Indicador para elegir bajo ambiente difuso la localización de un establecimiento industrial: el caso del sector automotor

Harbey Rodríguez Rincón

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Económicas, Maestría en Ciencias Económicas
Bogotá D.C., Colombia
2011

Indicador para elegir bajo ambiente difuso la localización de un establecimiento industrial: el caso del sector automotor

Harbey Rodríguez Rincón

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias Económicas

Director:
Profesor, M.Sc Leonardo Duarte Vergara

Línea de Investigación:
Teoría y política económica

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Económicas, Maestría en Ciencias Económicas
Bogotá D.C., Colombia
2011

Dedicatoria

A mi familia por su gran apoyo, afecto y alegría durante estos años de estudio

A mi Ranita por su amor y comprensión

A Pecas por su compañía infinita

Agradecimientos

Agradezco al profesor Leonardo Duarte por aceptar dirigir mi trabajo de tesis y por sus valiosos comentarios. Igualmente agradezco a la Universidad Nacional de Colombia y a la Facultad Ciencias Económicas por contribuir a mi formación académica. Finalmente quisiera agradecer a Gutapercha, un grupo de grandes amigos que me ayudaron a crecer como persona durante mi estadía en la universidad.

Resumen

Al ser la elección de la localización industrial un típico problema en el que la firma debe enfrenar información imprecisa o difusa como insumo para tomar la mejor decisión, se recurre a un marco conceptual basado en los conjuntos difusos y la lógica difusa para desarrollar un modelo metodológico que permita al empresario tomar una decisión racional bajo ambiente difuso. Se define un conjunto discreto de localizaciones candidatas y se utiliza información sobre una serie de criterios que buscan evaluar, tanto el desempeño aislado de los atributos de cada alternativa, como el desempeño colaborativo entre pares de ellas. La información es modelada mediante conjuntos difusos y evaluada cualitativamente a través de un conjunto de términos lingüísticos definidos formalmente. La Técnica para el Ordenamiento de Preferencias por Similaridad a la Situación Ideal (TOPSIS difusa) es usada para encontrar la mejor solución.

Palabras claves: Incertidumbre, Localización Industrial, Conjuntos Difusos, Lógica Difusa, Variable Lingüística, TOPSIS.

Clasificación JEL: D81, R39, L62

Abstract

As the choice of industrial location is a typical problem in which the firm must confront vague or diffuse information as input to make the best decision, a conceptual framework based on fuzzy sets and fuzzy logic is used to develop a methodological model enabling the employer to make a rational decision under fuzzy environment. A discrete set of candidate locations is defined and information on a number of criteria that seek to evaluate both the isolated performance attributes of each alternative, such as collaborative performance between pairs of them is used. The information is modeled using fuzzy sets and evaluated qualitatively through a set of linguistic terms defined formally. Technique for Order Preference by Similarity to the Ideal Situation (fuzzy TOPSIS) is used to find the best solution.

Keywords: Uncertainty, Industrial Location, Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Linguistic Variable, TOPSIS.

JEL Classification: D81, R39, L62

Índice general

Resumen IX

Índice de figuras XIII

Índice de tablas XVI

Lista de abreviaturas XVII

INTRODUCCIÓN 1

1. MARCO TEÓRICO 3

1.1. ALEATORIEDAD, INCERTIDUMBRE Y DIFUSIDAD . . . 3

1.2. TOMA DE DECISIONES MULTI-CRITERIO (TDMC) BAJO AMBIENTE DIFUSO 5

1.2.1. Decisiones de localización en ambiente difuso . . . 5

1.2.2. Decisiones de localización industrial bajo ambiente difuso . . . 6

1.2.3. El método de TDMC difuso con interacción entre alternativas . . . 7

2. MARCO CONCEPTUAL 9

2.1. CONJUNTO DIFUSO . . . 9

2.2. NÚMEROS DIFUSOS . . . 10

2.2.1. Número difuso triangular . . . 12

2.3. LÓGICA DIFUSA (Zadeh, 2009) . . . 13

2.3.1. Variable Lingüística (Zadeh, 1975) . . . 14

3. DISEÑO METODOLÓGICO 17

3.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA . . . 17

3.1.1. Notación . . . 17

3.2. METODOLOGÍA . . . 19

3.2.1. Estandarización y modelación de la información mediante conjuntos difusos. . . 19

3.2.2. Expresión cualitativa de los datos estandarizados . . . 19

3.2.3. Representación de las evaluaciones lingüísticas mediante números triangulares difusos. . . . 19

3.2.4. Dominancia central de cada alternativa respecto de todas las demás. . . . 20

3.2.5. Matrices de decisión integrada 21
3.2.6. Matriz de decisión integrada agrupada 21
3.2.7. TOPSIS difuso 22

4. APLICACIÓN: EL CASO DEL SECTOR AUTOMOTOR 25
4.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA PRÁCTICO 25
4.2. DEFINICIÓN DE VARIABLES 25
4.3. ANÁLISIS Y RESULTADOS 28

