



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Estudio de la radiación gravitacional emitida por discos de acreción alrededor de agujeros negros astrofísicos

**Brenda Zapata Rua**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Escuela de física  
Medellín, Colombia  
Agosto 2018



# Estudio de la radiación gravitacional emitida por discos de acreción alrededor de agujeros negros astrofísicos

**Brenda Zapata Rua**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ciencias Física**

Director(a):  
Ph.D. Luis Alberto Sanchez Duque

Grupo de Física Teórica

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Escuela de física  
Medellín, Colombia  
Agosto 2018



Dedicado a mi familia y amigos que siempre me apoyaron e incentivaron a seguir. Gracias por su confianza, sentí su compañía en todo el proceso.



---

# Estudio de la radiación gravitacional emitida por discos de acreción alrededor de agujeros negros astrofísicos

## Resumen

**Contexto.** El objetivo de la presente Tesis de Maestría será caracterizar, en términos de frecuencia y amplitud, las ondas gravitacionales (Gravitational Waves: GWs) emitidas por discos de acreción que orbitan alrededor de agujeros negros (Black Holes: BHs) astrofísicos en los que la viscosidad del disco está determinada por el número de Reynolds y su dinámica está gobernada por el efecto Bardeen-Petterson, que es la fragmentación del disco cuando el momento de inercia del disco no coincide con el momento de inercia del agujero negro.

El modelo de disco de acreción actualmente considerado como estándar, también conocido como el modelo  $\alpha$ -disk, fue propuesto en 1973 por Shakura and Sunyaev. Fortalezas y debilidades de este modelo han sido analizadas en [[7]] donde se ha propuesto una nueva parametrización para la viscosidad del gas en términos de su número de Reynolds, la cual permite la descripción de la dinámica de discos más realistas. Una vez caracterizadas las ondas en este último caso, se evaluará la factibilidad de su detección directa por los observatorios de GWs actualmente en operación y/o proyectados para el futuro cercano.

**Objetivo:** Caracterizar, en términos de frecuencia y amplitud, las ondas gravitacionales (GWs) emitidas a partir de perturbaciones que se desarrollan en discos de acreción en sistemas astrofísicos autogravitantes regidos dinámicamente por el efecto Bardeen-Petterson y con viscosidad dependiente del número de Reynolds, y evaluar la factibilidad de su detección directa por los observatorios de GWs actualmente en operación y/o proyectados para el futuro cercano.

**Método:** Para caracterizar las GWs radiadas por masas que orbitan alrededor del agujero negro se usará la teoría general de la relatividad (General Relativity: GR) en la aproximación de campo gravitacional débil y velocidad translacional baja (pequeña en relación a la velocidad de la luz). El disco en movimiento orbital se modelará como si fuese un cuerpo rígido inclinado que gira lentamente alrededor del agujero negro central. Para calcular las propiedades de las GWs emitidas en el estado de acreción suspendida también supondremos la aproximación de campo gravitacional débil, pero ahora la velocidad de circulación del fluido (plasma) constitutivo del disco es relativista y el movimiento es acelerado. Graficaremos amplitud y frecuencia contra las características físicas de los principales observatorios de GWs que están en operación en el mundo o que están siendo proyectados para funcionar en un futuro próximo y discutiré su detectabilidad frente a otras fuentes astrofísicas ya detectadas y potencialmente observables.

**Palabras clave:** Ondas gravitacionales, discos de acreción, efecto Bardeen-Petterson, agujeros negros, número de Reynolds, detectabilidad.

# Contenido

<b>Lista de figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación . . . . .	1
1.2 Objetivos específicos . . . . .	2
1.3 Alcances de la tesis . . . . .	3
1.4 Contenido de la tesis . . . . .	3
<b>2 Astrofísica básica de discos de acreción e introducción a la dinámica de los discos de acreción</b>	<b>4</b>
2.1 Relatividad General (GR) . . . . .	4
2.1.1 Solución de Schwarzschild . . . . .	6
2.1.2 Kerr Black Hole . . . . .	7
2.2 Agujeros negros astrofísicos . . . . .	10
2.2.1 El efecto Bardeen-Petterson . . . . .	11
2.2.2 Luminosidad . . . . .	12
2.3 Comportamiento del Gas . . . . .	13
2.3.1 Estructura radial del disco . . . . .	14
2.3.2 Modelo de disco fino [25] . . . . .	15
2.3.3 Extensión a disco delgado [17] . . . . .	18
2.4 Modelo con número de Reynolds . . . . .	19
2.4.1 Discos con viscosidad turbulenta . . . . .	19
<b>3 Ondas gravitacionales</b>	<b>22</b>
3.1 Linealización de las EFE . . . . .	22
3.1.1 Expansión alrededor del espaciotiempo plano . . . . .	24
3.2 GWs en el TT Gauge . . . . .	26
3.2.1 Polarización . . . . .	27
3.2.2 Expansión de ondas planas . . . . .	28
3.2.3 Interacción de las GWs con el detector . . . . .	29
3.3 Generación de GWs . . . . .	33

3.4	Principios de detección de GW . . . . .	34
3.4.1	Detectores de masas resonantes . . . . .	34
3.4.2	Detectores interferométricos . . . . .	35
3.4.3	Funciones del detector . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Construcción del modelo: GWs emitidas por objetos rígidos.</b>	<b>42</b>
4.1	GWs emitidas por la rotación de cuerpos rígidos . . . . .	44
4.2	GWs generadas en sistemas axialmente simétricos que precesan . . . . .	45
4.3	GWs emitidas por discos de acreción rígidos dominados dinámicamente por el efecto Bardeen-Petterson . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Resultados del modelo</b>	<b>51</b>
5.1	Aplicación de la solución de Popham para discos delgados que se desarrollan en sistemas GRBs . . . . .	51
5.1.1	Estimación de la GW para el disco de Romero et al. [19]. . . . .	52
5.1.2	Estimación de la GW asociada al efecto Bardeen-Petterson . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>67</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>68</b>

# Lista de Figuras

2.1.	Representación dl horizonte de eventos y de la ergosfera, en gris . . . . .	8
2.2.	(a) Representación de un BH con sus elementos característicos. <i>Image Credit: ESA / Hubble, L. Calçada (ESO)</i> . En (b) una fotografía en óptico de 4C+29.30, tomada por el Hubble Space Telescope en 2010. 4C+29.30 es una galaxia que se encuentra a 850 millones de añosluz de la Tierra, ubicada en la constelación de Cancer. <i>Image Credit: X-ray: NASA / CXC / SAO / A. Siemiginowska et al; Optical: NASA / STScI; Radio: NSF / NRAO / VLA.</i> .	11
2.3.	Diagrama esquemático del efecto BP para un X-ray binary donde se representan: (1) el objeto central en rotación (BH o Neutron Star), (2) parte interior del disco donde el efecto BP es más significativo y tiende a alinearlo con el plano ecuatorial del objeto compacto central al disco, (3) una región de transición, (4) parte exterior del disco con su orientación original, y (5) la estrella compañera que alimenta el disco de acreción. Figura tomada de [6] .	12
2.4.	Coordenadas polares en discos delgados. Tomada de [6] . . . . .	14
3.1.	Comportamiento de un conjunto de masas de prueba en configuración de anillo, ante una GW, en el plano transverso a la propagación de la onda con modos de polarización + y $\times$ . Tomada de [6] . . . . .	32
3.2.	Líneas de fuerza correspondientes a los modos de polarización + y $\times$ . Tomada de [6] . . . . .	33
3.3.	Boceto del detector de cilindro de Joseph Weber. Imagen tomada de [10] . .	34
3.4.	Representación de un orterferómetro laser usado en detección de GWs. Imagen tomada de [5] . . . . .	35
3.5.	Representación del observable de la respuesta de un interferómetro ante la interacción con una GW con polarización “plus”. Para más detalles ver [20] .	36
3.6.	Interferómetro VIRGO, Pisa, Italia [3] . . . . .	37
3.7.	<i>Izquierda:</i> curva $\sqrt{(20/3)S_h(f)}$ de LISA escalada con el factor de eficiencia para GWs transientes. <i>Derecha:</i> curva $\sqrt{S_h(f)}$ de DECIGO y BBO. . . . .	40
3.8.	Curvas $\sqrt{S_h(f)}$ de: <i>izquierda</i> Initial/Advanced de os detectores LIGO y de ET. <i>Derecha</i> adicional se muestra la gráfica color rojo que se realizó empleando datos oficiales de la página de LIGO [2] . . . . .	40

3.9. Curvas de sensibilidad de los principales detectores interferométricos de GWs. Las zonas sombreadas representan la región en la que cada interferómetro tiene oportunidad de detección. . . . .	41
4.1. Sistema coordenado $(x, y, z)$ con el origen en la fuente de las GWs. Para esta representación, la GW se propaga en la dirección del vector $\hat{n}$ , que está determinado por los ángulos $\theta$ y $\varphi$ . . . . .	43
4.2. El segmento indicado con la letra N representa la línea nodal donde los planos se cortan. . . . .	46
5.1. (a) Momento de inercia relativo. (b) Frecuencia angular de precesión . . . . .	54
5.2. (a) Momento angular típico del disco $J_d(R)$ (azul) y momento angular del BH $J_{BH}$ (horizontal). (b) Ampliación de la región donde se cortan las curvas. . .	54
5.3. Gráfico de altura relativa $H/R$ . . . . .	55
5.4. (a) Frecuencia de precesión (b) Periodo de precesión. En ambas gráficas, además, se presentan las debidas a BP. . . . .	55
5.5. Señal $h_{r_{ss}}$ debida a precesión libre como función de: (a) radio exterior, (b) de la frecuencia. . . . .	56
5.6. Señal $h_{r_{ss}}$ para precesión libre y contribución del efecto BP. Adicional se muestra la línea donde corta el radio BP. . . . .	57
5.7. Señal $h_{r_{ss}}$ debida al efecto BP en la región de los detectores DECIGO. . . .	57
5.8. Señal $h_{r_{ss}}$ de precesión libre en la región de los detectores DECIGO. . . . .	58
5.9. Señal $h_{r_{ss}}$ de precesión libre en la región de los detectores Ligo y ET. . . . .	58
5.10. A la izquierda la señal $h_{r_{ss}}$ para el disco reportado en [19]. A la derecha nuestro modelo. La línea de color roja es la curva de sensibilidad de LIGO advanced oficial, mientras que la negra representa la tasa de acreción que hemos considerado en nuestro análisis. . . . .	59
5.11. Comportamiento del radio BP con la tasa de acreción $\mu$ . La línea horizontal representa el valor del radio interno del disco, y la intersección con $R_{BP}$ indica la tasa de acreción a partir de la cual se deja de formar el disco. . . . .	60
5.12. Momento de inercia relativo $I_{rel} = I_3 - I_1 v s \mu$ . . . . .	60
5.13. Vista superior de la representación del disco de acreción obtenido para: (a) $\mu = 0,01$ y (b) $\mu = 10$ . . . . .	61
5.14. (a) Función $H/R$ vs $\mu$ . Se puede apreciar que el incremento en la tasa de acreción lleva a discos más delgados. (b) Comportamiento del número de Mach en el disco. . . . .	61
5.15. (a) Periodo de precesión vs $\mu$ (b) Frecuencia de precesión vs $\mu$ . . . . .	62
5.16. Señal de $h_{r_{ss}}$ debida al efecto BP para tres distancias diferentes. En (a) como función de la tasa de acreción $\mu$ , y en (b) como función de la frecuencia $f$ . .	63
5.17. Señal de $h_{r_{ss}}$ debida a precesión libre para tres distancias diferentes. En (a) como función de la tasa de acreción $\mu$ , y en (b) como función de la frecuencia $f$ .	63

---

5.18. Señal de $h_{rss}$ bajo el efecto BP para las distancias anteriormente mencionadas, y curvas de detección en la ventana de frecuencias de los detectores DECIGO y BBO . . . . .	64
5.19. Señal de $h_{rss}$ bajo el efecto BP para las distancias anteriormente mencionadas, y curvas de detección en la ventana de frecuencias de los detectores LIGO y ET . . . . .	64
5.20. Señal de $h_{rss}$ de precesión libre para las distancias anteriormente mencionadas, y curvas de detección en la ventana de frecuencias de los detectores LIGO y ET . . . . .	65
5.21. Resultados de nuestro modelo en la región reportada por Sun et al. . . . .	65
5.22. Resultado reportado por Sun et al. . . . .	66

# Lista de símbolos

## Cantidades y unidades

Símbolo	Término	Valor en cgs	UG
$c$	Velocidad de la luz	$2,998 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$	1
$G$	Constante gravitacional	$6,673 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$	1
$M_{\odot}$	Masa solar	$1,989 \times 10^{33} \text{ g}$	$1,477 \times 10^3 \text{ m}$
$M_{\oplus}$	Masa de la tierra	$5,973 \times 10^{27} \text{ g}$	$4,435 \times 10^{-3} \text{ m}$
$L_{Edd}$	Luminosidad de Eddington	$1,3 \times 10^{38} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ erg s}^{-1}$	
$pc$	Parsec	$3,08 \times 10^{18} \text{ cm}$	
$ly$	Añoluz	$9,4607 \times 10^{17} \text{ cm} = 0,3066 \text{ Pa}$	

## Otros símbolos

Símbolo	Término
$R_g = \frac{GM}{c^2}$	Radio gravitacional
$R_s = 2R_g$	Radio de Schwarzschild
$R_{ISCO}$	Radio de la orbita circular más interna alrededor de un BH
$h_{rss}$	Amplitud Root-Sum-Square

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
-------------	---------

---

ADAF	Advection-Dominated Accretion Flow,
AGN	Active Galactic Nuclei,
BF	Body Frame,
BH	Black Holes
BP	Bardeen Petterson,
DECIGO	Deci-hertz Interferometer Gravitational wave Observatory,
EFE	Einstein Field Equation,
ET	Einstein Telescope,
GR	General Relativity,
GRBs	Gamma-ray bursts,
GWs	Gravitational Waves
ISCO	Innermost Stable Circular Orbit,
KBH	Kerr Black Hole,
LIGO	Laser Interferometer Gravitational wave Observatory,
LISA	Laser Interferometer Space Antenna,
M-QSRs	Microquasars,
QSRs	Quasars,
SR	Special Relativity,
S-S	Shakura-Sunyaev,
TT Gauge	Transverse-Traceless Gauge,
ZAMO	Zero Angular Momentum Observer,

# 1 Introducción

## 1.1. Motivación

Las ondas gravitacionales (GWs) son una predicción de la teoría general de la relatividad (GR: General Relativity); consiste en una fluctuación en la curvatura del espacio-tiempo que se propaga en forma de onda a la velocidad de la luz y que, en términos generales, son generadas por grandes masas aceleradas y confinadas en regiones de dimensión característica pequeña.

El físico alemán, Albert Einstein, pensó que no sería posible detectarlas debido a que se originan demasiado lejos y serían imperceptibles al llegar a la Tierra. Hoy, un grupo de investigadores ha hecho pública la detección por primera vez de estas ondas. Su existencia solo había sido comprobada de manera indirecta a partir de las observaciones durante varios años del pulsar binario PSR 1913+16, en la década de los 80, descubierto por Joseph H. Taylor Jr. y Russell A. Hulse en 1974.

La gran expectativa con relación a la detección directa de estas ondas se centra en la probabilidad de observar explosiones de supernovas, la formación de agujeros negros y la fase final de movimiento en espiral de aproximación de un sistema binario de estrellas compactas o de agujeros negros. Pero la frecuencia con la que ocurren este tipo de eventos resulta ser muy baja, lo que significa que el tiempo de espera es muy largo como para tener la posibilidad real de una detección directa en el futuro cercano. Nace entonces la pregunta de si existen otros sistemas astrofísicos igualmente conocidos que puedan conducir a una eventual detección de las GWs en una escala de tiempo significativamente más corta. Una posible respuesta puede ser suministrada por la dinámica de sistemas astrofísicos como los núcleos activos de galaxias (AGN, Active Galactic Nuclei), los cuales existen por millones en una escala de distancia astronómica relativamente pequeña entorno a la Vía Láctea. Igualmente, fuentes galácticas como sistemas binarios de rayos X, pueden ser fuentes prometedoras para una eventual detección directa de radiación gravitacional, ya que para producir rayos-X deben poseer, entre muchos otros elementos estructurales, un objeto compacto (agujero negro o estrella de neutrones) circundado por un disco de acreción.

AGN y micro-cuásares(MQSRs) están constituidos por tres elementos estructurales principales: (1) un objeto compacto en su centro (agujero negro supermasivo, agujero negro de masa estelar o una estrella de neutrones, dependiendo del sistema específico en consideración), (2) un disco de acreción entorno al objeto central, y (3) jets o chorros de materia que emanan de la región central expulsados a velocidades ultra-relativistas. A partir de esto, es posible concluir que las GWs pueden ser generadas por procesos astrofísicos que involucren al objeto compacto central (oscilaciones, deformaciones); al disco de acreción (modos de oscilación resonantes, "warps"), o a los jets (aceleración ultra-relativista de componentes).

El estudio de tales sistemas como fuentes emisoras y detectabilidad de GWs emitidas por discos de acreción regidos dinámicamente por el efecto Bardeen-Petterson (BP) y en la aproximación del modelo de Shakura y Sunyaev (S-S) con parametrización  $\alpha$  de la viscosidad, ha sido ya llevado a cabo en [6]. Un estudio similar, sin embargo, no ha sido hecho aún en el caso más realista de parametrización en términos del número de Reynolds, por lo cual resulta importante este análisis buscando con ello colocar estos sistemas entre las fuentes astrofísicas a partir de las cuales sea más probable detectar GWs a corto plazo.

El objetivo de la presente tesis se centra en caracterizar, en términos de frecuencia y amplitud, las ondas gravitacionales emitidas a partir de perturbaciones que se desarrollan en discos de acreción regidos dinámicamente por el efecto Bardeen-Petterson y con viscosidad dependiente del número de Reynolds, y en evaluar la factibilidad de su detección directa por los observatorios de GWs actualmente en operación y/o proyectados para el futuro cercano.

## 1.2. Objetivos específicos

- Evaluación y selección de modelos de discos de acreción que conduzcan a una fácil comparación con el modelo de viscosidad  $\alpha$  de Shakura y Sunyaev.
- Cálculo de las GWs emitidas por los modelos de discos seleccionados en el ítem anterior, cuando éstos alcanzan un estado estacionario y con flujo turbulento cuya viscosidad depende del número de Reynolds [7].
- Cálculo de la amplitud adimensional y comparación con la sensibilidad conocida de los observatorios actualmente en operación y/o proyectados para el futuro cercano, evaluando con esto la factibilidad de detección directa de las GWs caracterizadas.

## 1.3. Alcances de la tesis

En el presente trabajo se ha estudiado las GWs que son generadas por la precesion de discos de acreción existentes alrededor de agujeros negros astrofísicos. El análisis que hemos realizado, está basado en el modelo de disco fino de Shakura-Sunyaev [25] y en la extensión del mismo, a discos delgados de Popham [17], esto se debe a que en estudios recientes se ha concluido que muchos discos que se desarrollan en GRBs engines en hiperacreción, adquieren una geometría a la propuesta por Popham para discos cuya extensión no superiores los  $\sim 10^8 cm$ . [14].

Para validar la precesión del disco, asumimos el efecto Bardeen-Petterson como el responsable, dado que ha permitido justificar los datos observacionales de muchas fuentes galácticas y extragalácticas.

Los resultados que hemos obtenido, han sido comparados con dos trabajos realizados para GRBs: Romero et al. [19] y Sun et al. [26], encontrando que nuestro modelo, para las condiciones de Romero, no es detectable con los interferómetros terrestres.

## 1.4. Contenido de la tesis

En los capítulos 2 y 3, se explica el contenido teórico necesario para la comprensión de esta investigación, aunque se asume que el lector ya tiene conocimientos fundamentales en Relatividad General. Abordaremos, principalmente, conceptos sobre agujeros negros, discos de acreción, efecto Bardeen-Petterson y ondas gravitacionales.

Para el capítulo 4 se exponen los fundamentos del modelo empleado para realizar el cómputo de las GWs generadas por discos de acreción que precesan alrededor de un cuerpo rígido. En este capítulo también se encuentran los resultados de las comparaciones con los trabajos relacionados.

Para terminar, en el capítulo 5 se hace una corta discusión sobre los resultados y perspectivas de trabajo futuro.

# 2 Astrofísica básica de discos de acreción e introducción a la dinámica de los discos de acreción

En este capítulo se explica de manera concisa, los fundamentos de la teoría General de la Relatividad (GR), esto nos lleva a la relación entre geometría del espaciotiempo y su contenido de materia-energía a través de las Ecuaciones de Campo de Einstein. A partir de estas ecuaciones es de donde surgen dos resultados que son el centro de estudio de esta tesis: Agujeros Negros (BHs-Black Holes) y Ondas Gravitacionales (GWs). Específicamente, la noción de BHs resulta de las dos principales soluciones analíticas de estas ecuaciones, la de Schwarzschild y la de Kerr. En la última parte, se analiza los discos de acreción y la eyección de material que se presenta en estos y como afecta el efecto Bardeen-Petterson sobre la dinámica de los discos.

## 2.1. Relatividad General (GR)

En 1905 Einstein propuso la teoría especial de la relatividad (SR-Special Relativity), en esta, se concilia la física de los cuerpos en movimiento con las leyes de la radiación electromagnética. Para poder incluir la gravedad dentro de los fundamentos en los que está basada esta teoría, Einstein escribió las ecuaciones que relacionan la geometría del espacio tiempo con la energía que contiene.

Así consiguió construir la teoría de la relatividad general basándose en dos principios: el principio de equivalencia, y el principio de covarianza general.

### ¿Qué dice el Principio de Equivalencia?

El principio de incertidumbre explica que es imposible distinguir para un observador acelerado si las partículas se mueven o no dentro de un campo gravitacional. En otras palabras, “para una pequeña región del espacio, cualquier efecto producido por la gravitación son los mismos que los producidos por la aceleración” [4].

Con este principio se resuelve el enigma de el porque en un medio sin resistencia todos los

cuerpos caen con la misma aceleración, esto es lo que Einstein llamó el *principio de equivalencia débil* donde se especifica la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitacional.

Como consecuencias del principio de equivalencia está el movimiento a lo largo de geodésicas. Según conocemos de la física newtoniana, los objetos se mueven con velocidad uniforme a través del espacio en línea recta (camino más corto), a menos que sean perturbados por una fuerza. En física relativista esto también se cumple, pero ahora la línea recta es el camino más corto en el espaciotiempo (geodésica) y no en el espacio tridimensional. Esto se cumple en presencia de la gravedad, pues para Einstein la gravedad no es una fuerza sino la distorsión del espaciotiempo debido a la presencia de una masa.

### ¿Porqué el Principio de covarianza?

Se busca que las leyes físicas tengan la misma forma en todos los sistemas de referencia. El principio de covarianza sugería que las leyes debían escribirse en términos de tensores, por lo tanto, la transformación de SR a GR consiste en pasar de la métrica  $\eta_{\mu\nu}$ , de componentes constantes, a un campo tensorial dinámico  $g_{\mu\nu}(x)$ , en el cual el campo involucrado es el tensor métrico en lugar de otro campo que se propaga en el espaciotiempo. En el límite de validez de la SR,  $g_{\mu\nu}$  tiende a  $\eta_{\mu\nu}$ .

Supongamos una trayectoria para ir del evento A al evento B, la separación espaciotemporal entre los eventos se puede escribir de la forma:

$$s = \int_A^B d\tau \sqrt{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta} \quad (2.1)$$

donde  $\tau$  es el parámetro denominado *tiempo propio* y  $u^\alpha$  es un vector temporaloide cuyas componentes son  $u^\mu = \frac{dz^\mu}{d\tau}$  que representa la 4-velocidad para un observador en una trayectoria espaciotemporal  $z^\mu(\tau)$ . Es importante que se cumpla la condición  $\delta s = 0$ , es decir, que sea extremal. Como resultado se obtiene la expresión de Euler-Lagrange:

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = 0 \quad (2.2)$$

conocida como ecuación geodésica. En esta aparece el símbolo de Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  que se define en términos de las primeras derivadas del tensor métrico [6].

