UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

USO DE MATERIAL CONCRETO PARA EL ACERCAMIENTO AL CONCEPTO INFINITO EN CICLO 2 DE PRIMARIA.

Karen Yulieth Peñaloza Moreno

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2024

USO DE MATERIAL CONCRETO PARA EL ACERCAMIENTO AL CONCEPTO INFINITO EN CICLO 2 DE PRIMARIA.

Karen Yulieth Peñaloza Moreno

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Oscar Iván Giraldo Galeano

Doctor en Ciencias: Matemática

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2024

Contenido

Lista De Figuras

Lista De Tablas

Lista De Imágenes

Lista De Gráficas

Resumen

La investigación aborda el desafío pedagógico de la enseñanza del concepto de infinito en la educación primaria, ciclo 2 del Colegio Fontán en Envigado, Antioquia. Para ello, se diseñó y aplicó una secuencia didáctica; donde en cada una de las tres fases estructuradas se integró el uso de materiales concretos para un acercamiento efectivo al concepto.

Tras finalizar la aplicación, se observó un progreso significativo en la comprensión del concepto de infinito. Al inicio, el 57% de los estudiantes mostraron una comprensión intuitiva del concepto, mientras que el resto se encontraba confundido o inseguro. Posteriormente, el 100% de la población logró no solo definir el infinito, sino también extrapolarlo a diversas situaciones planteadas. Del total de estudiantes, el 20% alcanzó una concepción del infinito potencial, mientras que el 80% llegó a vislumbrar el infinito real, considerado como un concepto más complejo y abstracto. De este último grupo, el 30% profundizó aún más, reconociendo que existen distintos infinitos, cada uno con características propias que pueden ser comparadas y estudiadas.

Palabras clave: Secuencia didáctica, ciclo 2 de primaria, concepto de infinito, aprendizaje por descubrimiento, motivación intrínseca.

Abstract

Use of concrete materials for approaching the concept of infinity in cycle 2 of elementary school.

The research addresses the pedagogical challenge of teaching the concept of infinity in primary education, cycle 2, at Colegio Fontán in Envigado, Antioquia. To this end, a didactic sequence was designed and implemented, where each of the three structured phases integrated the use of concrete materials for an effective approach to the concept.

Upon completing the implementation, significant progress in the understanding of infinity was observed. Initially, 57% of the students demonstrated an intuitive grasp of the concept, while the rest were confused or uncertain. Later, 100% of the students were not only able to define infinity but also to extrapolate it to various proposed situations. Of the total student population, 20% reached a conception of potential infinity, while 80% began to perceive actual infinity, which is considered a more complex and abstract concept. From this latter group, 30% delved even further, recognizing that different infinities exist, each with its own characteristics that can be compared and studied.

Keywords: Didactic sequence, Cycle 2 of elementary school, Concept of infinity, Discovery-based learning, Intrinsic motivation.

Introducción

La manera de experimentar el mundo está intrínsecamente ligada a las matemáticas, una ciencia fundamental que se entrelaza con todas las facetas de la existencia. Esta disciplina no solo permite comprender y describir con precisión el universo, sino que también se integra profundamente en las formas de expresión humana (Gutiérrez, 1991; Vasco, 1997). Las matemáticas permiten abordar un conocimiento codificado, al abrir puertas a un lenguaje universal con precisión y rigor. Este lenguaje representa la realidad de manera flexible y abstracta, donde todos hablamos el mismo idioma. (Vara, 2013)

Al dar una mirada atrás, se observa como las percepciones del mundo llevaron a matemáticos, filósofos y grandes pensadores a suscitar gran fascinación por el concepto de infinito. Desde los primeros vestigios de las civilizaciones antiguas hasta las contribuciones de grandes mentes como Georg Cantor, el infinito ha desempeñado un papel crucial en la evolución del pensamiento matemático, lógico y abstracto, al trascender y sistematizar los conceptos (Carroll & Gill, 1957). Pese a ello, este concepto fue abordado con precaución debido a su asociación con el caos y la imperfección; vinculado a una idea negativa y confusa, el concepto fue ampliamente rechazado y negado en sus inicios. (López, 2014)

Con ello, la sistematización del concepto desde los tiempos de Aristóteles ha atravesado grandes conflictos, que se originan al cuestionarse la existencia o no del infinito, así como su validez e importancia en las matemáticas (Waldegg, 1993). Al considerar la evolución del concepto de infinito hasta como se conoce hoy, se observa cuán confuso fue para los grandes pensadores desarrollar sus ideas y el tiempo que les tomó llegar a un consenso. Esto trae a colación cuán confuso es para los estudiantes, sujetos en formación, quienes no pasan por todo ese proceso de análisis, sino que se enfrentan un concepto que es válido en la actualidad e intentan usarlo.

En concordancia, en lugares de Europa y Latinoamérica se han presentado diferentes investigaciones sobre la enseñanza del infinito, los cuales dejan en claro los obstáculos que se presentan a la hora de llevar este concepto al aula. Entre ellos, el Comité Iberoamericano de Educación Matemática, en su artículo El Infinito Más Acá De Las Matemáticas, resalta la tendencia en el nivel escolar de asociar el infinito con sentimientos, eternidad y religión. Además, destaca que la comprensión de este llega únicamente al infinito potencial (incesante). Por ello, promueve que haya un acercamiento cada vez más hacia su aceptación actual (infinito real). (Millán, 2019)

Con ello, se identificaron serios obstáculos recurrentes que conllevan a dificultades en la comprensión y apropiación del concepto de infinito; estos están asociados a aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos. Así mismo, la malla curricular del área de matemáticas carece de una estructura adecuada para la enseñanza de este concepto, lo que impide que los estudiantes lo aborden de manera gradual y coherente a lo largo de su formación académica, minimizando la importancia de iniciar el proceso desde la educación primaria. A esto se añade, la percepción y el enfoque de los docentes al abordar este tema pueden crear en los estudiantes limitaciones al centrarse únicamente en el infinito potencial. (Tiemann & Vidal, 2018)

En consecuencia, al contemplar las perspectivas de diversos autores a partir de una investigación exhaustiva, se ha constatado una consistente percepción sobre las dificultades inherentes a la enseñanza del concepto matemático de infinito en el ámbito escolar. Esta indagación, enriquecida por la reflexión crítica, ha revelado la importancia de proporcionar a los estudiantes un acceso gradual y progresivo a este concepto, incentivando su participación activa en la construcción de su propio conocimiento. En respuesta a esta premisa, el presente trabajo de maestría pretende dar solución a la pregunta: ¿Qué estrategia pedagógica se puede implementar en la educación primaria para lograr en los estudiantes un acercamiento significativo del concepto de infinito y garantizar una transición efectiva a conceptos matemáticos en etapas posteriores? Para ello, se llevó a cabo una secuencia didáctica destinada a los estudiantes de quinto y cuarto grado de primaria del Colegio Fontán, ubicado en Envigado, Antioquia. Este enfoque pedagógico se enmarca dentro de la teoría constructivista y se rige en el modelo de aprendizaje por descubrimiento guiado, fundamentado en las concepciones de Jerome Bruner. Con el propósito de fomentar un aprendizaje significativo y contextualizado, se diseñarán e implementarán métodos a partir de la manipulación de material concreto, el cual servirá como instrumento facilitador en el proceso de comprensión del concepto de infinito por parte de los estudiantes.

Este texto, producto de la investigación se organiza en tres capítulos, el primer capítulo, titulado diseño teórico, establece las bases conceptuales y teóricas que sustentan el trabajo; el segundo capítulo se centra en el diseño metodológico, donde se detalla cómo se llevará a cabo el proyecto para alcanzar cada uno de los objetivos propuestos en el capítulo anterior; finalmente, el tercer capítulo, sistematización de la información, presenta de manera organizada y estructurada los datos recopilados durante la implementación de la estrategia didáctica, en este capítulo, se exponen claramente los hallazgos y la información relevante, facilitando así su análisis e interpretación.

CAPITULO I. DISEÑO TEÓRICO

Selección Y Delimitación Del Tema

Para la selección y delimitación del tema es fundamental considerar un panorama general de las matemáticas. Según Vasco (1997), las matemáticas se estructuran en tres categorías que se integran mediante un ciclo continuo. En primer lugar, se encuentran las matemáticas que el autor denomina "matemáticas realmente existentes", las cuales se refieren a las aplicaciones prácticas y cotidianas de las matemáticas en la vida diaria. Estas matemáticas son invisibles, ya que se utilizan sin prestarles mucha atención explícita. Es en este ámbito donde surgen las ideas matemáticas, en el plano espacial donde nacen los problemas, las experiencias y vivencias que proyectan necesidades. A su vez, se destaca otra categoría: La pedagogía de las matemáticas; esta no se limita solo a la transmisión del conocimiento, sino que prioriza la investigación, observación, análisis y creatividad en el ámbito escolar. Finalmente, se resalta la investigación matemática llevada a cabo con rigor científico. Esta investigación surge como respuesta a las necesidades identificadas en las primeras dos ramas.

Cada una de estas ramificaciones refina la disciplina a través de un proceso de retroalimentación cíclica. Las matemáticas están intrínsecamente ligadas a las personas y, por tanto, son una construcción social que comprende la existencia humana (Palmer, 2018). De igual manera, la matemática escolar es una sistematización del conocimiento que estimula la investigación en busca de mejoras continuas.

El presente trabajo centra sus objetivos en el diseño y aplicación de una secuencia didáctica establecida en la rama de la pedagogía de las matemáticas. El propósito es introducir a los estudiantes de ciclo 2 al concepto de infinito mediante el uso de material concreto. Esta estrategia pretende que los alumnos exploren el concepto de infinito no solo desde la perspectiva del infinito potencial de Aristóteles, sino también desde una visión más amplia, evitando así las limitaciones y obstáculos en su proceso de aprendizaje. La implementación de la secuencia didáctica busca que los estudiantes empiecen a abordar en su paso por la educación primaria el concepto infinito, que no terminará en este ciclo escolar, sino que enfrentarán en grados superiores, por ello se pretende brindar una base sólida y completa en el campo matemático, evitando que la enseñanza de este concepto quede marcada como un saber transparente o un objeto paramatemático. (Tiemann & Vidal, 2018)

Para lograrlo, es esencial tener en cuenta el nivel cognitivo de los estudiantes, pues al tomar como referencia al psicólogo cognitivo y teórico de la educación Jerome Bruner, se destaca la importancia de adaptar el material de enseñanza a las distintas etapas del aprendizaje. Por ende, se debe reconocer la disposición de los alumnos en cada fase de su desarrollo educativo, al seleccionar con cuidado el contenido a impartir y organizarlo de manera efectiva, asegurándose de que sea apropiado tanto para su edad como para sus habilidades individuales. (García, 2020)

Planteamiento Del Problema

Descripción del problema

En las instituciones educativas, se da por sentado el hecho de que, al hablar de infinito, se trabajará bajo el concepto del infinito de Aristóteles, un infinito inagotable el cual no podría estar presente totalmente en el razonamiento. Por ende, el sujeto en formación niega al infinito como un objeto que en su totalidad puede ser comparado o medido.

En el contexto actual, la noción de infinito, aunque importante en diversos campos matemáticos, no se ha incorporado en la malla curricular del área de matemáticas en la educación primaria y menos de manera específica en la educación secundaria. Se ve cómo en quinto grado de primaria no se aborda de manera directa el concepto del infinito; sin embargo, este concepto es primordial para entender otras temáticas curriculares como el conjunto de números, ubicación de números en la recta numérica, los decimales periódicos puros, periódicos mixtos y decimales no periódicos como es el caso del número Π, entre otros. Lo que contribuiría de manera directa a acercarse al infinito de manera conceptual. (Belmonte, 2011)

En el ámbito internacional, diversos estudios han señalado la importancia de abordar el concepto de infinito en la educación primaria para garantizar una transición efectiva a conceptos matemáticos más avanzados. Entre estos, destaca la investigación de Belmonte en el 2011, quien resalta que aproximadamente el 60% del conocimiento de los estudiantes sobre el infinito se basa en ideas intuitivas, lo que conduce a interpretaciones erróneas, básicas y limitadas. Sumado a ello, el primer acercamiento que tienen los estudiantes con el infinito se hace en contextos fuera del aula, generando gran importancia a los conocimientos previos que trae cada estudiante, pues, el impacto de sus ideas intuitivas sobre un infinito inagotable produce conflicto en la apropiación del infinito actual. (Crepo & Lestón, 2009)

Así mismo, Garbin en el 2005; ha abordado la problemática del infinito matemático en su dualidad Potencial-Actual, puesto que las diferentes percepciones del concepto hacen que los estudiantes desarrollen un razonamiento matemático inconsistente e incoherente a medida que avanzan en su educación. Por ende, se hace necesario preparar cimientos fuertes y consistentes en la educación.

En el ámbito nacional, se evidencia una complejidad inherente en la transición entre la percepción informal y la formalización de este concepto. Orozco en su estudio del 2019, destaca que, al introducirse conceptos formales, surge una tensión entre el infinito perceptual y el infinito formalizado. Durante esta etapa de transición, los estudiantes construyen conceptos formales, como los relacionados con el cálculo diferencial e integral, manteniendo dicha tensión entre su percepción informal y la imagen formal de los conceptos infinitos.

En sintonía con estos planteamientos, Jato en el 2012 subraya la necesidad de abordar el concepto del infinito en el contexto educativo nacional, pues a pesar de que la noción de infinito subyace en muchos de los contenidos matemáticos desde los primeros años escolares hasta niveles superiores de educación, no se presenta ni se caracteriza de manera explícita en el currículo. La falta de una introducción formal y caracterización del concepto contribuye a que los estudiantes asuman la idea del infinito como parte del sentido común, lo que, en consecuencia, puede generar dificultades al enfrentarse a conceptos que involucran colecciones infinitas o procesos infinitos.

En efecto, al enseñar en el aula un concepto tan abstracto y complejo como el infinito trae consigo grandes retos, al no encontrarlo de forma directa en su cotidianidad, al no relacionarlo con sus actividades diarias. ¿Se podría ver en la realidad una estructura infinita? Pues se percibe la costumbre de un mundo de interacciones finitas, con cálculos finitos, tiempos limitados y situaciones con un comienzo y un fin (Medina, Romo-Vázquez & Sánchez, 2019). Es ahí donde la intuición juega una mala pasada al carecer de experiencias donde se conecte el concepto infinito a la naturaleza finita; donde los pensamientos inconscientes o respuestas rápidas dan cuenta de las falencias del dominio del concepto. (Usó-Doménech, Selva & Requena, 2016)

Por tal razón, el desafío está puesto en el camino, pues en la medida en que haya experticia en el tema, pasión, recursividad y creatividad se responderá a las necesidades de los estudiantes. El infinito en los estudiantes de básica primaria es un aspecto que llama a la curiosidad, los estudiantes ven el concepto como intrigante, misterioso, mítico y hasta divino; se debe aprovechar su capacidad de asombro y no estrechar sus intereses a una simple palabra como interminable o sin fin. Los grados de básica primaria son las bases que irán nutriendo los nuevos conocimientos al entrar a la secundaria, a la educación superior o en la educación no formal, pues, en la medida que sus conocimientos previos enlacen con sus conocimientos futuros se habrá garantizado un aprendizaje consciente y completo.

Formulación De La Pregunta

En este contexto, la pregunta de investigación se centra en identificar qué estrategias pedagógicas pueden implementarse en la educación primaria para lograr un acercamiento efectivo del concepto de infinito. Esto no solo busca enriquecer la comprensión de los estudiantes sobre el infinito actual, sino también garantizar una transición efectiva a conceptos matemáticos más avanzados en etapas posteriores de su formación. Con base en lo anterior, se formula la siguiente pregunta:

¿Qué estrategia pedagógica se puede implementar en la educación primaria para lograr en los estudiantes un acercamiento significativo del concepto de infinito y garantizar una transición efectiva a conceptos matemáticos en etapas posteriores?

Justificación

El desarrollo de una secuencia didáctica para abordar el concepto de infinito en estudiantes de quinto y cuarto grado de primaria se fundamenta en varias razones educativas y pedagógicas. En el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, se ha observado que los estudiantes muestran una fascinación y curiosidad innata hacia los conceptos abstractos, siendo el infinito particularmente intrigante debido a su naturaleza y su aparente contradicción con la percepción finita del mundo. Esta secuencia didáctica no solo busca satisfacer esa curiosidad, sino también proporcionar una base sólida que facilite la comprensión de conceptos matemáticos más avanzados en etapas posteriores de la educación.

Los fundamentos de este trabajo parten de la complejidad inherente a la transición del concepto de infinito. En la práctica docente, se ha identificado que la falta de un enfoque sistemático y pedagógico sobre el concepto de infinito genera inconsistencias en el razonamiento matemático de los estudiantes. La intuición y las ideas previas sobre el infinito, a menudo erróneas o simplistas, impiden una comprensión profunda y precisa de los temas matemáticos relacionados con su grado. Por ejemplo, durante la educación primaria, exactamente en grado quinto se enfrentan a temas matemáticos que guardan relación directa con el concepto infinito, tales como las equivalencias entre fracciones y decimales, porcentajes, representación en la recta numérica, el conjunto de los números racionales en su expresión decimal, entre ellos los periódicos puros, periódicos mixtos y no periódicos, así mismo, aproximaciones por redondeo y por truncamiento (Jato,2012). Y luego, en la educación secundaria siguen profundizando y elevando su nivel al enfrentarse al crecimiento y decrecimiento de funciones, su continuidad y discontinuidad, los máximos y mínimos relativos, la representación de números irracionales y racionales en la recta numérica, la recta numérica como representación geométrica infinita, el análisis de sucesiones numéricas, progresiones aritméticas y geométricas; entre otros (Rodríguez, 2017). Por tanto, la falta de una introducción formal y caracterización explícita del concepto en el currículo contribuye a que los estudiantes desde una noción del infinito intuitiva se les dificulte la comprensión de los temas a lo largo de las matemáticas en el colegio. (Belmonte,2011)

En este contexto, se hace evidente la necesidad de diseñar una secuencia didáctica que no solo introduzca el concepto de infinito, sino que lo haga de una manera accesible, comprensible y relevante para los estudiantes de primaria. Considerando que la teoría de Jerome Bruner sugiere que el aprendizaje se basa en la experiencia y en la capacidad de idear por sí mismos, siendo los estudiantes sujetos activos, se reconoce que existen tres formas o fases en que las personas aprenden: La representación enactiva, icónica y simbólica. Este proceso no se limita a una etapa específica de la vida, sino que es continuo. (Vergara, 2017)

Al crear un espacio mediado por el docente donde el estudiante tenga la oportunidad de aprender como el protagonista de su propia experiencia, se abre camino a la importancia de reconocer que la enseñanza del infinito no debe limitarse a su mención ocasional, sino que debe integrarse de manera coherente y sistemática en el currículo. Esta integración favorecerá la transición de los estudiantes desde una comprensión intuitiva hacia una formalización más precisa y académicamente rigurosa del concepto.

Después de la implementación de esta secuencia didáctica, se espera contar con un conjunto de herramientas pedagógicas respaldadas por la investigación para mejorar la comprensión del concepto de infinito en la educación primaria, estableciendo un andamiaje firme que asegure un avance exitoso en etapas educativas posteriores. En última instancia, no se busca solo resolver el desafío inmediato en la enseñanza del infinito, sino también enriquecer la calidad del aprendizaje matemático a lo largo de la educación de los estudiantes.

Objetivos

Objetivo general

Diseñar una secuencia didáctica para el acercamiento al concepto infinito en ciclo dos de primaria del Colegio Fontán ubicado en el municipio de Envigado, Antioquía.

Objetivos específicos.

- Identificar las concepciones previas que tienen los estudiantes acerca del infinito.
- Ejecutar actividades pedagógicas que involucren material didáctico concreto para acercar a los estudiantes al concepto de infinito.
- Evaluar la efectividad y alcance de la secuencia didáctica.

Marco Referencial

Para efectos de este trabajo se tomaron en cuenta los siguientes referentes, estos contribuyen a contextualizar y fundamentar el trabajo.

Referente De Antecedentes

Referentes internacionales.

En su trabajo de 2005, Garbin deja clara su postura respecto a las etapas del desarrollo cognitivo. La primera etapa la llama: Pensamiento matemático elemental y la última Pensamiento matemático avanzado. Entre ellas, propone una fase de transición que se da entre los 15 y los 20 años de edad. En su investigación, Garbin sugiere que se debe fortalecer el tránsito a la etapa posterior, destacando que la etapa elemental será el cimiento para la construcción del conocimiento y el pensamiento matemático. Por tanto, es crucial fortalecer esta etapa elemental, evitando una postura cerrada o radical que impida el paso al concepto de infinito. Es evidente que el primer acercamiento de los estudiantes al infinito es intuitivo y no formal. Este aspecto intuitivo los lleva a una comprensión conductual; sin embargo, como rectifican Garbin y Azcárate (2001), el infinito actual no es conductual, sino contraintuitivo. El trabajo de los autores concluye que, incluso en la etapa de transición de los últimos grados de secundaria e inicios de la universidad, los estudiantes no han formalizado el concepto de infinito. Se resalta la importancia de la vinculación del estudiante con el lenguaje matemático, sus representaciones semióticas y el razonamiento matemático.

En el trabajo presentado por Jato en 2012, se puede identificar que el acercamiento al concepto de infinito se da desde los primeros años de educación primaria. En esta etapa, los estudiantes asocian de manera vivencial los procesos cíclicos, como el día y la noche, el conjunto de números naturales y el horizonte geométrico. Es aquí donde nace la curiosidad por el infinito en potencia. Sin embargo, al no tener un acercamiento formal, quedan con una concepción intuitiva del mismo. A medida que avanzan en los grados escolares y aumenta la complejidad de los temas, el infinito potencial toma protagonismo en los cursos académicos. Posteriormente, al llegar a niveles educativos más avanzados, los estudiantes se enfrentan a contenidos donde surge concretamente el infinito actual. En este punto, es evidente que no hay una preparación previa adecuada, lo que genera un conflicto entre sus percepciones previas y los nuevos conceptos que empiezan a abordar en los cursos. Jato recalca que este conflicto lógico ocurre frecuentemente alrededor de los 17 años, resultando en una contradicción difícil de resolver en tan avanzado proceso. Es evidente que deben implementarse acciones pedagógicas para prevenir los choques conceptuales que surgen al avanzar en la educación matemática.

En este orden de ideas, Vilella en el 2017, plantea una pregunta con gran trascendencia: ¿Por qué, si el concepto de infinito es tan recurrente en las matemáticas a partir de los 16 años, no se introduce en grados anteriores para encuadrar los conceptos previos informales con la formalización del mismo? Dejando en evidencia dificultades epistemológicas, didácticas y limitaciones en el conocimiento profundo de algunos docentes. Así mismo, en este trabajo deja en evidencia una serie de actividades y retos matemáticos que se pueden desempeñar en las aulas con el fin de que no sea únicamente una asimilación por encima, sino que se logre involucrar a los estudiantes desde etapas previas.

Ahora bien, la problemática que es evidente en las investigaciones anteriores no se limita al ámbito escolar; Tiemann y Vidal (2018) resaltan que en el ámbito universitario hay un conflicto al enfrentar asignaturas como cálculo y en el análisis matemático, pues es allí, donde se encuentran de frente con el concepto de manera concreta, concluyendo que se debe partir de las dificultades encontradas entre los estudiantes para crear alternativas pedagógicas y didácticas que cierren la brecha de dificultades.

Una perspectiva adicional a considerar en esta secuencia de ideas, es cómo el contexto social permea la mente de los estudiantes, moldeando la concepción que tienen del infinito; el discurso fuera del aula tiene un impacto intuitivo y subjetivo en la percepción del infinito. Se espera que el ámbito escolar funcione como un espacio donde converjan el discurso extracurricular y los conocimientos matemáticos, buscando así alcanzar una comprensión más profunda del concepto matemático del infinito. Lestón, (2009) enfatiza que son los docentes quienes deben tener la habilidad de tomar las percepciones, errores y experiencias cotidianas de los estudiantes y dirigirlas hacia preguntas reflexivas. La finalidad está en que los estudiantes se conviertan en matemáticos, filósofos o científicos, enfrentándose a preguntas grandiosas, confusas y llenas de dudas curiosas. Así, al involucrarse en este proceso de indagación y reflexión, contribuyen de manera activa a la comprensión y desarrollo de la matemática del infinito.

Por último, en el ámbito internacional, Belmonte y Sierra (2011) realizaron un estudio con dos mil estudiantes, incluyendo aquellos en el último año de primaria, con edades aproximadas entre 11 y 12 años. Este estudio también abarcó a estudiantes universitarios hasta los 19 años. Después de un análisis de los resultados, se encontró que el 60% de la población posee una noción intuitiva del infinito; esto se debe a la dualidad del concepto y a la manera en que se aborda en las clases. Con ello, es evidente que el concepto de infinito debe retomar importancia en la educación, debe ser llevado al aula con estrategias que consideren el desarrollo cognitivo del estudiante, sus dificultades al pasar de lo concreto a lo abstracto, y su percepción limitada del mundo.