5. CONCLUSIONES 37

6. ANEXOS 39

A. Apéndice **45**
A.1. Algunas Propiedades De Conjuntos Difusos 45
A.2. Operaciones Estándar en Conjuntos Difusos 46
A.3. Distancia en Conjunto Difusos 47
A.4. Operaciones con Intervalos 48
A.5. Operaciones con Números Difusos 49
A.6. Código de programación en R 49

Bibliografía 51

Índice de figuras

2.1. Conjunto difuso representando los "departamentos con *alto* ingreso percápita" 10
2.2. Número difuso $A = [a_1, a_2, a_3]$ 11
2.3. Número difuso triangular $A = (a_1, a_2, a_3)$ 12

3.1. Representación gráfica de la SIPS y la SIND para cada atributo de una localización candidata 23

4.1. Estructura del problema TDMC difuso 28

Índice de cuadros

3.1. Matrices de decisión de atributos con y sin interacción según información del criterio C_l 19

4.1. Escala lingüística para evaluar el desempeño de cada localización candidata. 26
4.2. Escala lingüística para evaluar la importancia de los atributos de cada localización candidata. 26
4.3. Conjunto P de localizaciones candidatas. 27
4.4. Conjunto A de atributos de las áreas metropolitanas. 27
4.5. Conjunto C de criterios para evaluar cada atributo. 28
4.6. Valores estandarizados, escala lingüística para evaluar el desempeño de las áreas metropolitanas y representación de números difusos triangulares 29
4.7. Valores estandarizados y matrices X_l. 30
4.8. Valores estandarizados y matrices Y_l. 31
4.9. Dominancia central de cada área metropolitana según los criterios C_1, C_2 y C_3 del atributo A_5 32
4.10. Matriz de decisión integrada obtenida a partir del criterio C_1 32
4.11. Matriz de decisión integrada obtenida a partir del criterio C_2 33
4.12. Matriz de decisión integrada obtenida a partir del criterio C_3 33
4.13. Matriz de decisión integrada obtenida a partir del criterio C_4 33
4.14. Matriz de decisión integrada obtenida a partir del criterio C_5 33
4.15. Matriz de decisión integrada agrupada $\hat{D}$ 34
4.16. Escala lingüística para evaluar la importancia de los atributos y representación en números difusos triangulares 34
4.17. Vectores de pesos asignados por cada experto l a los atributos 35
4.18. Matriz de decisión integrada agrupada ponderada $\hat{E}$ 35
4.19. Distancias de cada área metropolitana a la SIPD y a la SIND y coeficiente de cercanía relativa CR_i. 35

6.1. Beneficios. 39
6.2. Costos 40
6.3. Gustos de los consumidores. 41
6.4. Posibilidades de expansión. 42
6.5. Costos de desplazamiento entre áreas metropolitanas. 43
6.6. Flujos de población entre áreas metropolitanas. 43
6.7. Interacción espacial entre áreas metropolitanas. 43

Lista de abreviaturas

Abreviatura	Término
AHP	Proceso jerárquico analítico
CIIU	Código industrial internacional uniforme
CR_i	Coeficiente de cercanía relativa
DANE	Departamento administrativo nacional de estadística
DIAN	Dirección de impuestos y aduanas nacionales
INVIAS	Instituto nacional de vías
SIEX	Sistema estadístico de comercio exterior
SIND	Solución ideal negativa difusa
SIPD	Solución ideal positiva difusa
TDMC	Toma de decisiones multi-criterio
TGI	Teoría generalizada de la incertidumbre
TOPSIS	Técnica para el ordenamiento de preferencias por similaridad a la situación ideal

INTRODUCCIÓN

A comienzos de la segunda mitad del siglo XX, se incorporó la teoría comportamental en las decisiones de localización con Allan Pred, Rawstron, David Smith y John Rees (Precedo, 1992). En esta corriente de pensamiento el supuesto de racionalidad limitada es fundamental en los modelos de localización al reconocer la capacidad limitada de los individuos para obtener y analizar la información, además de dar especial interés a los efectos que tiene sobre las decisiones de localización, los factores personales e institucionales. Supone entonces que mediante la combinación de estos elementos, la firma busca aproximarse al óptimo ideal de localización dentro de un margen espacial de rentabilidad[1] pero nunca logra alcanzarlo.

Una visión un tanto más inconforme con las teorías cuantitativas, considera que las industrias no tienen por qué buscar necesariamente la ubicación óptima, sino que pueden existir determinadas circunstancias personales que justifiquen un comportamiento subóptimo (Pred, 1967). La teoría comportamental se centra entonces en indagar sobre elementos más simples y directamente relacionados con el comportamiento de quienes toman las decisiones de localización, es decir, sobre cómo éstos perciben e interpretan los elementos que son incorporados como criterios para decidir dónde localizar un establecimiento industrial.

Por otra parte la literatura ha tratado los problemas de decisión de localización industrial como un proceso que se da en tres etapas: en la primera de ellas, el agente deberá seleccionar una región geográfica, departamento o área administrativa de gran extensión. La segunda etapa se trata de la selección de una comunidad particular o localidad dentro de la región seleccionada. Y la tercera y última etapa tiene que ver con la selección del lugar final en la localidad sobre la cual el nuevo establecimiento industrial será construido. Por lo tanto, la selección de la localización de un establecimiento industrial es un problema de múltiples etapas y múltiples criterios, donde la elección de la localización en cada etapa es hecha de tal forma que va guiando la decisión final hacia una localización igual o lo más próxima posible al óptimo ideal. En este trabajo se abordará el problema enfrentado por el empresario durante la primera etapa.

