

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES EN  
EL CURSO DE CALCULO DIFERENCIAL DE LA UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE COLOMBIA, SEDE MEDELLÍN



AGUSTÍN MOSQUERA PALACIOS

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**SEDE MEDELLIN**

**2013**

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES EN  
EL CURSO DE CALCULO DIFERENCIAL DE LA UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE COLOMBIA, SEDE MEDELLÍN

AGUSTIN MOSQUERA PALACIOS

Informe final para optar al título de:

MAESTRIA EN ENSEÑANZA DELAS CIENCIAS EXACTAS Y  
NATURALES

Asesor:

Ms. FERNANDO PUERTA ORTÍZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

SEDE MEDELLIN

2013

## RESUMEN

Indudablemente que uno de los temas de estudio fundamental y primordial en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de las matemáticas, es el de las funciones, pues ellas constituyen una poderosa herramienta, de gran utilidad en el trabajo y estudio de los sistemas matemáticos.

Adquirir habilidad para formular, modelar y resolver problemas que involucren funciones, resulta de suma importancia, por cuanto ello facilita la comprensión de nuestra realidad y da sentido a la enseñanza en diferentes contextos, no solo en las aplicaciones propias de las matemáticas sino en áreas del conocimiento como las ciencias naturales, las ciencias sociales y muchas otras que establecen relación inter disciplinaria con las matemáticas.

Por otro lado, el trabajo con situaciones problema, posibilita el desarrollo del pensamiento lógico matemático de los estudiantes y de sus competencias. Formular y resolver problemas que involucren funciones, deberá ir de la mano con la implementación de otros procesos generales tales como: modelación de situaciones de la realidad; comunicar; razonar; comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Esta implementación deberá hacerse de manera activa, constructiva, dinámica y creativa, en el propósito de que los estudiantes realicen aprendizajes verdaderamente significativos.

**Palabras claves:** Función, educación, propuesta metodológica, monitores, monografía

## ABSTRACT

Undoubtedly one of the topics of study fundamental and primary in the process of teaching and learning in the field of mathematics, are the functions, as they are a powerful tool, useful in work and study of mathematical systems.

Acquire ability to formulate, model and solve problems involving functions, is extremely important, because it facilitates the understanding of our reality and gives meaning to teaching in different meaningful contexts, not only in specific applications of mathematics but also in branches of knowledge like the natural sciences, social sciences and many others that provide interdisciplinary relationship with math's.

On the other hand, the work with "problematic situations", facilitates the development of the mathematical logical thinking of the students and of their skills. To formulate and solve problems that involve functions, must be hand in hand with another general procedures like: modeling of real life events; to communicate; to reason; to compare and to make procedures and algorithms. This implementation must be done with an active way, constructive, dynamic and creative, with the purpose of the students make meaningful learning.

**Keywords:** Function, education, methodological proposal, monograph, instructor.

## INDICE GENERAL

## Contenido

1. INTRODUCCIÓN .....	3
1.1. Formulación del problema:.....	4
1.2. JUSTIFICACIÓN .....	4
2. MARCO TEÓRICO .....	5
2.1. La Propuesta: .....	5
2.2. REFERENTE TEÓRICO .....	5
3. METODOLOGÍA .....	7
3.1. OBJETIVOS.....	8
3.2. PLANEACIÓN Y PROGRAMACIÓN DE FUNCIONES.....	9
3.3. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS Y EVALUACIÓN .....	9
3.4. PREPARACIÓN DE CLASES.....	10
4. BIBLIOGRAFÍA .....	86

# 1.INTRODUCCIÓN

Se ha encontrado que los desempeños de los estudiantes de cálculo diferencial de la universidad nacional de Colombia sede Medellín, son muy bajos; es normal que solo el 30% de los estudiantes apruebe el curso. Una de las características en este grupo de estudiantes es la heterogeneidad en sus conocimientos matemáticos adquiridos en el bachillerato; que en muchos casos es deficiente y es evidenciada en los bajos resultados de pruebas ices – saber, en los resultados de las pruebas de ingreso a la universidad y ahora corroborados en el aula de clase; lo cual ha llevado a la repetición reiterada del curso por muchos estudiantes y a incrementar los niveles de deserción en la universidad.

Una de las estrategias para enfrentar esta situación por parte de la universidad es dictar cursos opcionales de matemáticas básicas, que si en algo han mejorado la situación, al ser un curso que se reprueba pero no se repite, los estudiantes no le han dado la seriedad como curso fundamental en su formación. Las matemáticas a nivel universitario exigen rigor, madurez y seriedad intelectual, sobre todo en este curso que da los fundamentos para un buen desempeño en cálculo.

Un gran número de estos estudiantes presentan serias dificultades en la solución de problemas que involucran la formulación, modelación y construcción de funciones que establecen relación entre los

contenidos a desarrollar y la realidad objetiva, esto incluye las habilidades operativas de los estudiantes, que aun deben ser mejoradas.

La principal dificultad consiste en el poco u nulo entrenamiento que traen los estudiantes frente a este tipo de situaciones pues, por lo general su base fue solo operativa y carente de significación en el desarrollo de los contenidos matemáticos.

Ahora, es innegable que esta dificultad está estrechamente relacionada con el modelo educativo tradicionalista que aún implementamos un buen número de los docentes de la institución y en particular los del área de matemáticas, en donde los alumnos son objetos pasivos de un proceso educativo, que tiene como propósito la transmisión de una información que se está adquiriendo en forma memorizada y repetitiva.

Actualmente se han incorporado otros mediadores que dinamizan la apropiación conceptual del estudiante, como las aplicaciones tecnológicas en calculadoras y herramientas computacionales, los cuales potencian las posibilidades numéricas, gráficas y simbólicas de un problema, nos permiten encontrar distintas soluciones al variar parámetros; comparar, contrastar resultados e interpretarlos; los cuales son conocidos por los docentes pero no son aplicados en la mayoría de los casos.

Lo anterior, y seguramente que otros aspectos de mucha importancia, han contribuido en el bajo desempeño de los estudiantes que enfrentan una evaluación de mucho análisis e interpretación y un alto componente aplicativo.

### **1.1. Formulación del problema:**

Un alto número de estudiantes del curso de cálculo diferencial de la universidad nacional de Colombia, sede de Medellín, no resuelven problemas que involucran aplicaciones de funciones, que impliquen la formulación, modelación y conclusiones que establecen relación entre los contenidos a desarrollar y la realidad objetiva.

¿Cómo lograr que los estudiantes hagan significativo el concepto de función a partir de las formas de representación; visualización y modelación que lo lleven a establecer conclusiones lógicas que permitan superar esta dificultad?

### **1.2. JUSTIFICACIÓN**

El concepto de función ocupa gran parte del curso de cálculo, de hecho el curso gira en torno a él; esto facilita la visualización y modelación de situaciones que involucran problemas reales, lo que permite la exposición de conocimientos en forma ágil, atractiva y con significado para los estudiantes.

A través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, que representamos en forma simplificada a partir de elementos matemáticos. “La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas que permite al estudiante observar, discutir, reflexionar, explicar, predecir, revisar y de esta manera, construir conceptos matemáticos en forma significativa; en consecuencia, se considera que los estudiantes requieren experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles”. (MEN. La modelación)

En consecuencia, hace necesario realizar un estudio serio y profundo del problema formulado, que dé cuenta de sus antecedentes, del proceso de enseñanza y aprendizaje implementado, que permita identificar

sus causas y por lo tanto, diseñar e implementar una propuesta pedagógica, de carácter didáctico, para la superación de la dificultad.

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1. La Propuesta:

Proponemos realizar una intervención didáctica en el aula de clase, con un grupo de 26 estudiantes, que corresponden al grupo # 17 de cálculo diferencial. Este grupo es muy heterogéneo con relación a los elementos matemáticos que tienen los estudiantes pues, entre ellos se encuentran algunos que ven por primera vez el curso, mientras que una gran mayoría lo repiten y que hasta lo ven por tercera ocasión, lo que naturalmente requiere una clase más exigente para el docente que se enfrenta a estudiantes con menor grado de ingenuidad frente al conocimiento.

Con base en los planteamientos que Marco Antonio Moreira nos hace en su trabajo sobre Las Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas, UEPS, entendidas como *“...secuencias de enseñanza fundamentadas teóricamente, orientadas al aprendizaje significativo, no mecánico, que pueden estimular la investigación aplicada en enseñanza, es decir la investigación dedicada directamente a la práctica de la enseñanza en el día a día de las clases”*. (Marco Antonio Moreira). Esto lo mediamos con el modelo educativo matemático, propuesto por van Hiele, en el que se entiende la modelación como la forma de describir la relación entre el mundo real y las matemáticas.

Esta propuesta de Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa que pretendemos implementar se fundamenta en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel, en las teorías sobre educación de Joseph D. Novak y de D. B. Gowin, en la teoría interaccionista social de Lev Vygotsky, en la teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud, en la teoría de los modelos mentales de Philip Johnson-Laird, en la teoría del aprendizaje significativo crítico de Marco Antonio Moreira y en la teoría de modelo educativo matemático, propuesta por van Hiele.

### 2.2. REFERENTE TEÓRICO

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las funciones y su modelación constituyen una poderosa herramienta, son de gran utilidad en el trabajo y estudio de los sistemas matemáticos en general.

Adquirir habilidad para formular, modelar y resolver problemas que relacionen a las funciones de variable real con problemas de aplicación que den sentido y significación a la enseñanza, resulta de suma importancia, por cuanto ello facilita la solución a múltiples problemas que se presentan, no solo en las aplicaciones propias de las matemáticas sino en otras áreas del conocimiento como las ciencias naturales, las ciencias sociales y muchas otras.

Este trabajo deberá posibilitar el desarrollo del pensamiento lógico matemático de los alumnos y el mejoramiento de sus competencias. En la medida en que los estudiantes van formulando y resolviendo problemas, a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas, van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel (Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas – MEN 1998).

Además, hacer matemáticas es en buena medida formular y resolver problemas y este proceso deberá ir de la mano, en estrecha relación, con la implementación de otros procesos generales tales como: modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos (Lineamientos Curriculares de Matemáticas - MEN 1998).

Los estudiantes vienen con poco o nulo entrenamiento frente a la resolución de problemas aplicativos, esta dificultad está relacionada con el modelo educativo tradicionalista que aún implementamos un buen número de los docentes y en particular los del área de matemáticas, para el cual los alumnos son objetos pasivos de un proceso educativo, que tiene como propósito la transmisión de una información, hoy contextualizada que debe ser memorizada y repetida por los alumnos.

La propuesta de UEPS se fundamenta en la Teoría del Aprendizaje Significativo. Éste debe entenderse como el proceso según el cual un nuevo conocimiento interactúa con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva (no literal). Esa interacción con la estructura cognitiva se produce con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje. La presencia de ideas, conceptos o proposiciones inclusivas, claras y disponibles en la mente del aprendiz es lo que dota de significado a ese nuevo contenido en interacción con el mismo. En este proceso los nuevos contenidos adquieren significado para el sujeto, produciéndose una transformación de los subsumidores de su estructura cognitiva, que resultan así progresivamente más diferenciados, elaborados, estables y potentes, y que servirán de base para futuros aprendizajes. Además, el aprendizaje significativo requiere de una predisposición para aprender significativamente por parte del aprendiz y de un material potencialmente significativo que, a su vez, implica significatividad lógica de dicho material (Ausubel, 1976, 2002).

El aprendizaje significativo es subyacente a la integración constructiva de pensar, hacer y sentir, lo que constituye el eje fundamental del engrandecimiento humano (Novak, 1981). Es una interacción triádica entre profesor, aprendiz y materiales educativos del currículum en la que se delimitan las responsabilidades correspondientes a cada uno de los protagonistas del evento educativo (Gowin, 1981).

El aprendizaje significativo subyace a la internalización Vygotskyana y a su modo de explicar el desarrollo cognitivo en función de la mediación social; pero es igualmente válido afirmar que la interacción social Vygotskyana subyace al aprendizaje significativo y a la concepción Ausubeliana del aprendizaje. Tanto para Vygotsky como para Ausubel “la atribución de significados y la interacción social son inseparables” (Moreira, 1997). En este contexto social y en este proceso de atribución de significados, ejerce un papel crucial la contrastación entre iguales, o sea, la interacción entre individuos o pares que conduce a la negociación de significados.

Los constructos de modelo mental y esquema de asimilación permiten explicar el proceso de construcción del aprendizaje significativo y, por tanto, la adquisición, la asimilación y la retención del conocimiento. La consideración de la Teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird y la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud ofrecen una sólida base psicológica cognitiva a la Teoría del Aprendizaje Significativo, que amplía aún más, si cabe, su poder predictivo y explicativo y su perdurabilidad, facilitando así la comprensión del proceso que conduce a la construcción de un aprendizaje significativo.

El aprendizaje significativo es, también, la forma de encarar la velocidad vertiginosa con la que se desarrolla la sociedad de la información, posibilitando elementos y referentes claros que permitan el cuestionamiento y la toma de decisiones necesarios para hacerle frente a la misma de una manera

crítica. Este enfoque implica activamente al sujeto no sólo en términos cognitivos, sino también emocionales, y a su modo de percibir el mundo, a su manera de representarlo. Lo que se procura es dotar al alumno de elementos y referentes que le permitan posicionarse en la estructura social y cultural de la que forma parte de manera crítica y analítica, de modo que pueda tomar posturas y llevar adelante sus decisiones sin ser arrastrado por la misma (Moreira, 2000).

“En cuanto a la modelación, la consideramos como un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas que permite a los estudiantes observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera, construir conceptos matemáticos en forma significativa, se considera que todos los estudiantes deben experimentar procesos de matemización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles”.(MEN- la modelación. Op. Cit. P101). Para lograr que el estudiante adquiera los conceptos significativamente a partir de la modelación

### 3. METODOLOGÍA

La propuesta de intervención en el aula mediante la implementación de una UEPS es un espacio de reflexión que pretende mejorar los procesos pedagógicos institucionales que permitirá superar el panorama descrito. El tema que se abordará en la UEPS es la formulación, modelación y establecimiento de conclusiones lógicas en las aplicaciones de funciones; Se propondrá una primera actividad bien diseñada que permita a los alumnos exteriorizar su conocimiento previo relevante para el aprendizaje significativo de este tema. Luego se proponen situaciones problema que permitan una introducción del tema de aprendizaje, acordes a los conocimientos previos de los alumnos o, en ausencia de subsumidores, que sirvan como organizadores previos, y que serán los que le darán sentido al nuevo conocimiento. Pero para esto, los alumnos deben concebirlas como problemas y tener la capacidad de modelarlas. Esta modelación de los alumnos será funcional para ellos y resultará de sus conceptos previos y percepciones.

Una vez trabajadas las situaciones iniciales, se presenta el nuevo conocimiento a ser aprendido, teniendo en cuenta la diferenciación progresiva, es decir, empezando con aspectos más generales, inclusivos, dando una visión inicial del todo, de lo que es más importante en la unidad de enseñanza, pero después se ponen ejemplos, abordando aspectos específicos. Los materiales y las estrategias de enseñanza deben ser diversificados, se debe privilegiar el cuestionamiento y estimular el diálogo y la crítica. También es importante ubicar como tarea de aprendizaje a lo largo del desarrollo de la UEPS, que los alumnos propongan situaciones problema relacionadas con el tema de trabajo. Igualmente, es importante combinar las actividades colaborativas con las individuales, privilegiando las primeras, seguidas de una actividad de presentación o discusión en el grupo grande.

A continuación se debe promover la reconciliación integradora, destacando los aspectos que se pretenden enseñar, que deben ser los más generales y estructurales del tema de la UEPS. Esta nueva presentación debe hacerse con un nivel de complejidad más alto que el del primer abordaje hecho con anterioridad, a través de nuevos ejemplos en los que se destaquen semejanzas y diferencias con relación a los ejemplos y situaciones ya trabajados. Posterior a esta presentación, deberá proponerse una actividad colaborativa que posibilite la interacción social y la negociación de significados entre los alumnos, con la mediación del docente. En este sentido, se sugiere la construcción de un mapa conceptual o de un diagrama V, pues entre las diferentes estrategias, son las que más garantizan la negociación de significados y la mediación docente.

Luego se hará una tercera presentación del tema de aprendizaje y sus significados, mediante una breve exposición oral, una lectura de un texto, una presentación audiovisual, etc. Lo importante aquí es establecer unas conclusiones, dándole continuidad al proceso de diferenciación progresiva, retomando las características más relevantes del tema en cuestión, pero desde una perspectiva integradora, es decir, buscando la reconciliación integradora y la consolidación. En este punto del desarrollo de la UEPS, se deberán proponer y trabajar nuevas situaciones problema, de un nivel de complejidad más alto que el de las situaciones anteriores, de una manera colaborativa para después ser presentadas y discutidas en el grupo grande y con la mediación del docente.

incorporaremos durante el proceso el uso de otros mediadores que dinamizan la apropiación conceptual del estudiante, como las aplicaciones tecnológicas en calculadoras y herramientas computacionales (derive), los cuales potencian las posibilidades numéricas, gráficas y simbólicas de un problema, nos permiten encontrar distintas soluciones al variar parámetros; comparar, contrastar, predecir resultados e interpretarlos.

La evaluación del aprendizaje y del desempeño de los alumnos se realizará con base en las evidencias de aprendizaje significativo que el docente debe registrar a lo largo del desarrollo de la UEPS (evaluación formativa) y en el resultado de una evaluación sumativa que todos los alumnos presentarán de acuerdo con los parámetros que establece la universidad.

Es fundamental en el desarrollo de este trabajo el acompañamiento a los estudiantes en los talleres que ofrece la universidad, en asesorías personalizadas y colectivas, las cuales pretendemos ampliar en tiempo, ya que algunos estudiantes que trabajan se les dificultan aprovechar estos espacios por asuntos de horarios laborales.

### **3.1. OBJETIVOS**

Los objetivos de esta propuesta son los siguientes:

#### **3.1.1. Objetivo General:**

Diseñar e implementar una Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa, que permita lograr en esta medida aprendizajes de funciones a través de las formas de representación visualización-modelación en estudiantes de cálculo diferencial del grupo 17 01-12 de la universidad nacional de Colombia, sede Medellín.

#### **3.1.2. Objetivos Específicos**

Lograr en los estudiantes aprendizajes significativos a partir de la modelación expresada en la apropiación conceptual e interpretación del comportamiento de distintos modelos funcionales.

Mejorar la asimilación de contenidos del curso de cálculo diferencial, principalmente en el tema de funciones, a partir del uso de mediadores como calculadoras y software (derive).

Mejorar el rendimiento académico de los estudiantes del curso de cálculo diferencial, grupo 17, propiciándoles aprendizajes significativos.

### 3.2. PLANEACIÓN Y PROGRAMACIÓN DE FUNCIONES

Clase	Sección	Tema
<b>Capítulo 1 – Funciones y Modelos.</b>		
1	(1.1)	Cuatro maneras de representar una función, definición de función, dominio, rango, gráfica de una función, prueba de la recta vertical.
2	(1.1) (1.2)	Funciones definidas a tramos, valor absoluto, simetría, función par, impar, funciones crecientes, decrecientes. Catálogo de funciones básicas: función lineal.
3	(1.2)	Catálogo de funciones básicas: polinomios (grado, raíces, función cuadrática, función cúbica), funciones de potencia, funciones racionales, funciones algebraicas y funciones trigonométricas.
4	(1,3)	Transformaciones de funciones: desplazamientos verticales y horizontales, alargamientos verticales y horizontales.
5	(1.3)	Álgebra de funciones, composición de funciones.
6	(1.5)	Funciones exponenciales: gráficas, leyes de los exponentes, modelación con funciones exponenciales, el número e.
7	(1.6)	Función inversa: función uno a uno, prueba de la recta horizontal, definición de función inversa, gráfica de la función inversa.
8	(1.6)	Funciones logarítmicas: definición, gráficas, leyes de los logaritmos, logaritmo natural, fórmula para el cambio de base, gráfica de la función logaritmo natural.
9	Apéndice C	Funciones trigonométricas inversas: función seno inverso, función tangente inversa, función coseno inverso.

### 3.3. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS Y EVALUACIÓN

El curso de Cálculo Diferencial tendrá una intensidad de **4 horas teóricas** semanales. Además, a partir de la segunda semana los monitores dictarán talleres para reforzar lo aprendido en la semana inmediatamente anterior. Aunque no es obligatoria la asistencia a los talleres, recomendamos a los estudiantes que resuelvan el taller individualmente o en grupos, y asistan por lo menos a una de las sesiones con los monitores.

Es importante saber planear su tiempo de estudio. **Cada semana se deben dedicar al menos 12 horas de trabajo independiente para este curso**, así como acudir a las asesorías que brindan los profesores y monitores de la materia. El horario de asesoría de profesores y monitores se publicará oportunamente en las carteleras y en la página web de la escuela. Los estudiantes pueden solicitar la ayuda de cualquier profesor o monitor de la asignatura dentro de los horarios fijados.

También recomendamos a los estudiantes leer el material de clase anticipadamente, con el fin de obtener mayor provecho de cada clase, hacer, como mínimo, los ejercicios propuestos, y consultar ejercicios de otros textos.

Recordamos que las Matemáticas se construyen como un edificio y que **para comprender bien un tema, se deben entender los temas anteriores** o prerrequisitos. Así, para presentar, por ejemplo, el segundo parcial será necesario saber todo el tema del primer parcial y por eso recomendamos repasar constantemente los temas anteriores.

Recomendamos muy especialmente visitar la página web del texto guía: <http://www.stewartcalculus.com>

En esta página podrán encontrar material muy valioso para el desarrollo del curso.

Este semestre el método de evaluación será el siguiente:

Los exámenes parciales tendrán una duración de una hora y cincuenta minutos. Cada examen parcial consistirá de preguntas similares a las propuestas en los talleres y en el texto guía en su listado de ejercicios, incluyendo:

- Preguntas de revisión de conceptos, de falso y verdadero, o selección múltiple.
- Ejercicios operativos.
- Problemas en palabras sobre aplicaciones de los conceptos matemáticos a situaciones de la vida real.

Los temas correspondientes a cada examen se muestran a continuación **y están sujetos a cambios**:

EVALUACION	TEMA	FECHA
Primer parcial (25%)	Clases 1 a 9	Por definir
Quiz (15%)	Clases 10, 11, 12,13	Por definir
Segundo parcial (30%)	Clases 14 a 20	Por definir
Tercer parcial (30%)	Clases 21 a 26	Por definir

### 3.4. PREPARACIÓN DE CLASES

FUNCIONES.

PAR ORDENADO: Se llama par ordenado, que se denota  $(x, y)$ , al conjunto formado por dos elementos que pueden ser iguales; se dice que  $x$  es el primer elemento y que  $y$  es el segundo.

IGUALDAD DE PARES ORDENADOS:

Dos pares ordenados son iguales si y solo si sus componentes son iguales, así:  $(x, y)=(a, b) \Leftrightarrow$

$x=a, y, y=b.$

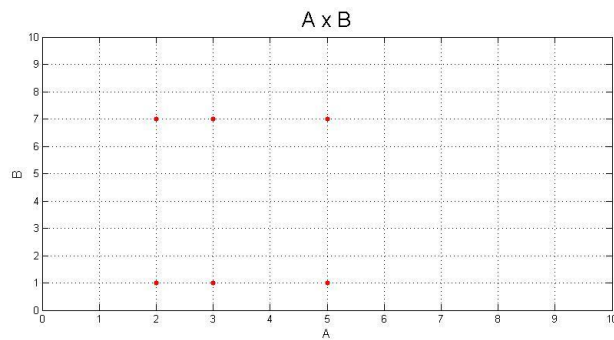
PRODUCTO CARTESIANO

Se llama producto cartesiano del conjunto  $A$  por el conjunto  $B$ , al conjunto cuyos elementos son pares ordenados de primera componente en  $A$  y segunda componente en  $B$

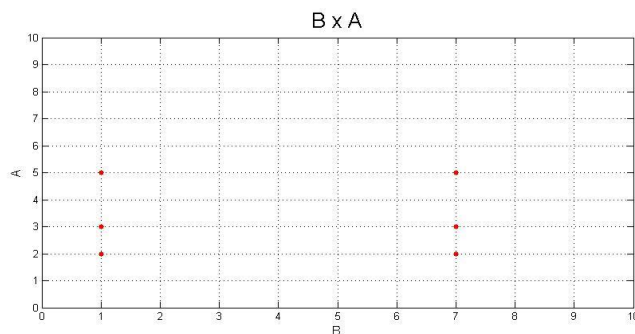
$A \times B = \{(a, b) / a \in A, y, b \in B \}$

Ejemplo:  $A=\{2,3,5\}$      $B=\{1,7\}$

$A \times B = \{(2,1), (2,7), (3,1), (3,7), (5,1), (5,7)\}$



$B \times A = \{(1,2), (1,3), (1,5), (7,2), (7,3), (7,5)\}$



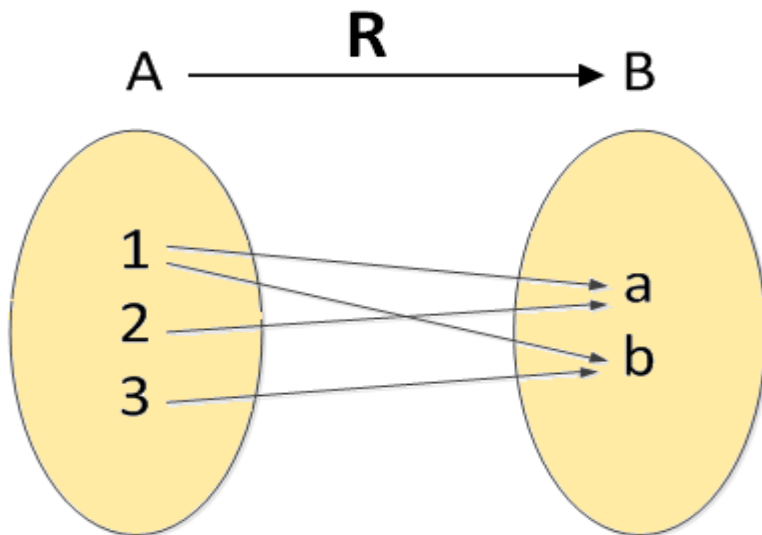
Relación: sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos no vacíos, una relación  $R$  de  $A$  en  $B$  es un subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$ .

$R$  es relación si y solo si  $R \subseteq A \times B$

Ejemplo:  $A = \{1,2,3\}$      $B = \{a, b, c\}$

$R = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, b)\}$

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$



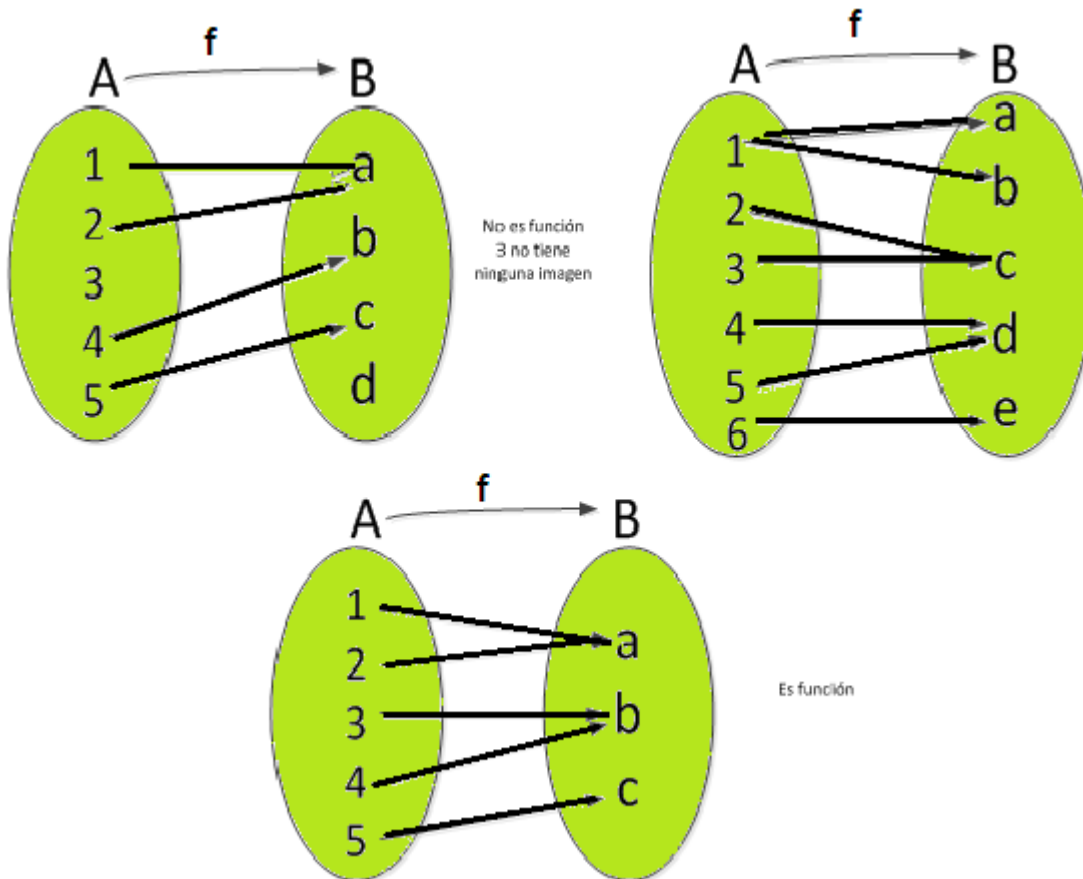
Ejemplo:  $H = \{(x, y) : x \text{ real}, y \text{ real}, y = 2x + 1\}$ , es una relación de  $R$  en  $R$

DEFINICION: Sea  $f$  una relación de  $A$  en  $B$

$f$  es función de  $A$  en  $B$  si  $(a, b) \in f$  y  $(a, c) \in f$  implica que  $b = c$

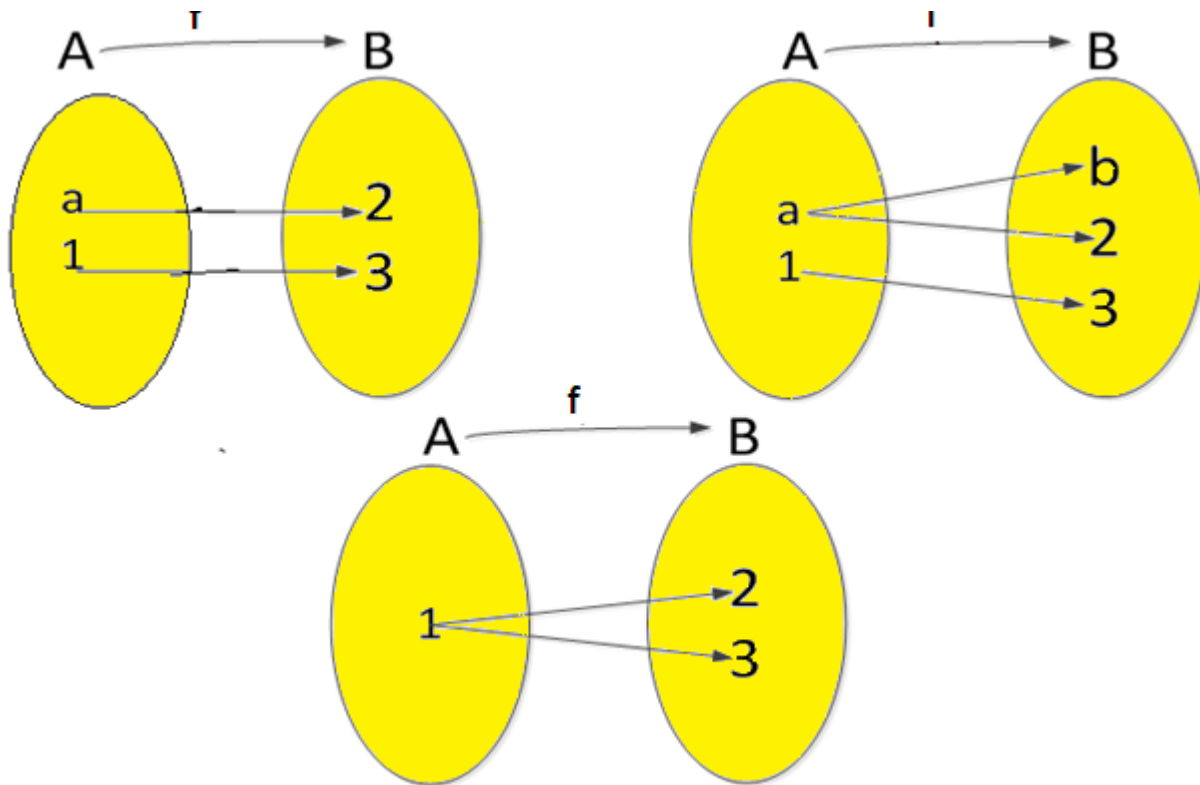
FUNCIÓN: Se llama función de un conjunto  $A$  en un conjunto  $B$  a toda relación  $R$  de  $A$  en  $B$  que cumple la siguiente condición: para cada elemento  $X \in A$ , existe un elemento

$y \in B$  y Solo uno tal que  $x R y$  ( $x$  se relaciona con  $y$ )



NOTA: El segundo diagrama tampoco es función ya que el 1 tiene dos imágenes.