## Geodésicas y ecuación de campo de Einstein

La separación entre dos geodésicas paralelas, está determinado por un factor de las componentes del tensor de Riemann ( $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ ). De este modo, es posible cambiar la idea de la gravitación como una fuerza a ser un efecto ocasionado por la curvatura del espaciotiempo, lo que es de gran importancia en la GR. En el caso de que las componentes del tensor de Riemann sean nulas, no se ve el efecto de separación en las geodésicas, por lo que el espaciotiempo es el mismo de SR.

Einstein crea como hipótesis que el responsable de la curvatura del espaciotiempo es el tensor Energía-Momentum:  $\Gamma^{\mu\nu}$  que además cumple el requisito de ser libre de divergencia ( $\nabla_\mu \Gamma^{\mu\nu} = 0$ ). Mediante las construcción de las ecuaciones de campo en el que la geometría se relaciona con la materia a través del tensor de Einstein, se garantiza la conservación de la materia-energía. Así, las ecuaciones de campo de Einstein son escritas según:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}\Gamma_{\mu\nu}} \quad (2.3)$$

el factor numérico garantiza que esta ecuación tenga la forma correcta cuando se va al límite newtoniano. Esta ecuación describe como el campo es generado por la materia.

### 2.1.1. Solución de Schwarzschild

Karl Schwarzschild presentó una solución *exacta* de las EFE para el campo gravitatorio exterior a un objeto de masa-energía esféricamente simétrico y sin rotación. Schwarzschild supuso una fuente estática, tal que la métrica es independiente de la coordenada temporal para garantizar que no se tenga variación bajo inversión temporal.

En coordenadas esféricas  $\{t, r, \theta, \varphi\}$ , la métrica de Schwarzschild esta dada por [24]:

$$ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.4)$$

dónde  $d\Omega^2$  es la métrica en la 2-esfera unitaria:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$$

Aunque este resultado se obtuvo a partir de la solución de Schwarzschild, se dice que esta es la única solución esféricamente simétrica y asintóticamente plana de las EFE en el vacío, es decir, que si se supone que el cuerpo esférico evoluciona con el tiempo aún se conserva la métrica y por ende el espaciotiempo permanece estático. La importancia de esto radica en que es precisamente la parte dependiente del tiempo de la métrica la que se asocia a dicho observable, lo que es lo mismo a decir que sistemas esféricamente simétricos no pueden emitir GWs. [6]

De la ecuación (2.4) se puede observar que existen dos valores de la coordenada radial que llevan a divergencias en las componentes del tensor métrico cuando nos acercamos a unos puntos críticos:

$$r \rightarrow R_s : g_{00} \rightarrow 0 \quad y \quad g_{rr} \rightarrow \infty$$

$$r \rightarrow 0 : g_{00} \rightarrow \infty \quad y \quad g_{rr} \rightarrow 0$$

Gracias a un cálculo directo se puede mostrar que el escalar:

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2 M^2}{c^4 r^6}$$

diverge en  $r \rightarrow 0$ . Como resultado a esto, se dice que la solución de Schwarzschild representa el campo gravitacional de un agujero negro y la hipersuperficie  $r = R_s$  se conoce como *horizonte de eventos*. [6]

### 2.1.2. Kerr Black Hole

Contrario a los BH estáticos descritos por la solución de Schwarzschild, los KBH son agujerón rotantes para el cual existe una solución exacta de las EFE en el vacío ( $\Gamma_{\mu\nu} = 0$ ) que describe su métrica.

Sea el parámetro  $a \equiv J/M$ , donde  $J$  y  $M$  son el momento angular y la masa del KBH, respectivamente; la métrica de Kerr en unidades geometrizadas ( $c = G = 1$ ) es de la forma [6]:

$$ds^2 = -dt^2 + \Sigma \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} (a \sin^2 \theta d\varphi - dt)^2 \quad (2.5)$$

donde

$$\Delta(r) \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \quad y \quad \Sigma(r, \theta) \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.6)$$

De acuerdo con la métrica de Kerr, el espacio debe mostrar un arrastre por parte del objeto masivo en su rotación que crea el campo gravitatorio.

Algunas propiedades de la métrica de Kerr:

- No es una métrica estática, en el sentido de que no es invariante bajo transformación de inversión temporal
- Es estacionaria, dado que sus componentes no dependen explícitamente de la coordenada temporal.
- Es axisimétrica: no depende explícitamente de la coordenada  $\varphi$ .

- En el límite  $r \rightarrow \infty$ , la métrica de Kerr se reduce a la de Minkowski en coordenadas polares, entonces, el espaciotiempo de Kerr es asintóticamente plano.
- En el límite  $a \rightarrow 0$   $J \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow r^2 - 2Mr$  y  $\Sigma \rightarrow r^2$ , la métrica de Kerr se reduce a la métrica de Schwarzschild.
- En el límite  $M \rightarrow 0$  (con  $a \neq 0$ ): se reduce a la métrica de espaciotiempo plano en coordenadas esféricas.

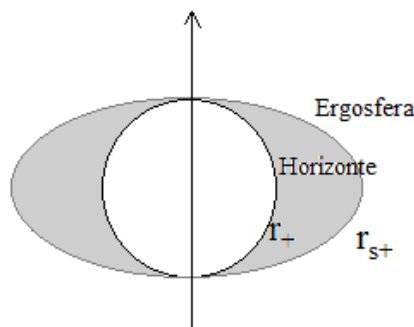
El KBH tiene el mismo horizonte de eventos que el de Schwarzschild, pero tiene otro límite llamado *ergosfera* que se puede entender como el lugar donde la velocidad del espacio arrastrado es igual a la velocidad de la luz tangencial que corresponde a ese lugar, y una vez superada la ergosfera, la velocidad de arrastre del espacio para esos puntos es mayor que la de la luz. Para entender se parte de:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

tal que se dan las siguientes posibilidades:

- Dos radios asociados al horizonte de eventos si  $M^2 > a^2$
- Un único radio si  $M^2 = a^2$  (BH extremal)
- Ningún radio si  $M^2 < a^2$ , en este caso se habla de singularidad desnuda.

Definamos  $r_-$  y  $r_+$  los radios asociados a la primera situación, los cuales denominaremos como horizonte interior y horizonte exterior, respectivamente. Existe una región entre los dos horizontes de la métrica de Kerr ( $r_- < r < r_+$ ), pero en ella las superficies  $r = cte$  son *espacialoides*, por lo tanto, los objetos en esta región son dirigidos al KBH. Esta característica hace que nos podamos referir a la superficie  $r = r_+$  como el *horizonte* en la solución de Kerr si se satisface que  $M^2 > a^2$ .



**Figura 2.1:** Representación del horizonte de eventos y de la ergosfera, en gris

Un objeto que se acerca a un KBH se vería arrastrado y acelerado una vez cruza la ergosfera, por lo que se ha imaginado un método para *extraer energía* de la rotación del agujero, que se conoce como "Proceso Penrose".

Estudios basados en la ecuación geodésica de la métrica de Kerr y obtenidos por primera vez en Bardeen et al. [9] llevan a que las órbitas circulares y estables más cercanas al KBH, se localizan en:

$$R_{ms} = A_{ms}(a_*)R_g \quad \text{con} \quad A_{ms}(a_*) = 3 + A_2 \mp \sqrt{(3 - A_1)(3 + A_1 + 2A_2)} \quad (2.7)$$

de donde:

$$A_1 = 1 + (1 - a_*^2)^{1/3}[(1 + a_*)^{1/3} + (1 - a_*)^{1/3}] \quad (2.8)$$

$$A_2 = \sqrt{3a_*^2 + A_1^2}$$

y  $a_*$  es el parámetro de espín definido en  $J_{BH} = a_*GM_{BH}^2/c$  y se interpreta como la razón entre el valor del momento angular del KBH,  $J_{BH}$  y su valor máximo posible (i.e.,  $a_* \leq 1$ ). El signo menos (-) que antecede la raíz en (2.7) corresponde a rotaciones en el mismo sentido del KBH, es decir, rotaciones prógradas, mientras que el signo más (+) corresponde a rotaciones retrógradas [6].

### Efecto Lense-Thirring

En la relatividad general, efecto de Lense-Thirring es una corrección relativista de la precesión de un giroscopio cerca de una gran masa en rotación. Con este se describe la velocidad de arrastre de un objeto que cae al centro de un KBH.

Supongamos un observador con 4-velocidad temporaloide  $u^\mu$  que cae hacia el KBH desde el infinito y con momento angular cero. La velocidad angular del observador está definida por:

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u^\varphi}{u^t} \quad (2.9)$$

Podemos escribir la velocidad angular en términos de la métrica de Kerr como:

$$\Omega = \frac{u^\varphi}{u^t} = -\frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}}$$

sabiendo que:

$$u_\varphi = 0 = g_{\varphi\varphi}u^\varphi + g_{\varphi t}u^t$$

Reemplazando

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right), \quad g_{t\varphi} = -\frac{2Mr}{\Sigma}a \sin^2\theta, \quad g_{\varphi\varphi} = \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Sigma}\sin^2\theta\right) \sin^2\theta$$

se obtiene:

$$\Omega = \frac{2Mar}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} \quad (2.10)$$

cuyo denominador es siempre positivo.

Al analizar este resultado, se observa que  $\Omega/J > 0$ , lo que significa que el observador y el BH co-rotan.

Explícitamente, la ecuación anterior cuando hacemos  $\theta = \pi/2$ , que corresponde al plano ecuatorial del KBH, adquiere la forma:

$$\Omega = \frac{2J}{r^3 + a^2(2M + r)}$$

que a primer orden en el parámetro  $a$ , es denominada la velocidad angular de Lense-Thirring.

Retomando las unidades cgs,  $\Omega$  queda de la forma:

$$\Omega_{LT}(r) = \frac{2GJ_{BH}}{c^2 r^3} \quad (2.11)$$

## 2.2. Agujeros negros astrofísicos

Actualmente se considera que los BH se generan como resultado del colapso de una estrella masiva. En dicho proceso de formación, aparecen ondas gravitacionales, entre otros fenómenos astrofísicos, que después de cierto tiempo conducen a un estado estacionario y a la correspondiente fase final del colapso.

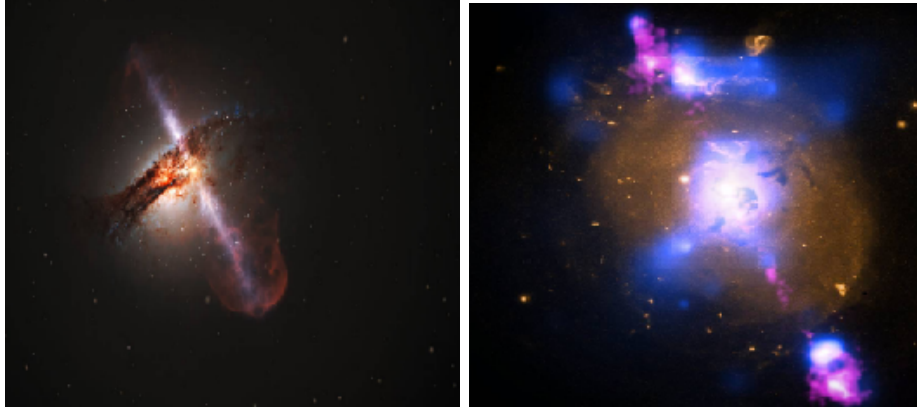
Debido a su tamaño, los BH se han agrupado en tres clases:

1. *Supermassive Black Holes* (SMBHs): Son objetos cuyas masa están en el rango de  $10^6 M_{\odot} < M < 10^9 M_{\odot}$ , como lo son los Quasars (QSRs) y los “*Active Galactic Nuclei*” (AGN) que son fuentes de alta energía que proveniente de una región compacta.
2. *Agujeros negros intermedio* (IMBH): Cuerpos con masa entre  $100 M_{\odot} < M < 10^6 M_{\odot}$ .
3. *Stellar-mass Black Holes*: Tienen masa en el orden de  $M \leq 10 M_{\odot}$  como lo son los Microquasars (M-QSRs) y otros BHs con masas similares.

Se cree que la radiación que recibimos se origina en el disco que rodea a los BHs, debido a que la materia de este cae en espiral al centro del BH y como resultado, su energía gravitacional se convierte en calor, que posteriormente es radiada al exterior.

En algunos BHs se forman *jets* de energía debido al flujo de partículas altamente relativistas. En la actualidad se discute sobre la razón para que se generen estos jets, coincidiendo en que

se requiere tres características necesarias para que se formen: *un objeto central que domina gravitacionalmente la dinámica del disco y campos magnéticos de gran intensidad.* (figura 2.2)



**Figura 2.2:** (a) Representación de un BH con sus elementos característicos. *Image Credit: ESA / Hubble, L. Calçada (ESO).* En (b) una fotografía en óptico de 4C+29.30, tomada por el Hubble Space Telescope en 2010. 4C+29.30 es una galaxia que se encuentra a 850 millones de años luz de la Tierra, ubicada en la constelación de Cancer. *Image Credit: X-ray: NASA / CXC / SAO / A. Siemiginowska et al; Optical: NASA / STScI; Radio: NSF / NRAO / VLA.*

Contrario a la idea que se tiene de que los discos son estructuras planas que rodean al BH, imágenes han mostrado que en algunas fuentes galácticas y extragalácticas existe deformaciones (*warps*) y *precesión* en la estructura de los discos y los jets. Se han propuesto teorías que puedan explicar estas deformaciones, pero para nuestro caso de interés, se le acreditará a la combinación de esfuerzos viscosos en el disco con el efecto relativista de *Lense-Thirring*, que en conjunto se denomina *efecto Bardeen-Petterson (BP)* [8]. Este efecto parece dominar en discos de acreción geoméricamente delgados cuya disipación de energía sea radiada eficientemente [6].

En lo que sigue, se estudiarán los aspectos fundamentales de la dinámica de discos de acreción para establecer las ecuaciones que serán empleadas en el cálculo de este observable.

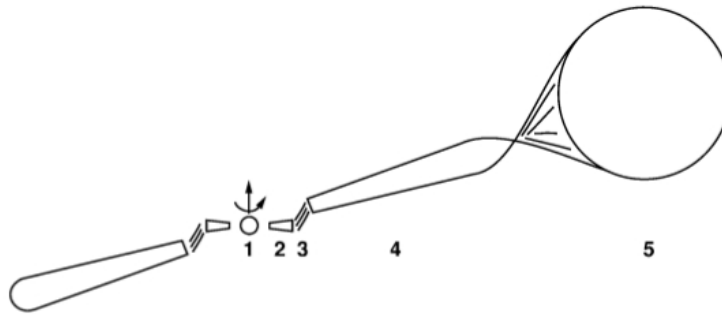
### 2.2.1. El efecto Bardeen-Petterson

Como consecuencia a la velocidad angular  $\vec{\Omega}_{LT}(r)$  estudiada en el efecto Lense-Thirring, la órbita de una partícula dada precesa si su plano orbital se encuentra inicialmente inclinado con respecto al plano ecuatorial del BH.

De lo anterior, si un disco viscoso de masa despreciable con respecto a  $M_{BH}$ , fuese no coplanar con el ecuador del KBH, la acción de la precesión diferencial asociada al efecto Lense-Thirring, hará que el disco se deforme, formando un sistema conocido como “*warped disc*”. La acción combinada del efecto Lense-Thirring y la viscosidad interna del disco, causa

el denominado *efecto Bardeen- Petterson*, el cuál tiende a alinear la parte más interna del disco con el plano ecuatorial del KBH. La región más externa del disco no se ve afectada por el efecto BP, luego, conserva su orientación original. Una representación de esto se puede ver en la figura (2.3).

El radio donde el momento angular se alinea con el del KBH se conoce como radio de Bardeen-Petterson ( $R_{BP}$ ), y es determinado comparando la escala temporal asociada al efecto Lense-Thirring, con el intervalo temporal en el que se transmiten las deformaciones a través del disco. Para calcular esta distancia se requiere de consideraciones específicas sobre el comportamiento viscoso del disco, tanto en dirección ortogonal al plano de simetría como en las direcciones radial y azimutal.



**Figura 2.3:** Diagrama esquemático del efecto BP para un X-ray binary donde se representan: (1) el objeto central en rotación (BH o Neutron Star), (2) parte interior del disco donde el efecto BP es más significativo y tiende a alinearlo con el plano ecuatorial del objeto compacto central al disco, (3) una región de transición, (4) parte exterior del disco con su orientación original, y (5) la estrella compañera que alimenta el disco de acreción. Figura tomada de [6]

### 2.2.2. Luminosidad

La masa del objeto central juega un papel importante en la naturaleza del disco de acreción, en especial cuando se considera la luminosidad. La luminosidad máxima es llamada el *límite de Eddington*.

El límite estandar de Eddington fue derivado, inicialmente, para las estrellas. Para objetos dominados por acreción, el límite de Eddington implica un límite sobre la tasa de acreción:  $\dot{M}(g/s)$ . Esto es:

$$L_{ACC} = \frac{GM}{R_*} \frac{dm}{dt} = \frac{GM\dot{M}}{R_*} \quad (2.12)$$

Se llama luminosidad de Eddington al límite fundamental para la luminosidad radiativa de un flujo constante de acreción esférica.

La idea básica es encontrar la situación de equilibrio entre el material que cae cuando interactúa con el flujo de radiación hacia el exterior. Para el caso de BHs no es tan evidente que se cumpla 2.12, puesto que  $R_*$  no define una superficie material sino una región donde la materia que cae no puede escapar y mucha de esta energía puede desaparecer en el BH, incrementando su masa y sin ser radiada.

## 2.3. Comportamiento del Gas

Aunque un disco de acreción está constituido por plasma, es posible tratarlo como un continuo si el orden de longitudes en la descripción es mayor que la longitud del camino libre medio de las partículas. Las ecuaciones que explican el comportamiento del gas son tres ecuaciones de conservación y una ecuación de estado, junto con las condiciones apropiadas de frontera.

La ecuación de gases perfectos se puede aplicar a muchos sistemas astrofísicos:

$$P = \frac{Nk_B T}{V} = \frac{\rho k_B T}{\mu m_H} \quad (2.13)$$

donde  $\mu$  es el peso molecular medio de las partículas constituyentes y  $m_H \sim m_P$  es la masa de una partícula de hidrógeno.

Los gradientes de presión en el gas implican fuerzas y por tanto, transporte de momentum. Si representamos otras fuerzas que actúan en el gas por unidad de volumen, como  $\vec{f}$ , entonces la ecuación de conservación de momentum para cada elemento de volumen conduce a la ecuación de Euler:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla P + \vec{f} \quad (2.14)$$

Un elemento de volumen del gas tiene dos formas de energía: energía interna  $\rho\varepsilon$  (donde  $\varepsilon$  es la energía interna por unidad de masa) y la energía cinética  $\frac{1}{2}\rho v^2$ . La ecuación para la conservación de la energía está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon + P \right) \vec{v} \right] = \vec{f} \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \vec{F}_{rad} - \nabla \cdot \vec{q} \quad (2.15)$$

donde  $\vec{F}_{rad}$  es el vector *flujo de radiación*,  $\vec{q}$  es el *flujo de conductividad de calor* y  $f$  son las otras fuerzas que actúan en el gas por unidad de volumen.

El sistema de ecuaciones (2.15, 2.13), complementado por las expresiones para  $\nabla \cdot \vec{F}_{rad}$  y  $\vec{f}$ , permiten una descripción completa del gas bajo las condiciones de frontera [6].

Al manipular este sistema de ecuaciones, es posible mostrar que tanto la densidad como la presión satisfacen una ecuación de onda:

$$\nabla^2 \rho - \frac{1}{\frac{dP}{d\rho}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0 \quad (2.16)$$

Luego, las perturbaciones de presión y densidad se propagan en el fluido con una velocidad que está dada por:

$$c_s = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

definida como la *velocidad del sonido* en dichos sistemas.

### 2.3.1. Estructura radial del disco

Consideremos un disco cuyos efectos de autogravitación son despreciables, discos en los que el efecto BP tiene relevancia, es decir: un disco con simetría axial y grosor despreciable. Asumimos una distribución de materia muy cerca del plano  $z = 0$  y que además se mueve con velocidad angular igual a su valor kepleriano relativista:  $\Omega_k$ , en circunferencia respecto al KBH. Entonces:

$$\Omega_k(R) = \frac{c^3}{GM_{BH}} \left[ \left( \frac{R}{R_g} \right)^{3/2} + a_* \right]^{-1} \quad (2.18)$$

donde en el límite  $a_* \rightarrow 0$ , coincide con el valor kepleriano conocido:  $\Omega_k = \left( \frac{GM}{R^3} \right)^{1/2}$ .

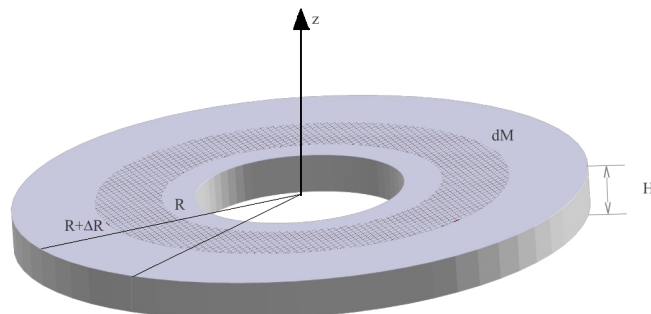
La velocidad azimutal de una partícula ubicada a la distancia radial  $R$  se escribe como:

$$v_\phi(R) = R\Omega_k(R) \quad (2.19)$$

Además, se asume que el gas posee una pequeña velocidad radial “de deriva”:  $v_R$ , la cual es negativa cerca del BH, tal que el material es acretado.

$$\vec{v}_R = v_R \hat{R} \quad \text{con : } v_R < 0 \quad (2.20)$$

Para plantear las ecuaciones de conservación para la masa y para el transporte de momento angular en el disco debido al movimiento radial de deriva, se parte de un anillo del material del disco que se extiende entre  $R$  y  $R + \Delta R$ , como se indica en la figura (2.4)



**Figura 2.4:** Coordenadas polares en discos delgados. Tomada de [6]

donde la masa superficial diferencial del anillo es:

$$dM = 2\pi R dR \Sigma \quad (2.21)$$

y el momento angular:

$$dJ = R dM v_\phi = 2\pi R dR \Sigma R^2 \Omega \quad (2.22)$$

La tasa de cambio de estas dos cantidades determinan el flujo neto de masa y de momento angular a través de las fronteras  $R$  y  $R + \Delta R$ .

Si el disco es kepleriano y  $\Omega_k$  es independiente del tiempo,  $\Sigma$ , que corresponde a una densidad superficial de masa y se obtiene al integrar la densidad volumétrica de masa  $\rho$  en la dirección del eje  $z$ :

$$\Sigma(R, t) = \int_{-H/2}^{+H/2} \rho(R, t) dz \quad (2.23)$$

satisface una ecuación de difusión de la forma:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} [\nu \Sigma R^{1/2}] \right) \quad (2.24)$$

donde  $\nu$  se refiere a la viscosidad cinemática. La ecuación (2.24) representa la evolución temporal de la densidad de superficie de un disco kepleriano, y en general no es lineal ya que  $\nu$  puede ser función de variables locales en el disco, es decir  $\Sigma, R$  y  $t$ .