En los años recientes ha habido un desarrollo prominente y un especial interés por las técnicas difusas para enfrentar el problema de selección de la localización industrial, en concordancia con el enfoque comportamental y la percepción humana hacia el espacio. Es así que han aparecido nuevas herramientas conceptuales desde la matemática, que permiten modelar las decisiones y el comportamiento de los individuos y que toman como referencia la imprecisión derivada del lenguaje humano.

El trabajo que a continuación se desarrolla, se inscribe dentro del enfoque de la teoría de la decisión en la localización industrial, y además se integra a un marco de análisis formal que consiste en ver dichas decisiones como un proceso real en el que los objetivos, las restricciones y las consecuencias de las posibles acciones no son conocidas de manera precisa, lo que dentro de la literatura de los conjuntos y lógica difusa, en particular, se conoce como un ambiente difuso. Para tratar cuantitativamente con la imprecisión, usualmente se emplean conceptos y técnicas de la teoría de la probabilidad, y más particularmente, las herramientas proporcionadas por la teoría de la decisión, la teoría del control o la teoría de la información. Al hacer esto, tácitamente se está aceptando la premisa de que la imprecisión -cualquiera sea su naturaleza- puede ser equiparada con aleatoriedad. La vertiente difusa

[1] Para Rawstron (1958) las variaciones espaciales en los costos de producción determinan lo que él define como margen espacial de rentabilidad dentro del cual se pueden obtener beneficios en cualquier punto, mientras que por fuera de este margen los costos son superiores a los ingresos, es decir la industria tendrá pérdidas.

de la matemática ha puesto en cuestión este supuesto (Bellman and Zadeh, 1970).

El propósito de este trabajo radica en explorar un marco metodológico para la construcción de un indicador que permita seleccionar bajo un ambiente difuso la *mejor* localización de un establecimiento industrial entre varias alternativas. La exploración metodológica irá acompañada de la aplicación de un caso práctico referido al sector automotor de la industria en Colombia. Este proceso puede ser visto como un problema de decisión multi-criterio que incluye tanto criterios cualitativos como cuantitativos. En general, los problemas de decisión multi-criterio se refieren a la selección o clasificación un determinado número de alternativas, a las cuales se les asocia una serie de atributos o criterios que a primera vista pueden resultar incomparables y casi siempre están en conflicto. Los enfoques convencionales para solucionar un problema de decisión multi-criterio tienden a ser menos efectivos a la hora de tratar con la naturaleza imprecisa o borrosa de las evaluaciones lingüísticas de dichos criterios por parte de quienes son los responsables de tomar las decisiones. La teoría difusa que es una de las teorías de la imprecisión, permite abordar cuantitativamente el problema de la toma de decisiones multi-criterio bajo ambiente difuso.

Vale la pena anotar que las variables que se asumen en este trabajo como determinantes de las decisiones de localización industrial, si bien son acordes con los postulados de la Nueva Geografía Económica, el objeto de estudio de esta corriente de pensamiento contrasta con el que aquí se ha señalado como de interés: las decisiones de localización a nivel de establecimiento industrial. La Nueva Geografía Económica ofrece un marco teórico y una serie de instrumentos basados en la simulación numérica y los modelos de competencia imperfecta para explicar a nivel macro, -siguiendo a teóricos clásicos de la localización como Marshall, Christaller, Lösch y Weber-, los mecanismos de aglomeración de las actividades industriales con sus respectivos alcances geográfico y temporal. Para ello centra su análisis en la maximización de beneficios y en las estrategias de minimización de costes, tratando de incorporar externalidades derivadas de la aglomeración. Adicionalmente, una de las principales aplicaciones empíricas ha sido medir dichos alcances, a través de indicadores que contrastan distribuciones aleatorias o de referencia con patrones reales de distribución de la industria (Duranton and Overman, 2005; Ellison and Glaeser, 1997; Rosenthal and Strange, 2004; Mori, Nishikimi, and Smith, 2004).

Este trabajo se divide en seis partes, la primera es esta introducción, la segunda parte muestra la discusión entre aleatoriedad y difusidad y aborda la discusión teórica al rededor del problema de la toma de decisiones multi-criterio bajo ambiente difuso para enmarcarlo dentro de la elección de la localización de un establecimiento industrial. La tercera parte expone los conceptos de conjuntos difusos, número difuso y lógica difusa. La cuarta parte explica un marco metodológico que permite obtener bajo ambiente difuso un indicador para elegir la mejor localización de un establecimiento industrial. La quinta desarrolla un caso aplicado de la metodología expuesta en la parte anterior, correspondiente al sector industrial automotor en Colombia; en ella se explican los alcances y las limitaciones de las variables y la información recolectada para tal propósito, se procesa la información y se analizan los resultados, es decir, cuál fue la mejor localización obtenida para un establecimiento industrial del sector automotor y se observa cómo puede cambiar dicha localización de acuerdo a la variación de los pesos de las variables usadas en el caso aplicado. Finalmente, en la parte número seis se derivan algunas conclusiones y se señalan algunos posibles temas para una agenda futura de investigación.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