Referentes nacionales.

En esta escala nacional, es crucial tener una visión del contexto en el que se ubica la enseñanza del concepto de infinito. Entre varias investigaciones a nivel curricular, se destaca el trabajo de Díaz (2016), donde se analiza la situación de la enseñanza del infinito en Colombia.

En su investigación se deja en evidencia que a pesar de que hay resultados importantes y significativos que demuestran lo valioso que es tratar la concepción del infinito de manera formal durante el proceso académico, aún no se han transformado los Estándares Básicos de Competencia para el área de Matemáticas (EBCM) ni en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) para permitir un tránsito natural y constante entre el álgebra y el cálculo donde esté presente el infinito como engranaje en cada peldaño escolar.

Esta investigación deja en claro que los parámetros generales no aportan una coherencia a nivel institucional que permita hablar el mismo lenguaje e introducir la concepción formal del infinito en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Además, resalta que, aunque no hay un referente curricular ni una estructura que dirija a las instituciones a plantearlo en sus aulas, los docentes deben ser conscientes de que hay saberes que deben llegar al aula para generar una conexión estructurada en la secuencia de contenidos a enseñar. Son ellos quienes tienen una lectura reflexiva del proceso de construcción del conocimiento en el área de matemáticas en todos los ciclos.

En conclusión, ni los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) ni los Estándares Básicos de Competencias (EBC) proporcionan un equilibrio o coherencia vertical y horizontal necesarios para una formación integral en matemáticas, lo que tiende a ser una causa de deserción educativa en la educación superior. (Díaz, 2016)

Basándose en estos principios, distintos estudios proponen aportes valiosos para enfrentar la problemática nacional. Entre ellos, en la ciudad de Sogamoso, municipio de Boyacá, Orozco (2022) se realizó un estudio con una población de estudiantes de último grado, en el cual pretendía determinar las percepciones que tienen los estudiantes y los docentes de la institución educativa. A partir de esto, se encontró un hallazgo importante, los docentes asumen el concepto de infinito de manera intuitiva. Esta situación crea una limitación y obstáculo en la didáctica presentada a los estudiantes. Se descubrió que las percepciones de los docentes tienen grandes similitudes con las de los estudiantes, ambos llegan de manera intuitiva a un infinito potencial. Con ello, se concluye la pertinencia de una formación clave en el área docente para evitar el sesgo hacia los estudiantes. Pues, estás percepciones más adelante, tendrán repercusiones en la construcción del concepto matemático.

De igual modo en Belén, Risaralda, un estudio realizado por Rodríguez en 2017, con estudiantes de décimo grado reveló que estos reconocen el concepto de infinito como un saber previo e intuitivo, influenciado por su contexto. Sin embargo, también se abordó cómo los docentes perciben el infinito, limitándolo mayormente al infinito potencial, lo que restringe su enseñanza. En el estudio, el autor como estrategia a la problemática observada implementó sesiones didácticas mediadas por tecnologías de la información y la comunicación (TIC), utilizando GeoGebra. Desde la primera sesión, se observaron avances significativos en la comprensión del concepto de infinito por parte de los estudiantes. La investigación concluye resaltando la importancia de que los docentes reciban una preparación adecuada y desarrollen estrategias didácticas en matemáticas que se ajusten a la edad y evolución cognitiva de los estudiantes, mejorando así la comprensión de conceptos abstractos como el infinito.

Otra perspectiva didáctica para el grado décimo se plasmó en el trabajo “Propuesta de actividades para potenciar la comprensión del infinito actual en estudiantes de grado décimo, un medio de aporte al desarrollo del pensamiento crítico en la escuela” realizado por Agudelo y Escobar en 2016. Este trabajo contiene una secuencia didáctica con diferentes actividades en las cuales los estudiantes desarrollan un pensamiento crítico en la construcción del conocimiento matemático. Contempla actividades partiendo desde un contexto geométrico, donde fue necesario tener preconceptos de trigonometría dado que inició con el uso de triángulos, lo que permitió posteriormente avanzar a un contexto de conmensurabilidad e inconmensurabilidad. Sumado a ello, se abordó, a partir de una secuencia de divisiones continuas, la noción de fractal, donde la figura geométrica inicial se cuenta como la unidad total o el infinito actual, dando paso al acercamiento a este concepto formal.

Estos acercamientos permitieron que los estudiantes tuvieran un contacto con situaciones que llevan a la comprensión del infinito actual. Los autores dejan claro que no se reflejó una apropiación del concepto en todos los casos, pero los estudiantes entraron en contacto con la dualidad del concepto Potencial-Actual. Destacando que un proyecto de este tipo fomenta habilidades como el análisis, la explicación, la inferencia, la evaluación y la autorregulación, las cuales son fundamentales para el pensamiento crítico, proporcionando una base para que futuros investigadores puedan continuar explorando y avanzando en el campo.

En la misma línea, Alaya (2019) llevó a cabo un estudio en Bogotá, Cundinamarca, dirigido a estudiantes de octavo y noveno grado, con el objetivo de desarrollar una propuesta didáctica en torno a las nociones del infinito. La metodología empleada consistió en la aplicación de un cuestionario, que incluía diversas tareas como la exploración de la cardinalidad de un conjunto, la distinción entre conjuntos finitos e infinitos, el estudio de secuencias y series matemáticas como el triángulo de Sierpinski, y un acercamiento al infinito actual. Este cuestionario se basó en problemas matemáticos, a veces abordados desde la historia de las matemáticas y otras veces construidos desde la experiencia en el aula. Al analizar las diferentes configuraciones epistémicas de los estudiantes, se encontró que el desempeño durante la secuencia didáctica se alineaba con observaciones previas que indican un abordaje superficial del concepto de infinito. Esta situación evidencia una falta de comprensión por parte de los estudiantes de educación básica respecto al infinito, tanto en su versión potencial como actual, a pesar de la diversidad de enfoques utilizados en la enseñanza. Esta carencia, sumada a la ausencia de actividades en el plan de estudios que profundicen en esta área, plantea dudas sobre la eficacia de la enseñanza del concepto de infinito en este nivel educativo y su importancia en la comprensión de otros principios matemáticos, especialmente en el contexto del cálculo.

Referente Teórico

En esta sección, se destaca la labor del doctor en psicología y pedagogo estadounidense Jerome Bruner, cuya carrera la dedicó a comprender los procesos de aprendizaje (Abarca, 2017). A lo largo de su vida profesional, Bruner se enfocó en varios aspectos clave del aprendizaje. No obstante, para el desarrollo de este trabajo, se abordarán los siguientes puntos específicos de su contribución:

El aprendizaje por descubrimiento, propone una experiencia en la que el estudiante participe activamente de principio a fin. El objetivo no es únicamente concluir un tema, sino también tener una visión integral y crítica de todo el proceso. Desde el inicio, el estudiante debe comenzar con motivación e interés, lo que despertará su curiosidad (Rincón, 2019). A lo largo del proceso, el estudiante, de manera autónoma, buscará profundizar en su conocimiento. El punto culminante se alcanza cuando el estudiante no solo aprende para sí mismo, sino que también logra transmitir lo aprendido, representando el nivel más alto de comprensión y dominio del tema.

Como resalta Rincón (2019) en su estudio, el conocimiento se construye a lo largo de un proceso que implica asociación, construcción y representación. Se da gran importancia a los conocimientos previos del estudiante, ya que el ser humano, por su naturaleza social, está abierto a ser influenciado por su entorno. Esta relación sociocultural lo dota de saberes previos, que deben ser el punto de partida. En el descubrimiento de su conocimiento, hay un objetivo claro y es la apropiación del conocimiento, donde el estudiante no memoriza pasivamente. En lugar de ello, al estar expuesto a temas, conceptos, investigaciones, hipótesis y experiencias, vive y siente todo el proceso, convirtiéndose en un ser auténtico y autónomo, sin la necesidad de recurrir a la mera memorización. El aprendizaje por descubrimiento tiene sus orígenes en método propuesto por Sócrates, el método de redescubrimiento, mediante el cual se da un intercambio de ideas, con argumentos y preguntas claves que fomenta la comprensión profunda y la construcción colaborativa del conocimiento. (Ventura, 2016)

Tomando como base el análisis de Bruner, resaltado por Ventura (2016) en su tesina, se observa una respuesta a la crisis del sistema educativo de la época, caracterizado por una corriente conductual en la que el estudiante era un sujeto pasivo que recibía el conocimiento del maestro. En contraposición a este modelo, Bruner introduce el aprendizaje por descubrimiento como una alternativa radical.

Bruner distingue dos enfoques para abordar los contenidos, manera intuitiva y de manera analítica. La primera, menos rigurosa, es más visual y representativa, basada en las primeras impresiones que el estudiante recibe en su entorno, ya sea en casa, en el colegio o en el aula. La segunda, la analítica, implica un proceso más riguroso y profundo, donde se replantean ideas, se comprueban hipótesis y se garantiza la validez del conocimiento adquirido. Los autores subrayan que no todos los conocimientos deben abordarse de la misma manera, y que es posible utilizar el pensamiento que mejor se adapte al contexto y al tipo de contenido. Asimismo, resulta esencial cultivar y disciplinar el pensamiento intuitivo, dado que constituye la base fundamental para el robustecimiento de nuestras capacidades analíticas.

Sumado a el aprendizaje por descubrimiento, se abre paso a lo que en las obras de Bruner se denomina *"La Teoría de la instrucción*". La teoría de la instrucción complementa el aprendizaje por descubrimiento, donde se destaca el rol crucial del docente como guía en el proceso educativo; el estudiante, siendo el protagonista, se beneficia de la dirección del maestro para adquirir conocimientos de manera efectiva, siguiendo objetivos claros y abriendo nuevas perspectivas. El docente no solo facilita el aprendizaje, sino que también eleva los estándares de acuerdo con las capacidades individuales y ritmos de aprendizaje, proporcionando una visión global que ayuda al estudiante a identificar áreas de mejora y autoexigirse más. En este proceso, los errores son vistos como oportunidades para reflexionar sobre lo aprendido y lo que aún falta por dominar, integrando así el conocimiento de manera significativa en la vida del estudiante (Ventura, 2016). La relación de autoridad entre estudiante y maestro permite establecer una estructura conceptual secuenciada, que va desde lo más básico hasta lo más complejo, según la perspectiva de Bruner.

Jerome Bruner, uno de los educadores más influyentes del siglo XX, dedicó sus investigaciones a profundizar en la manera en que las personas adquieren, procesan y retienen información de manera significativa, destacando la complejidad de la mente humana y la variedad de parámetros que influyen en este proceso (experiencias, expectativas, vivencias, sentimientos, valores, entre otros). En su *teoría cognitiva*, Jerome Bruner enuncia que "Cualquier asignatura puede enseñarse eficientemente en una forma intelectualmente honesta a cualquier niño en cualquier nivel de desarrollo" (Abarca, 2017). Según esta perspectiva, el desarrollo cognitivo no se limita a una etapa específica de la vida, sino que es un proceso continuo que abarca todas las edades. A partir de ello, Bruner propone tres formas o fases de aprendizaje la enactiva, la icónica y la simbólica.

Los siguientes párrafos toman ideas de Bruner, J. S. (2018):

> *La forma enactiva se caracteriza por codificar la información a través de acciones y respuestas motoras, almacenando experiencias directas en la memoria. Este tipo de aprendizaje se logra mediante la interacción directa con los elementos, como aprender a utilizar herramientas o practicar habilidades físicas, siendo una fase vivencial.*
>
> *La forma icónica, en cambio, implica el almacenamiento de información en la memoria a través de imágenes mentales y representaciones visuales. Los individuos pueden evocar mentalmente imágenes de objetos, personas o eventos sin necesidad de acción física directa, facilitando así la memoria y el pensamiento visual.*
>
> *Por último, la forma simbólica permite al individuo utilizar sistemas*

simbólicos, como el lenguaje, para representar la realidad de manera abstracta y flexible. Este tipo de aprendizaje no depende de la interacción física con objetos ni de imágenes mentales, sino de símbolos convencionales que facilitan la comunicación y el aprendizaje eficiente al estandarizar el medio de expresión.

En su última época, Jerome Bruner transitó de explorar el aprendizaje desde una perspectiva cognitiva hacia un enfoque más cultural a medida que desarrollaba su teoría amplió su visión para entender cómo el contexto cultural y social influyen en los procesos cognitivos (Camargo & Hederich, 2010). Bruner reconoció la importancia de que las actividades educativas preparen a los estudiantes como futuros miembros de la sociedad, enfrentando diversos retos y desafíos. Así, destacó que el trabajo académico debe ser un medio para fortalecer habilidades como la negociación, el intercambio de ideas, la participación en debates y la argumentación, todos fundamentales para enfrentar situaciones de la vida real. (Guilar, 2009)

En concordancia, las matemáticas son una ciencia que se debe ligar con nuestra propia existencia. Al involucrarnos en esta ciencia se obtiene mentes con un gran pensamiento lógico, analítico y reflexivo. Seres capaces de analizar y ver las condiciones del medio para proponer soluciones o rutas alternativas. Es por ello que, no se puede dejar de lado un factor crucial, *la motivación intrínseca*, es decir, ese impulso interno que lleva a una persona a realizar una actividad por el propio placer y satisfacción que esta le proporciona, en lugar de por recompensas externas. En el contexto educativo, la motivación intrínseca es crucial porque fomenta un aprendizaje profundo y duradero. Este tipo de motivación resulta en una participación más activa y comprometida en el proceso educativo. Como indican Deci y Ryan (2000), cuando las personas están intrínsecamente motivadas, se involucran en actividades que encuentran interesantes y desafiantes, lo que a su vez promueve un aprendizaje más profundo y sostenido.

Además, en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, es fundamental considerar que su proceso no solo considera estudiar, ejercitar y recordar un listado de contenidos matemáticos que son transmitidos o enunciados en definiciones, propiedades de objetos matemáticos, axiomas, teoremas y procedimientos algorítmicos, sino reconocer que también los diferentes tipos de pensamiento lógico y matemático que los estudiantes deben desarrollar para lograr una comprensión profunda y significativa. Con ello garantizamos una ciudadanía crítica, con razones argumentadas para la discusión y toma de decisiones que lleven a nuestra sociedad al siguiente nivel. En este contexto, los cinco pensamientos matemáticos — El numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional — juegan un papel crucial. A continuación, se presenta una interpretación y síntesis de los pensamientos matemáticos, realizada a partir del texto de Estándares básicos de competencias en matemáticas:

El pensamiento numérico y los sistemas numéricos: El pensamiento numérico es la capacidad cognitiva de entender, manipular y aplicar conceptos numéricos en diversos contextos. Se destaca por la comprensión profunda de los sistemas numéricos, desde los más simples hasta los complejos, utilizando sistemas de numeración apropiados. No se limita a la mera manipulación aritmética, sino que implica el razonamiento sobre la estructura y relaciones entre los números, aplicándolos tanto en situaciones reales como abstractas. Fortalece habilidades cognitivas y analíticas esenciales en la educación básica y media, promoviendo una comprensión integral de los conceptos matemáticos.

El pensamiento espacial y los sistemas geométricos: El pensamiento espacial es una capacidad cognitiva fundamental para construir y manipular representaciones mentales de objetos en el espacio, comprendiendo sus relaciones y transformaciones. Va más allá de la percepción física superficial, implicando la coordinación de diversas representaciones para desarrollar nuevos enfoques conceptuales. Esta habilidad es crucial en educación, facilitando la exploración y representación del espacio, así como el desarrollo de habilidades analíticas y creativas para resolver problemas en disciplinas diversas.

El pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas: Lo fundamental del pensamiento métrico radica en la comprensión profunda de magnitud. Este pensamiento va más allá de simples cálculos numéricos, abarcando la estimación de medidas y la apreciación de rangos, esenciales para conectar las matemáticas con otras disciplinas y con la vida cotidiana. Este pensamiento, proporciona un lenguaje común para expresar y entender medidas y cantidades en diferentes contextos y culturas, facilitando la comunicación precisa y efectiva entre personas y países.

El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos: El desarrollo del pensamiento aleatorio en un estudiante implica cultivar habilidades fundamentales para manejar la incertidumbre y el riesgo en diversas situaciones. Esto incluye la capacidad de modelar fenómenos complejos mediante la teoría de probabilidades y la estadística, así como de realizar simulaciones y experimentos virtuales para explorar diferentes escenarios. Estas habilidades no solo fortalecen la capacidad del estudiante para tomar decisiones informadas en contextos de incertidumbre, como en ciencias naturales, economía y planificación estratégica, sino que también son fundamentales para interpretar y analizar datos estadísticos con precisión.

El último pensamiento es *el variacional y los sistemas algebraicos y analíticos,* fundamental en matemáticas debido a su capacidad para modelar y analizar cambios y variaciones en diferentes contextos. Este tipo de pensamiento se centra en comprender cómo y por qué las cantidades y magnitudes varían a lo largo del tiempo o en diferentes condiciones. Utilizando sistemas de datos y representaciones gráficas, se pueden identificar patrones de cambio, determinar la magnitud de esas variaciones y calcular tasas de cambio precisas. Además, el desarrollo del pensamiento variacional incluye el estudio de conceptos matemáticos relacionados con procesos infinitos, esenciales en el análisis matemático avanzado. Esto permite no solo describir fenómenos naturales y sociales, sino también formular modelos matemáticos que ayudan a predecir comportamientos futuros y tomar decisiones informadas en diversas áreas del conocimiento.

Entender y desarrollar cada tipo de pensamiento matemático, desde el numérico y el espacial hasta el métrico, aleatorio y variacional, no solo enriquece el currículo educativo, sino que transforma la experiencia de aprendizaje de los estudiantes de manera fundamental. Al cultivar estas capacidades, no solo se proporcionan herramientas para resolver problemas concretos o abstractos, sino que también se moldea la manera en que los estudiantes interactúan con el mundo que los rodea.

Un docente que domina los pensamientos matemáticos transforma su enseñanza al centrarse no solo en la transmisión de conocimientos, sino en cultivar habilidades cognitivas críticas y aplicables. Esto se traduce en diseñar actividades que fomenten el razonamiento abstracto y visual, la resolución de problemas contextualizados y la comprensión profunda de medidas, probabilidades y cambios en diferentes situaciones, preparando a los estudiantes para ser pensadores matemáticos versátiles y adaptativos en un mundo cada vez más complejo y dinámico.

En este punto es crucial crear una sinergia que promueva un aprendizaje profundamente significativo, donde no solo se prioricen los conceptos matemáticos, sino que también se estimule la exploración activa, la resolución de problemas auténticos y su aplicación en contextos reales. Este enfoque ideal, aspira a cultivar un entorno donde los estudiantes desarrollen habilidades sólidas de razonamiento, comunicación y colaboración. De este modo, se establece un ambiente educativo dinámico donde los estudiantes se convierten en investigadores y arquitectos activos de conocimiento matemático, preparándolos así para enfrentar desafíos futuros con confianza y una base de habilidades profundamente arraigada.

Referente Conceptual-Disciplinar

A lo largo de la historia de la humanidad, el infinito ha estado asociado con una naturaleza abstracta, siendo objeto de reflexión en diferentes disciplinas como la matemática, la física y la filosofía. La humanidad ha evolucionado su comprensión y aplicación a partir de debates, controversias, demostraciones, entre otros argumentos fundamentados; lo cual da un indicio de la complejidad de definir el concepto. Se está ante un concepto que evolucionará con el tiempo y traerá a medida que la ciencia y la tecnología avanzan con más rigurosidad. (Díaz-Chang & Arredondo, 2023)

A pesar de los diferentes abordajes en cada disciplina, el enfoque nuestro estará en el campo de las matemáticas, ciencia que se encarga de magnitudes definidas, cantidades medibles, patrones, entre otras aplicaciones (Bell, 2021). Sin embargo, hay una contradicción al referirse a el infinito, el cual, por su propia naturaleza, no se puede contar (Usó-Doménech, Selva & Requena, 2016). Estos conflictos de relaciones teóricas llevaron a debates en la antigua Grecia.

El infinito tiene sus inicios en un sentido divino, fue denominado como Ápeiron por Anaximandro, quién en búsqueda de una explicación racional del mundo da sentido a la teoría de que el universo se originó a partir del Ápeiron, una sustancia primordial e ilimitada que no puede ser definida o comprendida por el ser humano, es todo, no hay nada fuera de él. Siendo uno de los primeros filósofos del siglo VI a. C en hablar del concepto; perteneciente a la escuela de Tales de Mileto. El Ápeiron es, por tanto, el principio fundamental del universo y la fuente de todo lo que existe. (Kirk, Raven & Schofield, 1983)

Posteriormente, para refutar y complementar los pensamientos de Anaximandro, apareció en la Metafísica de Aristóteles, distinciones sobre la diferencia de estar en potencia y estar en acto. Este filósofo argumentaba que la totalidad de números no podían estar presentes en nuestro razonamiento, ya que, sería imposible listar uno a uno, pues, siempre habría un número que no había sido considerado antes. Por ello, argumentó que el Ápeiron era inagotable, es decir, sin límite. Entonces, no podía ser visto como una totalidad completa, dado que lo que se completa tiene fin, tiene un elemento límite. Por tanto, el infinito debe ser considerado como algo que sólo tenía una existencia potencial, y no como algo manifestado realmente, en otras palabras, argumentó que el infinito es potencial y no real. (Díaz-Chang & Arredondo, 2023)

Dado el primer acercamiento de Aristóteles a un infinito potencial; es decir, una situación abstracta que sigue y sigue sin fin alguno o lo que es equivalente a enunciar que queda inconcluso; se abre el debate con la pregunta ¿Existen tipos de infinito? ¿Cuáles serían estos? En primer lugar, se encuentra el infinito potencial, un ejemplo típico de los estudiantes es básica primaria: “Los números naturales 1, 2, 3, 4, 5 …; una serie de elementos que puede seguir indeterminadamente”; lo anterior un claro ejemplo de un infinito potencial, ya que nunca termina y siempre se puede agregar otro número. Mientras que, el infinito real se refiere a una cantidad que es verdaderamente infinita y puede ser medida o comparada con otra cantidad. El infinito real no es ese número inalcanzable que cada vez se hace más grande, al cual no vamos a llegar abordar nunca, no, el infinito real es el objeto total visto como una entidad completa que puede ser estudiada, comparada y abordada generalmente. (Medina, Romo-Vázquez & Sánchez, 2019)

Después del infinito potencial e inagotable que planteó en primera instancia Aristóteles, varios matemáticos y filósofos griegos le evadía al concepto y trataron de evitarlo; se rehusaban a aceptarlo dados sus cuestionamientos, inconsistencias y paradojas. En el siglo III a. C los matemáticos pitagóricos mantenían una postura de rechazo hacia los números irracionales, puesto que, la aceptación de estos desafiaba su visión de que todas las cosas podían expresarse mediante números enteros o fracciones simples, destruyendo su ideal de que los números estaban relacionados con las proporciones y la armonía. Hípaso de Metaponto, miembro destacado de la escuela pitagórica, divulgó la existencia de magnitudes no medibles, al revelar el secreto generó pánico, pues ponía en peligro los principios sagrados de la escuela.

La evolución de lo que se acepta hoy como infinito, estuvo marcada por la imposibilidad de aceptar números que no tienen una medida común, es decir, números que no se pueden representar como cocientes de dos enteros, el miedo de no encontrar armonía en la estructura del universo y la angustia de no poder encontrar patrones en lo números. Según Díaz & Vilela, 2005, "El gran mérito de los pitagóricos fue reformular toda su teoría anterior para evitar encontrarse con los inconmensurables. Así, transformaron su teoría de proporciones en una de transformación de áreas, evitando por poco el desastre" de alguna manera estaban tratando de hacerlos ver como irrelevantes y que las matemáticas pudieran seguir adelante sin ellos.

Sumado a lo anterior, se hizo cada vez más reiterativo la incomodidad al infinito. Al analizar historia no puede separarse del aspecto filosófico y religioso pues tenía gran influencia en sus pensadores, por tanto, se evidencia en la época una postura denominada "El horror al infinito"; esto es, enfrentarse a la noción de una existencia eterna, una sensación de ansiedad o terror dada la lucha mental por comprender lo que está más allá de los límites finitos encontrando dificultad para imaginar la noción de lo infinito (López, 2014). En el siglo V a.C. la filosofía eleática planteó por primera vez problemas asociados a sucesiones y series a través de las paradojas de Zenón de Elea, sus paradojas tenían como objetivo darle valor a su teoría: El espacio y el tiempo eran indefinidamente divisibles, es decir, hay una aparente imposibilidad de movimiento (Sasso, 2018). Mientras que otros consideraban que el espacio y el tiempo estaban formados por pequeños intervalos indivisibles y en ese caso el movimiento se constituía por una sucesión de pequeños saltos. Las paradojas de Zenón, donde a groso modo plantean que el movimiento es imposible pues, el objeto de estudio debe atravesar la mitad para llegar al fin, y antes la mitad de la mitad, y antes la mitad de la mitad de la mitad, y antes y así sucesivamente…, dicho en otras palabras, que el resultado de la suma infinita de cantidades finitas no puede ser finito; dado que tiene términos indefinidos.