### 2.3.2. Modelo de disco fino [25]

Shakura y Sunyaev [25] proponen una solución conocida como el *modelo estandar* para el estudio de los discos de acreción estacionarios. Se asumen como estacionarios dado que las condiciones externas al disco cambian en una escala de tiempo muy superior comparada con la escala en la que se dan los procesos viscosos, por lo que se dice que el disco puede alcanzar una estructura temporalmente estacionaria ( $\partial/\partial t = 0$ ). En las ecuaciones de conservación:

$$R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) = 0 \quad (2.25)$$

para la conservación de masa, y para el momento angular:

$$R \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega_k) + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R R^2 \Omega_k) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R} \quad \text{con : } G(R, t) = 2\pi \nu \Sigma R^2 \frac{\partial \Omega_k}{\partial R} \quad (2.26)$$

bajo la hipótesis de estacionario, la ecuación (2.25) se reduce a:

$$R \Sigma v_R = cte \quad (2.27)$$

que representa el flujo constante de masa a través de cada punto del disco; y puede escribirse como:

$$\dot{M} = 2\pi R\Sigma(-v_R) \quad (2.28)$$

Para la ecuación de conservación del momento angular, con  $\partial/\partial t = 0$ , se tiene:

$$R\Sigma v_R R^2 \Omega = \frac{G}{2\pi} + \frac{C}{2\pi} \quad (2.29)$$

donde  $C$  es constante y está relacionada con la rata a la que el flujo de momento angular entra a la estrella compacta. y se define como:

$$C = -\dot{M}(GMR_*)^{1/2} \quad (2.30)$$

Usando  $G(R, t)$  tenemos:

$$-\nu\Sigma\Omega = \Sigma(-v_R)\Omega + \frac{C}{2\pi R^3} \quad (2.31)$$

Considerando la velocidad angular kepleriana, y reemplazando  $C$  en (2.31) se encuentra que la ecuación (2.26) se reduce a:

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[ 1 - \left( \frac{R}{R_*} \right)^{1/2} \right] \quad (2.32)$$

Si se establece  $\Omega = \Omega_k$  para la disipación viscosa por unidad de área de la cara del disco (flujo de energía a través de las caras)  $D(R)$  y se usa (2.32) se obtiene:

$$D(R) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[ 1 - \left( \frac{R}{R_*} \right)^{1/2} \right] \quad (2.33)$$

Por lo tanto, el flujo de energía a través de las caras de un disco delgado en equilibrio es independiente de la viscosidad. La viscosidad solo redistribuye el transporte de energía liberada en el disco.

Para que un disco se considere delgado, debe cumplir que  $z \ll R$ , lo que implica en la ecuación de Euler (2.14):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \simeq -\frac{GM_z}{R^3} \quad (2.34)$$

y dado que la escala de altura típica del disco delgado en la dirección  $z$  es  $H$ , podemos establecer:

$$\frac{\partial P}{\partial z} \sim \frac{P}{H}$$

luego, el supuesto de disco delgado requiere entonces que  $H \ll R$ . Además:

$$P \sim \rho c_s^2 \Rightarrow H^2 = -\frac{c^2 R^3}{GM}$$

por tanto:

$$H \simeq c_s \left( \frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} = c_s \left( \frac{R}{GM} \right)^{1/2} R \Rightarrow \frac{H}{R} \simeq c_s \left( \frac{R}{GM} \right)^{1/2} \quad (2.35)$$

y dado que

$$\frac{H}{R} \ll 1 \Rightarrow c_s \ll \left( \frac{GM}{R} \right)^{1/2}$$

Es decir, para un disco delgado se requiere que la velocidad local kepleriana sea altamente supersónica ( $c_s \ll v_\phi$ ).

Se obtiene que

$$v_R = -\frac{3\nu}{2R} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] \quad (2.36)$$

donde  $\nu = \alpha c_s H$  con  $\alpha \leq 1$ , y dado que la velocidad radial:  $v_R \sim \frac{\nu}{R} = \frac{\alpha c_s H}{R}$ , entonces, se sigue que  $v_R \ll c_s$ ; es decir, la velocidad radial es altamente subsónica en el límite de discos delgados bajo la  $\alpha$ -prescription de Shakura y Sunyaev.

El número de Mach es definido por:

$$M_{Mach} = \frac{v_\phi}{c_s} \quad (2.37)$$

de esto, se sigue que:

$$H \simeq \frac{R}{M_{Mach}} \Rightarrow v_R \simeq \alpha M_{Mach}^{-1} c_s \quad (2.38)$$

La solución de Shakura asume que el disco es ópticamente grueso en el sentido de que:

$$\tau = \rho H K_R(\rho, T_c) = \Sigma K_R \quad (2.39)$$

siendo  $T_c$  la temperatura en el plano medio, y  $K_R$  la constante de opacidad de Rosseland. De esta manera, la solución de disco fino de Shakura y Sunyaev en términos de los parámetros:

$$R_{10} = \frac{R}{10^{10}} \text{cm}, \quad m_1 = \frac{M}{M_\odot}, \quad \dot{M}_{16} = \frac{\dot{M}}{10^{16} \frac{g}{s}}, \quad \text{y } f = \left( 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right)^{1/4} \quad (2.40)$$

se expresan en la forma:

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= 5, 2\alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{7/10} m_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{14/5} \frac{g}{cm^2} = H_\rho \\
 H &= 1, 7 \times 10^8 \alpha^{-1/10} \dot{M}_{16}^{3/20} m_1^{-3/8} R_{10}^{9/8} f^{3/5} cm \\
 \rho &= 3, 1 \times 10^{-8} \alpha^{-7/10} \dot{M}_{16}^{11/20} m_1^{5/8} R_{10}^{-15/8} f^{11/5} \frac{g}{cm^3} \\
 T_c &= 1, 4 \times 10^4 \alpha^{-1/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{6/5} \text{ }^\circ K \\
 \tau &= 190 \alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{1/5} f^{4/5} \\
 v_R &= 2, 7 \times 10^4 \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{-1/4} R_{10}^{-1/4} f^{-14/5} \frac{cm}{s}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Siempre que los parámetros observacionales indiquen que los incrementos de energía disipada en el disco son radiados rápidamente, el sistema de ecuaciones de Shakura-Sunyaev es aplicable.

### 2.3.3. Extensión a disco delgado [17]

El sistema de ecuaciones obtenido en Shakura y Sunyaev es para discos finos. Para sistema donde la energía liberada por disipación de tipo viscoso es radiada eficientemente, se genera la estructura de un disco fino de Shakura. Pero puede ocurrir casos donde la energía disipada sea arrastrada hacia el BH, generando los estados denominados ADAF (*advection-dominated accretion flow*), en los cuales el disco tiene una geometría gruesa, es decir,  $H/R > 1$ . ADAFs también se pueden establecer cuando la tasa de acreción es alta si el disco es ópticamente grueso.

Estudios para fuentes de GRBs muestran que en estos sistemas se puede establecer tasas muy altas de acreción, estados conocidos como *hiperacreción*.

Para discos de estas fuentes en hiperacreción, Popham et al. [17] presenta un modelo numérico y se concluye que para un  $R \sim (10^7 - 10^8)$  el comportamiento del modelo se asemeja al comportamiento de un disco delgado, donde  $H/R \leq 1$ .

Las ecuaciones se obtienen a partir de la solución de Shakura y Sunyaev al igualar la tasa de disipación de energía por unidad de volumen:

$$\frac{D(R)}{H} = \frac{3}{8\pi} \frac{\dot{M} \Omega_k^2}{H} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^2 \right]$$

con la tasa de enfriamiento por generación de neutrinos:

$$\dot{q} = 9 \times 10^{33} \left( \frac{\rho}{10^{10} \frac{g}{cm^3}} \right) \left( \frac{T}{10^{11} \text{ }^\circ K} \right)^6 \frac{erg}{cm^3 s}$$

definiendo:  $m_1 = M/M_\odot$  y  $\mu = \dot{M}/M_\odot s^{-1}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
H(m_1, R) &= 1,7 \times 10^4 \alpha^{0,1} m_1^{0,9} \left( \frac{R}{R_g} \right)^{1,35} \text{ cm} \\
T(m_1, R) &= 1,3 \times 10^{11} \alpha^{0,2} m_1^{0,2} \left( \frac{R}{R_g} \right)^{-0,3} \text{ }^\circ K \\
\rho(m_1, \mu, R) &= 1,2 \times 10^{14} \alpha^{-1,3} \mu m_1^{-1,7} \left( \frac{R}{R_g} \right)^{-2,55} \frac{g}{\text{cm}^3} \\
\Sigma(m_1, \mu, R) &= H \times \rho \frac{g}{\text{cm}^2} \\
v_R(m_1, R) &= 5,6 \times 10^8 \alpha^{1,2} m_1^{-0,2} \left( \frac{R}{R_g} \right)^{0,2} \frac{\text{cm}}{s}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Cuando comparamos con la solución de Shakura y Sunyaev, la densidad en estos discos es mayor y la temperatura menor.

## 2.4. Modelo con número de Reynolds

El estudio detallado de la emisión y detectabilidad de GWs emitidas por discos de acreción regidos dinámicamente por el efecto BP y en la aproximación de Shakura y Sunyaev con parametrización  $\alpha$  de la viscosidad ha sido llevado a cabo en [6], pero no es un estudio muy realista ya que no se considera la viscosidad determinada por el número de Reynolds.

En el caso de discos con radio grande, la temperatura de su región externa es suficientemente baja como para permitir la formación de una gran cantidad de gas molecular cuya baja viscosidad cinemática favorece el incremento del número de Reynolds. Como consecuencia se desarrollan remolinos turbulentos que incrementan la viscosidad efectiva y, contrariamente, fuerzan la disminución del número de Reynolds. El proceso continúa hasta que se alcanza un número de Reynolds crítico  $\Re_c$  por encima del cual el flujo es turbulento y por debajo del cual el flujo es laminar.

En este trabajo nos centraremos en estudiar los discos cuya viscosidad dependen del número de Reynolds, conocidos como discos  $\beta$ .

### 2.4.1. Discos con viscosidad turbulenta

Una de las principales deficiencias de las actuales descripciones teóricas de los discos de acreción es la falta de conocimiento sobre la física de la viscosidad del disco. Los discos con viscosidad  $\alpha$  no conservan información sobre el mecanismo que genera la turbulencia, sino sobre los límites físicos de su eficacia en un disco. Se tiene entonces la necesidad de explicar la viscosidad turbulenta en discos de acreción con el número de Reynolds.

Se asume que la turbulencia es impulsada por el campo de velocidad en el disco, el cuál tiene escalas de longitud y velocidad características  $S$  (radio de la órbita) y  $v_\phi$  (velocidad

azimutal) respectivamente. Un número de Reynolds alto  $\Re = Sv_\phi/\nu$  conduce a la generación de turbulencia, y por lo tanto a un aumento constante de la viscosidad efectiva. Esto continuará hasta que el número de Reynolds se halla reducido aproximadamente a su valor crítico  $\Re_c$ . Los valores típicos para un  $\Re_c$  en flujos de laboratorio son del orden de  $\sim 10^2 - 10^3$ . La viscosidad de Reynolds puede ser tan alta como:

$$\nu = \beta Sv_\phi, \quad (2.43)$$

donde  $\beta$  es una constante que satisface:

$$\beta \leq \frac{1}{\Re_c} \sim 10^{-3} \quad (2.44)$$

¿Bajo qué condiciones se puede aplicar a los discos de acreción Kepleriana de estado estacionario, la prescripción de viscosidad  $\beta$  derivado de los experimentos de flujo giratorio? Esta ley es válida para objetos estelares jóvenes, estrellas binarias evolucionadas y AGN, excepto donde la turbulencia se convierta en hipersónica.

En un disco kepleriano la viscosidad  $\beta$  está dada por:

$$\nu_\beta = \beta \Omega R^2 \quad (2.45)$$

La viscosidad  $\beta$  sólo depende del radio y de la velocidad angular en el disco kepleriano y no implica condiciones físicas locales, a diferencia de la  $\alpha_{visc}$  que depende de la altura de la escala de presión  $H$  y de la velocidad del sonido  $c_s$ . Usando  $C_s = \Omega H$ , que expresa equilibrio hidrostático en un disco vertical kepleriano, se tiene:

$$\nu_\alpha = \alpha \Omega R^2 \left(\frac{H}{R}\right)_\alpha^2 = \nu_\beta \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{H}{R}\right)_\alpha^2 \quad (2.46)$$

El término  $(H/R)_\alpha^2$  es una cantidad debilmente sensible tanto a  $R$  como a  $\alpha$ , pero depende fuertemente de la masa central y de la velocidad de acreción.

El número Mach en un disco  $\beta$  está dado por:

$$M_{Mach} = \sqrt{\beta} \frac{\Omega R}{C_s} = \sqrt{\beta} \left(\frac{H}{R}\right)_\beta^{-1} \quad (2.47)$$

Empleando la ecuación anterior en (2.42), nos queda que

$$M_{Mach} = 4,99 \times 10^{-2} \beta_{-5}^{5/12} m_1^{-3/4} \left(\frac{R}{R_g}\right)^{-7/24} \quad (2.48)$$

Para discos con hiperacreción estudiados en el modelo de Popham, se analizará el comportamiento tomando la viscosidad  $\beta$  y definiendo:  $m_1 = M/M_\odot$ ,  $\mu = \dot{M}/M_\odot s^{-1}$ ,  $\alpha = M_{mach}^2$  y  $\beta_{-5} = \beta \times 10^5$  con  $\beta = 10^{-2}$  obteniendo así las ecuaciones para el modelo de la forma:

$$\begin{aligned}
H(m_1, R) &= 9,34 \times 10^3 \beta_{-5}^{1/12} m_1^{3/4} \left( \frac{R}{R_g} \right)^{31/24} \text{ cm} \\
T(m_1, R) &= 3,92 \times 10^{10} \beta_{-5}^{1/6} m_1^{-1/10} \left( \frac{R}{R_g} \right)^{-5/12} \text{ }^\circ K \\
\rho(m_1, \mu, R) &= 2,91 \times 10^{17} \beta_{-5}^{-13/12} \mu m_1^{1/4} \left( \frac{R}{R_g} \right)^{-43/24} \frac{g}{\text{cm}^3} \\
\Sigma(m_1, \mu, R) &= H \times \rho = 2,72 \times 10^{21} \beta_{-5}^{-1} \mu m_1 \left( \frac{R}{R_g} \right)^{-1/2} \frac{g}{\text{cm}^2} \\
v_R(m_1, R) &= 4,20 \times 10^5 \beta_{-5} m_1^{-2} \left( \frac{R}{R_g} \right)^{-1/2} \frac{\text{cm}}{s}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Para esta tesis, se propone emplear las ecuaciones obtenidas por Popham, para un disco  $\beta$  (2.49) para evaluar los momentos de inercia y el periodo de precesión en discos de acreción asociados a GRBs.

# 3 Ondas gravitacionales

La existencia de ondas gravitacionales (GWs) es una de las predicciones de la teoría General de la Relatividad (GR). Se trata de una perturbación del campo gravitacional que se propaga en forma de onda. Esto, aunque en un principio fue intuitivo, tuvo sentido cuando la teoría electrostática de Coulomb fue reemplazada por la teoría electromagnética de Maxwell, entonces tenía sentido considerar que cuando una distribución de masa-energía cambia con el tiempo, la información asociada a este cambio debería propagarse en forma de ondas. Sin embargo, las GWs son **ondas métricas**, debido a la asociación del potencial gravitatorio con el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Luego, cuando ellas se propagan, la geometría y la distancia entre los puntos del espacio-tiempo, cambian con el tiempo.

## 3.1. Linealización de las EFE

Debido a la complejidad para resolver analíticamente las EFE para fuentes que evolucionan con el tiempo, como se mencionó en el capítulo anterior, se hará uso del campo lejano de fuentes localizadas, ya que es lo suficientemente débil para permitir hacer uso de aproximaciones basadas en el método de perturbaciones.

En esta sección se recurre a el formalismo de esta aproximación que nos llevará a la linealización de las ecuaciones de Einstein y a la denominada teoría linealizada. Es a partir de esta versión de las EFE de donde se verá el significado de las ondas gravitacionales.

Consideremos una pequeña perturbación  $h_{\mu\nu}(x)$  de una métrica conocida con solución  $\bar{g}_{\mu\nu}$  que denominaremos métrica del *background*, y que puede ser la métrica del espaciotiempo de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  o la métrica generada por el BH de Schwarzschild;  $h_{\mu\nu}(x)$  es causada por alguna fuente con tensor energía-momentum que denotaremos como  $t^{\mu\nu}$ . El tensor del espaciotiempo resultante se puede escribir de la forma:

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x) \quad \text{con} \quad |h_{\mu\nu}(x)| \ll |\bar{g}_{\mu\nu}(x)| \quad (3.1)$$

A partir de (3.1) expandimos a primer orden en  $h_{\mu\nu}(x)$  las EFE, la teoría resultante es denominada *teoría linealizada* y  $h_{\mu\nu}(x)$  satisface una ecuación de onda en la región exterior de la fuente, que nos conduce a la noción de ondas gravitacionales.

### Simetrías en Teoría Linealizada

Para facilitar el análisis, supongamos un background plano en el que  $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . La ecuación (3.1) queda de la forma:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \text{con } |h_{\mu\nu}(x)| \ll 1 \quad (3.2)$$

debido a que las componentes de un tensor son dependientes de las coordenadas, nos interesaremos en situaciones físicas donde existe un marco de referencia que denominaremos (NLC - *Near Lorentz Coordinates*) para los cuales (3.2) es válida en una región del espaciotiempo. Con estas condiciones, la teoría linealizada pierde la propiedad de invarianza de la GR bajo transformaciones generalizadas de coordenadas.

Hay dos tipos de transferencia de coordenadas que pueden hacerse sobre sistemas NLC: *Transformaciones infinitesimales locales* y *Transformaciones de Lorentz*.

### Transformaciones infinitesimales locales

Haciendo uso de la ley de transformación para la métrica, se encuentra que la transformación para  $h_{\mu\nu}$  a primer orden es:

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) \quad (3.3)$$

y debido a la condición  $|\partial_\mu \xi_\nu| \sim |h_{\mu\nu}|$ , se tiene que:  $|h'_{\mu\nu}(x')| \ll 1$ . Por lo tanto,

$$g'_{\mu\nu}(x') = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x')$$

son las componentes del tensor métrico en un NLC.

Esto significa que el efecto de una transformación infinitesimal local es el de *redefinir* la perturbación  $h_{\mu\nu}$  según (3.3).

### Transformaciones de Lorentz

Son transformaciones finitas globales, es decir, que son independientes de las coordenadas, estas transformaciones las denominaremos (BLT - *Background Lorentz Transformations*). Sea  $\Lambda^\mu_\nu$  una matriz de coeficientes constantes que satisface:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \eta_{\rho\sigma} \quad (3.4)$$

Por lo tanto, las componentes del tensor métrico transforma como:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu g_{\rho\sigma}(x) = \eta_{\mu\nu} + \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu h_{\rho\sigma}(x)$$

luego, en el nuevo marco,

$$g'_{\mu\nu}(x') = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x'), \quad \text{con} \quad h'_{\mu\nu}(x') = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu g_{\rho\sigma}(x)$$

esto implica que la perturbación  $h_{\mu\nu}$  transforma como un tensor bajo el grupo de transformaciones de Lorentz, pero no se puede decir lo mismo bajo el grupo de transformaciones generalizadas de coordenadas.

### 3.1.1. Expansión alrededor del espaciotiempo plano

Para escribir las EFE linealizadas, se debe hacer una expansión a la teoría linealizada del tensor de Einstein, para esto, se debe calcular las correspondientes expresiones para el tensor de Riemann, Ricci y el escalar de curvatura.

#### Tensor de Riemann

El tensor de Riemann está definido por:

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha_{\nu\rho}$$

donde  $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$  se denomina *conexión* de Christoffel, y permite relacionar vectores pertenecientes al espacio tangente de puntos vecinos en la curvatura. Ésta conexión se puede construir a partir de la métrica como:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

y dado que  $\Gamma^\mu_{\nu\sigma} \sim \partial^\mu g_{\nu\sigma}$ , lo que conlleva a que los dos últimos términos en esta expresión sean cuadráticos en las primeras derivadas del tensor métrico y por tanto de segundo orden en  $\partial_\mu h_{\nu\sigma}$ , por lo que serán despreciados. Usando explícitamente los símbolos de Christoffel, se obtiene:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu})$$

Pero, dado que:

$$g_{\alpha\nu,\beta\mu} = h_{\alpha\nu,\beta\mu}$$

al ser nulas las derivadas de  $\eta_{\nu\mu}$ , las componentes del tensor de Riemann a orden lineal en  $h_{\mu\nu}$  toman la forma:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (3.5)$$

y bajo la transformación de gauge (3.3) estas componentes son invariantes. Antes de linealizar, se hacen las siguientes definiciones:

$$h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (3.6)$$

de donde se sigue que:

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = -h$$

y esta característica hace que a  $\bar{h}_{\mu\nu}$  se le denomine el “tensor” de traza-inversa de  $h_{\mu\nu}$ . De la ecuación (3.6) se obtiene:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \quad (3.7)$$

### Tensor de Ricci y escalar de curvatura

El tensor de Ricci es de la forma:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$$

al contraer el tensor de Riemann (3.5) se obtiene:

$$R_{\beta\nu} \equiv R_{\beta\alpha\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}\partial_{\beta}h_{\nu}^{\alpha} + \partial_{\alpha}\partial_{\nu}h_{\beta}^{\alpha} - \partial_{\beta}\partial_{\nu}h - \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}h_{\beta\nu})$$

y haciendo uso de la ecuación (3.7), el tensor de Ricci toma la forma:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \partial_{\alpha}\partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\beta} + \partial_{\beta}\partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^{\mu}\partial_{\mu}\bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial^{\mu}\partial_{\mu}\bar{h} \right) \quad (3.8)$$

Con una nueva contracción se obtiene el escalar de curvatura:

$$R \equiv R^{\sigma}_{\sigma} = \partial^{\mu}\partial^{\beta}\bar{h}_{\mu\beta} + \frac{1}{2}\partial^{\mu}\partial_{\mu}\bar{h} \quad (3.9)$$

### EFE en teoría linealizada

De los resultados anteriores, el tensor de Einstein se puede escribir como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{1}{2}(\square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^{\rho}\partial_{\nu}\bar{h}_{\mu\rho} - \partial^{\rho}\partial_{\mu}\bar{h}_{\nu\rho}) \quad (3.10)$$

donde  $\square \equiv \partial^{\mu}\partial_{\mu}$ , es el D’alambertiano también conocido como operador de onda del espacio-tiempo de Minkowski. Luego, en teoría linealizada, las ecuaciones de Einstein quedan:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \Rightarrow \square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^{\rho}\partial_{\nu}\bar{h}_{\mu\rho} - \partial^{\rho}\partial_{\mu}\bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.11)$$

Al usar la libertad de gauge (3.3) para escoger el **Gaige de Lorentz**:

$$\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.12)$$

y esto reduce la ecuación (3.11) a su forma más simple:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.13)$$

A partir de esta ecuación analizaremos la generación de GWs en teoría linealizada.

## 3.2. GWs en el TT Gauge

Se debe resolver las EFE en el gauge de Lorentz (3.13) para estudiar la propagación de GWs. Partiendo de:

$$\boxed{\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0} \quad (3.14)$$

y dado que  $\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$ , la ecuación (3.14) es una ecuación de ondas para la perturbación.

Es evidente entonces, que la perturbación se propaga como una onda a la velocidad de la luz, y esto es lo que llamamos una onda gravitacional, por lo tanto, la teoría gravitacional de Einstein predice la existencia de ondas gravitacionales.

Es posible simplificar aún más la forma de la métrica escogiendo adecuadamente las componentes del campo gauge  $\xi_\mu$ , las cuales deben satisfacer  $\square \xi_\mu(x) = 0$  para fijar el gauge de Lorentz.