1.1. ALEATORIEDAD, INCERTIDUMBRE Y DIFUSIDAD

Siguiendo a Bellman and Zadeh (1970), existe cierta necesidad por diferenciar entre aleatoriedad y difusidad, siendo ésta última una importante fuente de imprecisión en muchos procesos de decisión. Por difusidad, se entiende un tipo de imprecisión que está asociada con conjuntos difusos, es decir, conjuntos en los cuales puede haber una transición suave desde la pertenencia hasta la no pertenencia de sus elementos. En agudo contraste a la noción tradicional de conjunto en matemáticas, la mayoría de conjuntos en el mundo real no tienen fronteras nítidas que separen aquellos objetos que pertenecen a un conjunto de aquellos que no pertenecen. En este sentido, es importante notar que, en el lenguaje hablado humano, afirmaciones difusas tales como "el área metropolitana de Pereira *es más* productiva que la de Cúcuta" o "el mercado de valores ha sufrido una *fuerte caída*" transmiten cierta información a pesar de la imprecisión en el uso de las palabras puestas en cursiva.

Esencialmente la aleatoriedad tiene que ver con la incertidumbre sobre la pertenencia o no pertenencia de un objeto en un conjunto no difuso. La difusidad, tiene que ver con conjuntos en los cuales puede haber grados de pertenencia intermedios entre la pertenencia total y la no pertenencia total. Dada esta distinción, las técnicas matemáticas para tratar con la difusidad son bastante diferentes de aquellas usadas para tratar con la teoría de la probabilidad. Ellas son más simples en muchos casos ya que la noción de medida de probabilidad en la teoría de la probabilidad corresponde a la noción de función de pertenencia en la teoría de la difusidad, que es en cierta manera más sencilla.

La incertidumbre es un atributo de la información. Además existe la aceptación universal de que la información es estadística en su naturaleza. Una consecuencia lógica de esta tesis es que la incertidumbre, cualquiera que sea su forma, debería ser tratada a través de la teoría de la probabilidad. Sin embargo, Zadeh (2005) pone de manifiesto una estructura conceptual mucho más amplia en la que se afirma que la información estadística es sólo una entre muchas formas de información. Más específicamente, su premisa fundamental es que, la información es una restricción generalizada sobre los valores que una variable puede tomar.

Según este autor, la incertidumbre debería ser vinculada a la información mediante el concepto de estructura granular, un concepto que juega un rol fundamental en la interacción humana con el mundo real. Informalmente, un gránulo de una variable X es un grupo de valores de X que son en esencia reunidos mediante su similaridad, equivalencia, proximidad o funcionalidad. La granulación es

dominante en la cognición humana. El concepto de gránulo subyace al concepto de variable lingüística, el cual juega un rol central en casi todas las aplicaciones de la lógica difusa.

Existen cuatro razones básicas por las que es posible relacionar los conceptos de granulación de atributos y de variables lingüísticas. En primer lugar, la capacidad acotada de los órganos sensitivos, y en última instancia del cerebro, para resolver problemas complejos y almacenar información. En segundo lugar, cuando la información numérica no está disponible. En tercer lugar, cuando un atributo no es cuantificable. Y en cuarto lugar, cuando hay cierta tolerancia con la imprecisión, lo que puede ser aprovechado por la granulación con el fin de lograr operatividad, robustez y economía en la comunicación. Según Zadeh (2005), debería notarse que ésta última es la razón más importante para el uso de la granulación, en la forma de variables lingüísticas, por ejemplo en los consumidores de productos.

Existe una conexión cercana entre granularidad e incertidumbre. Asúmase que X es el ingreso local percápita de las áreas metropolitanas en Colombia y alguien pregunta: "¿Cuál es el valor de X?" Si la respuesta es "X es a", donde a es un singleton[1], no hay incertidumbre en la información que se ha provisto sobre X. En esta instancia, la información es singular. Pero si la respuesta es "X es aproximadamente a", entonces hay alguna incertidumbre en la respuesta. En esta instancia, la información y su incertidumbre será descrita como granular. De forma cercana, pero no exacta, la granularidad puede ser equiparada a no singularidad. En la instancia de "X es aproximadamente a", la información es no singular.

La pregunta que surge inmediatamente es ¿Cómo puede el significado de "aproximadamente a" ser precisado? En el contexto usual de la teoría de la probabilidad, "aproximadamente a" normalmente sería interpretado como una distribución de probabilidad con centro en a. En la propuesta de Zadeh que él ha llamado *teoría generalizada de la incertidumbre* TGI (Zadeh, 2005), la información sobre X es vista como una restricción generalizada sobre X. Más específicamente, en el contexto de la TGI, "aproximadamente a" sería vista como un gránulo que está caracterizado por una restricción generalizada. Una distribución de probabilidad es entonces un caso especial de una restricción generalizada. En este sentido, la TGI es más general que la teoría de la probabilidad, es una teoría general de la incertidumbre en el sentido que la mayoría, y posiblemente todos los enfoques existentes para la representación de la información incierta se pueden enmarcar dentro de una estructura conceptual.