Al paso del tiempo, diversos pensadores han planteado reflexiones y han desarrollado conceptos relacionados con el infinito y los infinitesimales. En el siglo V (499-428 a.C.), Anaxágoras argumentó que no hay límite en la pequeñez ni en la grandeza, sino que siempre existirá algo aún más pequeño o más grande. Esto implica que cualquier magnitud puede seguir siendo dividida en partes más pequeñas o crecer hacia magnitudes mayores de forma ilimitada. Por otro lado, se introduce el método de exhaución de Eudoxo, el cual se basa en la idea de aproximar el área o el volumen de una figura irregular mediante la subdivisión de dicha figura en partes más pequeñas y más fácilmente calculables. Luego, se calculan las áreas o volúmenes de estas partes más pequeñas y se suman para obtener una aproximación del área o volumen total de la figura. (Díaz-Chang & Arredondo, 2023)

En el desarrollo del Cálculo Infinitesimal, numerosos estudiosos han dejado su huella. A partir de los trabajos de matemáticos griegos como Arquímedes, se comenzaron a utilizar técnicas infinitesimales para el cálculo de áreas y volúmenes. Posteriormente en la modernidad, se destacan pensadores matemáticos como Galileo Galilei, Johannes Kepler y Bonaventura Cavalieri quienes contribuyeron a esta etapa inicial del cálculo infinitesimal. (López, 2014)

Se hace conveniente mencionar a Galileo Galilei (1564-1642) quien sienta un precedente de que el infinito actual puede ser visto como una totalidad y ser comparado, su estudio generado a partir de objetos geométricos como las líneas, hace referencia al infinito actual teniendo en cuenta cada uno de los elementos que lo conforman y a su vez la posibilidad de dividirlos en sí mismos. (Valderrama, 2017)

Con base en los estudios de recopilación y estructura que tienen los autores López, 2014 y Díaz-Chang & Arredondo, 2023 se trae a continuación una síntesis crítica de las situaciones que merecen destacarse pues marcaron la evolución del infinito hasta los conceptos de Cantor en la actualidad:

En el siglo XV, retomando ideas de los antiguos griegos, Nicolás de Cusa planteó la idea de que un círculo era un polígono con un número infinito de lados, lo que implicaba asumir el infinito real como el resultado final de un proceso iterativo. Kepler, por su parte, avanzó en la idea de límite al identificar una curva como la suma infinita de segmentos infinitamente pequeños y un área como la suma infinita de rectángulos infinitamente pequeños. Marcando un hito en la historia del concepto, pues se sobrepasa el infinito inagotable al aceptar al infinito como una totalidad.

En conexión con las ideas de Kepler y Galileo, Cavalieri desarrolló el método geométrico de "indivisibles" para el cálculo de áreas, sentando las bases de los métodos infinitesimales posteriores. El trabajo de Cavalieri también conocido como modelo collar de perlas, considera que una línea está compuesta por puntos, un plano está compuesto por líneas y un sólido está compuesto por planos. Es decir, se concibe la construcción de objetos más complejos a partir de unidades más simples y básicas.

En el siglo XVII, John Wallis introdujo el símbolo del infinito (∞) y desarrolló el análisis de series infinitas utilizando la progresión geométrica. Sus ideas diferían de los conceptos anteriores de "indivisibles", ya que descomponía figuras en bloques infinitamente delgados que mantenían la misma dimensión que la figura original. Estas innovaciones sentaron las bases de los métodos modernos de integración y abordaron problemas de dependencia, inalcanzabilidad y divergencia (Jato, 2012). El símbolo del infinito es un ejemplo destacado de cómo los símbolos matemáticos permiten expresar ideas complejas de manera precisa y concisa, haciendo que los conceptos abstractos sean más concretos y manejables. Esto crea un lenguaje universal que puede ser comprendido por matemáticos de todo el mundo, independientemente del idioma que hablen, facilitando así la colaboración y comunicación global en la comunidad científica y académica. En el siglo XVIII, el símbolo del infinito se asoció con infinitesimales debido al trabajo en cálculo, y en el siglo XIX, con los avances en el área, se relacionó con la noción de límites, series y sucesiones. (Jato, 2012)

Más tarde, en los años 1879 y 1897, Georg Cantor estableció los conceptos fundamentales de los ordinales y cardinales transfinitos en la teoría de conjuntos. Cantor demostró que existen diferentes tamaños de infinito. Al más pequeño de todos estos cardinales infinitos, el cardinal de los números naturales, lo llamó Álef 0 (álef es la primera letra del alfabeto hebreo); un infinito "contable"; esta es la representación de la cardinalidad (o tamaño) de conjuntos infinitos que pueden estar bien ordenados; estableció una correspondencia biunívoca con otros conjuntos contables y ordenados. A los siguientes cardinales infinitos los llamó Álef 1, Álef 2, Álef 3, etc. Todos estos cardinales de conjuntos infinitos se conocen por el nombre de cardinales transfinitos. El símbolo de aleph es (א). (García & Arias,2019)

Los conceptos de Cantor desafiaron la idea de que el todo es siempre mayor que cualquiera de sus partes, y su trabajo fue fundamentado en la noción del infinito actual. Estas ideas revolucionaron nuestra comprensión del infinito y sentaron las bases para la teoría de conjuntos moderna.

Este recorrido a grandes rasgos de la evolución del infinito hasta como hoy lo conocemos en la disciplina, tiene el objetivo de resaltar cada uno de los grandes pensadores matemáticos, lógicos, filósofos y escritores que dedicaron sus días a refutar argumentos y brindar justificaciones sobre un concepto tan confuso y abstracto. Reflexionar sobre el tiempo que les tomó desarrollar sus ideas y llegar a un consenso, así como el nivel de confusión que experimentaron, resalta lo desconcertante que puede ser para quienes no atraviesan ese proceso de evolución y comprensión. En las instituciones de formación, se da por sentado el hecho de que al hablar de infinito se trabajará bajo el concepto del infinito de Aristóteles, un infinito inagotable el cual, no podía estar presente en nuestro razonamiento en su totalidad. Por ende, el sujeto en formación niega al infinito como un objeto que en su totalidad puede ser comparado o medido.

Por tanto, al llevar afirmaciones al aula de clase como: “Hay tantos números pares como números naturales”, choca nuestro razonamiento con la intuición de creer que el todo es mayor que las partes del mismo, pues si analizamos que los pares son solo algunos de los enteros, entonces debería haber más enteros que pares, aunque ambos sean infinitos. Ahí es cuando vemos la importancia de que no se pueden dar afirmaciones sueltas a los estudiantes para que las asuman como certezas indiscutibles, pues existen conceptos que no se pueden analizar por simple intuición.

Otro ejemplo para llevar analizar a nuestras aulas es como entender la equivalencia de conjuntos infinitos similares. Asociando equivalencias entre los enteros positivos y los enteros negativos, y luego analizando la equivalencia entre los conjuntos de los enteros positivos y los enteros pares positivos. Teniendo presente que los conjuntos equivalentes son aquellos que poseen la misma cardinalidad, que es el número de elementos que contiene un conjunto. (Rosales, 2017)

Del mismo modo, el reto de ampliar el conocimiento humano a un infinito real, que permita abordar con los estudiantes su estudio, no solo con expresiones como los números son infinitos porque no tiene fin o siempre habrá un número cada vez más grande que el anterior. Si no, con ideas que aborden el infinito real, al poner sobre la mesa que la infinidad de los irracionales es mayor que la infinidad de los racionales.

Es allí donde se hace oportuno encontrar estrategias que puedan ser llevadas al aula con el nivel cognitivo de los estudiantes, entre estas estrategias secuencias didácticas donde se tenga como instrumento el uso de material concreto.

Tomando como punto de partida la investigación realizada por Ruesta & Gejaño en el 2022 y las recopilaciones que hicieron acerca del llamado *material concreto*, el cual es el conjunto de objetos y aparatos de apoyo destinados a contribuir con el proceso de enseñanza de manera más provechosa, con la finalidad del ilustrar y dinamizar el aprendizaje del estudiante. Así mismo, se vuelve parte fundamental el papel del docente, pues además que es quien piensa en la elaboración de los materiales para los estudiantes es el que debe complementar por medio de reflexiones el uso de ellos; pues como dice en la guía de Tekman los materiales u objetos manipulables no portan ideas matemáticas por si solos. Además, dando el correcto uso y ejecución de este, podría llegar a ser herramienta de apoyo socio emocional, físico e intelectual para el aprendizaje que busca el desarrollo integral del educando, estimulando su creatividad.

El *material concreto* ha demostrado tener impactos positivos al ser utilizado con estudiantes de educación básica primaria. En trabajos como el de Pacheco & Arroyo (2022), se evidencian resultados favorables para el desarrollo cognitivo y motriz. Este material posee una intencionalidad pedagógica determinada por cada docente, lo que permite conectar con el contexto y fomentar la construcción de conceptos que promueven la resolución de problemas cotidianos. Además, favorece la interacción con formas, tamaños, texturas, manejo del tiempo y cantidades, sin olvidar que incentiva la creatividad y la curiosidad.

También se resalta, que el uso de estos materiales manipulados por los estudiantes permite que los estudiantes alcancen un pensamiento matemático más allá del aprendizaje memorístico, sino que involucra en la experiencia, la capacidad de analizar, reflexionar y razonar sobre el tema; consolidando conceptos sólidos, que son las bases de todo su proceso por el área de matemáticas. (Quincho, 2022)

No obstante, se debe resaltar la diferencia entre el *material concreto estructurado y el material concreto no estructurado*. A partir de la publicación de Quincho, se menciona a Lima (2011), quien hace la distinción para entender ambos aspectos. El material concreto estructurado ha sido diseñado y elaborado con un fin pedagógico, pensado para facilitar el acceso a la comprensión de conceptos y promover un pensamiento lógico matemático, ejemplo de ello, regletas numéricas, bloques geométricos, balanzas, tangram, entre otros. Por otro lado, el material concreto no estructurado es aquel que se utiliza en la práctica docente debido a su fácil acceso, como tapas, llaves y monedas, pero que el docente incorpora en el proceso de enseñanza-aprendizaje y le asigna un objetivo específico. Para el presente proyecto se utilizará como instrumento el uso de material concreto estructurado.

En este contexto, se enfatiza la importancia del involucramiento activo del estudiante, pues esto genera una motivación que los impulsa a participar directamente en la manipulación de objetos, marcando así una diferencia crucial en el aprendizaje. Reconociendo que la complejidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas radica en que los estudiantes deben alcanzar un conocimiento abstracto y hacer uso de modelos de la realidad (Godino et al., 2004) y, por tanto, debe generarse una transición gradual de lo concreto a lo abstracto, evitando saltos abruptos que puedan generar ansiedad o miedo, y respetando la secuencia de visualización, manipulación, simbolización y abstracción. Desde esta perspectiva, se reconoce que el aprendizaje efectivo en matemáticas implica más que la simple memorización de conceptos permitiendo a los estudiantes construir un entendimiento gradual y sólido que promueve un aprendizaje crítico y creativo en contextos reales. (Almachi, 2015)

Referente Legal

La Declaración Universal de los Derechos Humanos fue aprobada el 10 de diciembre de 1948 por la Asamblea General de las Naciones Unidas; es uno de los pilares del derecho internacional y establece una serie de derechos y libertades básicas que deben ser garantizados a todas las personas, sin distinción alguna y proclama:

> *(Art 26.) Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo que respecta a la educación elemental y fundamental. La educación elemental debe ser obligatoria. La educación técnica y profesional debe ser generalizada; el acceso a los estudios superiores debe estar abierto en función de los méritos.*
>
> *La educación debe estar orientada al pleno desarrollo de la personalidad*

> *humana y al fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales. Debe promover la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones, grupos étnicos o religiosos y debe fomentar el mantenimiento de la paz. (Naciones Unidas, 2003, pág. 17).*

La anterior es es la base legal primordial, pues cada ser humano tiene derecho a la educación, lo que promueve la dignificación humana. Este derecho busca que en cada país haya una educación cultural que enseñe a los estudiantes: ¿Cómo adquirir las herramientas necesarias para la especialización en roles dentro de las instituciones de la sociedad y el mantenimiento de la cultura de su grupo humano?, Y a trabajar sobre la dimensión social para la buena relación con la sociedad.

La Constitución Política de Colombia (1991) en su artículo 67 dice que la educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura, como se muestra a continuación:

> *La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social. Se prestará por el Estado y la sociedad, y debe ser obligatoria en el nivel básico.*
>
> *El Estado, la sociedad y la familia tienen el deber de colaborar en la formación integral de la persona.*
>
> *La educación se orientará a la formación en el respeto a los derechos humanos, la paz, la convivencia y el desarrollo económico y social.*
>
> *El Estado garantizará el acceso a la educación básica y media en condiciones de equidad y calidad, y asegurará la gratuidad en la educación básica.*
>
> *El Estado promoverá la educación superior con base en el mérito y la igualdad de oportunidades*.

En la Ley General de Educación o Ley 115 de 1994 se detalla que para el logro de los objetivos de la educación básica se establecen áreas obligatorias y fundamentales del conocimiento y de la formación que necesariamente se tendrán que ofrecer de acuerdo con el currículo y el proyecto educativo institucional. Las matemáticas son una de las áreas obligatorias y fundamentales según el artículo 23 de esta Ley.

El Decreto 1290 de 2009 reglamenta la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica y media que deben realizar los establecimientos educativos. En su artículo 3. habla de los propósitos de la evaluación institucional de los estudiantes; en el artículo 5 se da la escala de valoración que se encuentra discriminada por desempeños: Superior, alto, básico y bajo.

Los lineamientos curriculares, se definen como las orientaciones, guías, horizontes y recomendaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares para la educación en Colombia. Estos fueron instaurados en 1998 por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) con el objetivo de fomentar la 'autonomía escolar' y se conciben como un referente para orientar los programas o procesos curriculares de las instituciones educativas.

Estos lineamientos proporcionan un ideal de lo que puede ser una escuela, del maestro y de la formación en general. Plantean tres grandes aspectos para organizar el currículo que son: Conocimientos básicos, referentes a los cinco pensamientos matemáticos; el contexto, que emerge de la vida cotidiana, las matemáticas o de otras ciencias; y finalmente, cinco procesos de aprendizaje: Razonamiento, resolución, comunicación, modelación y elaboración.

Los Estándares Básicos de Competencias (EBC), funcionan como una orientación esencial acerca de lo que se espera que los estudiantes conozcan y sean capaces de hacer. Su propósito principal es equipar al estudiante con habilidades instaladas que les permitan avanzar con éxito al siguiente nivel secuencial. Estos estándares establecen criterios nítidos que especifican lo fundamental que se anticipa que los estudiantes aprendan en cada etapa del proceso educativo.

En términos de logro de calidad durante su paso por el sistema educativo, los EBC delinean lo que todo estudiante debe comprender y ejecutar. La evaluación se convierte así en el medio esencial para determinar la proximidad al logro de los estándares establecidos. Por consiguiente, los EBC desempeñan un papel crucial para los maestros, ya que orientan sus esfuerzos en la enseñanza, la configuración de prácticas y la elaboración de planes de estudio.

Por último, los derechos básicos de aprendizaje, conforme a la Ley General de Educación de Colombia (Ley 115 de 1994), son fundamentales para garantizar una educación de calidad y el pleno desarrollo de los estudiantes. Estos derechos incluyen el acceso a una educación integral y equitativa, la igualdad de oportunidades, la participación activa en el proceso educativo, la recepción de una evaluación justa y constructiva, la libertad para orientar el aprendizaje según intereses individuales, y el derecho a una formación que abarque aspectos académicos, éticos, culturales y deportivos. Su principal función radica en asegurar que la educación en Colombia sea inclusiva y orientada al desarrollo integral de los estudiantes, promoviendo la equidad, la participación activa y el acceso a oportunidades educativas de calidad para todos.

Referente Espacial

El siguiente trabajo se llevará a cabo en el Colegio Fontán, institución de carácter privado, situada actualmente en Alto de las Palmas (km 17), vía a La Acuarela, Envigado, Colombia. Esta institución fue fundada por los españoles Ventura Fontán (1926-1993) y su esposa Emilia García (1924-2020) de Fontán. Tras reflexionar sobre la crisis de la educación tradicional, caracterizada por la transmisión unilateral de conocimientos por parte del maestro, la memorización de información y la repetición de conceptos, así como la falta de atención a las diferencias individuales en estilos de aprendizaje, ritmos de desarrollo y necesidades especiales, Ventura y Emilia se propusieron iniciar una revolución educativa. En 1985, fundaron la primera innovación educativa aprobada en el país, con el objetivo de transformar este paradigma educativo establecido.

El Colegio Fontán emerge como una iniciativa sólida y articulada para impulsar transformaciones significativas en los procesos educativos, especialmente en lo que respecta a la pedagogía y la didáctica. En su esencia, el sistema Fontán se distingue por ser una propuesta innovadora que se fundamenta en la individualización, la flexibilidad y la autodidaxia. Este enfoque educativo resalta una pedagogía intrínseca, la cual se define por el placer y la satisfacción inherentes a la realización de actividades por sí mismas, sin depender de estímulos externos. Conocido también como el principio de placer intelectual, resaltando la importancia de cultivar la motivación interna y el disfrute en el proceso de aprendizaje, lo cual constituye un pilar fundamental en la filosofía educativa del Colegio Fontán. (Llanga, Silva & Vistin, 2019)

El colegio se proyecta como un centro de formación de personas conscientes y responsables, con alta calidad académica; con sólida cultura humana, espiritual y científica que les permita seguirse educando por sí mismo a través de toda su vida, es decir, que hayan adquirido una verdadera autodidaxia y sean capaces de adaptar sus conocimientos a la realidad.

El Colegio contempla los siguientes principios: Tiempo variable y rendimiento constante, principio de individualización, transmisión escrita del conocimiento, principio de excelencia, principio de placer intelectual, autonomía y responsabilidad. (Proyecto educativo institucional, PEI)

El desarrollo académico en la institución tiene una clave, la participación activa del estudiante, pues es él quien protagoniza su propio proceso, asegurando que construya su conocimiento de manera autónoma. El entorno de aprendizaje del estudiante se da en espacios denominados talleres base, donde comparte experiencias con compañeros de diversas edades y ritmos de aprendizaje. Esta dinámica asegura que, en un taller, el estudiante tenga la oportunidad de interactuar con individuos de distintas edades y niveles cognitivos. De igual manera, no se garantiza que todos los estudiantes estén en el mismo momento de su grado, ya que cada uno avanza conforme a su propio ritmo de aprendizaje.

La filosofía institucional se fundamenta en el principio de que los errores son oportunidades de aprendizaje, por lo tanto, se promueve un ambiente libre de temor a equivocarse. Se reconoce que la honestidad consigo mismo es crucial en el proceso de construcción del conocimiento, ya que permite identificar y reflexionar sobre los errores de manera serena, lo que nos brinda la oportunidad de ser conscientes de nuestro propio progreso. Este enfoque nos permite discernir en qué áreas necesitamos dedicar un mayor esfuerzo y en cuáles ya poseemos habilidades destacadas.

La metodología empleada en los talleres base parte del principio de que el aprendizaje óptimo se logra mediante la experiencia directa y autónoma. Se promueve la idea de que todos los individuos tienen la capacidad y la responsabilidad de alcanzar la excelencia en su desarrollo educativo. Se enfatiza la importancia de minimizar la memorización en el proceso de estudio, fomentando en su lugar la comprensión profunda y la aplicación práctica del conocimiento. Se insta a cada estudiante a trabajar de manera independiente, avanzando a su propio ritmo y en un ambiente de calma y libertad. La dinámica predominante en el colegio es de carácter individual y autodidáctico, ya que los estudiantes se dedican principalmente a abordar sus áreas principales de estudio a través de textos autodidácticos, su abreviatura TAUS. (Proyecto educativo institucional, PEI)

La población en el taller base es variable, dado que cada estudiante avanza a su propio ritmo y comienza en momentos diferentes del año. En consecuencia, el nivel de progreso en su grado es distinto al de sus compañeros. En este momento, se tiene una población de 16 estudiantes con edades comprendidas entre los 10 y 13 años. Para caracterizar la población, se tendrá en cuenta el nivel de avance en la asignatura de matemáticas.

Los estudiantes matriculados en el grado quinto son 13. De ellos, dos han terminado la asignatura de matemáticas. Un estudiante ha completado el 55% de la asignatura, otro ha alcanzado el 50%, y dos más tienen un avance del 44.4%. Además, otros dos estudiantes han completado el 38.89%, y las dos últimas tienen un progreso igual o menor al 27.78%. Los tres estudiantes restantes acaban de comenzar el grado quinto y no han iniciado la asignatura de matemáticas. Dado que estos datos varían diariamente, se presenta esta estimación con la población actual al iniciar la aplicación del proyecto.

Ahora con respecto a la población de cuarto, la estudiante con el porcentaje de avance más alto en la asignatura es de 61.11%, seguido de otra estudiante con el 27.78% y el último estudiante acaba de iniciar su grado cuarto.

En cuanto a su caracterización sociodemográfica, se tiene que el 56.25% de la población corresponde a mujeres y el otro 43.75% a hombres, con estratos económicos comprendidos entre 4 y 6. El 17% de la población vive en zona rural, mientras que el restante reside en zona urbana.

CAPITULO II. DISEÑO METODOLÓGICO:

Enfoque

En el mundo educativo contemporáneo, la enseñanza de las matemáticas ha evolucionado para responder a las necesidades cognitivas y emocionales de los estudiantes, especialmente de aquellos entre 10 y 12 años. En esta etapa, los estudiantes están experimentando un incremento significativo en su capacidad para razonar abstractamente y pensar de manera lógica. Sus habilidades de pensamiento crítico están en desarrollo, lo que les permite analizar problemas de manera más compleja y encontrar soluciones más elaboradas. Además, están en una fase donde empiezan a consolidar habilidades matemáticas básicas y a adentrarse en conceptos más avanzados. Por lo tanto, el aprendizaje debe ser significativo, es decir, ir más allá de la mera memorización de fórmulas y procedimientos. Este enfoque contemporáneo enfatiza la importancia de un entorno de aprendizaje dinámico y centrado en el alumno, donde los estudiantes son activos participantes en su proceso educativo. (Flores, 2023)

Las investigaciones en neurociencia y psicología del aprendizaje han demostrado que los estudiantes retienen y comprenden mejor los conceptos cuando están involucrados de manera práctica y emocional en el proceso de aprendizaje. Así, se ha incrementado el uso de metodologías que incorporan la manipulación de materiales concretos, el aprendizaje por descubrimiento y la resolución de problemas en contextos reales (Rivera, 2019). Estas metodologías no solo permiten a los estudiantes experimentar directamente los conceptos matemáticos, sino que también les ayudan a internalizar y comprender mejor los principios abstractos que subyacen a ellos. Durante esta etapa del desarrollo, los estudiantes están construyendo gradualmente su capacidad para pensar de manera más abstracta y lógica. Por tanto, el material concreto actúa como un puente crucial entre el mundo tangible y el mundo abstracto de las matemáticas, permitiendo que los estudiantes conecten las experiencias

sensoriales directas con conceptos matemáticos más abstractos. (Fernández, 2010)
En este contexto, la metodología pedagógica adquiere una relevancia fundamental al adaptarse a las necesidades específicas de los estudiantes de 10 a 12 años. Esta metodología no solo busca facilitar el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos, sino también cultivar habilidades críticas como la resolución de problemas y el pensamiento abstracto. Al integrar la manipulación de materiales concretos y el aprendizaje por descubrimiento, se proporciona a los estudiantes una plataforma donde pueden explorar activamente los principios matemáticos en entornos prácticos y significativos. Esto no solo fortalece su comprensión conceptual, sino que también los prepara para enfrentar desafíos académicos futuros con confianza y solidez.

