$ sistemas idénticos entre los cuales se reparte la energía total del sistema de estudio y tienen valores propios de T, V y μ. Estos subsistemas puede tener un valor propio de partículas N_r y de energía E_s distinta para cada uno. Se denota n_{rs} el número de sistemas que en cualquier tiempo t tienen una cantidad de partículas N_r y un valor de energía E_s. Este planteamiento cumple con las siguientes condiciones:

$$\sum_{r,s} n_{r,s} = \mathcal{N}$$
$$\sum_{r,s} n_{r,s} E_s = E = \mathcal{N} U$$
$$\sum_{r,s} n_{r,s} N_r = \mathcal{N} \langle N \rangle = N_S$$

Lo que quieren decir las expresiones anteriores es que: La suma de todos los subsistemas con energías E_s y número de partículas N_r es igual a la cantidad de subsistemas en los que se divide el sistema en estudio. La segunda expresión dice que la energía total del sistema en estudio puede partirse entre todos los subsistemas con energías E_s y número de partículas N_r multiplicados por el promedio de energía de los sistemas. La tercera expresión dice que la suma sobre todos los subsistemas con energías E_s y número de partículas N_r

multiplicada por el número de partículas N_r de cada subsistema es igual al número de subsistemas en los que se divide el sistema en estudio multiplicado por el promedio de partículas los subsistemas, lo que al final resulta en la cantidad de partículas total del sistema de estudio N_S.

En el ensamble gran canónico se define la función de partición gran canónica la cual tiene un significado similar a la función de partición en el ensamble canónico. Dicha función se nombra de la siguiente manera:

$$\mathcal{Z} = \sum_N \frac{1}{N! h^{3N}} \int d^{3N}q \int d^{3N}p \left(e^{-\beta H(q_\nu, p_\nu) + \beta \mu N} \right) \tag{2-61}$$

El factor $e^{\mu\beta}$ es llamado fugacidad. Para un sistema con potencial químico cero, se tiene:

$$\mathcal{Z} = \sum_N \frac{1}{N! h^{3N}} \int d^{3N}q \int d^{3N}p \left(e^{-\beta H(q_\nu, p_\nu)} \right) \tag{2-62}$$

Esta función de partición gran canónica se puede relacionar directamente con la función de partición canónica bajo el hecho que el sistema considerado en un ensamble gran canónico es la suma de N ensambles canónicos canónicos:

$$\mathcal{Z} = \sum_N Z(T, V, N) \tag{2-63}$$

En adición a lo anterior, el principio que conecta el ensamble gran canónico con el canónico también conecta estos ensambles con el microcanónico de forma que la función de partición canónica Z es la suma de todas las ''funciones de partición'' microcanónicas $g(E)$, con valores dados de energía, número de partículas y volumen, así como el factor de Boltzmann:

$$Z(\beta, N, V) = \sum_E e^{-\beta E} g(E, N, V) \tag{2-64}$$

Ahora, identificamos el potencial gran canónico el cual se relaciona de la siguiente forma:

$$\Phi(\beta, V, \mu) = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\beta, V, \mu) \tag{2-65}$$

Este potencial termodinámico tiene la forma $U - TS - \mu \langle N \rangle$. Pero, cuando tenemos $\mu \to 0$, como es nuestro caso, entonces se interpreta de la misma manera que la energía libre:

$$\Phi = F = U - TS \quad \longrightarrow \quad dF = -SdT - pdV + \mu dN \tag{2-66}$$

Y se obtiene una expresión para la entropía del sistema de la forma:

$$S = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_{V,N} = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}$$

Así, tenemos la siguiente expresión:

$$S = \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(-\frac{1}{\beta}\ln \mathcal{Z}(\beta, V, \mu)\right) = \ln \mathcal{Z} - \beta \frac{1}{\mathcal{Z}}\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \beta} \tag{2-67}$$

3 Termodinámica del colapso gravitacional

Toda la primera sección, ‘‘Dinámica del cascarón negro’’ tiene como referencia principal el libro *Poisson* [2009], salvo por la solución a la ecuación de movimiento la cual tiene como referencia el artículo *Robel Arenas* [2016].

3.1 Dinámica del cascarón negro

Un cascarón negro (black shell) es un modelo que permite plantear la formación de un agujero negro dado por la contracción de un cascarón de polvo delgado con una masa m. Un observador FIDO (un observador en el infinito) aprecia que el cascarón se contrae y colapsa de manera reversible hasta que se acerca al radio de Schwarzschild y, dependiendo de qué tanto se acerque, se obtendrán resultados diferenes. El caso extremo es cuando llega al radio de Schwarzschild y entonces se forma un agujero negro.

El modelo plantea un cascarón esférico delgado (grosor muy cercano a cero) y con masa m como una hipersuperficie, notada por Σ. La hipersuperficie que determina el cascarón divide el espacio - tiempo en dos regiones: Una región interior V_-, descrita por la geometría plana de Minkowski, y una región exterior V_+, descrita por el espacio - tiempo de Schwarzschild. Para simplificar el modelo y obtener resultados que obedecen únicamente a razones gravitacionales se supone que al final del colapso el cascarón Σ se encuentra estático y que no hay presión en el cascarón.

3.1.1 Formalismo de Darmois - Israel

En el estudio de la dinámica de cascarones delgados en la relatividad general, una de las herramientas más poderosas para comprender el colapso gravitacional y la formación de agujeros es el formalismo de Darmois-Israel. Este proporciona un marco para la correspondencia de dos regiones del espacio tiempo distintas que se encuentran separadas y definidas por una hipersuperficie Σ, que en este caso es el cascarón delgado.

Para describir el movimiento del cascarón que colapsa se plantea que justamente en la hipersuperficie los valores de las dos formas fundamentales (la métrica inducida y la curvatura extrínseca) deben ser iguales. A estas relaciones llamamos condiciones de juntura las cuales garantizan una transición suave entre las dos regiones del espacio-tiempo separadas por la hipersuperficie Σ y son representadas de la siguiente manera:

$$[h_{ab}] = 0 = h^{+}_{ab}\big|_{\Sigma} - h^{-}_{ab}\big|_{\Sigma} \longrightarrow h^{+}_{ab}\big|_{\Sigma} = h^{-}_{ab}\big|_{\Sigma} \tag{3-1}$$

$$[K_{ab}] = 0 = K^{+}_{ab}\big|_{\Sigma} - K^{-}_{ab}\big|_{\Sigma} \longrightarrow K^{+}_{ab}\big|_{\Sigma} = K^{-}_{ab}\big|_{\Sigma} \tag{3-2}$$

Cuando la segunda condición de juntura no se satisface, aparece un término adicional en el tensor energía-momento en la hipersuperficie que es a partir de donde se calculará una ecuación de movimiento para el cascarón que colapsa, el cual es el objetivo de esta sección. Para eso se siguen los siguientes desarrollos:

El cascarón como una interfase

En un espacio-tiempo de 4 dimensiones, como los descritos por la métrica de Schwarzschild y Minkowski, una hipersuperficie es un sub-espacio de tres dimensiones que puede ser como de tiempo, como de espacio o nula. La hipersuperficie se encuentra determinada por una expresión del tipo $\Phi(x^{\alpha}) = 0$. Para determinar correctamente la hipersuperficie que representa el cascarón negro se introduce el vector unitario normal a la misma (que solo puede ser introducido si la superficie no es nula) que cumple con la siguiente propiedad:

$$n_{\alpha} = \frac{\epsilon \partial_{\alpha}\Phi}{\sqrt{g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\Phi\partial_{\nu}\Phi}} \longrightarrow \epsilon = n^{\alpha}n_{\alpha} = \begin{cases} -1 & \text{sí } \Sigma \text{ es como de espacio} \\ +1 & \text{sí } \Sigma \text{ es como de tiempo} \end{cases} \tag{3-3}$$

Y exigimos que el vector n_{α} apunte en la dirección en que apunta Φ estableciendo: $n^{\alpha}\partial_{\alpha}\Phi > 0$. Ahora, se procede a construir geométricamente la métrica para cada una de las regiones:

- Región interna V_{-}

  En el interior del cascarón se asume que el espacio - tiempo es plano por lo que la métrica en la región interior $g^{-}_{\mu\nu}$ es la de Minkowski y se tiene el elemento de línea:

  $$ds^2_{-} = g^{-}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \longrightarrow g^{-}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{3-4}$$

  Ahora se plantea un cambio de variables para expresar explícitamente la dependencia en el tiempo propio de la siguiente manera:

  $$t = \bar{T}(\tau),\ dt = \dot{\bar{T}}d\tau \tag{3-5}$$

  $$r = \bar{R}(\tau),\ dr = \dot{\bar{R}}d\tau \tag{3-6}$$

  $$f(r) = F(\bar{R}) = 1$$

  En donde las variables con punto se encuentran derivadas con respecto al tiempo propio. Este tiempo propio es el que miden los observadores que se mueven con la hipersuperficie sobre una línea de mundo en la cual r, θ, ϕ son constantes. Así, el elemento de línea queda:

  $$ds^2_{-}(\Sigma) = -\left(\dot{\bar{T}}^2(\tau) - \dot{\bar{R}}^2(\tau)\right)d\tau^2 + \bar{R}^2(\tau)d\Omega^2 \tag{3-7}$$

  Con este conjunto de coordenadas podemos construir el campo de velocidad del cascarón de la siguiente manera:

$$x_-^\alpha = \left(\bar{T}(\tau), \bar{R}(\tau), \theta, \phi\right) \tag{3-8}$$

$$u_-^a = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(x_-^\alpha\right) = \left(\dot{\bar{T}}(\tau), \dot{\bar{R}}(\tau), 0, 0\right) \tag{3-9}$$

Las componentes 2 y 3 de la cuadrivelocidad desaparecen debido a que no se considera movimientos en las coordenadas angulares, solo podría variar la distancia radial y el tiempo.

Por otro lado, el vector unitario visto desde la región interior a la hipersuperficie Σ toma la forma:

$$n_\alpha^- = (-\dot{\bar{R}}(\tau), \dot{\bar{T}}(\tau), 0, 0) \tag{3-10}$$

Y cumple con la propiedad de ortogonalidad $n_\alpha^- u_-^\alpha = 0$.

- Región externa V_+

  En el exterior del cascarón se asume que el espacio-tiempo tiene una curvatura determinada por la métrica de Schwarzschild:

$$ds_+^2 = g_{\mu\nu}^+ dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3-11}$$

En donde se definen las nuevas coordenadas de forma similar a como se hizo en (3-5) y (3-6) salvo que en este caso $f(r) \neq 0$:

$$t = T(\tau),\ dt = \dot{\bar{T}} d\tau \tag{3-12}$$

$$r = R(\tau),\ dr = \dot{R} d\tau \tag{3-13}$$

$$f(r) = F(R) = 1 - \frac{2M}{R}$$

Note que al hacer el cambio de coordenadas no cambia la forma funcional de $F(R)$. Ahora, la métrica se puede escribir de la siguiente forma:

$$ds_+^2 = -\left[FT(\tau)^2 - \frac{\dot{R}^2(\tau)}{F}\right] d\tau^2 + R^2(\tau) d\Omega^2 \tag{3-14}$$

Seguimos el planteamiento como con la región interna en donde las coordenadas, la cuadrivelocidad y el vector unitario toman la siguiente forma:

$$x_+^\alpha = (T(\tau), R(\tau), \theta, \phi) \tag{3-15}$$

$$u_+^a = \frac{\partial x_+^\alpha}{\partial \tau} = \left(\dot{T}(\tau), \dot{R}(\tau), 0, 0\right) \tag{3-16}$$

$$n_\alpha^+ = \left(-\dot{R}(\tau), \dot{T}(\tau), 0, 0\right) \tag{3-17}$$

Métrica inducida

La métrica de la variedad inducirá una métrica sobre la hipersuperficie que representa el cascarón, en términos de sus propias coordenadas. Esta métrica contiene la información de cómo se comportan las trayectorias de las partículas que se encuentran confinadas en la hipersuperficie pero se ven afectadas por la métrica de

la variedad que embebe Σ. Así, se construye la métrica inducida a través de las ecuaciones paramétricas $x^\alpha = x^\alpha(y^\alpha)$ que restringen los desplazamientos del elemento de linea confinados en la hipersuperficie. Se plantea la matriz de transformación entre coordenadas mediante los vectores tangentes a las curvas contenidas en Σ de la siguiente forma:

$$e^\alpha_a = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \quad \longrightarrow \quad e^\alpha_a n_\alpha = 0 \tag{3-18}$$

En donde $\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}$ son los α vectores de transformación de las coordenadas de la variedad a las coordenadas de la hipersuperficie y son siempre tangentes a Σ. En esta notación que se esta usando hay que recordar que los índices griegos cuentan las coordenadas $(0, 1, 2, 3)$ (de forma genérica pero para los fines del presente trabajo corresponden a las coordenadas espacio temporales) mientras que los índices latinos cuentan las coordenadas $(1, 2, 3)$ (solo las espaciales). La propiedad después de la flecha proviene del hecho que proyección del vector normal de la hipersuperficie sobre cualquier vector tangente a la misma es cero. No se olvida el hecho que esto solo se cumple para hipersuperficies no nulas (como de tiempo o como de espacio).

Ahora, para desplazamientos sobre Σ se plantea el elemento de línea:

$$\mathrm{d}s^2_\Sigma = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}\ \mathrm{d}y^a\right)\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b}\ \mathrm{d}y^b\right) = h_{ab}\ \mathrm{d}y^a\ \mathrm{d}y^b \tag{3-19}$$

En donde se ha definido la métrica inducida de la hipersuperficie de la siguiente forma:

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b \tag{3-20}$$

También es llamada la ‘‘primera forma fundamental’’. Bajo transformaciones con respecto a las coordenadas del espacio - tiempo se comporta como un escalar, pero bajo transformaciones con respecto a las coordenadas de la hipersuperficie se comporta como un tensor.

Primera condición de juntura

Iniciamos definiendo la métrica $g_{\alpha\beta}$ en las coordenadas x^α como un tensor con valores distribucionales dado por:

$$g_{\alpha\beta} = \Theta(\ell) g^+_{\alpha\beta} + \Theta(-\ell) g^-_{\alpha\beta} \tag{3-21}$$

donde $g^\pm_{\alpha\beta}$ representa la métrica en las regiones $V^\pm$, expresada en el sistema de coordenadas x^α. Se revisará si la métrica presentada en la ecuación anterior satisface las ecuaciones de campo de Einstein como una solución distribucional válida. Para ello, es necesario confirmar que las cantidades geométricas derivadas de $g_{\alpha\beta}$, como el tensor de Riemann, estén bien definidas en el sentido de distribuciones. Esto requiere analizar y, en lo posible, eliminar o reinterpretar los términos singulares que puedan aparecer en dichas cantidades. Derivar la ecuación la métrica se obtiene:

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Theta(\ell) g^+_{\alpha\beta,\gamma} + \Theta(-\ell) g^-_{\alpha\beta,\gamma} + \varepsilon\delta(\ell)\left[g_{\alpha\beta}\right] n_\gamma \tag{3-22}$$

Surgen dificultades con el término final al calcular los símbolos de Christoffel, ya que introduce términos proporcionales a $\Theta(\ell)\delta(\ell)$. Si este término persistiera, la conexión no podría definirse adecuadamente como distribución, lo que invalida este enfoque. Para evitarlo, se exige que la métrica sea continua a través de la hipersuperficie, es decir, $[g_{\alpha\beta}] = 0$. Esta condición solo es válida en el sistema de coordenadas x^α. No obstante, podemos transformarla en una expresión invariante mediante: $0 = [g_{\alpha\beta}]\, e^\alpha_a e^\beta_b = \left[g_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b\right]$. Así, se llega a la siguiente expresión:

$$[h_{ab}] = 0 \tag{3-23}$$

lo que indica que la métrica inducida debe ser idéntica en ambos lados de Σ. Esta propiedad es esencial para garantizar que la hipersuperficie posea una geometría bien definida. La ecuación anterior constituye la primera condición de juntura y se formula de manera independiente de las coordenadas x^α o $x^\alpha_\pm$. Esta independencia explica por qué la primera condición de juntura impone únicamente seis restricciones, en contraste con las diez contenidas en $[g_{\alpha\beta}] = 0$, diferencia que corresponde a las cuatro condiciones de coordenadas $[x^\alpha] = 0$.

Elemento de superficie

Si Σ es no nulo, entonces el elemento de volumen invariante, tridimensional (para este caso particular), sobre la hipersuperficie es:

$$\mathrm{d}\Sigma \equiv |h|^{1/2}\ \mathrm{d}^3 y \tag{3-24}$$

donde h es el determinante de la métrica inducida. Para evitar confundir esto con el elemento de volumen cuadridimensional sobre la variedad $dV = \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4 x$, nos referiremos a $\mathrm{d}\Sigma$ como **elemento de superficie**. La combinación $n_\alpha \mathrm{d}\Sigma$ es un elemento de superficie dirigido que apunta en la dirección donde Φ crece. En el caso en que la hipersuperficie sea nula, las anteriores cantidades no se encuentran definidas porque no existen métrica inducida ni tampoco vector perpendicular pero, debido a que no es de interés para el presente trabajo, no se ahondará por dicho sendero.

Curvatura extrínseca

Para poder definir la curvatura extrínseca de una hipersuperficie necesitamos primero analizar las componentes de un vector, o campo vectorial, A^α que actúa sobre la hipersuperficie. Para dicho campo vectorial, si es tangente a Σ se tiene que cumple con las siguientes relaciones:

$$A^\alpha = A^a e^\alpha_a, \quad A^\alpha n_\alpha = 0, \quad A_a = A_\alpha e^\alpha_a \tag{3-25}$$

Se define la *derivada covariante instrínseca* de un vector A_α como la proyección de la derivada covariante $A_{\alpha;\beta}$ sobre la hipersuperficie:

$$A_{a|b} \equiv A_{\alpha;\beta} e^\alpha_a e^\beta_b \tag{3-26}$$

Lo anterior no es otra cosa que las componentes tangenciales del vector $A^\alpha_{;\beta} e^\beta_b$. Lo que queremos revisar ahora es si este vector A^α posee también una componente normal. Para responder a esta pregunta, re-expresamos

$A^{\alpha}_{;\beta}e^{\beta}_{b}$ introduciendo la métrica como $g^{\alpha}_{\mu}A^{\mu}_{;\beta}e^{\beta}_{b}$ y se descompone la métrica en sus partes normal y tangencial lo que lleva a:

$$\begin{aligned} A^{\alpha}_{;\beta}e^{\beta}_{b} &= \left(\varepsilon n^{\alpha}n_{\mu} + h^{am}e^{\alpha}_{a}e_{m\mu}\right)A^{\mu}_{;\beta}e^{\beta}_{b} \\ &= \varepsilon\left(n_{\mu}A^{\mu}_{;\beta}e^{\beta}_{b}\right)n^{\alpha} + h^{am}\left(A_{\mu;\beta}e^{\mu}_{m}e^{\beta}_{b}\right)e^{\alpha}_{a} \end{aligned}$$

Y observamos que, si bien el segundo término es tangente a la hipersuperficie, el primer término es normal a ella. Ahora, usando el hecho de que A^{μ} es ortogonal a n^{μ}:

$$\begin{aligned} A^{\alpha}_{;\beta}e^{\beta}_{b} &= -\varepsilon\left(n_{\mu;\beta}A^{\mu}e^{\beta}_{b}\right)n^{\alpha} + h^{am}A_{m|b}e^{\alpha}_{a} \\ &= A^{a}_{|b}e^{\alpha}_{a} - \varepsilon A^{a}\left(n_{\mu;\beta}e^{\mu}_{a}e^{\beta}_{b}\right)n^{\alpha} \end{aligned}$$

Donde se ha usado la notación $A^{a}_{|b}$ para la derivada covariante intrínseca. En este punto introducimos el tri-tensor

$$K_{ab} \equiv n_{\alpha;\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}$$

El cual es denominado curvatura extrínseca, también llamado segunda forma fundamental, de la hipersuperficie Σ. Así, tenemos

$$A^{\alpha}_{;\beta}e^{\beta}_{b} = A^{a}_{|b}e^{\alpha}_{a} - \varepsilon A^{a}K_{ab}n^{\alpha}$$

y vemos que $A^{a}_{|b}$ da la parte puramente tangencial del campo vectorial, mientras que $-\varepsilon A^{a}K_{ab}$ representa la componente normal. Esto responde a la pregunta: la componente normal se anula si, y solo si, se anula la curvatura extrínseca. Este resulta ser un tensor simétrico:

$$K_{ba} = K_{ab}$$

De donde se puede llegar a otra expresión de la curvatura extrínseca en términos de la derivada de Lie:

$$K_{ab} = n_{(\alpha;\beta)}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_{n}g_{\alpha\beta}\right)e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}$$

y, por lo tanto, K_{ab} está íntimamente relacionada con la derivada normal del tensor métrico. También observamos la relación

$$K \equiv h^{ab}K_{ab} = n^{\alpha}_{;\alpha}$$

que muestra que K es igual a la expansión de todas las geodésicas que intersecan la hipersuperficie ortogonalmente de modo que su vector tangente es igual a n^{α} en la hipersuperficie. A partir de este resultado, se concluye que la hipersuperficie es convexa si $K > 0$ (la congruencia es divergente), o cóncava si $K < 0$ (la congruencia es convergente).