Según Zadeh (2005) existe cierta necesidad demostrable para crear una TGI, ya que los enfoques vigentes para la representación de la información incierta son inadecuados al tratar con problemas en los cuales este tipo de información es basada en la percepción y expresada en un lenguaje natural. Más específicamente, los enfoques existentes no manejan el problema de la semántica del lenguaje natural ni las herramientas formales de cálculo de las restricciones generalizadas que tratan con esto (Novák Vilém, 1999). Una de las limitaciones de la teoría de la probabilidad está en el hecho que su estructura conceptual no se ajusta a la información basada en percepciones, la cual es imprecisa por naturaleza. Para tratar efectivamente con problemas de este tipo son necesarias las herramientas formales que brinda la lógica difusa.

[1] En este caso singleton se refiere a un conjunto difuso cuyo suporte es un único punto con un valor de pertenencia igual a 1.

1.2. TOMA DE DECISIONES MULTI-CRITERIO (TDMC) BAJO AMBIENTE DIFUSO

Un proceso de decisión implica la búsqueda de la mejor solución, dado un conjunto de alternativas de elección usualmente en conflicto, es decir, un problema de TDMC está asociado con la realización de una decisión sobre un espacio discreto de decisión, y se centra en cómo seleccionar o clasificar diferentes alternativas predeterminadas. Tener que utilizar valores nítidos o perfectamente ciertos es uno de los puntos problemáticos en los procesos de evaluación. Debido a que muchos criterios son difíciles de medir a través de valores perfectamente conocidos, ya sea porque la información no está disponible o parcialmente disponible, o porque los métodos para elaborar dicha información involucra cualquier tipo de errores, ellos son usualmente omitidos durante el proceso de evaluación o equivocadamente, tratados como perfectamente conocidos en los modelos matemáticos. Dichos modelos no pueden tratar con las ambigüedades o la borrosidad de la información que casi siempre tienen que enfrentar los tomadores de decisiones, y que por su naturaleza no puede ser tratada como valores perfectamente conocidos.

Las decisiones son ejecutadas en contextos complejos, caracterizados por la presencia de múltiples aspectos a evaluar, normalmente afectados por la incertidumbre, que es esencialmente derivada de la naturaleza imprecisa e insuficiente de los datos que sirven como insumo, así como de la subjetividad y carácter evaluativo de las preferencias de los tomadores de decisiones. Los conjuntos difusos y la lógica difusa tienen herramientas poderosas para ser incorporadas en muchas técnicas de optimización. La TDMC es una de ellas, y es además evidente que con mayor frecuencia el uso de estas herramientas se incorporan para desarrollar el modelamiento de las aplicaciones en esta materia (Kahraman, 2008).

Por toma de decisiones en ambiente difuso se entiende un proceso de decisión en el cual los objetivos y/o las restricciones, pero no necesariamente el sistema bajo control, son difusos en su naturaleza. Esto quiere decir que los objetivos y/o las metas constituyen clases de alternativas cuyas fronteras no son nítidas. Los objetivos difusos y las restricciones difusas pueden ser definidos de forma precisa como conjuntos difusos en un espacio de alternativas. Una decisión difusa, entonces, puede ser vista como la intersección de los objetivos y las restricciones. Así, la mejor decisión o la decisión maximizante puede entonces ser definida como un punto en el espacio de alternativas en el cual la función de pertenencia de la decisión difusa logra su máximo valor (Bellman and Zadeh, 1970).

1.2.1. Decisiones de localización en ambiente difuso

La selección de la localización entre diferentes alternativas es un problema de TDMC que incluye criterios de tipo cualitativo y cuantitativo. Al respecto, existen diferentes enfoques para solucionar el problema de elegir la mejor localización, si bien todos tienen el mismo objetivo de seleccionar la mejor alternativa de localización, están basados en diferentes transfondos teóricos y se aproximan de forma diferente a la disciplina de la TDMC.

Tzeng and Chen (1999) proponen un modelo de localización basado en un enfoque multi-objetivo difuso. El modelo ayuda a determinar el número y los lugares de las estaciones de bomberos en un aeropuerto internacional, así como a asistir a las autoridades relevantes en esta materia. Debido a la complejidad combinatoria de su modelo, un algoritmo genético es empleado y comparado con el método de enumeración. Kuo, Chi, and Kao (1999) desarrollan un sistema como soporte de decisión usando teoría de conjuntos difusos integrada al enfoque Proceso Jerárquico Analítico (AHP) para

localizar una tienda nueva. El sistema propuesto consiste en cuatro componentes: (1) desarrolla una estructura jerárquica para un AHP difuso, (2) determina las ponderaciones, (3) reune los datos y (4) toma la decisión.

Chen (2001) propone un nuevo método de decisión multi-criterio para solucionar el problema de seleccionar la localización de un centro de distribución bajo ambiente difuso. En este método propuesto, la clasificación de cada alternativa y el peso de cada criterio son descritos mediante variables lingüísticas que pueden ser expresadas a su vez mediante números difusos triangulares. El valor de evaluación final de cada localización del centro de distribución es también expresado a través de números difusos triangulares. Al calcular la diferencia del valor de evaluación final entre cada par de localizaciones para el centro de distribución, el autor construye una matriz de relación de preferencia difusa para representar la intensidad de la preferencia de la localización de una planta sobre otra. Entonces, es propuesto un procedimiento de clasificación paso a paso para determinar el orden de clasificación de todas las localizaciones candidatas.