Sea el tensor  $\xi_{\mu\nu}$  como:

$$\xi_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \xi^\sigma \quad (3.15)$$

debido a que las derivadas parciales conmutan, es claro que:

$$\square \xi_\mu = 0 \Rightarrow \square \xi_{\mu\nu} = 0 \quad (3.16)$$

De las 6 componentes independientes del tensor simétrico  $\bar{h}_{\mu\nu}$  que satisface (3.14) se restan las funciones  $\xi_{\mu\nu}$  que dependen de 4 funciones arbitrarias  $\xi_\mu$  y que satisfacen la ecuación (3.16). De aquí que uno puede escoger las funciones  $\xi_\mu$  que impone nuevas condiciones sobre el tensor simétrico  $\bar{h}_{\mu\nu}$ . Luego, si elegimos:

- $\xi^0$  tal que:  $\bar{h} = 0$ . Lo que implica que  $h = 0$  y por tanto  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ , lo que quiere decir que la perturbación  $h_{\mu\nu}$  es libre de traza y coincide con su tensor traza inversa.
- las tres funciones restantes  $\xi^i(x)$  tal que:  $h^{0i}(x) = 0$ . Esta condición, junto con el gauge de Lorentz muestran que  $h_{00}$  es constante en el tiempo. Un término constante corresponde a la parte estática de la métrica, y dado que la GW depende del tiempo, se tiene que:  $h_{00} = 0$ .

Las anteriores condiciones implican que  $h_{0\mu} = 0$ ,  $\forall \mu$ ; luego, el gauge de Lorentz se reduce a:

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial^i h_{ij} = 0$$

Por lo tanto:

$$\boxed{h^{0\mu} = 0, \quad h = h^i_i = 0, \quad \partial^j h_{ij} = 0} \quad (3.17)$$

Esta ecuación define el TT Gauge (*Transverse-Traceless Gauge*) que es el gauge más apropiado para el análisis de las GWs. Además, esta condición reduce de 10 términos libres de la matriz simétrica  $h_{\mu\nu}$  a 6, y la libertad gauge residual, asociadas a la función  $\xi^\mu$  que satisface  $\square\xi_\mu(x) = 0$ , reduce a solo 2 las componentes libres de  $h_{\mu\nu}$ .

Ahora, ya estamos en capacidad de resolver las EE en el TT gauge en donde (3.14) se reduce a:

$$\square h_{ij}^{TT} = 0 \quad (3.18)$$

donde el superíndice TT se empleará para recordar que estamos en este gauge. Esta ecuación permite soluciones de onda plana que son de la forma:

$$h_{ij}^{TT}(x) = A_{ij} e^{ik \cdot x} \quad (3.19)$$

donde  $A_{ij}$  y  $k_\sigma$  son componentes constantes de tensores. para entender estas componentes reemplazamos (3.19) en (3.18):

$$\begin{aligned} A_{ij} \partial^\mu \partial_\mu e^{ik \cdot x} &= 0 \\ A_{ij} \partial^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) &= 0 \\ A_{ij} \partial^\mu (i k_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma}) &= 0 \\ i^2 A_{ij} k_\mu k^\mu e^{ik \cdot x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

luego,  $k_\mu k^\mu = 0$  lo que indica que el 4-vector  $k^\mu$  es un vector luminoide. Este resultado corrobora que las GWs viajan a la velocidad de la luz.

Dado que  $k_\mu k^\mu = 0$ , la relación que se satisface entre las componentes de  $k$  es:

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \quad (3.21)$$

que expresa que la velocidad de fase es idéntica a la velocidad de grupo. Las componentes de  $A_{ij}$  pueden ser funciones de  $\mathbf{k}$  y contienen la información asociada a la amplitud de la GW y a sus modos de polarización. Se define **tensor de polarización** las componentes del tensor  $A_{ij} \equiv e_{ij}(\mathbf{k})$ .

### 3.2.1. Polarización

Se propone la solución de GWs que se propagan en dirección del eje  $z$  de un sistema NLC, con 3-vector de onda  $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|\hat{n}$ , donde  $\hat{n}$  es el vector unitario en dirección de  $z$ . Como resultado  $h_{ij}^{TT}$  tiene valores no nulos solo para  $i, j = \{1, 2\}$ , que es el plano transversal a la dirección de propagación de la onda. Otras consecuencias son:

- $h_{ij}^{TT}$  es libre de traza, luego  $h_{11} + h_{22} = 0$ .
- $h_{ij}^{TT}$  es simétrico, por lo tanto  $h_{xy} = h_{yx}$ .
- La GW sólo está asociada a la parte real de (3.19), luego  $e^{ik \cdot x} = \cos(k \cdot x) = \cos[w(t - z/c)]$ .

Sean  $h_+ \equiv h_{11} = -h_{22}$  y  $h_\times \equiv h_{xy} = h_{yx}$  denominadas las amplitudes de los modos “plus” “cross” de polarización de la onda.

Luego, podemos escribir

$$h_{ij}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \cos[w(t - z/c)] \quad (3.22)$$

o de manera más simple:

$$\boxed{h_{ab}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix}_{ab} \cos[w(t - z/c)]} \quad (3.23)$$

donde  $a, b = \{1, 2\}$  son índices en el plano transversal  $(x, y)$ .

Como conclusión: *una onda gravitacional sólo tiene dos grados físicos de libertad que corresponden a los dos posibles estados de polarización*

### 3.2.2. Expansión de ondas planas

Otra forma de escribir  $h_{ij}^{TT}$  es como una combinación de ondas planas:

$$h_{ij}^{TT}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (A_{ij}(\mathbf{k})e^{ik \cdot x} + A_{ij}^*(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x}) \quad (3.24)$$

donde  $|\mathbf{k}| = w/c = 2\pi f/c$ , y el diferencial de volumen en el espacio de frecuencia se puede escribir como:

$$d^3k = -|\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| d(\cos\theta) d\varphi = -\left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 f^2 df d(\cos\theta) d\varphi$$

Sea  $d^2\hat{n} \equiv -d(\cos\theta) d\varphi$  el diferencial de ángulo sólido, luego, la expresión (3.24) queda de la forma:

$$h_{ij}^{TT}(x) = \frac{1}{c^3} \int_0^\infty f^2 df \int d^2\hat{n} (A_{ij}(f, \hat{n})e^{-2\pi i f(t - \hat{n} \cdot \mathbf{x}/c)} + c.c.) \quad (3.25)$$

que puede ser reducida para fuentes localizadas usando:

$$A_{ij}(\mathbf{k}) = A_{ij}(f)\delta^2(\hat{n} - \hat{n}_0)$$

de donde  $\hat{n}_0$  es el vector unitario que define la dirección de propagación y es transversal al plano en donde  $A_{ij}$  tiene componentes no nulas.

Si indicamos los índices en el plano  $a, b = \{1, 2\}$ , y se omite, por simplicidad, el superíndice  $TT$  y además empleamos los tensores de polarización:

$$e_{a,b}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{a,b} \quad y \quad e_{a,b}^\times = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{a,b} \quad (3.26)$$

se puede escribir a (3.25) de manera alternativa como:

$$h_{ab}(t, \mathbf{x}) = \sum_{A=+, \times} \int_{-\infty}^{+\infty} df \int d^2\hat{n} \tilde{h}_A(f, \hat{n}) e_{ab}^A(\hat{n}) e^{-2\pi i f(t - \hat{n} \cdot \mathbf{x}/c)} \quad (3.27)$$

con

$$\frac{f^2}{c^3} A_{ij}(f, \hat{n}) = \sum_{A=+, \times} \tilde{h}_A(f, \hat{n}) e_{ij}^A(\hat{n})$$

Debido a que las dimensiones lineales para las cuales se han diseñado los experimentos en GWs son muy inferiores con relación a la longitud de onda reducida ( $L \ll \frac{\lambda_{GW}}{2\pi}$ ), esto nos permite eliminar la dependencia espacial al ubicar el origen del sistema coordinado en el detector, es decir:

$$e^{2\pi i f \hat{n}_0 \cdot \mathbf{x}/c} = e^{2\pi i \hat{n}_0 \cdot \mathbf{x}/\lambda_{GW}} \approx 1$$

con lo cual:

$$h_{ab}(t) = \int_0^\infty df \left( \tilde{h}_{ab}(f) e^{-2\pi f t} + c.c \right)$$

de donde:

$$\tilde{h}_{ab}(f) = \tilde{h}_{ab}(f, \mathbf{x} = 0) = \frac{f^2}{c^3} A_{ab}(f)$$

Se puede observar que las integrales de  $f$  corren sobre frecuencias físicas. De esto, se puede escribir la expresión de manera compacta como:

$$h_{ab}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{h}_{ab}(f) e^{-2\pi i f t} \quad y \quad \tilde{h}_{ab}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt h_{ab}(t) e^{2\pi i f t}$$

### 3.2.3. Interacción de las GWs con el detector

Analizaremos cómo interactúan las GWs con el detector, idealizado como un conjunto de masa de prueba. Para esta parte debe tenerse en cuenta, que aunque la física es invariante bajo transformación de coordenadas, usaremos un lenguaje para describir las GWs y el detector que dependerá del sistema de referencia empleado. Seleccionar un observador, en GR es el procedimiento matemático equivalente de escoger un gauge específico. Lo que hay que analizar ahora, son las características del sistema de donde se satisface el TT gauge (TT frame) y las respuesta de las masas de prueba de dicho sistema.

### TT frame

En el TT frame, las partículas que se encontraban en reposo antes de la llegada de la onda gravitacional, permanecerán en reposo respecto a este frame, después de la llegada de ésta. Para entender esto supongamos una masa de prueba en reposo en  $\tau = 0$ ,  $\left[\frac{dx^i}{d\tau}\right]_0 = 0$ . Por lo tanto, de la ecuación geodésica (2-2) se sabe que:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2x^i}{d\tau^2}\right]_{\tau=0} &= - \left[\Gamma_{\nu\rho}^i(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}\right]_{\tau=0} \\ &= - \left[\Gamma_{00}^i(x) \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2\right]_{\tau=0} \end{aligned}$$

Y dado a que en teoría linealizada el símbolo de Christoffel toma la forma de:

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} [h_{\sigma\rho,\nu} + h_{\nu\sigma,\rho} - h_{\rho\nu,\sigma}]$$

entonces,

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} [h_{i0,0} + h_{0i,0} - h_{00,i}].$$

Pero, como ya sabemos, en el TT gauge, y por lo tanto en el TT frame,  $h_{i0} = h_{00} = 0$ ; luego en  $\tau = 0$  tenemos:

$$\left[\frac{d^2x^i}{d\tau^2}\right]_{\tau=0} = 0 \quad (3.28)$$

Esto significa que las coordenadas TT oscilan en sí mismas, como respuesta a la onda, de tal manera que la posición de masas libres en reposo no cambia. Esto no quiere decir que porque las posiciones coordenadas no se vean alteradas no existan efectos físicos. Veámoslo así, consideremos dos eventos en  $(t, x_1, 0, 0)$  y  $(t, x_2, 0, 0)$  respectivamente. Para el TT frame, la distancia coordenada  $x_2 - x_1 = L$  permanece constante, aun con una onda plana propagándose en dirección  $z$ . Sin embargo, a partir de:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dz^2 + \{1 + h_+ \cos[\omega(t - z/c)]\} dx^2 + \{1 - h_+ \cos[\omega(t - z/c)]\} dy^2 \\ &\quad + 2h_\times \cos[\omega(t - z/c)] dx dy \end{aligned}$$

obtiene la distancia propia entre eventos, que es :

$$s = (x_2 - x_1) [1 + h_+ \cos(\omega t)]^{1/2} \simeq L \left[ 1 + \frac{1}{2} h_+ \cos(\omega t) \right]$$

a primer orden en  $h_+$ . Entonces la distancia propia oscila periódicamente en el tiempo con la frecuencia de la GW.

Esto se puede hacer de manera general definiendo el vector  $\mathbf{L}$  como la separación entre dos eventos. La distancia propia entre ellos es de la forma:

$$s^2 = L^2 + h_{ij}(t)L_i L_j$$

si definimos  $n_i = \frac{L_i}{L}$  y  $s = n_i s_i$  y a orden lineal en  $h_{ij}$ , nos conduce a:

$$\ddot{s}_i \simeq \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij} s_j \quad (3.29)$$

que corresponde a la ecuación geodésica en términos de distancias propias en lugar de distancias coordenadas. Esto se puede explicar por medio del principio de funcionamiento de detectores interferométricos, donde dos espejos como masas de prueba, entre los cuales se refleja un haz de luz, la distancia se determina por el tiempo del recorrido del haz, tal que la GW afecta el camino óptico y esto implica que la GW se puede detectar midiendo el cambio en el tiempo ( $\Delta t$ ).

### Marco propio del detector

En el marco del laboratorio se espera que las masas de prueba que son libres de moverse, se puedan desplazar debido a una GW con respecto a el origen de coordenadas. Los efectos generados por las GW en este marco pueden describirse en términos de fuerzas newtonianas (gravedad newtoniana, fuerzas de Coriolis, fuerzas centrífugas, etc.).

Las GWs han de competir con muchos otros efectos del tipo, fuerzas gravitacionales estáticas, Coriolis, etc., que son de mayor orden de magnitud, pero las GWs pueden tener altas frecuencias comparadas con la variación de los otros efectos, posibilitando la detección de las GWs.

De aquí asumimos que las únicas contribuciones importantes en el tensor de Riemann, para el rango de frecuencias, son debidas a GWs, y por lo tanto, la ecuación de separación geodésica en el marco propio del detector se escribe como:

$$\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT} \xi^j \quad (3.30)$$

Esta ecuación establece que el efecto de la GW sobre una partícula puntual de masa  $m$ , en el marco del detector, puede describirse en términos de una fuerza newtoniana como:

$$F_i = \frac{m}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT} \xi^j \quad (3.31)$$

esta ecuación sólo es válida a muy pequeñas escalas comparadas con la longitud de onda reducida.

### Comportamiento de un conjunto de masas en el marco del detector

Analicemos un conjunto de masas de prueba en la configuración de un anillo en el marco del detector. Consideremos el anillo concéntrico con el origen y que las masas esáan inicialmente en reposo antes de la llegada de unas GW. El radio del anillo se describe por el término  $\xi^i \xi_i$ , y por simplicidad se escoge una onda propagándose en la dirección del eje  $z$  y el anillo en el plano  $(x, y)$ . De esto se infiere que:

- $h_{ij}^{TT} = 0$  si  $i$  o  $j = 3$
- las partículas se mantienen en el plano, es decir,  $\ddot{z} \sim h_{zj}^{TT} = 0$ , esto de la ecuación (3.30)
- La GW desplazará a las partículas transversalmente con respecto a la dirección de su propagación y de acuerdo con (3.31).

Si definimos a  $(\delta x, \delta y)$  como los desplazamientos inducidos por la GW con relación a la posición de equilibrio  $(x_0, y_0)$ , se encuentra que la respuesta ante una GW con modo de polarización "plus" es:

$$\delta x = \frac{h_+}{2} x_0 \sin(\omega t), \quad \delta y = \frac{h_+}{2} y_0 \sin(\omega t)$$

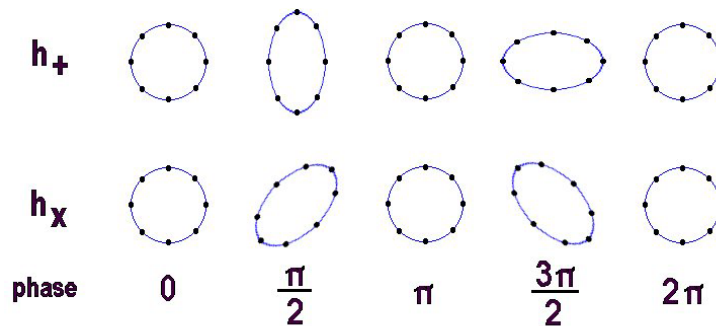
de manera similar, para una GW con modo de polarización "cross":

$$\delta x = \frac{h_\times}{2} y_0 \sin(\omega t), \quad \delta y = -\frac{h_\times}{2} x_0 \sin(\omega t)$$

Entonces:

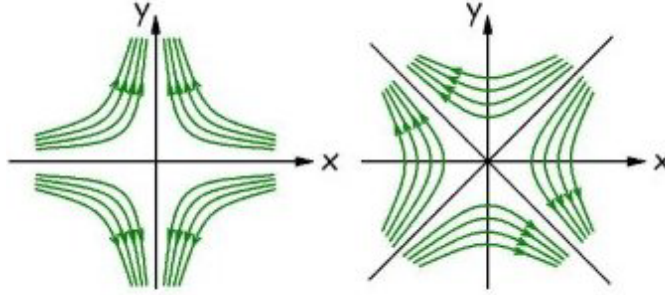
$$\frac{\Delta L}{L} \sim h \tag{3.32}$$

Gráficamente, la deformación resultante se puede ver en la figura (3.1).



**Figura 3.1:** Comportamiento de un conjunto de masas de prueba en configuración de anillo, ante una GW, en el plano transversal a la propagación de la onda con modos de polarización  $+$  y  $\times$ . Tomada de [6]

Una representación de líneas de fuerza en el plano  $(x, y)$  y que muestra la razón por la cual las amplitudes de polarización adquieren dichos nombres se puede apreciar en la figura(3.2).



**Figura 3.2:** Líneas de fuerza correspondientes a los modos de polarización  $+$  y  $\times$ . Tomada de [6]

### 3.3. Generación de GWs

En esta sección se ilustra el procedimiento para calcular la señal  $h_{\mu\nu}$  emitida por fuentes astrofísicas que evolucionan con el tiempo. Esto para entender como las amplitudes  $h_+$  y  $h_\times$  dependen de los parámetros físicos de la fuente, como: la masa, momento angular, ect.

De lo anterior, se resuelve las EFE de la teoría linealizada:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}(t, x^i) = -KT_{\mu\nu}(t, x^i), \quad \text{con} \quad K = \frac{16\pi G}{c^4},$$

para todas las regiones del espaciotiempo, incluido el exterior; esto implica que el análisis no lo podemos hacer desde el gauge TT ya que sólo tiene validez en el exterior de la fuente.

Llevemos esta ecuación al espacio de frecuencias, para esto realizaremos una expansión de Fourier. Empecemos expandiendo los tensores  $T_{\mu\nu}(t, x^i)$  y  $\bar{h}_{\mu\nu}(t, x^i)$ :

$$T_{\mu\nu}(t, x^i) = \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mu\nu}(\omega, x^i) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x^i) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}_{\mu\nu}(\omega, x^i) e^{-i\omega t} d\omega$$

y como los operadores  $\int$  y  $\square$  conmutan, la ecuación de onda queda de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \square [\bar{h}_{\mu\nu}(\omega, x^i) e^{-i\omega t}] d\omega = -K \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mu\nu}(\omega, x^i) e^{-i\omega t} d\omega,$$

es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \bar{h}_{\mu\nu}(\omega, x^i) e^{-i\omega t} d\omega = -K \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mu\nu}(\omega, x^i) e^{-i\omega t} d\omega,$$

ecuación que se puede resolver para cada valor de frecuencia:

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \bar{h}_{\mu\nu}(\omega, x^i) = -KT_{\mu\nu}(\omega, x^i) \quad (3.33)$$

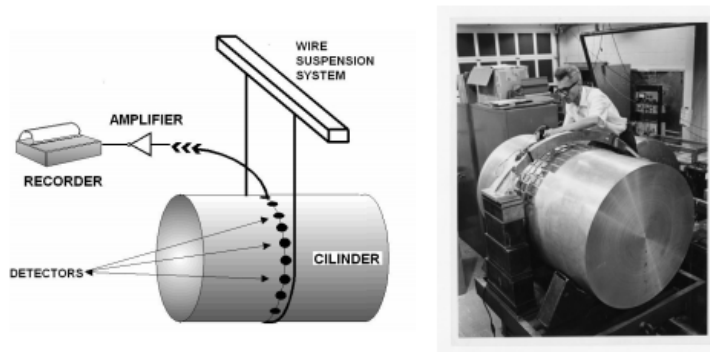
### 3.4. Principios de detección de GW

En esta sección queremos mostrar aquellos experimentos que se encuentran actualmente activos, así como aquellos que aún están en diseño y construcción que permiten correlacionar las GWs predichas por modelos teóricos. Las GWs estudiadas a la fecha, corresponde a fuentes "conocidas" que cubren 22 décadas de frecuencias, que van en el rango de  $\sim 10^{-18} Hz$  hasta  $\sim 10^4 Hz$  (sistemas binarios de estrellas de neutrones, formación de BHs, etc). Los detectores construidos en la superficie terrestre, pueden cubrir una banda que corresponde a altas frecuencias,  $1 Hz \leq f \leq 10^4 Hz$ , mientras que la banda de bajas frecuencias únicamente se puede acceder mediante detectores que estén en el exterior de la atmósfera terrestre, es decir, que satisfacen la condición de ser LIF.

Los detectores terrestres se dividen en dos tipos: Detectores de masas resonantes y detectores interferométricos.

#### 3.4.1. Detectores de masas resonantes

Un detector de masas resonantes consiste en un cilindro con un alto factor de calidad  $Q^1$ , normalmente de aluminio, con longitudes de  $\sim 3m$  y masa de  $M \sim 2000kg$ , con frecuencias longitudinales resonantes de  $\sim 1kHz$ . El primero en construir un detector de este tipo fue Joseph Weber en 1960, cuyos modos longitudinales de resonancia se encontraban a la frecuencia de  $\sim 1660Hz$  y permitía detectar variaciones en longitud del orden de  $10^{-15}$ .



**Figura 3.3:** Boceto del detector de cilindro de Joseph Weber. Imagen tomada de [10]

<sup>1</sup>El factor  $Q$  es alto en oscilaciones cuyas amortiguaciones son extremadamente débiles

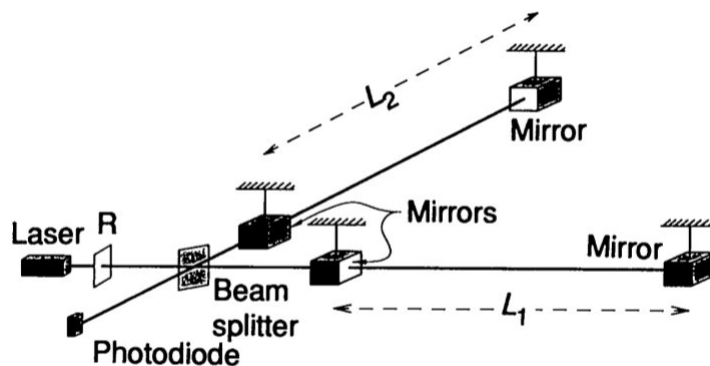
Mediante un transductor son medidas las oscilaciones mecánicas de la barra, generadas por una GW con una frecuencia especificada, éste convierte los desplazamientos en señales eléctricas las cuales son posteriormente amplificadas. Estos dispositivos tienen tres tipos de problemas a corregir, que son tres tipos de ruido con el que se encuentra la señal: ruido térmico, ruido eléctrico y ruido cuántico.

Actualmente se ha conseguido que los detectores ultracriogénicos de barras resonantes tengan sensibilidad hasta  $\sim 6 \times 10^{-21}m$ .

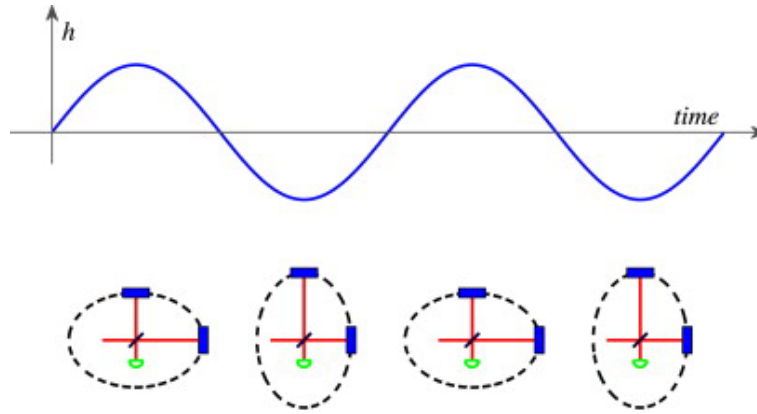
### 3.4.2. Detectores interferométricos

El principio de operación de estos experimentos consiste en usar un láser para medir los cambios de longitud en los brazos del interferómetro. Los primeros indicios de detección de GWs por este medio, se platearon en 1960.