Por un lado, la métrica inducida h_{ab} contiene la información de los aspectos puramente intrínsecos de la geometría de una hipersuperficie, mientras que la curvatura extrínseca K_{ab} se ocupa de los aspectos extrínsecos: la forma en que la hipersuperficie se integra en la variedad espacio-temporal que la rodea.

Tensor momento energía superficial

Para poder plantear eventualmente alguna ecuación de movimiento del cascarón negro es necesario plantear el tensor momento energía del mismo. Sin embargo, debido al planteamiento que se esta haciendo en dónde el cascarón es delgado y esta representado por una hipersuperficie Σ, se considera el tensor momento energía superficial para ambos sub-espacios es el mismo. Para poder encontrar una segunda condición de juntura y plantear una ecuación de movimiento del cascarón, se empieza por calcular el tensor de Riemann para la distribución. El cálculo del tensor de Riemann nos obliga a considerar los símbolos de Christoffel sobre la hipersuperficie:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Theta(\ell)\Gamma^{+\alpha}_{\beta\gamma} + \Theta(-\ell)\Gamma^{-\alpha}_{\beta\gamma} \tag{3-27}$$

Que se ha construido de manera muy simple ya que la función $\Theta(\ell)$ tiene la función de ubicarme en la región del espacio donde se este observando y va acompañada del correspondiente símbolo de Christoffel de dicha región. Para encontrar el tensor de Riemann se procede a realizar el siguiente cálculo:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} = \Theta(\ell)\Gamma^{+\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + \Theta(-\ell)\Gamma^{-\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + \varepsilon\delta(\ell)\left[\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right] n_{\delta} \tag{3-28}$$

Luego se construye el tensor de Riemann:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Theta(\ell)R^{+\alpha}_{\beta\gamma\delta} + \Theta(-\ell)R^{-\alpha}_{\beta\gamma\delta} + \delta(\ell)A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \tag{3-29}$$

En donde se ha definido el tensor $A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ como:

$$A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \varepsilon\left(\left[\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\right] n_{\gamma} - \left[\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right] n_{\delta}\right) \tag{3-30}$$

El término nuevo es una función delta el cual representa una singularidad de curvatura sobre la hipersuperficie Σ. Ahora, continuando en la misma línea, se debe revisar qué sucede con la métrica en este caso. Si la métrica es continua en Σ, a pesar de estar definida de forma diferente en cada región del espacio, sus derivadas tangenciales también deben serlo. Lo anterior implica que cualquier discontinuidad en $g_{\alpha\beta,\gamma}$ (llas derivadas tangenciales de la métrica) debe estar dirigida a lo largo del vector normal n^{α}. Esto lleva a la introducción del tensor $\kappa_{\alpha\beta}$ que caracteriza dicha discontinuidad:

$$[g_{\alpha\beta,\gamma}] = g^{+}_{\alpha\beta,\gamma} - g^{-}_{\alpha\beta,\gamma} = \kappa_{\alpha\beta}n_{\gamma} \tag{3-31}$$

Este tensor se da explícitamente por

$$\kappa_{\alpha\beta} = \varepsilon\left[g_{\alpha\beta,\gamma}\right] n^{\gamma} \tag{3-32}$$

Lo que lleva a reescribir los símbolos de Christoffel como:

$$\left[\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right] = \frac{1}{2}\left(\kappa^{\alpha}_{\beta}n_{\gamma} + \kappa^{\alpha}_{\gamma}n_{\beta} - \kappa_{\beta\gamma}n^{\alpha}\right) \tag{3-33}$$

Con lo anterior se puede volver a plantear el tensor $A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$

$$A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\kappa^{\alpha}_{\delta} n_{\beta} n_{\gamma} - \kappa^{\alpha}_{\gamma} n_{\beta} n_{\delta} - \kappa_{\beta\delta} n^{\alpha} n_{\gamma} + \kappa_{\beta\gamma} n^{\alpha} n_{\delta}\right) \tag{3-34}$$

Con el objetivo de llegar a las ecuaciones de campo de Einstein, ya tenemos el tensor de Riemann y ahora nos interesa encontrar una forma para el tensor de Ricci. Para lo anterior, se contrae el primer con el tercer índice de $A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ así:

$$A_{\alpha\beta} \equiv A^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\kappa_{\mu\alpha} n^{\mu} n_{\beta} + \kappa_{\mu\beta} n^{\mu} n_{\alpha} - \kappa n_{\alpha} n_{\beta} - \varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\right) \tag{3-35}$$

Aquí se ha usado que $\kappa \equiv \kappa^{\alpha}_{\alpha}$. Contrayendo los índices restantes se llega a:

$$A \equiv A^{\alpha}_{\alpha} = \varepsilon\left(\kappa_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} - \varepsilon\kappa\right) \tag{3-36}$$

Con lo que, usando las ecuaciones de campo de Einstein, aplicando el tensor de Riemann y de Ricci que se han desarrollado, se llega a una expresión para el tensor momento energía de todo el espacio.

$$T_{\alpha\beta} = \Theta(\ell) T^{+}_{\alpha\beta} + \Theta(-\ell) T^{-}_{\alpha\beta} + \delta(\ell) S_{\alpha\beta} \tag{3-37}$$

Donde los dos primeros términos hacen referencia al tensor momento energía en el espacio interior del cascarón y al espacio exterior del mismo. Se tiene en adición un término extra que corresponde desde un principio a un término localizado en la hipersuperficie que separa el espacio y que contiene la información de la curvatura de la misma. Este tensor se define de la siguiente forma:

$$S_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{8\pi}\left(A_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} A g_{\alpha\beta}\right) \tag{3-38}$$

Multiplicando a ambos lados por ε, viendo que $\varepsilon^2 = 1$ y factorizando un 2, se tiene:

$$16\pi\varepsilon S_{\alpha\beta} = \kappa_{\mu\alpha} n^{\mu} n_{\beta} + \kappa_{\mu\beta} n^{\mu} n_{\alpha} - \kappa n_{\alpha} n_{\beta} - \varepsilon\kappa_{\alpha\beta} - \left(\kappa_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} - \varepsilon\kappa\right) g_{\alpha\beta} \tag{3-39}$$

Segunda condición de juntura

El tensor $S_{\alpha\beta}$ corresponde al tensor momento energía de la hipersuperficie Σ pero desde las coordenadas de la variedad. Notamos que $S_{\alpha\beta}$ es tangente a Σ por lo que $S_{\alpha\beta} n^{\beta} = 0$. Así mismo, se puede plantear la descomposición del tensor en términos de las coordenadas de la hipersuperficie como $S^{\alpha\beta} = S^{ab} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b}$ donde $S_{ab} = S_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b}$ es un tensor simétrico:

$$\begin{aligned} 16\pi S_{ab} = -\kappa_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b} - \varepsilon\left(\kappa_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} - \varepsilon\kappa\right) h_{ab} &= -\kappa_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b} - \kappa_{\mu\nu}\left(g^{\mu\nu} - h^{mn} e^{\mu}_{m} e^{\nu}_{n}\right) h_{ab} + \kappa h_{ab} \\ &= -\kappa_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b} + h^{mn} \kappa_{\mu\nu} e^{\mu}_{m} e^{\nu}_{n} h_{ab} \end{aligned} \tag{3-40}$$

En adición a lo anterior, para el vector unitario perpendicular n_α se tiene que

$$[n_{\alpha;\beta}] = -\left[\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right] n_\gamma = -\frac{1}{2}\left(\kappa_{\gamma\alpha} n_\beta + \kappa_{\gamma\beta} n_\alpha - \kappa_{\alpha\beta} n_\gamma\right) n^\gamma \tag{3-41}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon\kappa_{\alpha\beta} - \kappa_{\gamma\alpha} n_\beta n^\gamma - \kappa_{\gamma\beta} n_\alpha n^\gamma\right) \tag{3-42}$$

Identificando en la curvatura extrínseca que $[K_{ab}] = [n_{\alpha;\beta}]\, e^\alpha_a e^\beta_b$ se puede escribir:

$$[K_{ab}] = \frac{\varepsilon}{2}\kappa_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b \tag{3-43}$$

Lo anterior es el último ingrediente para la receta que se ha estado construyendo para el tensor momento energía superficial el cual podemos expresar como:

$$S_{ab} = -\frac{\varepsilon}{8\pi}\left([K_{ab}] - [K]h_{ab}\right) \tag{3-44}$$

La anterior expresión relaciona el tensor momento energía superficial con una discontinuidad en la curvatura extrínseca en diferentes lados de Σ. El tensor momento energía completo para la el cascarón es

$$T^{\alpha\beta}_{\Sigma} = \delta(\ell) S^{ab} e^\alpha_a e^\beta_b \tag{3-45}$$

Una transición suave, es decir que no tiene saltos o discontinuidades en el espacio-tiempo como por ejemplo presencia de materia, a través de Σ requiere que se cumpla la segunda condición de juntura la cual se enuncia como:

$$[K_{ab}] = K^+_{ab} - K^-_{ab} = 0 \tag{3-46}$$

En donde la segunda condición de juntura establece que la curvatura extrínseca debe ser la misma a ambos lados de la hipersuperficie. La condición se expresa independientemente de las coordenadas $x^\alpha_\pm$. Ahora, si no se cumple esta condición entonces el espacio-tiempo es singular en Σ, pero la singularidad viene con una interpretación física sólida: el cascarón que colapsa tiene materia y esta representado con el tensor momento energía $T^{\alpha\beta}_{\Sigma}$ sobre la hipersuperficie. Para el caso en que la hipersuperficie sea material, se tiene la ecuación (3-44) como un origen para una ecuación de movimiento.

3.1.2 Ecuación de movimiento del cascarón

Para plantear la ecuación de movimiento del cascarón se procede a calcular la métrica inducida y la curvatura extrínseca de la superficie en ambas regiones. Para lograr esto, se considera en ambas regiones las coordenadas$t = \bar{T}(\tau)$ y $r = \bar{R}(\tau)$ con todos los desarrollos consecutivos que se realizaron en las ecuaciones desde (3-5) hasta (3-17).

Curvatura Extrínseca desde la Región Exterior

Con el vector normal n^α definido, la curvatura extrínseca se calcula como

$$K_{\alpha\beta} = n_{\alpha;\beta} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b} = n_{\alpha;\beta} \tag{3-47}$$

Para la solución exterior, las componentes no nulas son

$$K^{+}_{\theta\theta} = \dot{T}RF, \quad K^{+\theta}_{\theta} = g^{\theta\theta} K^{+}_{\theta\theta} = \frac{\beta_{+}}{R}, \quad \beta_{+} = \dot{T}F \tag{3-48}$$

$$K^{+}_{\phi\phi} = \dot{T}RF\sin^2\theta, \quad K^{+\phi}_{\phi} = g^{\phi\phi} K^{+}_{\phi\phi} = \frac{\beta_{+}}{R} \tag{3-49}$$

$$K^{+}_{\tau\tau} = -F'\dot{T}, \quad K^{+\tau}_{\tau} = g^{\tau\tau} K^{+}_{\tau\tau} = \frac{\beta_{+}}{F} \tag{3-50}$$

Es importante aclarar que se ha introducido la cantidad $\beta_{+} = F'\dot{R}\dot{T}$ para abreviar las expresiones.

Curvatura Extrínseca desde la Región Interior

De manera análoga para la solución interior, se introduce $\beta_{-} = \sqrt{1+\dot{R}^2}$ para abreviar las expresiones y se calculan las componentes de la curvatura extrínseca:

$$K^{-}_{\theta\theta} = \dot{\bar{T}}R, \quad K^{-\theta}_{\theta} = g^{\theta\theta} K^{-}_{\theta\theta} = \frac{\beta_{-}}{R} \tag{3-51}$$

$$K^{-}_{\phi\phi} = \dot{\bar{T}}R\sin^2\theta, \quad K^{-\phi}_{\phi} = g^{\phi\phi} K^{-}_{\phi\phi} = \frac{\beta_{-}}{R} \tag{3-52}$$

$$K^{-}_{\tau\tau} = 0, \quad K^{-\tau}_{\tau} = g^{\tau\tau} K^{-}_{\tau\tau} = 0 \tag{3-53}$$

Ecuación de Movimiento del Cascarón

La ecuación de movimiento se deriva a partir de

$$S^{a}_{b} = -\frac{\epsilon}{8\pi}\left([K^{a}_{b}] - [K]h^{a}_{b}\right), \quad K \equiv h^{ab}K_{ab} = n^{\alpha}_{;\alpha} \tag{3-54}$$

con $h^{a}_{a} = 1$. Evaluando la componente S^{τ}_{τ}, se obtiene

$$S^{\tau}_{\tau} = -\frac{\epsilon}{8\pi}\left[K^{+\tau}_{\tau} - K^{-\tau}_{\tau} - \left(K^{+} - K^{-}\right)h^{\tau}_{\tau}\right] = -\frac{\epsilon}{8\pi}(-2)\left[K^{+\theta}_{\theta} - K^{-\theta}_{\theta}\right] \tag{3-55}$$

Sustituyendo las expresiones de $K^{+\theta}_{\theta}$ y $K^{-\theta}_{\theta}$, resulta

$$S^{\tau}_{\tau} = -\frac{\epsilon}{8\pi}(-2)\left[\frac{\beta_+}{R} - \frac{\beta_-}{R}\right] \tag{3-56}$$

El tensor superficial $S^{ab} = \sigma u^a u^b$ implica $S^a_b = \sigma u^a u_b$, y con la normalización de la cuadri velocidad $u^a u_a = -1$, se tiene

$$S^a_a = \sigma u^a u_a = -\sigma, \textbf{en particular } S^{\tau}_{\tau} = -\sigma \tag{3-57}$$

Combinando estas expresiones, se encuentra

$$-\sigma = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\beta_+}{R} - \frac{\beta_-}{R}\right] \tag{3-58}$$

Para la componente S^{θ}_{θ}, se obtiene

$$S^{\theta}_{\theta} = -\frac{\epsilon}{8\pi}\left[K^{+\theta}_{\theta} - K^{-\theta}_{\theta} - \left(K^+ - K^-\right) h^{\theta}_{\theta}\right] \tag{3-59}$$

que, tras evaluar las curvaturas, se reduce a

$$\frac{\dot{\beta}_+}{\dot{R}} = \frac{\beta_-}{R} - \frac{\beta_+}{R} \tag{3-60}$$

Dado que $\beta_+ = \dot{T}F$, $\dot{\beta}_+ = F'\dot{R}\dot{T}$, $\beta_-^2 = 1 + \dot{R}^2$, y $K^{-\tau}_{\tau} = 0 \implies \dot{\beta}_- = 0$, se deriva

$$\dot{\beta}_+ = \frac{d}{d\tau}\left[\beta_+ - \beta_-\right] \tag{3-61}$$

Esto conduce a la ecuación

$$\frac{d}{d\tau}\left[\beta_+ - \beta_-\right] = \frac{1}{R}\frac{dR}{d\tau}\left[\beta_- - \beta_+\right] \tag{3-62}$$

Integrando, se obtiene

$$\int \frac{d(\beta_+ - \beta_-)}{\beta_- - \beta_+} = \int \frac{dR}{R} \implies C = R(\beta_- - \beta_+) \tag{3-63}$$

Relacionando con la densidad superficial,

$$4\pi\sigma R^2 = R(\beta_- - \beta_+) = C \tag{3-64}$$

Definiendo la masa en reposo del cascarón como $\mu = C$, se tiene

$$\mu = R(\beta_- - \beta_+) \implies \beta_+ = \beta_- - \frac{\mu}{R} \tag{3-65}$$

Elevando al cuadrado, usando $\beta_-^2 = \dot{R}^2 + 1$, $\beta_+^2 = \dot{R}^2 + F$, y $F = 1 - \frac{2M}{R}$, se llega a

$$\beta_+^2 = \beta_-^2 - \frac{2\beta_-\mu}{R} + \frac{\mu^2}{R^2} = 1 + \dot{R}^2 - \frac{2\mu}{R}\sqrt{1+\dot{R}^2} + \frac{\mu^2}{R^2} \tag{3-66}$$

$$\frac{2M}{R} = \frac{2\mu}{R}\sqrt{1+\dot{R}^2} - \frac{\mu^2}{R^2} \tag{3-67}$$

Despejando $\dot{R} = \frac{dR}{d\tau}$, se obtiene

$$\frac{dR}{d\tau} = \sqrt{\left[\frac{M}{\mu} + \frac{\mu}{2R}\right]^2 - 1} \tag{3-68}$$

Definiendo el parámetro a razón entre las masas $\left(a = \frac{M}{\mu}\right)$, la ecuación se reescribe como

$$\frac{dR}{d\tau} = \sqrt{\left[a + \frac{M}{2aR}\right]^2 - 1}, \tag{3-69}$$

la cual es la ecuación del movimiento para el cascarón engro. El parámetro a incorpora las contribuciones de la energía cinética y potencial gravitacional de las partículas del cascarón. La masa μ representa la masa nucleónica, mientras que M, la masa gravitacional, incluye efectos de la energía cinética y potencial, asumiendo interacciones nulas entre partículas.