1.2.2. Decisiones de localización industrial bajo ambiente difuso

La selección de la localización de un establecimiento industrial juega un papel muy importante en la minimización de los costos y la maximización del uso de los recursos para todas las firmas. Yong (2006) usa la metodología TOPSIS para seleccionar la localización de una planta industrial bajo ambiente lingüístico, donde la clasificación de las alternativas de localización están sujeta a un conjunto de criterios y a la ponderación de los mismos. Para evitar la complicación surgida de las operaciones aritméticas difusas, las variables lingüísticas que son representadas mediante números difusos triangulares, éstos son transformados en números nítidos mediante la representación de media graduada. La representación canónica de las operaciones de multiplicación sobre números difusos triangulares es usada para obtener la "solución positiva ideal" y la "solución negativa ideal". Define además, un concepto de proximidad eficiente para determinar el orden de las alternativas mediante el cálculo simultáneo de la distancia tanto de la "solución positiva ideal" como de la "solución negativa ideal". Comparado con los métodos TOPSIS difusos existentes, este método propuesto puede tratar con problemas de toma de decisiones grupales en más de una forma eficiente.

Chu and Lai (2005) hacen una revisión del trabajo de Chen (2001) y afirman que el modelo propuesto por este autor tiene dos limitaciones: en primer lugar, el valor de evaluación difuso final P_i es tratado como un número difuso triangular, lo cual no es correcto ya que dicho valor no resulta en una forma triangular; en segundo lugar, la diferencia entre dos valores de evaluación difusa final, es decir, $P_i - P_j$ es considerada como un número difuso triangular, lo cual según Chu y Lai no es correcto tampoco. Obviamente, $P_i - P_j$ no pueden producir una forma triangular ya que P_i y P_j no son números difusos triangulares. Para solucionar estas dos limitaciones y mejorar la aplicación de la TDMC difusa para elegir la localización de un centro de distribución, un nuevo enfoque es propuesto, en el que las funciones de pertenencia de P_i y $P_i - P_j$ son desarrolladas con el fin de construir una relación de preferencia difusa mejorada, que es además empleada en el procedimiento de ordenamiento de alternativas de Chen para completar el método propuesto.

Feng, Wu, and Chia (2010) presenta un modelo de toma de decisiones difuso híbrido que integra análisis factorial, modelamiento estructural interpretativo, cadenas markovianas, integrales difusas y el método de ponderamiento aditivo simple para seleccionar la localización de un centro de manufactura de alta tecnología en China. Los resultados analíticos de este caso de estudio demuestran la

factibilidad del modelo propuesto para solucionar problemas de TDMC, especialmente cuando los criterios son interdependientes. Además, el estudio empírico pone de manifiesto algunas propiedades que son cruciales al invertir en los centros manufactureros de alta tecnología en China.

1.2.3. El método de TDMC difuso con interacción entre alternativas

En algunas situación prácticas para la TDMC, los tomadores de decisiones deberían no solo considerar los datos de los atributos de forma aislada, sino también observar los datos de cómo las alternativas colaboran entre sí. Sin embargo, estos agentes deberían tomar en consideración información de atributos colaborativos entre las alternativas de localización tales como el nivel o calidad de la comunicación entre áreas geográficas, tiempos o costos de viaje del producto final a otras ciudades, posibilidades de desplazamiento de mano de obra entre territorios, etc. Normalmente, una alternativa de localización para un establecimiento industrial debería registrar no solo buen desempeño en cuanto a sus atributos aislados, sino también tener prospecto por unas buenas relaciones con las otras alternativas, lo cual es medido por la información de los atributos que presentan algún grado de interacción. Esto último es significativo en la medida que la localización elegida coopere en el futuro de una forma efectiva con las demás localizaciones candidatas.

Fan and Feng (2009) desarrollan un método para la TDMC que incorpora la interacción entre las alternativas de localización en un ambiente difuso a partir de los datos de los atributos de las alternativas que son evaluadas, cuestión que rara vez ha sido foco de investigación en el campo de la TDMC difusa. El modelo usa variables lingüísticas para expresar las opiniones de individuos expertos. A menudo, la información de estos atributos colaborativos entre pares de alternativas difieren de la información de atributos vistos de manera aislada. Fan and Feng (2009) citan ejemplos de atributos entre alternativas de elección que interactúan y que pueden ser usados para contribuir a mejorar la decisión tomada; tal es el caso de, por ejemplo, el desempeño cooperativo en proyectos de investigación, el compartir y comunicar el conocimiento (Cowan, Jonard, and Zimmermann, 2007), las culturas compatibles (Emden, Calantone, and Droge, 2006), el conocimiento complementario, la correspondencia entre metas, la confianza mutua, la sinergia productiva (Gulati, 1998), entre otros. Es así, que el conjunto de alternativas en un problema de TDMC podrían ser: socios, miembros, productos, tecnologías o territorios. Los datos sobre atributos con interacción entre pares de alternativas podrían representar el desempeño cooperativo entre personas, organizaciones o unidades geográficas. Fenómenos que son encontrados frecuentemente en el mundo real y que indican un gran potencial para una nueva área de investigación.