Para este montaje se tiene un haz de láser que se divide en dos componentes una vez pasa por el *beam splitter*, cada componente ingresa en una región de alto vacío, en la que se dan múltiples reflexiones entre dos espejos masivos dispuestos en una configuración conocida como cavidad *Fabry-Perot*. La señal generada es recombinada y se analizan las interferencias que se generaron por diferencias de camino óptico. Con el paso de una GW se puede hacer que la longitud de los brazos del interferómetro oscile en el tiempo, esto se reproduce en el patrón de interferencia (3.5)



**Figura 3.4:** Representación de un interferómetro láser usado en detección de GWs. Imagen tomada de [5]



**Figura 3.5:** Representación del observable de la respuesta de un interferómetro ante la interacción con una GW con polarización “plus”. Para más detalles ver [20]

Debido a que los modelos astrofísicos estudiados predicen señales de  $h \leq 10^{-21}$ , y con las técnicas actuales que permiten sensibilidad del orden de  $\Delta L \sim 10^{-16} \text{cm}$ , un detector interferométrico debe tener brazos con longitud  $\sim (1 - 10) \text{km}$ . Al igual que los detectores de masas resonantes, los detectores interferométricos también tienen algunos tipos de ruidos que deben tenerse en cuenta a la hora de identificar la señal real. Algunas fuentes de ruidos para este tipo de detector son: ruido sísmico, ruido térmico, efectos cuánticos y ruidos asociados a gradientes gravitacionales newtonianos.

En la actualidad, los mayores proyectos en detectores interferométricos terrestres de GWs son [27]:

- LIGO - *Laser Interferometer Gravitational wave Observatory*, que cuenta con tres sistemas de operación: un interferómetro de  $4 \text{km}$  en Livingston (Louisiana, USA), y un par de interferómetros ( $4 \text{km}, 2 \text{km}$ ) en Hanford (Washington, USA).
- VIRGO, un interferómetro de  $3 \text{km}$ , ubicado en las cercanías de Pisa, Italia. Operado en cooperación italo-francesa por la agencia EGO (*European Gravitational Observatory*).
- GEO600, interferómetro de  $600 \text{m}$ , ubicado en las cercanías de Hannover, Alemania. Construido en cooperación entre Alemania e Inglaterra.
- TAMA300, un interferómetro con  $300 \text{m}$  de longitud, que opera cerca de Tokio, Japón.

La separación de estos interferómetros se aprovecha para la correlación de datos usando técnicas de triangulación y procesamiento de señales.



**Figura 3.6:** Interferómetro VIRGO, Pisa, Italia [3]

para el uso de observación en bajas frecuencias, se están diseñando lo que se denomina detectores de tercera generación. Con estos se espera poder explorar, además, la radiación gravitacional generada en la fase inicial del Universo. Los principales proyectos en esta área son:

- ET - *Einstein Telescope* liderado por EGO.
- LISA - *Laser Interferometer Space Antenna*, que es un proyecto entre las agencias NASA y ESA, con una sensibilidad óptima en el rango de  $(0, 1 - 100)mHz$  [1]
- DECIGO - *Deci-hertz Interferometer Gravitational wave Observatory* y *Ultimate-DECIGO*, liderado por la agencia espacial japonesa y con una sensibilidad en  $(0, 1 - 100)Hz$ .
- BBO - *Big Bang Observer* Propuesto como complemento del proyecto LISA, es un proyecto de la NASA. Tiene una banda de operación muy similar a la de DECIGO [11].

### 3.4.3. Funciones del detector

La salida de cualquiera de los detectores antes mencionados, es una serie temporal, y como se tiene una descripción tensorial de las GWs, se debe entender cómo hacer tal transformación.

Propongamos un detector lineal, el ruido y las GWs se combinan en este, entonces:

$$h(t) = D^{ij}h_{ij}(t).$$

En esta ecuación se omitió la dependencia espacial en la señal y también el superíndice TT. El elemento  $D^{ij}$ , al que se denomina *el tensor del detector*, es un tensor de componentes constantes y que depende de la geometría del detector. Sea  $n(t)$  el ruido del detector, el cuál

es considerado estacionario (ruido blanco), entonces las diferentes componentes de Fourier del ruido son no correlacionadas y se puede escribir la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\langle \tilde{n}^*(f)\tilde{n}(f') \rangle = \frac{1}{2}S_h(f)\delta(f - f')$$

donde la función  $S_h(f)$  con unidades de  $\text{Hz}^{-1}$  es la densidad espectral de ruido. Para ruidos estacionarios se puede asumir que  $\langle n(t) \rangle = 0$ , que conlleva a:

$$\langle n^2(t) \rangle = \int_0^\infty S_h(f)df.$$

De igual manera, el ruido de un detector se puede caracterizar por  $\sqrt{S_h(f)}$  que corresponde a la Amplitud espectral (*Spectral strain sensitivity*), con dimensiones  $\text{Hz}^{-1/2}$ . Algunas gráficas que muestran la sensibilidad de los detectores, son una representación de esta función y establecen el límite de amplitudes por encima de la cual son sensibles estos experimentos.

### Sensitividad angular

Una GW propagándose en dirección  $\hat{\mathbf{n}}$  puede escribirse como una combinación lineal de ondas planas. Luego, la contribución de las GWs a la salida del detector se puede escribir como:

$$h(t) = D^{ij}h_{ij}(t) = \sum_{A=+,\times} D^{ij}e_{ij}^A(\hat{\mathbf{n}})h_A(t) \quad (3.34)$$

donde  $e_{ij}^A$  son los tensores de polarización. Las funciones que dependen de la geometría del detector y de la dirección de la propagación de la onda se denomina *funciones patrón del detector*, obtenidas de:

$$F^A(\hat{\mathbf{n}}) = D^{ij}e_{ij}^A(\hat{\mathbf{n}}) \quad (3.35)$$

En términos de estas funciones se puede escribir la señal como:

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{A=+,\times} F_A(\hat{\mathbf{n}})h^A \\ &= F_+(\theta, \varphi)h_+(t) + F_\times(\theta, \varphi)h_\times(t) \end{aligned} \quad (3.36)$$

y para interferómetros:

$$\begin{aligned} F_+(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)\cos 2\varphi \\ F_\times(\theta, \varphi) &= \cos\theta \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Los detectores de GWs tienen una sensibilidad de casi  $4\pi$  *steradian*. Esto quiere decir que cualquier fuente, incluso, estando por debajo del horizonte terrestre, puede detectarse sin requerir procedimientos de localización. Para esto es necesario usar técnicas de triangulación

ya que un solo detector ni puede hacerlo por sí solo, a menos de que realice observaciones de fuentes de variación continua durante un gran periodo de tiempo.

En el caso de fuentes de GWs que emiten durante intervalos de tiempo pequeños, como es el caso de los burst de GWs generados en GRBs-engines, es necesario definir el factor de eficiencia angular del detector. Esta cantidad está dada en términos del promedio sobre el rango angular  $\psi \rightarrow (0, 2\pi)$ , asociado a rotaciones en el plano transversal de las funciones patrón [15]:

$$F = \sqrt{\langle F_+^2 \rangle + \langle F_\times^2 \rangle} = \sqrt{2 \langle F_+^2 \rangle}, \quad \text{puesto que } \langle F_+^2 \rangle = \langle F_\times^2 \rangle = 1/5 \quad (3.37)$$

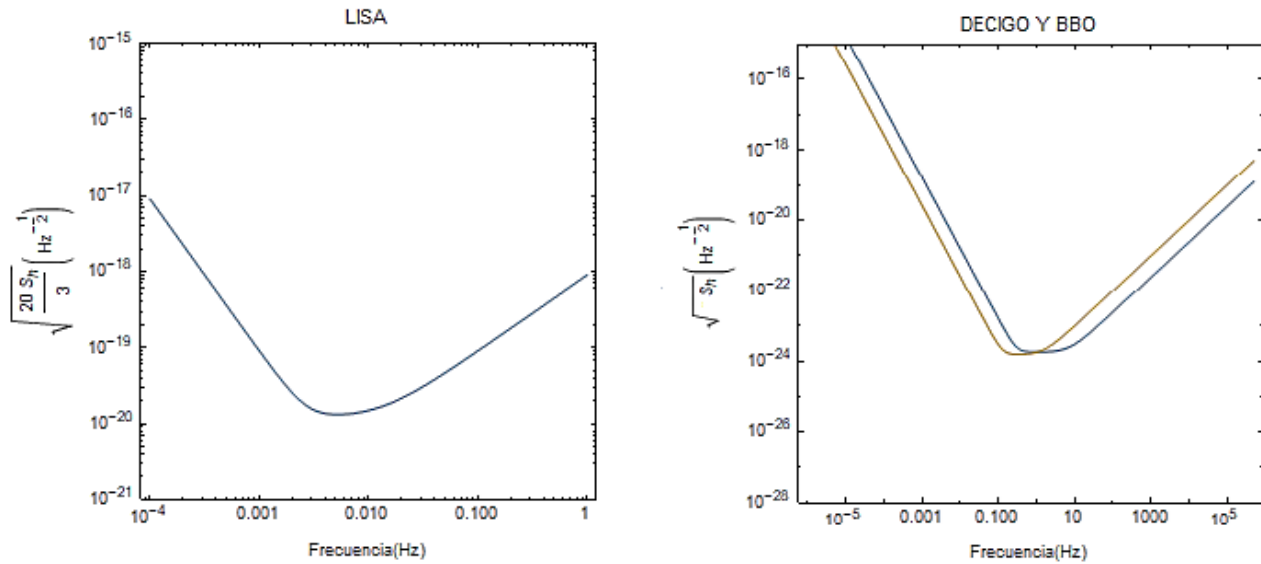
y para interferómetros terrestres,  $F = \sqrt{2/5}$ , que representa una eficiencia angular del 63%, mientras que los detectores de barras resonantes y el interferómetro LISA, la eficiencia es menor,  $F = 2\sqrt{15}$  y  $F = \sqrt{3/10}$ , que son un 52% y 54.7% respectivamente. Dado lo anterior, se han establecido definiciones en la literatura de GWs, aquí enunciaremos algunas a continuación [12]:

- $h_{rms}(f) = \sqrt{f S_h(f)}$ : Para fluctuaciones rms en el ruido a una frecuencia  $f$  y en la banda  $\Delta f = f$ . Permite el contraste de predicciones con  $h(t)$ . Este término es adimensional, igual que  $h(t)$ .
- $h_n(f) = \sqrt{5} h_{rms}$ : Esta función es útil para contrastar la señal  $h(t)$ . Es el ruido adimensional rms, escalado con el factor de eficiencia angular para detectores interferómetros terrestres de GWs.
- $h_{rss}$ : *root-sum-square amplitude*: Esta cantidad tiene unidades de  $H z^{-1/2}$ , las mismas de la función  $\sqrt{S_h(f)}$ . Matemáticamente es de la forma:

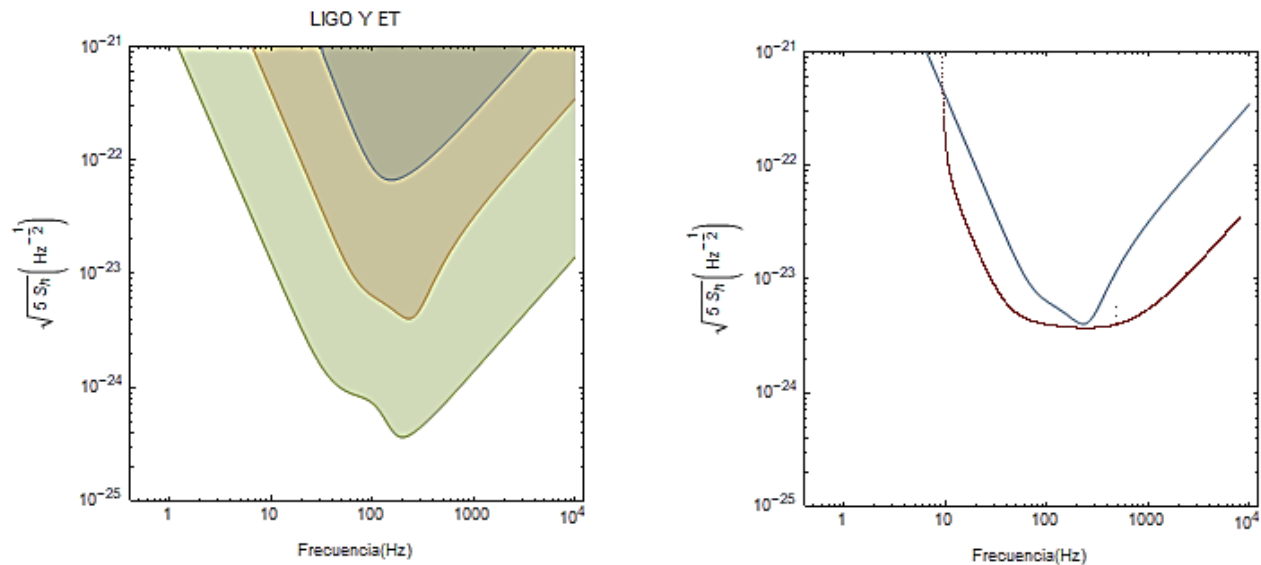
$$h_{rss} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} dt h^2(t)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} df |\tilde{h}(f)|^2} \quad (3.38)$$

Nosotros hemos optado por calcular la señal  $h_{rss}(f)$  para nuestro diseño de disco de acreción. En los capítulos 4 y 5 se mostrará el contraste de las predicciones con las curvas  $\sqrt{S_h(f)}$  de los detectores, y tendremos en cuenta el factor  $\sqrt{5}$  cuando hagamos los análisis de detectabilidad para bursts de GWs por interferómetros terrestres. Por esta razón, para referirnos a las curvas de detección lo haremos con  $\sqrt{S_h(f)}$  vs  $f$ .

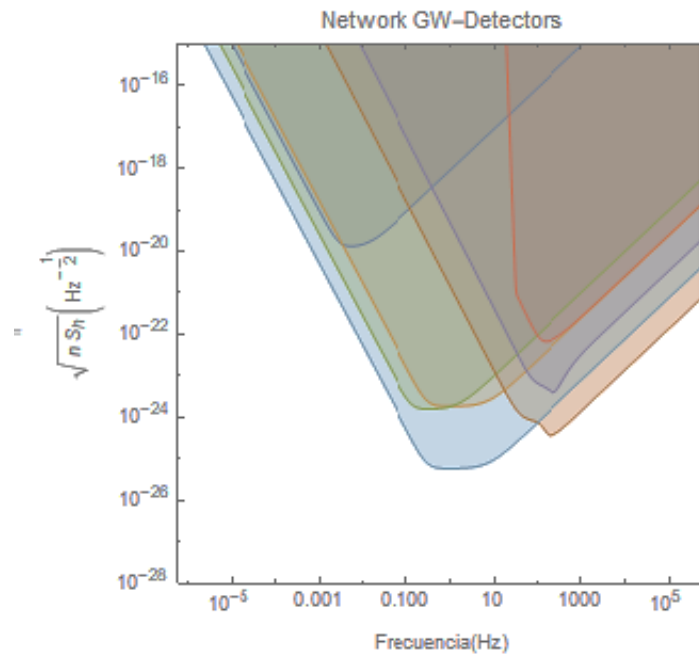
Veamos las principales curvas de detección de los detectores interferométricos. Las funciones a partir de las cuales se obtuvieron las gráficas fueron tomadas de [21], [23] y [28].



**Figura 3.7:** *Izquierda:* curva  $\sqrt{(20/3)S_h(f)}$  de LISA escalada con el factor de eficiencia para GWs transientes. *Derecha:* curva  $\sqrt{S_h(f)}$  de DECIGO y BBO.



**Figura 3.8:** Curvas  $\sqrt{S_h(f)}$  de: *izquierda* Initial/Advanced de os detectores LIGO y de ET. *Derecha* adicional se muestra la gráfica color rojo que se realizó empleando datos oficiales de la página de LIGO [2]



**Figura 3.9:** Curvas de sensibilidad de los principales detectores interferométricos de GWs. Las zonas sombreadas representan la región en la que cada interferómetro tiene oportunidad de detección.

## 4 Construcción del modelo: GWs emitidas por objetos rígidos.

En este capítulo se establecen las ecuaciones con las cuales se calculará la señal  $h_{rss}$  para discos de acreción alrededor de BHs y que precesan debido al efecto Bardeen Petterson. Debido a la relación de las masas del disco y del BH, se puede modelar como un disco rígido con despreciable auto-gravitación. Adicional a esto, debido a que las velocidades en el interior de estos sistemas no son relativistas, nuestros análisis los haremos dentro del formalismo cuadrupolar. Así, nuestro *modelo* tendrá la siguiente estructura metodológica:

1. Estudio de la dinámica fundamental de un cuerpo rígido bajo: rotación pura respecto a un eje principal de inercia y rotación más precesión de un objeto con simetría axial.
2. Para los casos mencionados anterior se hace identificación del tensor momento de cuadrupolo en términos del tensor de inercia.
3. Cálculo de  $h_{ij}^{TT}$  como función de la velocidad angular, la distancia a la fuente y los momentos de inercia principales.
4. Implementación de la solución de Popham para *Gamma-ray bursts* (GRBs). En este caso,  $h_{ij}^{TT}$  se escribirá en términos de parámetros que se encuentran en la literatura, tales como:  $M_{BH}$ ,  $\dot{M}$ ,  $\beta_5^1$  y  $a_*$ .
5. Calculo de la señal  $h_{rss}$  y contraste con las curvas de detección.

Primero recordemos que la onda gravitacional en el TT gauge se puede escribir en términos del tensor momento cuadrupolo:

$$h_{ij}^{TT}(t, r) = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl} \ddot{M}^{kl}(t - r/c) \quad (4.1)$$

donde

$$M^{kj}(t) = \frac{1}{c^2} \int_V T^{00} x^j x^k d^3x$$

Supongamos una señal propagándose en dirección del eje  $z$ , cuyo origen del sistema de referencia se ubica en la fuente. Si aplicamos la operación de proyección (4.2):

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \equiv P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl} \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>Parámetro de viscosidad

donde

$$P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ij} - n_1 n_j$$

al plano transverso  $(x, y)$  obtenemos:

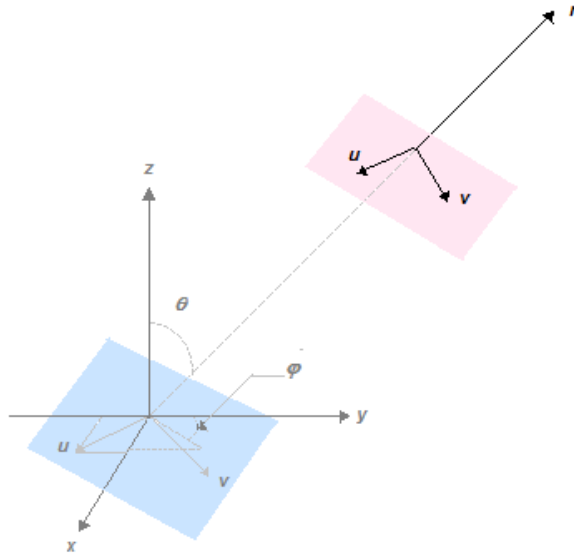
$$h_{ij}^{TT}(t, r) = \begin{bmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij} = \frac{2G}{rc^4} \begin{bmatrix} \frac{\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}}{2} & \ddot{M}_{12} & 0 \\ \ddot{M}_{21} & -\frac{\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij} \quad (4.3)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} h_+(t, r) &= \frac{G}{rc^4} (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})_{t_{ret}} \\ h_\times(t, r) &= \frac{2G}{rc^4} (\ddot{M}_{12})_{t_{ret}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

el subíndice  $t_{ret}$  es para especificar que las expresiones son evaluadas en el tiempo retardado  $t - r/c$ .

Estas expresiones se pueden generalizar aún más si dejamos que la dirección de propagación de la GW sea arbitraria. Elegimos un nuevo sistema de dos rotaciones del sistema original: una rotación  $\theta$  alrededor del eje  $x$ , seguida de una rotación  $\varphi$  alrededor del eje  $z$ . Para esto suponemos un nuevo vector director  $\hat{\mathbf{n}}$  que hace un ángulo  $\theta$  con el eje  $z$  y que el plano transverso lo definen los vectores ortonormales  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\hat{\mathbf{v}}$  que satisfacen la condición de quiralidad  $\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{n}}$  (ver figura 4.1).



**Figura 4.1:** Sistema coordinado  $(x, y, z)$  con el origen en la fuente de las GWs. Para esta representación, la GW se propaga en la dirección del vector  $\hat{\mathbf{n}}$ , que está determinado por los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$ .

Al definir las matrices de rotación, se obtienen las amplitudes  $h_+$  y  $h_\times$  que determinan en su totalidad a una GW propagándose en la dirección dada por los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}
 h_+(t, \theta, \varphi) &= \frac{G}{rc^4} \{ \ddot{M}_{11}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\theta) + \ddot{M}_{22}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\cos^2\theta) \\
 &\quad - \ddot{M}_{33}\sin^2\theta - \ddot{M}_{12}\sin 2\varphi(1 + \cos^2\theta) + \ddot{M}_{13}\sin\varphi\sin 2\theta \\
 &\quad + \ddot{M}_{23}\cos\varphi\sin 2\theta \} \\
 h_\times(t, \theta, \varphi) &= \frac{G}{rc^4} \{ (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})\sin 2\varphi\cos\theta + 2\ddot{M}_{12}\cos 2\varphi\cos\theta \\
 &\quad - 2\ddot{M}_{13}\cos\varphi\sin\theta + 2\ddot{M}_{23}\sin\varphi\sin\theta \}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

## 4.1. GWs emitidas por la rotación de cuerpos rígidos

El tensor de inercia caracteriza, principalmente, la cinemática de un cuerpo rígido:

$$I^{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x}) [r^2 \delta^{ij} - x^i x^j] \tag{4.6}$$

El tensor de inercia es simétrico, tiene entradas reales y por lo tanto, es hermítico. Esto garantiza la existencia de un marco ortogonal fijo al objeto en el que se cumple que  $I^{ij}$  es diagonal. Se denominan ejes principales de inercia a los correspondientes ejes de este marco, y sus autovalores ( $I_1, I_2, I_3$ ) son los denominados momentos principales de inercia, exhibidos en la diagonal principal.

Nos referimos a este marco como el **BF** (*Body frame*). Luego, si  $x'_i$  son las coordenadas en el BF, los momentos principales de inercia quedan de la forma:

$$I_1 \equiv I_{11} = \int d^3x' \rho(\vec{x}') [r^2 - x_1'^2] = \int d^3x' \rho(\vec{x}') [x_2'^2 + x_3'^2]$$

dado que  $r^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$ . De igual manera se tiene que:

$$I_2 \equiv I_{22} = \int d^3x' \rho(\vec{x}') [x_1'^2 + x_3'^2]$$

$$I_3 \equiv I_{33} = \int d^3x' \rho(\vec{x}') [x_1'^2 + x_2'^2]$$

De estas expresiones se puede ver que:

$$I_1 + I_2 = I_3 + 2 \int d^3x' \rho(\vec{x}') x_3'^2 \Rightarrow I_1 + I_2 \geq I_3$$

de aquí es claro que cada momento de inercia debe ser menor o igual que la suma de los otros dos. Además, si un cuerpo rígido rota con velocidad angular  $\vec{\omega}$ , su momento angular estará dado por  $J_i = I_{ij}\omega_j$  cuyas componentes en el BF son:

$$J'_1 = I_1\omega'_1 \quad J'_2 = I_2\omega'_2 \quad J'_3 = I_3\omega'_3$$

La dirección de  $\vec{\omega}$  difiere de la de  $\vec{J}$  a no ser que:  $I_1 = I_2 = I_3$ ; es decir, cuerpos esféricos, o, para el caso de tener rotación sobre un eje principal, por ejemplo,  $x'_3$ , donde  $\omega'_1 = \omega'_2 = 0$ .