En el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, el enfoque metodológico toma como premisa que la motivación y el deseo de aprender de los estudiantes son fundamentales para un aprendizaje efectivo. Este enfoque reconoce la importancia de la motivación intrínseca, que surge de las expectativas y la curiosidad de los estudiantes. Para crear un entorno de aprendizaje enriquecedor, se pondrán en práctica estrategias que fomenten la exploración y el descubrimiento, alineándose con los paradigmas del aprendizaje activo y constructivista. En este contexto, se considera esencial el trabajo de Dehaene y Butterworth, dos de los principales expertos mundiales en el estudio de las matemáticas y el cerebro. Stanislas Dehaene ha destacado cómo la curiosidad y el interés pueden activar las áreas del cerebro relacionadas con el aprendizaje y la memoria, facilitando una comprensión más profunda y duradera de los conceptos matemáticos. Brian Butterworth, por su parte, ha subrayado la importancia de la neuroplasticidad y cómo las experiencias de aprendizaje ricas y variadas pueden fortalecer las capacidades matemáticas del cerebro. Tomando en cuenta estos principios, se diseñarán actividades que no solo introduzcan a los estudiantes a los conceptos matemáticos, sino que también los involucren activamente y de manera significativa, haciendo uso de material concreto y matemáticas manipulativas, creando un ambiente de aprendizaje que promueva el descubrimiento y la autoconstrucción del conocimiento. (Rivera, 2019)

El escenario ideal es lograr un aprendizaje profundo y duradero del concepto enseñado, donde los estudiantes no solo comprendan, sino que también disfruten del proceso de aprendizaje. Esto se traduce en una mayor motivación intrínseca, mejores resultados académicos y un desarrollo robusto de habilidades críticas y de pensamiento abstracto. No obstante, se enfrentan desafíos significativos como la actualización y reinvención de recursos didácticos, la necesidad de formación continua para los docentes para asegurar la sostenibilidad en el tiempo, y la adaptación de materiales concretos que sean relevantes y coherentes con los propósitos educativos. Es crucial que estos recursos sean interesantes y generen expectativas positivas en los estudiantes, facilitando así su experiencia de aprendizaje y asegurando su compromiso con el mismo.

En este enfoque, los roles de los implicados son claros: Los docentes actúan como facilitadores y guías en el proceso de descubrimiento, proporcionando las herramientas y el entorno adecuado para el aprendizaje; los estudiantes, por su parte, son los protagonistas de su propio aprendizaje, explorando, manipulando y construyendo su conocimiento de manera activa. Además, los padres y la comunidad educativa juegan un papel de apoyo fundamental, fomentando un entorno que valora y promueve la curiosidad y el aprendizaje continuo.

Método

Fase 1: Exploración de Concepciones Previas sobre el Infinito.

Para iniciar la implementación de la secuencia didáctica, es fundamental establecer un punto de partida que explore las concepciones previas de los estudiantes sobre el infinito. Esta actividad introductoria tiene un doble propósito. En primer lugar, abre un espacio donde los estudiantes puedan definir, de manera estructurada, lo que creen acerca de lo finito y lo infinito, lo que permite que el contexto de aprendizaje esté cuidadosamente planeado, con objetivos claros y características específicas que fomenten la curiosidad, el pensamiento crítico y la reflexión profunda. De esta manera, se evita que el aprendizaje del concepto de infinito sea algo fortuito o poco premeditado, como ocurre a menudo en la cotidianidad. Frecuentemente, en el entorno escolar, los estudiantes están acostumbrados a que los docentes lancen frases al aire como "el infinito es muy grande" o utilicen expresiones incorrectas que los alejan de la construcción correcta del concepto, como poner en la categoría de infinito a algo que es simplemente muy difícil de calcular.

El segundo objetivo de esta actividad es crucial para el proyecto: Establecer una línea base que determine el estado inicial del conocimiento de los estudiantes. Este diagnóstico inicial proporcionará datos esenciales sobre el nivel de comprensión y las ideas preconcebidas que los alumnos tienen acerca del infinito. Con esta información, será posible diseñar intervenciones pedagógicas más efectivas y personalizadas, adaptadas a las necesidades específicas de cada grupo de estudiantes.

La información recopilada no solo servirá como punto de referencia para medir el progreso de los estudiantes a lo largo de la secuencia didáctica, sino que también será invaluable para la creación y selección de materiales concretos que se utilizarán en sesiones futuras. Estos materiales deberán estar cuidadosamente diseñados para abordar las necesidades y dificultades identificadas, conectando los conocimientos previos de los estudiantes con nuevos conceptos de manera coherente y significativa. Al hacerlo, se garantizará que el aprendizaje sea más efectivo, relevante e interesante para los estudiantes, fomentando un entorno educativo que promueva la curiosidad y garantice la motivación intrínseca.

En la parte preliminar se seguirá el paso a paso que se propone a continuación.

Actividad 1: El desafío de la caja llena: ¿Es verdaderamente infinito?

Propósito de la Actividad:

Explorar las concepciones previas de los estudiantes acerca del infinito mediante la actividad de la caja de vidrio y el spray. El objetivo es entender si los estudiantes perciben el infinito como algo interminable debido a la prolongación temporal de una actividad aparentemente sin fin, fomentando la reflexión y el debate entre ellos sobre la naturaleza del infinito sin limitar sus posibles interpretaciones.

Descripción de la actividad:

En esta actividad, los estudiantes utilizarán materiales concretos como la caja de vidrio y el spray de agua para explorar el concepto de infinito. Su objetivo será llenar completamente la caja de vidrio utilizando únicamente el spray, gota tras gota. Durante este proceso, se les animará a observar detalladamente los cambios en el entorno, la cantidad de agua empleada y el tiempo necesario, además de aplicar su pensamiento crítico. El propósito es que los estudiantes discutan si perciben este proceso como infinito o si anticipan un final. Esto les permitirá desarrollar sus propias concepciones sobre el infinito a través de la experiencia directa y el descubrimiento personal. El rol del docente será el de facilitador y mediador del aprendizaje, proporcionando orientación para que los estudiantes exploren, reflexionen sobre sus observaciones y amplíen sus conclusiones. Esto les permitirá establecer su punto de partida en cuanto a lo que perciben como finito e infinito.

Materiales:

- Caja de vidrio.
- Spray o atomizador.
- Agua.

Figura 1.

Fase 1 Representación Gráfica De La Actividad 1: ¿Es verdaderamente infinito?

Nota: La imagen anterior muestra una representación generada por Copilot (2024), en la que se observan un atomizador y una pecera transparente.

Tiempo: 20 minutos.

Lo esperado:

Al inicio de la actividad, se espera que los estudiantes registren en el instrumento de recolección de información sus ideas iniciales acerca de lo que anticipan o perciben que ocurrirá durante el proceso, así como las impresiones generales sobre la situación. Este ejercicio les permitirá reflexionar individualmente sobre sus percepciones antes de participar en la discusión grupal. Durante esta discusión, tendrán la oportunidad de compartir sus ideas con sus compañeros, debatir diferentes puntos de vista y ampliar sus conclusiones. Al concluir la actividad, se les pedirá a los estudiantes que revisen y ajusten sus reflexiones iniciales conforme a lo debatido en grupo, fomentando de este modo la construcción colectiva del conocimiento sobre este tema central en matemáticas, lo cual incluye la exploración de sus concepciones y las posibles limitaciones conceptuales que puedan surgir.

Actividad 2: Árbol de decrecimiento geométrico: ¿Qué vemos aquí?

Para esta actividad, es importante tener presente que lo que se trabajará con los estudiantes es un tipo de estructura jerárquica, que para los fines de este trabajo se denomina árbol de decrecimiento geométrico. Esta estructura simula un número de elementos que irá disminuyendo siguiendo una razón geométrica a medida que desciende por los niveles del árbol. Este concepto se utiliza en geometría y matemáticas para representar cómo, en un proceso o serie de etapas, la cantidad de opciones, recursos o elementos disponibles se reduce de manera constante y proporcional a lo largo del tiempo o en cada etapa del proceso. (Falconer, 2003)

Propósito de la Actividad:

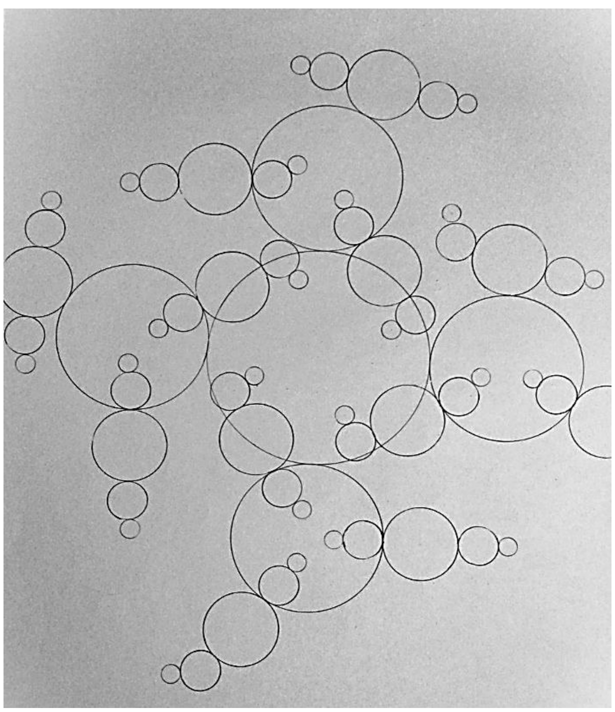
El propósito de esta actividad es que los estudiantes construyan una figura geométrica para identificar el concepto de infinito a partir de sus creaciones. Al crear esta figura, se les invita a cuestionarse qué es el infinito y a reflexionar si una actividad aparentemente extensa podría considerarse infinita. Basándose en este ejercicio, los estudiantes podrán revelar sus concepciones iniciales sobre lo infinito y lo finito, mostrando sus percepciones, fortalezas, vacíos, confusiones o limitaciones conceptuales.

Descripción de la actividad:

Se iniciará con la creación de la estructura, partiendo desde el centro con un círculo de 6 cm de diámetro, en él se colocarán cuatro círculos más de 4 cm de diámetro, deben estar ubicados tangencial al perímetro y a distancias equidistantes uno del otro. Luego, en cada uno de estos cuatro círculos se añaden tres nuevos círculos, en las mismas condiciones de ubicación y reduciendo la escala a 2 cm. Esto se repite sucesivamente en cada iteración.

Figura 2

Fase 1. Representación gráfica de la actividad 2: ¿Qué vemos aquí?



***Fuente**: Elaboración propia.*

Materiales:

- (1/4) de pliego de cartulina.
- Lápiz.

- Marcadores o colores.
- Compás.
- Trasportador.
- Regla.
- Escuadra de 45°.

Tiempo: Tres sesiones, cada una de 60 minutos.

Lo esperado:

Se espera que los estudiantes fortalezcan sus habilidades de análisis, identificación, argumentación y proyección utilizando una figura con patrones geométricos. Deberán destacar las diferentes escalas, patrones de repetición y complejidad del diseño, y reflexionar sobre cómo la estructura se relaciona con los conceptos de infinito o finito. Además, es crucial que puedan anticipar cómo evolucionará la estructura en futuras iteraciones, basándose en los patrones observados y en las reglas de construcción de cada secuencia.

Cierre: Una sesión de 40 minutos.

Al final de esta secuencia, se debe obtener información sobre las concepciones conceptuales que los estudiantes de ciclo 2 perciben del infinito, sin haber tenido un acercamiento previo al mismo en años anteriores. Con ello se cierra la fase de diagnóstico, para dar paso a la fase dos, pensada y estructurada a partir de los resultados de la fase uno.

Fase 2: Explorando el Infinito: Secuencia Didáctica para el acercamiento al concepto de infinito.

Actividad 1: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 1. La paradoja del viajero-

Cinta Möbius.

Propósito de la Actividad:

El propósito de la actividad es desarrollar la capacidad de los estudiantes para pensar en situaciones abstractas, como los viajes en el tiempo, que hasta ahora han sido eventos hipotéticos. Se busca que comiencen visualizando estos escenarios y analizando las posibles implicaciones o soluciones que podrían surgir en el escenario más probable. Además, la paradoja del viajero sirve como punto de partida para explorar el concepto de infinito potencial y real. Se busca relacionar esta paradoja con el objeto matemático de la cinta de Möbius, que representa un ciclo interminable en términos potenciales, pero que al mismo tiempo es un objeto que se puede percibir y estudiar como un todo tangible y real. (Acuña, 2018)

Desarrollo de la actividad:

Para iniciar la actividad, los estudiantes se sumergirán en un viaje único: Un viaje en el tiempo inspirado en la famosa paradoja del viajero. Este concepto tiene sus raíces en la literatura científica y de ciencia ficción desde principios del siglo XX, especialmente en la novela: El viajero imprudente, Le voyageur imprudent en francés, escrita por el autor francés René Barjavel en 1943.

Se presentará a los estudiantes el siguiente dilema:

> *Imagina que dispones de una máquina del tiempo y decides viajar al pasado, específicamente al momento en que tu abuelo era joven, antes de conocer a tu abuela. Por alguna razón, decides evitar que tu abuelo conozca a tu abuela. Esto significa que tus padres nunca nacerían y, por lo tanto, tú tampoco existirías.*
>
> *Pero, si tú no existes, ¿cómo podrías haber viajado al pasado para impedir que tu abuelo conociera a tu abuela? Esta pregunta será el centro de una discusión grupal*

donde los estudiantes compartirán sus ideas y planteamientos.

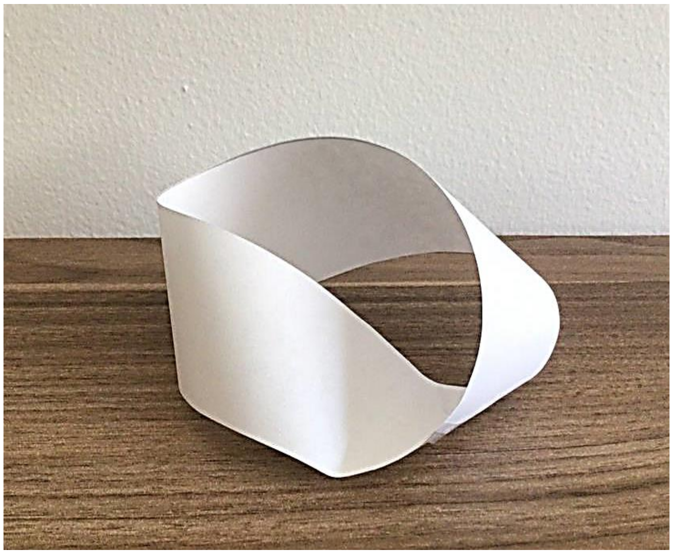
Posteriormente, se introducirá la construcción de la cinta de Möbius como herramienta para explorar y entender la paradoja del viajero desde el concepto de infinito. A partir de una tira de papel, los estudiantes construirán este objeto, que representa físicamente un ciclo interminable. Esta actividad les permitirá ordenar sus ideas, discusiones, argumentos y planteamientos utilizando la cinta de Möbius como metáfora visual.

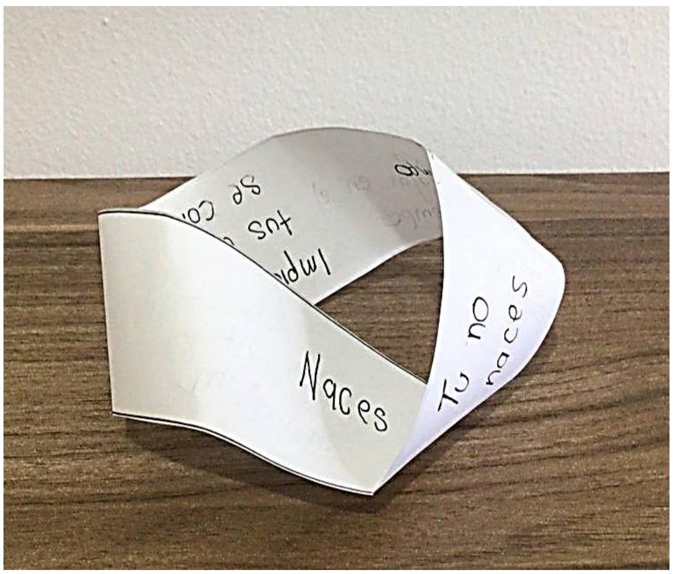
Para llevar a cabo esta construcción, utilizarán una tira de papel con al menos 3 cm de ancho. Aquí surgirá su aprendizaje y primer acercamiento a la diferencia entre el infinito potencial, como la secuencia interminable en la paradoja del viajero, y el infinito real, representado por el objeto que simboliza la totalidad de una situación, situación que es vista como un todo.

Finalmente, se les invitará a crear su propio objeto infinito, donde tengan la creatividad para idear una situación interminable, un ciclo que se repita indefinidamente. Este ejercicio permitirá introducir el concepto de infinito real como un todo, ofreciendo la oportunidad de comparar y contrastar diferentes situaciones infinitas creadas por los estudiantes. A través de esta comparación entre compañeros, los estudiantes podrán discutir y reflexionar sobre cómo cada objeto infinito representa un ciclo interminable y cómo se relaciona con el concepto de infinito real y potencial.

Figura 3.

Fase 2 Representación gráfica de la actividad 1: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 1. La paradoja del viajero- Cinta Möbius.





***Fuente**: Elaboración propia.*

Materiales:

- Tiras de papel de 3 cm de ancho.
- Lapicero.
- Tijeras.
- Pegante.

Tiempo: 80 minutos.

Lo esperado:

Al finalizar la actividad, se espera que los estudiantes hayan adquirido una comprensión más profunda de cómo abordar y reflexionar sobre situaciones abstractas, especialmente aquellas relacionadas con conceptos como el infinito potencial y el infinito real. Se espera que fortalezcan sus capacidades para visualizar y debatir soluciones en contextos complejos, permitiéndoles desarrollar un pensamiento crítico más agudo y una habilidad para manejar conceptos matemáticos abstractos de manera más concreta y aplicable.

Actividad 2: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 2. Triángulo de Sierpinski

Esta actividad crea conexión con la actividad 2 de la fase uno, se toma nuevamente a consideración la geometría fractal como medio para el acercamiento y construcción del concepto infinito. Esta actividad es diseñada alrededor del triángulo de Sierpinski, nombrado en honor al matemático polaco Wacław Sierpiński, quien lo describió por primera vez en 1915. Este objeto conserva propiedades excepcionales en la secuencia de sus iteraciones. Este objeto representativo de la geometría fractal fue presentado en una publicación de 1916 (Arenas & Sabogal, 2009).

El triángulo de Sierpiński ilustra el concepto del infinito de manera tangible y visual, muestra cómo una estructura puede ser infinitamente detallada y subdividida a pesar de estar contenida dentro de un espacio finito.

Propósito de la Actividad:

Al realizar iteraciones sucesivas para construir el triángulo de Sierpiński, los estudiantes experimentarán a primera mano cómo un proceso puede continuar indefinidamente. Este ejercicio les ayudará a entender el infinito potencial, es decir, el concepto de una secuencia que puede repetirse sin fin. Asimismo, se busca fortalecer el pensamiento crítico tras observar el triángulo de Sierpiński como un objeto completo, que tras varias iteraciones existe de manera tangible y completa en un espacio finito. Este enfoque les permitirá apreciar el infinito real.

Desarrollo de la actividad:

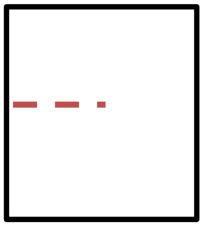
Para iniciar la actividad, los estudiantes recibirán un conjunto de instrucciones para construir una figura geométrica sin un contexto explícito ni detalles sobre su nombre o propiedades. El propósito es que actúen como investigadores, abordando el desafío de manera analítica y reflexiva. A través de los pasos proporcionados, los alumnos deberán descubrir por sí mismos que están construyendo un triángulo con divisiones infinitas. No se les revelará que se trata del Triángulo de Sierpinski; en cambio, se les animará a observar, experimentar y reflexionar sobre la figura que van creando. Deberán identificar patrones, hacer conjeturas y desarrollar una comprensión más profunda a medida que avanzan en la actividad. Este enfoque promueve el aprendizaje basado en el descubrimiento, donde los estudiantes exploran conceptos matemáticos de manera autónoma, fortaleciendo sus habilidades de análisis crítico y reflexión.

Las siguientes instrucciones para la construcción del Triángulo de Sierpiński toman como base la publicación “Fractales en papel” de la página: Matemática y algo más:

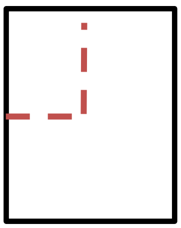
Paso 1: Toma una hoja de papel en forma de cuadrado

Paso 2: Dóblala por la mitad de forma vertical para obtener dos partes iguales. Asegúrate de que el doblez sea bien marcado.

Paso 3: Con la hoja aún doblada, realiza un corte desde el borde cerrado hasta la mitad del rectángulo ahora formado. Este corte debería tener la misma longitud que la mitad del ancho del cuadrado, como se muestra a continuación:



Paso 4: Abre una de las mitades de la hoja, marcando el doblez del corte en la parte superior. A continuación, se mete hacia dentro la punta del borde para formar una especie de escalera de dos peldaños.



Paso 5: En cada peldaño de la escalera, repite el proceso: realiza un corte en el medio y marca los dobleces.

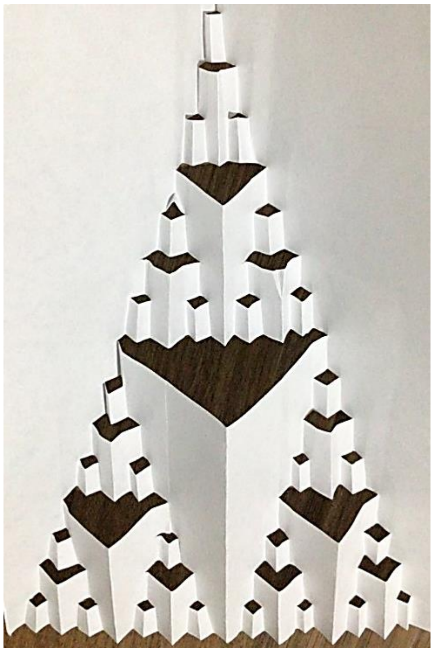
Paso 6: Dobla hacia dentro los segmentos que has cortado para crear más peldaños. Repite el proceso de corte, marcado y doblado.

Paso 7: Continúa este proceso para cada uno de los peldaños hasta que hayas cortado, marcado y doblado en múltiples niveles.

La idea es que los estudiantes repitan estas instrucciones hasta donde les sea posible manejar los cotes y dobleces en la hoja de papel. Al desdoblar su hoja obtendrán la siguiente figura:

Figura 4.

Fase 2 Representación gráfica de la actividad 2: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 2. Triángulo de Sierpinski.



Durante la construcción del triángulo, los estudiantes deberán ir formulando conjeturas y haciendo preguntas, revelando ideas y conocimientos a medida que avanzan. Para reforzar estos pensamientos y asegurar que se dirijan al objetivo de la actividad, se plantearán las siguientes preguntas de reflexión y análisis:

- ¿Qué ven? Impresiones al ver su creación final.
- ¿Qué patrones o regularidades observaron mientras construían el triángulo?
- ¿Cómo es el diseño final?
- ¿Cómo fue el proceso de construcción?
- ¿Qué cambios notaron en el triángulo con cada iteración?
- ¿Cómo influyeron estos cambios en la estructura final del triángulo?
- ¿Cómo influyó cada corte en la estructura total?
- ¿Cómo representa el proceso de construcción del triángulo el concepto de infinito?
- ¿Qué aspecto del triángulo sugiere que el proceso podría continuar indefinidamente?

¿Hay algún aspecto que lleve a ver el triángulo como algo contenido?

- ¿Qué elementos del triángulo son tangibles? ¿Qué parte del triángulo se percibe como un todo?

Materiales:

- Hoja de papel.

- Lápiz.

- Regla.

- Escuadra de 45°.

- Tijeras.

Tiempo: 80 minutos.

Lo esperado:

Al finalizar la actividad, se espera que los estudiantes hayan desarrollado una comprensión integral del concepto de infinito tanto potencial como real. A través de la construcción del triángulo de Sierpiński, los alumnos experimentarán directamente cómo una estructura puede ser subdividida infinitamente dentro de un espacio finito, permitiéndoles observar y reflexionar sobre la naturaleza de las iteraciones sucesivas. Se anticipa que los estudiantes hayan fortalecido sus habilidades para identificar patrones y regularidades, así como para analizar cómo estos afectan la estructura final del triángulo. Además, se espera que hayan adquirido una apreciación más profunda de cómo los procesos repetitivos y las divisiones infinitas se relacionan con el concepto abstracto de infinito.