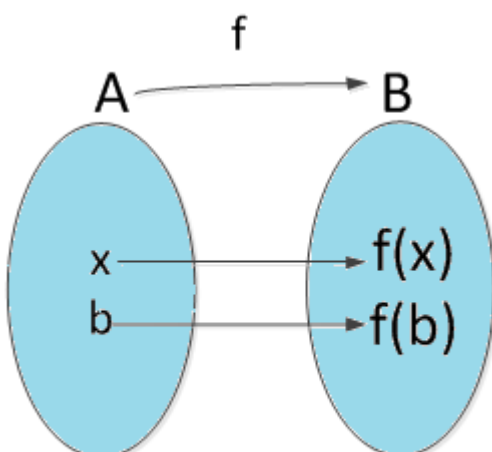
DEFINICIÓN: Sea  $F$  una relación de  $A$  en  $B$   $f$  es función de  $A$  en  $B$  si  $(a, b) \in f$  y  $(a, c) \in f$  implica que  $a=c$ .



NOTA: En el primer diagrama es función siempre que  $a \neq 1$ . Para el de la derecha no se satisface la definición, excepto que  $a \neq 1$  y  $b = 2$ ; si  $a = 1$  no habría función. Evidentemente el último diagrama no corresponde a una función de A en B.

DEFINICIÓN: Una función  $f$  de A en B es una regla que a cada  $x$  de un conjunto A asigna exactamente un elemento de B, tal elemento por ser único se denota  $f(x)$  y, se denomina imagen por  $f$  de  $x$ .

El conjunto A se llama dominio de la función y el conjunto B se llama codominio de la función. Y al conjunto de valores que efectivamente toma  $f$ , y que es subconjunto de B se llama rango o recorrido de la función  $f$ .



En Cálculo Diferencial consideramos funciones en las que el dominio y recorrido son números reales, llamadas funciones de variable real o funciones reales.

## CUATRO MANERAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Verbalmente → Descripción en palabras.

Numéricamente → Tabla de valores.

Visualmente → Una gráfica.

Algebraicamente → Una fórmula explícita.

Ejemplo:

El número de vibraciones ( $v$ ) de un acuerda que vibra es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión  $T$  de la cuerda. Una cuerda particular vibra a 864 vibraciones por segundo, sometida a una tensión de 24 kg. Representa esta función en todas sus formas posibles.

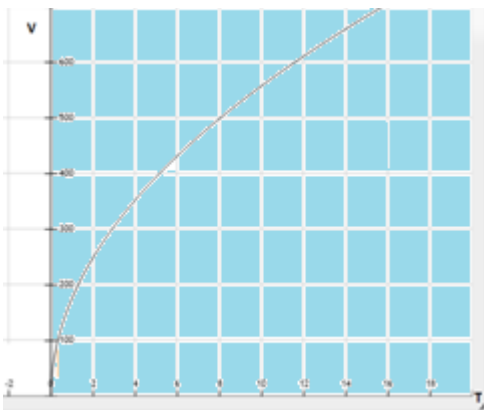
Solución.

Ya que  $V$  es directamente proporcional a  $\sqrt{t}$  entonces existe una constante positiva  $k$ , tal que  $v=k\sqrt{t}$ . Ahora,  $v= 864$  cuando  $T= 24$  y así

$$864 = k\sqrt{24}, \quad k = \frac{864}{\sqrt{24}}, \quad k = 72\sqrt{6}$$

$$v = 72\sqrt{6}\sqrt{T} = 72\sqrt{6T}$$

Representación gráfica.

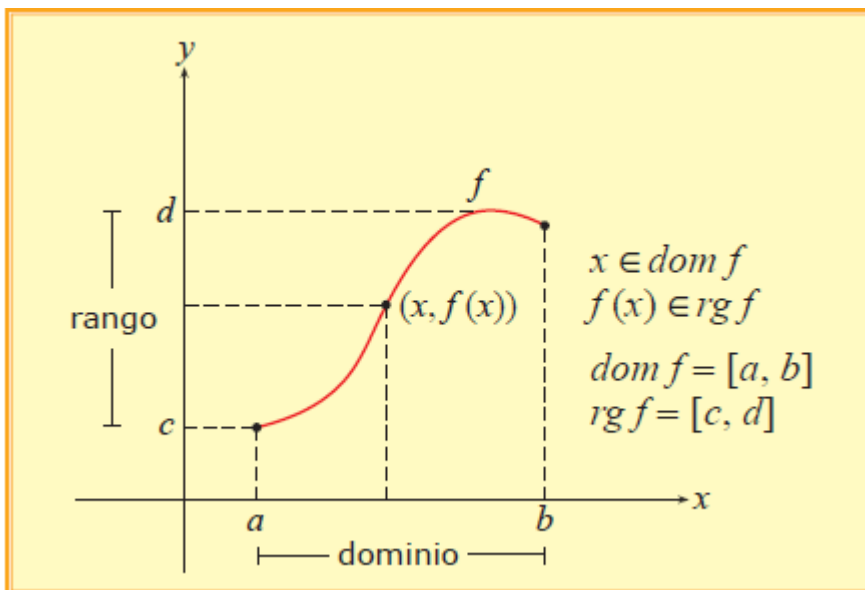


## CÁLCULO DEL DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Si  $f(x, y) = 0$  es una ecuación para los números reales  $x$  e  $y$ , para calcular el dominio de  $f(x, y) = 0$ , se despeja  $y$  en términos de  $x$ , siempre que sea posible, y analizamos los posibles valores de  $x$  para los cuales  $y$  es un número real.

Para calcular el rango, despejamos  $x$  en función de  $y$ , siempre que sea posible, y analizamos los posibles valores de  $y$  para los cuales  $x$  es un número real.

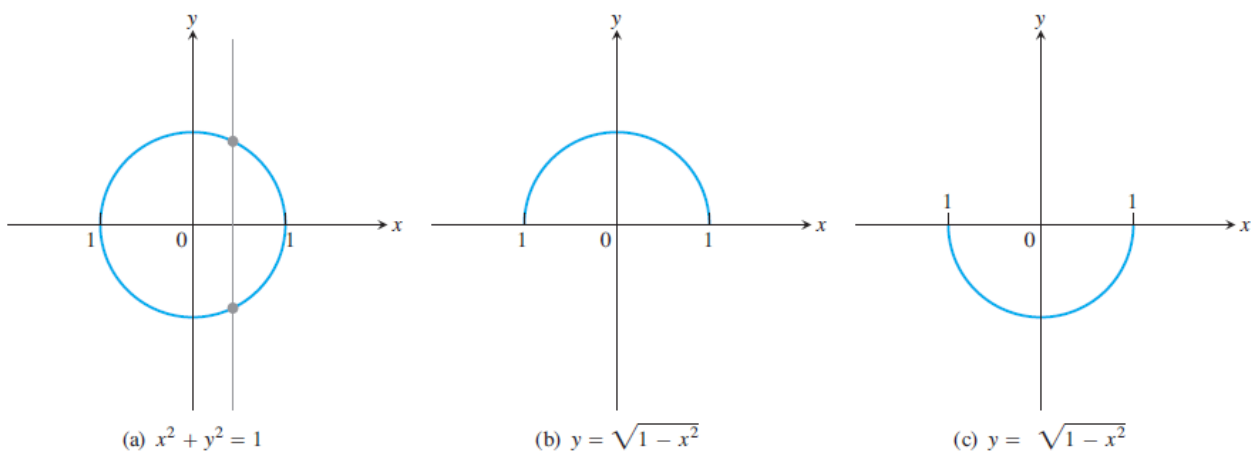
Definición: Si  $f$  es una función con dominio  $A$ , entonces su gráfica, que se denota  $\text{graf}(f)$ , es el conjunto de parejas ordenadas:  $\{(x, f(x)) | x \in A\}$



PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL.

Una curva en el plano  $XY$  es la gráfica de una función de  $x$  si y solo si ninguna recta vertical se interseca con la curva en más de un punto.

Ejemplo:  $x^2 + y^2 = 1$  (en ésta caso  $0 = f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ )



(a) La circunferencia no es la gráfica de una función; no satisface el criterio de la recta vertical. (b) La semicircunferencia superior es la gráfica de la función  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ . (c) La semicircunferencia inferior es la gráfica de la función  $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$ .

EJEMPLO: 1

Determinar el dominio, rango y gráfica de la siguiente función:  $f(x) = x^2 + 2x - 1$

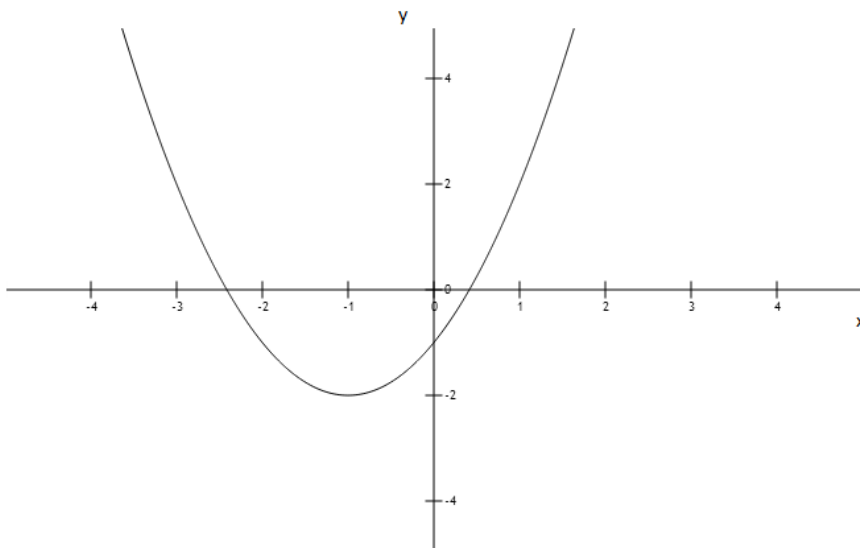
Solución:

Calculemos las raíces de la función empleando la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (4)(-1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}, \text{ luego } x_1 = -1 + \sqrt{2} = 0,41, \text{ y } x_2 = -1 - \sqrt{2} = -2,4$$

Dominio de  $f = \mathbb{R}$

Rango :  $y = x^2 + 2x - 1$ , por tanto,  $x^2 + 2x - (y + 1) = 0$ , o sea  $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4(1)(y+1)}}{2(1)}$ , luego debe ser  $4 + 4(y + 1) \geq 0$ , es decir,  $y + 2 \geq 0$ , y así  $y \geq -2$



Ejemplo: 2

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$D_h = \{x / y = \sqrt{4 - x^2}\} = \{x / 4 - x^2 \geq 0\} = \{x / x^2 \leq 4\} = \{x / |x| \leq 2\} = [-2, 2]$$

$$R_h = \{y / y = \sqrt{4 - x^2}\} = \{y / y^2 = 4 - x^2, y, y \geq 0\} = \{y / x^2 = 4 - y^2, y, y \geq 0\} = \{y / 4 - y^2 \geq 0, y, y \geq 0\}$$

$$= \{y / y^2 \leq 4, y \geq 0\} = \{y / -2 \leq y \leq 2, y \geq 0\} = [0, 2]$$

Luego el rango de  $h$  es  $[0, 2]$

Ejemplo 3.

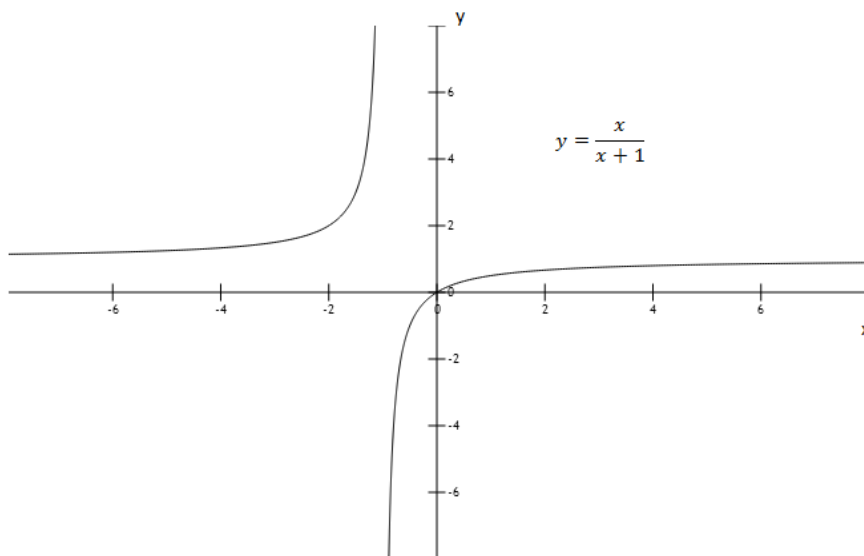
Graficar:  $i(x) = \frac{x}{x+1}$  a partir de  $f(x) = 1/x$

Solución:  $i(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 1$

Como  $x \neq -1$ , el dominio es:  $\mathbb{R} - \{-1\}$

Como:  $y = \frac{x}{x+1} \Rightarrow xy + y = x \Rightarrow y = x - xy \Rightarrow y = x(1 - y) \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow 1 - y \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$

Así que el rango es :  $\mathbb{R} - \{1\}$



## NOTACIÓN DE FUNCIÓN

Sea  $f$  una función de variable real. A la variable independiente  $x$ , a veces se le llama argumento de la función.

Ejemplo:

Para el caso de la función cúbica  $f(x) = x^3$ ,  $f$  es la regla que nos indica elevar al cubo el argumento, así

$$f(2) = (2)^3 = 8; f(2 + h) = (2 + h)^3; f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3,$$

etc.

Gráfica de  $y = x^3$  y algunas curvas asociadas.

(a)  $f(x) = x^3$

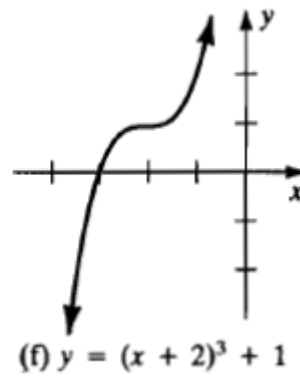
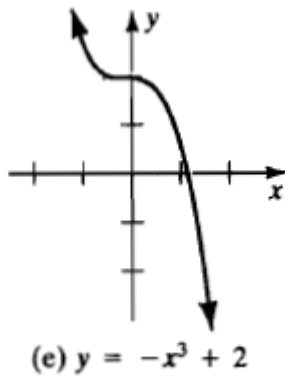
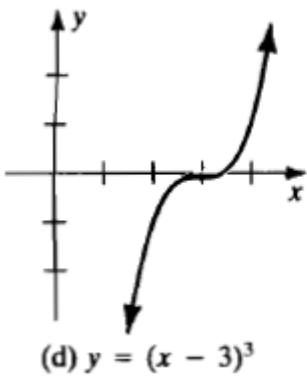
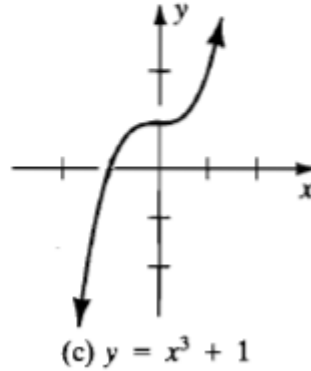
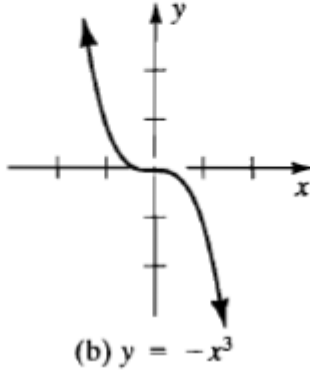
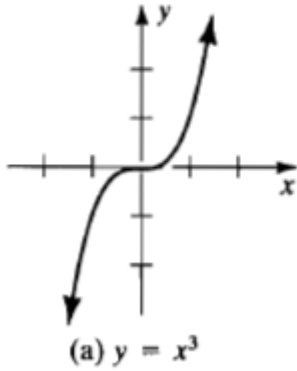
(c)  $f(x) = x^3 + 1$

(e)  $f(x) = -x^3 + 2$

(b)  $f(x) = -x^3$

(d)  $f(x) = (x - 3)^3$

(f)  $f(x) = (x + 2)^3 + 1$



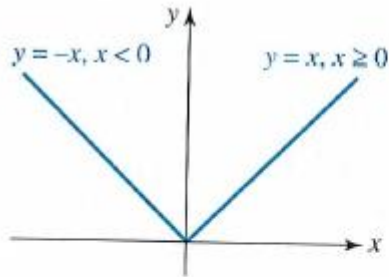
Ejercicio propuesto:

Para G definida por  $G(x) = 2x^3 - 3x$  evalúe:

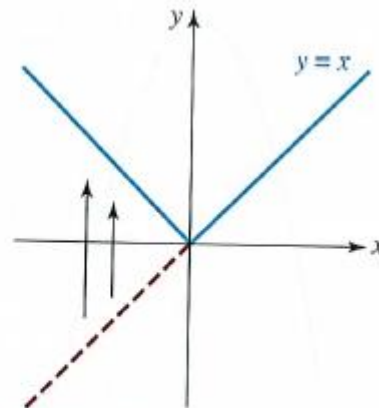
$G(3)$ ;  $G(x) + G(3)$ ;  $-G(x)$ ;  $G(-x)$ ;  $G(x + 3)$ ;  $\frac{G(x)-G(1)}{x-1}$

Función valor absoluto.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



a)  $y = |x|$



Reflejar esta parte de  $y = x$  en el eje  $x$

b)

### FUNCIONES DEFINIDAS A TRAMOS.

Dada  $g$  calcular dominio y rango.

$$g(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x > 2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 4x + 5 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

Solución:

El dominio de  $g$  es  $[-1, \infty)$  (por qué?)

El rango de  $g$ :

Como  $y = 3x + 2$  es una recta y es válida para  $x > 2$ , entonces en esta parte de  $g$  su rango será  $y = 3x + 2 > 3(2) + 2 = 8$ , o sea  $y > 8$

Como  $y = \sqrt{4 - x^2}$  para  $1 \leq x \leq 2$ , es decreciente, y en  $x = 1$ ,  $y = \sqrt{4 - 1^2} = \sqrt{3}$ , y en  $x = 2$ ,  $y = \sqrt{4 - 2^2} = 0$ , en este tramo el rango es  $[0, \sqrt{3}]$

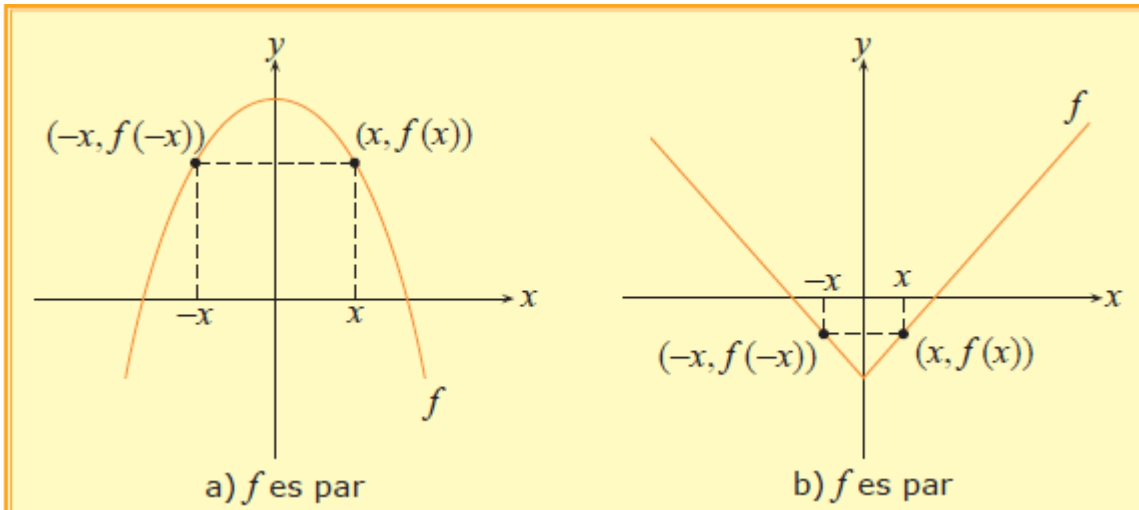
Y como  $y = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$ , que es una parábola con vértice en  $(-2, 1)$ , por tanto es creciente a la derecha de  $x = -2$ . Así que para  $x$  tal que  $|x| < 1$ , o sea para  $-1 < x < 1$ , la  $y$  tomaría los valores entre  $2 = (-1)^2 + 4(-1) + 5$  y  $10 = 1^2 + 4(1) + 5$

Por lo tanto su rango es  $(8, +\infty) \cup [0, \sqrt{3}] \cup (2, 10) = [0, \sqrt{3}] \cup (2, +\infty)$

### FUNCIÓN PAR.

Una función se denomina par si satisface que:

$$f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \text{ en su dominio.}$$



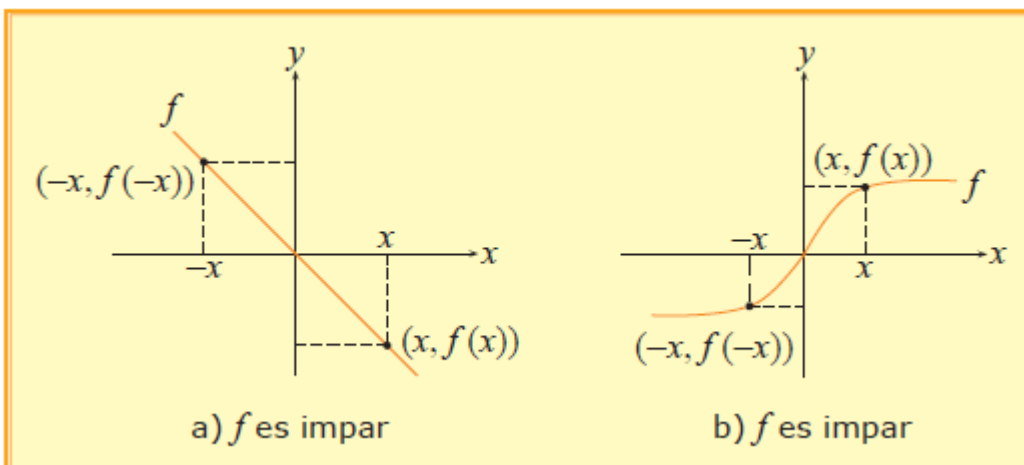
Ejemplo:

$$f(x) = x^2; g(x) = |x|; h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

### FUNCIÓN IMPAR

Una función  $f$  se denomina impar si satisface que:

$$f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x \text{ en su dominio.}$$

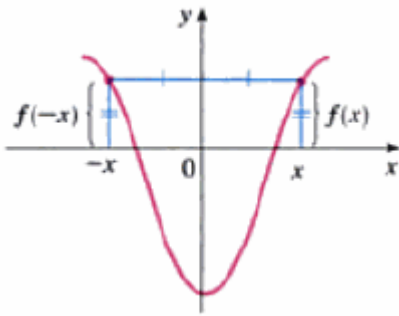


Ejemplo:

$$f(x) = x^3, g(x) = x^5 - x^3 + x, I(x) = 2x - x^7$$

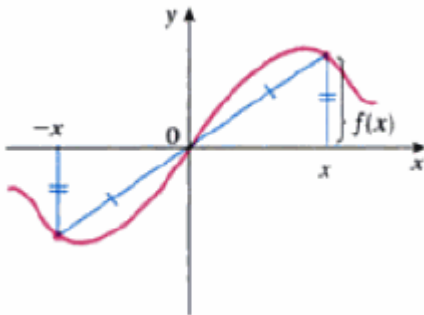
### SIMETRÍA CON RESPECTO AL EJE Y.

Si al cambiar  $x$  por  $-x$  se obtiene una ecuación, equivalente, es decir  $f(x) = f(-x)$ , lo cual se cumple para toda función par.



SIMETRÍA CON RESPECTO AL ORIGEN.

Si al cambiar  $x$  por  $-x$ ,  $y$  por  $-y$  se obtiene una ecuación equivalente a  $f(x) = -f(-x)$  que es la definición de función impar ejemplo:



Dada  $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$

Demostremos que  $f$  es par

Solución:

Como  $|x| = |-x|$  se tiene que  $f(x) = f(-x)$  por tanto  $f$  par.

Dado el número  $a$ , resuelva la ecuación:  $f(x) = a$ .

Solución:

Solo tiene sentido para  $a \geq 0$  teniendo en cuenta que  $f$  es no negativa. Consideramos  $x \geq 0$ :

$$\frac{|x|}{1+|x|} = a \leftrightarrow \frac{x}{1+x} = a \leftrightarrow x = a + ax$$

$$x - ax = a \leftrightarrow x = \frac{a}{1-a}$$

Luego la solución es  $x = \frac{a}{1-a}$ , válida para  $a \geq 0$ , y  $a \neq 1$ . Y como  $x \geq 0$ , es  $a < 1$

Para el caso  $x \leq 0$  se tiene:

$$\frac{-x}{1-x} = a$$

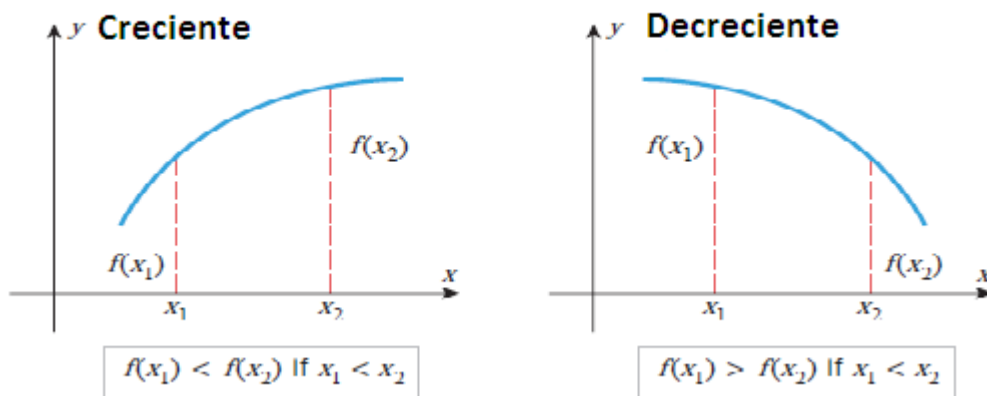
Luego  $-x = a - ax$ , o sea  $ax - x = a$ , de donde

$$x = \frac{a}{a-1}, \text{ válida para } a \geq 0, \text{ con } a \neq 1. \text{ Y como } x \leq 0 \text{ es } a < 1$$

De acá se puede concluir que el rango de  $f$  es  $[0, 1)$

Definición: sea  $f$  una función definida en un intervalo, y sean  $x_1$  y  $x_2$  dos números

Cuales quiera en este intervalo.  $f$  es creciente en el intervalo si  $f(x_1) < f(x_2)$  siempre que  $x_1 < x_2$

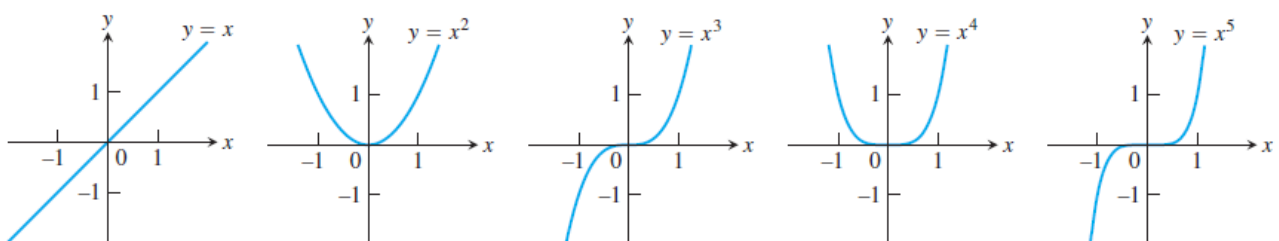


## FUNCIONES POTENCIALES

Para un entero positivo  $n$  sea  $f$  la función definida por

$$f(x) = x^n \text{ para todo real } x$$

Cuando  $n = 1$  es la función identidad; para  $n=2$  la gráfica representa una parábola; para  $n=3$  la gráfica es una cúbica.



**FIGURA** Gráficas de  $f(x) = x^n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  definidas para  $-\infty < x < \infty$ .

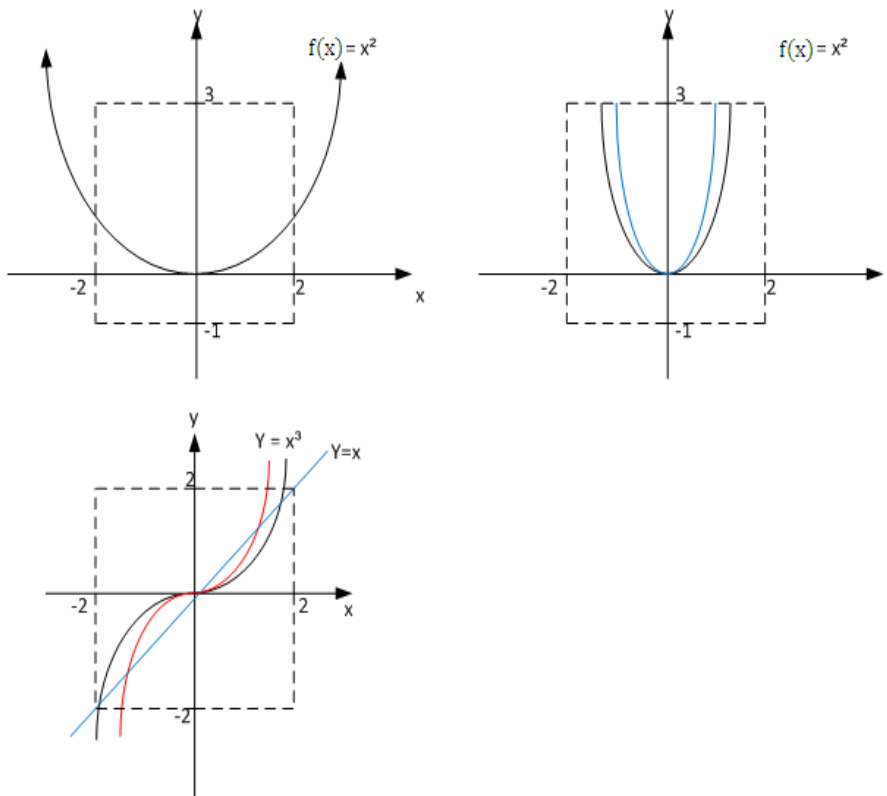
Ejemplo:

Grafique las funciones:

$f(x) = x^n$  para  $n = 2$  o  $4$  y en el rectángulo de división  $[-2,2]$  por  $[-1,3]$

Grafique las funciones:

$f(x) = x^n$  para  $n = 1,3$  o  $5$  en el rectángulo de división  $[-2,2]$  por  $[-2,2]$



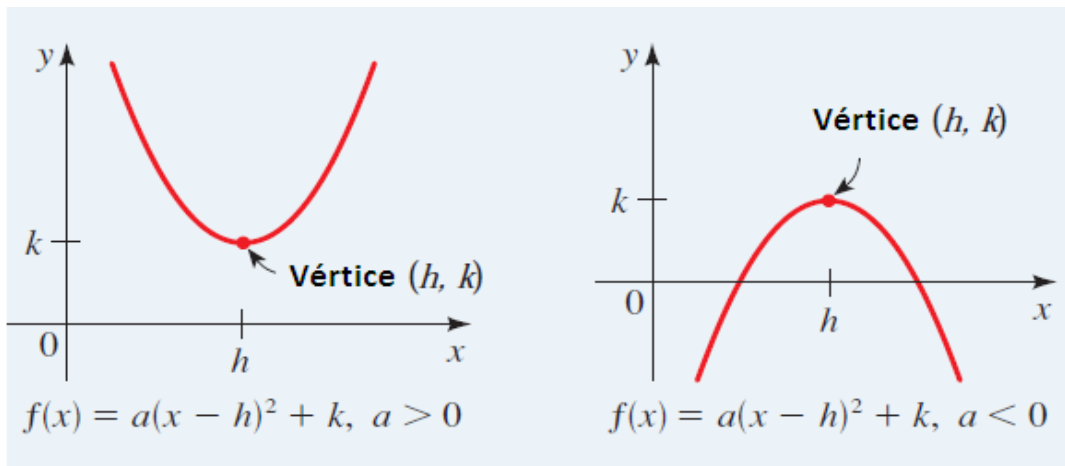
Si  $n$  es par la gráfica de  $f(x) = x^n$  es similar a la parábola  $y = x^2$

Si  $n$  es impar la gráfica de  $f(x) = x^n$  es similar a la gráfica de  $y = x^3$

Cuando  $n$  crece, la gráfica de  $f(x) = x^n$  se vuelve más plana cerca de cero y más inclinada cuando  $x > 1$ ; para  $0 < x < 1$  las potencias menores de  $x$  son las imágenes más grandes, pero cuando  $x > 1$  las potencias mayores son las dominantes.

#### VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La forma estándar de una parábola es  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ , por tanto, el valor máximo o mínimo ocurre en  $x = h$ . Si  $a > 0$  hay un mínimo de  $f$  que es  $f(h) = k$ , y si  $a < 0$  hay un máximo que también es  $f(h) = k$ .



Como  $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

y esta ecuación es de la forma estándar con  $h = -\frac{b}{2a}$  y  $k = c - \frac{b^2}{4a}$ , entonces para  $f(x) = ax^2 + bx + c$  el vértice ocurre en  $h = -\frac{b}{2a}$

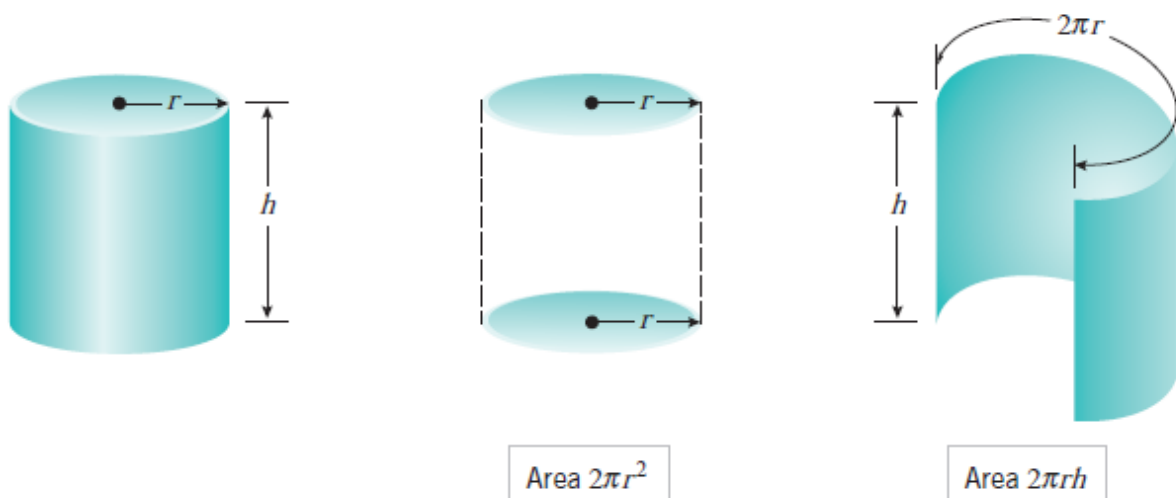
Si  $a < 0$  un máximo y es  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$

Si  $a > 0$  un mínimo y es  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$

**EJEMPLO:**

Un fabricante elabora una lata de metal cilíndrica que contiene 1 litro de aceite. Establezca un modelo que determine el área de la superficie total de lata como una función del radio  $r$ .

Solución:



Como el volumen del cilindro es  $V = \pi r^2 h$ , y de acuerdo con los datos del problema el volumen es 1 litro =  $1000\text{cm}^3$ , entonces:

$1\text{l} = 1000\text{cm}^3 = \pi r^2 h$ , luego  $h = \frac{1000}{\pi r^2}$ . El dibujo nos muestra que la superficie es:

$$s(r) = \text{Área de la superficie total} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2}$$

Por tanto  $s(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ . Válido para  $r \neq 0$ .

### FUNCIÓN POLINÓMICA

Una función polinómica  $p$  está definida para todo número real  $x$  por una ecuación de la forma.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , donde  $n$  es un entero no negativo y los números  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  son constantes llamadas coeficientes del polinomio.

Si  $a_n \neq 0$ , entonces el grado del polinomio es  $n$ .

Son funciones polinómicas:

$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ , función polinómica de grado cero, incluso cuando  $k$  es cero.

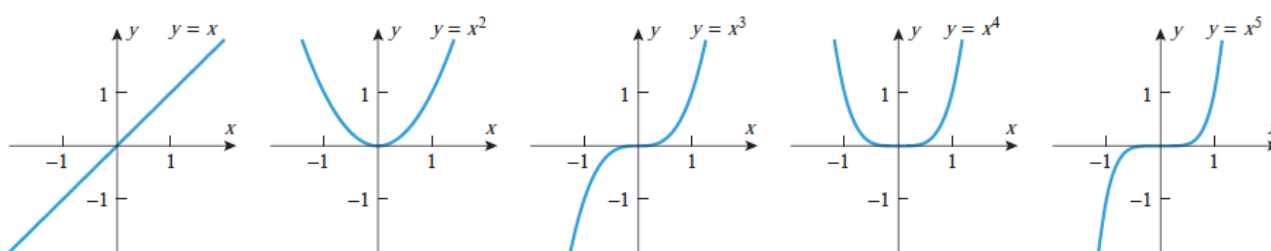
$f(x) = ax + b$ , función polinómica de grado uno (Lineal)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ , función polinómica de grado dos (Cuadrática)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  función polinómica de grado tres (Cúbica)

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  función polinómica de grado cuatro

(Con  $a \neq 0$ ) en todos los casos)



### SUGERENCIAS PARA GRAFICAR UNA FUNCIÓN POLINÓMICA

Calcule  $f(-x)$  para determinar si la gráfica tiene simetría respecto al eje Y.

Calcule los interceptos: en Y se resuelve  $f(0)$ , y en X se hallan los  $x$  tales que  $y = 0$ , o sea factorizando (en caso de ser posible) para determinar las raíces, es decir, se resuelve  $f(x) = 0$ .

Trace una recta numérica y determine los signos algebraicos de todos los factores entre las raíces para determinar en donde  $f(x) > 0$  y en donde  $f(x) < 0$ . Grafique la función utilizando los resultados anteriores y marcando puntos adicionales en donde sea necesario.

Ejemplo:

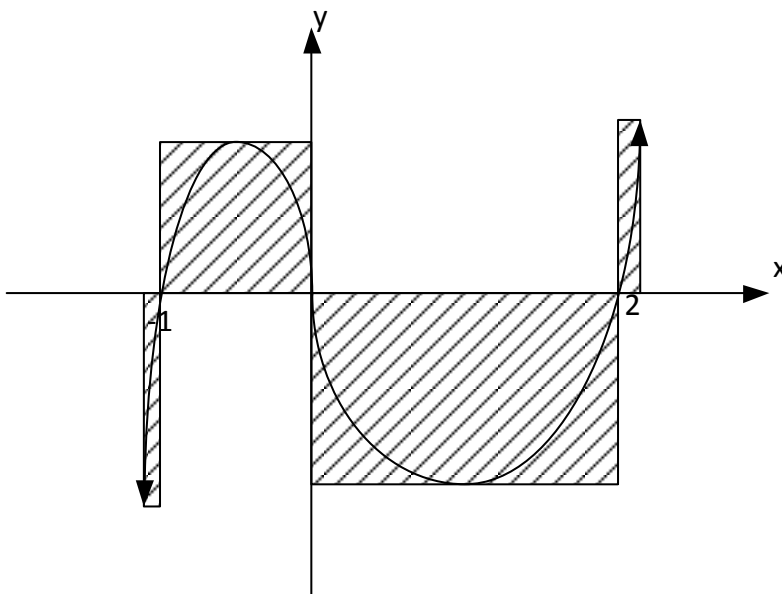
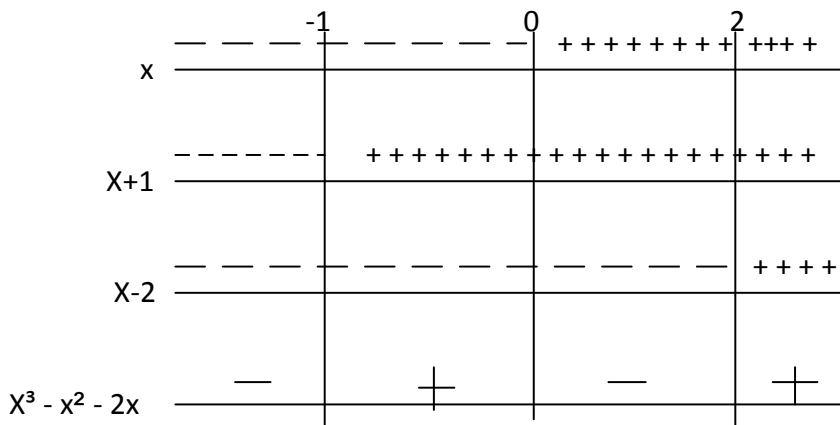
Grafique  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Solución:

$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 - 2(-x) = -x^3 - x^2 + 2x$  (No es par ni impar, pues  $f(-x) \neq f(x)$  y  $f(-x) \neq -f(x)$ ). Luego no es simétrica con respecto al eje Y ya que  $f(-x) \neq f(x)$  y como  $f(-x) \neq -f(x)$ , tampoco es simétrica con respecto al origen.

De  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$  se tiene que  $f(0) = (0)^3 - (0)^2 - 2(0)$ , es decir:  $f(0) = 0$ , o sea que  $(0,0)$  está en la curva.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$  y  $x = -1$ , son raíces.



### TANGENTE AL EJE X

Si una función polinómica contiene un factor  $(x - k)^n$ ,  $n > 1$ , la gráfica será tangente al eje  $x$  en  $x = k$ . Si  $n$  es par la gráfica estará completamente por encima o completamente por debajo del eje  $x$  en un intervalo que contiene  $x = k$ , excepto en el punto de tangencia  $x = k$ , donde toca al eje  $x$ . Si la  $n$  es impar la gráfica atraviesa el eje  $x$ .

Graficar:  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

Solución:

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 + 4 = f(x)$$

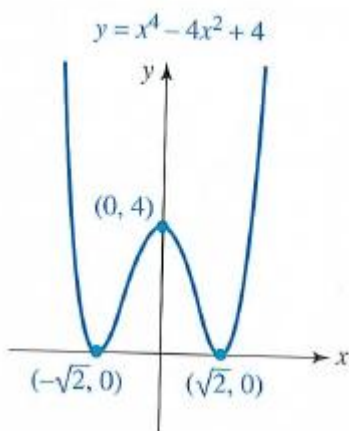
La función es par y por lo tanto su gráfica es simétrica con respecto al eje  $y$ .

a)  $f(0) = 4$ , luego  $(0,4)$  está en la curva.

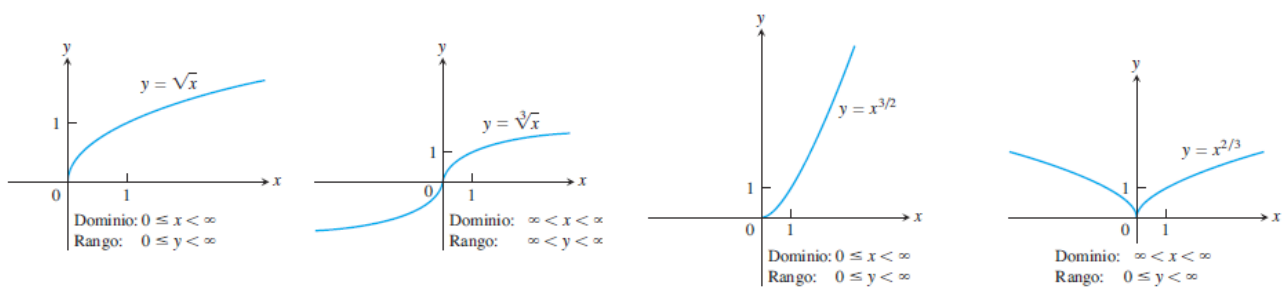
$$b) x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{2})^2 (x - \sqrt{2})^2 = 0.$$

Raíces:  $x = -\sqrt{2}$ ;  $x = \sqrt{2}$ , las cuales también representan los puntos de tangencia en el eje  $x$ .

Como  $f(x) = (x^2 - 2)^2 \geq 0$  para todo  $x$ , no hay necesidad de diagrama de signos, pues la función está en la parte no negativa del eje  $y$ .



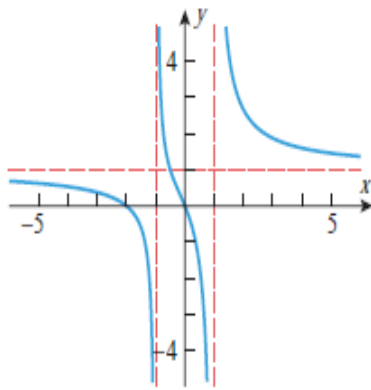
### Otras Funciones Potenciales



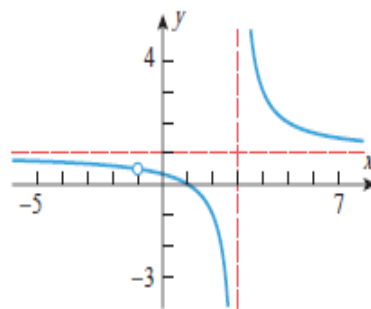
## FUNCIÓN RACIONAL

Una función racional  $f$  es una razón de dos polinomios  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ;  $q(x) \neq 0$ , donde  $p$  y  $q$  son polinomios. El dominio de  $f$  consta de todos los  $x$  tales que  $q(x) \neq 0$ .

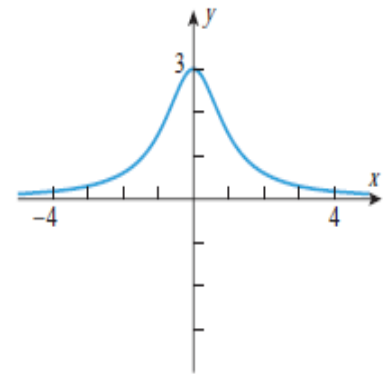
Las siguientes gráficas son ejemplos de funciones racionales:



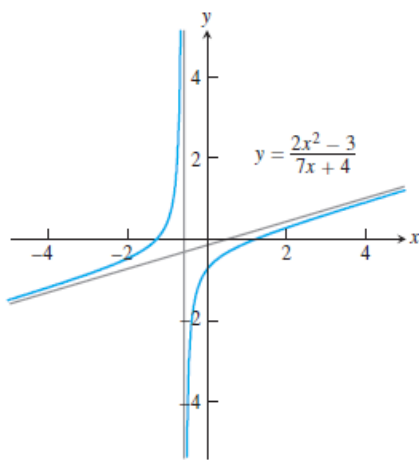
$$y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$



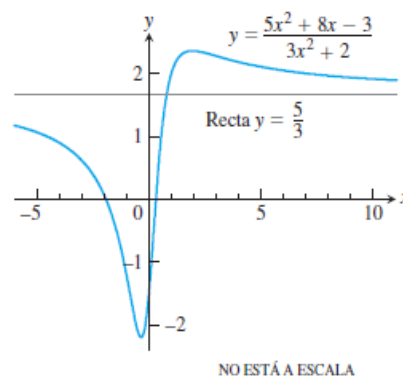
$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$$



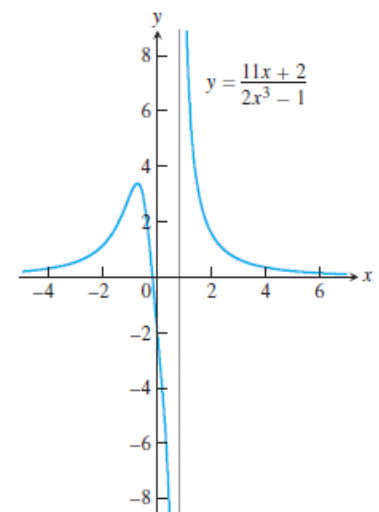
$$y = \frac{3}{x^2 + 1}$$



(a)

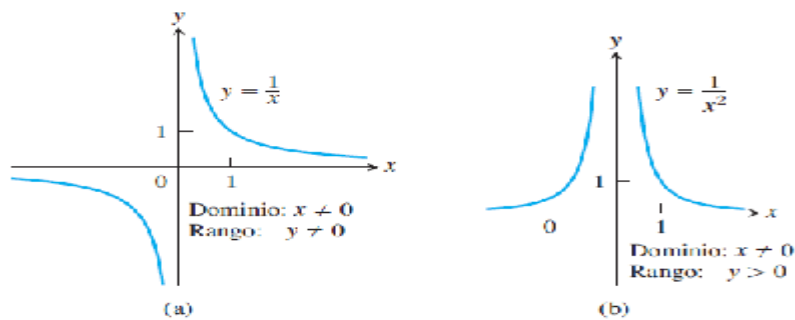


(b)



(c)

## FUNCIONES RECÍPROCAS



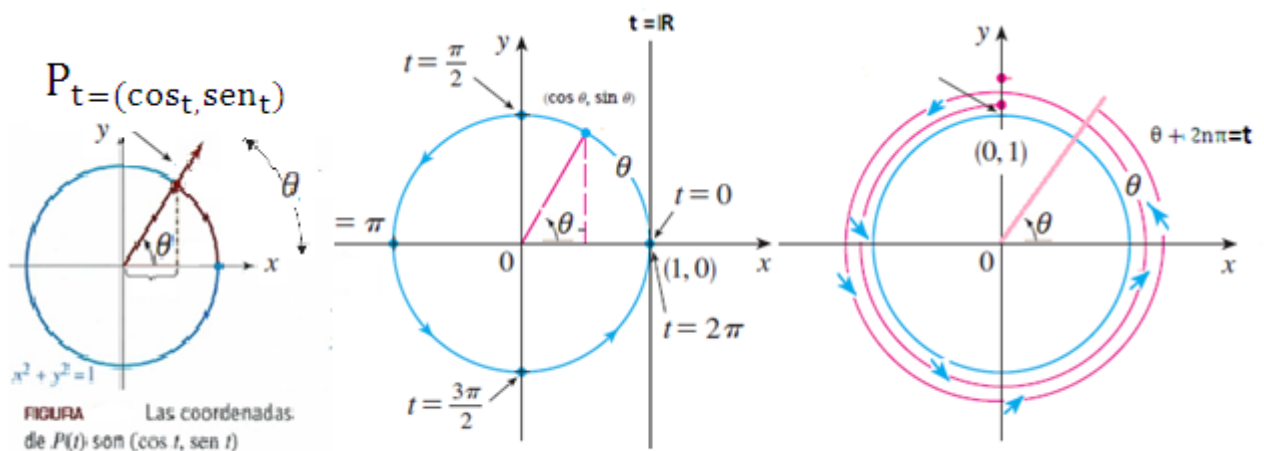
**FIGURA** Gráficas de las funciones de potencia  $f(x) = x^{-a}$  para el inciso (a)  $a = -1$  y para el inciso (b)  $a = -2$ .

## FUNCIONES ALGEBRAÍCAS

Son funciones que se construyen usando operaciones algebraicas (adición, multiplicación, sustracción, división y extracción de raíz) a partir de polinomios.

Ejemplo:  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ;  $g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



## DEFINICIÓN

El valor de cada función trigonométrica para un número real  $t$  se define de la siguiente manera:

Se considera la circunferencia de radio 1 en el plano cartesiano y se añade la recta tangente a la circunferencia en punto  $(1, 0)$

Para  $t \geq 0$ , sobre la recta real se enrolla el segmento de  $t$  unidades alrededor de la circunferencia unitaria en sentido contrario a las manecillas del reloj. Sea  $P_t$  el punto terminal sobre la circunferencia luego del

enrollamiento del segmento de  $t$  unidades. Sean  $(x, y)$  las coordenadas de Pt. Entonces se define  $\text{sen}(t) = y$ ,  $\text{cos}(t) = x$

Nótese que al dividir  $t$  por  $2\pi$  se obtiene  $n$  en los naturales, o,  $n = 0$ , y un residuo  $\Theta$  tal que  $0 \leq \Theta < 2\pi$

Entonces  $t = 2n\pi + \Theta$  y así que  $\text{sen}(t) = y = \text{sen}(\Theta)$  con  $\Theta = \Theta.1$ , o sea que el ángulo coincide con el arco residuo. Análogamente  $\text{cos}(t) = x = \text{cos}(\Theta)$  (De paso se observa que  $\text{sen}$  y  $\text{cos}$  son de periodo  $2\pi$ )

Para  $t < 0$  se procede enrollando en sentido horario.

Las demás funciones trigonométricas se definen así:

$$\tan t = \frac{y}{x}, x \neq 0; \csc t = \frac{r}{y} = \frac{1}{y}, y \neq 0; \sec t = \frac{r}{x} = \frac{1}{x}, x \neq 0; \cot = \frac{x}{y}, y \neq 0.$$

En particular las coordenadas de Pt son:

$(x, y) = (\text{cos } t, \text{sen } t)$  y como Pt satisface  $x^2 + y^2 = 1$ , entonces  $-1 \leq x \leq 1$ ;  $-1 \leq y \leq 1$ , o sea que

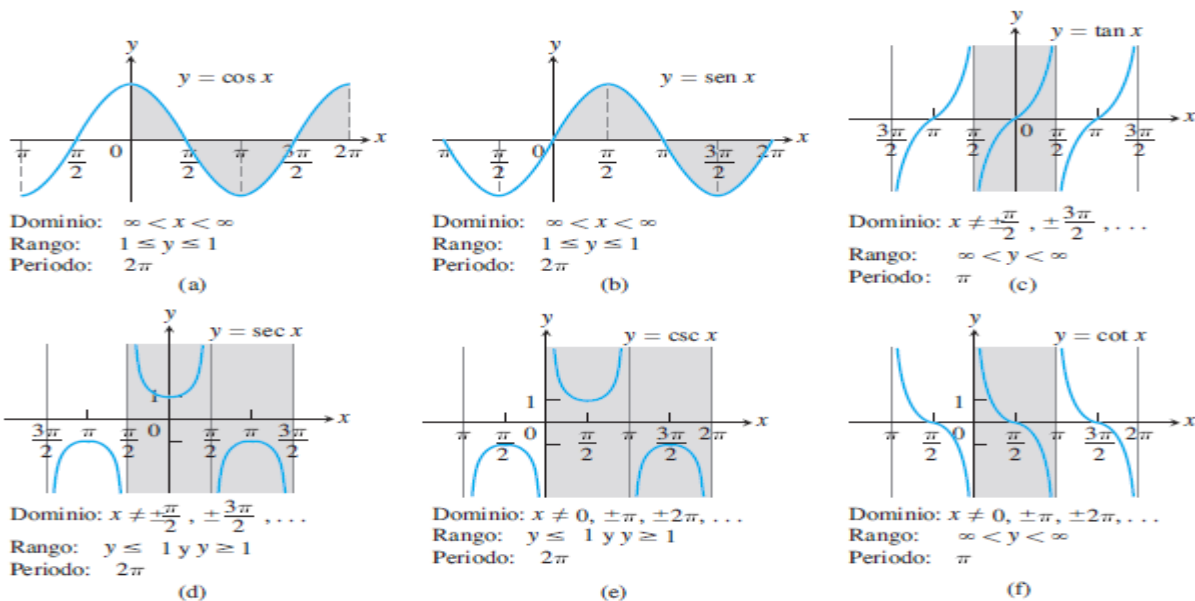
$$|\text{cos } t| \leq 1; |\text{sen } t| \leq 1$$

### PERIODICIDAD

Una función  $f$  no constante es periódica si hay un número positivo  $p$  tal que  $f(t) = f(t + p)$  para cada  $t$  en el dominio de  $f$ . Al menor de esos  $p$  se llama periodo de la función.

PROPIEDADES:  $\text{cos } t = \text{cos}(t \pm 2n\pi)$ ,  $\text{sen } t = \text{sen}(t \pm 2n\pi)$  para  $n$  en  $\mathbb{N}$ , conjunto de los números naturales, y como se dijo anteriormente,  $\text{sen}$  y  $\text{cos}$  resultan de periodo  $2\pi$

### GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



Medida del ángulo ( $x$ )	$\text{sen}(x)$	$\text{cos}(x)$	$\text{tan}(x)$	$\text{cot}(x)$	$\text{sec}(x)$	$\text{csc}(x)$
$0 = 0^\circ$	0	1	0	$\infty$	1	$\infty$
$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	1	0	$\infty$	0	$\infty$	1
$\pi = 180^\circ$	0	-1	0	$\infty$	-1	$\infty$
$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$	-1	0	$\infty$	0	$\infty$	-1
$2\pi = 360^\circ$	0	1	0	$\infty$	1	$\infty$

## TRANSFORMACION DE FUNCIONES

 Desplazamiento vertical de la gráfica de  $y = f(x)$ 

Ecuación	$y = f(x) + c$ con $c > 0$	$y = f(x) - c$ con $c > 0$
Efecto en gráfica	La gráfica de $f$ se desplaza verticalmente hacia arriba una distancia $c$ .	La gráfica de $f$ se desplaza verticalmente hacia abajo una distancia $c$ .
Interpretación gráfica	<p> <math>y = f(x) + c</math>  <math>(a, b + c)</math>  <math>c &gt; 0</math>  <math>(a, b)</math>  <math>y = f(x)</math> </p>	<p> <math>(a, b)</math>  <math>c &gt; 0</math>  <math>(a, b - c)</math>  <math>y = f(x)</math>  <math>y = f(x) - c</math> </p>

DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES.

Desplazamiento horizontal de la gráfica de  $y = f(x)$

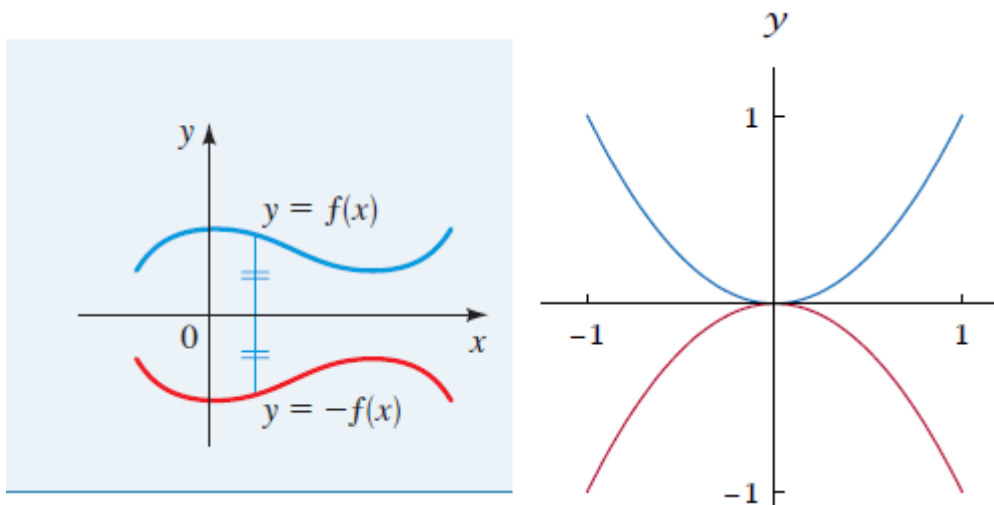
Ecuación	Efecto en gráfica	Interpretación gráfica
$y = g(x)$ $= f(x - c)$ con $c > 0$	La gráfica de $f$ se desplaza horizontalmente a la derecha una distancia $c$ .	
$y = h(x)$ $= f(x + c)$ con $c > 0$	La gráfica de $f$ se desplaza horizontalmente a la izquierda una distancia $c$ .	

Ejemplo propuesto:

Grificar  $f(x) = \sqrt{x - 3}$ ;  $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$ ;  $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  para  $0 \leq x \leq 2\pi$

REFLEXIÓN DE GRAFICAS

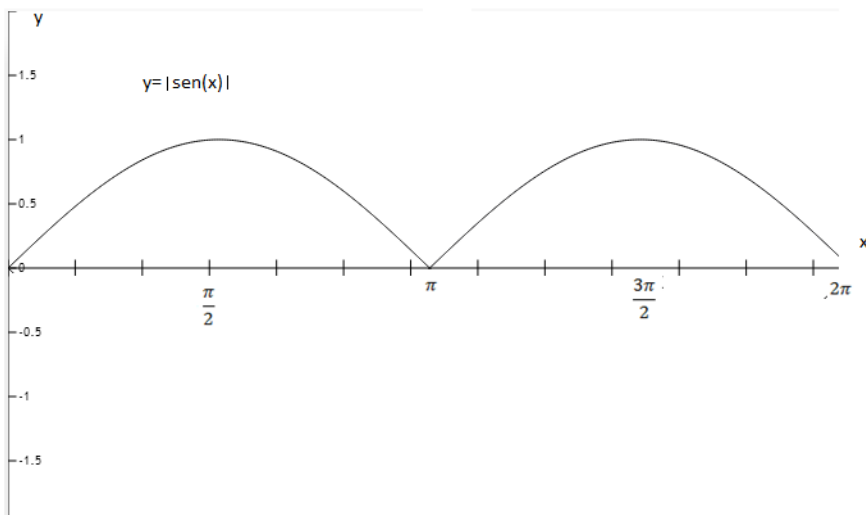
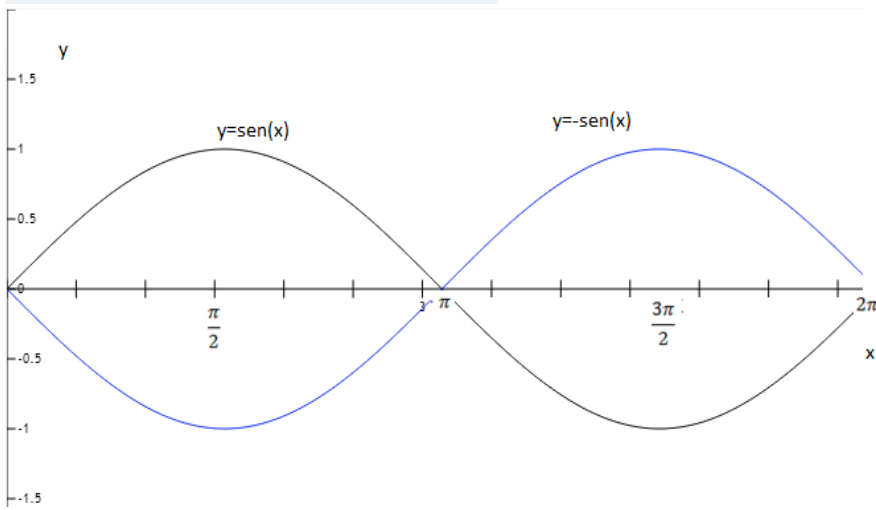
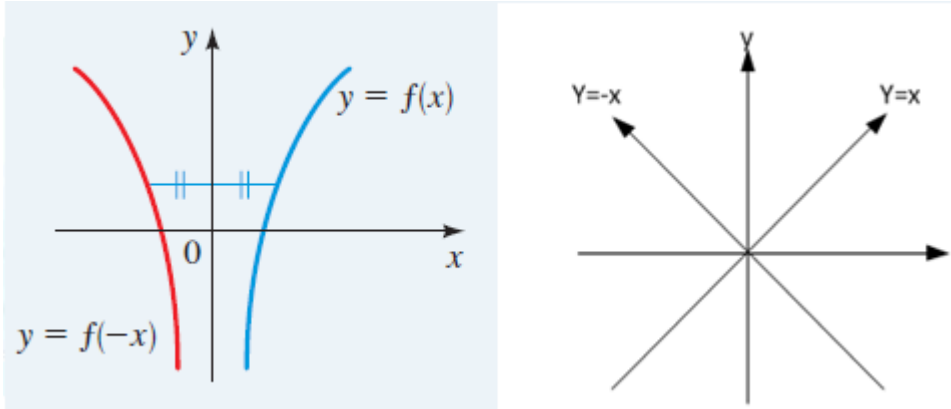
En el eje X para graficar  $y = -f(x)$  se refleja la gráfica de  $y = f(x)$  al otro lado del eje X.