## 4.2. GWs generadas en sistemas axialmente simétricos que precesan

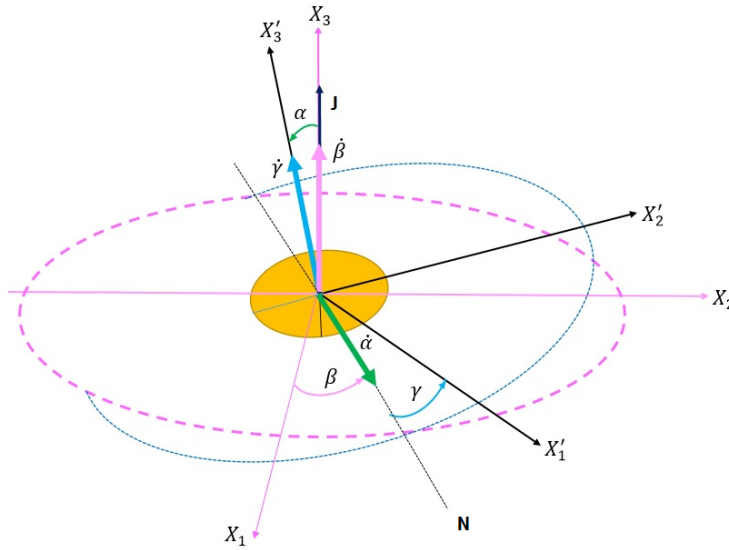
En general, cuando la dirección del momento angular total concuerda con un eje principal de inercia, se puede considerar el movimiento del cuerpo rígido como la combinación de *rotación alrededor de un eje principal* y movimiento de precesión de dicho eje con respecto a la dirección del momento angular. Veremos que sistemas en libre precesión pueden producir radiación gravitacional, lo que significa una pérdida de energía continua.

En esta sección se analizarán las ecuaciones generales que nos permiten calcular las GWs generadas por precesión libre, y luego, las adaptaremos para el caso en que la frecuencia angular de precesión se determina por el efecto BP.

Sea  $(x_1, x_2, x_3)$  el sistema de referencia fijo con respecto al cual, nuestro cuerpo rígido es aislado y su momento angular total  $\vec{J}$  es conservado. Elegiremos a  $x_3$  como el eje en cuya dirección se encuentra  $\vec{J}$ . Ahora bien, introduzcamos el BF, solidario al cuerpo rotante y cuyos ejes coinciden con los ejes principales de inercia  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ . La relación entre estos sistemas está dada por los ángulos de Euler  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Para pasar la BF del marco inercial fijo se deben hacer tres rotaciones sucesivas: una alrededor de  $x_3$  de valor  $\beta$ , seguida de una rotación alrededor de la línea de nodos en un ángulo  $\alpha$  y por último, una rotación alrededor de  $x'_3$  en un ángulo  $\gamma$  (ver figura 4.2) La matriz que realiza esta transformación la podemos escribir de la forma:

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$



**Figura 4.2:** El segmento indicado con la letra N representa la línea nodal donde los planos se cortan.

Note que en el marco fijo,  $\vec{J} = (0, 0, J)$ , por lo que podemos escribir sus componentes en el BF empleando la matriz  $R_{ij}$ :  $J'_i = R_{ij}J_j = R_{i3}J$ , obteniendo:

$$\begin{aligned} J'_1 &= R_{13}J = J \sin \gamma \sin \alpha \\ J'_2 &= R_{23}J = J \cos \gamma \sin \alpha \\ J'_3 &= R_{33}J = J \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.8)$$

También podemos escribir las  $J'_i$  en términos de  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  y  $\dot{\gamma}$  al definir los vectores velocidad angular asociados a los ángulos de Euler, representados en la figura (4.2):

- $\dot{\alpha}$  está asociada a las rotaciones en el plano definido por  $x_3$  y  $x'_3$ . Las componentes de  $\dot{\alpha}$  en el plano BF son:  $(\dot{\alpha} \cos \gamma, -\dot{\alpha} \sin \gamma, 0)$ .
- $\dot{\beta}$  es asociada a rotaciones en el plano  $(x_1, x_2)$  y dirigida según  $x_3$ . Sus componentes en el BF son:  $(\dot{\beta} \sin \gamma \sin \alpha, \dot{\beta} \cos \gamma \sin \alpha, \dot{\beta} \cos \alpha)$ .
- $\dot{\gamma}$  está asociada a las rotaciones en el plano  $(x'_1, x'_2)$  y dirigida según  $x'_3$ . Sus componentes en el BF son:  $(0, 0, \dot{\gamma})$ .

Ahora, usando estos vectores podemos reescribir el vector velocidad angular total del cuerpo rígido, con componentes en el BF dadas por:

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \dot{\alpha} \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \sin \alpha \\ \omega'_2 &= -\dot{\alpha} \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \sin \alpha \\ \omega'_3 &= \dot{\beta} \cos \alpha + \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (4.9)$$

y como el tensor de inercia en este marco es diagonal, se puede escribir a las componentes del momneto angular (4.8) en este sistema como:

$$\begin{aligned} J'_1 &= I_1(\dot{\alpha}\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma\sin\alpha) \\ J'_2 &= I_2(-\dot{\alpha}\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma\sin\alpha) \\ J'_3 &= I_3(\dot{\beta}\cos\alpha + \dot{\gamma}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

esto construye un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden con parámetros  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  donde  $J, I_1, I_2$  e  $I_3$  son constantes. Para cuerpos con simetría axial<sup>2</sup> este sistema tiene una solución simple, donde  $I_1 = I_2$ . Esta solución es:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= 0 \Rightarrow \alpha = cte. \\ \dot{\beta} &= \frac{J}{I_1} = cte; \text{ si } \alpha \neq 0 \\ \dot{\gamma} &= \dot{\beta}\cos\alpha \left( \frac{I_1 - I_3}{I_3} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

De aquí se concluye que para sistemas con simetría axial y en ausencia de torques, el ángulo de precesión permanece constante. La evolución de los ángulos  $\beta$  y  $\gamma$  ocurre uniformemente. De lo anterior, definimos *la velocidad angular de precesión* como la componente en dirección del momento angular ( $\Omega_{prec} \equiv \dot{\beta}$ ); y por conveniencia se establece una relación para esta cantidad en términos de  $\omega'_3$ , ya que en discos de acreción está relacionada con la velocidad angular kepleriana. De (4.9) se llega a:

$$\omega'_3 = \dot{\gamma} + \dot{\beta}\cos\alpha = \dot{\beta}\cos\alpha \left( \frac{I_1 - I_3}{I_3} + 1 \right) = \dot{\beta}\cos\alpha \frac{I_1}{I_3} \quad (4.12)$$

donde hemos hecho uso de la ecuación (4.11). Así:

$$\dot{\beta} \equiv \Omega_{prec} = \frac{J}{I_1} = \frac{I_3}{I_1} \frac{\omega'_3}{\cos\alpha} \quad (4.13)$$

Cabe señalar que la velocidad angular de precesión dada en (4.13) se aplica al proceso de precesión libre de torques, el cual se da siempre que la dirección del momento angular del disco ( $\vec{J} = \vec{J}_d$ ), concuerde con el eje principal de inercia  $x'_3$ , siendo el ángulo entre ellos  $\alpha$ .

Con estos resultados y haciendo la transformación  $I_{ij} = (R^T I' R)_{ij}$ , es posible calcular la

---

<sup>2</sup>Esta es nuestra situación de interés, ya que los discos de acreción tienen esta simetría en el régimen estacionario. Por esta razón, de ahora en adelante nos referiremos al cuerpo rígido en estudio como el *disco de acreción*.

evolución del tensor de inercia en el marco fijo, obteniendo:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{2}(I_1 - I_3) \cos 2\beta \sin^2 \alpha + cte \\
I_{12} &= \frac{1}{2}(I_1 - I_3) \sin^2 \alpha \sin 2\beta \\
I_{13} &= -(I_1 - I_3) \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \\
I_{22} &= -\frac{1}{2}(I_1 - I_3) \sin^2 \alpha \cos 2\beta + cte \\
I_{23} &= (I_1 - I_3) \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \\
I_{33} &= I_1 \sin^2 \alpha + I_3 \cos^2 \alpha
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Ahora, usamos la relación entre el tensor de inercia y el momento de cuadrupolo  $M_{ij} = -I_{ij} + C_{ij}$ , y adicionamos las soluciones obtenidas para los ángulos de Euler, entonces:

$$\begin{aligned}
\ddot{M}_{11} &= 2(I_1 - I_3)\Omega_{prec}^2 \sin^2 \alpha \cos 2\Omega_{prec} t = -\ddot{M}_{22} \\
\ddot{M}_{12} &= 2(I_1 - I_3)\Omega_{prec}^2 \sin^2 \alpha \sin 2\Omega_{prec} t \\
\ddot{M}_{13} &= -(I_1 - I_3)\Omega_{prec}^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \Omega_{prec} t \\
\ddot{M}_{23} &= (I_1 - I_3)\Omega_{prec}^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \Omega_{prec} t \\
\ddot{M}_{33} &= 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Por lo tanto, hay emisión de GWs a dos frecuencias, que son:

$$\omega_{GW} = 2\Omega_{prec} \quad y \quad \omega_{GW} = \Omega_{prec} \tag{4.16}$$

Para las expresiones de las amplitudes, tomamos en caso de rotación pura, donde  $\theta$  es el ángulo de visión, y  $\varphi = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned}
h_+(t, r, \theta) &= \frac{G}{rc^4} [\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22} \cos^2 \theta + \ddot{M}_{23} \sin 2\theta] \\
h_\times &= \frac{2G}{rc^4} [\ddot{M}_{12} \cos \theta - \ddot{M}_{13} \sin \theta]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

y si incluimos el resultado (4.15), entonces:

$$\begin{aligned}
h_+ &= A_{+,1} \cos \Omega_{prec} t + A_{+,2} \cos 2\Omega_{prec} t \\
h_\times &= A_{\times,1} \sin \Omega_{prec} t + A_{\times,2} \sin 2\Omega_{prec} t
\end{aligned} \tag{4.18}$$

donde:

$$\begin{aligned}
A_{+,1} &= h_0 \sin 2\alpha \sin \theta \cos \theta \\
A_{+,2} &= 2h_0 \sin^2 \alpha [1 + \cos^2 \theta] \\
A_{\times,1} &= h_0 \sin 2\alpha \sin \theta \\
A_{\times,2} &= 4h_0 \sin^2 \alpha \cos \theta \\
h_0 &= -\frac{g}{c^4} \frac{(I_3 - I_1)\Omega_{prec}^2}{r}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

siendo  $r$  la distancia de la fuente al detector.

Otra expresión importante es:

$$L_{GW} = \frac{2G}{5c^5} (I_1 - I_3)^2 \Omega_{prec}^6 \sin^2 \alpha [16 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha] \quad (4.20)$$

que determina la potencia radiada por el sistema en ondas gravitacionales.

### 4.3. GWs emitidas por discos de acreción rígidamente dominados dinámicamente por el efecto Bardeen-Petterson

La ecuación dada en (3.38) junto con las ecuaciones (4.18), (4.19) y (4.20), conforman la base para el cómputo de las GWs generadas por sistemas rígidamente dominados dinámicamente por el efecto BP, y solo nos queda evaluar la ecuación que determina la frecuencia angular de precesión que está asociada a este observable, para así obtener una expresión para  $I_3 - I_1$ , en términos de parámetros conocidos.

Para hacer esto, primero recordemos que el momento angular de cada anillo en el disco con radio  $R$  y ancho  $dR$  está dado por:

$$dJ_d = 2\pi R^2 \Sigma(R) v_\phi(R) dR$$

ahora, como se sugiere en [13] y [22], escribimos un momento angular típico de disco por unidad de intervalo logarítmico como:

$$J_d(R) = \frac{dJ_d}{d(\ln R)} = 2\pi R^3 \Sigma(R) v_\phi(R) = 2\pi R^4 \Sigma(R) \Omega_k(R) \quad (4.21)$$

Es posible calcular el radio de Bardeen-Petterson, a partir de la ecuación anterior, como aquel en donde el momento angular típico del disco es igual al momento angular del BH:

$$J_d(R_{BP}) = J_{BH} = \frac{a_* GM_{BH}^2}{c} \quad (4.22)$$

Así, el radio de BP quedará especificado por los parámetros  $a_*$ ,  $M_{BH}$  y las funciones  $\Sigma$  y  $\Omega_k$  de las ecuaciones de la solución de Shakura o Popham, según corresponda.

Se propone que el radio interior del disco sea el dado por la órbita circular estable más interna (ISCO) del KBH, ver (2.7 y 2.8). La velocidad angular de precesión que está asociada al efecto

BP, corresponde a la velocidad angular de Lense-Thirring (2.11), evaluada en el radio  $R_{BP}$  [26], [22]

$$\Omega_{LT}(R_{BP}) = \frac{2GJ_{BH}}{c^2 R_{BP}^3} \equiv \Omega_{prec}^{LT} \quad (4.23)$$

El momento de inercia  $I_3$  se puede calcular empleando las coordenadas polares que se ilustraron en (2.3.1):

$$I_3 = \int_{R_{ms}}^{R_{BP}} dm R^2 = \int_{R_{ms}}^{R_{BP}} \rho(R) R^2 R dR \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-H/2}^{+H/2} dz \quad (4.24)$$

donde  $\phi$  es el ángulo azimutal medido respecto a  $x_1$ . Y dado que  $\rho = \frac{\Sigma}{H}$ , podemos escribir  $I_3$  como:

$$I_3 = 2\pi \int_{R_{ms}}^{R_{BP}} \Sigma(R) R^3 dR \quad (4.25)$$

De manera análoga se obtiene  $I_1$ :

$$I_1 = \pi \int_{R_{ms}}^{R_{BP}} \Sigma(R) R^3 dR \quad (4.26)$$

lo que nos lleva a que:

$$I_3 - I_1 = \pi \int_{R_{ms}}^{R_{BP}} \Sigma(R) R^3 dR \quad (4.27)$$

Evaluaremos por separado las GWs debidas al efecto BP, como tambien a las asociadas a precesión libre con:

$$\Omega_{prec}^{free}(R_{out}) = \frac{I_3 \omega_3'(R_{out})}{I_1 \cos\alpha} = 2 \frac{\Omega_k(R_{out})}{\cos\alpha} \quad (4.28)$$

ya que podrían estar presentes simultáneamente en los discos que precesan. En la ecuación (4.28),  $R_{out}$  representa el radio exterior del disco que precesa, y para discos donde  $M_{Mach} > 5$  se cumple que  $R_{out}$  coincide con  $R_{BP}$ .

## 5 Resultados del modelo

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos a partir del cómputo de las ecuaciones del capítulo 4 y la comparación de nuestro modelo con los trabajos realizados por Romero et al. [19] y Sun et al. [26].

### 5.1. Aplicación de la solución de Popham para discos delgados que se desarrollan en sistemas GRBs

Debido a que la radiación gravitacional que se emite de los discos asociados a GRBs en hipéracreción, son de tipo transientes (burst), y con una duración del mismo orden del GRB, es necesario una consideración adicional antes de entrar a analizar órdenes de magnitud. Para fuentes de este tipo el procedimiento estándar propone adaptar la señal  $h(t)$  mediante una gaussiana de la forma:

$$h(t) = h(t)_{prec} e^{-t^2/\tau^2} \quad (5.1)$$

donde  $\tau$  es el orden típico de duración del burst, que de acuerdo con [19],  $\tau \sim 10\sqrt{2}s$  y  $h(t)_{prec}$  es la señal que la obtuvimos en (3.36) que está en términos de las funciones patrón del detector:

$$h(t)_{prec} = F_+ h_+(t) + F_\times h_\times(t) \quad (5.2)$$

Como se mencionó anteriormente, nuestros resultados serán contrastados mediante la función  $h_{rss}$  definida por:

$$h_{rss}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)^2 dt \quad (5.3)$$

que, según las ecuaciones (5.1) y (5.3) en nuestro caso toman la forma:

$$h_{rss}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{prec}^2(t) e^{-2t^2/\tau^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (F_+^2 h_+^2 + F_\times^2 h_\times^2 + 2F_+ F_\times h_+ h_\times) e^{-2t^2/\tau^2} dt \quad (5.4)$$

y dada la eficiencia angular para eventos transientes, es necesario evaluar el promedio angular sobre las posibles orientaciones del detector. Luego, como:  $\langle F_+^2 \rangle = \langle F_\times^2 \rangle = \frac{1}{5}$ , y  $\langle F_+ F_\times \rangle = 0$  para interferómetros terrestres, tenemos:

$$\langle h_{rss} \rangle = \left\{ \frac{1}{5} \int_{-\infty}^{+\infty} (h_+^2 + h_\times^2) e^{-2t^2/\tau^2} dt \right\}^{1/2} \quad (5.5)$$

que denotaremos simplemente como  $h_{rss}$ . Usando (4.18) podemos escribir el valor de esta cantidad de manera extendida, obteniendo:

$$h_{rss} = \sqrt{\frac{\tau}{5}} \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/4} \left\{ A_{+,1}^2 + A_{+,2}^2 + A_{\times,1}^2 + A_{\times,2}^2 + (A_{+,1}^2 - A_{\times,1}^2) e^{-2\pi^2 f^2 \tau^2} + \right. \\ \left. (A_{+,2}^2 - A_{\times,2}^2) e^{-8\pi^2 f^2 \tau^2} + 2(A_{\times,1} A_{\times,2} + A_{+,1} A_{+,2}) e^{-\frac{1}{2}\pi^2 f^2 \tau^2} + \right. \\ \left. 2(A_{+,1} A_{+,2} - A_{\times,1} A_{\times,2}) e^{-\frac{9}{2}\pi^2 f^2 \tau^2} \right\}^{1/2} \quad (5.6)$$

donde  $f = \Omega_{prec}/2$ .

Ahora, vamos a evaluar órdenes de magnitud en las ecuaciones (4.23), (4.28) y (5.6). Para esto, se considerarán los valores observacionales estimados en los trabajos de Popham et al. [17], Romero et al. [19] y Sun et al. [26]:

$R_{out}$	$\sim (10^7 - 10^8)cm$	[17], [19]
$M_{BH}$	$\sim (2 - 10)M_{\odot}$	[17], [19], [26]
$\dot{M}$	$\sim (0, 1, 1, 10) \frac{M_{\odot}}{s}$	[17], [19], [26]
$r$	$\sim (1 - 100)M_{pc}$	[19], [26]
$a_*$	$\sim 0, 1 - 0, 95$	[17], [19], [26]
$\theta$	$= 45^\circ$	[19]
$\alpha$	$\sim 10^\circ - 20^\circ$	[19], [26]
$\beta_5$	$\sim 10^{-5} - 10^{-3}$	[16]

(5.7)

### 5.1.1. Estimación de la GW para el disco de Romero et al. [19].

Para el artículo en consideración, se asume que el disco no sufre deformaciones y, aunque era enfriado por emisión de neutrinos, la geometría corresponde a la de un disco más grueso ( $M_{Mach} \leq 5$ ). Las ecuaciones de donde obtuvieron las funciones  $\Sigma(R)$ ,  $H(R)$  y  $\rho(R)$ , fueron extraídas de un modelo previo realizado en 2006 [18] para analizar el cambio temporal en las curvas de luz de GRBs. Además, propusieron que las perturbaciones de las órbitas keplerianas en la métrica de Kerr estaba relacionado con el origen de la precesión. Sin embargo, la frecuencia de precesión libre es mayor que la frecuencia de precesión asociada a este proceso

$R_g(m) = 295427cm$	Radio gravitacional
$R_{ms}(m, a) = 1,47 \times 10^6cm \sim 14km$	Radio interno del disco
$R_{out} \leq 1 \times 10^8cm = 1000km$	Este valor no es calculado en el artículo
$R_{BP} = 1,87 \times 10^7cm = 187km$	Radio de Bardeen Petterson
$I_{rel} = I_3 - I_1 \sim (2,65 \times 10^{20}R^{7/2} - 1,02 \times 10^{42}gcm^2)$	Momento de inercia relativo
$M_{BH} = 2M_{\odot}$	Masa del BH
$J_{BH} \sim 71,06 \times 10^{49}gcm^2/s$	Momento angular del BH
$M_d/M_{BH} = 0,42$	Justifica ausencia de autogravitación
$P_{BP} = 1,8s$	Periodo de precesión asociado a BP
$f_{BP} = 0,55Hz$	Frecuencia de precesión asociada a BP

para el rango de radios propuestos, por lo tanto, la señal  $h_{rss}$  ha de tener contribucion más significativa por precesión libre.

Con la idea de comparar nuestro modelo con los resultados que se obtuvieron en este trabajo, seguiremos con la idea de que este tipo de discos configuran la geometría de un disco delgado, y usaremos las ecuaciones de Popham para determinar cada una de las predicciones.

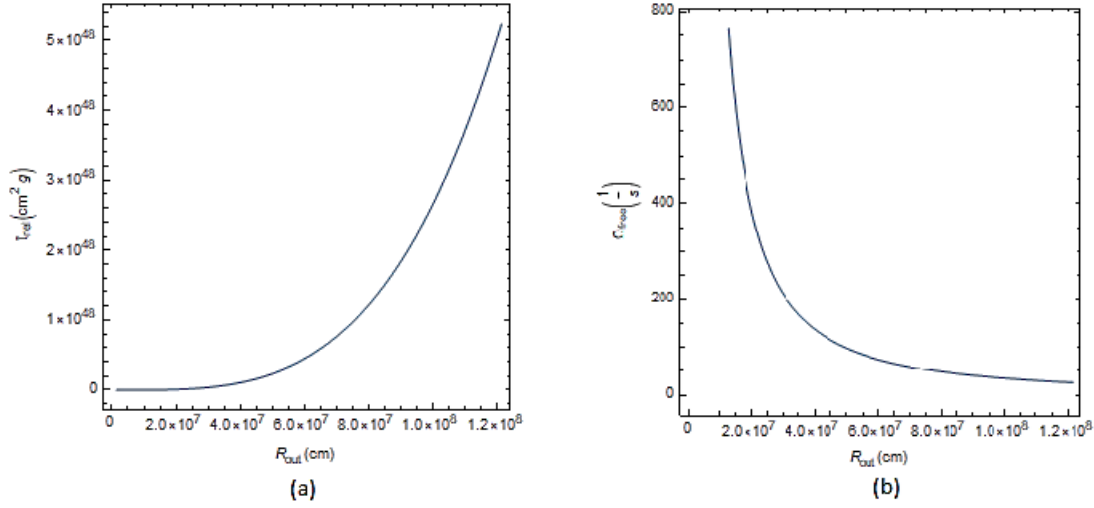
Los parámetros observacionales en Romero et al. [19] tenían valores de:  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\alpha_{visc} = 0,1$ ,  $\tau = 10\sqrt{2}s$ ,  $a_* = a = 0,1$ ,  $\dot{M} = \mu M_{\odot}s^{-1} = 1M_{\odot}s^{-1}$  y  $M_{BH} = m M_{\odot} = 3M_{\odot}$ .