La cinemática del cascarón se analiza a partir de la ecuación de movimiento, requiriendo que $\left[a + \frac{\mu}{2aR}\right]^2 - 1 \geq 0$. En el límite superior $R = R_{\text{máx}}$, se encuentra

$$R_{\text{máx}} = \frac{M}{2a(1-a)} \tag{3-70}$$

Se destacan cuatro condiciones mencionadas para el movimiento del cascarón:

- Si $a = \cos\alpha < 1$, la energía de enlace es positiva, dada por $E = (1-a)\mu$. El cascarón inicia su contracción desde un radio finito con velocidad inicial nula.

- Si $a = \cosh\alpha > 1$, la energía de enlace es negativa, y el cascarón comienza su movimiento desde el infinito con velocidad inicial nula.

- Cuando $a = 1$, la energía de enlace entre partículas es nula $P = 0$. Lo anterior significa que la materia del cascarón se comporta como un fluido tipo polvo que cae desde el reposo en $\dot{R}|_{R\to\infty} = 0$

- Si $a \longrightarrow \infty$, $\mu \longrightarrow a$ y $M = a\mu$, las partículas que conforman el cascarón son únicamente fotones.

3.1.3 Solución Arenas-Castro a la ecuación de movimiento

Para la ecuación (3-69) existen diversos tipos de soluciones, como la que da Israel en su artículo *Israel* [1966]. Sin embargo, para el presente documento se va a trabajar con la solución dada por Arenas y Castro en *Robel Arenas* [2016]. En ella los autores proponen una solución aproximada para la ecuación de movimiento partiendo de la relación entre el tiempo propio τ y el tiempo coordenado t,

$$d\tau = \sqrt{f(R)}dt \tag{3-71}$$

donde $f(R) = 1 - \frac{2M}{R}$. Para el caso $a = 1$, la ecuación de movimiento se reescribe como

$$\frac{1}{\sqrt{f(R)}}\frac{dR}{dt} = -\sqrt{\left[1 + \frac{M}{2R}\right]^2 - 1} \tag{3-72}$$

$$\frac{dR}{d\tau} = -\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{R}\right)\left(\frac{M}{4R} + 1\right)\frac{M}{R}} \tag{3-73}$$

Se introduce una función $g(R)$,

$$g(R) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{R}\right)\left(\frac{M}{4R} + 1\right)\frac{M}{R}} \tag{3-74}$$

que se aproxima a otra función $p(R)$

$$p(R) \approx K\left(\frac{M}{R}\right)\left(1 - \frac{2M}{R}\right), \quad K \approx 3 \tag{3-75}$$

La constante K se elige tal que la derivada de $g(R)$ se anule en $R = R_{\text{máx}}$,

$$\left.\frac{dg(R)}{dr}\right|_{R=R_{\text{máx}}} = 0. \tag{3-76}$$

La justificación de la aproximación surge del comportamiento gráfico de las funciones $g(R)$ y $p(R)$, en donde los autores *Robel Arenas* [2016] encuentran que un valor aproximado para $K \approx 3$ hace que las curvas se superpongan lo mejor posible. Asumiendo la validez de esta aproximación, la ecuación de movimiento se simplifica a

$$\frac{dR}{dt} = -K\left(\frac{M}{R}\right)\left(1 - \frac{2M}{R}\right) \tag{3-77}$$

Integrando esta ecuación, se obtiene

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dR}{\left(\frac{M}{R}\right)\left(1-\frac{2M}{R}\right)} = -3\int_{t_0}^{t_s} dt \tag{3-78}$$

$$\frac{-6M(t_s-t_0)-4M(r-r_0)+(r^2-r_0^2)}{8M^2} = \ln\left|\frac{r-2M}{r_0-2M}\right| \tag{3-79}$$

Definiendo el radio de Schwarzschild como $r_s = 2M$, $\Delta t = t_s - t_0$, y $\bar{\tau} = \frac{4}{3}M$, la expresión se reduce a

$$r = r_s + (r_0 - r_s)e^{-\frac{\Delta t}{\bar{\tau}}} e^{-\left[\frac{(r-r_s)}{\bar{\tau}M}+\frac{(r^2-r_0^2)}{2\bar{\tau}M^2}\right]} \tag{3-80}$$

La función exponencial $\bar{F} = e^{-\left[\frac{(r-r_s)}{\bar{\tau}M}+\frac{(r^2-r_0^2)}{2\bar{\tau}M^2}\right]}$ se aproxima a 1 mediante una expansión en serie de Taylor a orden cero, simplificando la ecuación a

$$r(t) = r_s + \Delta r e^{-\frac{\Delta t}{\bar{\tau}}}, \quad \Delta r = r_0 - r_s \tag{3-81}$$

Esta solución puede expresarse en términos de $t(r)$,

$$t(r) = \bar{\tau}\ln\left|\frac{r_0-r_s}{r-r_s}\right|, \quad \bar{\tau} = \frac{4}{3}M \tag{3-82}$$

3.2 El modelo de la pared de ladrillos

Con el objetivo de introducir la sección posterior, en esta sección se va a hablar brevemente de un modelo establecido por Gerard t'Hooft mediante el cual busca hacer un acercamiento simbólico (porque en el mismo artículo *'t Hooft* [1985] explica que se aleja de la realidad y debe ser tomado como un mero juguete matemático) a una explicación cuantitativa del comportamiento de la estructura cuántica de un agujero negro. Para modelar las propiedades cuánticas cerca del horizonte introduce un enfoque simplificado conocido como el modelo de la pared de ladrillo el cual asume que las funciones de onda de las partículas desaparecen a una distancia fija h del horizonte de Schwarzschild ($r = 2M + h$), simulando una barrera ficticia que evita divergencias en el número de estados cuánticos. Aunque esta aproximación sacrifica la invarianza bajo transformaciones de coordenadas en el horizonte, ofrece una herramienta útil para calcular propiedades termodinámicas y explorar la estructura cuántica del agujero negro. Partiendo de la métrica de Schwarzschild como se enunció en (2-2), donde $r = 2M$ es el radio del horizonte, se considera un campo escalar sin espín con masa $m \ll M$, y se impone que las funciones de onda satisfagan

$$\varphi(r) = 0 \quad \text{si} \quad r \leq 2M + h \tag{3-83}$$

junto con un corte infrarrojo en una caja grande a $r = L$, tal que

$$\varphi(r) = 0 \quad \text{si} \quad r = L \tag{3-84}$$

3.2.1 Número total de modos de onda

El objetivo es determinar cuántos estados cuánticos (modos de onda) existen para partículas con energía hasta E, lo que permite calcular propiedades termodinámicas. Los números cuánticos que caracterizan los modos son el momento angular total l, su componente l_z, y el número de excitaciones radiales n. Partiendo de una ecuación de onda como (2-50) con las constantes fundamentales igualadas a 1, para el campo escalar en la métrica de Schwarzschild es:

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2\varphi + \frac{1}{r^2}\partial_r\left[r(r-2M)\partial_r\varphi\right] - \left(\frac{l(l+1)}{r^2}+m^2\right)\varphi = 0 \tag{3-85}$$

Dado que $M \gg 1$ en unidades de Planck, se emplea la aproximación WKB para resolver esta ecuación. Se define un número de onda radial $k(r,l,E)$ como

$$k^2(r,l,E) = \frac{r^2}{r(r-2M)}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2\right] \tag{3-86}$$

donde $k^2 = 0$ si el término entre corchetes es cero, indicando que no hay propagación en esas regiones. El número de modos radiales n para un l y E dados se calcula integrando k sobre la región permitida ($2M + h \leq r \leq L$):

$$\pi n = \int_{2M+h}^{L} k(r,l,E)dr \tag{3-87}$$

El número total de soluciones de onda con energía menor o igual a E, denotado N, se obtiene sumando sobre todos los valores posibles de l, ponderados por la degeneración del momento angular $2l+1$:

$$\pi N = g(E) = \int_0^{\infty}(2l+1)dl\int_{2M+h}^{L} k(r,l,E)dr \tag{3-88}$$

Sustituyendo k, esto se reescribe como

$$g(E) = \int_{2M+h}^{L} dr\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\int(2l+1)dl\sqrt{E^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(m^2+\frac{l(l+1)}{r^2}\right)} \tag{3-89}$$

donde la integración sobre l va sobre todos los valores que pueda tomar el número cuántico para asegurar que el argumento de la raíz cuadrada sea positivo. Cambiando variables en la integral sobre l, se evalúa la contribución de cada l, resultando en una expresión que refleja la densidad de estados cerca del horizonte. Esta integral diverge cuando $h \to 0$, justificando la necesidad del corte en $r = 2M + h$.

Para entender físicamente este cálculo, consideremos que el término $\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}$ crece enormemente cerca del horizonte, aumentando el número de modos disponibles. La aproximación WKB es válida porque las longitudes de onda son pequeñas comparadas con la escala del agujero negro, y el corte en h regulariza la divergencia que ocurriría si los modos pudieran acumularse arbitrariamente cerca de $r = 2M$.

3.2.2 Energía libre de Helmholtz

Con el número de modos $g(E)$, se procede a calcular las propiedades termodinámicas, comenzando por la energía libre F. En un sistema cuántico con modos que pueden ocuparse por cualquier número de partículas bosónicas, la función de partición se escribe como

$$e^{-\beta F} = \sum e^{-\beta E} = \prod_{n,l,l_z} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} \tag{3-90}$$

no olvidando que $\beta = 1/T$ es la temperatura inversa. Tomando el logaritmo, la energía libre es

$$\beta F = \sum_N \log\left(1 - e^{-\beta E}\right) \tag{3-91}$$

En el límite continuo, usando la densidad de modos $g(E)$, esto se convierte en una integral:

$$\pi\beta F = \int dg(E) \log\left(1 - e^{-\beta E}\right) \tag{3-92}$$

Integrando por partes, se obtiene

$$\pi\beta F = -\int_0^\infty \frac{\beta g(E)}{e^{\beta E} - 1}\, dE \tag{3-93}$$

Sustituyendo $g(E)$, la expresión completa es

$$\pi\beta F = -\beta \int_0^\infty dE \int_{2M+h}^{L} dr \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \int (2l+1)\, dl \frac{\sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)}}{e^{\beta E} - 1} \tag{3-94}$$

Para evaluar esta integral, se asume que la masa de la partícula es pequeña ($m^2 \ll 2M/\beta^2 h$) y que $L \gg 2M$. La contribución dominante proviene de la región cercana al horizonte, donde $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ es grande. Aproximando las integrales, se encuentra

$$F = -\frac{2\pi^3}{45h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4 - \frac{2}{9\pi} L^3 \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{3/2}}{e^{\beta E} - 1} dE, \tag{3-95}$$

donde el autor añade manualmente un parámetro que llama "Z" que representa el número total de tipos de partículas para brindar de completez a la formulación estadística que se esta realizando. El segundo término corresponde a la contribución del vacío a grandes distancias y es menos relevante para el agujero negro. El primer término, que diverge linealmente como $h \to 0$, refleja la acumulación de estados cerca del horizonte y domina en la integral total.

3.2.3 Entropía

La entropía S se deriva de la energía libre usando la relación termodinámica.

$$S = \beta(U - F) \tag{3-96}$$

donde U es la energía total (calculada a continuación). Primero, se calcula la energía total como

$$U = \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta F) \tag{3-97}$$

Diferenciando βF, se obtiene

$$U = \int_0^\infty \frac{Eg(E)}{e^{\beta E} - 1}\, dE. \tag{3-98}$$

Evaluando con la misma aproximación que para F, la contribución del horizonte es

$$U = \frac{2\pi^3}{15h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4 Z \tag{3-99}$$

Sustituyendo U y F en la expresión de la entropía,

$$S = \beta\left[\frac{2\pi^3}{15h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4 Z - \left(-\frac{2\pi^3}{45h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4 Z\right)\right], \tag{3-100}$$

simplificando,

$$S = \beta \cdot \frac{2\pi^3}{h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4 Z\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{45}\right) = \beta \cdot \frac{2\pi^3}{h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4 Z \cdot \frac{4}{45}, \tag{3-101}$$

multiplicando,

$$S = \frac{8\pi^3}{45h} 2M\left(\frac{2M}{\beta}\right)^3 Z. \tag{3-102}$$

Esta entropía diverge cuando $h \to 0$, consistente con la acumulación de modos cerca del horizonte. Para reproducir la entropía termodinámica esperada de un agujero negro,

$$S = 4\lambda^{-1}M^2 \tag{3-103}$$

y asumiendo la temperatura de Hawking con $\beta = 8\pi\lambda^{-1}M$, se ajusta el parámetro h:

$$\frac{8\pi^3}{45h}2M\left(\frac{2M}{8\pi\lambda^{-1}M}\right)^3 Z = 4\lambda^{-1}M^2 \tag{3-104}$$

Simplificando,

$$\frac{8\pi^3}{45h}2M\cdot\frac{8\pi^3\lambda^{-3}M^3}{(8\pi\lambda^{-1}M)^3}Z = 4\lambda^{-1}M^2 \tag{3-105}$$

Esto reduce a

$$\frac{16\pi^6\lambda^{-3}M^4}{45h\cdot 8\pi\lambda^{-1}M}Z = 4\lambda^{-1}M^2 \tag{3-106}$$

$$\frac{2\pi^5\lambda^{-2}M^3}{45h}Z = 4\lambda^{-1}M^2 \tag{3-107}$$

Resolviendo para h,

$$h = \frac{2\pi^5\lambda^{-2}M^3Z}{4\cdot 45\lambda^{-1}M^2} = \frac{\pi^5\lambda^{-1}Z}{90M} \tag{3-108}$$

Usando $\pi^4/90 \approx 1{,}082$, se aproxima

$$h \approx \frac{Z\lambda^4}{720\pi M} \tag{3-109}$$

donde se asume $\lambda^4/\pi^4 \approx 1$ para consistencia numérica. Esta h depende inversamente de M, pero la distancia invariante,

$$\int_{2M}^{2M+h}\frac{dr}{\sqrt{1-2M/r}} \approx 2\sqrt{2Mh} = \sqrt{\frac{Z\lambda^4}{90\pi}} \tag{3-110}$$

es independiente de M, sugiriendo que el corte es una propiedad intrínseca del horizonte.

La entropía refleja el número de estados cuánticos accesibles cerca del horizonte, y su forma $S \propto M^2$ coincide con la entropía de Bekenstein, validando el modelo como una aproximación razonable, aunque limitada por su falta de invarianza coordenada.

3.2.4 Cálculo de la energía total

La energía total U, ya calculada parcialmente para la entropía, es

$$U = \frac{2\pi^3}{15h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4 Z \tag{3-111}$$

Sustituyendo $\beta = 8\pi\lambda^{-1}M$ y $h = \frac{Z\lambda^4}{720\pi M}$,

$$U = \frac{2\pi^3}{15 \cdot \frac{Z\lambda^4}{720\pi M}}\left(\frac{2M}{8\pi\lambda^{-1}M}\right)^4 Z \tag{3-112}$$

Simplificando,

$$\left(\frac{2M}{8\pi\lambda^{-1}M}\right)^4 = \left(\frac{2M \cdot \lambda}{8\pi M}\right)^4 = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^4 = \frac{\lambda^4}{256\pi^4} \tag{3-113}$$

$$U = \frac{2\pi^3 \cdot 720\pi M}{15Z\lambda^4} \cdot \frac{\lambda^4}{256\pi^4} Z \tag{3-114}$$

Cancelando Z y λ^4,

$$U = \frac{2\pi^3 \cdot 720\pi M}{15 \cdot 256\pi^4} \tag{3-115}$$

Calculando los coeficientes,

$$\frac{2\pi^3 \cdot 720\pi}{15 \cdot 256\pi^4} = \frac{2 \cdot 720\pi^4}{15 \cdot 256\pi^4} = \frac{1440}{15 \cdot 256} = \frac{1440}{3840} = \frac{3}{8} \tag{3-116}$$

Por lo tanto,

$$U = \frac{3}{8}M \tag{3-117}$$

Esta energía total es una fracción significativa de la masa del agujero negro, independiente de Z, lo que sugiere que los modos cerca del horizonte contienen una cantidad sustancial de la energía del sistema. Físicamente, U representa la energía interna promedio de las partículas térmicas en el modelo, consistente con la radiación de Hawking.

Limitaciones del modelo

El modelo de la pared de ladrillo reproduce las propiedades termodinámicas esperadas, pero no satisface la invarianza bajo transformaciones de coordenadas en el horizonte, ya que el corte en h introduce una barrera artificial. Además, podría conservar números cuánticos globales (como el número de bariones), lo cual es problemático en una teoría completa de agujeros negros. No obstante, demuestra que el horizonte domina las propiedades cuánticas, proporcionando una base para modelos más sofisticados.

3.3 Termodinámica del cascarón negro

Esta sección tiene como referencia principal a *Mukohyama & Israel* [1998] la cual fue complementada con *Rojas* [2018] y *Pulido* [2019].

3.3.1 Cálculo de la entropía del cascarón negro

Volviendo al contexto del modelo del cascarón negro, el cascarón esférico de masa M el espacio-tiempo que envuelve al cascarón en colapso adopta la forma métrica de Schwarzschild (2-2) para un observador lejano. El modelo de la pared de ladrillo proporciona un marco para estudiarla termodinámica de campos cuánticos en un espacio-tiempo esférico, representando el exterior de un objeto estelar con una superficie reflectante. Este objeto tiene un radio r_0, ligeramente mayor que su radio gravitacional r_s, y está confinado dentro de un contenedor esférico grande de radio $L \gg r_0$, introducido para mantener la energía total finita. Para simplificar el análisis, se adopta la solución propuesta por Arenas-Castro, presentada previamente, que describe el movimiento del cascarón (3-69) como

$$r(t) = r_s + \Delta r e^{-t/\bar{\tau}}, \quad \Delta r = r_0 - r_s, \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad \bar{\tau} = \frac{4GM}{3c^3} \tag{3-118}$$

donde r_0 es el radio del cascarón mientras que r_s es el radio de Schwarzschild. Cuando el tiempo t alcanza valores muy grandes, comparables con la edad del universo (denotado como t_p), se observa que

$$\lim_{t \to t_p} r(t) = r_s \tag{3-119}$$

Derivando la expresión para $r(t)$, se obtiene

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\Delta r e^{-t/\tau}}{\tau} \tag{3-120}$$

donde el signo negativo refleja que la tasa de cambio de r disminuye con el tiempo. Ahora, con el objetivo de calcular la entropía total del cascarón en contracción, se expresa como la integral de la densidad de entropía sobre el volumen

$$S = \int_{r_0}^{L} s(r) \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{f(r)}} \tag{3-121}$$

Y la densidad de entropía

$$s(r) = \beta(\rho + P) = \frac{4NT^3}{\pi^2} \tag{3-122}$$

donde N representa el número de especies de partículas, ρ es la densidad de energía, P es la presión y T es la temperatura local, ajustada por la ley de Tolman (*Tolman* [1934]) como $T(r) = \frac{T_\infty}{\sqrt{f(r)}}$. Así, para poder

encontrar la densidad de entropía se calculan la densidad de energía $\rho(r)$ y la presión $P(r)$ de un gas de partículas cuánticas con masa en reposo m, energía E, momento tridimensional p, y velocidad tridimensional $v = p/E$, según un observador estacionario local. Estas cantidades estan ponderadas por un factor $\mathcal{N}$ que cuenta las helicidades y el número de especies de partículas. Las expresiones son:

$$\rho = \mathcal{N} \int_0^\infty \frac{E}{e^{\beta(r)E} - \epsilon} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \tag{3-123}$$

$$P = \frac{\mathcal{N}}{3} \int_0^\infty \frac{vp}{e^{\beta(r)E} - \epsilon} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \tag{3-124}$$

Ahora, para realizar la integral (3-121) es necesario realizar el siguiente análisis: Para grandes L y pequeños $\Delta r = r_0 - r_s$, la integral se separa en dos contribuciones principales:

1. Contribución volumétrica: Proporcional a $\frac{4}{3}\pi L^3$, corresponde a un gas cuántico homogéneo en un espacio casi plano ($f(r) \approx 1$ para $r \approx L$), a temperatura constante T_∞. Esta parte representa la entropía de un sistema térmico estándar en una caja grande y no está relacionada con la pared ya que se encuentra en una región exterior a la misma y contiene la información de la materia que habite allí.
2. Contribución de la pared: Dominada por la región cercana a $r = r_0$, donde $T(r)$ es grande debido a $f(r) \approx 0$. Esta contribución, denotada S_{shell}, es proporcional al área de la superficie reflectante y diverge cuando $\Delta r \to 0$.