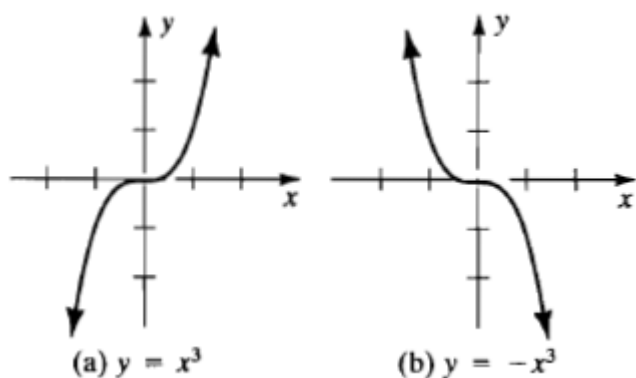


Reflexión de grafica en el eje Y.

Para graficar  $y = f(-x)$ , se refleja la gráfica de  $y = f(x)$  al otro lado del eje Y.

Ejemplos gráficos de reflexiones:





**ESTIRAMIENTOS Y ACORTAMIENTOS VERTICALES (AMPLITUD)**

Para graficar  $y = cf(x)$  hay que multiplicar  $c$  por las ordenadas de los puntos de  $y = f(x)$ .

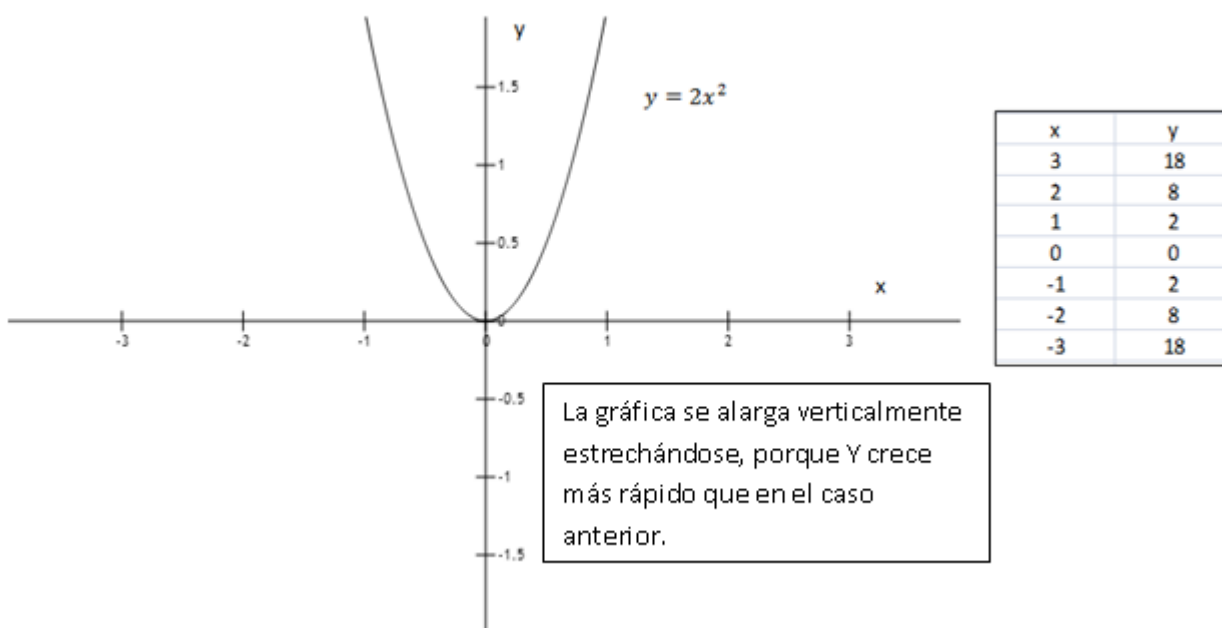
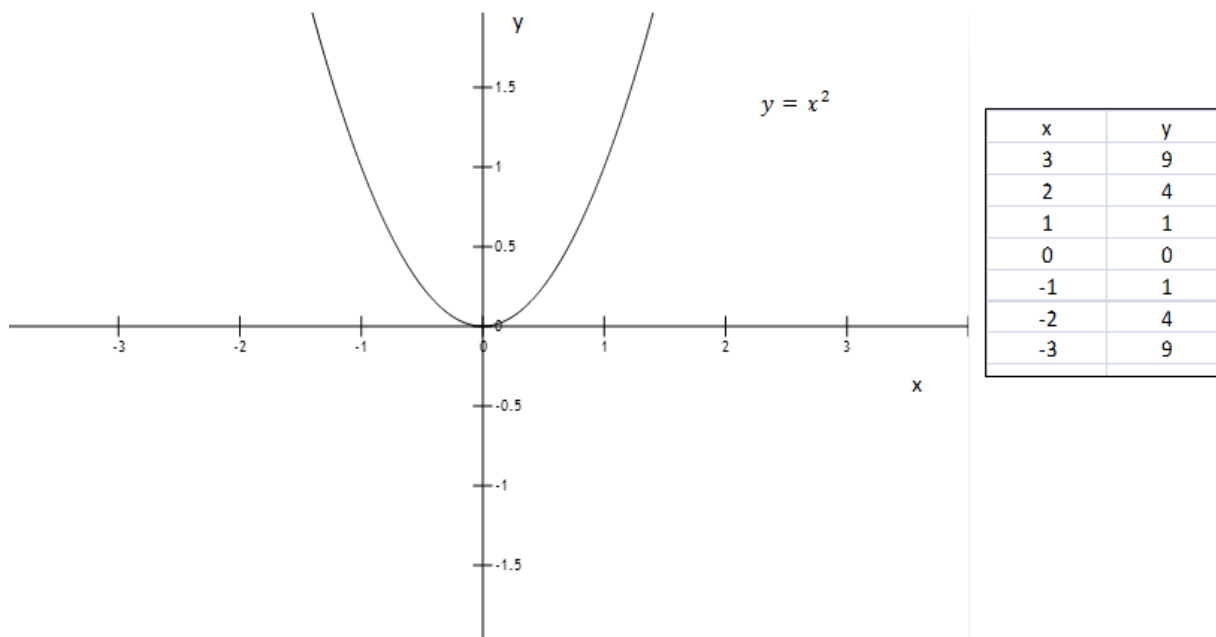
Si  $c > 1$ , la gráfica de  $y = f(x)$  se alarga por un factor  $c$  unidades; si  $0 < c < 1$  la gráfica se acorta o se comprime verticalmente por un factor de  $c$  unidades.

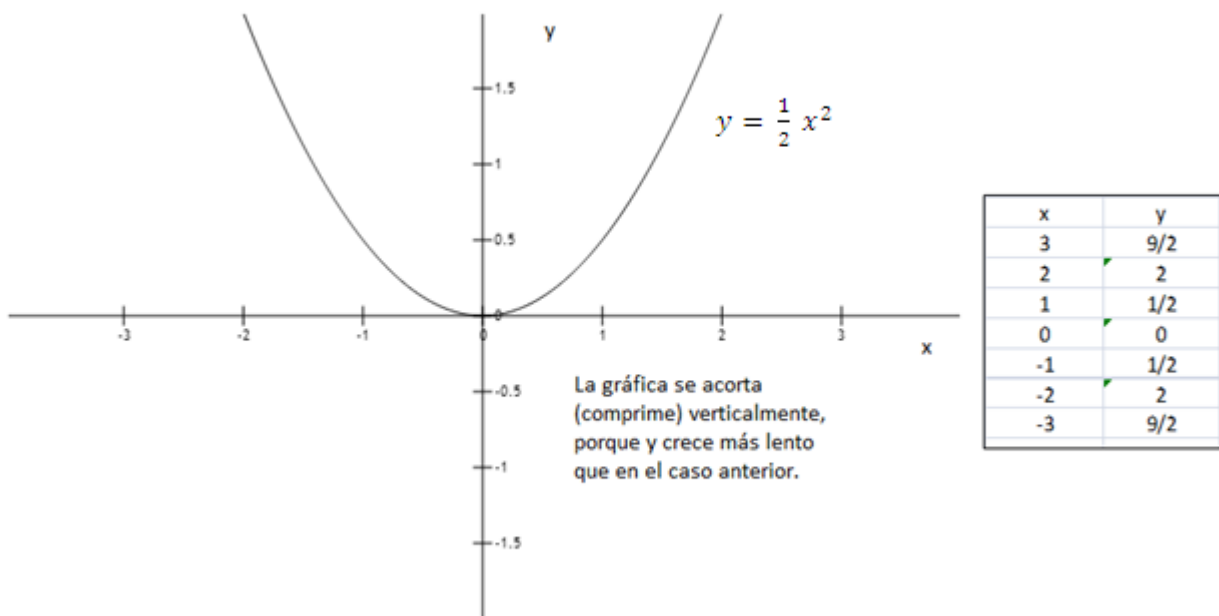
**Elongación o compresión vertical de la gráfica de  $y = f(x)$**

Ecuación	$y = cf(x)$ con $c > 1$	$y = cf(x)$ con $0 < c < 1$
Efecto en la gráfica	La gráfica de $f$ se alarga verticalmente en un factor $c$ .	La gráfica de $f$ se comprime verticalmente en un factor $1/c$ .
Interpretación gráfica		

Ejemplo:

$$\text{Graficar } y = x^2; y = 2x^2; y = \frac{1}{2}x^2$$





Ejemplo:

A partir de  $f(x) = x^2$ , obtener mediante transformaciones la siguiente función:

$$g(x) = -2(x - 2)^2 + 1$$

$u(x) = (x - 2)^2$  : Desplazamiento horizontal de 2 unidades a la derecha de  $f(x)$ .

$v(x) = -(x - 2)^2$  : Reflexión de  $u(x) = (x - 2)^2$  sobre el eje x.

$w(x) = -2(x - 2)^2$  : Alargamiento vertical de  $v(x) = -(x - 2)^2$  en dos unidades.

$g(x) = -2(x - 2)^2 + 1$  : Desplazamiento de  $w(x) = -2(x - 2)^2$  en unidad hacia arriba.

#### ALARGAMIENTO Y ESTIRAMIENTO HORIZONTAL

La gráfica de  $y = f(cx)$  con  $c > 1$ , se obtiene comprimiendo la de  $y = f(x)$  horizontalmente en un factor de  $c$  unidades.

La gráfica de  $y = f(cx)$  con  $0 < c < 1$ , se obtiene alargando la gráfica de  $y = f(x)$  horizontalmente en un factor de  $c$  unidades.

**Compresión o elongación horizontales de la gráfica de  $y = f(x)$**

Ecuación	Efecto en gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(cx)$ con $c > 1$	La gráfica de $f$ se comprime horizontalmente en un factor $c$ .	
$y = f(cx)$ con $0 < c < 1$	La gráfica de $f$ se elonga horizontalmente en un factor $1/c$ .	

**VARIACIONES EN LAS GRÁFICAS DE SENO Y COSENO**

Graficar secuencialmente  $g(x) = 2 - 5 \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$ , a partir de  $f(x) = \cos x$

Solución:(Un método)

$u(x) = -\cos x$ , se obtiene al reflejar  $y = \cos x$  con respecto al eje X.

$v(x) = -5 \cos x$ , se obtiene al alargar verticalmente  $u(x) = -\cos x$  por el factor de amplitud 5.

$w(x) = -5 \cos(3x)$ , se obtiene al acortar horizontalmente la gráfica de  $v(x) = -5 \cos x$  por un factor de  $\frac{1}{3}$ .

$t(x) = -5 \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$ , se obtiene al trasladar horizontalmente la gráfica de  $w(x) = -5 \cos(3x)$  en  $\frac{\pi}{4}$  unidades a la izquierda, ya que  $w\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -5 \cos\left(3\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -5 \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$ .

Y finalmente se llega a la gráfica de  $g$ , al desplazar en 2 unidades hacia arriba la de  $t(x)$ , esto es,  $g(x) =$

$$t(x) + 2 = 2 - 5 \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = g(x).$$

(Otro método)

$u(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ , se obtiene al desplazar horizontalmente la gráfica  $y = \cos(x)$  en  $\frac{3\pi}{4}$  unidades a la izquierda.

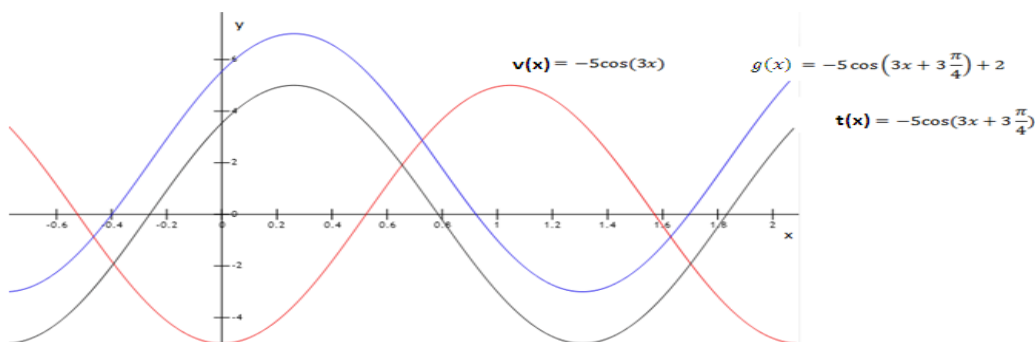
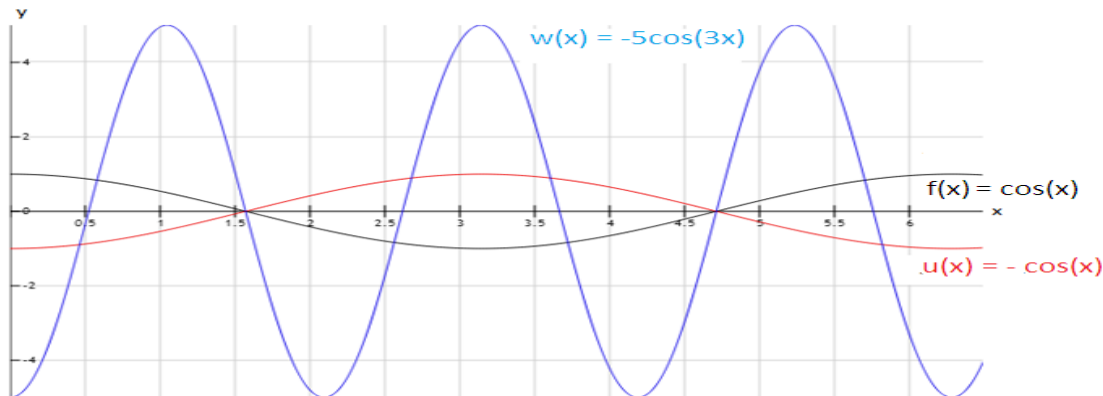
$v(x) = \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$ , se obtiene al acortar horizontalmente la gráfica de  $u(x)$ , por un factor de  $\frac{1}{3}$ .

$w(x) = 5 \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$ , se obtiene al alargar verticalmente  $v(x) = \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$ , por el factor de amplitud 5.

$t(x) = -5 \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$ , se obtiene al reflejar  $w(x) = 5 \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$ , con respecto al eje X.

Y finalmente se llega a la gráfica de  $g$ , al desplazar en 2 unidades hacia arriba la de  $t(x)$ , esto es,  $g(x) =$

$$t(x) + 2 = 2 - 5 \cos\left(3x + 3\frac{\pi}{4}\right) = g(x)$$



**EJERCICIO:**

¿Qué funciones de las que se dan a continuación son periódicas?

$y = \sin^2 x, y = \sin x^2, y = x \cos x, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right), y = 1 + \tan x, y = 5, y = \|x\|, y = x - \|x\|$

Solución:

$y = \sin^2 x$

Teniendo en cuenta que una función  $f$  es periódica si existe un número  $T \neq 0$  tal que:

Si  $x \in \text{Dom } f$  entonces  $(x + T) \in \text{Dom } f$ , o sea  $f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \text{Dom } f$ , entonces:

$$\text{Si } f(x) = \sin^2 x; f(x + T) = \sin^2(x + T) = (\sin x \cos T + \cos x \sin T)^2$$

Luego  $\sin^2 x = \sin^2(x + T)$  cuando  $\cos T = 1$  y  $\sin T = 0$ , esto es  $T = 2\pi$ , luego la función  $\sin^2$ , tiene periodo  $2\pi$ .

$$\text{Sea } f(x) = \sin x^2; \text{ si } f(x) = f(x + T) \text{ entonces } \sin x^2 = \sin(x + T)^2$$

La igualdad se cumple solo si  $T = 0$ , pero de acuerdo con la definición  $T \neq 0$  y por lo tanto  $f(x) = \sin x^2$  no es periódica.

$$\text{Sea } f(x) = x \cos x. \text{ Entonces } f(x + T) = (x + T) \cos(x + T)$$

$$\text{Si } f(x) = f(x + T) \text{ entonces } x \cos x = (x + T)(\cos x \cos T - \sin x \sin T)$$

La igualdad se cumple si  $T = 0$ . Luego no es periódica.

Sea  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ;  $f(x + T) = \sin \left( \frac{1}{x+T} \right)$ . Si  $f(x) = f(x + T)$  entonces  $\sin \left( \frac{1}{x} \right) = \sin \left( \frac{1}{x+T} \right)$  y la igualdad se cumple en  $T = 0$ , lo cual contradice la definición de periodicidad pues  $T \neq 0$  y  $f(x) = \sin(1/x)$  no es periódica.

$$\text{Sea } f(x) = 1 + \tan x, \text{ entonces } f(x + T) = 1 + \tan(x + T)$$

$$\text{Si } f(x) = f(x + T), 1 + \tan x = 1 + \tan(x + T) = 1 + \frac{\tan x + \tan T}{1 - \tan x \tan T}$$

Y como  $f(x) = f(x + T)$ ,  $\tan T = 0$ , o sea  $t = \pi$  y la función es periódica y de periodo  $\pi$ .

Sea  $f(x) = 5$ ; entonces  $f(x + T) = 5$ . Como  $f(x) = f(x + T)$  para todo  $t > 0$ , la función no es periódica, pues el mínimo de los  $t$  con  $t > 0$  no existe.

Sea  $f(x) = \|x\|$ , entonces  $\|x + T\| = \|x\|$ , para cualquier  $x$  en  $\mathbb{R}$  e infinitos valores de  $T$  positivos. Por tanto  $f$  no puede ser periódica.

$$\text{Sea } f(x) = x - \llbracket x \rrbracket, \text{ entonces } f(x + 1) = x + 1 - \llbracket x + 1 \rrbracket.$$

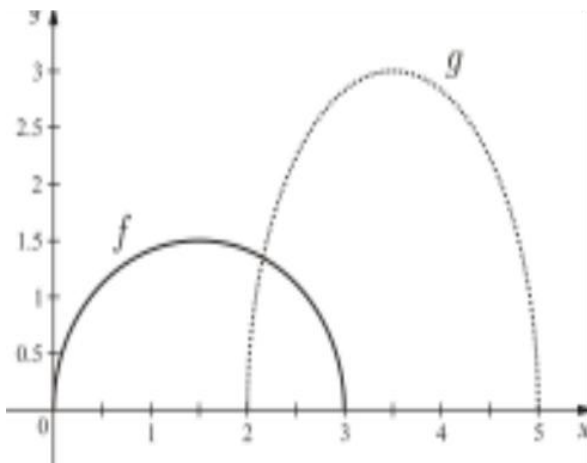
Ahora bien, para  $x$  en  $\mathbb{R}$  existe un único  $n$  en  $\mathbb{Z}$  tal que  $n \leq x < n + 1$

$$\text{Por tanto } n + 1 \leq x + 1 < n + 2; \text{ de donde } f(x) = x - n, \text{ y, } f(x + 1) = x + 1 - (n + 1) = x - n = f(x)$$

Luego  $f(x + 1) = f(x)$  para todo  $x$ , o sea que  $f$  es periódica y de periodo 1

Ejemplo:

La función  $f$  cuya gráfica se anexa está dada por la fórmula  $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ . Aplique a  $f$  las transformaciones necesarias de tal forma que se obtenga una fórmula para la función  $g$  ilustrada en la misma figura.



Solución:

$g(x) = Af(px + q) + B$ , donde  $A, B, p$  y  $q$  son las constantes a encontrar, con  $A \neq 0$  y  $p \neq 0$ .

Nótese que  $D_f = [0, 3]$ ,  $R_f = [0, 1.5]$ ,  $D_g = [2, 5]$  y  $R_g = [0, 3]$

Entonces  $px + q \in D_f$ , esto es,  $0 \leq px + q \leq 3$ ,  $\therefore -q \leq px \leq 3 - q$ ,  $\therefore -\frac{q}{p} \leq x \leq \frac{3-q}{p}$

Y como  $x \in D_g$ ,  $2 = \frac{-q}{p}$ ,  $5 = \frac{3-q}{p}$ ,  $\therefore 2p = -q$ , y  $5p = 3 - q$ ,  $\therefore 5p - 2p = 3 - q - (-q)$ ,  $\therefore 3p = 3$ ,  $\therefore p = 1$ , y así,  $2(1) = -q$ ,  $\therefore q = -2$ .

Como:  $0 \leq g(x) \leq 3$ , entonces  $0 \leq Af(px + q) + B \leq 3$ ,  $\therefore -B \leq Af(px + q) \leq 3 - B$ ,  $\therefore$

$-\frac{B}{A} \leq f(px + q) \leq \frac{3-B}{A}$ , y como el  $R_f = [0, 1.5] = [0, 3/2]$ , entonces  $0 = -\frac{B}{A}$  y  $\frac{3-B}{A} = \frac{3}{2}$ , así  $B = 0$  y  $\frac{3-0}{A} = \frac{3}{2}$ ,

de donde  $B = 0$  y  $6 = 3A$ , o sea  $B = 0$  y  $A = 2$ .

Se concluye que  $g(x) = 2f(x - 2)$

Otro método sería obtener la gráfica de  $f$  a partir de la de  $g$  y reversar los pasos de la siguiente manera:

Se corre la gráfica de  $g$  dos unidades a la izquierda, esto es  $u(x) = g(x + 2)$ , y luego se toma la mitad del rango de  $u$ , es decir  $f(x) = \frac{1}{2}u(x) = \frac{1}{2}g(x + 2)$ .

Luego  $f(x) = \frac{1}{2}g(x + 2)$ , de donde  $2f(x) = g(x + 2)$ . Por tanto  $2f(x - 2) = g((x - 2) + 2) = g(x)$

## ALGEBRA DE FUNCIONES

Dadas las funciones  $f$  y  $g$ , se definen:

i)  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

ii)  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

(Cuyos dominios vienen dados por  $D_f \cap D_g$ )

$$\text{iii) } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; g(x) \neq 0, \text{ donde el dom } \frac{f}{g} = (Df \cap Dg) - \{x | g(x) = 0\}$$

Ejemplo:

Dadas las funciones  $f$  y  $g$  definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x-4}, \text{ determinar:}$$

a)  $(f \pm g)(x)$ ; b)  $(f \cdot g)(x)$  c)  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  junto con sus dominios.

Solución.

$$(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{x-4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}$$

$$Df = [-1, +\infty), Dg = [4, +\infty), Df \cap Dg = [4, +\infty)$$

Por tanto para a) y b) el dominio de la función resultante es  $[4, +\infty)$ .

En la parte c) el denominador es cero para  $x = 4$ , por lo cual lo excluimos del dominio y de acuerdo con esto el dominio para  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  es  $(4, \infty)$

Nótese que  $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{x-4}$ , es diferente de  $\sqrt{(x+1)(x-4)}$ , ya que esta última función tiene dominio el  $\{x / (x+1)(x-4) \geq 0\}$ , que es  $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$ , el cual es mayor que el anterior.

Análogamente ocurre con el cociente.

Ejemplo:

$$\text{Calcular } f \pm g; f \cdot g; \frac{f}{g} \text{ donde: } f = \{(1,2), (3,4), (2,5), (4,1)\} \text{ y } g = \{(3,-1), (2,1), (1,0), (0,2)\}$$

Solución:

$$Df = \{1,2,3,4\}, Dg = \{0,1,2,3\}, Df \cap Dg = \{1,2,3\}$$

$f + g$ :

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 0 = 2$$

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 5 + 1 = 6$$

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 4 - 1 = 3$$

$$\text{Luego } f + g = \{(1,2), (2,6), (3,3)\}$$

$f-g$ :

$$(f-g)(1)=f(1)-g(1)=2-0=2$$

$$(f-g)(2)=f(2)-g(2)=5-1=4$$

$$(f-g)(3)=f(3)-g(3)=4+1=5$$

$$\text{Luego } f-g=\{(1,2), (2,4), (3,5)\}$$

$f \cdot g$ :

$$(f \cdot g)(1)=f(1) \cdot g(1)=2 \cdot 0=0$$

$$(f \cdot g)(2)=f(2) \cdot g(2)=5 \cdot 1=5$$

$$(f \cdot g)(3)=f(3) \cdot g(3)=4 \cdot (-1)=-4$$

$$\text{Luego } f \cdot g=\{(1,0), (2,5), (3,-4)\}$$

$\frac{f}{g}$ :

$$\frac{f}{g}(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{2}{0}, \text{ no definido}$$

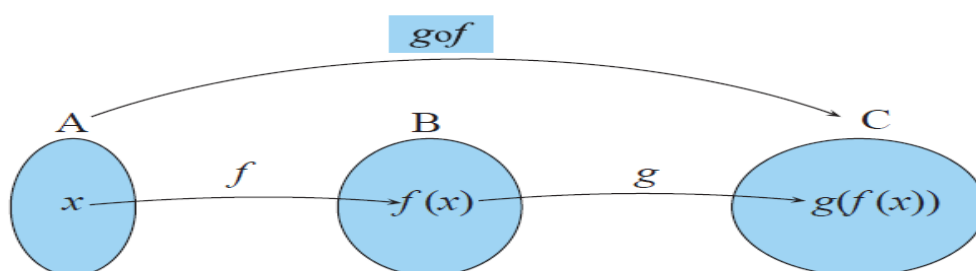
$$\frac{f}{g}(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\frac{f}{g}(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$\text{Luego } \frac{f}{g} = \{(2,5), (3,-4)\}$$

### FUNCIONES COMPUESTAS

Consideremos dos aplicaciones,  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$



**Figura : Composición de funciones  $g \circ f$ .**

Lo anterior nos permite definir una nueva aplicación cuyo dominio sea A y tenga por codominio al conjunto C, de tal manera que dicha aplicación asigne a cada elemento  $x \in A$  el elemento  $g(f(x)) \in C$ .

### DEFINICIÓN

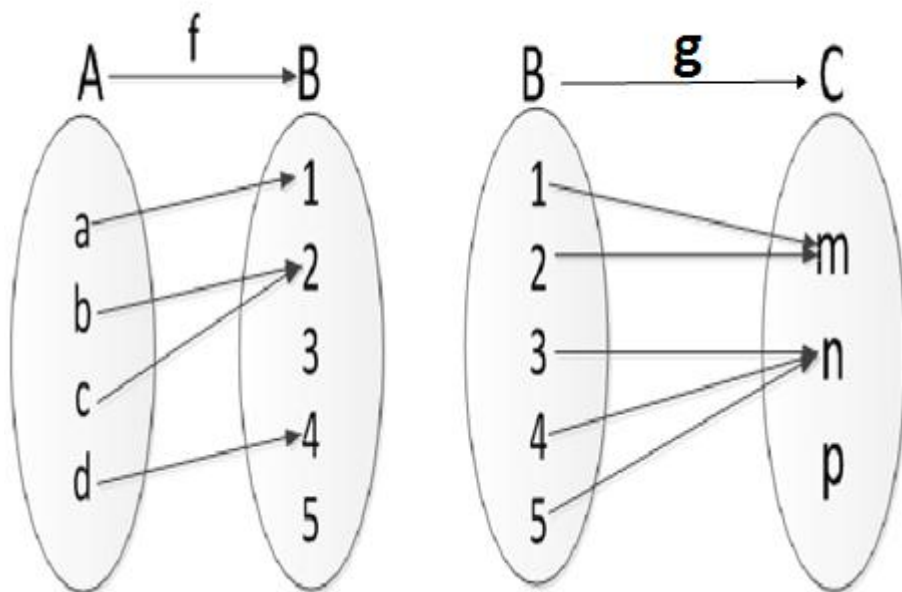
Sea A, B, C conjuntos.

Si  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$  funciones, se denomina composición de  $g$  con  $f$  a la función  $(g \circ f)$ :

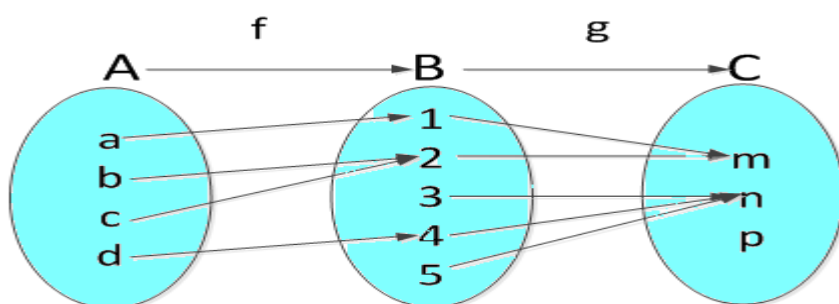
$A \rightarrow C$  definida por  $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ , para todo  $x \in A$ .

OBSERVACION: Vemos que la definición de composición de las aplicaciones  $g$  y  $f$  tiene sentido solo cuando  $x$  está en el dominio de  $f$  y  $f(x)$  en el dominio de  $g$ .