Para nuestro modelo cambiamos algunos de estos valores, como el de la viscosidad  $\alpha_{visc}$  por  $\beta_{5}$  y la masa del BH por  $2M_{\odot}$ , con estos valores y las ecuaciones de nuestro modelo obtenemos:

La frecuencia angular de precesión libre depende del radio exterior de la forma:

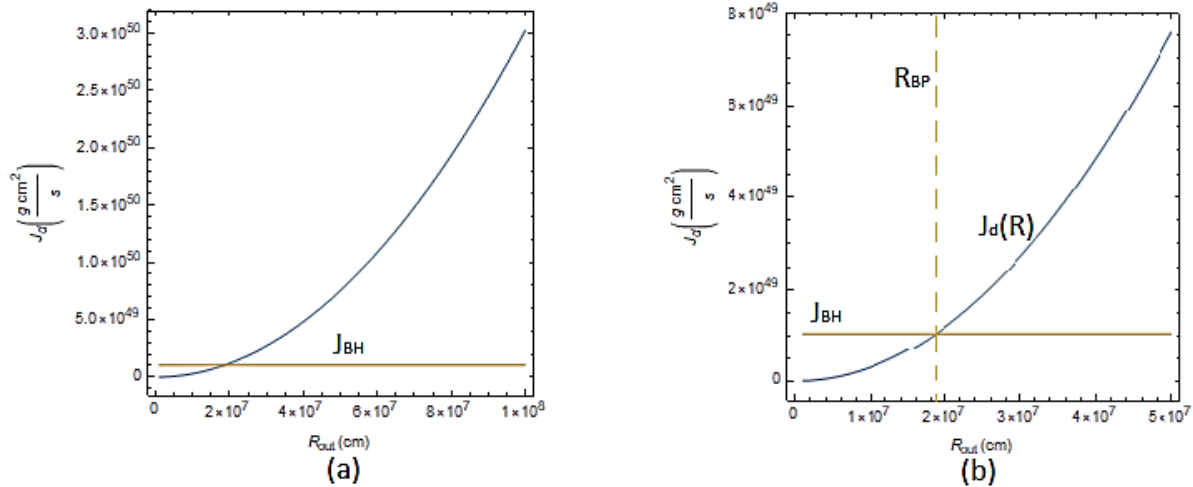
$$\Omega_{free}(m = 2, R, a = 0,3) = \frac{215981}{0,3 + 6,23 \times 10^{-9}R^{3/2}} \quad (5.8)$$

cuya gráfica se ilustra en la figura (5.1) junto con la gráfica del momento de inercia relativo.



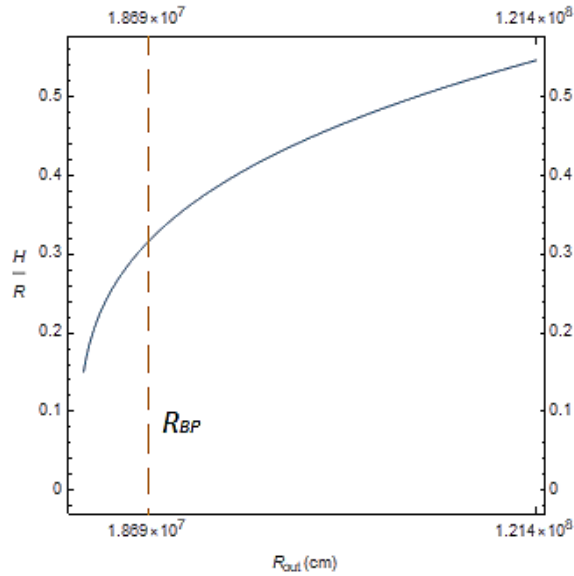
**Figura 5.1:** (a) Momento de inercia relativo. (b) Frecuencia angular de precesión

El momento angular típico del disco y el del BH se cortan en  $R_{BP}$ :



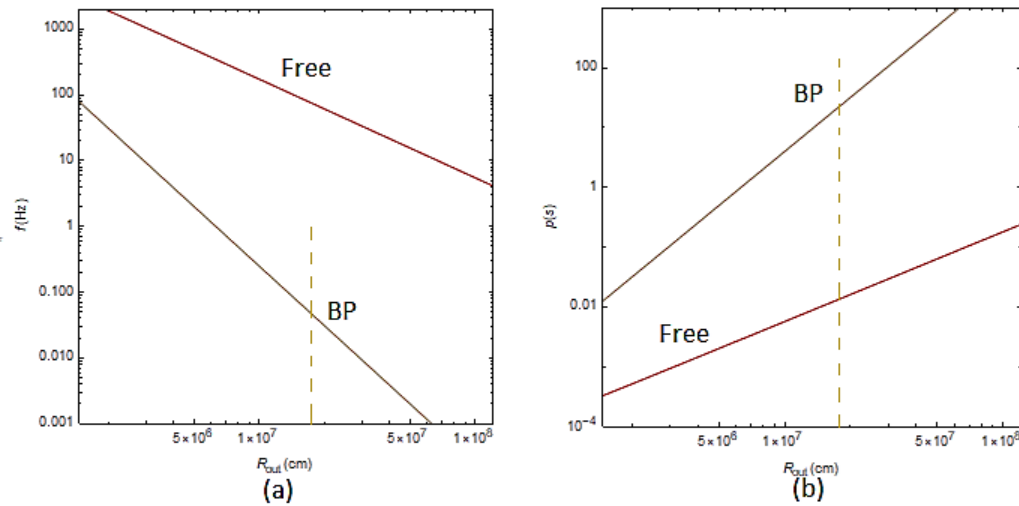
**Figura 5.2:** (a) Momento angular típico del disco  $J_d(R)$  (azul) y momento angular del BH  $J_{BH}$  (horizontal). (b) Ampliación de la región donde se cortan las curvas.

La relación  $H/R$  nos determina el comportamiento geométrico del disco, según la gráfica (5.3), para un  $R_{out} \sim 10^8 \text{cm}$ , el valor de  $M_{Mach} \sim (0,5)^{-1} = 2$ , lo que nos indica que para estos valores de viscosidad y tasa de acreción, el disco es bastante grueso.



**Figura 5.3:** Gráfico de altura relativa  $H/R$

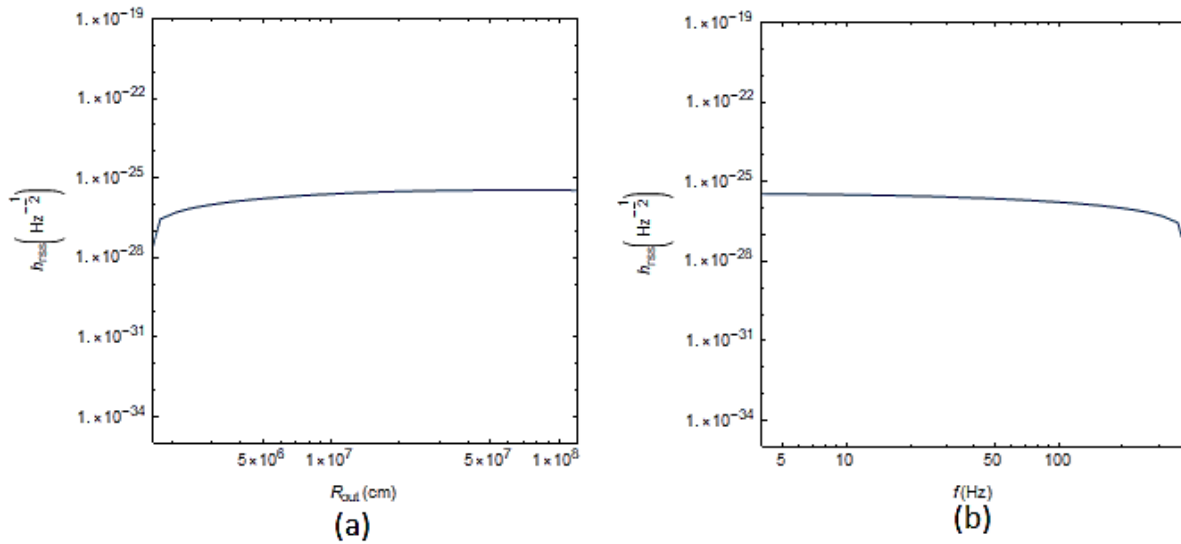
El comportamiento de la frecuencia y el periodo de precesión es como se muestra en la siguiente figura:



**Figura 5.4:** (a) Frecuencia de precesión (b) Periodo de precesión. En ambas gráficas, además, se presentan las debidas a BP.

Ahora, adaptando el valor  $r = 100Mpc$  para la distancia entre la fuente y los interferómetros, el radio exterior del disco es la *única* dependencia para la señal  $h_{r_{ss}}$ . Luego, de la ecuación (5.8), se puede escribir a  $h_{r_{ss}}$  como función de la frecuencia.

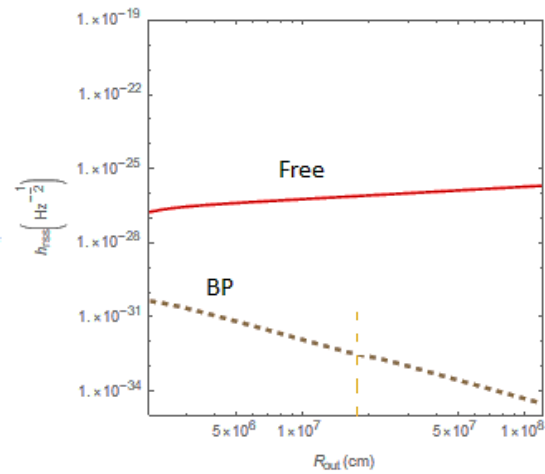
De la figura (5.1) podemos observar que, debido a que  $\Omega_{free}$  decrece con  $R$ , mientras que  $I_{rel}$  aumenta, la señal  $h_{rss}(R) \propto I_{rel}(R)\Omega_{free}^2(R)$  varía lentamente en el intervalo  $R_{ms} < R \lesssim 10^8 \text{cm}$ , exceptuando las zonas de radios pequeños, como se muestra en la figura (5.5): iguiente figura:



**Figura 5.5:** Señal  $h_{rss}$  debida a precesión libre como función de: (a) radio exterior, (b) de la frecuencia.

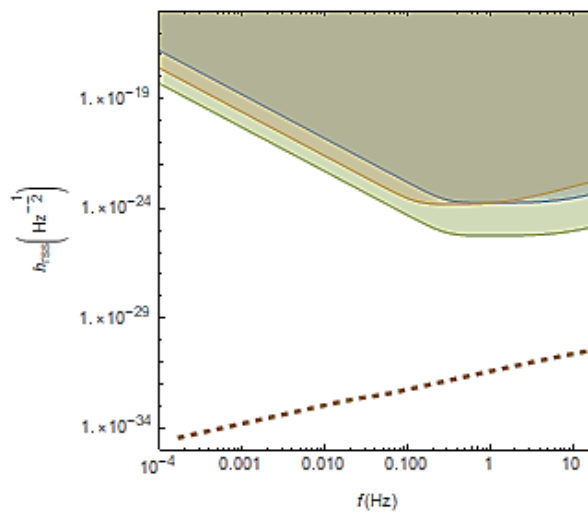
Se puede apreciar, en esta figura, que se trata de la misma gráfica si la reflejamos sobre el eje vertical, esto se debe a que la frecuencia es función de  $R$ .

La figura (5.6) muestra la señal de  $h_{rss}$  que se genera por el disco pequeño precesando debido al efecto BP.

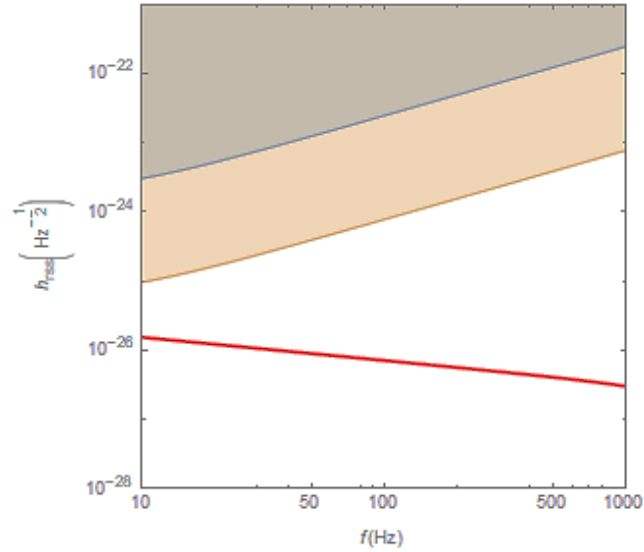


**Figura 5.6:** Señal  $h_{rss}$  para precesión libre y contribución del efecto BP. Adicional se muestra la línea donde corta el radio BP.

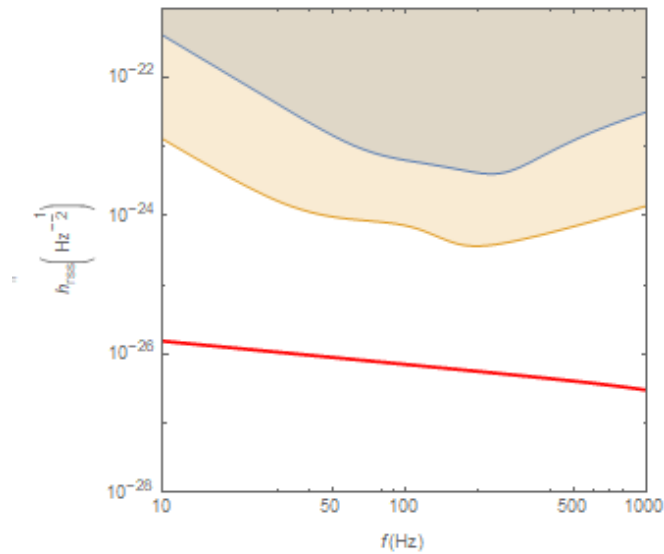
Las siguientes figuras son debido a la superposición de nuestros resultados con las curvas de detección de los detectores terrestres.



**Figura 5.7:** Señal  $h_{rss}$  debida al efecto BP en la región de los detectores DECIGO.



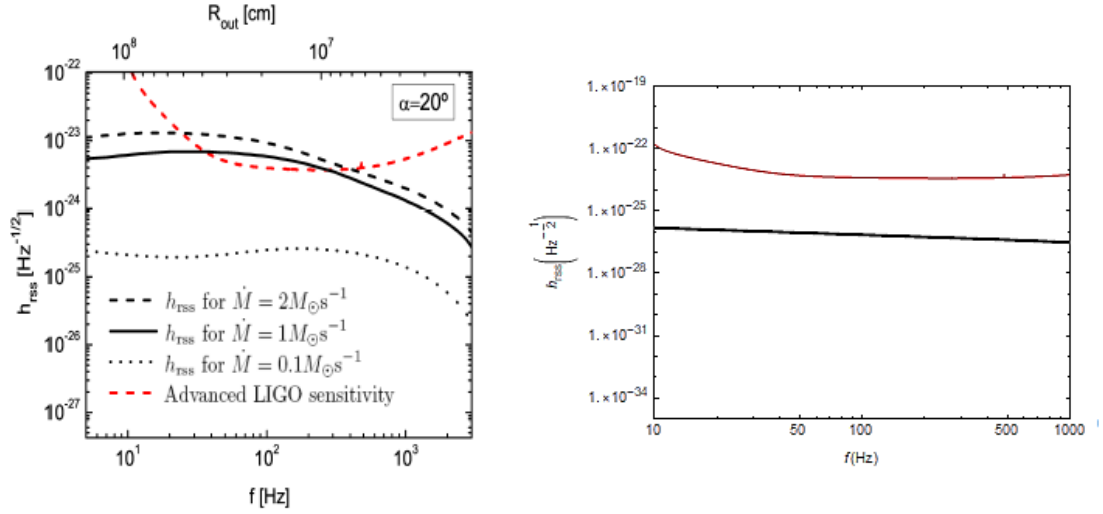
**Figura 5.8:** Señal  $h_{rss}$  de precesión libre en la región de los detectores DECIGO.



**Figura 5.9:** Señal  $h_{rss}$  de precesión libre en la región de los detectores Ligo y ET.

Como se puede apreciar en las figuras (5.7, 5.8 y 5.9) la curva de nuestro modelo está por debajo del límite inferior de sensibilidad de los detectores Decigo, Ligo y ET.

Podemos comparar nuestro resultado con los reportados en Romero et al. [19] para la señal  $h_{rss}$  junto con la curva de *Advanced Ligo*, como se muestra en la figura (5.10)



**Figura 5.10:** A la izquierda la señal  $h_{rss}$  para el disco reportado en [19]. A la derecha nuestro modelo. La línea de color roja es la curva de sensibilidad de LIGO advanced oficial, mientras que la negra representa la tasa de acreción que hemos considerado en nuestro análisis.

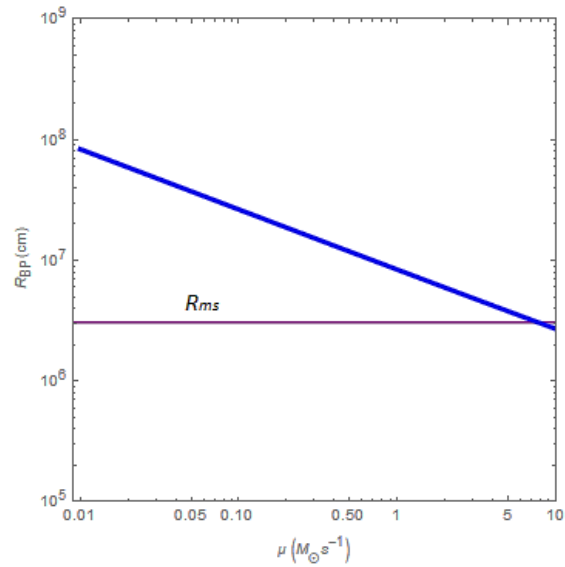
### 5.1.2. Estimación de la GW asociada al efecto Bardeen-Petterson

En esta sección vamos a comparar nuestros resultados con el trabajo de Sun et al. [26], dado que la estructura de ambos modelos está determinada fundamentalmente por los parámetros  $\mu$ ,  $a$ ,  $m$  y la constante de viscosidad. En nuestro caso, esa constante estará determinada por el número de Reynolds la cuál estará condicionada por  $\beta = 10^{-2}$  [16] y a partir de esta elección, analizamos la dinámica del disco y cómo varía la señal  $h_{rss}$  antes variaciones de los parámetros restantes. Mantendremos los valores angulares y la duración del burst como en la sección anterior.

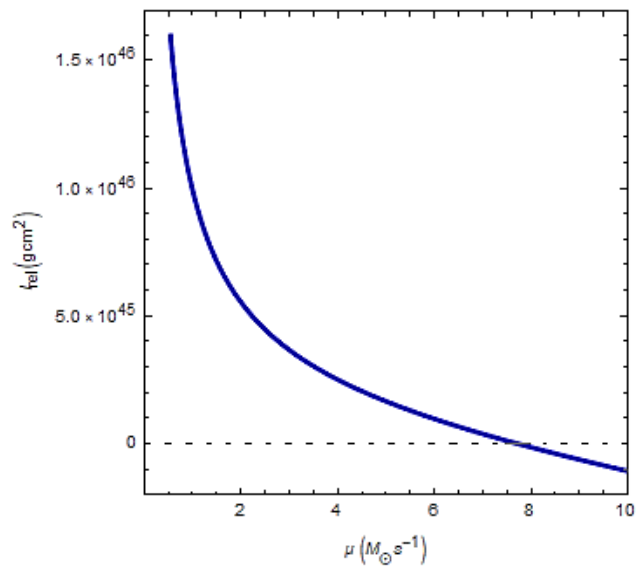
Para nuestro modelo fijaremos el valor de la masa del BH en  $m = 3$ , y el parámetro de espín en  $a = 0,8$ , obteniendo así:

$$\begin{aligned}
 R_{BP}(m, \mu, a) &\Rightarrow R_{BP} = R_{BP}(\mu), & I_{rel}(m, \mu, a, R_{BP}) &\Rightarrow I_{rel} = I_{rel}(\mu) \\
 H(m, R_{BP}) &\Rightarrow H = H(\mu), & P_{prec}(m, R_{BP}, a) &\Rightarrow P_{prec} = P_{prec}(\mu)
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

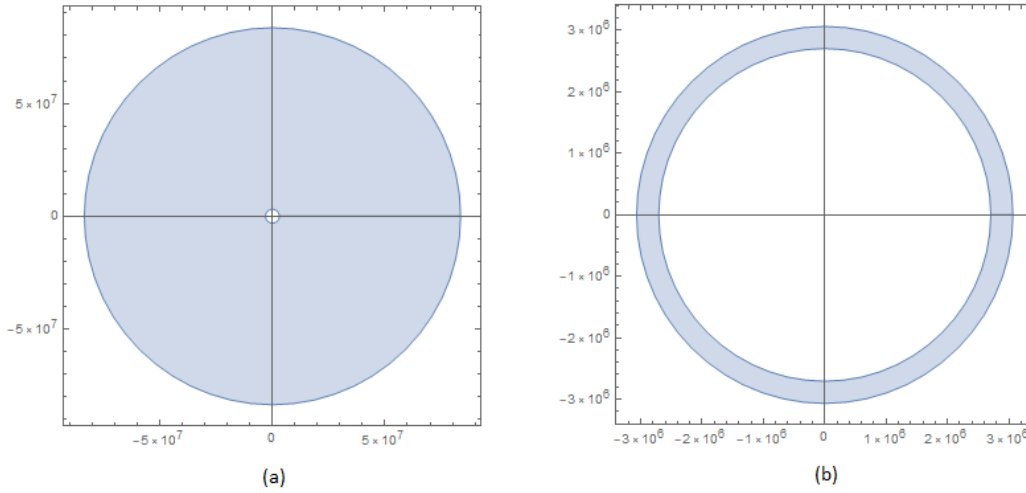
De aquí, la estructura del disco queda determinada únicamente por la tasa de acreción.



**Figura 5.11:** Comportamiento del radio BP con la tasa de acreción  $\mu$ . La línea horizontal representa el valor del radio interno del disco, y la intersección con  $R_{BP}$  indica la tasa de acreción a partir de la cual se deja de formar el disco.