Boix (2007) se basa en la teoría de las redes para afirmar que los enlaces entre las ciudades influyen en el crecimiento de una región ya que existen nexos espaciales entre conocimiento, economías externas y crecimiento. Para él, las ciudades no son puntos aislados sino vinculados con otros entre sí. Una red de ciudades es una estructura en la que los nodos son las ciudades, conectadas por diferentes tipos de enlaces ya sea infraestructuras de comunicación o telecomunicación y que permiten los flujos socioeconómicos. Las principales características de las redes de ciudades son la posibilidad de estructuras jerárquicas y no jerárquicas, la cooperación y la competencia y la generación de ventajas relacionadas a la organización e intercambio entre ellas. Según Fan and Feng (2009) la información de este tipo de atributos está necesariamente asociada a pares de alternativas y por lo tanto, el procesamiento de ella difiere del que es usado para procesar información de atributos sin interacción. De tal forma que estos autores, proponen una metodología en la que es posible incorporar y procesar este tipo de

información.

Capítulo 2

MARCO CONCEPTUAL

2.1. CONJUNTO DIFUSO

El concepto de conjunto difuso es una generalización de conjunto nítido. Si se usa una función de pertenencia (función característica o función discriminación) para representar la pertenencia o no de un elemento x en un conjunto A, es posible expresarlo de la siguiente manera:

Definition 2.1.1. Para un conjunto A, la función de pertenencia μ_A se define como:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad y \quad solo \quad si \quad x \in A \\ 0 \quad si \quad y \quad solo \quad si \quad x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

Se puede decir que la función de pertenencia μ_A de un conjunto nítido mapea la totalidad de los elementos del conjunto universal X al conjunto $\{0, 1\}$.

$$\mu_A : X \to \{0, 1\} \tag{2.2}$$

En este caso el símbolo $\to$ está indicando que los elementos del conjunto X son mapeados al conjunto $\{0, 1\}$ a través de la función μ_A.

Definition 2.1.2. En conjuntos difusos, cada elemento del conjunto es mapeado al conjunto nítido $[0, 1]$ mediante la función de pertenencia, es decir:

$$\mu_A : X \to [0, 1] \tag{2.3}$$

donde $[0, 1]$ recoge todos los números reales entre 0 y 1 (incluyendo al 0 y el 1), números que respectivamente representan el valor más bajo y el valor más alto de los grados de pertenencia. En consecuencia, un conjunto difuso es un "conjunto con fronteras borrosas" al compararlo con un conjunto nítido. Más concretamente un conjunto difuso A en X es un conjunto de pares ordenado:

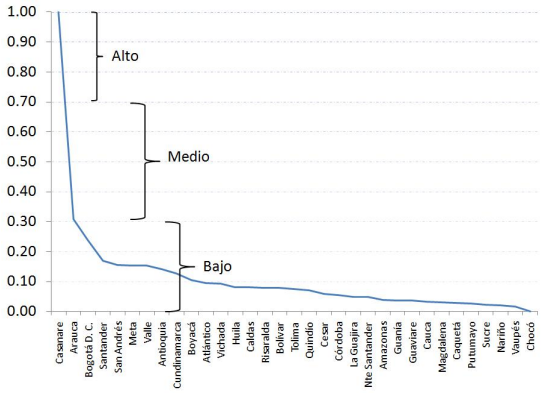
$$A = \{(x, \mu_A(x))\}, \ x \in X \tag{2.4}$$

Así, el supuesto básico es que un conjunto difuso A (a pesar de la no claridad en su frontera) puede

ser definido de manera precisa, asociando a cada objeto x un número real entre 0 y 1 que representa su grado de pertenencia en A mediante μ_A.

Example 2.1.3. Considere la afirmación "departamentos con *alto* ingreso percápita". En este respecto, el término *alto* es impreciso. Para representar el significado de *alto* de una forma precisa, sería necesario definir su función de pertenencia como en la siguiente figura:

Figura 2.1: Conjunto difuso representando los "departamentos con *alto* ingreso percápita"



La palabra *alto* puede referirse a un ingreso percápita cuyo valor de pertenencia está en el rango $[1, 0.7]$ y es posible dar cuenta de dicho ingreso percápita *alto* en este alcance como un conjunto continuo. El eje horizontal muestra los departamentos y el eje vertical muestra los valores numéricos de la función de pertenencia. La línea azul muestra la posibilidad[1] (valor de la función de pertenencia) de estar contenido en el conjuntos difuso "departamentos con *alto* ingreso percápita".

Por ejemplo, siguiendo la definición de *alto* como en la figura anterior, el departamento de Casanare es quien tiene el ingreso percápita más *alto*. Entonces la posibilidad de este departamento de pertenecer al conjunto difuso "departamentos con *alto* ingreso percápita" es 1, en tanto que la del departamento de Arauca es 0.3.