Ejemplo:



Sean  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$  definidas por los siguientes diagramas:



$$D(g \circ f) = A, \text{codominio de } (g \circ f) = C, \text{Im}(g \circ f) = \{m, n\}$$

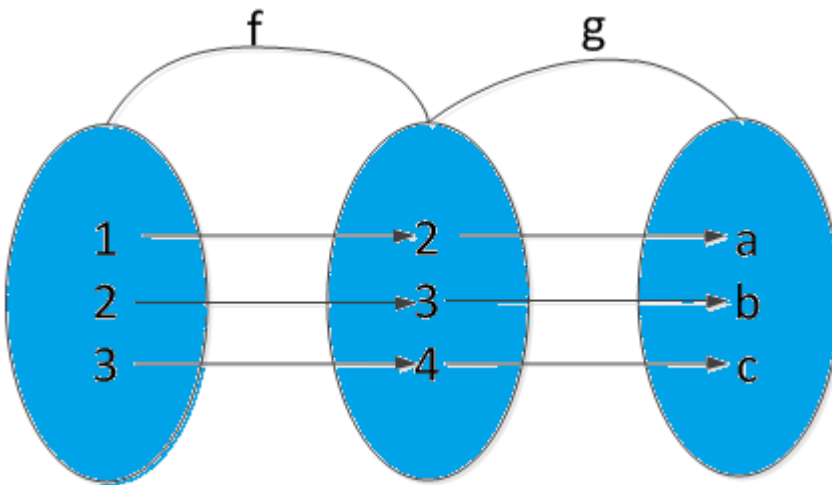
$$\text{Aquí : } (g \circ f)(a) = g[f(a)] = g(1) = m, (g \circ f)(b) = g[f(b)] = g(2) = m$$

$$(g \circ f)(c) = g[f(c)] = g(3) = n, (g \circ f)(d) = g[f(d)] = g(4) = n$$

Ejemplo:

Sean  $f$  y  $g$  funciones tales que  $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$  y  $g = \{(2, a), (3, b), (4, c)\}$

Entonces  $g \circ f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ , pues:  $(g \circ f)(1) = g[f(1)] = g(2) = a$ ;  $(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g(3) = b$ ;  $(g \circ f)(3) = g[f(3)] = g(4) = c$



Ejemplo:

1) Sean  $T(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $P(x) = x^2 - 2$

Hallar: a)  $(T \circ P)$  b)  $(P \circ T)$

Solución:

a)  $(T \circ P)(x) = T(P(x)) = T(x^2 - 2) = \sqrt{x^2 - 2}$ , válido para  $x$  tal que  $x^2 - 2 \geq 0$ , o sea  $x^2 \geq 2$ , es decir,  $|x| \geq \sqrt{2}$

Por tanto  $\text{Dom}(T \circ P) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$ .

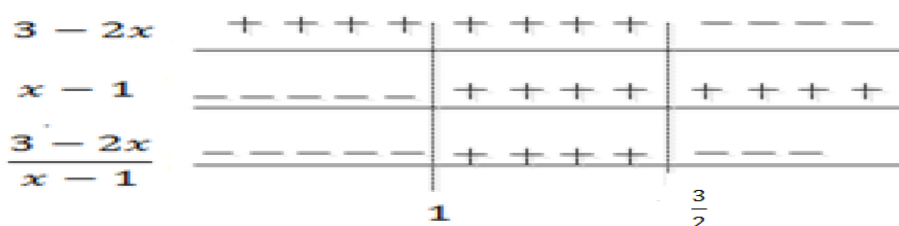
b)  $(P \circ T)(x) = P(T(x)) = P(\sqrt{x-1})$  (válido para,  $x \geq 1$ )  $= (\sqrt{x-1})^2 - 2 = x - 1 - 2 = x - 3$

Luego  $(P \circ T)(x) = x - 3$ , válido para  $x \geq 1$

2) Si  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $g(x) = \sqrt{x-2}$  hacer lo mismo que en el caso anterior.

a)  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2})$  (válido para,  $x \geq 2$ )  $= \frac{1}{\sqrt{x-2}-1}$ , donde  $\sqrt{x-2}-1 \neq 0$ , o sea  $\sqrt{x-2} \neq 1$ ,  $x-2 \neq 1$ , es decir  $x \neq 3$ . Luego  $\text{Dom}(f \circ g) = [2, \infty) - \{3\}$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{1}{x-1}\right)$  (válido para,  $x \neq 1$ )  $= \sqrt{\frac{1}{x-1}-2} = \sqrt{\frac{1-2x+2}{x-1}} = \sqrt{\frac{3-2x}{x-1}}$ , donde  $\frac{3-2x}{x-1} \geq 0$



$$\frac{3-2x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 3/2] \text{ pero con } x \neq 1$$

$$\text{Luego el Dom } (f \circ g) = (1, 3/2]$$

Se deja caer una piedra en un lago, que crea una ola circular que viaja de adentro hacia afuera a una velocidad de 60cm/seg.

Expresa el radio  $r$  de este círculo como función del tiempo  $t$  (en segundos) Si  $A$  es el área de este círculo como función del radio, encuentra  $A \circ r$ , e interprétala.

#### SOLUCIÓN

Distancia= velocidad por tiempo. El radio  $r$  es la distancia que recorrerá la ola hacia afuera.

$$r = 60\text{cm/seg}, \text{ y } r(t) = 60t$$

$$\text{Como } A = \pi r^2, \text{ A o } r(t) = A(r(t)) = \pi(r(t))^2 = 3600\pi t^2$$

Que representa el área del círculo en función de  $t$ .

Ejercicios adicionales:

$$\text{Hallar } f \circ g \text{ si } f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases} \text{ y } g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 1-x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\text{Sean } f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x+2, & x \leq 1 \\ f_2(x) = x-1, & x > 1 \end{cases} \text{ y } g(x) = \begin{cases} g_1(x) = x^2, & x < 0 \\ g_2(x) = 1-x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$D_{f_1 \circ g_1} = \{x/x \in D_{g_1} \text{ y } g_1(x) \in D_{f_1}\}$$

Luego  $x \in (-\infty, 0)$  y  $x^2 \leq 1$ , o sea  $x \in (-\infty, 0)$  y  $|x| \leq 1$ , es decir  $x \in (-\infty, 0)$  y  $-1 \leq x \leq 1$

Entonces  $x \in [-1, 0)$ .

$$\text{Luego: } (f_1 \circ g_1)(x) = f_1(g_1(x)) = f_1(x^2) = x^2 + 2, x \in [-1, 0)$$

$$D_{f_1 \circ g_2} = \{x/x \in D_{g_2} \text{ y } g_2(x) \in D_{f_1}\} = \{x/x \in [0, \infty) \text{ y } 1-x \leq 1\} = \{x/x \in [0, \infty) \text{ y } x \geq 0\} = [0, \infty).$$

$$(f_1 \circ g_2)(x) = f_1(g_2(x)) = f_1(1-x) = 1-x+2 = 3-x, x \in [0, \infty)$$

$$D_{(f_2 \circ g_1)} = \{x/x \in D_{g_1} \text{ y } g_1(x) \in D_{f_2}\} = \{x/x \in (-\infty, 0) \text{ y } x^2 > 1\} = \{x/x \in (-\infty, 0) \text{ y } |x| > 1\}$$

Así  $x \in (-\infty, 0)$  y  $x \in ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) = (-\infty, -1)$ .

$$\text{Entonces : } (f_2 \circ g_1)(x) = f_2(g_1(x)) = f_2(x^2) = x^2 - 1, \text{ si } x \in (-\infty, -1).$$

$$D(f_2 \circ g_2) = \{x/x \in D_{g_2} \text{ y } g_2(x) \in D_{f_2}\} = \{x/x \in [0, \infty) \text{ y } 1-x > 1\} = \emptyset, \text{ pues sería } x \geq 0 \text{ y } x < 0$$

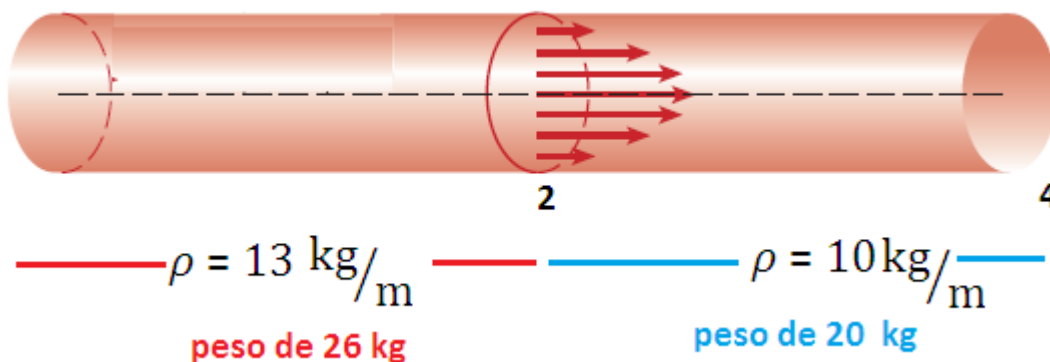
$$\text{Finalmente } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 3 - x & \text{si } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

Ejemplo:

Una varilla de cierto metal compuesto tiene una densidad lineal de  $13 \text{ kg/m}$  hasta el segundo metro, y de  $10 \text{ kg/m}$  entre el segundo y el cuarto metro. El precio del material se da por peso: \$3000 por kilo hasta los primeros 20kg, y si se compran más de 20 kilos, el kilo adicional cuesta \$2500

- i) Exprese el peso de la varilla como función la longitud.
- ii) Exprese el costo del material como función del peso a comprar.
- iii) Use composición de funciones para hallar el costo de la varilla como función de su longitud.

Solución



i) Supongamos que  $m$  denota metros,  $k$  denota kilogramos,  $P$  el peso de la varilla en kilogramos y  $C$  el costo de la misma.

$$\text{Entonces: } k = P(m) = \begin{cases} 13m & \text{si } 0 \leq m \leq 2 \\ 13(2) + 10(m - 2) & \text{si } 2 < m \leq 4 \end{cases} = \begin{cases} 13m & \text{si } 0 \leq m \leq 2 \\ 10m + 6 & \text{si } 2 < m \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{ii) } C(k) = \begin{cases} 3000k & \text{si } 0 \leq k \leq 20 \\ 3000(20) + 2500(k - 20) & \text{si } 20 < k \leq 46 \end{cases} = \begin{cases} 3000K & \text{si } 0 \leq k \leq 20 \\ 2500k + 10000 & \text{si } 20 < k \leq 46 \end{cases}$$

iii) Sustituyendo  $k = P(m)$  en  $C$  se obtiene  $C(k) = C(P(m)) = C \circ P(m)$

Sean:

$$C(k) = \begin{cases} C_1(k) = 3000k, & 0 \leq k \leq 20 \\ C_2(k) = 2500k + 10000, & 20 < k \leq 46 \end{cases} \quad P(m) = \begin{cases} P_1(m) = 13m, & 0 \leq m \leq 2 \\ P_2(m) = 10m + 6, & 2 < m \leq 4 \end{cases}$$

Entonces

$$1) D_{C_1 \circ P_1} = \{m/m \in D_{P_1} \text{ y } P_1(m) \in D_{C_1}\} = \{m/m \in [0,2] \text{ y } 0 \leq 13m \leq 20\} = \left\{m/m \in [0,2] \text{ y } 0 \leq m \leq \frac{20}{13}\right\} = \left[0, \frac{20}{13}\right]$$

Entonces  $C_1(P_1(m)) = C_1(13m) = 3000(13m) = 39000m$ , para  $0 \leq m \leq \frac{20}{13}$

$$2) D_{C_1 \circ P_2} = \{m/m \in D_{P_2} \text{ y } P_2(m) \in D_{C_1}\} = \{m/m \in (2,4] \text{ y } 0 < 10m + 6 \leq 20\} = \{m/m \in (2,4] \text{ y } -6 < 10m \leq 14\} = \{m/m \in (2,4] \text{ y } -3/5 < m \leq 7/5\} = \emptyset \text{ (conjunto vacio).}$$

$$3) D_{C_2 \circ P_1} = \{m/m \in D_{P_1} \text{ y } P_1(m) \in D_{C_2}\} = \{m/m \in [0,2] \text{ y } 20 < 13m \leq 46\} = \left\{m/m \in [0,2] \text{ y } \frac{20}{13} < m \leq \frac{46}{13}\right\} = \left[\frac{20}{13}, 2\right]$$

Así,  $C_2(P_1(m)) = C_2(13m) = 2500(13m) + 10000 = 32500m + 10000$ , para  $\frac{20}{13} < m \leq 2$

$$4) D_{C_2 \circ P_2} = \{m/m \in D_{P_2} \text{ y } P_2(m) \in D_{C_2}\} = \{m/m \in (2,4] \text{ y } 20 < 10m + 6 \leq 46\} = \{m/m \in (2,4] \text{ y } 14 < 10m \leq 40\} = \left\{m/m \in (2,4] \text{ y } \frac{7}{5} < m \leq 4\right\} = (2,4]$$

Luego  $C_2(P_2(m)) = C_2(10m + 6) = 2500(10m + 6) + 10000 = 25000m + 25000$ , para  $2 < m \leq 4$

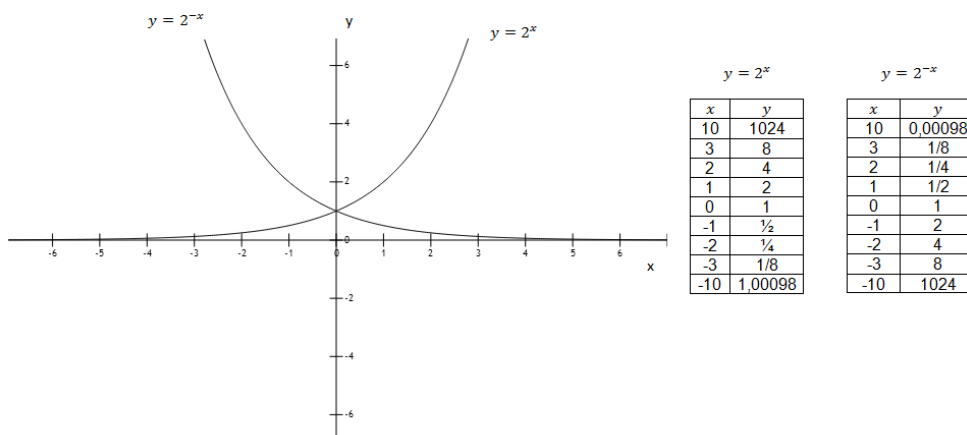
$$\text{Es decir } (c \circ p)(m) = \begin{cases} 39000m & \text{si } 0 \leq m \leq \frac{20}{13} \\ 32500m + 10000 & \text{si } \frac{20}{13} < m \leq 2 \\ 25000m + 25000 & \text{si } 2 < m \leq 4 \end{cases}$$

**FUNCION EXPONENCIALES**

DEFINICION : Si  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , la funcion exponencial con base  $a$  es  $f(x) = a^x$

**GRAFICAS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.**

Ejemplo: graficar las funciones exponenciales  $f(x) = 2^x$  y  $f(x) = 2^{-x}$



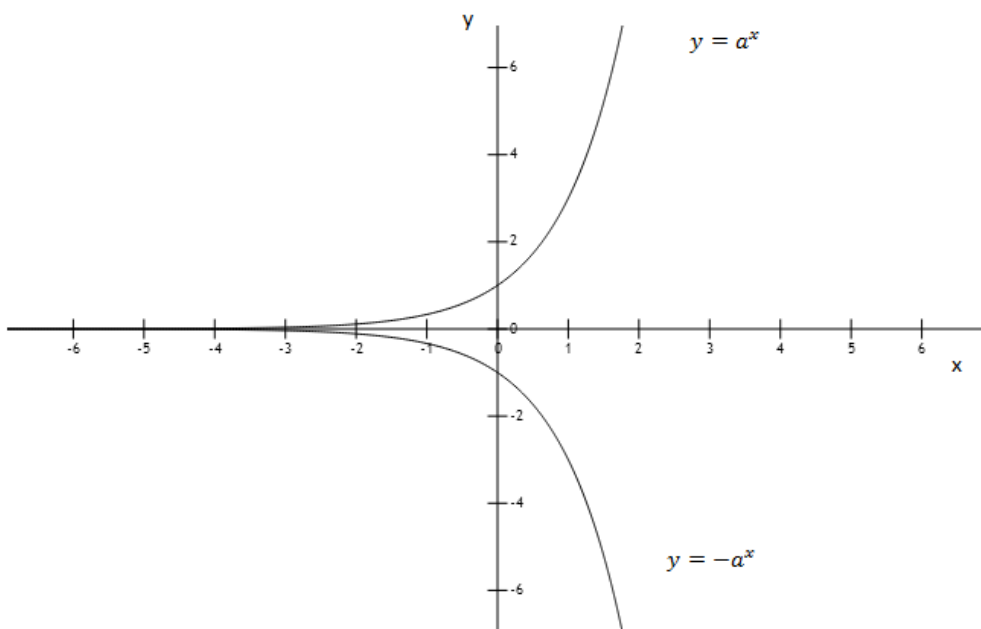
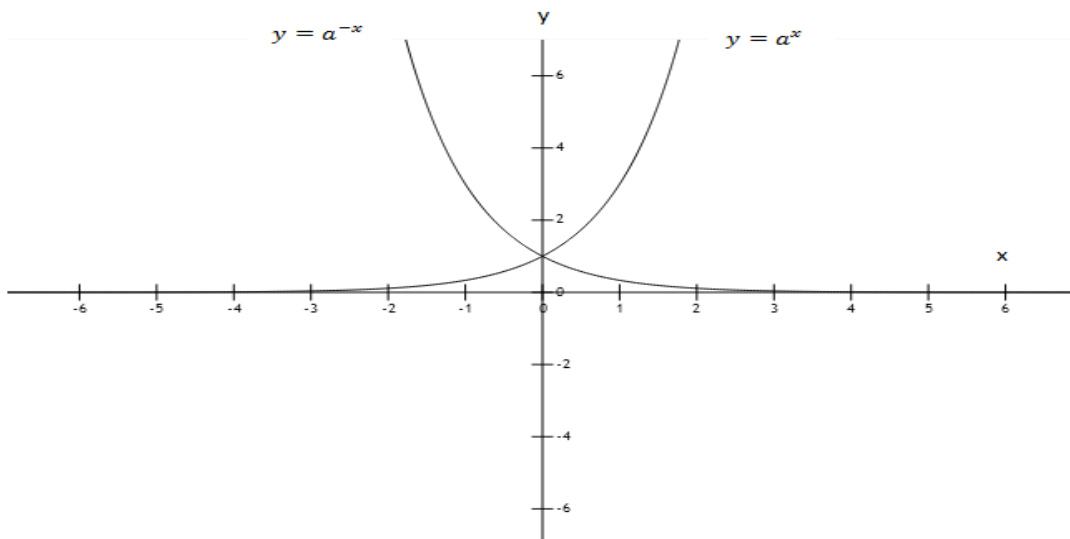
En general, para  $f(x) = a^x$ ; si  $a > 1$ , el dominio es  $(-\infty, \infty)$ , y el rango es  $(0, \infty)$

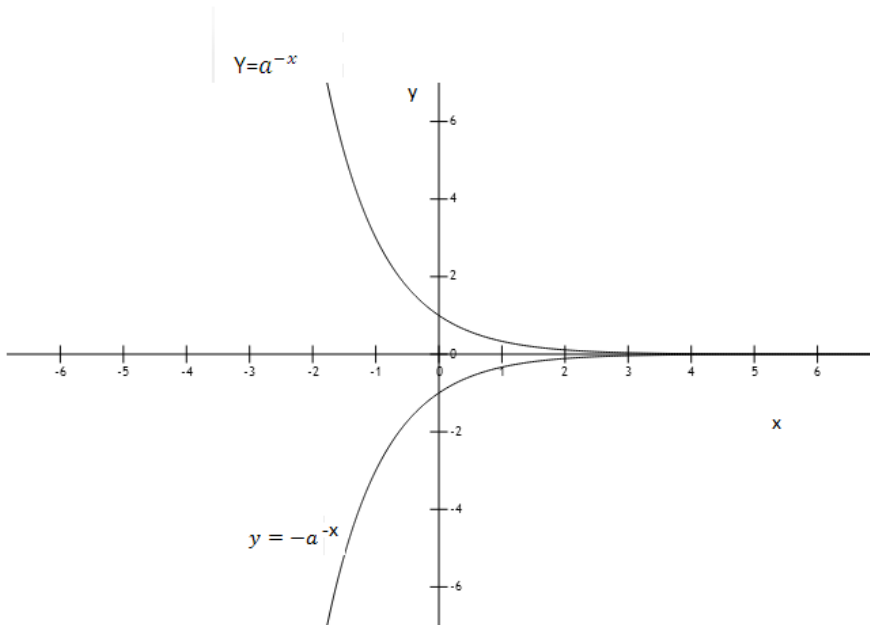
Intersecciones con el eje x: ninguna; intersecciones con el eje y,  $y=1$ ; asíntota horizontal: eje x, cuando  $x \rightarrow -\infty$ ; f es una función creciente, es uno a uno y pasa por  $(0,1)$  y  $(1, a)$ .

Si  $f(x) = a^x$ ,  $0 < a < 1$ , el dominio es  $(-\infty, \infty)$  y el rango es  $(0, \infty)$ .

Intersecciones con el eje x: ninguna; intersecciones con el eje y,  $y=1$ ; asíntota horizontal: eje x, cuando  $x \rightarrow \infty$ ; f es una función decreciente, es uno a uno y pasa por  $(0,1)$  y  $(1, a)$ .

### GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES





Las técnicas de corrimiento, comprensión, alargamiento y reflexión sirven también para hacer la gráfica de muchas funciones que en esencia, son funciones exponenciales.

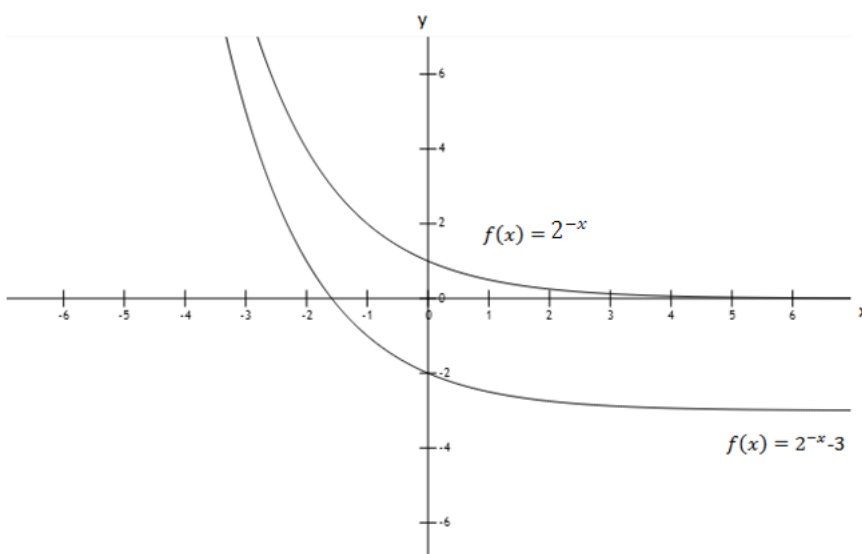
Ejemplo:

Graficar  $f(x) = 2^{-x} - 3$  a partir de  $g(x) = 2^x$

Solución:

$u(x) = 2^{-x}$ , se obtiene al reflejar la gráfica de  $g(x) = 2^x$  respecto al eje Y.

$f(x) = 2^{-x} - 3$  se obtiene al trasladar verticalmente la gráfica de  $u(x) = 2^{-x}$  tres unidades hacia abajo.



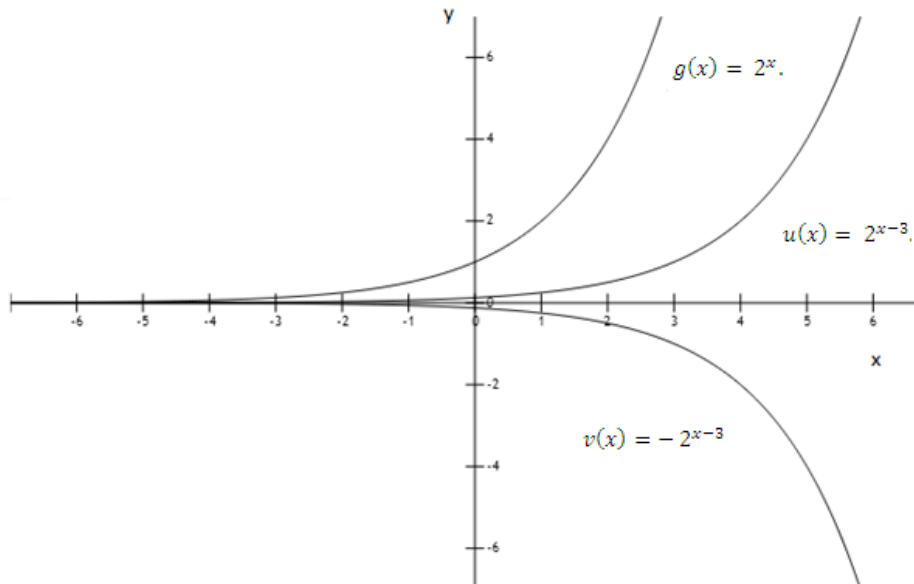
Ejemplo:

Graficar  $v(x) = -(2^{x-3})$  a partir de  $g(x) = 2^x$ .

Solución:

$u(x) = 2^{x-3}$  se obtiene al correr horizontalmente  $g(x) = 2^x$  en tres unidades a la derecha .

$v(x) = -(2^{x-3})$  se obtiene al reflejar la gráfica de  $u(x) = 2^{x-3}$  con respecto al eje X



### LEYES DE LOS EXPONENTES

Si  $a$  y  $b$  son números reales positivos cualquiera, entonces:

$$1. a^{x+y} = a^x a^y$$

$$2. a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$3. (a^x)^y = a^{xy}$$

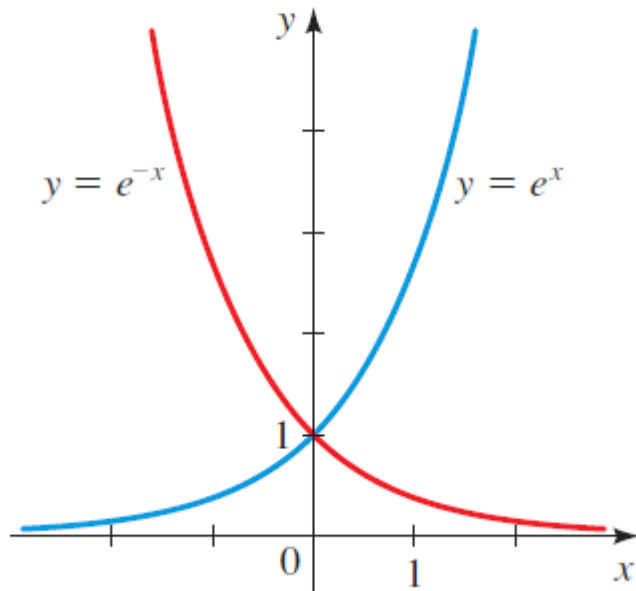
$$4. (ab)^x = a^x b^x$$

$$5. a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

El número  $e$

Muchos problemas que surgen en la naturaleza necesitan de una función exponencial cuya base es un número irracional simbolizado por la letra  $e$ , denominado número de Euler. Tal función es  $f(x) = e^x$ , donde el número  $e$  se define como  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n$  en los naturales, cuyo valor aproximado es 2,7182818.

## GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES.



Ejemplo:

Obtener mediante transformaciones  $f(x) = 2 + 5(1 - e^{-x})$ , a partir de  $u(x) = e^x$

Solución.

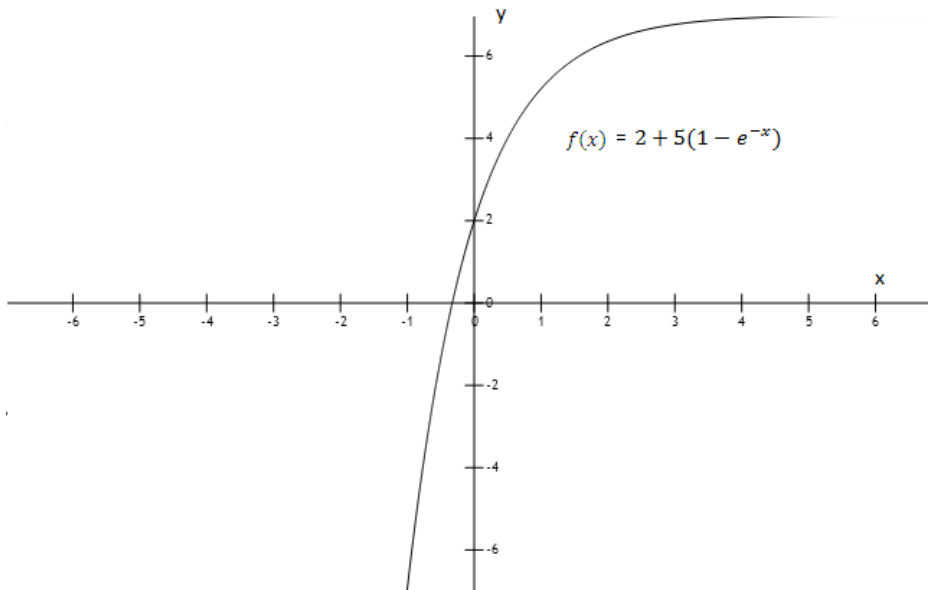
$v(x) = e^{-x}$  se obtiene al reflejar  $u(x) = e^x$  con respecto al eje Y.

$w(x) = -e^{-x}$  se obtiene al reflejar  $v(x) = e^{-x}$  con respecto al eje X.

$t(x) = 1 - e^{-x}$  se obtiene al trasladar en una unidad verticalmente hacia arriba  $v(x) = -e^{-x}$

$r(x) = 5(1 - e^{-x})$  obtiene al alargar por un factor de 5 en forma vertical a  $t(x) = 1 - e^{-x}$

$f(x) = 2 + 5(1 - e^{-x})$  Se obtiene al trasladar en 2 unidades hacia arriba a  $r(x) = 5(1 - e^{-x})$ .



### MODELACIÓN CON FUNCIONES EXPONENCIALES

#### Ejemplo: 1

Consideramos una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que haciendo un muestreo de la población a ciertos intervalos, se determina que esa población se duplica cada hora. Si en el instante  $t$ , la cantidad de bacterias es  $p(t)$ , donde  $t$  se mide en horas, ¿cuál es el tamaño de la población después de  $t$  horas si la población inicial es de 1000 bacterias?

#### SOLUCIÓN:

$P(0) = 1000$ ,  $P(1) = 2P(0) = 2(1000)$ ,  $P(2) = 2P(1) = 2(2(1000)) = 2^2(1000)$ ,  $P(3) = 2P(2) = 2(2^2)(1000) = 2^3(1000)$ , de donde  $P(t) = 2^t(1000)$ . Así finalmente  $P(t) = (1000)2^t$

#### Ejemplo: 2

En condiciones ideales, se sabe que cierta población de bacterias se duplica cada 3 horas. Suponga que originalmente hay 100 bacterias. Cuál es el tamaño de la población después de  $t$  horas? Cuál es el tamaño de la población después de 20 horas? Estime el tiempo para el cual la población llegue hasta 6553600.

#### Solución.

$P(0) = 100$ ;  $P(3) = 2P(0) = 2(100)$ , luego  $P(1(3)) = 2^1(100)$ ;  $P(6) = P(2(3)) = 2P(3) = 2(2^1(100)) = 2^2(100)$ , luego  $P(2(3)) = 2^2(100)$ ;  $P(9) = P(3(3)) = 2(2^2(100)) = 2^3(100)$ , luego  $P(3(3)) = 2^3(100)$ ; en general  $P(3(n)) = 2^n(100)$ . Si  $t = 3n$ , es  $P(t) = P(3(n)) = 2^n(100)$ , que es igual a  $2^{t/3}(100)$ , ya que  $n = t/3$ . Así que  $P(t) = 2^{t/3}(100) = (100)2^{t/3}$

Por tanto  $P(20) = (100)2^{20/3} = (100)2^{20/3} \cong 10,159$

Estimemos el tiempo para que la población llegue hasta 6553600:  $6553600 = 100(256)^2 = 100(16)^4 = 100(2)^{16} \Rightarrow 6553600 = (100)2^{16}$ ; como  $P(t) = (100)2^{t/3}$ , luego  $(100)2^{16} = (100)2^{t/3}$ .

De donde  $2^{t/3} = 2^{16}$ , o sea  $\frac{t}{3} = 16$ , es decir,  $t = 48$  horas.