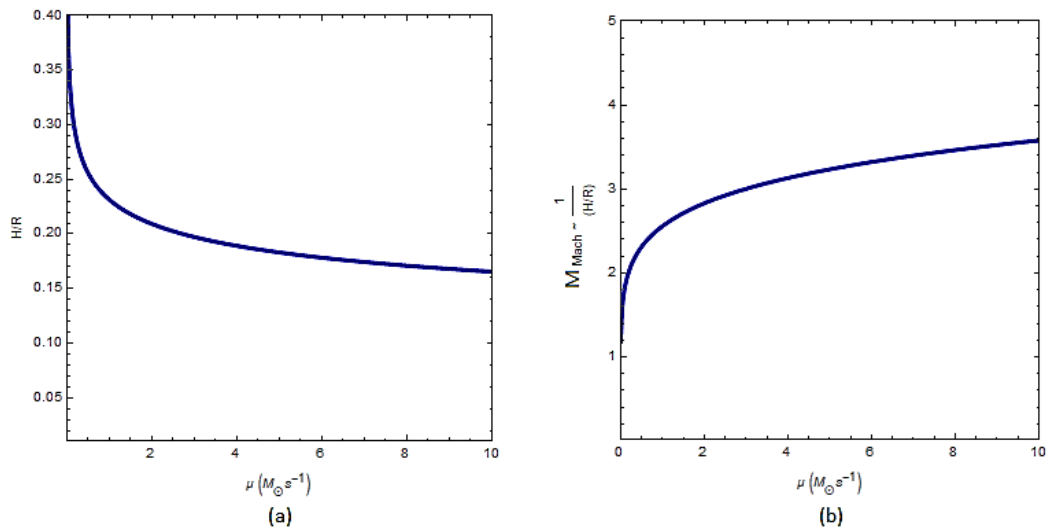
**Figura 5.12:** Momento de inercia relativo  $I_{rel} = I_3 - I_1 v_s \mu$



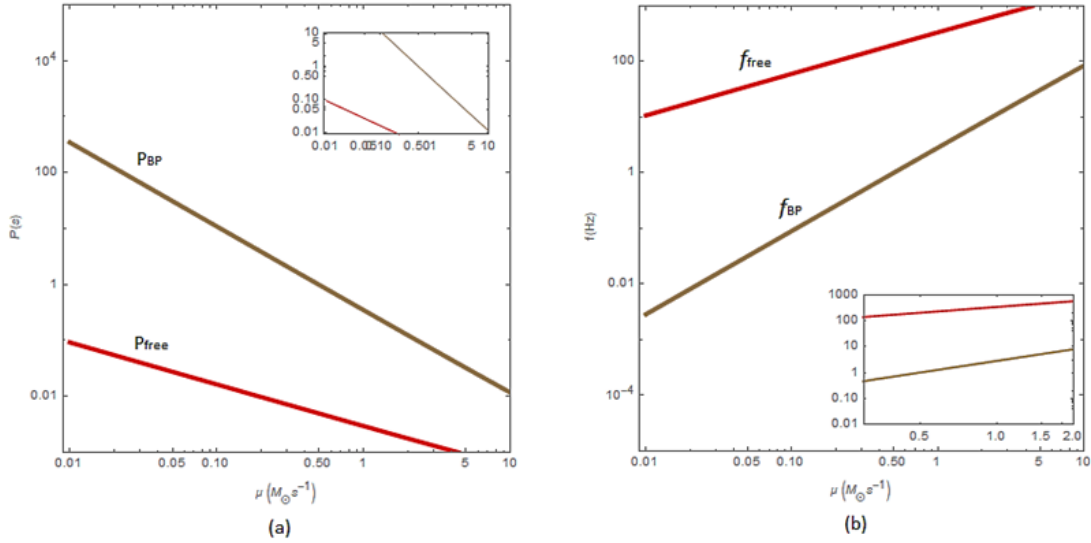
**Figura 5.13:** Vista superior de la representación del disco de acreción obtenido para: (a)  $\mu = 0,01$  y (b)  $\mu = 10$

Para las gráficas anteriores, es claro que la selección de parámetros nos condiciona la estabilidad del sistema para tasas de acreción  $\mu \leq 10$ .

Por otro lado, la dependencia con  $\mu$  se representa en el grosor del disco y su correspondiente número de Mach, lo cual se ilustra en la figura



**Figura 5.14:** (a) Función  $H/R$  vs  $\mu$ . Se puede apreciar que el incremento en la tasa de acreción lleva a discos más delgados. (b) Comportamiento del número de Mach en el disco.



**Figura 5.15:** (a) Periodo de precesión vs  $\mu$  (b) Frecuencia de precesión vs  $\mu$ .

En la figura (5.15) se muestra el comportamiento del periodo y la frecuencia de precesión, con la tasa de acreción, para precesión asociada a los casos del efecto BP como a precesión libre.

Vamos a calcular la señal de  $h_{r_{ss}}$  permitiendo un valor dentro del intervalo de la tasa de acreción  $\mu \in (0,01, 10)$ , y a partir de esto realizaremos nuestras interpretaciones. Dado que la dinámica del disco está determinada por la tasa de acreción, al fijar la distancia a la fuente  $r$ , la señal  $h_{r_{ss}}$  queda determinada por  $\mu$ , es decir:

$$\begin{aligned} h_{r_{ss}} &= h_{r_{ss}}(m = 3, \mu, a = 0,8, R_{BP}(\mu), r) \\ &\equiv h_{r_{ss}}(\mu) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Pero:

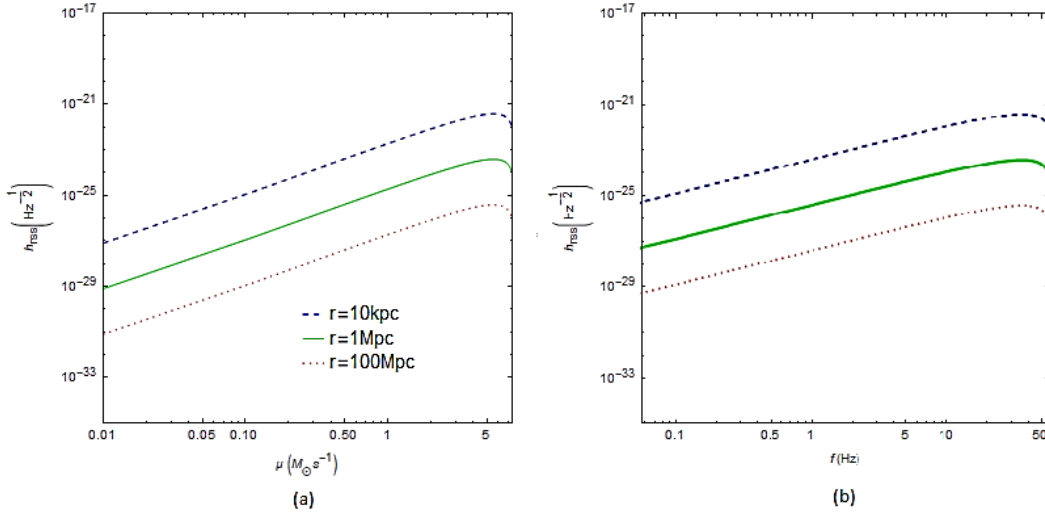
$$f_{prec} = f_{prec}(\mu) \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(f_{prec}) \quad (5.11)$$

Entnces, podemos evalua la señal  $h_{r_{ss}}$  en términos de  $f_{prec}$ :

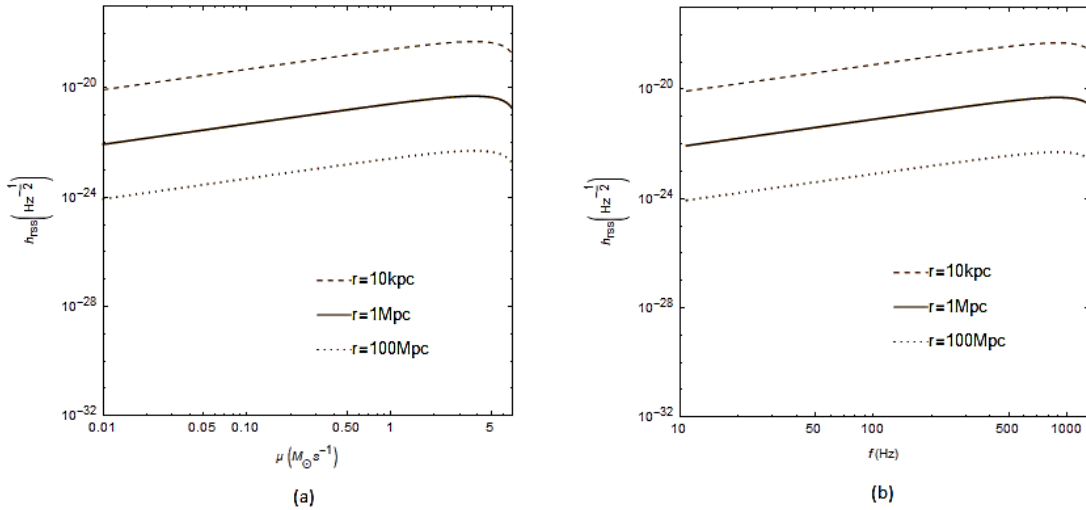
$$h_{r_{ss}}(\mu) \equiv h_{r_{ss}}(\mu(f_{prec})) = h_{r_{ss}}(f_{prec}) \quad (5.12)$$

Al evaluar la seña, consideramos tres valores diferentes para la distancia de estos objetos:  $r = (10kpc; 1Mpc; 100Mpc)$ ; obteniendo los siguientes resultados:

- Gráficas de la señal  $h_{r_{ss}}$  en términos de frecuencias y tasa de acreción

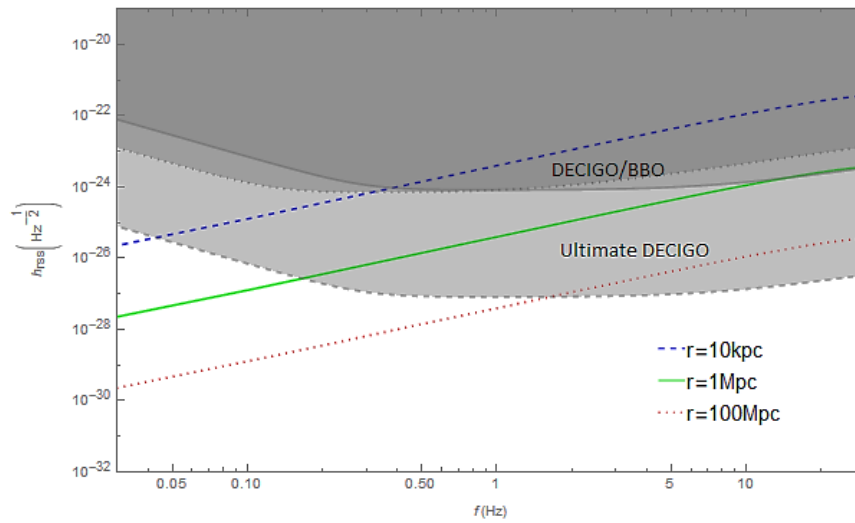


**Figura 5.16:** Señal de  $h_{r_{SS}}$  debida al efecto BP para tres distancias diferentes. En (a) como función de la tasa de acreción  $\mu$ , y en (b) como función de la frecuencia  $f$ .

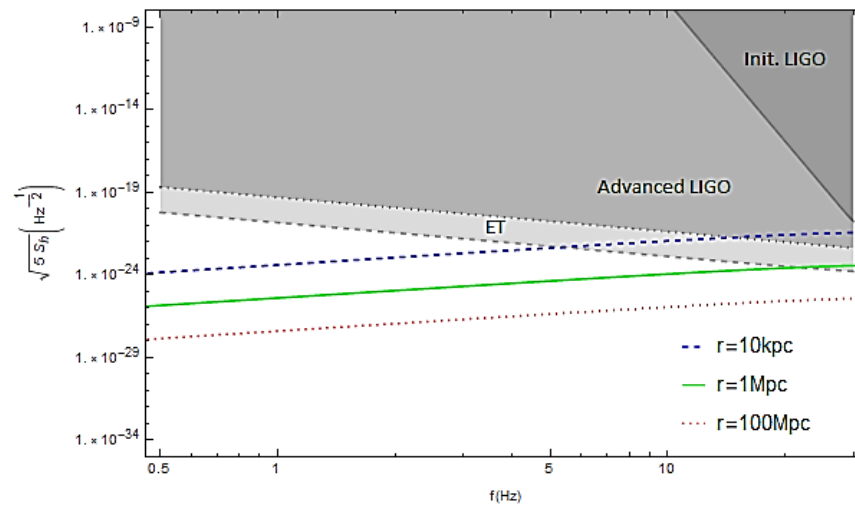


**Figura 5.17:** Señal de  $h_{r_{SS}}$  debida a precesión libre para tres distancias diferentes. En (a) como función de la tasa de acreción  $\mu$ , y en (b) como función de la frecuencia  $f$ .

- Superposición de las señales  $h_{r_{SS}}$  asociadas al efecto BP, con las curvas de detección de los interferómetros DECIGO y LIGO.

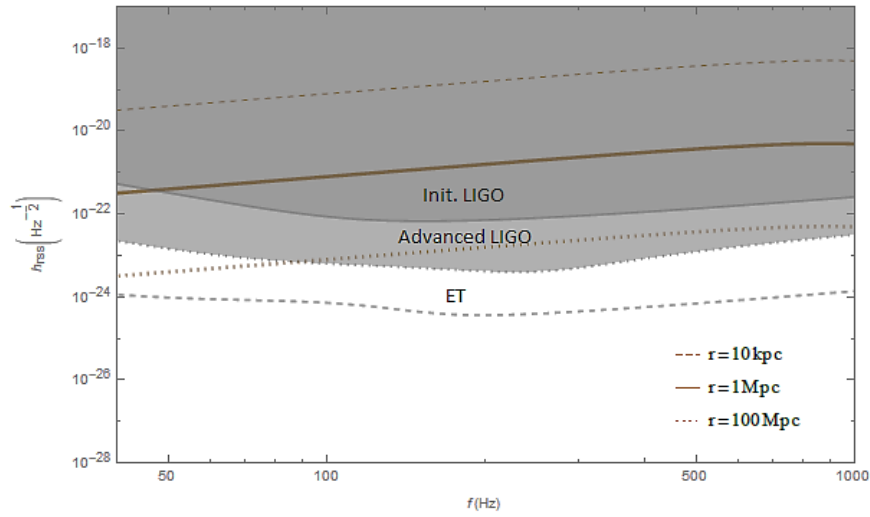


**Figura 5.18:** Señal de  $h_{rss}$  bajo el efecto BP para las distancias anteriormente mencionadas, y curvas de detección en la ventana de frecuencias de los detectores DECIGO y BBO .



**Figura 5.19:** Señal de  $h_{rss}$  bajo el efecto BP para las distancias anteriormente mencionadas, y curvas de detección en la ventana de frecuencias de los detectores LIGO y ET .

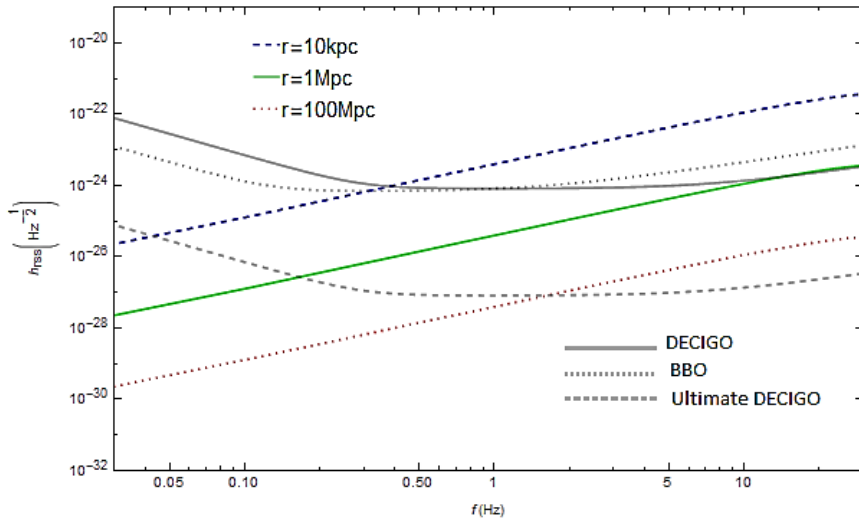
- Análogo al resultado anterior, se presenta la señal asociada a la precesión libre en la región del interferómetro LIGO.



**Figura 5.20:** Señal de  $h_{rss}$  de precesión libre para las distancias anteriormente mencionadas, y curvas de detección en la ventana de frecuencias de los detectores LIGO y ET .

- Comparamos nuestros resultados con la gráfica reportada en el trabajo de Sun et al. [26].

Como se puede observar en las dos últimas figuras (5.21 y 5.22), nuestros resultados se asemejan a los reportados en el trabajo de Sun et al. [26], en relación a la amplitud y frecuencia de la señal  $h_{rss}$  generadas por precesión del disco bajo el efecto de BP.



**Figura 5.21:** Resultados de nuestro modelo en la región reportada por Sun et al.

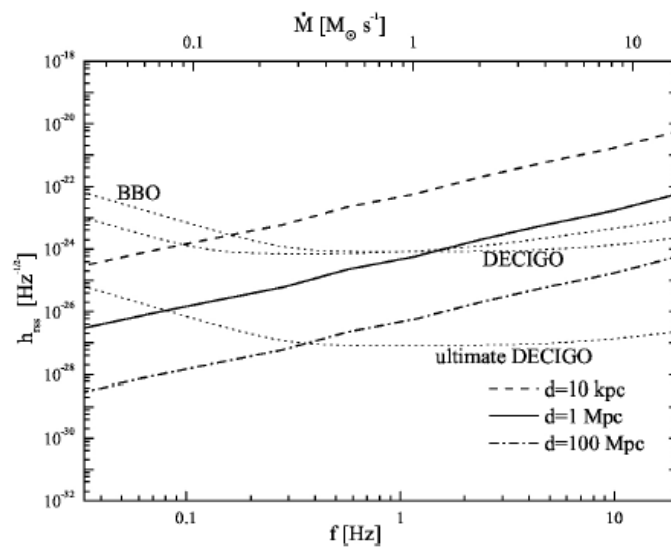


Figura 5.22: Resultado reportado por Sun et al.

## 6 Conclusiones y recomendaciones

En esta tesis hemos estudiado la generación de ondas gravitacionales (GWs) a partir de la precesión de discos de acreción como consecuencia del efecto Bardenn-Petterson, así como las GWs producidas por precesión libre del disco, cuando la viscosidad del material en éste está dada por la así llamada *prescripción*  $\beta$ , de acuerdo a la cual la viscosidad del disco está determinada por el número de Reynolds, en vez de la famosa *prescripción*  $\alpha$  de Shakura y Sunyaev. Según la prescripción  $\beta$ , la viscosidad se expresa como:

$$\nu_\beta = \beta \Omega R^2,$$

donde el parámetro  $\beta$  se asume inversamente proporcional al número de Reynolds y toma valores en el rango  $10^{-5} - 10^{-3}$ .

Para nuestros análisis nos basamos en el disco delgado propuesto por Popham [17], debido a que hay consenso general de que discos que se generan en GRBs engines, en hiperacreción, y que son enfriados por emisión de neutrinos, adoptan una geometría que se acerca a la de disco delgado, siempre que no se tengan extensiones superiores a  $\sim 10^8 \text{ cm}$ .

En el capítulo (5) presentamos nuestros resultados, obteniendo una buena aproximación a los resultados obtenidos en Sun et al. [26]. En este capítulo se muestra que el modelo aquí usado para el disco de acreción, emite GWs que pueden ser detectadas por los interferómetros LIGO (initial and advanced), DECIGO/Ultimate DECIGO, BBO y ET, especialmente para fuentes que estén localizadas a una distancia  $r \lesssim 1 \text{ Mpc}$ , que corresponden al *grupo local*, como puede observarse en las figuras (5.17, 5.19, 5.22 y 5.21).

En contraste con los resultados del modelo de disco de Romero et al. [19], también presentado en el capítulo (5), muestra que los resultados obtenidos en esta tesis no son coincidentes en el sentido de que, a diferencia de lo que ocurre en ese modelo, las GWs generadas son de muy baja frecuencia como para ser detectadas por los interferómetros arriba mencionados. En efecto, en las figuras (5.7, 5.8 y 5.9) puede observarse que las frecuencias obtenidas a partir del modelo de disco con viscosidad  $\beta$  están siempre por debajo de la sensibilidad de los detectores. Es de anotar que este resultado está asociado al hecho de que, para las condiciones del disco de Romero et al., el modelo aquí propuesto da lugar a discos que no se aproximan bien por discos delgados, lo que, a su vez, puede ser una indicación de que es necesario extender el análisis para incluir efectos de autogravitación del disco.

# Bibliografía

- [1] URL <http://lisa.nasa.gov/>.
- [2] URL <https://dcc.ligo.org/cgi-bin/DocDB/ShowDocument?docid=2974>.
- [3] URL <https://www.ego-gw.it/public/about/welcome.aspx>.
- [4] URL <https://www.ugr.es/~jillana/SR/trans9.pdf>.
- [5] ABRAMOVICI, A. ; ALTHOUSE, W.E. ; DREVER, Gürsel Y. ; KAWAMURA, S. ; RAAB, F.J. ; ET AL: Ligo: The laser interferometer gravitational-wave observatory. En: *Science* 256(5055) (1992), p. 325
- [6] ALONSO, W.D.: *Caracterización de la radiación gravitacional emitida por discos de acreción regidos dinámicamente por el efecto Bardeen-Petterson*, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, Tesis de Grado, 2013
- [7] ARMIJO, M. M.: Review: Accretion Disk Theory. arXiv:1203.6851v1 (2012), p. 20
- [8] BARDEEN, J.M. ; PETTERSON, J.A.: The Lense-Thirring effect and accretion disks around Kerr black holes. En: *The Astrophysical Journal Letters* 195:L65 (1975)
- [9] BARDEEN, J.M. ; PRESS, W.H. ; TEUKOLSKY, S.A.: Rotating black holes: locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. En: *The Astrophysical Journal* 178 (1972), p. 347–370
- [10] CERVANTES, J.L. ; GALINDO, S. ; SMOOT, G.F.: A Brief History of Gravitational Waves. En: *Universe* 2(3)22 (2016), p. 30
- [11] CORBIN, V. ; CORNISH, N.J.: Detecting the cosmic gravitational wave background with the big bang observer. En: *Classical and Quantum Gravity* 23(7):2435 (2006)
- [12] FLANAGAN, E.E. ; HUGHES, S.A.: Measuring gravitational waves from binary black hole coalescences i. signal to noise for inspiral, merger, and ringdown. En: *Physical Review D*. 57(8):4535 (1998)
- [13] LIU, T. ; LIANG, E.W. ; GU, W.M. ; ZHAO, X.H. ; DAI, Z.G. ; LU, J.F: Jet precession driven by neutrino-cooled disk for gamma-ray bursts. En: *Astronomi and Astrophysics* 516 (2010)

- 
- [14] LIU, T. ; XUE, W.M. ; LU, J.F.: The vertical composition of neutrino-dominated accretion disks in gamma-ray bursts. En: *The Astrophysical Journal* 762 (2012), p. 102
- [15] MAGGIORE, M.: *Gravitational waves*. University Press, 2008
- [16] NELSON, R.P. ; PAPALOIZOU, J.C.B.: Hydrodynamic simulations of the Bardeen-Petterson effect. (1999), p. 17
- [17] POPHAM, S.E ; FRYER, C.: Hyperaccreting black holes and gamma-ray bursts. En: *The Astrophysical Journal* 518 (1999), p. 356
- [18] REYNOSO, M.M. ; ROMERO, G.E. ; SAMPAYO, O.A.: Precession of neutrino-cooled accretion disk in gamma-ray burst engines. En: *astronomy & Astrophysics* 454 (2006), p. 11–16
- [19] ROMERO, G.E. ; REYNOSO, M.M. ; CHRISTIANSEN, H.R.: Gravitational radiation from precessing accretion disks in gamma-ray bursts. En: *Astronomy & Astrophysics* 554 (2010), p. 5
- [20] ROWAN, S. ; HOUGH, J.: Gravitational wave detection by interferometry (ground and space). En: *Living Rev. Relativity* 3(3) (2000)
- [21] SAGO, N. ; IOKA, K. ; NAKAMURA, T. ; YAMAZAKI, R: Gravitational wave memory of gamma-ray burst jets. En: *Physical Review D* 70(10):104012 (2004)
- [22] SARAZIN, C.L. ; BEGELMAN, M.C. ; HATCHETT, S.P: Disk-driven precession in ss 433. En: *The Astrophysical Journal*. 238 (1980), p. 129–132
- [23] SATHYAPRAKASH, BS. ; SCHUTZ, B.F.: Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves. En: *Living Rev. Relativity* 12(2) (2009)
- [24] SCHUTZ, B.F.: *A first course in general relativity*. Cambridge Univ Pr, 1985
- [25] SHAKURA, N.I. ; SUNYAEV, R.A.: Black holes in binary systems. observational appearance. En: *Astronomy and Astrophysics* 24 (1973), p. 337–355
- [26] SUN, M.Y. ; LIU, T. ; GU, W.M. ; LU, J.F.: Gravitational waves of jet precession in gamma-ray bursts. En: *The Astrophysical Journal* 752 (2012), p. 6
- [27] WHITCOMB, S.E.: Ground-based gravitational-wave detection: now and future. En: *Classical and Quantum Gravity* 25(11):114013 (2008)
- [28] YAGI, K. ; SETO, N.: Detector configuration of decigo/bbo and identification of cosmological neutron-star binaries. En: *Physical Review D* 83(4):044011 (2011)