Actividad 3: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 3. Árbol de crecimiento fractal

Un fractal geométrico es una figura matemática que presenta una estructura repetitiva, lo que significa que sus partes replican la forma completa en diferentes escalas. Este fenómeno ha fascinado a los matemáticos desde finales del siglo XIX debido a su conexión intrínseca con el concepto de infinito. El primer fractal identificado, conocido como el conjunto de Cantor, mostró cómo una estructura puede ser infinitamente divisible, revelando la complejidad que puede surgir a partir de reglas simples que se repiten indefinidamente. (Sastre, 2007)

La ciencia de los fractales está tomando fuerza pues permite que cambie nuestra visión de las cosas, que abramos la mente a nuevos patrones y con ello a descubrir nuevos conceptos y descubrimientos matemáticos, al salir de nuestra visión cuadriculada. Esta actividad, tiene como fundamento la siguiente noción intuitiva que no pretende ser más que una idea aproximada a un concepto perfectamente definido en matemáticas:

“Un fractal es lo que se crea después de un proceso de iteración infinita, de repetir infinitamente los mismos procedimientos sobre los resultados obtenidos en la fase anterior”. (Haro & Redondo, 2004)

La importancia de ello radica en que simula situaciones complejas que pueden ser manipuladas y vistas en nuestra cotidianidad, por ejemplo, el crecimiento de las ramas de los árboles, la formación de las costas marítimas o la estructura de los copos de nieve muestran patrones fractales reiterativos. Es importante resaltar que la geometría fractal representa al idioma natural, donde formas y estructuras complejas emergen de la repetición de instrucciones simples. (Sastre, 2007)

Propósito de la actividad:

El propósito de esta actividad es que los estudiantes elaboren un fractal geométrico. Al realizar esta creación, los estudiantes podrán demostrar su acercamiento al tema, mostrar lo que han aprendido sobre el infinito, y también identificar aquellos detalles que hacen que sus fractales sean infinitos. Además, deberán mantener la simetría en cada una de sus creaciones.

Desarrollo de la actividad:

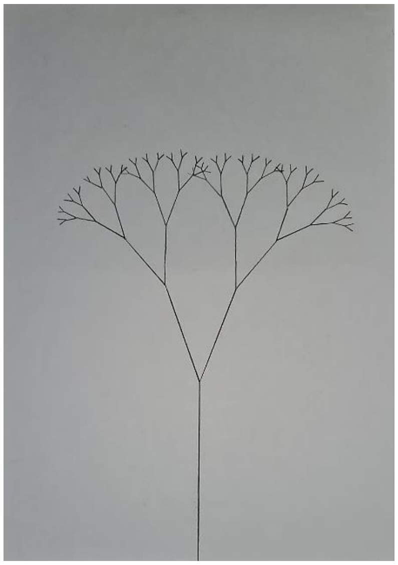
La creación de este fractal geométrico debe realizarse a partir de la medición de tres datos diferentes: La longitud del tallo inicial, el ángulo de separación de las ramas y el factor de crecimiento de cada sección de ramas. Partiremos de una longitud de tallo de 10 cm, con una amplitud de 40° y un factor de crecimiento de 0.6.

Con estos datos, se procede a crear, en el centro de la plancha, la primera línea vertical con una longitud de 10 cm. Luego, desde el punto superior de esta línea, se marca una amplitud utilizando el transportador a 40°, es decir, 20° a cada lado del ángulo vertical. Marcados los puntos de amplitud, se trazan dos nuevas líneas con una longitud que resulta de multiplicar 10 cm y el factor 0.5, es decir, una longitud de 5 cm, y así sucesivamente, se obtiene luego una medida de 2.5 cm. Dependiendo del factor de crecimiento, irán apareciendo más ramas, pero cada vez con un tamaño menor.

El fractal final representa las ramas de un árbol. Una vez creada la figura base, se pueden pasar estas líneas a marcador y agregar las hojas del árbol con crecimiento fractal.

Figura 5.

Fase 2 Representación gráfica de la actividad 3: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 3 Árbol de crecimiento fractal.



Nota: La elaboración de la figura cinco se realizó bajo los siguientes parámetros: Una longitud inicial 15 cm y un factor de crecimiento de 0.6.

***Fuente**: Elaboración propia.*

Materiales:

- (1/4) de pliego de cartulina.
- Lápiz.
- Marcadores o colores.
- Trasportador.
- Regla.

Tiempo: Dos sesiones de 60 minutos cada una.

Lo esperado:

Al finalizar esta actividad, se espera que los estudiantes hayan tenido un acercamiento profundo de los conceptos de infinito potencial y real. Se espera que los estudiantes sean capaces de integrar y aplicar sus conocimientos adquiridos en las actividades anteriores, fortaleciendo su habilidad para identificar y explicar patrones complejos y regularidades.

Esta actividad final debe consolidar su pensamiento crítico y su capacidad para manejar conceptos abstractos, permitiéndoles una comprensión más tangible y aplicable del concepto de infinito. Los estudiantes deberían estar en una posición de contar con sus palabras la diferencia entre el infinito potencial y el infinito real.

Fase 3: ¿A qué llegamos, ¿qué aprendimos y qué validamos?

Actividad 1: Tu universo, tu infinito.

Propósito de la actividad:

La intención de esta fase es brindar a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre sus experiencias y aprendizajes a lo largo de la secuencia didáctica. Asimismo, se busca obtener información sobre sus reflexiones críticas en torno al concepto de infinito. Esta actividad crea un espacio para evidenciar la comprensión que los estudiantes tienen del concepto, así como los vacíos que aún deben ser trabajados.

Desarrollo de la actividad:

Para esta actividad, se tomará como motivación el texto corto de Andy Weir, El Huevo, publicado en 2009. Esta historia fue el primer éxito del autor. Cada uno de los estudiantes recibirá el texto impreso, el cual comenzarán a leer de manera individual hasta que logren comprenderlo y reflexionar sobre su contenido. Al finalizar la lectura, pasarán a la parte escrita, donde dejarán registradas sus primeras impresiones, apreciaciones y cómo podrían relacionar esta historia con el concepto de infinito, analizando qué conexiones pueden encontrar.

Tras esta primera intervención individual, se procederá a una discusión grupal. Este será un espacio para que los estudiantes argumenten sus apreciaciones. Dado el tema del texto, será necesaria la intervención del tutor para guiar a los estudiantes hacia el concepto de infinito, ya que podrían desviarse o abordar otros temas. Es importante que la reflexión sobre el concepto matemático del infinito, sus equivalencias, comparaciones, la inconmensurabilidad de las cosas y otros aspectos relevantes se mantenga presente en la discusión.

Luego de esta parte, se volverá al papel. Cada estudiante tendrá la oportunidad de complementar su concepción del infinito, entendiendo que esta construcción no es final, sino un proceso que se consolidará con el tiempo. En este momento, plasmarán su conocimiento tras haber pasado por la inversión de la secuencia didáctica.

Finalmente, los estudiantes procederán a diseñar su propio universo infinito, su huevo. Tendrán la libertad de imaginarlo con diferentes colores, texturas y todo lo que su imaginación les permita. Ese huevo, que enmarca el texto de Andy Weir, será una representación concreta del infinito. Aunque, por sí solo, el huevo no comunique mucho, el trasfondo de la actividad le da un profundo significado.

Materiales:

- Formato impreso del texto corto: El Huevo de Andy Weir.
- Un huevo.
- Pinturas.
- Pinceles.

Tiempo: Tres sesiones, cada una de 60 minutos.

Lo esperado:

Se espera que puedan elaborar un argumento coherente que demuestre su comprensión del concepto de infinito y su capacidad para aplicar el pensamiento crítico y reflexivo. Este entregable final servirá como una evaluación integral de su aprendizaje y comprensión, proporcionando una visión detallada de cómo han internalizado y aplicado los conceptos discutidos a lo largo de la secuencia didáctica.

Instrumento De Recolección De Información Y Análisis De Información.

En el proyecto, se emplearán diversas fuentes primarias y cualitativas para la recolección y análisis de información. Estas fuentes incluyen una infografía textual, que presenta información exclusivamente a través de texto para comunicar datos, ideas o conceptos sin apoyo visual adicional. Se utilizará también un registro anecdótico, una herramienta cualitativa que permite documentar y analizar comportamientos y eventos específicos ocurridos durante el proceso educativo, proporcionando una visión detallada de las habilidades y actitudes de los estudiantes. Además, se empleará una ficha textual para organizar y registrar información de manera estructurada.

Adicional a las fuentes cualitativas, queda como instrumento de recolección de información y de análisis el material concreto que crea y manipula cada uno de los estudiantes a lo largo de la fase uno, dos y tres.

Sin olvidar el registro escrito por cada uno de los estudiantes a manera de relato libre en la fase número tres.

Estas fuentes permitirán una comprensión más profunda y detallada de la evolución del aprendizaje de los estudiantes, desde la información básica y sus percepciones iniciales hasta la progresión a medida que avanzan en las actividades. Facilitarán la identificación y validación del acercamiento de cada estudiante al concepto y su nivel de profundización, tanto de manera individual como grupal.

A continuación, se abordará el diseño de cada uno de estos instrumentos:

Fase 1: Exploración de Concepciones Previas sobre el Infinito.

Actividad 1: El desafío de la caja llena: ¿Es verdaderamente infinito?

La información se obtendrá a partir de una ficha infográfica. Esta ficha, en su primera página, tiene dos secciones. La primera es de formato libre, permitiendo al estudiante, de manera individual, expresar sus apreciaciones sobre la actividad inicial, incluyendo sus proyecciones, pensamientos y observaciones sobre la situación presentada.

La segunda sección, denominada Cuestionémonos, está diseñada con preguntas que orientan a los estudiantes en su conversación y reflexión. Estas preguntas fomentan el debate entre los estudiantes, reforzando y profundizando el análisis de sus ideas iniciales. Sin respuestas correctas o erróneas, los estudiantes usarán esta parte para enriquecer sus argumentos. Es válido que, a partir del intercambio, deseen ajustar su punto de vista según el enfoque del diálogo. A continuación, están planteadas las preguntas:

- ¿Cómo describirías este proceso?
- ¿Qué está ocurriendo?
- ¿Cuánto tiempo creen que necesitarán para llenar completamente la caja de vidrio con el spray?
- ¿Qué piensan que significa que algo sea potencialmente infinito versus realmente infinito?
- ¿Qué diferencias hay entre un proceso que parece infinito y uno que saben que tiene un final?
- ¿Pueden pensar en ejemplos de la vida diaria que sean infinitos en teoría, pero no en la práctica?

Actividad 2: Árbol de decrecimiento geométrico: ¿Qué vemos aquí?

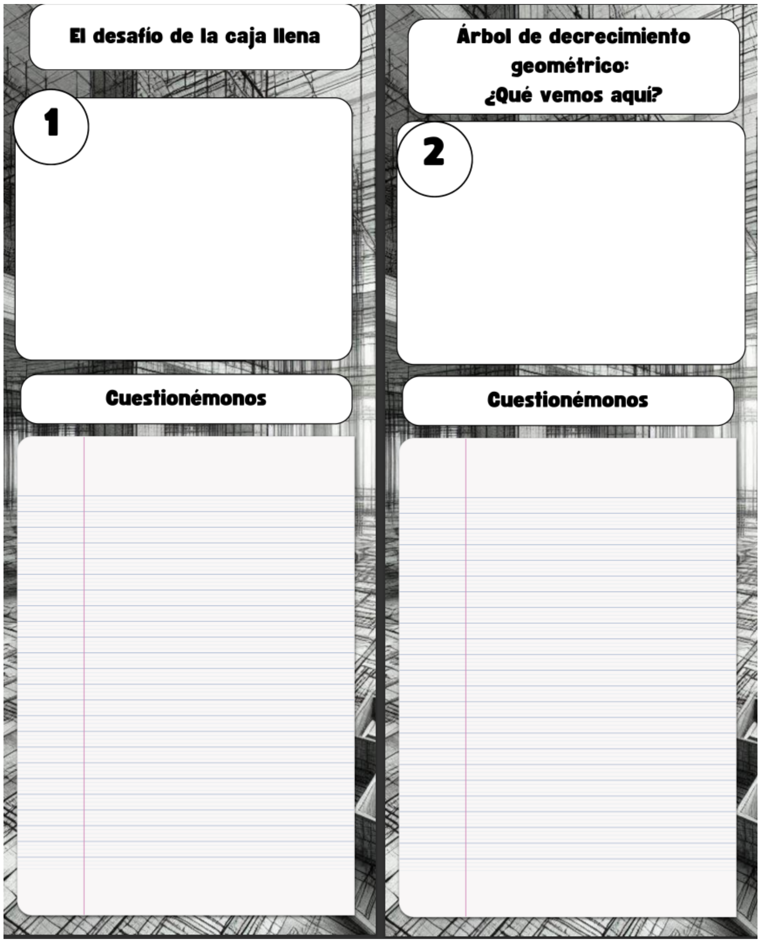
Al respaldo de la infografía, con la misma dinámica que en la primera página, se encuentra el espacio para la actividad dos. En este espacio los estudiantes podrán escribir sus apreciaciones iniciales al leer las indicaciones para la construcción del árbol geométrico. Aquí, los estudiantes deben reflexionar sobre lo que piensan que sucederá, lo que proyecta o anticipan que formaran. Además, a medida que avancen en la construcción, pueden añadir más ideas y observaciones que surjan durante el proceso.

La segunda sección, titulada Cuestionémonos, está diseñada para que los estudiantes realicen un análisis más detallado a partir de las siguientes preguntas orientadoras:

- ¿Qué patrones pueden identificar en la estructura construida?
- ¿Es una estructura compleja en diseño?
- ¿Cómo afecta la repetición de los patrones a la complejidad de la estructura?
- ¿Cómo interpreta la estructura?
- ¿Qué características observan en el árbol de decrecimiento geométrico?
- ¿Contemplan la secuencia con continuidad o finitud?
- ¿Qué piensa de las iteraciones en cada ciclo? ¿Se aproximarán a un límite?

Figura 6-

Infografía para la recolección de información en la fase de concepciones previas.



***Fuente**: Elaboración propia.*

Fase 2: Explorando el Infinito: Secuencia Didáctica para el acercamiento al concepto de infinito.

Actividad 1: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 1. La paradoja del viajero- Cinta Möbius.

La información destinada de esta actividad quedará plasmada en una ficha técnica en las que los estudiantes tienen tres diferentes espacios.

El primer espacio para escribir y reflexionar sobre sus pensamientos e ideas de la paradoja del viajero, el segundo espacio permite a los estudiantes crear una situación similar a la presentada inicialmente, en este momento se podrá visualizar si entendieron la situación cíclica, motivándolos a usar todo su ingenio y creatividad para construir y deseñar una nueva. En el último espacio está destinado para que a través de sus palabras los estudiantes puedan empezar a definir lo que creen que es el infinito.

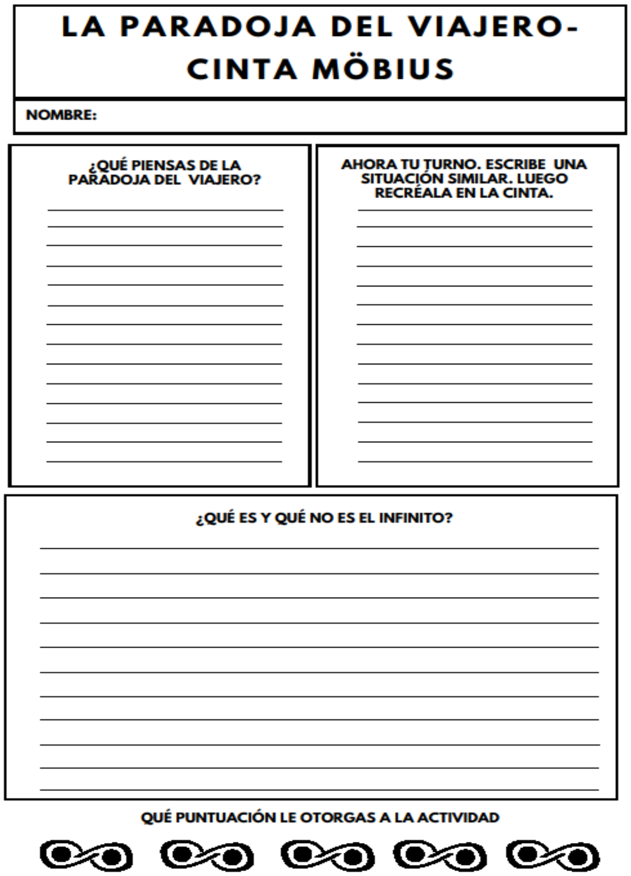
Asimismo, para complementar la actividad durante debate se tomarán en cuenta las siguientes preguntas y cada una de las reflexiones que de ahí surjan se irán anotando en el registro anecdótico.

Preguntas orientadoras:

- ¿Cómo describirías la diferencia entre la cinta de Möbius y una hoja de papel normal?
- ¿Qué observas cuando recorres la cinta de Möbius con tu dedo sin levantarlo? ¿Qué pasa cuando intentas hacer lo mismo con una hoja de papel normal?
- ¿Qué es y qué no es el infinito?
- ¿Cómo describirían la diferencia entre algo que puede seguir creciendo para siempre y algo que ya es completo, pero representa un ciclo interminable?
- ¿Será posible que algo interminable este completo?
- ¿Qué nuevas preguntas te surgen sobre el infinito después de esta actividad?

Figura 7.

Ficha 1: Infografía para la recolección de información correspondiente a la actividad número uno, de la fase dos.


LA PARADOJA DEL VIAJERO- CINTA MÖBIUS

NOMBRE:

¿QUÉ PIENSAS DE LA PARADOJA DEL VIAJERO?

AHORA TU TURNO. ESCRIBE UNA SITUACIÓN SIMILAR. LUEGO RECRÉALA EN LA CINTA.

¿QUÉ ES Y QUÉ NO ES EL INFINITO?

QUÉ PUNTUACIÓN LE OTORGAS A LA ACTIVIDAD

Fuente*: Elaboración propia.*

Actividad 2: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 2. Triángulo de Sierpinski

En la actividad dos de la fase dos, ellos empiezan con las instrucciones anónimas del Triángulo de Sierpinski. Las primeras apreciaciones de la construcción del triángulo quedarán plasmadas en el registro anecdótico donde ellos de manera libre irán expresando los patrones a los que se enfrentan. Posterior a ello y solo cuando los estudiantes se den cuenta que no pueden seguir físicamente con el patrón de cortes y dobleces se iniciara por abrir la hoja para revelar el fractal final.

Tras la revelación se inicia la discusión que toma como base las siguientes preguntas:

Preguntas orientadoras para guiar la discusión:

- ¿Qué patrones identificaste durante la creación de la figura?
- ¿Qué patrones observas cuando extiendes el papel?
- ¿Observas alguna parte que esté indeterminada?
- ¿Consideras que puedes seguir construyendo la figura?
- ¿Cómo es la figura desde afuera?
- ¿Qué está conteniendo la figura?
- ¿Qué secuencia tiene potencial para ser interminable?
- ¿Está completa la figura?
- ¿Qué es el infinito potencial?
- ¿Qué es el infinito real?

Tras este espacio se les da a los estudiantes la ficha número dos, que tiene tres espacios significativos para plasmar las definiciones que han construido a partir de la experiencia del concepto infinito. Esta ficha contiene las siguientes preguntas: ¿Qué es el infinito potencial?, ¿Qué es el infinito real?, ¿Qué es el infinito? Y ¿Qué fue lo más interesante de la actividad?

Figura 8.

Ficha 2: Infografía para la recolección de información correspondiente a la actividad número dos, de la fase dos.

TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

NOMBRE:

¿QUÉ ES EL INFINITO POTENCIAL?

¿QUÉ ES EL INFINITO REAL?

REALIZA UNA DESCRIPCIÓN DE LA FIGURA. PARA ELLO, TEN EN CUENTA LAS PREGUNTAS QUE GUIARON LA DISCUSIÓN DE ESTA ACTIVIDAD.

QUÉ PUNTUACIÓN LE OTORGAS A LA ACTIVIDAD

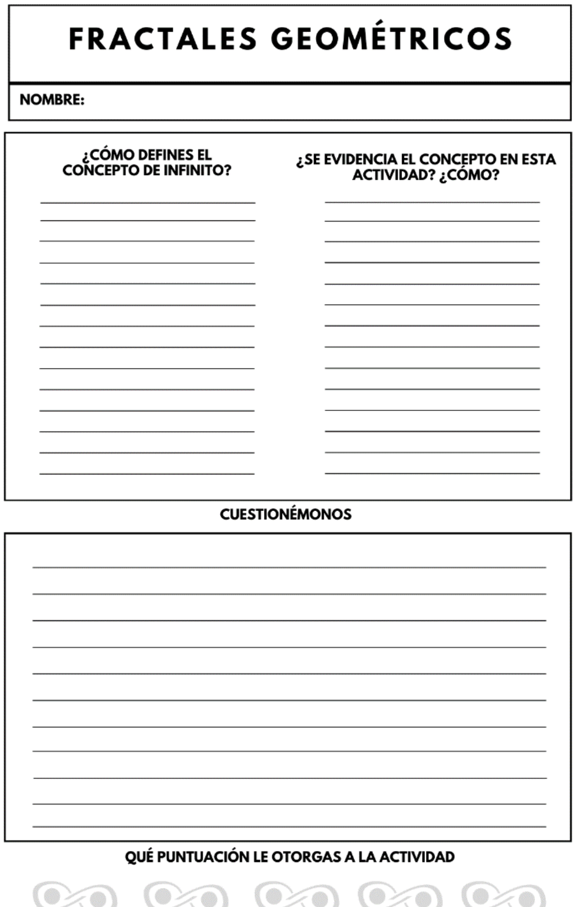
Fuente: *Elaboración propia.*

Actividad 3: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 3. Árbol de crecimiento fractal.

En esta actividad tres de la fase dos, se espera que los estudiantes tengan los insumos suficientes para describir con sus propias palabras el significado del concepto infinito. Ejemplificándolo con cada una de las actividades que se llevaron a cabo durante la secuencia didáctica. Para ello se presenta la siguiente ficha:

Figura 9.

Ficha 3: Infografía para la recolección de información correspondiente a la actividad número tres, de la fase dos.


FRACTALES GEOMÉTRICOS

NOMBRE:

¿CÓMO DEFINES EL CONCEPTO DE INFINITO?

¿SE EVIDENCIA EL CONCEPTO EN ESTA ACTIVIDAD? ¿CÓMO?

CUESTIONÉMONOS

QUÉ PUNTUACIÓN LE OTORGAS A LA ACTIVIDAD

***Fuente**: Elaboración propia.*

En la segunda sección, titulada Cuestionémonos, está diseñada para que los estudiantes realicen un análisis más detallado a partir de las siguientes preguntas orientadoras:

- ¿Cuáles son las principales diferencias que observan entre el árbol de decrecimiento geométrico y el árbol de crecimiento fractal?
- ¿Cuál de las dos estructuras les parece más compleja y por qué?
- ¿Cómo interpretan cada estructura?

- ¿Qué piensa de las iteraciones en cada figura? ¿Se aproximarán a un límite?

Fase 3: ¿A qué llegamos, ¿qué aprendimos y qué validamos?

En esta última fase, los estudiantes utilizarán una ficha cualitativa como recurso principal para obtener y analizar la información. A través de esta ficha, podrán registrar sus impresiones, reflexiones y análisis tras leer el texto corto. También tendrán la oportunidad de señalar las experiencias vividas a lo largo de toda la secuencia didáctica, sus fortalezas, dificultades, los conceptos que no comprendieron completamente, y aquellos vacíos que consideran necesario reforzar. Además, deberán plasmar su construcción del concepto de infinito, desde el infinito potencial, que ha evolucionado hasta el entendimiento del infinito real, actualmente aceptado. Este proceso de reflexión fomenta una profunda internalización del concepto, permitiendo a los estudiantes expresarlo con sus propias palabras, lo que ayuda a consolidar su aprendizaje.

Como recurso material de esta última actividad quedará el huevo que es una representación física del universo del estudiante, un universo ficticio e hipotético que recrea el infinito de cada uno, permitiendo la creatividad, imaginación e inmersión de los estudiantes en el tema.

Figura 10.

Ficha 4: Infografía para la recolección de información correspondiente a la actividad número uno, de la fase tres.

NOMBRE:

QUÉ PUNTUACIÓN LE OTORGAS A LA ACTIVIDAD

***Fuente**: Elaboración propia.*

Población Y Muestra

Población: El trabajo final de maestría se llevará a cabo en el Colegio Fontán, ubicado en el municipio de Envigado, Antioquia, durante el segundo semestre del año 2024. El Colegio posee una oferta académica que va desde preescolar hasta undécimo grado. El total de estudiantes en el presente año es de 467.

Muestra: El proyecto está destinado al subconjunto de la población de chicos en educación primaria. La sección de primaria cuenta con 9 talleres en los que los estudiantes se distribuyen desde primero hasta quinto grado. La muestra seleccionada para implementar el proyecto son los chicos del taller F, que incluye 16 estudiantes de cuarto y quinto grado del Colegio Fontán. Los estudiantes que forman parte de este taller son, en su mayoría, de quinto grado, representando el 81.25% de la muestra, mientras que el 18.75% restante son de cuarto grado. Además, de los estudiantes de quinto grado, solo el 46.15% ha completado el 50% o más del curso.

Delimitación Y Alcance

Este proyecto se centrará exclusivamente en el ciclo 2 de primaria, que incluye los grados cuarto y quinto, del Colegio Fontán. La selección de esta población responde a la intención de explorar y fortalecer las bases conceptuales de los estudiantes en un tema abstracto y complejo como el infinito, utilizando material concreto no estructurado como herramienta didáctica. La investigación se llevará a cabo durante el segundo semestre del año 2024 y se focalizará en los estudiantes del taller F, quienes presentan una diversidad en sus niveles de comprensión y progreso académico, lo que permitirá obtener un panorama amplio y representativo del impacto de la secuencia didáctica.