Nos enfocamos en la entropía del cascarón S_{shell}, calculada en una región delgada cerca de r_0, definida como $r_0 \leq r \leq r_0 + \delta$, donde δ es un grosor pequeño tal que $\Delta r \ll \delta \ll r_0$. Dado que $T(r)$ es grande cerca de r_0, se adopta la aproximación ultrarrelativista ($E \gg m$, $p \approx E$, $v \approx 1$) en las expresiones de ρ, P, y s. Sustituyendo lo anterior en la expresión de la presión:

$$P \approx \frac{\mathcal{N}}{3} \int_0^\infty \frac{p}{e^{\beta(r)p} - \epsilon} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \tag{3-125}$$

Para bosones ($\epsilon = +1$) (o fermiones ($\epsilon = -1$) que no es este caso), la integral se evalúa en el límite relativista. Aproximando la integral numérica,

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \approx \frac{\pi^4}{90} \quad \text{(para bosones)} \tag{3-126}$$

se obtiene

$$P \approx \frac{\mathcal{N}}{3} \cdot \frac{1}{6\pi^2} T^4 \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\mathcal{N}}{540\pi^2} \pi^4 T^4 \tag{3-127}$$

$$\rho \approx 3P \approx \frac{\mathcal{N}}{\pi^2} T^4 \tag{3-128}$$

donde el factor 3 surge porque $\rho = 3P$ en un gas ultrarrelativista isotrópico en tres dimensiones. Con lo anterior, la densidad de entropía es

$$s = \beta\left(\rho + P\right) = \frac{1}{T}\left(\rho + \frac{1}{3}\rho\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{\rho}{T} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\mathcal{N}}{\pi^2}T^3 = \frac{4\mathcal{N}}{\pi^2}T^3 \tag{3-129}$$

Donde se ve que cuando se integre para calcular la entropía, esta integral solamente estará determinada por el diferencial de volumen ya que la densidad de entropía se encuentra determinada por la temperatura y el número de partículas.

Ahora, el elemento diferencial de volumen se escribe como

$$dV = \frac{4\pi}{\sqrt{f(r)}}r^2dr = \frac{4\pi}{\sqrt{f(r)}}\left(r_s + \Delta r e^{-t/\tau}\right)^2\frac{\Delta r e^{-t/\tau}}{\tau}dt \tag{3-130}$$

Para tiempos extremadamente largos, se tiene que el cascarón se contrae tanto como le es físicamente posible hasta ser prácticamente el radio de Schwarzschild excepto por una longitud minúsculamente pequeña.

$$\lim_{t\to t_p}\Delta r \approx l_P \tag{3-131}$$

donde t_P corresponde a la longitud de Planck. Considerando una aproximación de primer orden, donde $r_s \gg \Delta r \gg \Delta r^2$, los términos de orden superior pueden despreciarse simplificando el diferencial de volumen:

$$dV \approx \frac{4\pi}{\sqrt{f(r)}}\left(\frac{r_s^2\Delta r e^{-t/\bar{\tau}}}{\bar{\tau}}\right)dt \tag{3-132}$$

Aplicando la ley de Tolman(*Tolman* [1934]), la entropía se expresa como

$$S = \frac{4N}{\pi^2}T_\infty^3\frac{4\pi r_s^2}{\bar{\tau}}\Delta r\int\frac{e^{t/\bar{\tau}}}{f^2(r)}dt \tag{3-133}$$

Se define el término $A = 4\pi r_s^2$ que corresponde al área superficial del horizonte de eventos y se establece la dependencia del factor $f(r) = f(r(t))$ con respecto al tiempo. Cerca del horizonte, la función $f(r)$ se aproxima según Mukohyama-Israel como $f(r(t)) \approx 2\kappa_0\left(r(t) - r_s\right) = 2\kappa_0\Delta r e^{-t/\bar{\tau}}$ lo que simplifica la expresión de la entropía a

$$S = \frac{4N}{\pi^2}\left(\frac{T_\infty^4}{\kappa_0^4}\right)\frac{A}{4}\frac{1}{\Delta r}\left[\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{t_u}e^{t/\bar{\tau}}dt\right] \tag{3-134}$$

Un resultado preliminar muy importante de esta sección es el surgimiento del término $A/4$ el cual corresponde con el comportamiento de la entropía de Bekenstein-Hawking *Hawking* [1975]. La integral define un valor adimensional independiente de la distancia pero que es dependiente del tiempo y se establece como:

$$C_1 = \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{t_u}e^{t/\bar{\tau}}dt \tag{3-135}$$

reduciendo la expresión de la entropía a:

$$S = \frac{4N}{\pi^2}\left(\frac{T_\infty^4}{\kappa_0^4}\right)\frac{A}{4}\frac{1}{\Delta r}C_1 \tag{3-136}$$

Distancia propia sobre el horizonte

El modelo del cascarón negro como se ha visto hasta ahora plantea un colapso simétricamente esférico en el cual la superficie se acerca tanto como puede hasta el radio de Schwarzschild por efectos gravitaciones. Siendo así, la distancia a la que se encuentre el cascarón con respecto al radio de Schwarzschild se convierte en un parámetro que indica la configuración del cascarón. En modelos astrofísicos, se plantean los objetos exóticos compactos (ECO, Exotic Compact Objects en inglés) como una generalización de toda la gama de objetos compactos que pueden incluir desde ciertos tipos de estrellas hasta los agujeros negros que resultan convirtiéndose en un límite físico para el colapso generalizado de los objetos en el universo. Ahora, se define la distancia propia del cascarón sobre el horizonte como α que es el parámetro que modela el colapso y el nivel de compacidad de dichos objetos:

$$\alpha = \int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{f(r)}} = \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{t_u}\frac{\Delta r e^{-t/\bar{\tau}}}{\sqrt{2\kappa_0\Delta r e^{-t/\bar{\tau}}}}dt = \sqrt{\frac{\Delta r}{2\kappa_0}}\left[\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{t_u}e^{-t/\bar{\tau}}dt\right] \tag{3-137}$$

o equivalentemente,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Delta r}{2\kappa_0}}C_2, \quad C_2 = \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{t_u}e^{-t/\bar{\tau}}dt \tag{3-138}$$

Así, la entropía del cascarón cerca del horizonte toma la forma

$$S_{\text{Shell}} = \left[\frac{N}{90\pi\alpha^2}\left(\frac{T_\infty}{\kappa_0/2\pi}\right)^3\frac{A}{4}\right]\frac{C_1C_2^2}{4} = \frac{S_{\text{BWM}}}{4}C_1C_2^2 \tag{3-139}$$

donde el término entre corchetes corresponde a la entropía del modelo "Modified Brick Wall ModelS_{BWM} de los campos cuánticos cerca del horizonte, según el método de Brick Wall Modificado de Mukohyama-Israel *Mukohyama & Israel* [1998]. Ahora. se reeescribe $\Delta r = \Delta r_{\text{Shell}}$ para comparar la diferencia entre radios calculada para el cascarón (el desarrollo que se ha venido trabajando desde (3-118)) y el calculado por el "Brick Wall Model modificadoz se obtiene:

$$\Delta r_{\text{Shell}} = \frac{4\Delta r_{\text{BWM}}}{C_2^2}, \quad \Delta r_{\text{BWM}} = \frac{1}{2}\kappa_0\alpha^2 \tag{3-140}$$

Para que $\Delta r_{\text{Shell}} = \Delta r_{\text{BWM}}$ tendría que pasar que $C_2 = \pm 2$. Así mismo, imponiendo la condición que $S_{\text{Shell}} = S_{\text{BWM}}$ bajo el argumentos que ambos modelos estan calculando la misma entropía, se encuentra $C_1 = 1$ lo que simplifica la entropía a:

$$S_{\text{Shell}} = \frac{N}{90\pi\alpha^2}\left(\frac{T_\infty}{\kappa_0/2\pi}\right)^3\frac{A}{4}, \quad \Delta r_{\text{Shell}} = \frac{\kappa_0\alpha^2}{2} \tag{3-141}$$

Como conclusión de haber introducido el parámetro de la distancia propia sobre el horizonte y haber comparando el desarrollo de la entropía del cascarón negro con el modelo del Brick Wall se determinan $C_1 = 1$ y $C_2 = +2$. Si la temperatura del cascarón cerca del horizonte corresponde con la ley de Tolman (*Tolman* [1934]) $T_\infty = T_H = \frac{\kappa_0}{2\pi}$, la entropía del cascarón igual a la del horizonte, $S_{\text{Shell}} = S_{BH} = \frac{1}{4}\frac{A}{l_P^2}$, y la distancia propia resulta

$$\alpha = l_P\sqrt{\frac{C_1 C_2^2 N}{360\pi}} = l_P\sqrt{\frac{N}{90\pi}} \tag{3-142}$$

el cual es el valor encontrado por Mukoyahama-Israel *Mukohyama & Israel* [1998].

3.3.2 Termodinámica del cascarón en colapso

Con la entropía S_{Shell} definida, se puede calcular el resto de propiedades termodinámicas. Reescribiendo,

$$S_{\text{Shell}} = \frac{N\pi^2}{180\alpha^2}\left(\frac{T_\infty^3}{\kappa_0^3}\right) A C_1 C_2^2 \tag{3-143}$$

La energía libre de Helmholtz se obtiene como

$$S_{\text{Shell}} = -\left(\frac{\partial F}{\partial T_\infty}\right)_V \tag{3-144}$$

dando

$$F = -\frac{N\pi^2}{720\alpha^2}\left(\frac{T_\infty^4}{\kappa_0^3}\right) A C_1 C_2^2 \tag{3-145}$$

La energía interna se calcula mediante

$$dE = dF + T_\infty dS \tag{3-146}$$

resultando

$$E = \frac{N\pi^2}{240\alpha^2}\left(\frac{T_\infty^4}{\kappa_0^3}\right) A C_1 C_2^2 \tag{3-147}$$

Las capacidades caloríficas a volumen y presión constantes son

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T_\infty}\right)_V, \quad C_P = T_\infty\left(\frac{\partial S}{\partial T_\infty}\right)_P \tag{3-148}$$

obteniéndose

$$C_V = C_P = \frac{N\pi^2}{60\alpha^2}\left(\frac{T_\infty^3}{\kappa_0^3}\right) AC_1C_2^2 \tag{3-149}$$

Para un cascarón de una masa solar, teniendo un valor para la temperatura $T_H \sim 10^{-8}\,\mathrm{K}$, ambas capacidades son similares. Así mismo, la presión se deriva como

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T_\infty} = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{T_\infty} \tag{3-150}$$

dando

$$P = \frac{N\pi^2}{720\alpha^3}\left(\frac{T_\infty^3}{\kappa_0^3}\right) C_1C_2^2 \tag{3-151}$$

Si $S_{\mathrm{Shell}} = S_{\mathrm{BWM}}$, con $N = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = +2$, y α según lo calculado, las propiedades termodinámicas se simplifican a

$$S_{\mathrm{Shell}} = \frac{\pi^2}{45\alpha^2}\left(\frac{T_\infty^3}{\kappa_0^3}\right) A \tag{3-152}$$

que, con $T_\infty = T_H = \frac{\kappa_0}{2\pi}$, reproduce la entropía mostrada en *Mukohyama & Israel* [1998] $S_{\mathrm{Shell}} = S_{BH} = \frac{1}{4}\frac{A}{l_P^2}$.

4 Entropía de Entanglement de Cascarones Negros

El objetivo de esta sección es calcular la entropía de un cascarón negro mediante la técnica de ‘‘Entanglement’’. Dicho planteamiento implica una perspectiva que se sumerge en la teoría cuántica de campos en donde se va a plantear todos los campos bosónicos que se encuentren en vecindades del cascarón por lo que se requerirán soluciones a la ecuación de Klein-Gordon. Así mismo, la técnica de entanglement recurre a la dinámica de campos térmicos en el vacío que es una forma de acercarnos a reproducir lo más precisamente la vecindad de un agujero negro.

La termodinámica de Entanglement surge de la necesidad de dar un significado físico riguroso, concreto y claro a la entropía de Bekenstein Hawking que se establece luego de encontrar las similitudes entre las leyes mecánicas de los agujeros negros. La termodinámica de entanglement tiene como fundamento las propiedades termodinámicas que surgen sobre un una superposición de campos cuánticos que se encuentran en las vecindades de un objeto compacto debido a la deformación del espacio tiempo. Dicha de formación afecta los campos e induce en ellos unos comportamientos que, matemáticamente hablando, tienen comportamiento termodinámico desde que se puede plantear una función de partición para los estados en el espacio - tiempo maximalmente extendido.

4.1 Formalismo de Umezawa - Takahashi

Esta sección tiene como referencia a *Umezawa* [1995] y *TAKAHASHI & UMEZAWA* [1996].

Es de interés ahora entender como trabajar la termodinámica de objetos que habitan un vacío dependiente de la temperatura. Se busca una representación de los observables que se pueden encontrar en ese vacío. En particular, se quisiera encontrar el valor esperado de un operador que represente el observable de interés:

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \langle \mathcal{O}(\beta)| \hat{A} |\mathcal{O}(\beta)\rangle \tag{4-1}$$

donde $\beta = 1/k_B T$ contiene la dependencia de la temperatura que puede tener ese vacío. Ahora, la propuesta de Umezawa - Takahashi consiste en dar un tratamiento a un gran número de particulas mediante un ensamble gran canónico estableciendo el valor esperado como se haría en el ensamble en mención:

$$\langle \mathcal{O}(\beta)| \hat{A} |\mathcal{O}(\beta)\rangle = \frac{\sum_n \langle n| \hat{A} |n\rangle e^{-\beta E_n}}{Z(\beta)} \tag{4-2}$$

Sistema el cual tiene un hamiltoniano que satisface la ecuación de valores propios y sus autovectores tienen una relación de ortogonalidad:

$$\hat{H}\left|n\right\rangle = E_n\left|n\right\rangle \tag{4-3}$$
$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \tag{4-4}$$

Donde el hamiltoniano y los estados asociados pertenecen a un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$. Ahora, la propuesta conlleva a expandir los estados de vacío de tal forma que se pueda precisar la dependencia de la temperatura en los coeficientes de una expansión en la base $|n>$ de la siguiente manera:

$$|\mathcal{O}(\beta)\rangle = \sum_m f_m(\beta)\left|m\right\rangle \tag{4-5}$$
$$\langle\mathcal{O}(\beta)| = \sum_n f_n^*(\beta)\left\langle n\right| \tag{4-6}$$

Donde se usa convenientemente un índice diferente para la expresión ket y la bra. (¿por qué deben ser diferentes?) Ahora, para intentar encontrar una expresión de cómo serían esas funciones $f_n(\beta)$ se despejan las expresiones anteriores en el valor esperado considerado anteriormente:

$$\langle\mathcal{O}(\beta)|\,\hat{A}\,|\mathcal{O}(\beta)\rangle = \sum_n f_n^*(\beta)\left\langle n\right| A\sum_m f_m(\beta)\left|m\right\rangle = \sum_n\sum_m f_n^*(\beta)f_m(\beta)\left\langle n\right| A\left|m\right\rangle \tag{4-7}$$

Lo anterior tiene mucha semejanza con lo establecido desde la mecánica estadística para el ensamble gran canónico salvo que en dicho valor esperado la variable de interés se encuentra confrontada con el mismo estado por izquierda y por derecha. Lo anterior puede resolverse para encontrar una igualación precisa aplicando una función delta que cambie los índices e introduciendo una nueva sumatoria en el valor esperado del ensamble gran canónico:

$$\frac{\sum_n\left\langle n\right|\hat{A}\left|n\right\rangle e^{-\beta E_n}}{Z(\beta)} = \frac{\sum_n\sum_m \delta_{nm}\left\langle n\right|\hat{A}\left|m\right\rangle e^{-\beta(E_n+E_m)/2}}{Z(\beta)} \tag{4-8}$$

Retomando la igualdad con el despeje de los operadores de vacío, se puede ver que ambas expresiones suman sobre los coeficientes n y m, además que poseen el valor esperado del observable a ambos lados por lo que se puede despejar lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_n\sum_m f_n^*(\beta)f_m(\beta)\left\langle n\right| A\left|m\right\rangle =& \frac{\sum_n\sum_m \delta_{nm}\left\langle n\right|\hat{A}\left|m\right\rangle e^{-\beta(E_n+E_m)/2}}{Z(\beta)}\\ f_n^*(\beta)f_m(\beta) =& \frac{1}{Z(\beta)}\delta_{nm}e^{-\beta(E_n+E_m)/2}\end{aligned} \tag{4-9}$$

Lo cual tiene toda la apariencia de ser una relación de ortogonalidad en un espacio de Hilbert en donde las funciones $f_n(\beta)$ son vectores. Tenemos claridad que no son vectores del mismo espacio $\mathscr{H}$ en donde habitan $\hat{H}$ y los $|n>$, $<m|$, por lo que construimos otro espacio de Hilbert ficticio llamado $\tilde{\mathscr{H}}$ en donde se cumple:

$$\tilde{H}\left|\tilde{n}\right\rangle = E_n\left|\tilde{n}\right\rangle \tag{4-10}$$
$$\left\langle\tilde{n}|\tilde{m}\right\rangle = \delta_{\tilde{n}\tilde{m}} \tag{4-11}$$

Ahora, ya que existen unos vectores unitarios en el espacio ficticio $\tilde{\mathscr{H}}$, las funciones $f_n(\beta)$ deben ser expresadas en términos de esos vectores. Siendo así, identificando en la expresión de ortogonalidad los índices como en el espacio $\tilde{\mathscr{H}}$, se obtiene que:

$$f_n(\beta) = e^{-\beta E_n/2} Z^{-1/2}(\beta)\left|\tilde{n}\right\rangle \tag{4-12}$$
$$f_m^*(\beta) = e^{-\beta E_m/2} Z^{-1/2}(\beta)\left\langle\tilde{m}\right| \tag{4-13}$$

En donde vemos que haciendo el producto de ambas se obtiene la relación de ortogonalidad. Ahora que tenemos una expresión para las funciones $f_n(\beta)$ expresada en función de un vector unitario de otro espacio de Hilbert y con la dependencia de la temperatura heredada de la mecánica estadística mediante la función de partición, se tiene que los estados de vacío tienen la siguiente forma:

$$\left|\mathcal{O}(\beta)\right\rangle = \sum_n f_n(\beta)\left|n\right\rangle = \sum_n Z^{-1/2} e{-}\beta E_n/2\left|n\right\rangle \otimes \left|\tilde{n}\right\rangle = \sum_n Z^{-1/2}(\beta) e^{-\beta E_n/2}\left|n,\tilde{n}\right\rangle \tag{4-14}$$
$$\left\langle\mathcal{O}(\beta)\right| = \sum_m Z^{-1/2}(\beta) e^{-\beta E_m/2}\left\langle m,\tilde{m}\right| \tag{4-15}$$

Todo lo anterior implica que los estados de vacío dependientes de la temperatura son extendidos no solo en un espacio $\mathscr{H}$ sino en una extensión de este espacio compuesto por el producto de ambos espacios:

$$\left|\mathcal{O}(\beta)\right\rangle, \left\langle\mathcal{O}(\beta)\right| \in \mathcal{H} = \mathscr{H} \otimes \tilde{\mathscr{H}} \tag{4-16}$$

En donde la parte que habita en el espacio ficticio es una reflexión matemática de lo que habita en el espacio original. Esto lleva al concepto de entrelazamiento de los estados ya que habitan en un estado superior producto de un espacio físico donde se plantea que suceden los fenómenos que se pretende modelar, y otro espacio matemático surgido de la formulación el cual no tiene una interpretación física más que servir como soporte para los cálculos.