## Ejemplo: 3

Un isótopo de  $na_{24}$  tiene una vida media de 15 horas, e inicialmente una muestra de este isótopo tiene 2 gramos de masa. Encuentre la cantidad remanente cuando han transcurrido 60 horas. Halle la cantidad remanente al transcurrir  $t$  horas. Estime la cantidad restante una vez transcurrido 4 días.

## SOLUCIÓN

La vida media para  $na_{24}$  significa que la mitad de cualquier cantidad dada de  $na_{24}$  se desintegrará en 15 horas.

$m(0) = 2$ , porque en un inicio la masa es 2 gramos. Como se desintegra la mitad en 15 horas,  $m(15) = \frac{1}{2}(2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)$ , y entonces  $m(30) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(2)\right] = \frac{1}{2^2}(2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ,  
 $m(45) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^2}(2)\right] = \frac{1}{2^3}(2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ,  $m(60) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^3}(2)\right] = \frac{1}{2^4}(2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$  gramos.

Como  $m(15n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ , si  $t = 15n$ , entonces  $n = t/15$ ; luego  $m(t) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{t/15}$ . Y así para  $t = 4$  días que es igual a  $4(24) = 96$  horas tenemos que  $m(96) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{96/15} = 0,024$

## Ejemplo: 4

Una bola de nieve de radio originalmente igual a un metro, se empieza a derretir de manera que cada hora su radio se reduce en un 10%. Escriba una fórmula para el volumen de la bola de nieve.

Solución:

Hallemos  $R(t)$  para cada  $t$  en horas:

$R(0) = 1$ ;  $R(1) = 1 - [10/100]1 = R(0) - 0.1R(0) = R(0)(1 - 0.1)$ , luego  $R(1) = R(0)(1 - 0.1)$ ;  $R(2) =$

$R(0)(1 - 0.1) - [10/100] [R(0)(1 - 0.1)] = R(0)(1 - 0.1)[1 - 0.1] = R(0)(1 - 0.1)^2$ ;  $R(3)$  debe ser igual a

$R(0)(1 - 0.1)^3$ ; en general  $R(t) = R(0)(1 - 0.1)^t = 1(0.9)^t = (0.9)^t$ .

Por tanto el volumen de la bola de nieve será:  $v(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t) = \frac{4\pi}{3}(0.9)^{3t}$ .

El trabajo con funciones exponenciales se hace conjuntamente con su función inversa, la función logarítmica, que involucraremos brevemente para resolver algunas aplicaciones de funciones exponenciales.

## FUNCIONES INVERSAS

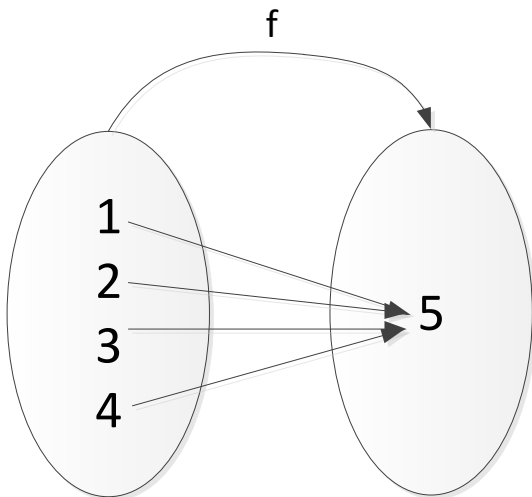
Definición:

Sea  $f: A \rightarrow B$  una función.

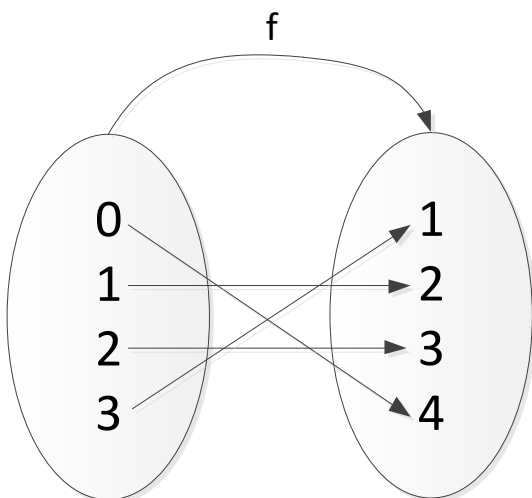
Diremos que  $f$  es sobre si  $f(A) = B$ . En otras palabras: Una función es sobre cuando todo elemento del conjunto final de la función es imagen de al menos un elemento de su dominio; es decir, que su rango y su codominio coincidan.

Diremos que  $f$  es uno a uno si cuando  $x_1 \neq x_2$  se tiene que  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . También lo expresamos así:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ , o sea que si  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$  (pues  $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$ ). En otras palabras,  $f$  es una función uno a uno si no existen dos elementos del dominio con la misma imagen.

En el gráfico anterior tenemos una función que no es uno a uno ni es sobre.



En el gráfico anterior tenemos una función que es sobre pero no es uno a uno.



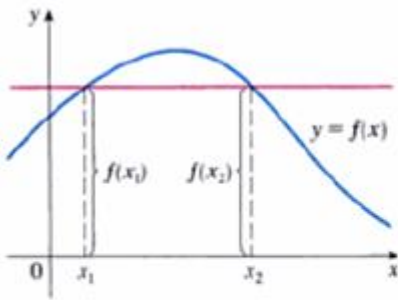
En el gráfico anterior tenemos una función que es uno a uno y es sobre

#### PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL

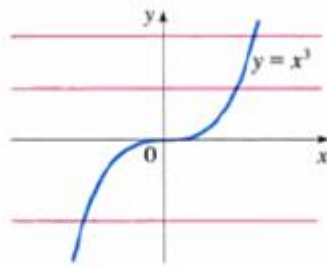
Sea  $f$  una función uno a uno, y considere su gráfico, o sea el  $\{(x, y) | y = f(x), x \text{ en el dominio de } f\}$

Puesto que a cada valor de  $y$  le corresponde a lo más un valor de  $X$ , la horizontal interseca la gráfica de  $y = f(x)$  en a lo más un punto y al contrario, si cada recta horizontal interseca la gráfica de una función en máximo un punto entonces la función es uno a uno.

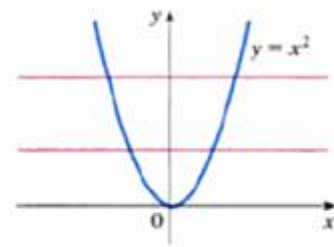
Ejemplo:



**FIGURA 1**  
Esta función no es uno a uno porque  $f(x_1) = f(x_2)$ .



**FIGURA 2**  
 $f(x) = x^3$  es uno a uno.



**FIGURA 3**  
 $g(x) = x^2$  no es uno a uno.

DEFINICION:

Sea  $f: A \rightarrow B$  una función.  $f$  es biyectiva si y solo si,  $f$  es inyectiva y sobre.

Ejemplo:

$$f(x) = x^3, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

1) Veamos que efectivamente  $f$  es inyectiva

Solución:

Sean  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , tales que  $f(x_1) = f(x_2)$  y veamos que  $x_1 = x_2$

$$x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ó } x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

Como  $0 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2/2)^2 + (3/4)(x_2)^2$ , entonces  $x_1 = -x_2/2$  con  $x_2 = 0$ . En cualquiera de los dos casos es  $x_1 = x_2$ .

2) Veamos que  $f$  es sobreyectiva.

Sea  $y \in \mathbb{R}$ . Entonces existe  $x = \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$  y además es  $f(x) = f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$ .

Definición:

Sea  $f: A \rightarrow B$  una función biyectiva. Entonces a cada  $x$  de  $A$  se le puede asociar un único  $y$  de  $B$ , que se denota  $y = f(x)$  por ser  $f$  una función. Además a cada  $y$  de  $B$  le corresponde un  $x$  en  $A$ , por ser sobre; y tal  $x$  es único por ser uno a uno. Se puede pues considerar aquella función que a cada  $y$  de  $B$  le corresponda ese único  $x$  de  $A$ , tal que  $y = f(x)$ . Esta nueva función se denomina la función inversa de  $f$  y se denota  $f^{-1}$ , y se dice que  $f$  es invertible o que  $f$  tiene inversa.

Así:  $f^{-1}: B \rightarrow A$ , es aquella función tal que  $f^{-1}(y) = x$  donde  $y = f(x)$ . Esto es,  $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$

Nótese que  $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$

Observaciones:

1)  $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$ , o sea que  $y = f(f^{-1}(y))$ , para todo  $y$  en  $B$ .

$x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$ , o sea que  $x = f^{-1}(f(x))$ , para todo  $x$  en  $A$ .

Ejemplo:

Halle la inversa de la función  $f$  donde  $f(x) = 5x - 7$

Solución:

Puesto que la gráfica de  $y = 5x - 7$  es una recta no horizontal, se deduce por la prueba de la recta horizontal que  $f$  es uno a uno.

De  $y = 5x - 7$ , se obtiene  $x = \frac{y+7}{5}$ , y como  $x = f^{-1}(y)$ , entonces  $f^{-1}(y) = \frac{y+7}{5}$

Entonces  $f^{-1}(\cdot) = \frac{(\cdot)+7}{5}$ , así que en el plano cartesiano si  $y = f^{-1}(x)$ , entonces  $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{5}$

2) Por tanto, para hallar la función inversa de  $f$  en el mismo plano cartesiano, se despeja  $x$  en términos de  $y$ , y luego se intercambian las variables.

Ejemplo:

Halle la inversa de la función  $f$  donde  $f(x) = \frac{2}{x^3+1}$

Solución:

$y = \frac{2}{x^3+1}$  si  $x \neq -1 \Leftrightarrow x^3 + 1 = \frac{2}{y}$ , si  $y \neq 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{2}{y} - 1 = \frac{2-y}{y}$ , válido para  $y \neq 0$ .

Así  $x = \sqrt[3]{\frac{2-y}{y}} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{2-y}{y}}$  entonces  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2-x}{x}}$ .

Ejemplo:

Hallar la inversa de la función  $f$  donde  $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$ .

Solución:

Calculemos el dominio de  $f$

$\frac{x^2}{4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) \geq 0$ , así  $D(f) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ .

Si  $x \in [2, \infty)$ ,  $y = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \Leftrightarrow y - \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \Leftrightarrow \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - 1 \Leftrightarrow y^2 - xy + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} - 1 \Leftrightarrow xy = y^2 + 1$ . Entonces  $x = y + \frac{1}{y}$  y  $f^{-1}(x) = x + \frac{1}{x}$ , válido para  $x \geq 2$ .

Ejemplo:

Dada  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < -1 \\ 4x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x + 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  Hallar  $f^{-1}$  si existe.

Solución:

Como  $Y=2x-1$  si  $x < -1$ , entonces  $x = \frac{y+1}{2}$ . Luego  $\frac{y+1}{2} < -1 \Rightarrow y < -3$  y  $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$  si  $y < -3$ .

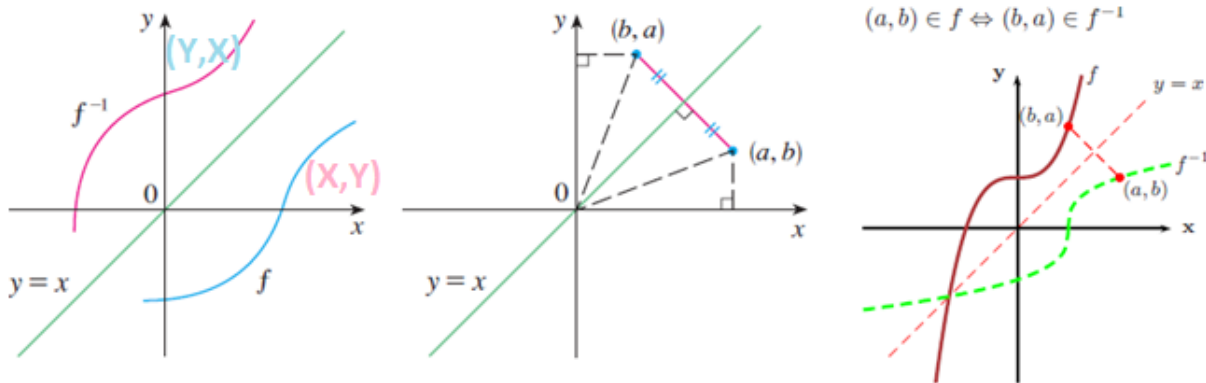
Entonces  $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$  si  $x < -3$ .

Como  $Y = 4x^2$  si  $-1 \leq x \leq 0$ , entonces  $x = -\frac{\sqrt{y}}{2}$ . Luego  $-1 \leq -\frac{\sqrt{y}}{2} \leq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq 4$  y  $f^{-1}(y) = -\frac{\sqrt{y}}{2}$ , para  $0 \leq y \leq 4$ . Así  $f^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2}$  si  $0 \leq x \leq 4$ .

Como  $Y = x+4$  si  $x > 0$ , entonces,  $x = y - 4$ . Luego  $y - 4 > 0 \Rightarrow y > 4$ , entonces  $f^{-1}(y) = y - 4$  si  $y > 4$ . Luego  $f^{-1}(x) = x - 4$  si  $x > 4$  y así concluimos que:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{si } x < -3. \\ -\frac{\sqrt{x}}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ x - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

3) Como  $(x, y) \in \text{graf}(f) \Leftrightarrow (y, x) \in \text{graf}(f^{-1})$ , y puesto que  $(x, y)$  y  $(y, x)$  son simétricos respecto de la diagonal  $\{(x, y)/y = x\}$  entonces la gráfica de  $f^{-1}$  es una reflexión de la de  $f$  alrededor de la recta  $y = x$ .



### FUNCIONES LOGARÍMICAS

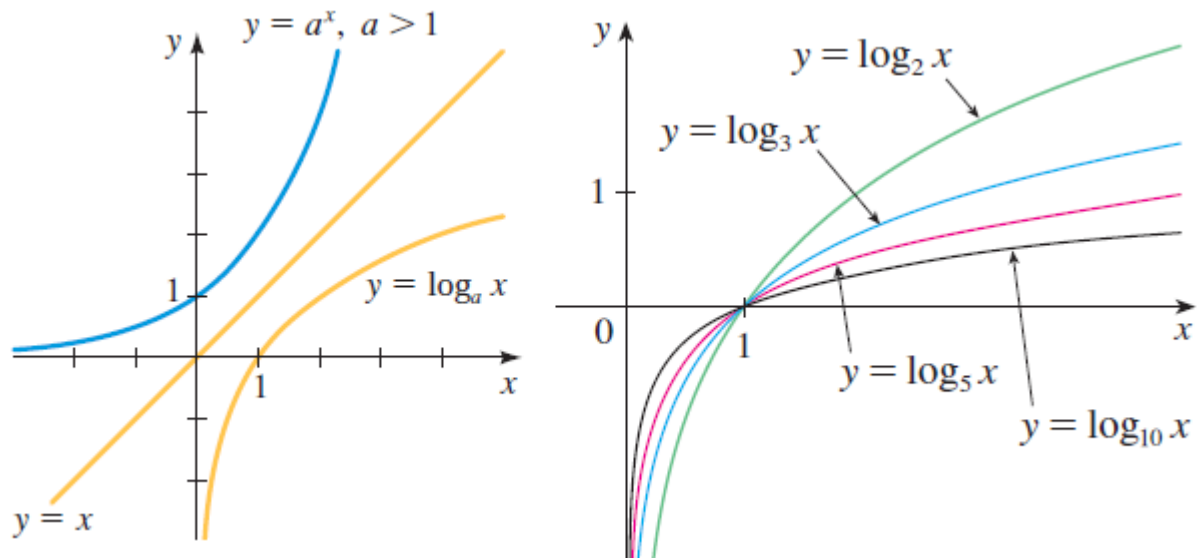
Si  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , la función exponencial  $f(x)=a^x$  está creciendo o decreciendo y por lo tanto tiene inversa, pues, es uno a uno. Ésta inversa se llama función logarítmica en la base  $a$  y se define así:

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ , entonces  $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ . Lo que indica que si  $x > 0$ ,  $\log_a x$  es el exponente al que debe elevarse la base  $a$  para obtener  $x$ .

Como  $y = f(f^{-1}(y))$ ,  $y, x = f^{-1}(f(x))$ , si  $f(x) = a^x$  y  $f^{-1}(x) = \log_a x$ , entonces  $f^{-1}(f(x)) = \log_a(f(x)) = \log_a a^x = x \Rightarrow \log_a a^x = x$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ .

$f(f^{-1}(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x \Rightarrow a^{\log_a x} = x$  para toda  $x \in \mathbb{R}^+$ .

### GRÁFICA DE LA FUNCION LOGARITMICA



Si  $f(x) = \log_a x$  entonces  $D_f = \mathbb{R}^+$  y  $R_f = \mathbb{R}$

El intercepto en X para la gráfica de f es 1; la gráfica de f no tiene intercepto en Y; el eje Y es una asíntota vertical de la gráfica de f; la función f es creciente en el intervalo  $(0, \infty)$  si  $a > 1$  y decreciente si  $0 < a < 1$ ; la función f es uno a uno.

### LOGARITMOS COMÚN Y NATURALES

El logaritmo con base 10 se llama el logaritmo común y se denota por:  $\log x$ , esto es  $\log x = \log_{10} x$

El logaritmo con base e se llama “logaritmo natural” y se denota por  $\ln x$ , es decir,  $\ln x = \log_e x$ .

Como  $\ln x = \log_e x$  entonces  $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x, y, \ln(e^x) = x, x \in \mathbb{R}, e^{\ln x} = x$  si  $x > 0$ .

En particular,  $\ln e = 1$  pues  $e^1 = e$

### LEYES DE LOS LOGARITMOS

si  $x, y \in \mathbb{R}^+$  entonces

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x)^r = r \log_a x, \text{ en donde } r \in \mathbb{R}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a a = 1$$

(Donde a y b positivos y diferentes de uno)

Ejemplo:

Hallar  $\log 1000$

Solución:

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3\log 10 = 3(1) = 3$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación  $\log_8[\log_4(\log_2 x)] = 0$

Solución:

$$\log_8[\log_4(\log_2 x)] = 0 \Leftrightarrow 8^0 = \log_4(\log_2 x) \Leftrightarrow \log_4(\log_2 x) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 4, \text{ luego } x = 2^4 = 16$$

EJEMPLO:

Resolver la ecuación  $\log_2(x - 1) - \log_4 x = 1$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_2(x - 1) - \log_4 x = 1 &\Leftrightarrow \log_2(x - 1) - \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1 \Leftrightarrow \log_2(x - 1) - \frac{\log_2 x}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 \log_2(x - 1) - \\ \log_2 x = 2 &\Leftrightarrow \log_2 \left[ \frac{(x-1)^2}{x} \right] = 2, \text{ donde } x > 0 \text{ y } x-1 > 0, \text{ o sea } x > 1; \text{ entonces } \frac{(x-1)^2}{x} = 2^2, \text{ y así } x^2 - 2x + 1 = \\ 4x &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Por aplicación de la ecuación cuadrática concluimos que  $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$ . Como  $x > 1$ , la solución es  $x = 3 + 2\sqrt{2}$

EJEMPLO:

Resolver la ecuación  $3^{1-2x} = 4^x$

Solución:

Tomando logaritmos a ambos lados,  $\log 3^{1-2x} = \log 4^x \Leftrightarrow (1 - 2x) \log 3 = x \log 4 \Leftrightarrow$

$$\log 3 = x \log 4 + 2x \log 3 \Leftrightarrow \log 3 = x(\log 4 + 2 \log 3) \Leftrightarrow x = \frac{\log 3}{\log 4 + 2 \log 3}.$$

EJEMPLO:

Resolver la ecuación  $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

Solución:

$$\text{Aplicando cambio de base nos queda } \frac{\log_2 x}{\log_2 16} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 x = 7 \Leftrightarrow \log_2 x \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) = 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4} \log_2 x = 7 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \text{ y así } x = 16.$$

EJEMPLO

Resolver  $e^{x^2} = 10$

Solución:

$$\ln e^{x^2} = \ln 10 \Leftrightarrow x^2 = \ln 10 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\ln 10} \approx \pm 1.5174.$$

PROBLEMA:

Si cada día se duplica la población de personas con una cepa muy potente de ántrax y si no se traen medicinas (por falta de antibióticos adecuados para la cepa) ¿cuántas personas se encuentran infectadas al cabo de 20 días, sabiendo que el día cero se detectan 5 personas infectadas? Si A es el número de personas inafectadas el día x, hallar la función inversa de A e interpretarla.

Solución:

$A(0) = 5$ ,  $A(1) = 2(5)$ ,  $A(2) = 2 A(1) = 2 [2(5)] = 2^2(5)$ ,  $A(3) = 2 A(2) = 2[2^2(5)] = 2^3(5)$ , en general  $A(x) = 2^x(5)$ , en donde  $A(20) = 2^{20}(5) = 5242880$ .

Encontremos ahora la función inversa de A e interpretémosla.

$$\text{Sea } y = A(x) = 2^x(5) \Leftrightarrow 2^x = \frac{y}{5} \Leftrightarrow \log_2 2^x = \log_2 \left(\frac{y}{5}\right) \Leftrightarrow \log_2 2^x = \log_2 \left(\frac{y}{5}\right) = \log_2 y - \log_2 5 \Leftrightarrow$$

$$x = \log_2 y - \log_2 5. \text{ Como } x = f^{-1}(y), \text{ entonces } f^{-1}(y) = \log_2 y - \log_2 5.$$

Así  $y = A^{-1}(x) = \log_2 x - \log_2 5$ , y nos indica el tiempo y requerido para que la población sea x.

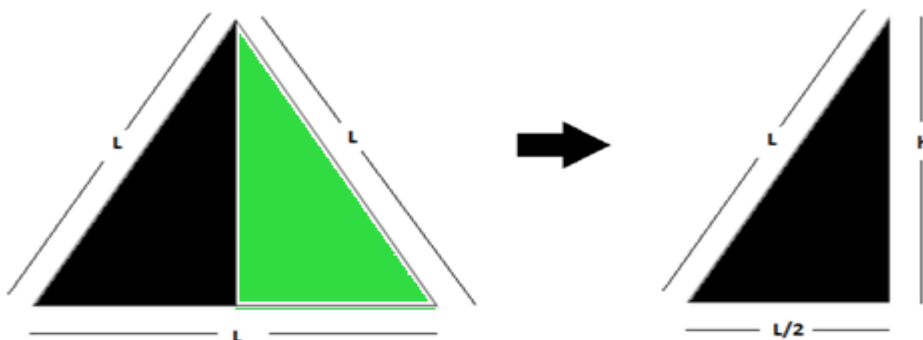
$$\text{Verificación: } A^{-1}(5242880) = \log_2 5242880 - \log_2 5 = 20.$$

EJERCICIOS DIVERSOS

1). Expresar el área de un triángulo equilátero como función del lado L y de la altura h del triángulo.

Solución:

Sea L la longitud del triángulo rectángulo.



Calculemos la altura del triángulo: Por aplicación del Teorema de Pitágoras.

$$h^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{4L^2 - L^2}{4} = \frac{3L^2}{4}, \text{ así } h = \frac{\sqrt{3}}{2}L.$$

Calculemos ahora el área del triángulo como función del lado L dada por la fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}, A(L) = \frac{L}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2.$$

Expresemos el área A como función de h.

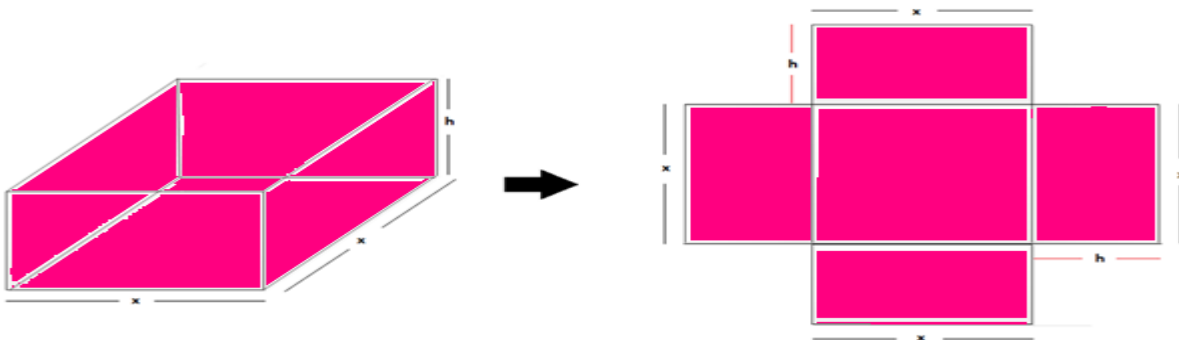
Sabemos que  $L = \frac{2}{\sqrt{3}}h$ , entonces, A como función de h será  $A(h) = \frac{bh}{2}$ . Luego

$$A(h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}h \cdot h = \frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}h^2.$$

2) Se va a construir una caja rectangular abierta con una base cuadrada de longitud x, y un volumen de 16.000 cm cúbicos. Expresar el área A de la caja como una función de x.

Solución:

El volumen de la caja estará dado por (área de la base x altura).



Así, de acuerdo con la gráfica  $v = A_b \cdot h = x^2h = 16000$ , de donde  $h = \frac{16000}{x^2}$ .

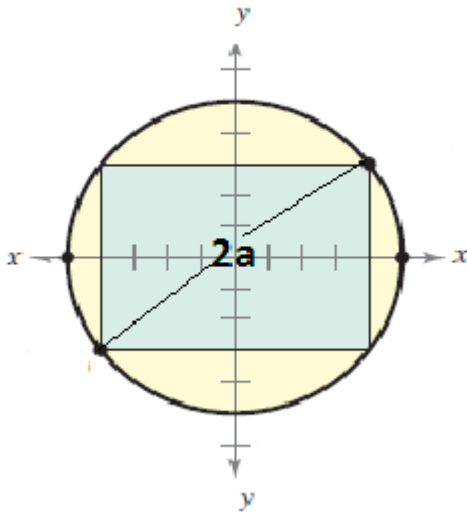
Sean  $A_l$ : Área lateral de la caja, entonces  $A_l = 4xh$  y  $A_b$ : Área de la base de la caja =  $x^2$ ; entonces el área total será la suma del área de la base y del área lateral, así:

$$A_T = 4xh + x^2, \text{ luego } A(x) = 4x\left(\frac{16000}{x^2}\right) + x^2 = \frac{64000}{x} + x^2 \text{ con } x > 0$$

3. Considerar un rectángulo inscrito en un círculo de radio  $a$  cm. Expresar tanto el área A

Como el perímetro P de dicho rectángulo en función de la longitud de su base x.

Solución:



De acuerdo con la figura y por aplicación del Teorema de Pitágoras tenemos que:

$$4a^2 = x^2 + y^2 \text{ de donde } x = \sqrt{4a^2 - y^2}$$

Sea P el perímetro del rectángulo inscrito, luego  $P = 2x + 2y$ , en donde  $y = \sqrt{4a^2 - x^2}$

Finalmente  $P(x) = 2x + 2\sqrt{4a^2 - x^2}$ , para  $0 \leq x \leq 2a$  (pues debe ser  $: 4a^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2 \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 \leq 4a^2 \Leftrightarrow |x| \leq 2a$ , y así  $0 \leq x \leq 2a$ )

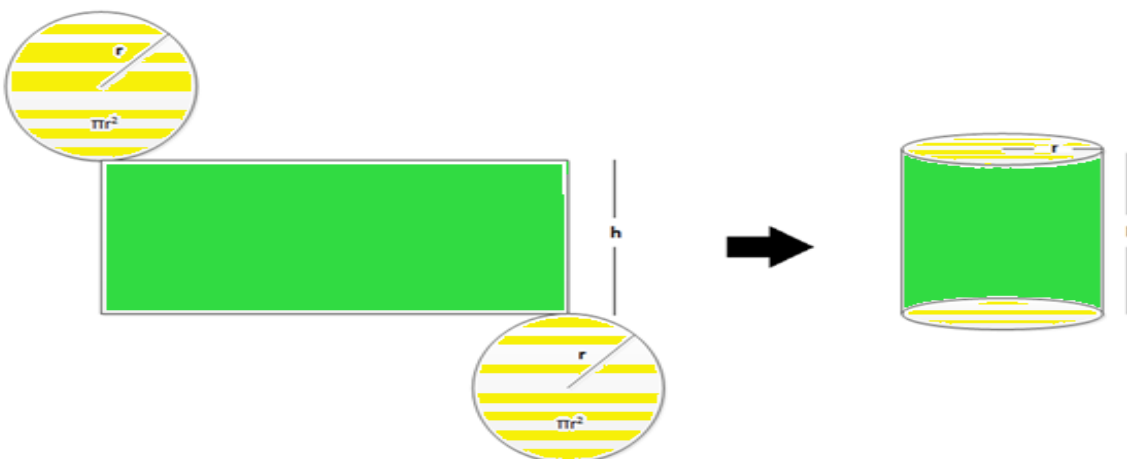
Determinemos ahora el área del rectángulo inscrito:  $A = xy$ , así  $A(x) = x\sqrt{4a^2 - x^2}$

4. Un envase cerrado de hojalata cuyo volumen es de 60 cm<sup>3</sup> tiene la forma de un cilindro circular recto.

- Expresar el área A de la superficie total del envase como función del radio r de la base.
- Expresar el área A de la superficie total del envase en función de la altura h del cilindro.

Solución:

El volumen del envase será  $V = \pi r^2 h$  Y como  $V = 60 \text{ cm}^3$ , entonces  $60 = \pi r^2 h$



De donde:  $h = \frac{60}{\pi r^2} \Leftrightarrow r^2 = \frac{60}{\pi h} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{60}{\pi h}}$

De acuerdo con el dibujo, el área total del envase es  $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ ) El área como función del radio:  $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{60}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{120}{r}$ , definido para  $r > 0$ .

b) El área como función de la altura  $A(h) = 2\pi \left(\frac{60}{\pi h}\right) + 2\pi \sqrt{\frac{60}{\pi h}} h = \frac{120}{h} + 2(2)\sqrt{\frac{15h^2\pi^2}{\pi h}}$  y así

$A(h) = \frac{120}{h} + 4\sqrt{15h\pi}$ , definida para  $h > 0$

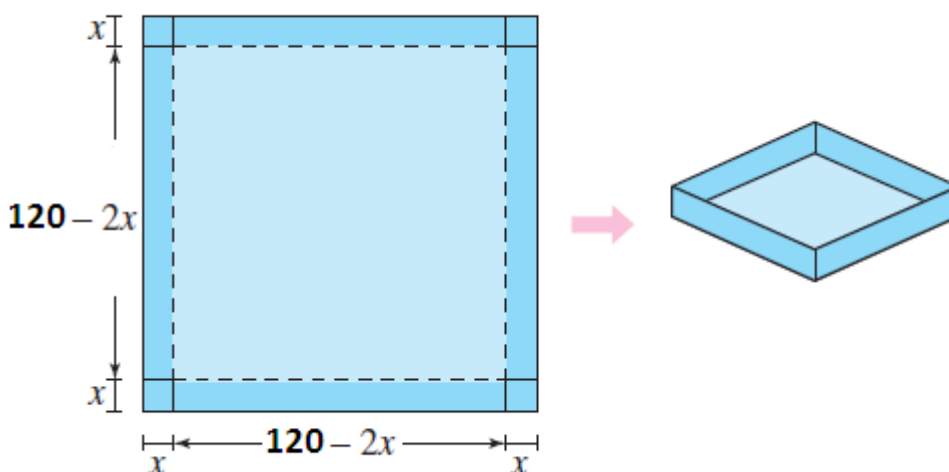
5. Para el envase del ejercicio anterior, si el precio del material que se usa para la base y la tapa es de \$4 por  $\text{cm}^2$ , mientras que el costo del material para la parte curva es de \$2 por  $\text{cm}^2$ , expresar el costo total C del material del envase como función del radio r de la base.

Solución:

El costo total C del material del envase está dado así: Como  $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{120}{r}$ , entonces  $c(r) = 4(2\pi r^2) + 2\left(\frac{120}{r}\right) = 8\pi r^2 + \frac{240}{r}$ .