Este proyecto busca ser un apoyo significativo para educadores que deseen replicar la secuencia didáctica en otras instituciones educativas, ya que actualmente se encuentra poca información en Colombia sobre una secuencia de este tipo. Se espera proporcionar insumos significativos para el desarrollo profesional en el ámbito educativo, tanto a nivel local como nacional. A través de la identificación de concepciones previas, la implementación de actividades pedagógicas con material concreto y la evaluación de la efectividad de la secuencia didáctica, se espera dejar una línea base clara de cómo los estudiantes llegan con sus concepciones previas y cómo el uso de material concreto puede generar la construcción del conocimiento sobre el concepto de infinito.

Las actividades planificadas en las tres fases de la secuencia didáctica, desde la exploración de concepciones previas sobre el infinito hasta la reflexión final sobre los aprendizajes y validaciones obtenidas, permitirán a los estudiantes no solo acercarse al concepto de infinito, sino también desarrollar habilidades de pensamiento crítico y reflexivo.

Al final del proyecto, se espera poder entregar a la comunidad académica un conjunto de recursos y evidencias que demuestren el proceso de construcción del conocimiento sobre el infinito en los estudiantes, incluyendo sus desafíos, avances y logros. Este aporte será relevante no solo para el Colegio Fontán, sino también para otros educadores e investigadores interesados en innovar en la enseñanza de conceptos abstractos en educación primaria.

Cronograma

La tabla 1, Planificación de actividades, se presenta para proporcionar una visión clara y estructurada de las fases y actividades esenciales para desarrollar la secuencia didáctica del proyecto: *Uso de material concreto para el acercamiento al concepto infinito en ciclo 2 de primaria*. Esta tabla es crucial ya que desglosa cada fase del proyecto y las actividades específicas asociadas a los objetivos planteados, permitiendo una planificación detallada y una implementación efectiva.

La primera fase se enfoca en explorar las concepciones previas de los estudiantes sobre el infinito, un paso fundamental para adaptar las actividades pedagógicas a sus conocimientos iniciales y asegurar una base sólida para el aprendizaje. La segunda fase, que constituye el núcleo del proyecto, involucra actividades pedagógicas con material didáctico concreto, permitiendo a los estudiantes construir su comprensión del concepto de infinito a través del aprendizaje por descubrimiento. Finalmente, la tercera fase está diseñada para evaluar la efectividad y el alcance de la secuencia didáctica, permitiendo reflexionar sobre los aprendizajes obtenidos y validar la comprensión de los estudiantes.

La tabla 1, se muestra a continuación para ilustrar cómo cada actividad está alineada con los objetivos específicos del proyecto, asegurando una coherencia en el desarrollo de la secuencia didáctica y facilitando el seguimiento y la evaluación del progreso estudiantil.

Tabla 1

Planificación De Actividades

FASE	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Fase 1: Exploración de concepciones previas sobre el Infinito.	**Identificar las concepciones previas que tienen los estudiantes acerca del infinito.**	**1.1.** Actividad 1: El desafío de la caja llena: ¿Es verdaderamente infinito? **1.2.** Actividad 2: Árbol de decrecimiento geométrico: ¿Qué vemos aquí?
Fase 2: Explorando el Infinito: Secuencia Didáctica para el acercamiento al concepto de infinito.	**Ejecutar actividades pedagógicas que involucren material didáctico concreto para acercar a los estudiantes al concepto de infinito.**	**2.1** Actividad 1: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 1. La paradoja del viajero- Cinta Möbius. **2.2** Actividad 2: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 2. Triángulo de Sierpinski. **2.3** Actividad 3: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 3. Árbol de crecimiento fractal.
Fase 3: ¿A qué llegamos, qué aprendimos y qué validamos?	**Evaluar la efectividad y alcance de la secuencia didáctica**.	**3.1** Tu universo, tu infinito.

El desarrollo de cada una de las fases contenidas en la tabla 1 permite el cumplimiento de los objetivos específicos, destacando la optimización del tiempo y garantizando el éxito del trabajo final.

Por tanto, en la tabla 2 se determinan los tiempos para el desarrollo de cada actividad de la tabla 1, incluyendo los ítems que se deben investigar, diseñar y crear para la elaboración del trabajo final de maestría. El cronograma comprende la revisión bibliográfica, el diseño teórico, el marco referencial y el diseño metodológico. Es bien sabido que sin estos elementos no se podría estructurar la secuencia didáctica. Además, incluye las actividades en las que se aplica la secuencia didáctica y posterior a ello la sistematización de la información, el análisis de los resultados, la elaboración de conclusiones, recomendaciones y, en sí, el documento final.

El cronograma comprende 16 semanas, tiempo que corresponde a un semestre académico. Este cronograma es una herramienta fundamental, funciona como guía para el desarrollo de todo el trabajo, permitiendo el cumplimiento del mismo.

Tabla 2

Cronograma trabajo final de maestría.

ACTIVIDADES	SEMANAS															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Revisión bibliográfica.																
Diseño Teórico																
Marco Referencial																
Diseño Metodológico																
Actividad 1.1																
Actividad 1.2.																
Actividad 2.1																
Actividad 2.2																
Actividad 2.3																
Actividad 3.1																
Sistematización de la información																
Análisis de los resultados																
Conclusiones																
Recomendaciones																
Elaboración documento final																

CAPITULO III. SISTEMATIZACIÓN DE LA INTERVENCIÓN.

Resultados Y Análisis De La Intervención

Fase 1: Exploración de Concepciones Previas sobre el Infinito.

Actividad 1: El desafío de la caja llena: ¿Es verdaderamente infinito?

Imagen 1.

Aplicación del desafío de la caja llena: ¿Es verdaderamente infinito?

***Fuente**: Elaboración propia.*

El análisis de los resultados obtenidos en la actividad "El desafío de la caja llena: ¿Es verdaderamente infinito?" muestra que los estudiantes tienen diferentes concepciones sobre la situación en la que se ven implicados, estas concepciones pueden agruparse en cuatro categorías principales, y así podemos ver la complejidad y variedad en los estudiantes, también sobresale su capacidad de integrar factores externos y la habilidad para usar el contexto en sus reflexiones.

En la primera categoría se encuentran los estudiantes que perciben el proceso como extremadamente largo, pero finito. Para ellos, la lentitud del llenado no implica que sea imposible, sino que simplemente requeriría mucho tiempo y paciencia. Este grupo entiende que la situación es un proceso terminable. En este grupo sobresalen las siguientes expresiones:

"Miguel Cardona" (estudiante de grado quinto), dice: Yo pienso que la caja podría llenarse, pues es como contar hasta un millón.

"Matías Díez", (estudiante de grado quinto), dice: Es posible, ya que es proporcional a que llueva en una ciudad y esta se inunde.

La siguiente categoría muestra un pensamiento más analítico, ya que además de reconocer la extensión del proceso, se consideraron factores externos como el clima, los cuales podrían afectar el resultado. En sus respuestas, incluyen la posibilidad de que, bajo ciertas condiciones climáticas, el proceso podría ser finito o infinito. Estos estudiantes demuestran una mayor capacidad de argumentación, integrando variables adicionales.

En este grupo se ha de resaltar el nivel argumentativo, como se muestra a continuación, demostrando que las condiciones extremas de clima cambiarían el resultado de la caja:

"Amelia López" (estudiante de grado quinto) afirma: Además, si tenemos la caja en un clima caluroso extremo y constante, el agua se evaporaría, haciendo que el reto de llenarla sea imposible. Pero, si estamos en la Antártida o en un lugar con mucho frío, sería posible y fácil llenarla, porque además del agua que le echas con el atomizador, está el clima de tu lado.

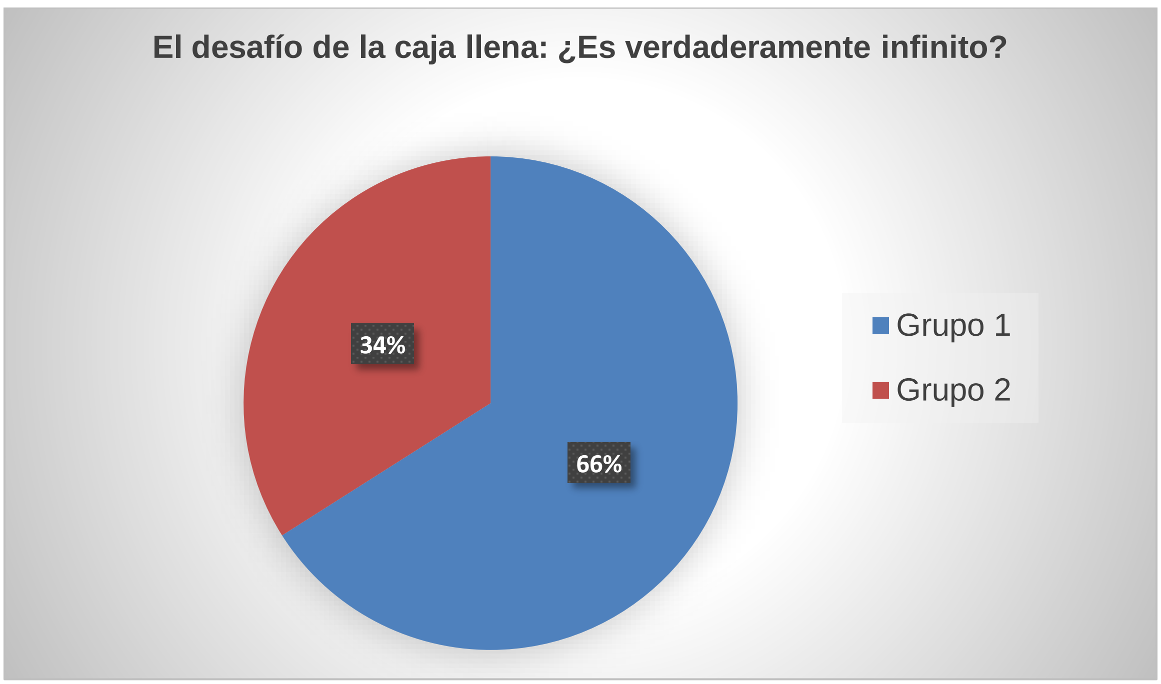
La tercera categoría vincula directamente la lentitud del proceso con el concepto de infinito. Para estos estudiantes, la extrema demora en llenar la caja es suficiente para concluir que el proceso es interminable. Esta conexión entre la duración y el infinito revela una comprensión limitada del concepto, ya que asocian lo infinito exclusivamente con la duración prolongada, sin considerar otros aspectos más abstractos del concepto.

Finalmente, el cuarto grupo de estudiantes no se posiciona claramente sobre si el proceso es infinito o no. En lugar de ofrecer una respuesta definitiva, describen el proceso como algo largo y aburrido. Este enfoque refleja una falta de compromiso en la reflexión sobre el infinito, lo que puede deberse a una dificultad para conectar el concepto con la experiencia concreta o a una resistencia a tomar una postura definitiva.

La representación de las cuatro categorías, descritas anteriormente, se reflejan en la gráfica 1.

Gráfica 1.

Resultados actividad 1: El desafío de la caja llena: ¿Es verdaderamente infinito?



Fuente: *Elaboración propia.*

A partir de la gráfica 1, se observa que el 66% de los estudiantes, que participaron en el desafío de la caja llena, mantienen una concepción finita de los procesos, esto corresponde al grupo 1. La población restante, es decir, el 34% presenta una confusión conceptual entre la prolongación de un proceso y la infinitud del mismo, asociando lo que es tedioso, agotador o extremadamente lento con lo infinito, lo que revela una comprensión limitada y superficial del concepto.

Actividad 2: Árbol de decrecimiento geométrico: ¿Qué vemos aquí?

Imagen 2.

Aplicación del Árbol de decrecimiento geométrico: ¿Qué vemos aquí?

***Fuente**: Elaboración propia.*

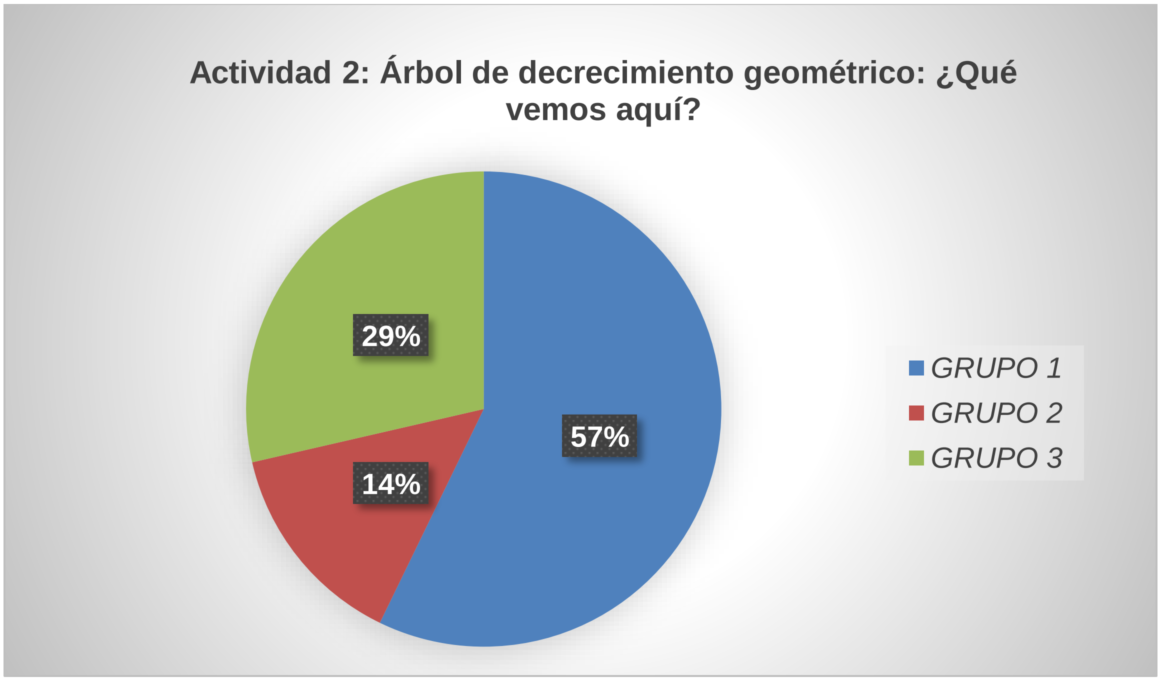
El análisis de los resultados concerniente a la actividad "Árbol de decrecimiento geométrico" nos aporta como resultado tres enfoques conceptuales sobre el infinito. Al que llamaremos grupo 1, incluye los estudiantes que comprendieron que, aunque el proceso de construcción del árbol geométrico parece prolongarse, está limitado por las condiciones impuestas por el propio patrón o las herramientas empleadas. Estos estudiantes identificaron que la secuencia iba agregando en cada iteración círculos, pero la cantidad a agregar disminuía así: (4, 3, 2, 1), llegando inevitablemente a un fin. Además, el tamaño de los círculos también disminuía a la mitad. Este último factor llevó a los estudiantes a argumentar que aspectos como la precisión de los instrumentos, como el compás, o las proporciones geométricas, limitan la expansión del proceso. Para ellos, el concepto de infinito está claramente diferenciado de lo finito, ya que reconocen que las reglas establecidas para la construcción imponen un límite definido. En este sentido, expresan una concepción clara y estructurada del fin.

El segundo grupo, considera que la figura podría continuar indefinidamente, aun siguiendo las condiciones del patrón. Sin embargo, en la práctica existen limitaciones que impiden que el proceso sea infinito. Este enfoque destaca la diferencia entre el infinito teórico y su aplicación práctica. La mención de que "la hoja no es infinita" muestra que la limitación está en el medio material y no en el patrón.

El último grupo de estudiantes muestra una confusión conceptual importante entre la duración de una tarea y la idea de infinito. Para ellos, lo prolongado o complicado se percibe como infinito, lo que revela una comprensión limitada de lo que realmente significa el concepto de infinito. En lugar de reconocer la diferencia entre lo que se extiende por mucho tiempo y lo que no tiene fin, estos estudiantes equiparan algo largo o tedioso con lo infinito. Esta confusión sugiere que aún no logran diferenciar entre una tarea que puede tomar mucho tiempo en completarse, pero que es finita, y el verdadero concepto matemático de infinito. Se destaca que estos mismos estudiantes coincidieron en que la actividad anterior también era un proceso interminable. La gráfica 2, muestra el porcentaje asociado a cada uno de estos grupos.

Gráfica 2.

Resultados actividad 2: Árbol de decrecimiento geométrico: ¿Qué vemos aquí?



Fuente*: Elaboración propia.*

El análisis comparativo entre los resultados de la primera actividad, *El desafío de la caja*, y la segunda, *Árbol de decrecimiento geométrico*, revela una disminución en el porcentaje de comprensión del concepto de lo finito. En la primera actividad, que involucraba un pensamiento más abstracto, el 66% de los estudiantes lograron identificar claramente el límite del proceso, realizando un análisis profundo y crítico sobre el infinito. Sin embargo, en la segunda actividad, donde los estudiantes trabajaron directamente en la creación de la estructura, este porcentaje disminuyó al 57%. La complejidad adicional de la tarea práctica, en la que factores materiales como el manejo del compás, regla, transportador, el tamaño del papel y las medidas precisas jugaron un papel determinante, provocó que algunos estudiantes confundieran las limitaciones físicas de las herramientas con el patrón geométrico subyacente, dificultando su comprensión conceptual de lo finito. Además, la creación del fractal resultó ser una tarea más tediosa y prolongada, requiriendo varias sesiones, lo que pudo haber incrementado la sensación de agotamiento y dificultad, afectando así su percepción del concepto de infinito y finito.

Fase 2: Explorando el Infinito: Secuencia Didáctica para el acercamiento al concepto de infinito.

Actividad 1: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 1. La paradoja del viajero-Cinta Möbius.

Durante el desarrollo de la actividad uno, correspondiente a la fase dos, los estudiantes experimentaron una mezcla de asombro y confusión al afrontar la paradoja del viajero en el tiempo. A pesar de haber dedicado el tiempo necesario para reflexionar sobre el dilema, un grupo correspondiente al 40% de los estudiantes expresaron su dificultad para analizarlo y comprenderlo completamente. Describieron la paradoja como confusa, extraña e impactante, ya que les resultaba difícil imaginar un escenario tan abstracto, donde el concepto de causa y efecto parece perder su coherencia. Estos estudiantes mencionaron que no podían discernir claramente el inicio ni el fin de la situación planteada, lo que hizo que la actividad fuera percibida como muy complicada inicialmente. El desafío radicaba en la naturaleza profundamente abstracta del problema, que exigía un nivel de pensamiento crítico y especulativo que algunos estudiantes aún no habían desarrollado por completo.

No obstante, el 60% de los estudiantes fue más allá de la confusión inicial, ya que se evidencia en este segundo grupo de chicos, que la actividad los llevó a profundizar en su análisis, formular conjeturas, crear hipótesis y explorar realidades alternativas. El dilema se convirtió en una oportunidad para que utilizaran su capacidad de razonamiento y comprensión de forma activa, en lugar de limitarse a la sensación de desconcierto. Ahora bien, dos de ellos llegaron a la conclusión más aceptada: Cuando evitas que tus abuelos se conozcan, también evitas tu propio nacimiento, por tanto, tú no existes y no puedes haber viajado al pasado, lo que provoca que el ciclo se repita sin fin. Se resalta que las respuestas de los otros chicos de este grupo fueron variadas y creativas, desde plantear la paradoja como una cuestión de desaparición gradual hasta considerar alternativas como el nacimiento bajo otros padres o la vida en realidades paralelas. Este proceso de pensamiento fue clave, ya que demuestra que se sintieron motivados a explorar nuevas ideas, a pesar de la complejidad de la paradoja. Su disposición para pensar en voz alta y no quedarse atrapados en la confusión fue un logro significativo en términos de desarrollo cognitivo y capacidad de abstracción.

Ahora bien, al introducir la cinta de Möbius como complemento a la paradoja del viajero, las expresiones de los estudiantes reflejaron una mezcla de asombro y curiosidad. Entre las ideas recogidas en el cuaderno anecdótico, destacaron comentarios como "Lo infinito está siendo concreto a través de un ciclo", "Lo que hace que se vuelva infinito es que vuelve a empezar una y otra vez", "Un circuito completo", "La cinta solo tiene un lado" y "Se va en una sola dirección, y no para". Los estudiantes se emocionaron al descubrir una figura físicamente manipulable con propiedades matemáticas abstractas, lo que les permitió visualizar y comprender mejor el concepto de infinito. La cinta de Möbius, al no tener límites físicos ni temporales, ofreció una representación tangible de un ciclo infinito en una sola superficie, lo que fue un desafío intelectual para todos. Por tanto, lograron conectar la paradoja del viajero con esta estructura, lo que transformó una situación inicialmente confusa en un concepto más claro y accesible. Esta experiencia les permitió desarrollar un pensamiento crítico y una mayor comprensión de situaciones abstractas que al principio les parecían inalcanzables.

Al ver la actividad desde un panorama completo y general, combinar la paradoja con la cinta de Möbius permitió que el 100% de los estudiantes comprendiera el concepto del infinito como un proceso *continuo*, lo que demuestra que la mayoría de la población se encuentra enmarcada en la noción del infinito potencial, pues otra característica que destacan es que su *continuidad no puede tener un final*.

Los hallazgos a la pregunta: ¿Qué es y qué no es el infinito?

El grupo 1: Indicios de infinito actual. Este grupo coincide en interpretar el infinito, no como algo indefinido o sin fin (lo que sería el esperado), sino como una totalidad cerrada y terminada. Esto sugiere que, para ellos, algo infinito es perfecto y no necesita más adiciones. La idea de que "si le faltara un suceso no sería infinito" refuerza esta percepción, donde el infinito es visto como un conjunto completo de elementos o sucesos.

A su vez, otra idea que surge, como: "el infinito está completo" puede estar asociada a la visualización de ciclos o estructuras cerradas, como un círculo o la cinta de Möbius, donde el punto de partida y el final coinciden. En este sentido, los estudiantes pueden estar vinculando lo infinito con una idea de repetición o ciclo sin fin, lo que los lleva a considerarlo completo, teniendo a un acercamiento conceptual del infinito actual o real.

El grupo 2: Indicios de infinito potencial. El segundo grupo de estudiantes asocia el concepto de infinito con lo que Aristóteles denominaba infinito potencial. Para ellos, el infinito es visto como un proceso interminable, algo que nunca se alcanza completamente, pero que sigue expandiéndose sin un final concreto. Este grupo se enfoca en la naturaleza dinámica y continua del infinito, reflejando la idea de que no importa cuánto se avance, el infinito nunca se agota.

Un estudiante lo expresó claramente al decir: "El infinito es algo que no tiene fin, que se repite por siempre, que no importa qué tan lejos avances, no tiene fin." Aquí, el infinito no es una entidad alcanzable o completa, sino más bien un ciclo continuo de repetición que desafía la imaginación humana.

Además, este grupo destaca la dificultad de comprender o visualizar el infinito en términos humanos, debido a la limitación de nuestras experiencias finitas, tal como lo mencionó otro estudiante: "Tocar el infinito es algo difícil de imaginar, ya que nosotros, los humanos, tenemos una vida finita, al igual que la Tierra." En esta visión, el infinito es una abstracción que supera los límites de lo que podemos experimentar físicamente o conceptualizar con facilidad, lo que refuerza la naturaleza eterna del infinito potencial.