4.1.1 Espacio de Fock

Ahora se introduce una base conveniente para reproducir el espacio de Hilbert donde habitan los estados $|n>$ y el hamiltoniano H el cual es la representación de Fock. Esta representación plantea que todos los vectores de la base se pueden construir en función del estado de vacío $|0>$ de forma que todos los vectores son aplicaciones reiterativas del operador de subida en ese espacio:

$$\left\{\left|0\right\rangle, \hat{a}^\dagger\left|0\right\rangle, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n\left|0\right\rangle\right\} \tag{4-17}$$

Siendo así, cualquier estado $|n\rangle$ se puede representar en función del estado de vacío.

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}^\dagger\right)^n |0\rangle \ , \tag{4-18}$$

Vemos que en el estado de mínima energía se puede encontrar que el número de partículas, así como la energía del sistema, resultan ser cero:

$$\langle 0| \hat{N} |0\rangle = \langle 0| \hat{a}^\dagger \hat{a} |0\rangle = 0 \qquad \langle 0| \hat{H} |0\rangle = \langle 0| \omega \hat{N} |0\rangle = 0 \tag{4-19}$$

4.1.2 Ensamble de bosones libres

Aún no estamos pensando en agujeros negros, toda la teoría anterior es pensando en un ensamble de partículas que habita un vacío dependiente de la temperatura. Siendo así, es de interés considerar el caso de un ensamble de bosones libres con frecuencia ω. Estos bosones tienen un hamiltoniano como ya lo vimos anteriormente, en función del operador número de partículas y la frecuencia. Ahora, nosotros quisieramos aplicar al desarrollo que se ha seguido la representación de Fock para poder expresar los estados $|n, \tilde{n}\rangle$ y $\langle m, \tilde{m}|$ en función de los operadores escalera, para los cuales ya conocemos las propiedades, y en función del estado de vacío clásico. Sin embargo, hay que considerar también cómo es la representación de Fock en el espacio ficticio que se construyó para expresar las funciones $f_n(\beta)$ y poder expresar los estados que habitan en ese espacio. En el espacio de Hilbert $\tilde{\mathscr{H}}$ se tiene:

$$\left\{ |\tilde{0}\rangle \, , \tilde{a}^\dagger |\tilde{0}\rangle \, , \ldots , \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\tilde{a}^\dagger\right)^n |\tilde{0}\rangle \right\} \tag{4-20}$$

Que cumple con las siguientes definiciones y reglas de conmutación:

$$\tilde{\hat{a}}^\dagger |\tilde{n}\rangle = \sqrt{n+1} \, |\tilde{n}+1\rangle \quad \tilde{\hat{a}} |\tilde{n}\rangle = \sqrt{n} \, |\tilde{n}-1\rangle \tag{4-21}$$

$$\left[\tilde{\hat{a}}, \tilde{\hat{a}}^\dagger\right] = \tilde{\hat{a}}^\dagger \tilde{\hat{a}} - \tilde{\hat{a}} \tilde{\hat{a}}^\dagger = \hat{I} \tag{4-22}$$

$$\left[\tilde{\hat{a}}^\dagger, \tilde{\hat{a}}^\dagger\right] = \left[\tilde{\hat{a}}, \tilde{\hat{a}}\right] = 0 \tag{4-23}$$

Cualquier estado $|\tilde{n}\rangle$ se puede representar en función del estado de vacío.

$$|\tilde{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\tilde{\hat{a}}^\dagger\right)^n |\tilde{0}\rangle \ , \tag{4-24}$$

Así como en el espacio de Hilbert original, vemos que en el estado de mínima energía se puede encontrar que el número de partículas, así como la energía del sistema, resultan ser cero:

$$\langle 0| \hat{N} |0\rangle = \langle 0| \hat{a}^\dagger \hat{a} |0\rangle = 0 \qquad \langle 0| \hat{H} |0\rangle = \langle 0| \omega \hat{N} |0\rangle = 0 \tag{4-25}$$

Ahora, volviendo al desarrollo que se viene siguiendo, despejamos los estados $|n\rangle$ y $|\tilde{n}\rangle$ en la expresión para los estados de vacío dependientes de la temperatura:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{O}(\beta)\rangle =& \sum_n Z^{-1/2}(\beta) e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle \\
=& \sum_n Z^{-1/2}(\beta) e^{-\beta E_n/2} \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}^\dagger\right)^n |0\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\tilde{\hat{a}}^\dagger\right)^n |\tilde{0}\rangle \right) \\
=& Z^{-1/2}(\beta) \sum_n e^{-\beta E_n/2} \frac{1}{n!} \left(\hat{a}^\dagger\right)^n \left(\tilde{\hat{a}}^\dagger\right)^n |0\rangle
\end{aligned} \tag{4-26}
$$

En donde se definió el estado de vacío para el espacio $\mathcal{H} = \mathscr{H} \otimes \tilde{\mathscr{H}}$:

$$
|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle = |0\rangle \tag{4-27}
$$

Aplicando $E_n = n\omega$, se encuentra que tanto la exponencial como los operadores de subida se encuentran elevados n veces. Con esto, se puede llegar a lo siguiente:

$$
\sum_n \frac{1}{n!} e^{-\beta n\omega/2} \left(\hat{a}^\dagger\right)^n \left(\tilde{\hat{a}}^\dagger\right)^n = \sum_n \frac{1}{n!} \left(e^{-\beta\omega/2} \hat{a}^\dagger \tilde{\hat{a}}^\dagger\right)^n = exp\left\{e^{-\beta\omega/2} \hat{a}^\dagger \tilde{\hat{a}}^\dagger\right\} \tag{4-28}
$$

Despejando, el estado de vacío resulta:

$$
|\mathcal{O}(\beta)\rangle = Z^{-1/2}(\beta) exp\left\{e^{-\beta\omega/2} \hat{a}^\dagger \tilde{\hat{a}}^\dagger\right\} |0\rangle \tag{4-29}
$$

4.2 Campos térmicos en el espacio tiempo de Kruskal

Esta sección tiene como referencia principal a *Rojas* [2018] complementado con *Pulido* [2019] y *Arenas* [2023]

Lo que se pretende es hacer ahora es una cuantización de los campos que habiten en la vecindad de un cascarón negro descrito en el espacio tiempo de Kruskal. Dichos campos se encuentran descritos a través del tensor momento energía en la ecuación de Einstein, en el marco de la gravedad. Sin embargo, cuantizar el tensor de Einstein en las ecuaciones de campo implica hablar de una cuantización de la gravedad y considerar una gravedad cuántica es algo que no se tiene. Por lo anterior, solamente se considerará eventualmente el valor esperado de la entrada $(0, 0)$ del tensor momento energía para la vecindad del objeto en estudio.

4.2.1 Estados de vacío en el espacio maximalmente extendido

Considere un campo escalar definido sobre un espacio-tiempo descrito por la siguiente expresión:

$$
ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{ab} dx^a dx^b \tag{4-30}
$$

Donde:

$$g_{00} = -f(r) = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \tag{4-31}$$

En particular, para un espacio tiempo descrito en coordenadas esféricas (usadas por la simetría de los objetos celestes) se les añade el tiempo y se considera el sistema de coordendas de Schwarzschild así:

$$x^\mu = \left(x^0, x^a\right) \quad \rightarrow x^0 = ct, \quad x^a = (r, \theta, \phi) = \vec{r} \tag{4-32}$$

En particular, para la métrica de Schwarzschild, como se estableció en (2-3), donde ya se ha implementado el hacer todas las constantes fundamentales iguales a 1: $G = c = \hbar = k_B = 1$. Se considera la expansión maximal del espacio en coordenadas de Kruskal como se estableció en la sección (2.1.4) y establecemos el campo escalar como un campo bosónico por lo que se plantea usar la ecuación de Klein - Gordon (2-51). Esta ecuación plantea un conjunto de soluciones las cuales deben ser establecidas en cada región del espacio - tiempo de Kruskal, en particular para las regiones por fuera de su horizonte de eventos: L y R. (Imagen **2-2**)

$$\left(\Box - m^2\right)\phi(x^\mu) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi(x^\mu) = \sum_\Omega \phi_\Omega(x^\mu) \tag{4-33}$$

Se establece el campo como la superposición de todas las posibles frecuencias de oscilación del mismo siendo cada uno de los campos de la siguiente forma:

$$\phi_\Omega(x^\mu) = \phi_\Omega(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{1}{\sqrt{2|\omega|}} e^{-i\omega t} \tag{4-34}$$

donde $\underline{x} = x^a = (r, \theta, \phi)$, $\Omega = \omega, l, m, k$. Aquí se ha hecho la separación de las 4 variables en distintas componentes donde los armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ contienen la parte angular tradicional, la componente $e^{-i\omega t}$ contiene la parte temporal la cual contiene la información de la frecuencia y la energía, y por último las funciones $\phi(r)$ contiene la información del comportamiento radial del campo.

Los modos de Boulware por ahora se encuentran definidos para una sola región del espacio tiempo maximalmente extendido. Se definen para las regiones I y III del diagrama **2-2** de la siguiente manera:

$$\phi_\Omega^{(\epsilon)}(x^\mu) = \phi_\Omega(x^\mu)\Theta_\epsilon(x) \tag{4-35}$$

En donde la función $\Theta_\epsilon(x)$ ubica el campo en las diferentes regiones del diagrama de Kruskal en función del parámetro ϵ el cual toma valores $+1$ si se encuentra en la región derecha (R o I) y -1 si se encuentra en la región izquierda (L o III), como se estableció en (2-33). Los anteriores son los conocidos como estados de Boulware (estado de Kruskal - Boulware) los cuales conforman un conjunto de soluciones para el campo en (4-33) y cumplen con las siguientes relación de ortogonalidad, producto interno y relación de completez:

$$\int \sqrt{-g}(-g_{00})\phi_\Omega(x^a)\phi_\Omega^*(x^a)d^3x = \delta_{\Omega\Omega'} \tag{4-36}$$

$$(\phi_\Omega(x^a)\phi_\Omega^*(x^a)) = \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\Omega\Omega'}\delta_{\epsilon\epsilon'} \tag{4-37}$$

$$\frac{1}{2}\gamma(x^a) = \sum_\Omega \phi_\Omega(x^a)\phi_\Omega^*(x'^a) = \delta^3(x^a - x'^a) \tag{4-38}$$

En donde en la relación de ortogonalidad se ha introducido un factor de corrección que se debe a que el espacio ya no es plano y la información de dicho espacio se encuentra en g. Dicho factor se suele nombrar $\gamma(x^a) = \sqrt{-g}(-g_{00})$. Por otro lado, se tiene que $\epsilon = \pm 1$, $\epsilon(\omega) = \mathbf{sign}(\omega)$ (función signo), $k = \pm 1$ y:

$$\delta_{\Omega\Omega'} = \delta_{\omega\omega'}\delta_{kk'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{4-39}$$

Ahora, reemplazando el campo (4-35) en la ecuación de campo (4-33) se halla la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f(r)\frac{d\varphi_\Omega(r)}{dr}\right) + \left(\frac{\omega^2}{f(r)} - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2\right)\varphi_\Omega(r) = 0 \tag{4-40}$$

Por otro lado, consideremos ahora los modos Kruskal-Hartle-Hawking (o solo Hartle Hawking H-H) $\chi_\Omega^{(c)}(x)$, que son modos que se construyen de los modos de Boulware y son de frecuencia positiva con respecto a las coordenadas de tiempo de Kruskal U y V de la variedad. Entonces, $\chi_\Omega^{(c)}(x)$ es de frecuencia positiva en el tiempo de Kruskal si $\omega\epsilon > 0$ y $\chi_\Omega^{(c)}(x)$ son modos de frecuencia negativa en el tiempo de Kruskal si $\omega\epsilon < 0$. Estos modos satisfacen la relación de ortogonalidad

$$(\chi_\Omega^{(c)}, \chi_{\Omega'}^{(c')}) = \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\Omega\Omega'}\delta_{\epsilon\epsilon'} \tag{4-41}$$

y están conectados con los modos de Boulware a través de una transformación de Bogoliubov

$$\chi_\Omega^{(c)}(x) = \varphi_\Omega^{(c)}(x)\cosh\chi + \varphi_\Omega^{(-c)}(x)\sinh\chi \tag{4-42}$$

donde χ está definida en términos de

$$\tanh\chi = e^{-\pi|\omega|/\kappa_0} \tag{4-43}$$

y κ_0 es la gravedad superficial. A partir de las ecuaciones anteriores se halla

$$\chi_\Omega^{(c)}(x) = \sqrt{\frac{\sinh\chi\cosh\chi}{2|\omega|}}\varphi_\Omega(\underline{x})e^{-i\omega t_{\epsilon(\omega)}\epsilon} \tag{4-44}$$

En la descripción cuántica, considérese ambos esquemas de cuantización en los esquemas de Boulware y Hawking-Hartle descritos por

$$\Phi(x) = \sum_{i,\Omega} a_\Omega^{(i)}\chi_\Omega^{(i)}(x) = \sum_{i,\Omega} b_\Omega^{(i)}\varphi_\Omega^{(i)}(x) \tag{4-45}$$

donde, a partir de la transformación de Bogolubov se encuentra

$$a_\Omega^{(i)} = b_\Omega^{(i)}\cosh\chi - b_\Omega^{(i)}\sinh\chi = e^{-iG}b_\Omega^{(i)}e^{iG} \tag{4-46}$$

y también

$$G = G^\dagger \equiv \frac{1}{2} i \sum_{\epsilon,\Omega} \epsilon(\omega)\epsilon\chi b_\Omega^{(i)\dagger} b_\Omega^{(i)} = i \sum_{\substack{\Omega \\ (\omega>0)}} \chi \left(b_\Omega^{(i)\dagger} b_\Omega^{(i-1)} - b_\Omega^{(i+1)} b_\Omega^{(i-1)} \right) = \sum_{\substack{\Omega \\ (\omega>0)}} G_\Omega \tag{4-47}$$

Bajo la segunda cuantización

$$[a_\Omega^{(c)}, a_\Omega^{(c)\dagger}] = [b_\Omega^{(c)}, b_\Omega^{(c)\dagger}] = \epsilon(\omega)\epsilon\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'} \tag{4-48}$$

adicional a lo anterior, se define el estado de vacío como

$$a_\Omega^{(c)}|0\rangle_H = 0, \quad b_\Omega^{(c)}|0\rangle_B = 0, \quad (\omega\epsilon > 0) \tag{4-49}$$

Y de acuerdo con lo anterior, estos estados de vacío se relacionan de la forma

$$|0\rangle_H = e^{-iG}|0\rangle_B \tag{4-50}$$

Donde se ha mostrado que se puede pasar de los estados de Boulware a los estados de Hartle-Hawking mediante una transformación de Bougolibov. Lo anterior no significa de alguna manera que los estados de vacío $|0\rangle_H$ y $|0\rangle_B$ son equivalentes. Una forma más explícita se obtiene mediante la factorización del operador $-iG$ en sus operadores de creación y aniquilación, que corresponde a una generalización de la identidad Baker-Campbell-Hausdorff (BCH)

$$e^{-iG_\Omega}|0\rangle_B = Z_\Omega^{-\frac{1}{2}} \sum_{n_\Omega=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta n_\Omega \omega} \left| n_\Omega^{(+)}, n_\Omega^{(-)} \right\rangle_B \tag{4-51}$$

Donde $\left| n_\Omega^{(+)}, n_\Omega^{(-)} \right\rangle_B$ es el estado de Boulware con igual número n_Ω de modos Boulware correlacionados en el estado del campo Ω en los sectores L y R. Adicionalmente β es introducido como es usual en la termodinámica solo que acá es en términos de la temperatura Hawking T_H de la forma $\beta^{-1} = T_H = \frac{\kappa_0}{2\pi}$. Luego se tiene que

$$\tanh\chi = e^{-\frac{\pi|\omega|}{\kappa_0}} = e^{-\frac{1}{2}\beta\omega}, \quad \omega > 0 \tag{4-52}$$

en donde se ha empleado

$$\cosh^2\chi = \frac{1}{1-e^{-\beta\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\omega} \equiv Z_\Omega \tag{4-53}$$

Que resulta siendo una función de partición para un ensamble gran canónico de bosones en vecindades del cascarón. Dicho ensamble no se planteó desde un principio sino que surgió naturalmente de la formulación lo que brinda rigurosidad y válidez al modelo. Con lo anterior, podemos reexpresar el estado H-H de la forma:

$$|0\rangle_H = \prod_{\omega>0} e^{-iG_\Omega}|0\rangle_B \tag{4-54}$$

$$|0\rangle_H = Z^{-\frac{1}{2}} \sum_n e^{-\frac{1}{2}\beta E_n} \left|n^{(+)}, n^{(-)}\right\rangle_B \tag{4-55}$$

donde

$$n \equiv \{n_\Omega, \quad \text{para todo } \Omega \text{ con } \omega > 0\} \tag{4-56}$$

$$E_n = \sum_{\substack{\Omega \\ \omega>0}} n_\Omega \omega, \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \prod_{\substack{\Omega \\ \omega>0}} Z_\Omega \tag{4-57}$$