6. Un fabricante de envases de cartón desea construir cajas, sin la tapa superior, usando láminas cuadradas de cartón de 120 cm de lado, recortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Si x cm es la longitud del lado del cuadrado que debe recortarse, expresar en centímetros cúbicos el volumen de la caja a fabricar, como función de x. ¿Cuál es el dominio de la función resultante?

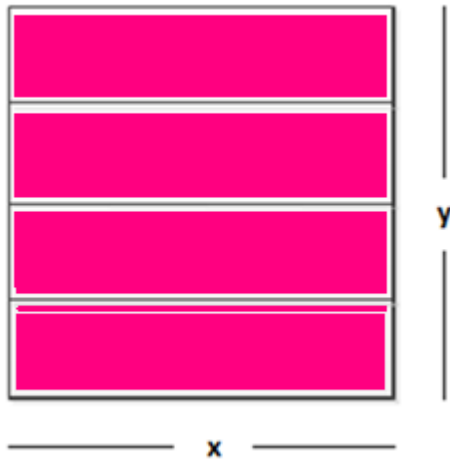
Solución:



El volumen de la caja está dado por el producto del área de la base por la altura, siendo el área de la base:  $A_b = (120 - 2x)^2$ , y la altura  $h = x$ . Así  $V = A_b \cdot h$ , que al expresarlo como función de x nos queda  $v(x) = x(120 - 2x)^2 = x(14400 - 480x + 4x^2) = 4x^3 - 480x^2 + 14400x$ , definido para  $0 \leq x \leq 60$  ya que  $120 - 2x \geq 0$ .

7. Un granjero que tiene 750 pies de cerca, desea encerrar un lote rectangular y dividirlo en cuatro corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. Expresar el área total  $A$  del lote en términos de la longitud  $x$  del lado del lote paralelo a las cercas interiores. Indicar el dominio de la función.

Solución:



En este dibujo estamos considerando que las secciones paralelas están a igual distancia, pero da lo mismo si se consideran las paralelas a diferente distancia.

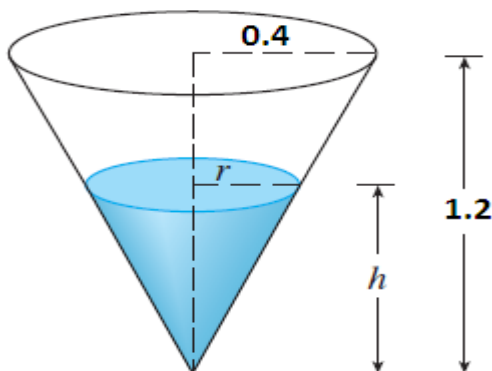
Sea  $P$  el perímetro del lote por cercar, luego  $P = 750$ , y por el gráfico  $P = 5x + 2y$ .

Sea  $A$  el área por cercar, entonces  $A = xy$ , y como  $5x + 2y = 750$  entonces  $y = \frac{750-5x}{2}$ .

Así  $A(x) = x\left(\frac{750-5x}{2}\right) = \frac{5}{2}x(150 - x)$ , definida en  $0 \leq x \leq 150$  ya que  $A(x) \geq 0$  y  $x > 0$ .

8. Se bombea agua en un tanque cónico invertido, cuya altura es de 1.2 m y cuyo radio es de 40 cm. Expresar, en metros cúbicos, el volumen del agua dentro del tanque como una función del radio  $r$  de la superficie del agua.

Solución:



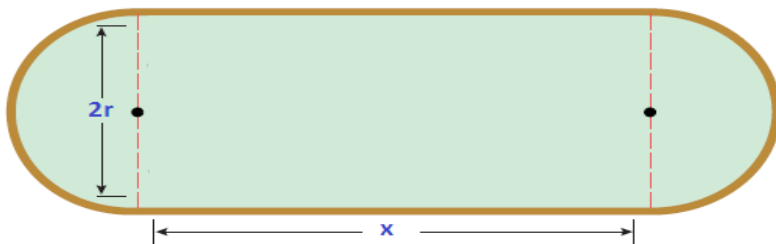
Haciendo la conversión de metros a centímetros de 40cm nos queda que:  $40\text{cm} = 0.4\text{m}$ .

Por semejanza de los triángulos siguiendo la figura obtenemos  $\frac{h}{r} = \frac{1.2}{0.4}$ , de donde  $r = \frac{h}{3}$

Como el volumen de un cono está dado por  $v = \frac{\pi}{3}r^2h \Rightarrow v(r) = \frac{\pi}{3}r^2(3r) = \pi r^3$ , válido para  $r > 0$ .

9. Se debe construir una pista de atletismo con dos segmentos rectos y dos semicirculares, como se muestra en la siguiente figura. El radio de cada segmento semicircular es  $r$ . La longitud de la pista debe ser de 1 km. Expresar el área limitada por la pista como función del radio  $r$ .

Solución:

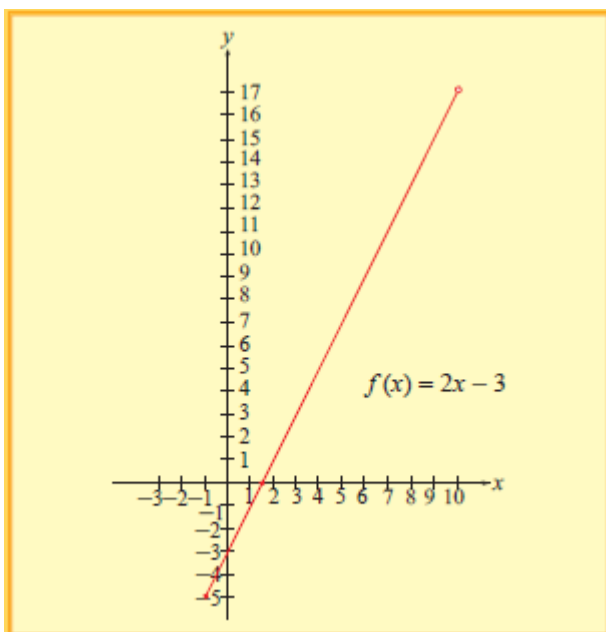


Sea  $P$  el perímetro de la pista dado por  $P = 1\text{km}$ . Entonces:  $P = 2\pi r + 2x \Rightarrow$

$2\pi r + 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1-2\pi r}{2}$ . El área  $A$  de la pista será  $A = \pi r^2 + 2rx$ , que expresada como función de  $r$  queda  $A(r) = \pi r^2 + 2r\left(\frac{1-2\pi r}{2}\right) = \pi r^2 + r - 2\pi r^2 = r(1 - \pi r)$ , válido para  $0 < x < \frac{1}{\pi}$ .

10. Expresar la distancia del punto  $(0, 0)$  a un punto  $(x, y)$  sobre la recta  $y = 2x - 3$ , en términos de  $x$  solamente. Indicar el dominio de la función.

Solución:



Aplicando la fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  a los puntos de nuestro problema nos queda:

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y como } P \text{ satisface la ecuación de la recta } y = 2x - 3, \text{ entonces}$$

$$d = \sqrt{x^2 + (2x - 3)^2} = \sqrt{x^2 + 4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{5x^2 - 12x + 9}, \text{ válido para } 5x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{12x}{5} + \frac{9}{5} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{36}{25}\right) + \frac{9}{5} - \frac{36}{25} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{25} \geq 0, \text{ o sea que es válido para todo } x \text{ en } \mathbb{R}.$$

Luego  $D_f = \mathbb{R}$ .

11. En el proyecto de una Heladería se calcula que si se instalan sillas para ubicar entre 40 y 80 personas, la ganancia diaria será de \$8.000 por silla, pero si la capacidad de sillas sobre pasa las 80, entonces la ganancia diaria por cada silla disminuye \$40 por el número de sillas excedentes. Si  $x$  es el número de sillas y  $G$  la ganancia diaria, se pide expresar a  $G$  como función de  $x$  y hallar su dominio.

Solución:

Sean:  $x$  el número de sillas y  $G$  la ganancia, entonces:

$$A) G(x) = 8000x \text{ si } 40 \leq x \leq 80$$

B) Construyamos la función para  $x > 80$ .

Numero de sillas	Precios x sillas	Ganancia
80+1	8000-40(1)	$G=(80 + 1)[8000 - 40(1)]$
80+2	8000-40(2)	$G = (80 + 2)[8000 - 40(2)]$
80+n	8000-40n	$G = (80 + n)[8000 - 40n]$

Sea  $x = 80 + n$ , así  $n = x - 80$

Sustituyendo en  $G$  nos queda  $G(x) = x[8000 - 40(x - 80)] = x[8000 - 40x + 3200]$  y entonces

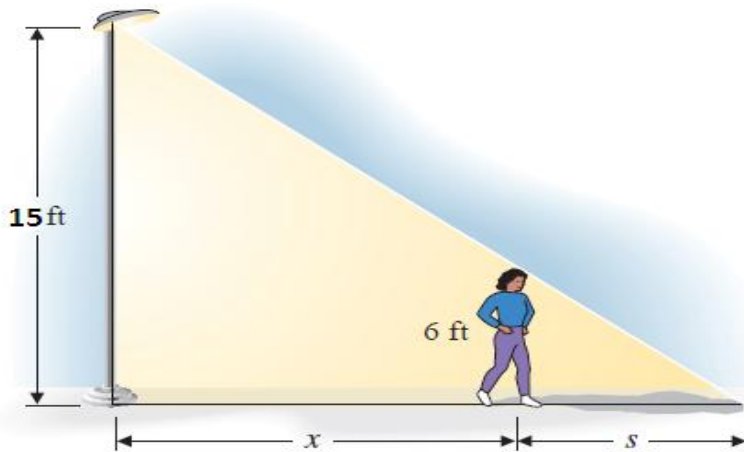
$$G(x) = x(11200 - 40x) = 11200x - 40x^2. \text{ Finalmente:}$$

$$G(x) = \begin{cases} 8000x & \text{si } 40 \leq x \leq 80 \\ 11200x - 40x^2 & \text{si } 80 < x \leq 280 \end{cases}$$

La última restricción se deduce de que  $x(11200 - 40x) \geq 0$  con  $x \geq 0$ .

12. Suponga que una farola se encuentra en el extremo superior de un poste de 15 pies de altura, situado en una calle horizontal y recta. Si un hombre de 6 pies de estatura camina por dicha calle, alejándose del poste, expresar la longitud de su sombra  $s$  (en cualquier instante  $t$ ) en términos de la distancia  $x$  del hombre al poste.

Solución:



Por semejanza de triángulos:

$$\frac{x+s}{15} = \frac{s}{6} \Leftrightarrow \frac{x+s}{5} = \frac{s}{2} \Leftrightarrow 2x + 2s = 5s \Leftrightarrow 3s = 2x \Leftrightarrow s = \frac{2}{3}x, \text{ válido para } x > 0.$$

13. En un pequeño poblado con 5.000 habitantes, la tasa de propagación de una epidemia (índice de variación del número de personas infectadas) es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y al número de personas que todavía no se han contagiado.

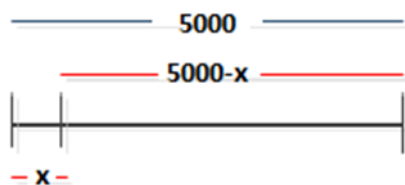
Si la epidemia se difunde con una tasa de 9 personas por día cuando hay 100 personas contagiadas, exprese la rapidez de propagación de la epidemia como función del número de personas enfermas.

¿Con qué rapidez se difunde la epidemia cuando 200 personas ya se han contagiado?

Solución:

Sean  $T$ : la tasa de propagación de la epidemia

Sea  $x$  el número de personas infectadas. Entonces, existe  $k > 0$  tal que  $T = kx(5000 - x)$



Como la epidemia se difunde con una tasa de 9 personas por día cuando hay 100 personas contagiadas, entonces  $9 = k100(5000 - 100) \Leftrightarrow k = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot 10^{-4}$  con lo que:

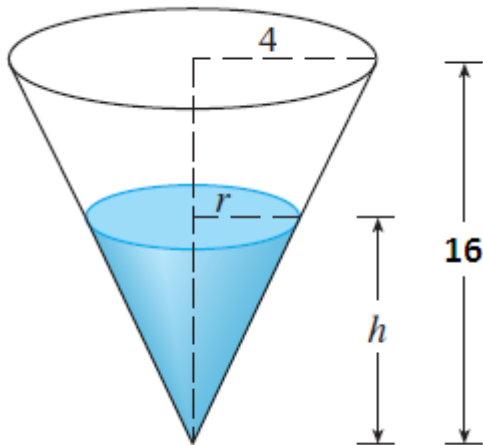
a)  $T(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot 10^{-4} x(5000 - x)$

b)  $T(200) = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot 10^{-4} (2 \cdot 10^2)(5000 - 200) = \frac{9}{49} \cdot 10^{-2} (48(10)^2) = \frac{9 \cdot 48}{49}$

Así que  $T(200) = 8.81$  personas/día, es decir aproximadamente 9 personas por día.

14. Cierta cantidad de agua fluye a una tasa de  $2 \text{ m}^3/\text{min}$  hacia el interior de un depósito cuya forma es la de un cono invertido de 16 m de altura y 4 m de radio. Expresar el volumen  $V$  de agua en el depósito, en un instante cualquiera como función de la profundidad  $h$  del agua.

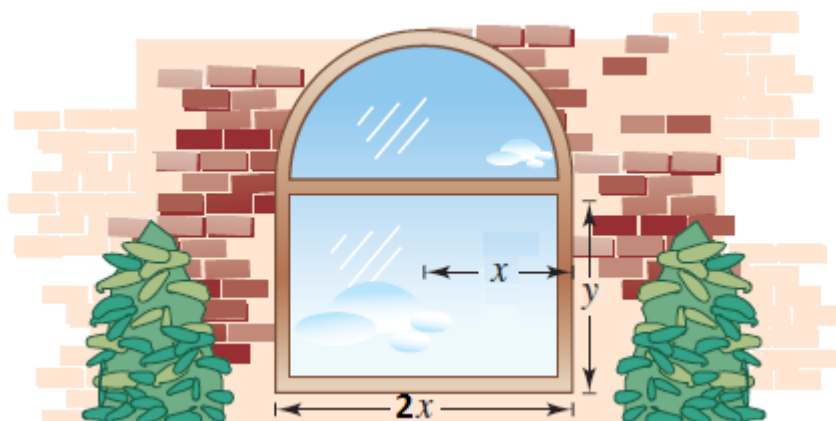
Solución:



Por semejanza de triángulos tenemos  $\frac{h}{r} = \frac{16}{4}$  de donde  $r = \frac{1}{4}h$ .

Si  $h$  es la altura y  $r$  el radio del cono en un momento dado, entonces el volumen del cono es  $V = \frac{\pi}{3}r^2h$ , por tanto  $v(h) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{h^2}{16}\right) h = \frac{\pi h^3}{48}$

15. Una ventana rectangular está rematada por un semicírculo. El perímetro de la ventana es 200 cm y la cantidad de luz que ingresa por ella es directamente proporcional al área de la ventana. Si  $x$  cm. es el radio del semicírculo: A) expresar la cantidad de luz que ingresa por la ventana como función de  $x$  B) ¿Cuál es el dominio de la función resultante?

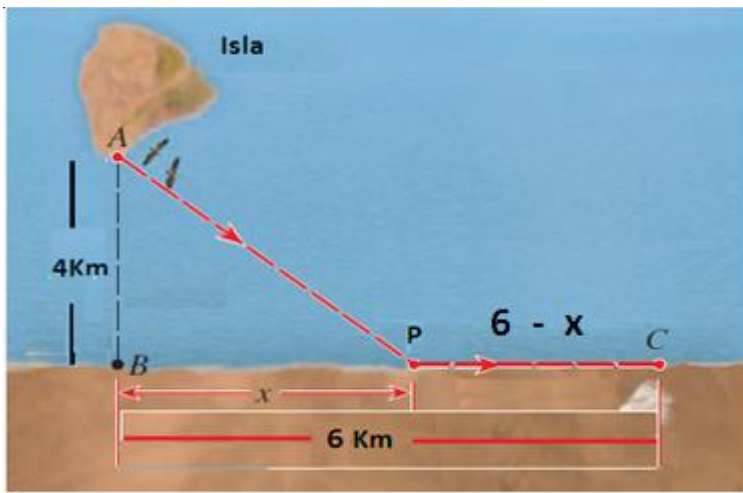


Sean  $P$  el perímetro de la ventana y  $A$  su área. Como  $P = 200 \text{ cm}$ . y el perímetro total de la figura está dado por  $P = 2x + 2y + \pi x$  (ya que es la suma del semiperímetro de una circunferencia de radio  $x$  con el perímetro del rectángulo inferior), entonces  $2x + 2y + \pi x = 200$ , y así:  $y = \frac{200 - (2 + \pi)x}{2}$ .

Ahora:  $A = 2xy + \frac{\pi x^2}{2}$ , luego  $A(x) = 2x \left[ \frac{200 - (2 + \pi)x}{2} \right] + \frac{\pi}{2} x^2 = 200x - (2 + \pi)x^2 + \frac{\pi}{2} x^2$ , definida para  $0 \leq x \leq \frac{200}{2 + \pi}$ , ya que  $y \geq 0$ .

16. Una isla está ubicada en el punto A, 4 km mar adentro del punto más cercano B de una playa recta. Una mujer, en la isla, desea ir al punto C, a 6 km de B playa abajo. La mujer puede dirigirse hacia el punto P, entre B y C en un bote de remos a 5 km/h y después caminar en forma recta de P a C a 8 km/h. Si x denota la distancia, en km, del punto P a B, expresar el tiempo total t gastado por la mujer para ir de la isla al punto C, en función de x. Indicar el dominio de la función.

Solución:



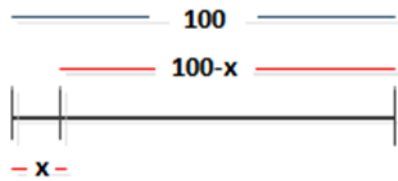
Como espacioes, en este caso, velocidad por tiempo, es decir  $e = v \cdot t$ , entonces  $t = e/v$ .

Si denotamos por  $V_{AP}$  la velocidad que la mujer desarrolla para ir desde el punto A hasta el punto P, entonces  $V_{AP} = 5 \text{ km/h}$ . El tiempo de este recorrido será  $t_{AP} = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{5}$ , al aplicar el Teorema de Pitágoras en el triángulo mostrado en la figura. Análogamente  $V_{PC} = 8 \text{ km/h}$  será la velocidad que la mujer desarrolla para ir desde el punto P hasta el punto C, y entonces el tiempo de recorrido es  $t_{PC} = \frac{6-x}{8}$ .

El tiempo total de recorrido  $t$  será el tiempo empleado para ir desde A hasta P, más el tiempo empleado para ir desde P hasta C, denotado por  $t = t_{AP} + t_{PC}$ , y de acuerdo con la gráfica  $t = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{5} + \frac{6-x}{8}$ ; válido para  $0 \leq x \leq 6$ .

17. Un avión de una compañía tiene cupo para 100 pasajeros. La compañía cobra, para una excursión, \$800.000 a cada pasajero más \$10.000 por cada puesto que vaya vacío. Si viajan x pasajeros: A) expresar cuánto dinero pagará cada uno B) expresar, mediante una función de x, el ingreso que recibe la compañía por todos los pasajeros.

Solución:



Sea  $x$  es el número de pasajeros presentes en la excursión.

a) precio por pasajero  $P = 800000 + 10000(100 - x)$

El ingreso  $I$  está dado por  $I = Px$ , en donde  $P$  es el precio por pasajero, luego:

$$I = [8000000 + 1000(100 - x)]x, \text{ válido para } 0 \leq x \leq 100.$$

18. Los naranjos que crecen en la Pintada producen 600 naranjas por año si no se plantan más de 20 árboles por hectárea. Por cada naranjo adicional por hectárea el rendimiento por cada árbol de la plantación decrece en 15 naranjas. Expresar el número de naranjas  $N$  producidas en cada hectárea por año como una función del número de naranjos  $x$  plantados por hectárea.

Solución:

Sean:

$N$  el número de naranjas producidas en cada hectárea por año.

$X$  el número de naranjos plantados por hectárea.

Si  $0 \leq x \leq 20$ ,  $N(x) = 600x$ .

Como por cada naranjo adicional a 20, sembrado por hectárea, el rendimiento por árbol decrece en 15 naranjas, al adicionar sucesivamente a partir de 20,  $20 + 1$ ,  $20 + 2$  ...  $20 + n$ , y teniendo en cuenta el decrecimiento por árbol, obtendremos las naranjas producidas así:

Para  $x = 20 + 1$ , cada árbol produce  $600 - 15$  naranjas y por tanto el total de naranjas será:

$$N = (20 + 1)[600 - 15(1)]$$

Para  $x = 20 + 2$ , cada árbol produce  $600 - 15(2)$  naranjas y por tanto el total será:

$$N = (20 + 2)[600 - 15(2)]$$

Para  $x = 20 + 3$ , cada árbol produce  $600 - 15(3)$  naranjas y por tanto el total será:

$$N = (20 + 3)[600 - 15(3)]$$

En general para  $x = 20 + n$  naranjos, cada árbol produce  $600 - 15(n)$ , y por tanto el número total de naranjas producidas serán:

$$N = (20 + n)[600 - 15n], \text{ es decir } N(n) = (20 + n)[600 - 15n]$$

Sea  $x = 20 + n \Rightarrow n = x - 20$ , de donde:

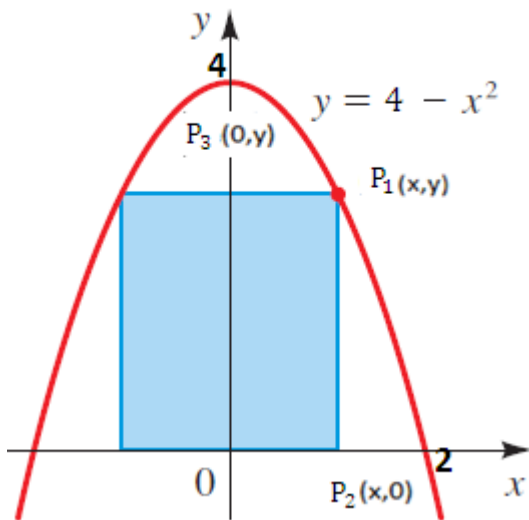
$$N(x) = x[600 - 15(x - 20)] = x(600 - 15x + 300) = x(900 - 15x) = 900x - 15x^2.$$

$$\text{Finalmente, } N(x) = \begin{cases} 600x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 900x - 15x^2 & \text{si } 20 < x \leq 60 \end{cases}$$

La restricción  $x \leq 60$  obedece a que debe ser  $N(x) \geq 0$  con  $x > 0$ , y entonces  $900 - 15x \geq 0$ .

19. Los vértices de un rectángulo están uno sobre el eje  $x$ , otro sobre la gráfica de  $y = 4 - x^2$ , otro sobre el eje  $y$ , y el otro es el origen. Expresar el área  $A$  del rectángulo en función de uno de sus lados.

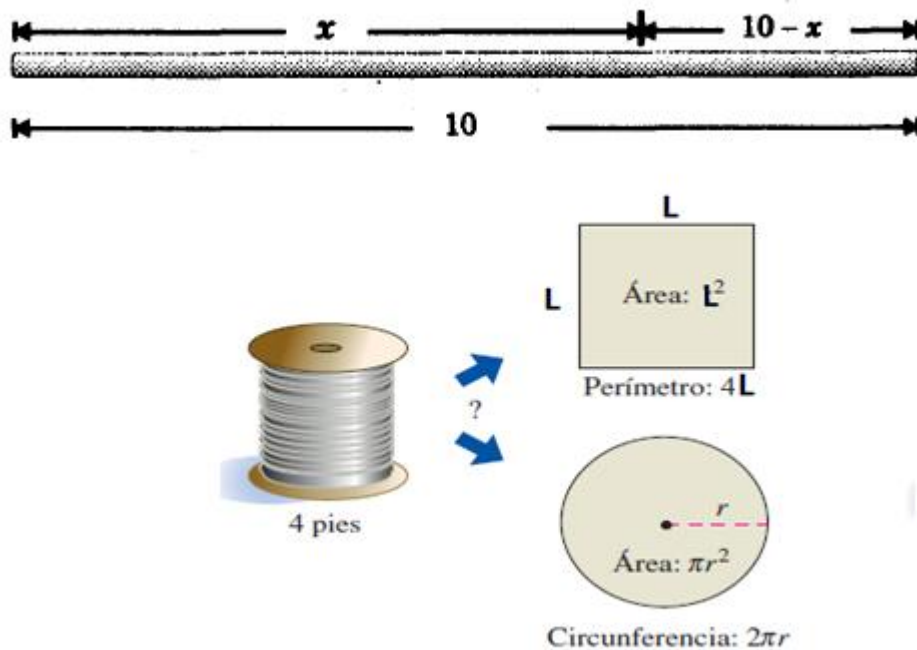
Solución:



El área  $A$  del rectángulo es  $A = xy$ . Como  $(x, y)$  está en la curva  $y = -x^2 + 4$  entonces sus coordenadas satisfacen su ecuación, luego  $A(x) = x(4 - x^2) = 4x - x^3$ , válido para  $0 \leq x \leq 2$ .

20. Un trozo de alambre de 10 pies de longitud se corta en dos partes. Con una parte se hace una circunferencia y la otra se dobla en forma de cuadrado. Si  $x$  es la longitud del trozo de alambre usado para construir la circunferencia, expresar el área  $A$  de las dos figuras como una función de  $x$ . Indicar el dominio de la función.

Solución:



Perímetro circunferencia:  $x = 2\pi r$ , de donde  $r = \frac{x}{2\pi}$

Perímetro del cuadrado  $10 - x = 4L$ , es decir que  $L = \frac{10-x}{4}$ .

El área total de la figura será la suma de las áreas de la circunferencia y del cuadrado, es decir:  $A = \pi r^2 + L^2$ , de donde al sustituir los valores obtenidos anteriormente en  $A$ , obtenemos  $A(x) = \frac{\pi x^2}{4\pi^2} + \frac{(10-x)^2}{16} = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(10-x)^2}{16}$ .

Así finalmente,  $A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(10-x)^2}{16}$ , válida para  $0 < x \leq 10$ .

### Taller 1 - Cálculo Diferencial - Clases 1-2.

INSTRUCCIONES: Antes de intentar resolver los ejercicios del taller, repase un poco la teoría y ejemplos vistos en clase. Realice este taller individualmente o en grupos. Si tiene alguna pregunta, asista a las asesorías con monitores o profesores.

1. Explique en sus propias palabras los siguientes conceptos:

- La variable  $y$  es función de la variable  $x$ .
- $F$  es una función lineal de  $r$  con pendiente  $m$ .
- $f$  es una función creciente en el intervalo  $[a, b]$ .

2. Responda si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué, y si es falso escriba el enunciado correcto o muestre un ejemplo donde el enunciado dado no se cumpla.

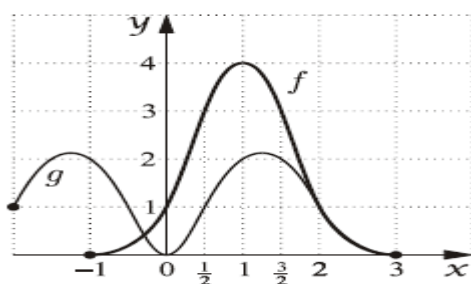
- La ecuación  $x = 7$  representa una función de  $x$ .
- Toda tabla de números compuesta de dos columnas con igual número de entradas se puede usar como la definición de una función.
- La gráfica de una función puede ser simétrica con respecto al eje horizontal.
- Para algunos números, se cumple que  $|x| = x$ .

- e) Si  $y$  es proporcional a  $x$ , entonces  $y$  es función de  $x$ .
- f) Si  $f$  es una función impar entonces  $f(0) = 0$ .
- g) Si  $g$  es una función par, entonces su dominio es  $\mathbb{R}$ .
- h) Si  $f$  es una función impar, entonces su rango es  $\mathbb{R}$ .
- i) Para cada par de puntos en el plano, existe una función lineal que pasa por ellos.
- j) Si las gráficas de dos funciones lineales se interceptan, entonces tienen pendientes diferentes.

3. Para cada una de las siguientes situaciones o enunciados identifique la variable independiente, la variable dependiente, haga una gráfica aproximada de la función que las relaciona, halle una fórmula, e indique su dominio y rango.

- a) La población colombiana es actualmente de 46 millones de personas, y se espera que siga aumentando a una tasa de 800 mil personas por año.
- b) Cuando un paciente con taquicardia, digamos con 140 pulsaciones por minuto, toma una dosis de la droga, su ritmo cardíaco baja precipitosamente, hasta casi cero palpitations por minuto en menos de 3 minutos. Después de media hora aproximadamente el ritmo cardíaco alcanza su nivel normal de 100 palpitations por minuto.
- c) En un taxi, el banderazo cuesta 2400 pesos, la carrera mínima 4000, y por cada 100 metros recorridos, el taxímetro aumenta 80 pesos.
- d) Hay promoción de azúcar. El kilo vale 1000 pesos, pero por la compra de de más de 20 kilos, le hacen un descuento del 10% en el precio por kilo. Si compra más de 30 de kilos a usted le toca pagar 5000 pesos extra para que le ayuden a cargar ese montón de azúcar.
- e) Los fondos que el estado distribuye a las Universidades de Colombia, son proporcionales al número de estudiantes matriculados. Por ejemplo, en el 2011 la Universidad Nacional tuvo (en todas sus sedes) 45367 estudiantes matriculados, y recibió 650 mil millones de pesos.
- f) La temperatura del aire en la atmósfera depende de la altura. Para empezar, en la troposfera, que se extiende por los primeros 10 km de altura, y que es dónde todo el clima se desarrolla, la temperatura del aire disminuye a una tasa de  $6.5^\circ\text{C}$  por cada kilómetro. Luego hay una zona llamada la tropopausa, de unos 10km de espesor, en donde el máximo nivel de ozono se alcanza, y por tanto la temperatura del aire es aproximadamente constante. La siguiente capa es la estratosfera, la cual se extiende por 50 km, y en la cual ocurre lo que se llama una zona de inversión, es decir la temperatura de hecho incrementa con la altura, de manera tal que en la parte superior de esta capa la temperatura es aproximadamente  $5^\circ\text{C}$ .

4. En la figura se proporcionan las gráficas de dos funciones  $f$  y  $g$ . Se sabe además que la función  $g$  es par.



- a) Dé los valores de  $f(-1)$  y  $g(1)$ .

- b) ¿Para cuáles valores (aproximados) de  $x$  se tiene  $f(x) = g(x)$ ?
- c) Estime la solución de la ecuación  $f(x) = 2$ .
- d) Estime la solución de la ecuación  $g(x) = 2$ .
- e) ¿En cuáles intervalos es  $f$  decreciente?
- f) Dé el dominio y el rango de  $f$ .
- g) Dé el dominio y el rango de  $g$ .

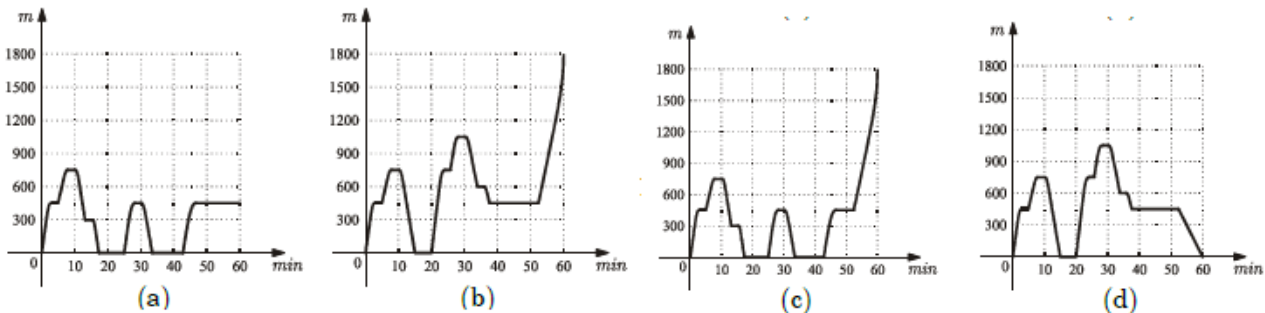
5. Halle el dominio y rango de las siguientes funciones. Determine si la función es par o impar. Use un computador o calculadora para graficarlas y verificar su respuesta. Según la gráfica, describa en palabras el comportamiento de cada función.