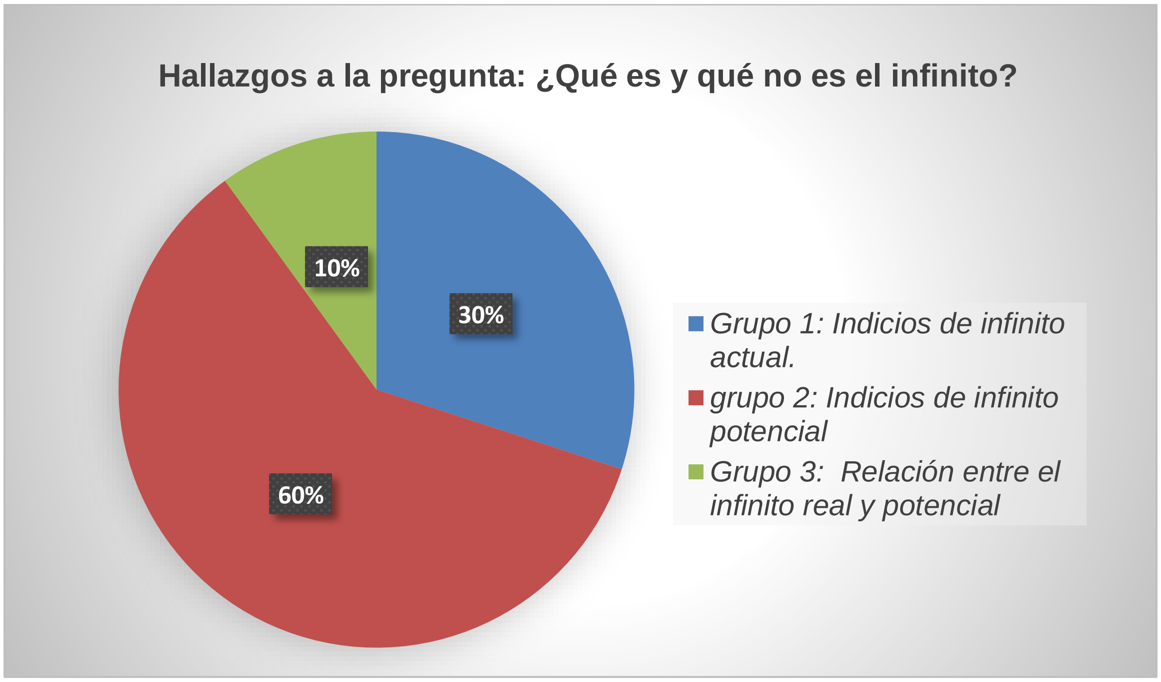
El grupo 3: Relación entre el infinito real y potencial. El último grupo, correspondiente al 10% de los estudiantes, presenta un análisis interesante que combina los conceptos de infinito potencial e infinito real. Este grupo reconoce la naturaleza interminable del infinito, afirmando que "El infinito es algo que empieza, pero no termina, algo que se repite y no tiene fin." Sin embargo, lo que distingue a este grupo es su capacidad para visualizar una transición entre lo abstracto y lo concreto, sugiriendo que los infinitos potenciales pueden, en ciertas circunstancias, transformarse en infinitos reales. Este pensamiento va más allá de una simple conceptualización teórica, ya que lo vinculan a experiencias tangibles, como la representación física del infinito en la cinta de Möbius.

En su análisis, los estudiantes argumentan que, al incorporar un infinito potencial en un objeto concreto, como la cinta de Möbius, este infinito adquiere una forma más palpable y continúa indefinidamente sin interrupciones o vacíos. El enfoque de este grupo sugiere una síntesis innovadora entre lo potencial y lo real, mostrando una reflexión avanzada que permite a los estudiantes comprender el infinito no solo como algo abstracto, sino también como algo que puede ser completado cuando se inserta en un contexto concreto y observable.

En la gráfica 3, se observa el porcentaje que le corresponde a cada grupo, viendo como el grupo 1, que llamaremos indicios de infinito actual abarca un porcentaje del 30%, el grupo 2, que abarca un acercamiento al infinito potencial, tiene un porcentaje del 60%, y por último el grupo 3, en el que radica el 10% de la muestra.

Gráfica 3.

Hallazgos a la pregunta: ¿Qué es y qué no es el infinito? Actividad 1, fase 2.

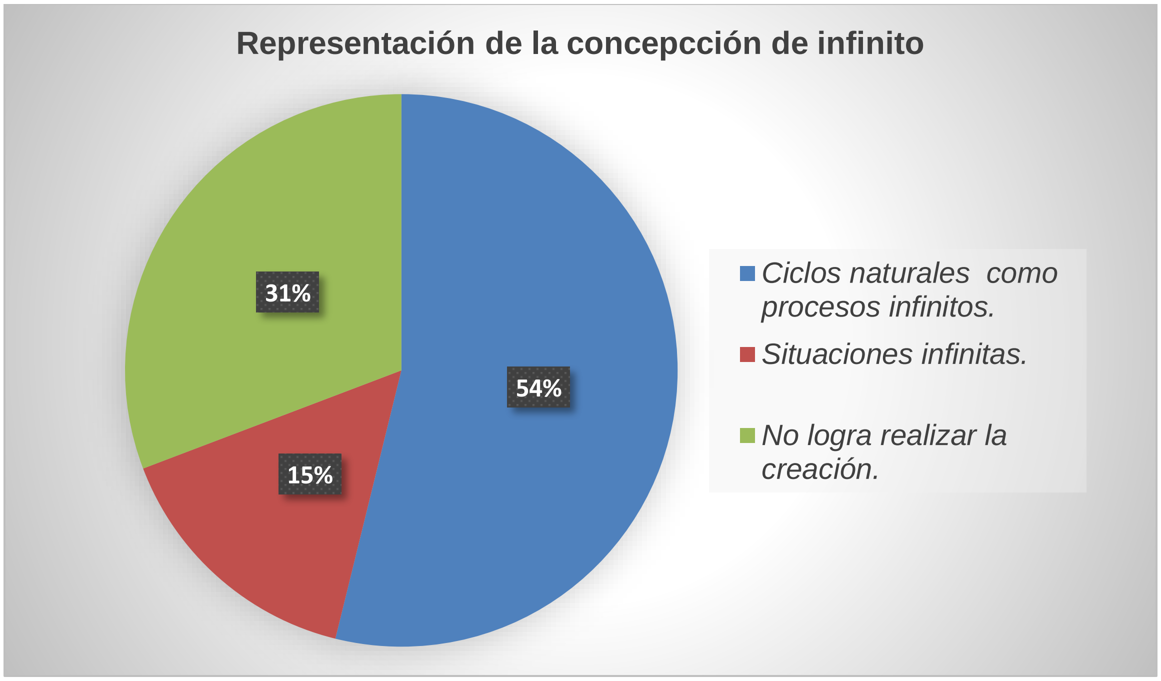


Fuente*: Elaboración propia.*

¿Qué pasa cuando se les pide que creen una situación qué represente su concepción de lo infinito?

Gráfica 4.

Creación de situaciones con base en la concepción del concepto infinito de los estudiantes de ciclo 2, Colegio Fontán. Actividad 1, fase 2.



Fuente: *Elaboración propia.*

Con base en la gráfica 4, cuando se pide a los estudiantes que creen una situación que represente su concepción de lo infinito, el 54% de ellos recurre a ejemplos de ciclos naturales como el ciclo de la luna, el nacimiento de un girasol tras la muerte de otro, el ciclo del agua, la fotosíntesis, el ciclo del carbono y la reencarnación. Lo que está ocurriendo en estas respuestas es una combinación entre su comprensión intuitiva del tiempo y su capacidad de abstraer conceptos. Los estudiantes perciben la repetición continua de estos ciclos como un proceso interminable y, en cierto sentido, lo consideran infinito porque no identifican un final claro o inmediato. Sin embargo, esta comprensión se ve influenciada por una percepción momentánea o local del tiempo. Los estudiantes aún no son capaces de conceptualizar las escalas de tiempo más amplias ni de considerar los factores que, eventualmente, interrumpen estos ciclos naturales, como los cambios geológicos, atmosféricos o biológicos. A su edad, están en proceso de desarrollar una visión más compleja sobre las limitaciones físicas y temporales de los procesos que observan. En consecuencia, ven estos ciclos como potencialmente infinitos desde su experiencia inmediata, sin considerar los límites inherentes. Esta tendencia refleja su etapa de desarrollo cognitivo, donde lo que se repite en su entorno cotidiano puede ser interpretado como infinito debido a la ausencia de una comprensión más amplia de los factores que afectan dichos ciclos a lo largo del tiempo.

Otro dato a destacar, con base en la gráfica 4, es que el porcentaje más bajo, representado por el 15%, corresponde a aquellos estudiantes que demostraron una notable habilidad, creatividad y originalidad al crear situaciones con un tono terrorífico y de misterio. A continuación, se presentan algunos ejemplos de estas situaciones:

“Te despiertas con miedo y dolor de cabeza, coges tu carro y vas por medicamentos para tu dolor, pero de regreso tienes un accidente y mueres. Entonces te despiertas con miedo y dolor de cabeza y así infinitamente.” — Matías Díez Vargas, estudiante de quinto.

“Empiezo a tocar una obra, pero pierdo el tempo, entonces toco con metrónomo y me sale bien. Sin embargo, cuando dejo el metrónomo pierdo el tempo de nuevo en un ciclo infinito.” — María Isabel Álzate Álvarez, estudiante de quinto.

“Estás en un edificio, pero pierdes el equilibrio y caes. Pasan 4 segundos y tienes un botón que retrocede en el tiempo 3 segundos, así que lo usas, pero vuelves a caer y no hay nadie cerca de ti. Terminas en un bucle para no morir, ya que la altura del edificio haría mortal la caída.” — Miguel Cardona Lara, estudiante de quinto.

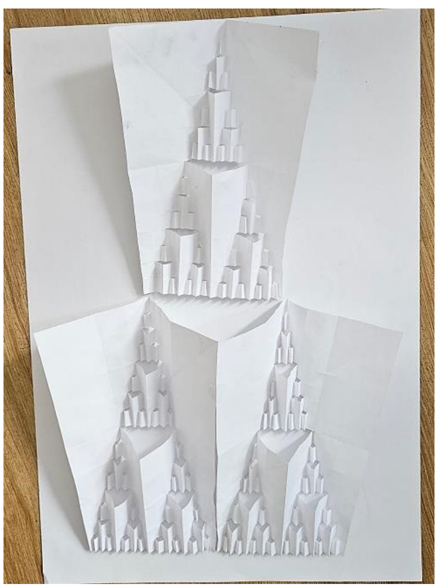
“Te despiertas de la pesadilla, entonces decides ir a tu balcón a tomar aire, pero caes y, a punto de morir, te despiertas de la pesadilla.” — Emiliano Restrepo, estudiante de cuarto.

Actividad 2: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 2. El triángulo de Sierpinski.

Para presentar los resultados de la actividad dos, se inicia con la imagen 4, esta imagen abre paso a ejemplificar la concepción de infinito a la que se llegó. En ella, podemos observar el triángulo de Sierpinski, construido a partir de tres triángulos individuales, cada uno creado por los estudiantes. La construcción conjunta no solo reafirma el concepto de infinito, sino que también involucra un acercamiento a un límite, ya que, al unir sus creaciones, se revela un patrón que puede repetirse indefinidamente, acercándose cada vez más a la noción de una figura sin fin.

Imagen 3.

Representación gráfica del resultado de la actividad 2, fase 2.



Fuente*: Elaboración propia.*

El enfoque conceptual a lo largo de esta actividad era fundamental, ya que se buscaba comprender cómo los estudiantes conciben la idea de lo infinito. A partir de la recolección de sus respuestas, obtuvimos hallazgos reveladores sobre los significados que han construido hasta el momento. Veamos:

Al analizar los resultados escritos, que dejaron en la infografía tras experimentar la actividad, se destaca que un 54% de los estudiantes comparte definiciones similares, estas definiciones, sorprendentemente cercanas al concepto matemático. Se hace énfasis en lo anterior, dado que se trata de estudiantes de quinto grado de primaria.

Cuando se les preguntó sobre su comprensión del infinito potencial, con base en la figura que acababan de construir se obtuvo lo siguiente:

El 54% de la muestra define el infinito potencial como algo que puede continuar indefinidamente. Muchos lo describen como un patrón que se repite sin fin, donde el triángulo inicial se subdivide en triángulos más pequeños, y este proceso continúa de manera infinita. Aunque reconocen que, en la práctica, no es posible seguir cortando la figura, varios sugieren que pueden continuar este proceso de manera mental; dejando a un lado la limitación física y pasando a un pensamiento abstracto.

En este mismo grupo se analizaron las respuestas de los estudiantes sobre el concepto de infinito real, observándose que su comprensión se enfoca en la idea de una totalidad completa que, pues, aunque el triángulo pueda subdividirse indefinidamente, ya existe como un todo. Varios estudiantes destacan que el infinito real es el triángulo completo o la figura inicial, sugiriendo que esta totalidad representa el límite o punto de partida de lo infinito.

La noción de que al infinito no le falta nada refuerza la idea de que el infinito real es algo ya conformado y presente, una diferencia del infinito potencial, que se basa en un proceso continuo. Esta interpretación sugiere que los estudiantes ven el infinito real como una estructura concreta y estable, que encierra en sí misma la posibilidad de ser infinitamente divisible.

Se recalca que los estudiantes que llegan a este nivel de reflexión son en su totalidad de quinto grado, la precisión con la que definen el concepto sugiere que se requiere un cierto nivel de pensamiento abstracto para entender el infinito real.

El grupo anterior muestra una comprensión clara de las diferencias conceptuales entre el infinito potencial y el infinito real, a partir del triángulo de Sierpinski. Sin embargo, el resto del grupo, que representa el 46%, no logra distinguir claramente entre estas dos definiciones. Al preguntarle sobre el infinito real, responden con definiciones similares a las del infinito potencial, describiéndolo como algo que no termina, que no tiene fin y que continúa indefinidamente. Esto indica que este grupo se queda en el nivel del infinito potencial y no ha logrado diferenciar el infinito real, ni logra hablar del mismo.

Actividad 3: Construyendo el Infinito Juntos - Parte 3. Árbol de crecimiento fractal.

Durante la presente actividad, los estudiantes reconocieron el crecimiento de las ramas del árbol, identificando un proceso potencialmente infinito. A medida que iban ejecutando la actividad, expresaron que, cuando se trataba de números medibles con una regla, podían seguir el patrón de crecimiento con mayor facilidad; lo que convertía la actividad en algo más accesible a su nivel académico.

En este desarrollo fue evidente que, a medida que avanzaban, cada vez había más ramificaciones, y estas podrían continuar indefinidamente si así lo desearan. Sin embargo, como la precisión de la regla tiene un límite, se vieron obligados a detenerse, aunque pudieron proyectar mentalmente la continuación del crecimiento.

Algunos estudiantes también comentaron que, en comparación con el árbol de decrecimiento realizado en la fase uno, esta actividad resultó más sencilla ejecutar; aun cuando el árbol fractal era infinito y el árbol de decrecimiento era finito. Esta conclusión estuvo acompañada de la observación de que la construcción del fractal representaba mayor agilidad, mientras que la creación del árbol de decrecimiento incluía el uso de un compás, lo que dificultaba su trabajo.

Al finalizar la actividad, los estudiantes observaron que habían creado un árbol completo y, a la vez, complejo, ya que dentro de su estructura existía una infinitud de ramificaciones. Uno de los comentarios que acompaña este resultado es: "La totalidad de un árbol y la infinitud de sus ramificaciones", lo que refleja su comprensión del concepto.

Además, fue interesante notar cómo el pensamiento matemático también se integró en desarrollo de la actividad, pues empezaron a discutir el factor de crecimiento, concluyeron que, si este se multiplicaba por 0.5 en cada iteración, era equivalente a dividir la longitud de las ramas por la mitad. Asociaron esto con el hecho de que la división por dos puede continuar indefinidamente. La conclusión anterior fue propia de los estudiantes de quinto grado que habían completado la unidad de decimales, ya que integraron sus conocimientos previos con la actividad en curso.

Finalmente, las respuestas emocionales también jugaron un papel relevante puesto que, varios estudiantes mencionaron, a través del cuaderno anecdótico, que la actividad fue relajante y divertida, permitiéndoles expresar su creatividad a través del arte, lo que demuestra que el ambiente de aprendizaje tuvo un impacto positivo en su experiencia. En este instrumento de recolección de información, dejaron por escrito como había una libertad creativa que acompañaba el disfrute del proceso; y, otros combinaron sus intereses personales, como la pintura, con la comprensión matemática de los fractales. La evidencia de esta actividad queda reflejada en la imagen 5, que expresa el producto final.

Imagen 4.

Resultados de la aplicación de la actividad denominada: Árbol de crecimiento fractal.

Fuente: *Elaboración propia.*

Fase 3: ¿A qué llegamos, ¿qué aprendimos y qué validamos?

Actividad 3: Tu universo, tu infinito

Los resultados que se obtienen tras implementar la actividad en mención, permitieron a los estudiantes explorar el concepto del infinito a través de una conexión directa entre literatura y matemáticas. La propuesta, que combinaba la lectura reflexiva con la creación artística, mostró resultados asombrosos en términos de cómo los estudiantes lograron apropiarse de un tema abstracto como el infinito.

Uno de los resultados más significativos fue que el 100% de los estudiantes logró extrapolar el concepto de infinito a la idea de reencarnación continua presente en la historia. Esta extrapolación demuestra una capacidad de abstracción considerable, ya que los estudiantes fueron capaces de separar la finitud de una vida individual de la infinitud representada por la sucesión interminable de reencarnaciones. La relación entre finitud e infinitud quedo plasmada en los relatos escritos de los estudiantes.

Otro hallazgo a considerar fue que, al analizar en detalle los relatos y reflexiones de los estudiantes, se observó que todos lograron identificar el infinito como una situación que se repite indefinidamente, es decir, como un *infinito potencial*, este concepto, asociado al pensamiento de Aristóteles, indica que la primera noción de los estudiantes es que el infinito puede concebirse como algo que continúa sin detenerse.

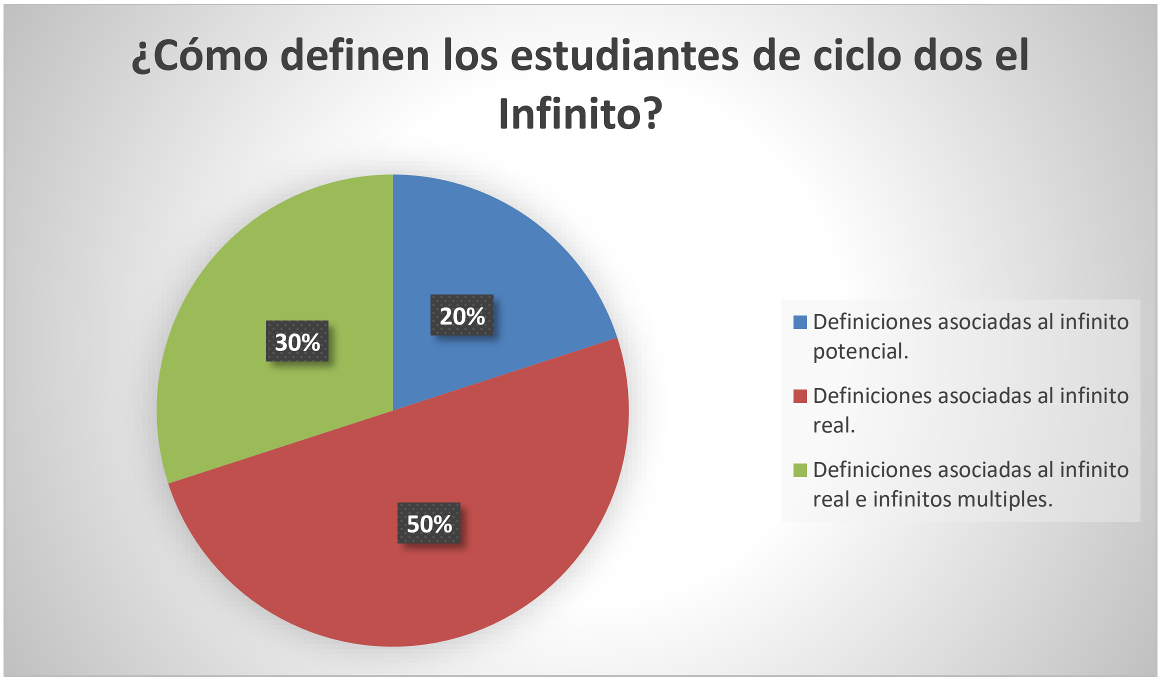
Pero, aunque todo el 100% de la muestra, tiene presente la anterior noción, se destaca que el 80% de los estudiantes no se detuvo en la concepción inicial del infinito potencial, sino que avanzó hacia un entendimiento más completo, reconociendo que el ciclo de infinitud descrito en la historia estaba contenido dentro de un cascarón o límite, representado simbólicamente por el huevo, este grupo de estudiantes identificó el concepto del *infinito real*, interpretando que es algo que puede ser delimitado o completado.

Adicionalmente, de la muestra en general un 30% excavó aún más, reflexionando sobre la existencia de múltiples infinitos o huevos, haciendo referencia a la lectura, cada uno con características y elementos diferentes, siendo todos los que llevaron a tal reflexión chicos de quinto. Esta capacidad de imaginar y comparar infinitos, tratándolos como objetos concretos, indica un avance significativo en su comprensión del concepto. En conclusión, los estudiantes no solo comprendieron el infinito desde una perspectiva matemática, sino que también lo aplicaron a situaciones abstractas y reflexivas lo que evidenció un desarrollo integral de su pensamiento.

A continuación, en la gráfica 5, se plantean los hallazgos finales, tras haber implementado a cabalidad la secuencia didáctica:

Grafica 5.

Hallazgos finales tras el acercamiento de los estudiantes de ciclo dos al concepto infinito.



Fuente: *Elaboración propia.*

La actividad en su conjunto demostró que el uso de materiales no estructurados, como el huevo, fue fundamental para que los estudiantes pudieran aplicar los conocimientos adquiridos previamente, pues este permitió crear una representación simbólica del infinito en un objeto. A través de la interpretación de su propio universo, se visualizó el concepto y se pudo plasmar de manera concreta, haciendo que el aprendizaje fuera significativo.

El enfoque educativo del Colegio Fontán, basado en la lectura inductiva y la escritura espontánea, también jugó un papel clave en el éxito de esta actividad. Este modelo educativo permitió que los estudiantes expresaran sus ideas de forma clara y precisa, ligando la literatura y las matemáticas de una manera accesible.

Así mismo, es importante mencionar que el enlace con la parte artista de cada chico y el debate que se presentó de manera global, pudo alcanzar que el 100% de los estudiantes tuvieran un acercamiento concreto y estructurado con del concepto de infinito. Al final los chicos pudieron expresar en la estructura del huevo los diseños y estilos propios de su universo, teniendo la oportunidad de crear su propio universo, su propio infinito; ese infinito que ha de ir completándose y acercándose a su límite. A continuación, en la imagen 6, se muestra la creación visual de los infinitos de algunos estudiantes:

Imagen 5.

Representación de "El huevo" de algunos de los estudiantes.


***Fuente**: Elaboración propia.*

Nota: En la imagen se refleja que cada uno de esos universos o infinitos puede tener diferentes, colores, texturas y formas particulares. La trascendencia de la imagen, radica en que es ahí donde pueden ser comprados y estudiados como objetos concretos. Resaltando la noción de que hay múltiples tipos de infinitos, como lo sugiere el matemático Georg Cantor, quien habló de infinitos de diferentes magnitudes y tamaños. En este sentido, los distintos huevos podrían ser una representación de estos infinitos múltiples.

A continuación, se presenta una síntesis, en acuerdo a lo que expresó el 30% de los estudiantes, que reconocen en el texto un infinito potencial que, eventualmente, se convierte en real:

La capacidad infinita de repetir una vida una y otra vez refleja un infinito con potencial a seguir, un proceso en constante desarrollo que nunca termina, pero que tiene una dirección clara:

alcanzar un universo completo. Este tipo de infinito no se alcanza nunca en su totalidad, sino que se aproxima indefinidamente, es evidente lo que sucede en este universo, hay una mejora continua. Aquí surge la idea del límite o el cascarón, que actúa como un contorno que parece contener lo infinito.

Dentro de este universo, los sucesos se repiten de manera indefinida con el objetivo de perfeccionarse, sin embargo, el personaje no se da cuenta de que, aunque el proceso siga su curso infinito, está aproximándose, sin alcanzarlo nunca, a un límite: el huevo, el universo, que representa el infinito real, un estado en completa armonía. Así, pasarán la eternidad tratando de alcanzar algo que, paradójicamente, ya está completo y definido en su totalidad, lo que deja la especulación que el infinito potencial alguna vez va a convertirse en el infinito real.

Una de las estudiantes también resaltó que, en este universo, no existe la linealidad del tiempo, no hay pasado, presente ni futuro; solo existe un estado continuo y eterno, donde todos los eventos están conectados de manera indefinida, sin un fin claro, lo que refleja la naturaleza del infinito en términos matemáticos: una secuencia que continúa sin cesar, fuera de los límites del tiempo convencional.

Conclusiones Y Recomendaciones

Conclusiones

A partir del análisis de la fase uno, cuyo objetivo era identificar las concepciones previas de los estudiantes sobre el infinito, logra observar que estas concepciones están estrechamente vinculadas a su contexto cotidiano. En particular, los estudiantes tienden a relacionar el concepto de infinito con sentimientos y emociones, lo que sugiere una comprensión subjetiva e intuitiva. Esta percepción refleja que, para ellos, el infinito no se asocia necesariamente con un concepto matemático abstracto, sino con experiencias personales que parecen no tener fin, como sensaciones o situaciones emocionales prolongadas.