Resumiendo, el estado base sobre el espacio-tiempo de Kruskal extendido maximalmente es un estado térmico de entanglement. El estado de vacío de Boulware realmente no existe como un estado globalmente definido sobre las regiones $L + R$ sino en cada una de ellas localmente dado que los modos K-B no son de frecuencia positiva en un parámetro de tiempo arbitrario, definido y regular. El estado $|0\rangle_B$ está vacío de los modos K-B $\varphi_\Omega^{(r)}$ de frecuencia positiva en el tiempo de Killing t (en la dirección futura) de cada uno de los sectores L y R. Sea el estado de Boulware local $|0\rangle_{BR}$ definido sobre el espacio de Kruskal: por lo que se encuentra

$$|0\rangle_B = Z^{-\frac{1}{2}} \sum_n e^{-\frac{1}{2}\beta E_n} |n\rangle_{BL}|n\rangle_{BR} \tag{4-58}$$

donde, $|n\rangle_{BL}$ y $|n\rangle_{BR}$ son las excitaciones de estado de Boulware local $|0\rangle_{BL}$ y $|0\rangle_{BR}$, respectivamente. De otro lado, es posible pensar que de $|0\rangle_{BR}$ como $|0\rangle_H$ despoblado de todos los modos de Boulware $|n\rangle_{BR}$ en la región R. El estado de Boulware local $|0\rangle_{BR}$ se halla vacío de modos de Killing de frecuencia positiva $\varphi_\Omega^{(+)}$ en el sector R:

$$b_\Omega^{(+)}|0\rangle_{BR} = 0, \quad \omega > 0 \tag{4-59}$$

4.2.2 Densidad de energía térmica

Cualquier tipo de información sobre como se comporta la materia y/o energía en relatividad general se espera que se encuentre en el tensor momento energía. Por eso, se calcula el valor esperado de la componente T_{00} del tensor momentum-energía con respecto a los estados de Boulware Hartle-Hawking para el campo escalar definido sobre la métrica. No se consideran otras entradas del tensor debido a que implican momentos, esfuerzos y presiones en dimensiones que se estan descartando desde la formulación del modelo. Siendo así, lo único que nos interesa es el valor de la densidad de energía en la entrada ya mencionada. En general, para el campo escalar Φ, el valor esperado del tensor $T_{\alpha\beta}(x)$ es definido como

$$\langle T_{\alpha\beta}(x, x')\rangle = \mathcal{D}_{\alpha\beta'} W(x, x') \tag{4-60}$$

$$\langle T_{\alpha\beta}(x)\rangle = \lim_{x\to x'} \langle T_{\alpha\beta}(x,x')\rangle \tag{4-61}$$

donde

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left[\partial^\gamma\left(\partial_\gamma\Phi\right) + m^2\Phi^2\right] \tag{4-62}$$

para el acople mínimo con masa;

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta'} = \partial(_\alpha\partial_{\beta'}) - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left(\partial^\gamma\partial_{\gamma'} + m^2\right) \tag{4-63}$$

y $W(x,x')$ es la función de Wightman

$$W(x,x') = \langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle \tag{4-64}$$

Para las ecuaciones anteriores, se convierte en infinita cuando $x' \to x$ porque la suma de modos

$$\int_0^\infty d\omega\varphi'_\Omega(x')\varphi_\Omega(x)\big|_{x'=x} \tag{4-65}$$

diverge cuando $\omega \to \infty$, por lo que es necesaria una regularización que involucra la sustracción de la función de Hadamard $H(x,x')$ de la función $W(x,x')$. Pero esto no será necesario, dado que solo se está interesado en las diferencias entre las funciones de Wightman asociadas a los estados de Boulware y Hartle-Hawking, y $H(x,x')$ se cancela y el correspondiente $\langle T_{\alpha\beta}\rangle$. Además el estado de Boulware $|0\rangle_B$, la función de Wightman está dada por

$$W_B(x,x') =_B \langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle_B \tag{4-66}$$

$$W_B(x,x') =_B \langle 0|\sum_{\epsilon,i,\Omega,\Omega'} b_\Omega^{(i)}\varphi_\Omega^{(c)}(x')b_{\Omega'}^{(i)'}\varphi_{\Omega'}^{(c')}(x')|0\rangle_B \tag{4-67}$$

donde la expansión es empleada. Lo cual conduce a

$$_B\langle 0|b_\Omega^{(c)}b_{\Omega'}^{(c')}|0\rangle_B = \Theta(\epsilon\omega)\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'} \tag{4-68}$$

se halla

$$W_B(x,x') = \sum_{\epsilon,\Omega}\Theta(\epsilon\omega)\varphi_\Omega^{(c)}(x)\varphi_\Omega^{(c)}(x') \tag{4-69}$$

Dado que $\varphi_\Omega^{(c)}(x)$ es proporcional a $\Theta_\epsilon(x)$, $W_B(x,x') = 0$ con la condición que x, x' se hallen en las regiones L, R. De manera similar se obtiene que $|0\rangle_H$,

$$W_H(x,x') =_H \langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle_H = \sum_{\epsilon,\Omega} \Theta(\epsilon\omega)\chi'_\Omega(x)\chi''_\Omega(x') \tag{4-70}$$

Además, empleando la transformación de Bogolibov, la función de Wightman se transforma como

$$W_H(x,x') = \sum_{\epsilon,\Omega} \Theta(\epsilon\omega)\left[\cosh^2\chi\varphi^{(c)}_\Omega(x)\varphi^{(c)*}_\Omega(x') + \sinh^2\chi\varphi^{(c)}_\Omega(x)\varphi^{(c)*}_\Omega(x')\right] \tag{4-71}$$

para cuando x, x' están en el mismo sector, pues se tiene que $\varphi^{(c)}_\Omega(x)\varphi^{(c)}_\Omega(x) \propto \Theta_\epsilon(x)\Theta_{-\epsilon}(x') = 0$, con la condición de que x, x' estén en la misma región. A partir de las ecuaciones anteriores

$$W_H(x,x') - W_B(x,x') = (W_H - W_B)(x,x') = \sum_\Omega \sinh^2\chi\left[\varphi^{(+)}_\Omega(x)\varphi^{(+)}_\Omega(x') + \varphi^{(+)}_\Omega(x)\varphi^{(-)}_\Omega(x')\right] \tag{4-72}$$

Cuando x, x' se encuentran en la misma región se puede usar la identidad

$$\Theta(\omega) + \Theta(-\omega) = 1 \tag{4-73}$$

$$(W_H - W_B)(x,x') = \sum_\Omega \frac{1}{e^{\beta|\omega|}-1}\left[\varphi^{(+)}_\Omega(x)\varphi^{(+)}_\Omega(x') + \varphi^{(-)}_\Omega(x)\varphi^{(-)}_\Omega(x')\right] \tag{4-74}$$

en donde se ha hecho necesario usar

$$\sinh^2\chi = \frac{\tanh^2\chi}{1-\tanh^2\chi} \tag{4-75}$$

para $\tanh\chi$ definida previamente. Debido a las propiedades de $\varphi^{(c)}_\Omega(x)\varphi^{(-)}_\Omega(x)$, se hace necesario restringir los cálculos a la región R o L. Si suponemos que x, x' pertenecen a la misma región, por ejemplo R se halla que

$$(W_H - W_B)(x,x') = \sum_\Omega \frac{1}{e^{\beta|\omega|}-1}\varphi^{(+)}_\Omega(x)\varphi^{(+)}_\Omega(x') \tag{4-76}$$

porque en el sector R, $\Theta_- = 0$ y $\Theta_+ = 1$, entonces se tiene

$$\varphi^{(-)}_\Omega(x)\varphi^{(-)}_\Omega(x') \propto \Theta_-(x)\Theta_-(x') = 0 \tag{4-77}$$

$$\varphi^{(+)}_\Omega(x)\varphi^{(+)}_\Omega(x') \propto \Theta_+(x)\Theta_+(x') = 1 \tag{4-78}$$

Para calcular $T_{00}(x,x')$, se ha de evaluar

$$\partial_0\partial_0 W_{H-B}(x,x')\big|_{x'=x} = \sum_{\Omega} \frac{1}{e^{\beta|\omega|}-1} \left|\varphi_\Omega(x)\right|^2 \tag{4-79}$$

tal que fue tenida en cuenta y es reducida a

$$\partial_0\partial_0 W_{H-B}(x,x')\big|_{x'=x} = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{e^{\beta\omega}-1} \times \sum_l (2l+1)\left|\varphi_{\omega l}(r)\right|^2 \tag{4-80}$$

donde se han usado las siguientes relaciones:

$$\varphi_\Omega(x) = \varphi_\omega(r) Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{4-81}$$

$$\sum_{m=-l}^{l} \left|Y_{lm}(\theta,\varphi)\right|^2 = \frac{(2l+1)}{4\pi} \tag{4-82}$$

$$\varphi_\omega = \varphi_{|\omega|l} \tag{4-83}$$

Entonces, se puede aplicar la siguiente propiedad a la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega(\ldots) = 2\int_0^\infty d\omega(\ldots) \tag{4-84}$$

El resultado de $T_{00}(x,x')$ no converge debido a la discrepancia entre los estados de Boulware y Hartle-Hawking definidos previamente. Además, la transformación de Bogolibov proporciona el factor $(e^{\beta|\omega|}-1)^{-1}$. Para completar este cálculo, es necesario expresar explícitamente $\varphi_{\omega l}$. En consecuencia, en términos de la métrica e introduciendo $\varphi(r)$ para los modos solución, se obtiene

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 f}}\psi(r) \tag{4-85}$$

aplicando a la ecuación de campo se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2(r;\omega,l)\right]\psi_\omega(r) = 0 \tag{4-86}$$

donde se ha definido k como

$$k^2 \equiv \frac{1}{f}\left[\frac{\omega^2}{f} - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2 - \frac{(r^2 f)''}{2r^2}\right] \tag{4-87}$$

también, se tiene que el horizonte se caracteriza por $r = r_0$, $f(r_0) = 0$. Así para encontrar una solución a la ecuación diferencial se ha de recurrir a la aproximación WKB (Ver anexo A) donde se identifica

$$g(r) = k^2(r;\omega,l) \tag{4-88}$$

Con la intención de no confundir la función de la ecuación genérica que plantea la aproximación WKB en (4-88) con el factor f de la métrica, se le pone g pero esta hace referencia a la función de (A-1). Lo anterior permite establecer una solución a (4-86) según (A-10):

$$\psi_{\omega l\eta}(r) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\omega}{k(r)}\right|} e^{i\int r_0 k(r')dr'} \tag{4-89}$$

donde el nuevo índice $\eta = \operatorname{sign} k(r)$ distingue entre las ondas salientes y entrantes, con $\epsilon\eta = \pm 1$. Esto resulta esencial para incorporar η en el conjunto de índices $\Omega \equiv \omega, l, m, \eta$. Es fundamental considerar la normalización de los modos WKB, de modo que los modos espaciales $\varphi_\Omega(x)$ cumplen con la condición cuando

$$\int d^3x\gamma(x)\varphi^*_{\Omega'}(x)\varphi_\Omega(x) = \delta_{\Omega\Omega'} + \delta_{\Omega\bar{\Omega}'} \tag{4-90}$$

donde

$$\Omega = \omega, l, m, \eta, \quad \bar{\Omega} = -\omega, l, m, \eta \tag{4-91}$$

$$\gamma(x) = \sqrt{-g}\left(-g^{00}\right) = \frac{1}{f}r^2\sin\theta \tag{4-92}$$

Lo que conduce a

$$\varphi_\Omega(x) = \varphi_{\omega l\eta}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{4-93}$$

$$\varphi_{\omega l\eta}(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 f}}\psi_{\omega l\eta}(r) \tag{4-94}$$

$$\iint d\theta d\varphi \sin\theta Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{4-95}$$

De lo anterior, se halla que se reduce a

$$\int dr \frac{1}{f^2}\psi^*_{\omega' l'\eta'}(r)\psi_{\omega l\eta}(r) = \left\{\delta(\omega-\omega') + \delta(\omega+\omega')\right\}\delta_{\eta\eta'} \tag{4-96}$$

Retornando al cálculo, se tiene que las ecuaciones WKB son sustituidas para hallar

$$\partial_0\partial_0 W_{H-B} = \frac{1}{4\pi^2 r^2}\int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta\omega}-1}\int_0^{l_{\text{máx}}} \frac{(2l+1)dl}{f|k|} \tag{4-97}$$

que para grandes valores de l,

$$\sum_l (\ldots) \approx \int (\ldots) dl, \quad \text{también} \sum_{\eta=\pm} (\ldots) = 2(\ldots) \tag{4-98}$$

Además, $l_{\text{máx}}(\omega, r)$ ha quedado definido de acuerdo con la condición:

$$k^2(r; \omega, l_{\text{máx}}) = 0 \tag{4-99}$$

esto es,

$$\frac{1}{r^2} l_{\text{máx}}(l_{\text{máx}} + 1) = \frac{\omega^2}{f} - m^2 - \frac{(r^2 f)''}{2r^2} \equiv p^2 \tag{4-100}$$

$$\int_0^{l_{\text{máx}}} \frac{(2l+1)dl}{f|k|} = 2\frac{1}{f}\sqrt{f} r \sqrt{l_{\text{máx}}(l_{\text{máx}} + 1)} \tag{4-101}$$

Finalmente sustituyendo en el cálculo y multiplicando por $-g^{00}$, se llega a

$$-\partial^0 \partial_0 W_{H-B} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p\omega^2 d\omega}{e^{\beta\omega} - 1} \frac{\sqrt{f}}{f^2} \tag{4-102}$$

$$-\partial^0 \partial_0 W_{H-B} = \int_0^\infty \frac{E}{e^{\frac{E}{\beta}} - 1} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \tag{4-103}$$

donde se tiene la energía local por modo E queda determinada por $E = \frac{\omega}{\sqrt{f}}$, entonces, $\beta\omega = \frac{E}{f(r)}$,

$$T(r)\sqrt{-g_{00}} = T_H = \frac{1}{\beta} \tag{4-104}$$

teniendo en cuenta la Ley de Tolman (*Tolman* [1934])

$$pdp = \frac{\omega d\omega}{f} = EdE \tag{4-105}$$

El término extra en $-T_0^0$ surge a partir de $\partial^\gamma \partial_{\gamma'} + m^2$ que es nulo con la misma aproximación. Por lo tanto

$$\lim_{x \to x'} \langle T_0^0(x, x') \rangle_{H-B} = \partial^0 \partial_0 W_{H-B} = -\int_0^\infty \frac{E}{e^{\beta E} - 1} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^4} \tag{4-106}$$

Que permite hallar la expresión para la densidad de energía térmica para el campo escalar.

4.2.3 Entropía de entanglement de Black Shells

Ahora, utilizando el valor de la densidad de energía, se procede a determinar la entropía de entrelazamiento S para el modelo de Shell. Para lograrlo, es necesario considerar la matriz de densidad ρ_H obtenida previamente y la matriz de densidad reducida $\rho^{(+)}$, expresada de la forma

$$\rho_H = |0\rangle_{HH}\langle 0| \tag{4-107}$$

$$\rho^{(+)} = \mathrm{Tr}_{B^{(-)}}\left[\rho_H\right] \tag{4-108}$$

Tal que la traza es tomada sobre los grados de libertad en la región L. Lo cual permite hallar la entropía como

$$S = -\,\mathrm{Tr}\left[\rho^{(+)}\ln\rho^{(+)}\right] \tag{4-109}$$

y la matriz densidad reducida de la forma

$$\rho^{(+)} = \frac{1}{Z}\sum_n e^{-\beta E_n}\left|\underline{\mathrm{n}}^{(+)}\right\rangle_{BB}\left\langle\underline{\mathrm{n}}^{(+)}\right| \tag{4-110}$$

donde se recuerda que la función de partición Z resultó definida naturalmente por

$$Z_\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\omega} = \frac{1}{1-e^{-\beta\omega}} \tag{4-111}$$

El sistema térmico descrito anteriormente, relacionado con la entropía de entanglement, sugiere que dicha entropía está físicamente localizada en las inmediaciones del horizonte. Esto puede calcularse en términos de la función de partición Z:

$$S = -\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln|Z| + \ln|Z| \tag{4-112}$$

que corresponde a

$$S = \beta U + \ln|Z| \tag{4-113}$$

con

$$U = \frac{1}{Z}\sum_{\underline{\mathrm{n}}} E_{\underline{\mathrm{n}}} e^{-\beta E_{\underline{\mathrm{n}}}} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln|Z| \tag{4-114}$$

Dado que para una función arbitraria $f(\omega)$ que tiende a cero como $\omega \to \infty$, se puede escribir como

$$\sum_{\Omega} f(\omega) \equiv \int_0^{\infty} d\omega N(\omega) f(\omega) \tag{4-115}$$

entonces

$$\ln|Z| = \sum_{\Omega} \ln|Z_{\Omega}| = \sum_{\Omega} f(\omega) = \int_0^{\infty} d\omega N(\omega) f(\omega) \tag{4-116}$$

donde

$$f(\omega) = \ln\left|\frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}\right| \tag{4-117}$$

Y $N(\omega)\,d\omega$ representa el número de modos $\varphi_{\Omega}(x^{\alpha})$ que se encuentran en el intervalo $(\omega, \omega + d\omega)$ para todos los valores permisibles de k, l, m. En otras palabras, para calcular S, que está relacionado con $\rho^{(+)}$ dado, basta con determinar $N(\omega)$, lo que a su vez permite contar los modos.

$$\ln|Z| = \sum_{l,n,\eta=\pm} (2l+1) \ln\left|\frac{1}{1-e^{-\beta\omega_{ln}}}\right| \tag{4-118}$$

Por lo tanto, para garantizar que S sea finita, es necesario limitar los conjuntos a $\{l = 0, 1, 2, \dots\}$ y $\{n = 1, 2, \dots\}$, ya que, en el modelo de Shell, esta condición se cumple mediante la restricción de los conjuntos $\{l\}$ y $\{n\}$. El conjunto discreto $\{\eta = \pm 1; l = 0, 1, 2, \dots; m = -l, \dots, +l\}$ está restringido por la condición impuesta sobre el número radial k, el cual se define como

$$k^2(r; \omega, l) \geq 0 \tag{4-119}$$

Esto indica que k debe adoptar valores reales; de lo contrario, $\varphi(r)$ decae exponencialmente y se vuelve efectivamente nula. Por consiguiente, para una frecuencia dada ω, se tiene que $N(\omega)$ resulta finito o puede serlo bajo una condición de contorno adecuada. Si se considera un confinamiento finito en un sistema en estado de entrelazamiento, en total conformidad con el modelo de pared que impone una condición de contorno de Dirichlet $\psi(r) = 0$ en el contorno interno $r = r_0 + \epsilon$, es posible expresar la solución obtenida mediante el método WKB para la ecuación diferencial de la forma

$$\psi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{k(r; \omega_{ln}, l)}} \sin \int_{r_0+\epsilon}^{r_n} k(r'; \omega_{ln}, l) dr' \tag{4-120}$$

donde para un modo admisible, ambos $k(r)$ y $\psi(r)$ deben desaparecer simultáneamente en n-ésimo nodo $r = r_n$:

$$\int_{r_0+\epsilon}^{r_{ln}} k(r'; \omega_{ln}, l) dr' = n\pi \tag{4-121}$$

$$k^2(r_{ln}, \omega_{ln}, l) = 0 \tag{4-122}$$

$$k^2(r';\omega_{ln},l) \geq 0, \quad r' < r_{ln} \tag{4-123}$$

Esto implica que $k(r)$ es significativamente grande en las proximidades de $r_0+\epsilon$, y disminuye a medida que r aumenta. Asimismo, si $\frac{l(l+1)}{r_0^2} > \omega^2$, entonces $k^2(r)$ eventualmente se anula; es decir, tras n oscilaciones de $\psi(r)$, se tiene que $r = r_n$. Además, el término $\frac{\omega^2}{f(r)^2}$ resulta ser muy grande cerca de la pared interna, lo que conduce a la existencia de una gran cantidad de modos l. Estos modos se encuentran confinados en una capa delgada cercana a la pared interna, con una contribución que adopta la forma

$$\propto \frac{l(l+1)}{r_0^2} \tag{4-124}$$

Esta contribución de los modos internos a $\ln Z$ y S es proporcional a r_0^2, por otro lado, los modos exteriores. Los cuales se explican a continuación:

$$S = S_{\text{wall}} + S_{\text{volumen}} \tag{4-125}$$

donde

$$S_{\text{wall}} \propto \text{área del horizonte} \tag{4-126}$$

A partir de lo anterior, se escribe

$$\ln|Z| = \sum_{l,n}(2l+1)\ln\left|\frac{1}{1-e^{-\beta\omega_{ln}}}\right| \tag{4-127}$$