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2 + x}, \quad g(x) = \frac{x}{x + 5}, \quad h(x) = \frac{x^3 + x}{4 - x^2}$$

$$r(x) = \frac{x^3}{|x - 1|}, \quad s(x) = x^2|x|, \quad t(x) = \frac{|x| + x^2}{\cos x},$$

$$u(x) = \begin{cases} -x^4 - 2x, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^4 - 2x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

6. Se mide la distancia de un mensajero, que se desplaza en bicicleta, desde su lugar de trabajo y se representa en una de las gráficas siguientes. Conociendo que el mensajero hace un único mandado en cada viaje, que cuando se detiene por un semáforo lo hace máximo por dos minutos y que al regreso de uno de sus viajes sufrió un accidente que lo detuvo unos quince minutos y lo hizo ir de allí directamente al hospital, localizado bastante lejos de su lugar de trabajo, escoja la gráfica que mejor describa dicha situación.

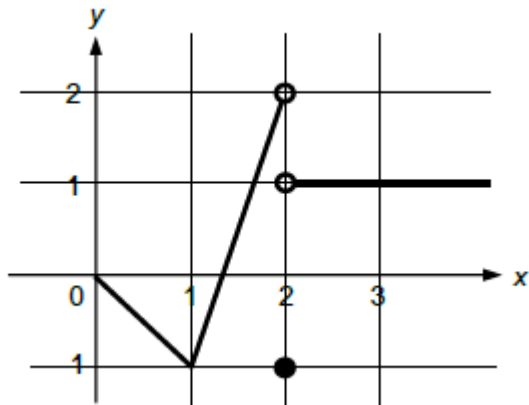


7. Cuando Usain Bolt rompió el récord de los cien metros planos en Berlín, los primeros tiempos cronometrados a lo largo de la carrera fueron los siguientes:

Tiempo [seg]	1.84	2.86
Distancia [m]	10	20

Suponiendo que la distancia recorrida  $x$  es una función lineal del tiempo  $t$ , ¿qué puede decir del tiempo de reacción de Bolt? Es decir, ¿cuánto tiempo tardó Bolt en comenzar a correr? Si hubiera seguido a la misma velocidad, ¿cuánto habría sido su tiempo total de carrera?

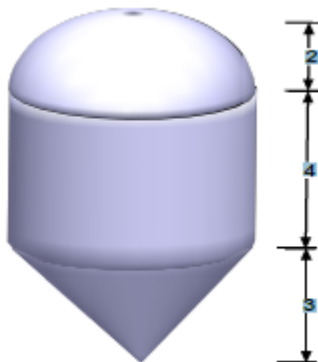
8. La figura muestra la parte de la gráfica, a la derecha del eje vertical, de una función impar  $f$ . Complete la gráfica, y halle una fórmula por tramos para  $f$ . Halle una fórmula por tramos para  $g(x) = |f(x)|$ .



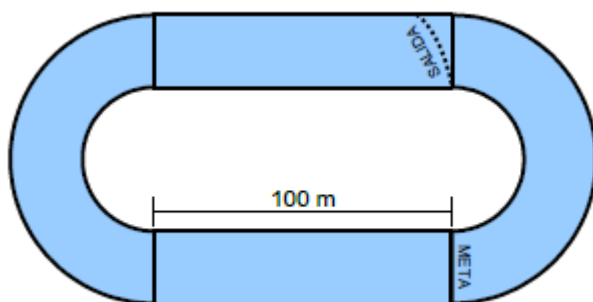
9. Un trozo de alambre de 20 metros de largo se corta en dos pedazos. Uno de ellos de tamaño  $x$  se dobla en forma de triángulo rectángulo con ángulos agudos de  $45^\circ$  y el resto se dobla en forma de un cuadrado.

- Haga un dibujo que exprese lo mejor posible la situación descrita.
- Encuentre una fórmula que exprese el cateto del triángulo en términos de  $x$ :
- Encuentre una fórmula para la suma  $A$  de las áreas encerradas por el triángulo y por el cuadrado en función de  $x$ . Halle el dominio de la función  $A$ .

10. Considere el silo que se muestra en la figura. La parte superior es una semiesfera y las dimensiones están dadas en metros. Halle el volumen de líquido que ocupa el silo como función de la altura hasta la cual se llena.



11. La figura muestra un pista de atletismo. La distancia de una vuelta por el carril interno es de 400 m. Suponga que se quiere organizar una carrera desde la salida hasta la meta marcadas, y claro, tal que todos los carriles recorran la misma distancia. Halle la función para marcar la línea punteada de salida.



**Taller 2 - Cálculo Diferencial - Clases 3-4**

INSTRUCCIONES: Antes de intentar resolver los ejercicios del taller, repase un poco la teoría y ejemplos vistos en clase. Realice este taller individualmente o en grupos. Si tiene alguna pregunta, asista a las asesorías con monitores o profesores.

1. Para cada uno de los siguientes tipos de funciones, escriba su forma general (si la hay), un ejemplo particular, y una aplicación a la vida real:

- Función lineal.
- Función potencia.
- Polinomio.
- Función racional.
- Función trigonométrica.

2. Responda si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué, y si es falso escriba el enunciado correcto o muestre un ejemplo donde el enunciado dado no se cumpla.

- Todas las funciones potencia pasan por (1,1).
- Toda función potencia es un polinomio.
- Toda función lineal es un polinomio.
- Todo polinomio es una función racional.
- Si un polinomio tiene al menos una raíz real, entonces se puede factorizar.
- El rango de todo polinomio es igual a  $\mathbb{R}$ .
- Dados cualquier tres puntos en el plano, existe al menos un polinomio que pasa por ellos.
- Todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.
- El período de la función  $f(t) = \sin(4\pi t)$  es  $1/2$ .
- La función  $g(x) = \cos(x) + \sin(2x)$  es periódica.
- $\sin|x| = |\sin x|$  para  $-2\pi < x < 2\pi$ .
- La función  $\sin(x^2)$  es periódica con periodo  $2\pi$ .

3. Halle fórmulas para funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

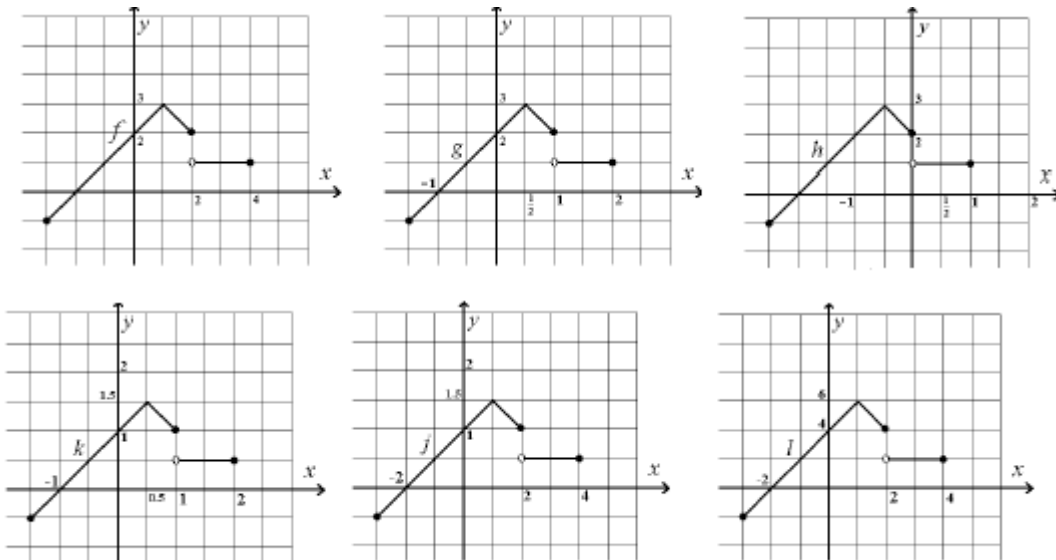
- Una función que sea par e impar a la vez.
- Una parábola que se abra hacia abajo y tenga su vértice en (2,5).
- Un polinomio de grado cuatro que intercepte al eje horizontal en  $\pi$ , -1 y 5.
- Una función con rango  $[3, 5]$  y periodo igual a 4.
- Una función potencia que pase por (2, 0.025).

4. Para cada una de las siguientes funciones, dibuje en el mismo plano las gráficas correspondientes a los valores  $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ .

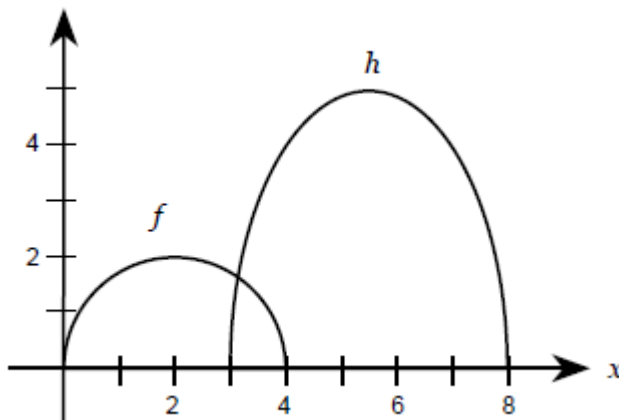
$$f(x) = nx, \quad g(x) = x^n, \quad h(x) = x^{1/n}$$

5. Las gráficas de las funciones  $f, g, h, j, k, l$  se muestran en la figura. Determine cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos:

$$g(x) = f(2x), \quad h(x) = f(x-2), \quad j(x) = \frac{1}{2}f(x), \\ k(x) = \frac{1}{2}f(2x), \quad l(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right).$$



6. La función  $f$ , cuya gráfica se muestra en la figura, tiene fórmula  $f(x) = \sqrt{4 - (x - 2)^2}$ . Halle una fórmula para la función  $h$  mostrada.



7. Dibuje a mano la gráfica de la función  $f$  mediante transformaciones elementales de la función  $g$ . En cada paso, trace la gráfica correspondiente e indique la fórmula de la función que está graficando.

a)  $f(x) = 2 \cos(x - \frac{\pi}{4})$ ,  $g(x) = \cos x$ .

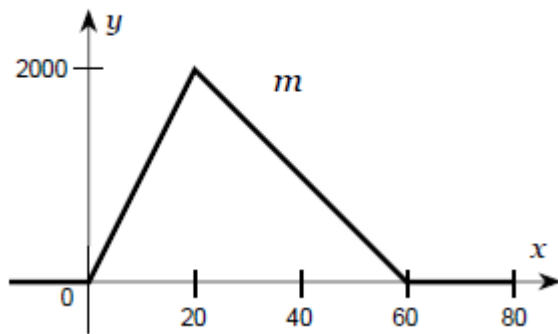
b)  $f(x) = 2 - \sqrt{3x + 1}$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ .

c)  $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}(x - 1))$ ,  $g(x) = \tan x$ .

d)  $f(x) = |2x - x^2|$ ,  $g(x) = x^2$ .

e)  $f(x) = 2|x - 1|^3 + 1$ ,  $g(x) = x^3$ .

8. Suponga que una carretera tiene la forma mostrada en la figura:  $y = m(x)$  donde  $y$  es la altura en metros, y  $x$  la distancia horizontal en Km. Suponga que un auto viaja a una velocidad horizontal constante de 40 Km/h y comienza a subir la montaña a las 3 AM. Exprese la altura a la que se encuentra el auto como función del tiempo  $t$  en horas a partir de la media noche. Use transformaciones elementales sobre la figura dada para hallar la gráfica de dicha función.

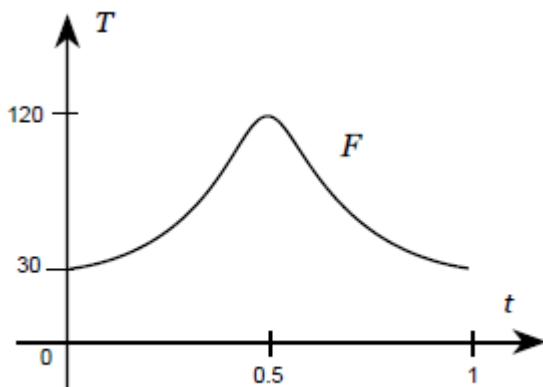


9. Las mareas son fenómenos con periodo 24 horas y se pueden modelar mediante funciones seno o coseno. Sea  $h = f(t)$  la altura en metros de la superficie del agua sobre un punto de referencia dado, en función del tiempo  $t$  en horas, con  $t = 0$  a la media noche.

a) Halle una fórmula para  $f(t)$  si se sabe que la marea más alta, de 1.2 m, ocurre a las 2 AM, y la más baja es de 80 cm por debajo del punto de referencia.

b) Sea ahora  $\hat{h}$  altura en metros de la superficie del agua sobre un punto de referencia 20 cm por encima del punto de referencia de la parte (a) y  $s$  el tiempo en horas, con  $s = 0$  al medio día. Use transformaciones elementales para hallar  $\hat{h}$  en función de  $s$ .

10. El resultado de un proceso de calentamiento enfriamiento es la función  $F(t)$  que muestra en la figura.  $T$  denota la temperatura en grados centígrados, y  $t$  el tiempo en minutos. Suponga que queremos cambiarle las unidades a las variables y graficar ahora la temperatura  $\hat{T}$  en grados Fahrenheit como función del tiempo  $\hat{t}$  en segundos. Dibuje la nueva gráfica. Si  $\hat{T} = G(\hat{t})$ , ¿cómo se puede obtener  $G$  a partir de transformaciones elementales de  $F$ ?



### Taller 3 - Cálculo Diferencial - Clases 5-6.

INSTRUCCIONES: Antes de intentar resolver los ejercicios del taller, repase un poco la teoría y ejemplos vistos en clase. Realice este taller individualmente o en grupos. Si tiene alguna pregunta, asista a las asesorías con monitores o profesores.

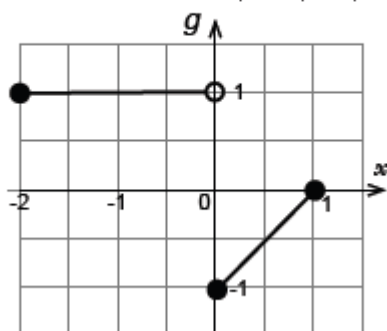
1. Repase las definiciones y explique en sus propias palabras el significado de los siguientes conceptos matemáticos:

a) Compuesta de funciones. Qué es  $f \circ g$  y cuál es su dominio.

- b) Una función exponencial.
  - c) El número e.
  - d) Vida media de un isótopo.
2. Responda si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué, y si es falso escriba el enunciado correcto o muestre un ejemplo donde el enunciado dado no se cumpla. Suponga que  $f$  y  $g$  son funciones:
- a)  $f \circ g = g \circ f$
  - b)  $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ .
  - c)  $\text{Dom}(f/g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ .
  - d)  $\text{Dom}(g \circ f) = \text{Dom}(g) \cap \text{Ran}(f)$ .
  - e) Toda función exponencial es creciente.
  - f) Si una población de bacterias se duplica cada hora, entonces el número de bacterias es una función exponencial del tiempo.
  - g) Si una población de bacterias aumenta a una tasa de dos bacterias por hora, entonces el número de bacterias es una función exponencial del tiempo.
  - h) Si una población de bacterias se multiplica por si misma cada hora, entonces el número de bacterias es una función exponencial del tiempo.
  - i) Si una población de bacterias se reduce a la mitad cada hora, entonces el número de bacterias es una función exponencial del tiempo.
  - j) Toda función exponencial  $g(x) = a^x$  se puede expresar como  $g(x) = ce^{kx}$  para algunas constantes  $c, k$ .
  - k) Si  $f$  y  $g$  son funciones exponenciales, entonces  $f \circ g$  también lo es.

3. Considere las siguientes funciones  $f, g, h$ :

$$h(x) = 1 - x, \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} t & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline f(t) & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

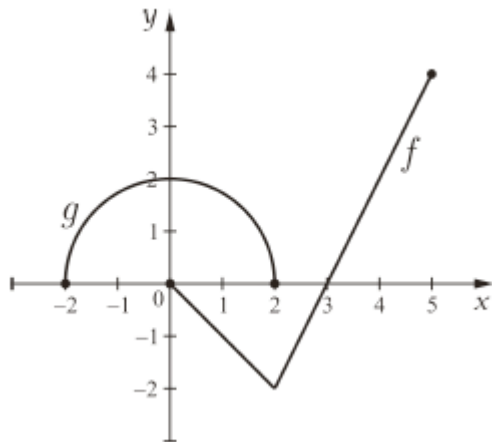


Para cada uno de las siguientes funciones calcule su dominio, dibuje la gráfica, y calcule el rango.

$$(h \circ g), (g \circ f), (f \circ g), (g \circ g), (f \circ f), (f \circ g \circ h).$$

4. Para las funciones  $f \circ g$  en la figura:

- Halle el dominio de  $g$  o  $f$ .
- Halle una fórmula para  $g$  o  $f$ .
- Dibuje la gráfica de  $g$  o  $f$ .



- Un globo esférico está siendo inflado y su radio está aumentando a razón de 2 cm/s.
  - Expresa el radio del globo en función del tiempo  $t$ .
  - Si  $V(x)$  es el volumen de una esfera de radio  $x$ , encuentre ( $V$  o  $r$ ) y describa el significado de esta función.
- Una varilla de cierto metal compuesto tiene una densidad lineal de 13 Kg/m hasta el segundo metro, y de 10 Kg/m entre el segundo y el cuarto metro. El precio del material se da por peso: 3000\$ por kilo hasta los primeros 20 Kg, y si compra más de 20 Kg, el kilo adicional cuesta 2500\$.
  - Expresa el peso de la varilla como función de la longitud.
  - Expresa el costo del material como función del peso a comprar.
  - Use composición de funciones para hallar el costo de la varilla como función de su longitud.
- Un cultivo de bacterias inicia con 100 bacterias y se duplica cada 5 horas.
  - Encuentre el número de bacterias en el cultivo después de 10 horas.
  - Indique la población  $P(t)$  de bacterias que hay después de  $t$  horas.
  - ¿A cuánto asciende el número de bacterias cuando han transcurrido 10 días?
- Un isótopo de sodio,  $^{24}\text{Na}$ , tiene una vida media de 15 horas, e inicialmente una muestra de este isótopo tiene 2 gramos de masa.
  - Encuentre la cantidad de masa restante cuando han transcurrido 60 horas.
  - Halle la cantidad remanente al transcurrir  $t$  horas.
  - Estime la cantidad restante una vez transcurridos 4 días.
- La presión atmosférica es una función de la altura, y decrece en un 0.4% cada 100 metros. Al nivel del mar la presión es  $p_a = 101.3\text{K}$   $p_a$ .

- a) Halle una fórmula para la presión atmosférica en función de la altura.
- b) ¿En qué porcentaje se reduce la presión atmosférica cuando se sube del nivel del mar a Medellín (1500msnm)?
- c) Si un avión sube de la costa a la altura de Medellín a una velocidad constante de 100m/min, halle la expresión para la presión atmosférica fuera del avión como función del tiempo.

10. Suponga que en un año el número de casos de cierta enfermedad se reduce en un 20 %. Si el día de hoy existen 10.000 casos, cuántos años tendrán que transcurrir para que:

- A) Se reduzca el número de casos a 1.000  
 B) Para eliminar la enfermedad (es decir que el número de casos sea menor que 1)

11. En 1900 la había 1.5 millones de Colombianos, y en el año 2000 el Censo arrojó un total de 41 millones de habitantes. Sea  $t$  el tiempo en años y considere los siguientes tres modelos matemáticos:

- Crecimiento lineal:  $P_{l(t)} = mt + b$
- Crecimiento exponencial:  $P_e(t) = c e^{kt}$
- Crecimiento potencial:  $P_p(t) = r t^\alpha$ .

a) Use los datos dados para hallar las fórmulas en cada modelo. Es decir, halle el valor de los parámetros  $m$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $k$ ,  $r$ .

b) Llene los espacios vacíos en la siguiente tabla con los resultados, en millones de habitantes, de cada uno de los modelos.

Año	Lineal	Exponencial	Potencial
1800			
1900	11.5	11.5	11.5
1950			
2000	41	41	41
2012			
2100			

- c) ¿Qué modelo predice mejor la población actual de 46.3 millones de Colombianos?
- d) ¿Cuál cree usted que es el mejor modelo matemático para esta situación y por qué?

#### Taller 4 - Cálculo Diferencial - Clases 7- 8.

INSTRUCCIONES: Antes de intentar resolver los ejercicios del taller, repase un poco la teoría y ejemplos vistos en clase. Realice este taller individualmente o en grupos. Si tiene alguna pregunta, asista a las asesorías con monitores o profesores.

1. Repase las definiciones y explique en sus propias palabras el significado de los siguientes conceptos matemáticos:

- a) Función uno a uno.  
 b) Función inversa.Cuál es la definición de  $f^{-1}$  y cuál es su dominio.  
 c) Función logaritmo en base  $b$ .

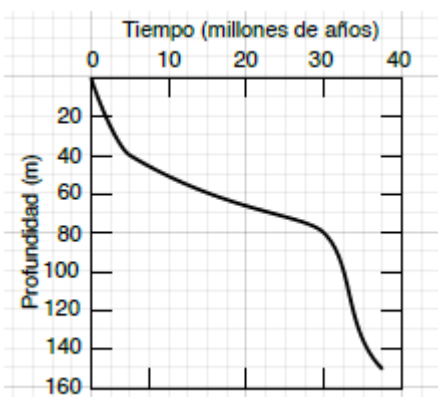
2. Responda si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué, y si es falso escriba el enunciado correcto o muestre un ejemplo donde el enunciado dado no se cumpla. Suponga que  $f$  y  $g$  son funciones:

- a)  $a^{-\log_a a} = 1$ .
- b) Si  $f$  es una función invertible, entonces  $\text{Ran}(f^{-1}) = \text{Dom}(f)$ .
- c) Una función periódica puede ser uno a uno.
- d) Una función par puede ser uno a uno.
- e) Si  $f$  es impar entonces es invertible.
- f) Si  $f$  es impar e invertible, entonces  $f^{-1}$  también es impar.
- g) Si  $f$  es invertible y creciente, entonces  $f^{-1}$  también es creciente.
- h) Si  $f$  y  $g$  son funciones uno a uno, entonces  $f \circ g$  también lo es.
- i) Toda función exponencial es invertible.
- j) Dada una función logarítmica  $f(x) = \log_b x$  y cualquier  $a > 0$ , podemos encontrar un número  $c$  tal que  $f$  se puede escribir como  $f(x) = c \log_a x$ .
- k) Existe una función invertible  $f$  con  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ , y tal que  $f^{-1}(x) = (f(x))^{-1}$ .

3.Cuál de las siguientes funciones son invertibles y por qué.

- a)  $P(x)$  es el precio de  $x$  gaseosas en la cafetería central.
- b)  $T(r)$  es el precio que marca un taxímetro cuando el taxi ha recorrido  $r$  Km sin detenerse.
- c)  $f(s)$  es la cantidad de galones de gasolina en el tanque de un carro como función del tiempo desde la última tanqueada.
- d)  $E(t)$  es el número de estudiantes al interior de la biblioteca en el instante  $t$ .
- e)  $\gamma(x)$  es la altura de la calzada de la calle que sube al cerro El Volador como función de la distancia  $x$  desde la entrada.
- f)  $f(n)$  es el número estudiantes en su clase de cálculo que cumplen años en el enésimo día del año.

4. En una excavación submarina, se define a  $f(t)$  como la profundidad por debajo del fondo del mar, a la cual se encuentran rocas de edad  $t$  millones de años. La función  $f$  tiene la gráfica mostrada en la figura.



V

- a) ¿Es  $f$  invertible?
- b) ¿Cuánto vale y qué significa  $f^{-1}(40)$ ?
- c) Trace la gráfica de  $f^{-1}$ .

5. Producir  $q$  camisetas cuesta  $C(q) = 6000 + 22000q$ . Halle una fórmula para la inversa de  $C$  y explique su Significado.
6. Una población de bacterias tiene inicialmente 20 individuos, y tres horas después ha aumentado a 50 individuos.
- a) Asumiendo un modelo de crecimiento exponencial, exprese el número de bacterias  $B$  como función del tiempo  $t$ .
- b) Si  $B = f(t)$ , calcule  $f^{-1}$  y exprese su significado.
7. Halle la inversa de las siguientes funciones:

a)  $f(u) = \sqrt{2 - 5u}$ ,

b)  $f(r) = \frac{-3 - 4r}{2 + 3r}$

c)  $f(y) = 2^{(10^y)}$

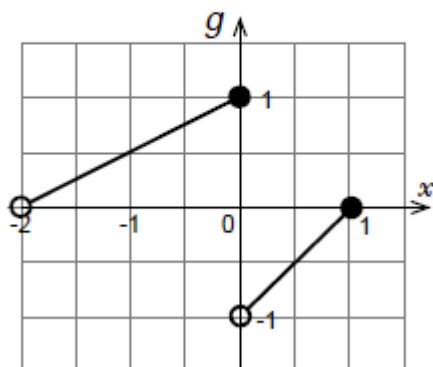
d)  $f(v) = \ln(v) - \ln(v - 1)$ .

e)  $f(x) = \log_x(2)$

f)  $f(s) = \begin{cases} 2s + 3, & s < -1 \\ e^{-(s+1)}, & -1 \leq s \leq 0 \\ x^2 + 2, & 0 \leq s. \end{cases}$

8. Cuánto tarda en duplicarse una cantidad de dinero que crece a una tasa de interés anual del 6 %.
9. Halle la vida media de una sustancia radioactiva que tarda 20 horas en reducirse en un 30 %.
10. Un lago tiene un área superficial de 1 hectárea, y se observó, cerca a una orilla, que  $2\text{cm}^2$  de su superficie estaban cubiertos por una planta extremadamente peligrosa y que crece de manera exponencial. Tres días después, la plantita había incrementado su tamaño a  $10\text{cm}^2$ , ¿Cuánto tardará la planta en invadir el lago entero?  
 Todavía más interesante es: ¿qué porcentaje del lago estará invadido, un día antes de que se complete la invasión?
11. La población humana es una función del tiempo  $P = f(t)$  y la concentración de gases invernadero en la atmósfera (en ppm) es una función de la población  $G = g(P)$ . Como resultado, la temperatura media del aire está cambiando con el tiempo según,  $T = h(t)$ . Sabemos que infortunadamente  $f$ ;  $g$  y  $h$  son funciones crecientes, y por tanto invertibles. ¿Qué significado tienen las siguientes funciones?, ¿Cuáles son sus correspondientes variables independientes y dependientes?
12. Considere las siguientes funciones  $f$ ,  $g$ ,  $h$ :

$$h(x) = 1 - x, \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} t & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline f(t) & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}$$



Para cada uno de las siguientes funciones calcule su dominio, dibuje la gráfica, y calcule el rango.

$$f^{-1}, g^{-1}, g^{-1}, (h \circ g)^{-1}, (g \circ f)^{-1}, (f \circ g \circ h)^{-1}.$$

13. La gráfica de la ecuación  $y = \sqrt{2x - 4}$ . Se desplaza hacia la izquierda 4 unidades, luego se encoje horizontalmente a la mitad, después se desplaza verticalmente de manera que pase por el origen y por último se refleja respecto a la recta  $y = x$ . Halle la ecuación de la gráfica resultante.

14. La tasa de inflación mide el incremento de los precios en una economía. Generalmente se toma como referencia la canasta familiar, y se mide cuánto incrementó el costo de la canasta familiar de un año a otro. Por tanto, la tasa de inflación es también una medida de la devaluación de cierta moneda. La inflación resulta generalmente en que los países deben imprimir billetes de denominaciones cada vez más grandes.

a) Que un país tenga una tasa de inflación  $I$  anual, significa que cada año el precio promedio de los bienes se incrementa en  $I$  %. Escriba una fórmula para el precio  $P(t)$  de los bienes como función del tiempo  $t$  en años.

b) El pasaje del bus en Medellín en 1980 valía 40 pesos, y ahora vale 1500 pesos. ¿Cuál ha sido la tasa de interés en Medellín durante este periodo? ¿Cuánto tiempo pasará para que lo que vale hoy cien pesos, valga mil pesos?

### RESULTADOS

Informe final del curso dirigido al asesor de práctica docente de la Universidad Nacional.

Grupo 16

Profesor: Agustín Mosquera Palacios

Prueba	Ganan	Pierden	Total	Sin presentar	Cancelaciones
Quiz : 15%	12	16	28	0	0
Parcial 1: 25%	7	21	28	0	0
Parcial 2: 30%	9	19	28	0	0
Parcial 3: 30%	14	14	28	0	0

## SEGUIMIENTO

- Se hizo 1 quiz cada uno con un valor del 15%.
- 3 parciales cada uno con una valor del 25%, 30% y 30% respectivamente.
- Algunos estudiantes mejoraron la nota del curso al mostrar su mejoría reflejada en los exámenes debido a su dedicación y a la asistencia constante a las asesorías.
- Iniciaron 28 estudiantes, finalizaron el curso 28.

## ESTRATEGIAS DE MEJORAMIENTO

Asistencia continua a las asesorías e incremento de las horas de asesoría en las fechas límites de los parciales.

## VENTAJAS DE LAS ESTRATEGIAS DE MEJORAMIENTO

Algunas ventajas de las estrategias de mejoramiento que se presentaron:

- Se detecta superación de dificultades a medida que avanza el curso, disminuye la pérdida.
- Hay buena participación y disposición de los estudiantes para resolver correctamente los ejercicios de los talleres propuestos, saliendo al tablero.
- Al finalizar el curso los estudiantes que aprobaron fueron 11, que correspondieron al 39.2% mejorando los estándares que normalmente son del 30%.

## 4. BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, David; Novak, Joseph y Hanesian, Helen Psicología educativa. México, Trillas, 1992.

De Guzmán, Miguel. El rincón de la pizarra.

Jodar Sanchez, Lucas. Modelación: El puente entre las matemáticas y el mundo real. Universidad politécnica de valencia, 2002.

Mata Guevara, Luís: Aprendizaje significativo como línea de investigación, Editorial Universo, Maracaibo, 1994.

Ministerio De Educación Nacional. Matemáticas lineamientos curriculares: Áreas obligatorias y fundamentales. Santa Fe de Bogotá, Magisterio, 1998; Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas – MEN 1998.

Vygotsky, Lev. S. Procesos psicológicos superiores. Córcega, Crítica, 1979.

Jolibert, Josette. El vaivén permanente en una construcción recíproca en educación y pedagogía, #7, Bogotá, Magisterio, 2004.

Puerta Ortiz Fernando: Cálculo diferencial e introducción al cálculo integral, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, 1999; Cálculo diferencial e integral en gráficas, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, 1991; Semillero UN, Matemáticas básicas 2006.

Escuela de Matemáticas UN. Talleres de Cálculo diferencial, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, 2012.

Pita Ruíz Claudio, Cálculo de una variable, Prentice Hall.

Thomas Cálculo una variable 12 ed, Pearson.

Stewart, J., cálculo, 5ª. Ed., Cengage Learning, 2007.

Edwards and Penney, "Cálculo con trascendentes tempranas", séptima edición, Pearson Prentice Hall, 2008.

Finney, R. L. "Cálculo", Prentice Hall, 2000.

Anton, H. "Cálculo de una variable" Limusa Wiley, segunda edición, 2009.

Thomas, "Cálculo en una variable", Pearson-Addison Wesley, undécima edición, 2006.

Smith, R.T., Mitón, R.B., "Cálculo, Tomo I", McGraw Hill, 2000.

Stein, Sh.K., Barcellos, A., "Cálculo con Geometría Analítica, Prentice Hall Hispanoamericana, 1996.

Villegas, Celia, "Cálculo Diferencial, Teoría y Aplicaciones", Centro de Publicaciones, Universidad Nacional, 2001.