Además, los resultados de la primera actividad, El desafío de la caja llena, muestran que el 66% de los estudiantes tienen una concepción clara de lo finito. Este grupo reconoció que, aunque una tarea pueda ser tediosa o prolongada, no es necesariamente infinita. Estos estudiantes lograron diferenciar entre lo que toma mucho tiempo y lo que realmente no tiene fin, lo que evidencia una comprensión más estructurada del concepto de finitud. Sin embargo, el 34% restante mostró dificultades en esta distinción, ya que asociaron la duración prolongada de una actividad con algo eterno e inconcebible. Esta confusión entre lo extenso y lo infinito sugiere que sus concepciones aún no están completamente formadas o son más influenciadas por intuiciones que por un entendimiento formal.

No obstante, al incrementar la complejidad de la actividad número dos de esta misma fase, se observó un impacto significativo en la comprensión del concepto de finitud. En la actividad del árbol de decrecimiento geométrico, donde se introdujeron materiales y herramientas que no son de uso cotidiano para los estudiantes, el porcentaje de quienes comprendían claramente el concepto de lo finito disminuyó al 57%. Este descenso del 9% indica que las concepciones sobre lo finito no eran lo suficientemente sólidas como para sostenerse cuando la tarea se volvió más compleja y exigía un seguimiento preciso de patrones geométricos. Por tal razón, los estudiantes que inicialmente comprendieron la finitud en la actividad anterior, comenzaron a confundirse al enfrentarse a limitaciones físicas, como el tamaño del papel o la precisión de los instrumentos, lo que afectó su percepción del concepto.

Ahora bien, en cuanto al desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica utilizando material concreto, la planeación de las mismas representó un reto significativo, ya que el objetivo principal era vincular la curiosidad innata de los estudiantes por lo desconocido, lo místico y lo paradójico, con un concepto matemático abstracto como es el infinito. En el diseño de estas actividades se buscó transformar un concepto difícil de concretar en algo tangible, para ello se propuso utilizar estructuras físicas como la cinta de Möbius, la creación del triángulo de Sierpinski y el diseño del árbol de decrecimiento fractal como medios concretos para su aprendizaje. Resaltando que, las actividades mencionadas anteriormente, por sí solas no hubieran cumplido completamente su propósito educativo; fue cuando visto de una manera conjunta, se acertó al integrar el uso de materiales concretos con textos de ficción como la paradoja del viajero, lo que permitió conectar la matemática con narrativas imaginativas que estimularon el pensamiento crítico y creativo de los estudiantes. Además, se integraron retos de construcción en los que debían seguir instrucciones para crear algo desconocido, lo cual aumentó su interés y compromiso, también se vincularon sus intereses artísticos con estas actividades. Este conjunto de actividades logró despertar una motivación intrínseca, siguiendo las ideas del autor Jerome Bruner, quien subraya la importancia de la motivación interna en el aprendizaje. Por consiguiente, al mantener el enfoque en un aprendizaje por descubrimiento, donde el docente actuó como guía y facilitador del proceso se obtiene que los estudiantes no solo exploraron el concepto del infinito desde una perspectiva concreta y abstracta, sino que también experimentaron un aprendizaje más profundo y autónomo, basado en la exploración y la curiosidad.

En cuanto a la primera actividad de la fase dos, titulada La paradoja del viajero - Cinta Möbius, proporcionó una visión valiosa sobre cómo los estudiantes integran en sus concepciones previas la noción de procesos cíclicos, como el ciclo del día y la noche, así como ciertos fenómenos naturales que perciben como infinitos. Sin embargo, esta percepción de infinitud parece estar relacionada con su comprensión limitada de las escalas de tiempo, ya que más de la mitad del grupo, un 54%, identificó ciclos naturales, como el ciclo del agua, el ciclo lunar y el ciclo del carbono, como ejemplos de infinitud. Esto sugiere que los estudiantes necesitan ampliar su comprensión de las escalas temporales para otorgar un sentido más sólido a su concepto matemático del infinito, evitando así caer en comparaciones limitadas y superficiales.

En concordancia a lo anterior, durante la fase dos, se implementaron diversas actividades para acercar a los estudiantes al concepto del infinito matemático, lo que permitió evaluar tanto el aprendizaje como el disfrute que experimentaron. Entre las actividades realizadas, el árbol de crecimiento fractal fue la más apreciada, ya que los estudiantes se sintieron más cómodos con los instrumentos utilizados, como regla, escuadra, transportador y lápices. Además, tuvieron la oportunidad de combinar su pasión por el arte al pintar sus propios árboles fractales, lo que enriqueció aún más su experiencia de aprendizaje. En términos de comprensión, esta actividad se destacó como la más efectiva; al ser la última de la secuencia, los estudiantes habían ido construyendo su definición del concepto de infinito a lo largo del proceso. Así, lograron captar la infinitud del proceso y su continuidad, a pesar de que físicamente se percibía un límite en la creación. De esta manera, se pudo observar cómo el árbol, en su forma completa, representaba de manera tangible el concepto de infinito. Esto corrobora que los estudiantes comprenden mejor los conceptos cuando están involucrados de manera práctica y emocional en el proceso de aprendizaje.

El uso de material concreto en las actividades permitió a los estudiantes implicarse de manera activa en su proceso de aprendizaje, convirtiéndose en una parte esencial de la experiencia educativa; la relación entre las actividades y sus conocimientos previos, así como sus gustos e intereses, facilitó una conexión significativa que favoreció su comprensión del concepto de infinito. Además, la incorporación de elementos creativos en la creación de historias se consolidó como una estrategia efectiva para acercar a los estudiantes a esta noción matemática, promoviendo un aprendizaje significativo.

Es fundamental mencionar que, al no existir un referente curricular específico que aborde el concepto de infinito para estudiantes de primaria, quienes deseen replicar la secuencia didáctica deben tener en cuenta la duración de la misma: dos meses, con dos sesiones diarias cada semana. Esto podría implicar un uso significativo del tiempo destinado a los contenidos del curso. A pesar de estos desafíos, no podemos perder de vista la importancia de que los estudiantes exploren este concepto desde una edad temprana. Es responsabilidad de los docentes proponer ideas nuevas e innovadoras que fomenten el desarrollo integral de los chicos, asegurando que tengan la oportunidad de acercarse a conceptos matemáticos complejos de una manera accesible y significativa.

En última instancia, el ejercicio destaca la importancia de utilizar recursos pedagógicos variados que permitan a los estudiantes acercarse a conceptos difíciles de forma creativa e intuitiva. Al vincular el infinito con sus propias creaciones, los estudiantes no solo adquirieron una comprensión más clara del concepto, sino que también lograron expresar sus ideas de manera única y personal; lo que sugiere que nuestro enfoque metodológico, fundamentado en la premisa de motivar y fomentar el deseo de aprender en los estudiantes, reconoce el valor de la motivación intrínseca y se traduce en la creación de una secuencia didáctica en un entorno de aprendizaje enriquecedor. A su vez, el prevalecer durante la secuencia didáctica, la exploración y el descubrimiento, alineado con los paradigmas del aprendizaje activo y constructivista, fue fundamental para el desarrollo integral de los estudiantes, especialmente al abordar temas tan abstractos y desafiantes como el infinito, facilitando así una experiencia educativa.

En conclusión, la secuencia didáctica, ha sentado bases sólidas para un acercamiento al concepto del infinito desde el ciclo dos de básica primaria, un tema que anteriormente no contaba con un tratamiento estructurado en el contexto educativo. Este enfoque multidimensional ha permitido a los estudiantes no solo comprender mejor esta noción abstracta, sino también disfrutar del proceso de aprendizaje. Al integrar elementos literarios, matemáticos y artísticos, se ha abierto un camino hacia nuevas ideas y oportunidades que pueden ser replicadas en otras instituciones educativas.

Recomendaciones

El desarrollo e implementación de la secuencia didáctica esta planteada para los estudiantes de ciclo dos de primaria, ya que no requiere conocimientos previos específicos. Puede ser implementada con estudiantes que tengan o no experiencia en el uso de instrumentos geométricos como el compás, el transportador, la regla o las escuadras. Aunque es recomendable que los estudiantes tengan alguna familiaridad con estos instrumentos, su desconocimiento no es un obstáculo, ya que su uso puede ser enseñado durante la actividad. Además, aquellos que ya los conocen pueden perfeccionar su habilidad mientras avanzan en la creación de la estructura geométrica y los fractales.

Si bien la población seleccionada para esta secuencia didáctica incluyó a estudiantes de cuarto y quinto grado, considero que el cuarto grado marca el límite inferior para introducir a los alumnos al concepto de infinito. Los resultados muestran que los estudiantes de quinto grado comprendieron las actividades con mayor facilidad, probablemente debido a su mayor exposición a temas matemáticos de su grado. No obstante, tanto los estudiantes de cuarto como de quinto grado lograron entender y completar las actividades; pero, las reflexiones más profundas y acertadas provinieron de los alumnos de quinto. Este punto de vista, nos deja ver como al trabajar en un grupo mixto, los estudiantes de cuarto grado se beneficiaron del conocimiento de sus compañeros mayores, lo que les permitió elevar su nivel de comprensión a través de los debates, las socializaciones y los resultados finales compartidos.

Dada la extensión de la secuencia didáctica, se recomienda distribuir las actividades a lo largo de todo un año escolar. De esta manera, el proceso puede iniciarse y concluirse de forma gradual, permitiendo que los estudiantes no se sientan abrumados por el tema al abordarlo con demasiada frecuencia. Además, esta distribución facilita que los estudiantes puedan asimilar tanto el concepto del infinito como los demás temas propuestos en la malla curricular nacional, asegurando un equilibrio adecuado entre ambos contenidos.

En las actividades específicas de la secuencia didáctica, se observó que durante el desarrollo de la actividad dos de la fase uno, el tiempo de ejecución fue considerablemente largo. Los estudiantes tardaron tres sesiones en completar la creación del árbol de decrecimiento geométrico, con sesiones de aproximadamente 60 minutos cada una. En ese tiempo, los estudiantes construían el árbol, creaban los círculos y completaban las planchas, lo que, sumado a la dificultad de manejar el compás con círculos de diámetros pequeños, complicaba el proceso. Este factor pudo generar saturación en los estudiantes, llevándolos a cuestionar el propósito de la actividad con pensamientos como "¿para qué sirve esto?", lo que les hacía perder el enfoque en el objetivo inicial. Si se replica esta actividad en grados de cuarto y quinto, es importante considerar una alternativa más fresca que no requiera más de una sesión para completarse, de modo que los estudiantes no pierdan la motivación ni el enfoque.

En la actividad de la cinta de Möbius, es crucial que el facilitador y guía, el docente en este caso, brinde un acompañamiento constante. Si esto se deja a un lado, los chicos pueden tomar caminos equivocados en la interpretación de la actividad, asumiendo incorrectamente que todos los procesos cíclicos son infinitos. La confusión de esto es clara, pues no contemplan en los procesos cíclicos naturales el factor de tiempo y la finitud de estos en una escala geológica. Durante el desarrollo de la actividad, se presentó una dificultad relacionada con la condición cíclica que representa la cinta de Möbius, lo que generó una duda significativa en los estudiantes: si el conjunto de los números es infinito, ¿cómo se pueden representar o asociar esos números con la cinta de Möbius? Esta cuestión se convirtió en un verdadero desafío, ya que los estudiantes comenzaron a cuestionar la existencia de infinitos cíclicos y lineales, y cómo se diferenciaban entre sí. Al proponer la actividad en forma de ciclo, existe el riesgo de que confundan el concepto. Por lo tanto, es esencial que el docente acompañe y guíe a los estudiantes en esta exploración.

Es importante que el docente conozca los intereses personales del grupo al que implementará la actividad, ya que, en esta muestra de estudiantes, su factor de motivación fue el arte: actividades en las que podían pintar, escribir, redactar, cortar y manipular. Sin embargo, no todas las poblaciones son iguales, por lo que es fundamental conectar a los estudiantes con las experiencias que viven. Esta adaptación debe llevarse a cabo de acuerdo con las características del grupo donde se aplique.

Por último, es crucial considerar el pensamiento de Garbín y Azcárate (2001) como un parámetro a tener en cuenta en el desarrollo de la actividad, ya que el infinito actual no es conductual, sino contraintuitivo. En todas las actividades, si los estudiantes se quedaban con su percepción inicial, la percepción intuitiva no les habría permitido acercarse al infinito real. Por lo tanto, el rol del docente es fundamental: debe guiar y facilitar el proceso para que los estudiantes no se conformen con sus consideraciones iniciales y rápidas, sino que se tomen el tiempo necesario para profundizar en el tema, abriendo así la puerta a un acercamiento al concepto del infinito real.

Referencias

Abarca, J.C. (2017). Jerome Seymour Bruner: 1915-2016. Revista de Psicología (PUCP), 35(2), 773-781.

Acuña, R. (2018). La Paradoja del Abuelo. Flecha del tiempo e irreversibilidad. https://www.meer.com/es/37082-la-paradoja-del-abuelo

Agudelo, N. & Escobar, D. (2016). Propuesta de Actividades para Potenciar la Comprensión del Infinito Actual en Estudiantes de Grado Décimo, un Medio de Aporte al Desarrollo del Pensamiento Crítico en la Escuela. Colecciones Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas [252]. http://hdl.handle.net/11349/3630

Almachi, O. (2015). Elaborar material concreto para el desarrollo de la lateralidad en los niños/as de 5 años de edad, de la escuela de educación general básica Luis Felipe Borja, paralelo "A", provincia de Pichincha, cantón Mejía, ciudad Machachi, durante el periodo lectivo 2014- 2015. https://repositorio.utc.edu.ec/handle/27000/2982

Arenas, G. & Sabogal, S. (2009). *Acerca del triángulo de Sierpiñski.* Rev. Acad. Colomb. Cienc. 33(128): 395-405, 2009. ISSN 0370-3908.

Asamblea General de las Naciones Unidas. (1948). Declaración Universal de los Derechos Humanos. https://www.un.org/es/about-us/universal-declaration-of-human-rights

Ayala, I. (2019). *Análisis de la comprensión de la noción de infinito: un estudio de caso con estudiantes de educación básica.* Colecciones Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas [252]. http://hdl.handle.net/11349/25438

Bell, E., (2021). Historia de las matemáticas. Fondo de cultura económica. Colección ciencia y tecnología. Matemáticas – Historia. Recuperado de: https://www.perlego.com/es/book/1987861/historia-de-las-matemticas-pdf

Belmonte, J. (2011). *Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 14, núm. 2, julio, 2011, pp.139-171. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362011000200002&lng=es&tlng=es

Belmonte, J. L., & Sierra, M. (2011). *Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 14(2), 139–171. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362011000200002&script=sci_arttext

Butterworth. B. (1999). *The mathematical brain*. Londres. MacMillan.

Bruner, J. S. (2018). Desarrollo cognitivo y educación. Ediciones Morata.

Camargo, U. & Hederich, M. (2010). *Jerome Bruner: dos teorías cognitivas, dos formas de significar, dos enfoques para la enseñanza de la ciencia.* Psicogente, vol. 13, núm. 24, julio-diciembre, 2010, (págs. 329-346). Universidad Simón Bolívar Barranquilla, Colombia.

Carroll, L & Gil Azpeitia, A. (1957). *Comentarios sobre el infinito matemático*. Facultad de Filosofía y Letras. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/63262

Colegio Fontán. (2020). Proyecto Educativo Institucional (PEI)

Congreso de Colombia. (1991). Constitución Política de Colombia, artículo 67.

Congreso de Colombia. (1994). Ley 115 de 1994. Por la cual se expide la Ley General de Educación.

Crepos, C. & Lestón, P. (2009). *El infinito escolar*. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pág. 1117-1126). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Deci, E, & Ryan, R. (2000). *Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions.* Contemporary Educational Psychology, 25(1), 54–67. https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1020

Dehaene, S. (1997): *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. Oxford University Press.

Díaz, J. (2016). Algunos Apuntes Sobre la Noción de Infinito en los Referentes Curriculares para el Área de Matemáticas de Colombia en el Ciclo Décimo-Undécimo. https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/4309?show=full

Díaz-Chang, T., & Arredondo, E. (2023). *Explorando la relación entre los modelos tácitos y el infinito matemático a través de la historia*. Revista Electrónica Internacional de Educación Matemática, 18(2), em0730.https://doi.org/10.29333/iejme/12823.

Díaz, L., & Vilela, M., (2005). El infinito matemático. Recuperado de la Universidad de La Laguna. Canarias: http://www.miguev.net/blog/wp-content/uploads/2005/01/El_Infinito_Mate matico.

Falconer, K. (2003). Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications (2nd ed.). Wiley.

Fernández, J. (2010). *Neurociencias y Enseñanza de la Matemática. Prólogo de algunos retos educativos*. Centro de Enseñanza Superior Don Bosco Universidad Complutense de Madrid

Flores, P. (2023). Aprendizaje en matemáticas.

García, B., & Arias, D, (2019). *Georg Cantor, el hombre que descubrió distintos infinitos*. https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/georg-cantor-el-hombre-que-descubrio-distintos-infinitos/#:~:text=Cantor%20estableci%C3%B3%20el%20concepto%20de,naturales%2

0es%20infinito%20(%E2%88%9E).

García, P. (2020). *Historia de la educación. El pensamiento de Jerome Bruner*. Rosa Sensat. Recuperado el 7 de julio de 2024, de https://www.rosasensat.org/revista/numero-27-las-familias-en-la-escuela/historia-de-la-educacion-el-pensamiento-de-jerome-bruner/

Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 8, núm. 2, julio, 2005, pp.169-193 Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal, Organismo

Garbín, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual: Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. Suma, 38, 53-67.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

Gutiérrez, A. (1991). *La investigación en didáctica de las matemáticas*. Área de conocimiento Didáctica de la matemática (págs. 149-195). Universidad de Valencia.

Guilar, M. (2009). *Las ideas de Bruner: “De la revolución cognitiva” a la “Revolución cultural”.* Educere, vol. 13, núm. 44, enero-marzo, 2009, (págs. 235-241) Universidad de los Andes Mérida, Venezuela.

Haro, M., & Redondo, A. (2004). Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (I). Suma (Págs 19-28).

Holton, D., & Symons, D. (2021). ‘*Infinity-based thinking’ in the primary classroom: a case for its inclusion in the curriculum*. Math Ed Res J 33, 435–450 https://doi-org.ezproxy.unal.edu.co/10.1007/s13394-020-00311-4

Jato, S. (2012). El infinito en las Matemáticas de la Enseñanza Secundaria.

Kirk, G., Raven, J., & Schofield, M. (1983). The presocratic philosophers: A critical history with a selection of texts. Cambridge university press. Recuperado de: https://philocyclevl.files.wordpress.com/2016/10/kirk-g-s-raven-j-e-and-schofield-m-1983-the-presocratic-philosophers-2nd-ed-cambridge-cambridge-university-press.pdf

Leston, P. (2009). *El infinito: vivo en el aula de matemática y fuera de ella.* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. (Ed.) Aspectos socioepistemológicos en el análisis y en el rediseño de discurso matemático escolar. Cap.3 (págs. 1081-1090).

Llanga, E., Silva, M. & Vistin, J. (2019). *Motivación extrínseca e intrínseca en el estudiante*. Atlante. https://www.eumed.net/rev/atlante/2019/09/motivacion-extrinseca-intrinseca.html#google_vignette

López, A. (2014). El infinito en la historia de la matemática. Ciencia y Tecnología DOI:10.18682/cyt.v1i14.185

Medina, L., Romo-Vázquez, A. & Sánchez, M. (2019) Using the work of Jorge Luis Borges to identify and confront students' misconceptions about infinity, Journal of Mathematics and the Arts, 13:1-2, 48-59, DOI: 10.1080/17513472.2018.1504270

Millán, R. (2019). *El infinito más acá de las matemáticas*. Ciaem-redumate.org. https://blog.ciaem-redumate.org/el-infinito-mas-aca-de-las-matematicas/

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias del Ministerio de Educación Nacional de Colombia*. Imprenta Nacional de Colombia. (págs. 1-24).

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2010). Decreto No. 1290. Por el cual se reglamenta la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica y media.

Ministerio de educación nacional. (2016). Lineamientos curriculares del área de matemática. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/portal/micrositios-preescolar-basica-y-media/Direccion-de-Calidad/Referentes-de-Calidad/339975:Lineamientos-curriculares.

Orozco, J. A. (2019). Intuiciones acerca del infinito en docentes y estudiantes de 15 a 17 años. Revista Senderos Pedagógicos, 10(10), 41–62. https://doi.org/10.53995/21458243.944

Pacheco, S. & Arroyo, Z. (2022). *Materiales didácticos concretos para favorecer las nociones lógico matemáticas en los niños de educación inicial.* Revista Científica Multidisciplinaria Arbitrada YACHASUN, Vol. 6, núm. 11, (Págs.14-34) Sociedad Académica de Redes de Revistas Científicas e Investigación Ecuador. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=685872167002

Palmer, M. (2018). Las matemáticas de la vida cotidiana: La realidad como recurso de aprendizaje y las matemáticas como medio de comprensión. Miradas Matemáticas. (Págs. 1-27).

Quincho, S. (2022). El uso del material concreto para desarrollar el sentido numérico en niños de los primeros grados. https://hdl.handle.net/20.500.14360/24

Rincón, S. (2020). Análisis de la aplicación de la teoría cognitiva de Jerome Bruner como mecanismo para fortalecer la conducta ambiental en los estudiantes del Grado Segundo de la Institución. https://doi.org/10.37843/rted.v9i1.110

Rivera, E. (2019). *El neuroaprendizaje en la enseñanza de las matemáticas: la nueva propuesta educativa.* Revista entorno, Universidad Tecnológica de El Salvador, www.utec.edu.sv, junio 2019, número 67: 157-168, ISSN: 2218-3345.

Rodríguez, O. (2017). Una didáctica para el aprendizaje del concepto de infinito mediado por las TIC en grado décimo de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario del Municipio de Belén de Umbría. Repositorio Institucional UTP. Universidad Tecnológica de Pereira. https://hdl.handle.net/11059/7855

Rosales, J. (2017). Numerabilidad y cardinalidad de conjuntos. Revista digital Matemática, Educación e Internet, 17(2), (págs. 1-46).

Ruesta, R. & Gejaño, C. (2022). Importancia del material concreto en el aprendizaje. ISSN: 2710-088X - ISSN-L: 2710-088X. Volumen 4 No. 9 / Enero - abril 2022. (Págs. 94 - 108).

Sasso, M. (2018). Borges en clave de Elea: la imposibilidad del movimiento. Repercusiones estéticas. Recueperado de: https://www.teseopress.com/orange/chapter/las-paradojas-de-zenon/

Sastre, M. A. (2007). *Geometría fractal*. Un Paseo por la Geometría, UPM, Madrid, España, 43-58.

Tambasco, G. (s.f.). *Fractales en papel.* Matemáticas y algo más. https://profmate.wordpress.com/

Tiemann, B. & Vidal, R. (2018). *Dificultades, obstáculos y errores asociados al infinito en estudiantes de último año de pedagogía en matemática.* Revista chilena de educación matemática. Universidad Alberto Hurtado. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/dificultades-obstaculos-y-errores-asociados-al-infinito-en-estudiantes-de-ultimo-ano-de-pedagogia-en-matematica/

Tekman Education, (2023). Guía para diseñar actividades manipulativas que generen conocimiento matemático.

Usó-Doménech, J., Selva, J. & Requena, M. (2016). Mathematical, Philosophical and Semantic Considerations on Infinity (I): General Concepts. Found Sci 21, 615–630. https://doi-org.ezproxy.unal.edu.co/10.1007/s10699-015-9428-9

Valderrama, A. (2017). Concepciones acerca del conocimiento del infinito como componente para la enseñanza de las matemáticas. Un estudio de casos con docentes de secundaria. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Medellín. Recuperado de: https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/23637/1/ValderramaAna_2017_InfinitoMatematicasCasos.pdf

Vara, E. (2013). *La lógica matemática en Educación Infantil*. Universidad de Valladolid. http://uvadoc.uva.es/handle/10324/4002

Vasco, C. (1997). *La educación matemática: una disciplina en formación*. Paideia surcolombiana, 5, 10–23. https://doi.org/10.25054/01240307.937

Ventura, H. (2016). *Desarrollo cognitivo en el aprendizaje por descubrimiento.* Secretaría de educación pública. Universidad pedagógica nacional.

Vergara, C. (2017). *La teoría del desarrollo cognitivo de Jerome Bruner*. Actualidad en psicología. https://www.actualidadenpsicologia.com/teoria-desarrollo-cognitivo-jerome-bruner/

Vilella, X. (2017). *Infinito en el aula de matemáticas: poner la base desde los 12 años.* Grup Vilatzara: ICE-Universitat Autònoma de Barcelona España. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/infinito-en-el-aula-de-matematicas-poner-la-base-desde-los-12-anos/

Waldegg, G. (1993). *El infinito en la obra Aristotélica.* Educación matemática. Volumen 5 (págs. 20-38). https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/el-infinito-en-la-obra-aristotelica/

Weir, A. (2009). *El huevo.* Galactanet. Recuperado de: https://www.cuentoneta.ar/story/el-huevo?navigation=storylist&navigationSlug=verano-2022