En los puntos donde se aplican las condiciones de contorno, ya sea de tipo Dirichlet o de tipo Neumann, se impone alguna de dichas restricciones. Además, es cierto que cuando l y n toman valores enteros, la suma puede ser reemplazada por una integral doble, bajo la condición de que l y n se consideren como variables independientes para la integración. Para desarrollar esta integración, se efectúa un cambio de variables, tomando l y ω como variables independientes, con $n = n(\omega, l)$, y se emplean las ecuaciones anteriores, lo que necesariamente conduce a

$$n(\omega,l) = \frac{1}{\pi}\int_{r_0+\epsilon}^{r(\omega,l)} k(r';\omega,l)dr'; \quad k^2(r(\omega,l);\omega,l) = 0 \tag{4-128}$$

$$\frac{\partial n(\omega,l)}{\partial\omega} = \frac{1}{\pi}\int_{r_0+\epsilon}^{r(\omega,l)} \frac{\partial k(r';\omega,l)}{\partial\omega}dr' + \frac{1}{\pi}\frac{\partial r(\omega,l)}{\partial\omega}k(r(\omega,l);\omega,l) \tag{4-129}$$

donde el segundo término es nulo. Ahora bien, a partir de lo anterior

$$\ln|Z| = \frac{1}{\pi}\iiint_{(k^2(r';\omega,l)\geq 0)} dl d\omega dr'(2l+1)\times\frac{\partial k(r';\omega,l)}{\partial\omega}\ln\left|\frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}\right| \tag{4-130}$$

donde los límites de integración son las superficies $k^2(r';\omega,l)=0$, $r'=r_0+\epsilon$, $r'=R$, con $l\geq 0$ y $\omega\geq 0$ restringido por la condición $k^2(r';\omega,l)\geq 0$. La integración por partes conduce a

$$\ln|Z| = \frac{1}{\pi}\iiint dr'(2l+1)dld\omega k(r';\omega,l)\frac{\beta}{e^{\beta\omega}-1} \tag{4-131}$$

Siguiendo en la misma dirección se tiene

$$\int(2l+1)dlk(r';\omega,l) = \frac{1}{r'\sqrt{f}}\int_0^{L_{\text{máx}}(\omega,r')} dL\,(L_{\text{máx}}-L)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{r'\sqrt{f}}\frac{2}{3}L_{\text{máx}}^{\frac{3}{2}} \tag{4-132}$$

donde

$$L\equiv l(l+1)\leq L_{\text{máx}}(\omega,r') \tag{4-133}$$

para $L_{\text{máx}}$ queda definido por el valor que hace que $k^2=0$; entonces a partir de

$$L_{\text{máx}}(\omega,r') = \frac{r'^2}{f(r')}\left[\omega^2-\left(m^2+\frac{(r'^2f)''}{2r'^2}\right)f(r')\right] \tag{4-134}$$

Sustituyendo en el cálculo

$$\ln|Z| \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{r_0+\epsilon}^R dr'\frac{\beta}{e^{\beta\omega}-1}\frac{1}{r'\sqrt{f}}\frac{2}{3}L_{\text{máx}}^{\frac{3}{2}} \tag{4-135}$$

El siguiente paso es, a partir de lo anterior se obtiene las expresiones termodinámicas usuales en términos de la energía libre de Helmholtz F y la energía promedio U:

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln|Z| = -\int_0^\infty\frac{N(\omega)}{e^{\beta\omega}-1}d\omega \tag{4-136}$$

donde

$$N(\omega) = \frac{2}{3\pi}\int_{r_0+\epsilon}^R\frac{r^2dr}{f^2(r)}\left[\omega^2-\left(m^2+\frac{(r'^2f)''}{2r'^2}\right)f(r)\right]^{\frac{3}{2}} \tag{4-137}$$

$$U = \frac{\partial}{\partial\beta}\ln|Z| = -\int_0^\infty d\omega N(\omega)\times\left[\frac{1}{e^{\beta\omega}-1}-\beta\frac{e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega}-1)^2}\omega\right] \tag{4-138}$$

$$U = -\int_0^\infty\frac{d\omega}{e^{\beta\omega}-1}\left[N(\omega)-\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega N(\omega))\right] = \int_0^\infty\frac{d\omega}{e^{\beta\omega}-1}\omega N'(\omega) \tag{4-139}$$

con $N'(\omega)$ definido por

$$N'(\omega) = \frac{2}{\pi}\omega \int_{r_0+\epsilon}^{R} \frac{r^2 dr}{f^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\omega^2}{f} - \left(m^2 + \frac{(r'^2 f)''}{2r'^2}\right)} \tag{4-140}$$

Por lo tanto, la entropía S es

$$S = \beta(U - F) = \beta \int_0^{\infty} \frac{\omega N'(\omega) + N(\omega)}{e^{\beta\omega} - 1} d\omega \tag{4-141}$$

Para convertir las anteriores expresiones a la forma termo-estadística, se cambian las variables de integración de (r, ω) a (r, p), donde

$$p^2 = \frac{\omega^2}{f(r)} - m^2 - \frac{(r^2 f)''}{2r^2} \tag{4-142}$$

Entonces se tiene que

$$pdpdr = \frac{\omega d\omega}{f} dr \tag{4-143}$$

De lo anterior, las expresiones se reducen a

$$U = \int_{r_0+\epsilon}^{R} 4\pi r^2 dr \int_0^{\infty} \frac{E(p,r)}{e^{\beta\omega} - 1} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \tag{4-144}$$

tal que se ha restaurado explícitamente $\hbar = 1$ e introducido la energía local por modo de frecuencia ω, $E = \frac{\omega}{\sqrt{f}}$; con $\omega(p, r)$ dado por la ecuación anterior y el momentum efectivo local p. Entonces se tiene

$$\beta\omega = \frac{E}{T(r)}, \quad T(r) = \frac{\beta^{-1}}{\sqrt{f}} \tag{4-145}$$

Así,

$$U = \int_{r_0+\epsilon}^{R} 4\pi r^2 \rho(r) dr \tag{4-146}$$

con

$$\rho(r) = \int_0^{\infty} \frac{E}{e^{\frac{E}{T}} - 1} \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \tag{4-147}$$

$$E^2 = p^2 + m^2 + \frac{(r^2 f)''}{2r^2} \approx p^2 + m^2 \tag{4-148}$$

Finalmente, se obtiene que la entropía

$$S = \beta \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \omega}(\omega N(\omega)) \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} d\omega = \beta^2 \int_0^\infty \omega N(\omega) \frac{e^{\beta\omega}}{\left(e^{\beta\omega} - 1\right)^2} d\omega \tag{4-149}$$

Recurriendo a las ecuaciones anteriores

$$S = \frac{2}{3\pi}\beta^2 \iint \frac{r^2 dr}{f^2} \left(p^2 f\right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{\beta\omega}}{\left(e^{\beta\omega} - 1\right)^2} p dp f = \frac{1}{3}\beta^2 \int 4\pi r^2 \frac{dr}{\sqrt{f}} \cdot \iint \frac{p^2 e^{\beta\omega}}{\left(e^{\beta\omega} - 1\right)^2} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \tag{4-150}$$

Así,

$$S = \int_{r_0+\epsilon}^{R} 4\pi r^2 \frac{dr}{\sqrt{f}} s(r) \tag{4-151}$$

donde

$$s(r) = \frac{1}{3T^2} \int_0^\infty \frac{p^2 e^{\frac{E}{T}}}{\left(e^{\frac{E}{T}} - 1\right)^2} \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \tag{4-152}$$

El análisis anterior corresponde al modelo de pared de ladrillo *'t Hooft* [1985]. De acuerdo con este modelo, las integrales están dominadas por dos aportaciones, para $r = R$ grandes y para $r_0 + \epsilon$. La primera corresponde a un término de volumen, proporcional a $\frac{4}{3}\pi r^3$, que representa la entropía y la energía de un gas cuántico homogéneo en un espacio plano a una temperatura uniforme $\frac{\kappa_0}{2\pi}$. Esta última es la contribución del gas cerca de la pared interior $r = r_0$. Entonces, para esta última contribución se requiere introducir las aproximaciones ultrarrelativistas

$$s = \frac{4N}{\pi^2} T^3, \quad \rho = \frac{3N}{\pi^2} T^4 \tag{4-153}$$

Sustituyendo en el cálculo, se halla que la contribución de la pared a la entropía total es

$$S_{\text{shell}} = \frac{N}{90\pi\alpha^2} \frac{1}{4} A \tag{4-154}$$

donde N toma en cuenta el número de especies de las partículas, A es el área de la pared y α es la altura propia sobre la pared interior al exterior del horizonte. Ahora bien, α es un parámetro que esta relacionado con la distancia de la pared con el horizonte por lo cual se suele ajustar manualmente para dar explicación a la entropía de entropía Bekenstein-Hawking. Si se define como

$$\alpha = l_p \sqrt{\frac{N}{90\pi}}, \tag{4-155}$$

se puede encontrar que la entropía del cascarón es igual a la de Bekenstein Hawking:

$$S_{\text{shell}} = S_{BH}. \tag{4-156}$$

Sin embargo, definir α de forma manual no es más que un truco matemático ya que no se esta brindando de una relación de fondo para ese valor más que suposiciones. Por eso, es importante dejarla expresada como en la ecuación (4-154) y no olvidar que relaciona $\Delta r = r_0 - r_s$, que nunca es cero debido a que el cascarón nunca cae visto por el observador FIDO.

5 Discusión y conclusiones

5.1 Entropía a través de los modelos

En el presente trabajo se realizaron los cálculos para encontrar la entropía y otras variables termodinámicas de diferentes modelos que apuntan a brindar una explicación rigurosa de la entropía de Bekenstein - Hawking y con ella toda la aparente relación funcional entre las leyes de la mecánica de los agujeros negros con las leyes de la termodinámica. En particular se mostró brevemente el modelo de la pared de ladrillos ''Brick Wall Model'' de Gerard t'Hooft el cual fue un primer acercamiento a dicha explicación que, aunque con problemas fundamentales, alcanza a brindar una formulación cuántica a la entropía asociada al agujero negro.

Este modelo introduce varios problemas. Uno de los problemas que introduce dicho modelo es el así llamado ''problema de las especies'' en donde menciona que existe una divergencia cuando se calcula la entropía debido a que esta depende explícitamente del número de especies N, como se vió en la expresión (3-102) en donde introduce dicha variable como Z y aclara que allí se pueden tener en cuenta todos los parámetros que definen las distintas partículas como lo son espines, sabores, etc. Debido a lo anterior, G. t'Hooft explica que como no se puede acotar la cantidad de especies de partículas entonces se pierde control del comportamiento de esta entropía, además que no aparece en la entropía de Bekenstein-Hawking:

$$S_{BH} = \frac{1}{4}A \tag{5-1}$$

Más adelante se aplicó todo el modelo construido para describir la dinámica del cascarón negro el cual es un modelo que plantea una alternativa a que existan agujeros negros en el universo. Si existe un agujero negro, este representa el caso extremo del cascarón negro, que en la literatura se le conoce como objeto exótico compacto (ECO por Exotic Compact Object en inglés) ya que entre más cercano a cero sea el parámetro de compacidad ϵ del cascarón, más se acerca a ser un agujero negro. Por el contrario, entre más grande sea más se parecerá a una estrella (*Rojas C. & Arenas S.* [2020]).

Gracias a este modelo se construye una ecuación de movimiento para el cascarón mediante la cual se obtiene una expresión para su distancia radial. Con dicha distancia radial se pueden calcular variables como su área superficial o el volumen con lo que se pueden calcular variables termodinámicas como la densidad de energía, la presión y la entropía, a través de la densidad de entropía (*Robel Arenas* [2016]). De dicha integración se encuentra una nueva expresión para la entropía del cascarón (3-141) en donde se ve que depende del área del horizonte de eventos relacionado con la masa del objeto central. Aquí se evidencia uno de los resultados más importantes de este trabajo y es que ambas entropías, tanto la del agujero negro calculada por G. t'Hooft en (*'t Hooft* [1985]) (y más adelante calculada con mejor detalle por (*Mukohyama & Israel* [1998]), como la entropía calculada para el cascarón (recordando que se acerca tanto como puede al radio gravitacional pero no lo alcanza), resultan dependiendo explícitamente del área del horizonte de sucesos por lo que se concluye

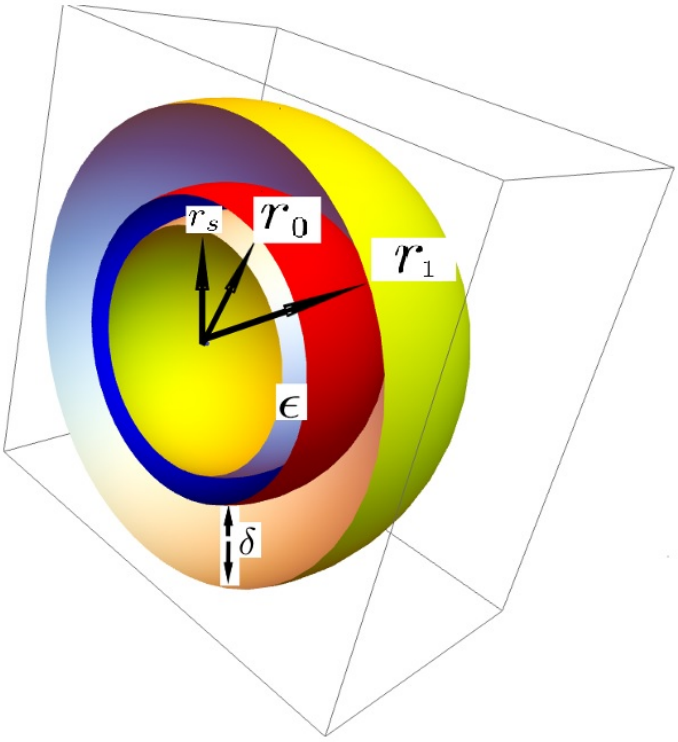

Figura 5-1: Esquema de la estructura del cascarón negro en vecindades del radio gravitacional. Imagen original de *Rojas C. & Arenas S.* [2020] con ligeras modificaciones.

que **existe una indistinguibilidad observacional** al momento de intentar determinar si un objeto es un agujero negro o un cascarón negro, desde la óptica de las variables termodinámicas.

Luego, mediante la técnica de entanglement se buscó hacer un acercamiento más profundo a la explicación de dicha entropía haciendo uso de la teoría cuántica de campos. Mediante el formalismo de Umezawa-Takahashi se brinda de propiedades cuánticas y/o termodinámicas al vacío lo que resulta revelador ya que permite obtener naturalmente dichas propiedades de los campos, como el surgimiento de una función de partición que como consecuencia establece que se esta trabajando un ensamble gran canónico en el sistema de bosones libres que surgen en cercanías del horizonte. Así, para los campos bosónicos, pero también para los fermiónicos como lo hizo *Rojas C & Arenas S* [2021], se encuentra que la entropía mediante dicha formulación se comporta de igual manera que para el agujero negro y para el cascarón negro, tanto por el camino del colapso gravitacional como por el camino de entanglement, en donde vemos que se puede establecer una relación directa entre las expresiones (3-141) y (4-154).

$$S_{\text{Shell}} = \frac{N}{90\pi\alpha^2}\left(\frac{T_\infty}{\kappa_0/2\pi}\right)^3\frac{A}{4} \quad \longleftrightarrow \quad S_{\text{shell}} = \frac{N}{90\pi\alpha^2}\frac{1}{4}A \tag{5-2}$$

Así mismo, ambas formulaciones para la entropía muestran que cuando se integra sobre el espacio, la componente relevante y dominante de **la entropía es la correspondiente con la vecindad más cerca al cascarón** siendo que incluso en la sección (3.3.1) se expone que de las dos contribuciones de la integral de la entropía, que va desde la superficie del cascarón r_0 hasta el contenedor esférico exterior que determina la vecindad del objeto L, la contribución volumétrica no contribuye considerablemente al cálculo debido a que la contribución de la pared (desde el radio del cascarón hasta cierto factor δ, se encuentra influenciada por el

factor de Schwarzschild el cual mientras más se acerca al radio del cascarón más se acerca a cero haciendo crecer enormemente el valor de $T(r)$ según la ley de Tolman (*Tolman* [1934]). Siendo así, se muestra para ambas técnicas que la entropía del objeto en estudio se encuentra ubicada en el cascarón por lo que existe una indistinguibilidad observacional entre un agujero negro y un ECO desde el punto de vista termodinámico.

Para terminar esta sección, es de interés concretar los resultados novedosos del trabajo así como el desarrollo de los objetivos del mismo:

- Desde el modelo del cascarón negro, un observador FIDO ve el colapso del cascarón y este se acerca tanto como puede al horizonte de eventos pero no llega a ver la formación de un agujero negro debido a que el cascarón alcanza un estado estático y para verlo moverse sería necesario un tiempo infinito y considerar longitudes de onda cada vez más pequeñas y cercanas a cero. La existencia de una distancia diferente de cero entre el cascarón y el agujero negro remueve el problema del Cut-off α, para un observador FIDO.
- La entropía del cascarón negro depende de forma directamente proporcional al área superficial del cascarón mientras sea definida la región más cercana al mismo, como sucede con los agujeros negros. Así, se evidencia que la termodinámica del cascarón negro se comporta de la misma manera para agujeros negros.

5.2 El problema de las especies en el cascarón negro

Este aparente problema surge desde el modelo del ‘‘Brick wall’’ en el cual, G. t’Hooft menciona la necesidad de incluir el parámetro Z que cuenta la cantidad de modos que puede tener un campo en la superficie del objeto. Así mismo, comenta la necesidad de un ‘‘cut off’’ así como establecer un límite para la infinidad de modos cerca del horizonte para evitar las complicaciones que introduce el modelo. Más allá de lo insatisfactorio e incompleto que era dicho modelo, el problema de las especies sale a flote desde ese momento y el autor *’t Hooft* [1985] propone una solución parcial y artificial a dicho problema introduciendo la dependencia de las especies en el ‘‘cut-off’’.

La idea propuesta por *’t Hooft* [1985] llevó a que varios autores propusieran distintos tipos de ‘‘cut-off’’ para dar una solución a la existencia explícita del número de especies de partículas en las expresiones de la entropía y otras variables termodinámicas. Soluciones como las propuestas en (*Dvali & Solodukhin* [2008]) y *Dvali* [2010] mencionan introducir un corte de la forma:

$$\Lambda^2 = \frac{1}{360\pi\alpha^2} = \frac{M_{\mathbf{Planck}}}{\sqrt{N}} \tag{5-3}$$

Obteniendo una expresión para la entropía de la forma

$$S_{\text{wall}} = \frac{N}{90\pi\alpha^2}\frac{1}{4}A = N\Lambda^2 A = N\frac{M^2_{\mathbf{Planck}}}{N}A = M_P^2 A \tag{5-4}$$

en donde en el artículo de origen usan Λ para expresar el cut-off y todos los términos que lo acompañan. Claramente al introducir esta expresión en la entropía (4-154) resulta eliminando la dependencia explícita del número de especies de una forma funcional. Sin embargo, como menciona *Jacobson* [1994], ‘‘Por supuesto, siempre se podría ajustar el límite manualmente para recuperar la entropía habitual del agujero negro; sin embargo, esto sería totalmente artificial’’. Y es así ya que no se esta brindando de una explicación física o desarrollo a través de algún formalismo o teoría al respecto.

También menciona algunas posibilidades como que toda la teoría construida puede ser consistente para un espectro específico de partículas, o que la longitud efectiva del cut-off depende del número de especies por alguna razón dinámica. Así mismo establece que la forma más sencilla, por ahora, de resolver dicho problema es dar por hecho que el cut-off es un número fijo y que la longitud de Planck depende del número de especies, lo que una vez más es una idea misteriosa y vaga ya que implica alguna dinámica desconocida sobre la gravedad cuántica la cual aún no ha sido desarrollada ni comprendida.

Otra propuesta que se ha desarrollado es expuesta en el artículo *Chen et al.* [2018] en donde los autores proponen una solución basada en la idea de que la entropía de un espacio-tiempo con horizonte de eventos proviene enteramente de su ''atmósfera'', un concepto que consideran un efecto cuántico puro. La atmósfera está formada por partículas reales (no virtuales) emitidas por la radiación de Hawking que están en equilibrio dinámico cerca del horizonte. Dicho argumento se encuentra respaldado por publicaciones como *L.Susskind* [2005] y *Wald* [2002] y coincide con cálculos como el modelo de ''brick wall'' de *'t Hooft* [1985]. Sin embargo, se vio en este documento cómo la contribución a la entropía contenida en el cascarón es altamente dominante comparada con la contribución de la entropía de la vecindad (atmósfera) por lo que el resultado de *Chen et al.* [2018] resulta insuficiente para los objetivos establecidos en este trabajo.

El problema radica en que los artículos anteriormente mencionados plantean el problema para un agujero negro y en dicho modelo no se puede tener información de cómo se comportan los campos ni de la cantidad de campos por lo que la aparición explícita en las ecuaciones implica la dependencia de una variable que no se puede definir. Así mismo, la naturaleza del cut-off no es clara tampoco y no hay una manera de establecerlo por lo que parece natural intentar ajustar un problema con el otro. Sin embargo, además de que ya se ha establecido que es una idea artificial, también es un modelo del cual se aleja el presente trabajo ya que todo acá se ha planteado para un cascarón negro.

El problema de las especies es aparentemente heredado de los agujeros negros, el cual necesita un enfoque diferente que es la intención principal del presente trabajo. Lo que pasa con el cascarón negro es que esta siendo observado por un observador FIDO (fiducial) el cual se encuentra ubicado en el infinito. Dicho observador no llega a presenciar la formación de un agujero negro: primero ve una contracción rápida desde la configuración inicial del cascarón. Luego, observa que el cascarón se acerca tanto como puede al horizonte pero nunca lo alcanza y se queda congelado en el tiempo en su distancia r_0.

En el modelo del cascarón negro no se puede observar lo que pasa dentro de su radio ya que hasta ahí llega el modelo pero si tiene la información de cómo se excitan los campos en las vecindades del objeto masivo que tiene un radio cercano al horizonte. Y es que, la entropía en vecindades del mismo tiene un comportamiento idéntico al del agujero negro ya que, como se vio en ambas expresiones (3-141) y (4-154), depende del área del horizonte de eventos asociada al horizonte de la masa que colapsa. Esta dependencia del área surge por efectos cuánticos pero no implica la formación un agujero negro.

El origen de esta entropía se comprende en términos de las propiedades del vacío físico en campos gravitacionales intensos como se vió en la sección (4). Dichos campos se encuentran parametrizados por el factor ϵ cuya naturaleza obedece un límite cuántico estrechamente relacionado con la entropía en la región cercana del horizonte. La entropía de entanglement es una interpretación planteada para observadores externos que no llegan a ver la formación de un agujero negro.

Así, esta entropía corresponde a la información almacenada en la materia que colapsa para formar el objeto compacto y, debido a que el área es maximizada por el equilibrio térmico durante el colapso, se puede establecer que es la entropía máxima que podría almacenarse en el material antes que se pueda formar un

agujero negro *Rojas C. & Arenas S.* [2020]. Así mismo, esta entropía puede ser calculada para uno o para N campos bosónicos, si conocemos su naturaleza debido a los formalismos utilizados para la formulación. De hecho, podemos dar una interpretación al hecho del surgimiento del número de especies en las ecuaciones y es que la entropía corresponde a cada uno de los campos que surgen en las vecindades del agujero negro y, al considerar un sistema compuesto por N campos diferentes se suman las contribuciones a la entropía de cada uno de los campos. Lo anterior es de esperarse ya que es así desde la mecánica estadística, el cual constituye la base teórica para calcular dicha expresión.

En adición a lo anterior, en *Rojas C & Arenas S* [2021] se calcula la entropía para un cascarón negro que colapsa pero para un campo fermiónico lo cual resulta en una expresión similar a la calculada para un campo bosónico:

$$S_F = \frac{\pi^2}{45\alpha^2}\left(\frac{T_\infty^3}{\kappa_0^3}\right)A \tag{5-5}$$

con energía interna:

$$E_{\mathrm{F}} = \frac{\pi^2}{60\alpha^2}\left(\frac{T_\infty^4}{\kappa_0^3}\right)A \tag{5-6}$$

La entropía fermiónica puede expresarse en función de su energía, usando $\beta = \frac{1}{T_\infty}$, como:

$$S_{\mathrm{F}} = \frac{4}{3}\beta E_{\mathrm{F}} \tag{5-7}$$

Como se vio en la sección (4.2.3), la entropía de un campo bosónico se expresa como:

$$S_{\mathrm{B}} = \frac{1}{90\pi\alpha^2}\left(\frac{T_\infty^3}{(\kappa_0/2\pi)^3}\right)A \tag{5-8}$$

A partir de la relación termodinámica para la entropía:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T_\infty}\right)_V \tag{5-9}$$

se deriva la energía libre de Helmholtz para el campo bosónico:

$$F_{\mathrm{B}} = -\frac{\pi^2}{180\alpha^2}\left(\frac{T_\infty^4}{\kappa_0^3}\right)A \tag{5-10}$$

La energía interna del campo bosónico se obtiene mediante:

$$dE = dF - T_\infty dS \tag{5-11}$$

lo que resulta en:

$$E_{\mathrm{B}} = \frac{\pi^2}{60\alpha^2}\left(\frac{T_\infty^4}{\kappa_0^3}\right)A \tag{5-12}$$

La energía interna es notablemente idéntica para ambos campos:

$$E = E_{\mathrm{B}} = E_{\mathrm{F}} = \frac{\pi^2}{60\alpha^2}\left(\frac{T_\infty^4}{\kappa_0^3}\right)A \tag{5-13}$$

La entropía del campo bosónico también satisface la relación:

$$S_{\mathrm{B}} = \frac{4}{3}\beta E_{\mathrm{B}} \tag{5-14}$$

Si los campos bosónico y fermiónico están en equilibrio térmico con el horizonte, con temperaturas $T_{\mathrm{B}} = T_{\mathrm{F}} = T_H$, la entropía total cerca del horizonte se calcula como la suma de las contribuciones individuales *Rojas* [2018]:

$$S = S_{\mathrm{B}} + S_{\mathrm{F}} = \frac{4}{3}\beta E_{\mathrm{B}} + \frac{4}{3}\beta E_{\mathrm{F}} = \frac{4}{3}\beta(E_{\mathrm{B}} + E_{\mathrm{F}}) = \frac{4}{3}\beta E \tag{5-15}$$

donde $E = E_{\mathrm{B}} + E_{\mathrm{F}}$ la suma de las energías de los campos fermiónico y bosónico. Sustituyendo la expresión de la energía total, se obtiene:

$$S = \frac{8}{3}\beta\frac{\pi^2}{60\alpha^2}\left(\frac{T_\infty^4}{\kappa_0^3}\right)A \tag{5-16}$$

con $\beta = \frac{1}{T_\infty}$. La distancia propia sobre el horizonte, α, se definió en ((3-142)) como:

$$\alpha = l_P\sqrt{\frac{N}{90\pi}} \tag{5-17}$$

donde $N = 2$ para un campo bosónico y uno fermiónico. Además, la temperatura en equilibrio con el horizonte es $T_H = \frac{\kappa_0}{2\pi}$. Incorporando estas relaciones, la entropía total se simplifica a:

$$S = \frac{1}{4}\frac{A}{l_P^2} \tag{5-18}$$

Consecuencia del resultado anterior, tanto en *Rojas* [2018] como en *Rojas C. & Arenas S.* [2020] se destaca que, para dos campos cuánticos con espines distintos cerca de un horizonte de eventos, la entropía sigue siendo proporcional al área A. Esto sugiere que la entropía no depende de la naturaleza del campo ni del número de campos en la vecindad del horizonte, y que su origen reside en el vacío térmico de la región más cercana alrededor del horizonte, independientemente del número de campos. Así, en el caso de la superposición de dos o más campos cuánticos en vecindades del radio gravitacional se espera que la entropía de Bekenstein - Hawking corresponda a la superposición de todos los campos. En conclusión, la entropía del

cascarón negro para una única especie de partícula es igual a la calculada por Mukoyahama-Israel salvo que nosotros solo consideramos una especie de partícula $N = 1$. Si se tienen más especies de partículas cada una aportará su contribución al valor total de la entropía por lo que la entropía, vista por el observador FIDO, depende del número de las especies de partículas que se encuentran en vecindades del objeto compacto.

A Apéndice : Método WKB

El presente anexo tiene como referencia a *Mathews & Walker* [1970] y brevemente a *Pulido* [2019]

El método WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) proporciona soluciones aproximadas para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes variables, de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)y = 0 \tag{A-1}$$

donde $f(x)$ debe ser una función que varíe lentamente, cumpliendo ciertas restricciones que se discutirán más adelante. Este método es particularmente útil en aplicaciones de mecánica cuántica, como en la ecuación de Schrödinger unidimensional, y fue desarrollado por Wentzel, Kramers y Brillouin. Cualquier ecuación de segundo orden lineal homogénea puede transformarse a esta forma mediante una transformación adecuada.

Aproximación inicial

Inspirados en las soluciones de la ecuación cuando $f(x)$ es constante, se propone una solución de la forma

$$y = e^{i\phi(x)} \tag{A-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, se obtiene

$$-(\phi')^2 + i\phi'' + f = 0 \tag{A-3}$$

Si se asume que ϕ'' es pequeño, se puede despreciar el término $i\phi''$, lo que lleva a la primera aproximación

$$\phi' = \pm\sqrt{f}, \quad \phi(x) = \pm\int \sqrt{f(x)}dx \tag{A-4}$$

La condición de validez de esta aproximación requiere que ϕ'' sea pequeño comparado con $|f|$:

$$|\phi''| \approx \frac{1}{2}\left|\frac{f'}{\sqrt{f}}\right| \ll |f| \tag{A-5}$$

Dado que $1/\sqrt{f}$ es aproximadamente proporcional a una longitud exponencial de la solución y, esta condición implica que el cambio en $f(x)$ debe ser pequeño en comparación con $|f|$, lo cual es intuitivamente razonable.

Segunda aproximación

Para mejorar la aproximación, se incluye el término ϕ''. De la primera aproximación, se deriva

$$\phi'' \approx \pm\frac{1}{2}f^{-1/2}f' \tag{A-6}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial, se obtiene

$$(\phi')^2 \approx f \pm \frac{i}{2}\frac{f'}{\sqrt{f}} \tag{A-7}$$

Resolviendo para ϕ',

$$\phi' \approx \pm\sqrt{f} + \frac{i}{4}\frac{f'}{f} \tag{A-8}$$

lo que lleva a

$$\phi(x) \approx \pm\int \sqrt{f(x)}\,dx + \frac{i}{4}\ln f \tag{A-9}$$

Combinando las dos soluciones (para los signos $\pm$), la solución general aproximada es

$$y(x) \approx \frac{1}{(f(x))^{1/4}}\left\{c_+ \exp\left[i\int\sqrt{f(x)}\,dx\right] + c_- \exp\left[-i\int\sqrt{f(x)}\,dx\right]\right\} \tag{A-10}$$

donde c_+ y c_- son constantes arbitrarias. Esta solución es válida en regiones donde se cumple la condición de validez, pero falla si $f(x)$ cambia demasiado rápido o si $f(x) = 0$.

Una solución particular aplicada a la ecuación bajo ésta aproximación para el cálculo es la siguiente

$$\psi = \frac{c}{\sqrt{f}}e^{i\int kdr} = \sqrt{\frac{c^2}{k}}e^{i\int kdr} \tag{A-11}$$

Para determinar c, se recurre a la condición de normalización

$$\int \gamma(\underline{x})\varphi^*_{\omega'}(\underline{x})\varphi_\Omega(\underline{x})d^3x = \delta_{\Omega\Omega'} + \delta_{\bar{\Omega}\Omega'} \tag{A-12}$$

Se debe aclara que la normalización es para las soluciones completas del estilo (4-34), donde los productos internos se calculan para hipersuperficies con $t = cte$. Así se consideran los productos $\varphi_\Omega \cdot \varphi^*_\Omega$. La integral conduce a la composición $\delta_{\Omega\Omega'} + \delta_{\bar{\Omega}\Omega'}$ puesto que $\Omega = \omega lm\eta$ y $\bar{\Omega} = \omega lm\eta$, debido al la existencia de las dos regiones desconectadas causalmente. Así la técnica que se suele usar es proponer como hipótesis

$$\psi = \sqrt{\frac{c^2}{k}} e^{i\int kdr} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\omega}{k}\right|} e^{i\int kdr},$$

y luego comprobar que satisface la integral de normalización.

Referencias Bibliográficas

Arenas, R.: , 2023; *Agujeros Negros Cuánticos*; Notas de clase; Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Observatorio Astronómico Nacional.

Arenas J. R, T. J. M.: , 2011; Entanglement entropy of black shells; *Nuovo Cimento*; **B125**: 1223--1248; doi:https://doi.org/10.1393/ncb/i2010-10922-3; URL `https://arxiv.org/abs/1108.3855v1`.

Bekenstein, J. D.: , 1973; Black holes and entropy; *PHYSICAL REVIEW D*; **7,8**: 2333--2346.

Birrell, N. D. & **Davies, P. C. W.**: , 1982; *Quantum Fields in Curved Space*; Cambridge Monographs on Mathematical Physics; Cambridge University Press, Cambridge, UK; ISBN 978-0-511-62263-2, 978-0-521-27858-4; doi:10.1017/CBO9780511622632.

Carrol, S.: , 2004; *SPACETIME AND GEOMETRY, An Introduction to General Relativity*; Addison Wesley, California Institute of Technology, Passadena, California, USA.

Charles W. Misner, K. S. T. & **Wheeler, J. A.**: , 1973; *GRAVITATION*; W. H. Freeman and Company, San Francisco, USA.

Chen, Y.-Z.; **Li, W.-D.** & **Dai, W.-S.**: , 2018; Why the entropy of spacetime is independent of species of particles: the species problem; *The European Physical Journal C*; **78**: 1--3.

Dvali, G.: , 2010; Black holes and large n species solution to the hierarchy problem; *Fortschritte der Physik*; **58** (6): 528--536.

Dvali, G. & **Solodukhin, S. N.**: , 2008; Black hole entropy and gravity cutoff; *arXiv preprint arXiv:0806.3976*.

Frolov, V. P. & **Novikov, I. D.**: , 1997; *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*; Springer, University of Alberta, Canada.

Hawking, S. W.: , 1975; Particle creation by black holes; *Commun. math. Phys*; **43**: 199--220.

Israel, W.: , 1966; Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity; *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*; **44** (1): 1--14.

Jacobson, T.: , 1994; Black hole entropy and induced gravity; *arXiv preprint gr-qc/9404039*.

L.Susskind, J. L.: , 2005; *An Introduction to Black Holes, Informa tion andtheStringTheoryRevolution(*; WorldScientific,Singapore.

Mathews, J. & **Walker, R.**: , 1970; *Mathematical methods of physics*; Addison-Wesley Publishing Company, Inc.; Second edition edición.

Mukohyama, S. & **Israel, W.**: , 1998; Black holes, brick walls, and the boulware state; *Physical Review D*; **58** (10): 104005.

Nakahara, M.: , 2003; *Geometry, Topology and Physics*; INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING Bristol and Philadelphia, Department of Physics, Kinki University, Osaka, Japan.

Pathria, R. K. & **Beale, P. D.**: , 2011; *Statistical Mechanics*; Elsevier/Academic Press, Amsterdam ; Boston; 3ª edición; ISBN 978-0-12-382188-1.

Poisson, E.: , 2009; *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*; Cambridge University Press; doi:10.1017/CBO9780511606601.

Pulido, W.: , 2019; *Observadores relativistas y termodinamica del colapso gravitacional de cascarones negros*; Tesis doctoral; Universidad Nacional de Colombia, Observatorio Astronómico Nacional, Grupo de Termodinámica de Agujeros Negros.

Robel Arenas, F. C.: , 2016; Euclidean Approach for Entropy of Black Shells; *arXiv e-prints*: arXiv:1606.06786; doi:10.48550/arXiv.1606.06786.

Rojas, W.: , 2018; *MECANICA ESTADISTICA DE LA TERMODINAMICA DE BLACK SHELLS*; Tesis doctoral; Universidad Nacional de Colombia, Observatorio Astronómico Nacional, Grupo de Termodinámica de Agujeros Negros.

Rojas C, W. & **Arenas S, J.**: , 2021; Entanglement entropy for a dirac field in a black shell; *Physical Review D*; **104** (10): 105006.

Rojas C., W. A. & **Arenas S., J. R.**: , 2020; A conceptual model for the origin of the cutoff parameter in exotic compact objects; *Symmetry*; **12** (12): 2072.

't Hooft, G.: , 1985; On the quantum structure of a black hole; *Nuclear Physics B*; **256**: 727 -- 745; doi:https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90418-3; URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321385904183`.

TAKAHASHI, Y. & **UMEZAWA, H.**: , 1996; Thermo field dynamics; *International Journal of Modern Physics B*; **10** (13n14): 1755--1805; doi:10.1142/S0217979296000817; URL `https://doi.org/10.1142/S0217979296000817`.

Tolman, R. C.: , 1934; *RELATIVITY, THERMODYNAMICS AND COSMOLOGY*; OXFORD UNIVERSITY PRESS, California Institute of Technology, Passadena, California, USA.

Umezawa, H.: , 1995; *Advanced Field Theory: Micro, Macro, and Thermal Physics*; AIP Press; ISBN 9781563964565; URL `https://books.google.com.co/books?id=KMa-lRDkhxMC`.

W. Greiner, L. N. & **Stöcker, H.**: , 1995; *THERMODYNAMICS AND STATISTICAL MECHANICS*; Springer, Institut für Theoretische Physik, Johann Wolfgang Goethe Universität, Frankfurt am Main, Germany.

Wald, R. M.: , 2002; *The thermodynamics of black holes. In: Advances in the Interplay Between Quantum and Gravity Physics, pp. 477–522*; Springer.