Debe notarse que en muchas situaciones prácticas la función de pertenencia, μ_A, tiene que ser estimada a partir de información parcial sobre ella, tales como los valores que toma sobre un conjunto finito de puntos muestrales $x_1, x_2, ..., x_N$. Cuando A es definido de manera incompleta (y por lo tanto solo aproximadamente), se dice que es parcialmente definido por *ejemplificación*. El problema de la estimación de μ_A a partir del conocimiento del conjunto de pares $(x_1, \mu_A(x_1)), \cdots, (x_N, \mu_A(x_N))$ es el problema de *abstracción*, un problema que juega un rol central en el patrón de reconocimiento. (Ver APÉNDICES A.1 y A.2)

2.2. NÚMEROS DIFUSOS

El concepto de número difuso está basado principalmente en el concepto de intervalo, que por lo general está definido sobre los números reales $\mathbb{R}$ y por lo tanto se dice ser un subconjunto de $\mathbb{R}$. Por

[1] Sea A un conjunto difuso definido sobre un conjunto universal X y cada elemento en el conjunto universal tiene un grado de pertenencia en $[0, 1]$ para el conjunto A. La función de pertenencia μ_A puede ser definida como una función de distribución de posibilidad para el conjunto A sobre el conjunto universal X. La posibilidad del elemento x es denotada como $\mu_A(x)$ y esas posibilidades definen el conjunto difuso A. Se sabe que una distribución de probabilidad P está definida sobre un espacio muestral S y la suma de dichas probabilidades deber ser igual a 1. Entre tanto, la distribución de posibilidad está definida sobre un conjunto universal X y su suma no tiene límite.

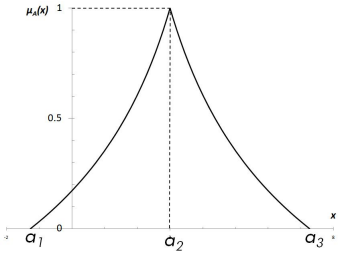
ejemplo, si el intervalo es denotado como $A = [a_1, a_3]$ donde $a_1, a_3 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_3$, es posible referirse a él como un tipo de conjunto. Al expresar este intervalo mediante una función de pertenencia se obtiene lo siguiente:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ 1 & a_1 \leq x \leq a_3 \\ 0 & x > a_3 \end{cases} \tag{2.5}$$

Si $a_1 = a_3$, este intervalo indica un punto. Es decir, $[a_1, a_1] = a_1$.

Un número difuso se expresa como un conjunto difuso que define un intervalo difuso en los números reales $\mathbb{R}$. Debido a que las fronteras de este intervalo son ambiguas, el intervalo es también un conjunto difuso. Generalmente un intervalo difuso es representado por dos puntos extremos a_1 y a_3 y un punto pico a_2 así $[a_1, a_2, a_3]$ (ver figura 2):

Figura 2.2: Número difuso $A = [a_1, a_2, a_3]$



La operación $\alpha - corte$ puede ser aplicada a un número difuso. Si se denota el intervalo $\alpha - corte$ de un número difuso A como A_α, este intervalo se define como:

$$A_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right] \tag{2.6}$$

Es posible establecer que este es un intervalo nítido.

Definition 2.2.1. Un número difuso es un conjunto difuso que debe cumplir con las siguientes condiciones (Ver APÉNDICE A.1):

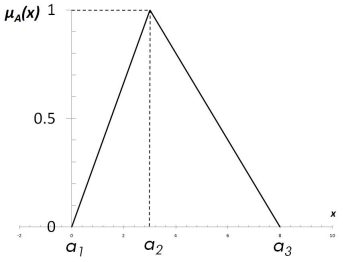
- Ser un conjunto difuso convexo
- Ser un conjunto difuso normalizado
- Su función de pertenencia debe ser continua por partes
- Estar definido en los números reales $\mathbb{R}$

La condición de convexidad implica que la linea definida por $\alpha - corte$ es continua y el intervalo $\alpha - corte$ satisface la siguiente relación:

$$A_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right] \tag{2.7}$$

$$(\alpha' < \alpha) \Rightarrow \left(a_1^{(\alpha')} \leq a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha')} \geq a_3^{(\alpha)}\right) \tag{2.8}$$

Figura 2.3: Número difuso triangular $A = (a_1, a_2, a_3)$



La condición de normalización implica que el valor de pertenencia máximo es 1.

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \mu_A(x) = 1 \tag{2.9}$$

El símbolo $\exists$ significa "existe".

2.2.1. Número difuso triangular

Existen varios tipos de números difusos, entre los más populares están los números difusos trapezoidales, los números difusos con forma de campana y los números difusos triangulares. Se hará mención a la definición de estos últimos debido a que son los que se usarán en las próximas secciones de este documento.

Definition 2.2.2. Un número difuso triangular es un conjunto difuso compuesto por tres elementos, como a continuación se expresa:

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

cuya función de pertenencia es la siguiente:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x > a_3 \end{cases} \tag{2.10}$$

2.2.1.1. Operaciones con números triangulares difusos

A continuación se resumen las propiedades más importantes de las operaciones con números difusos triangulares:

- El resultado obtenido a partir de la adición o la substracción entre números difusos triangulares es también un número difuso triangular.
- El resultado obtenido a partir de la multiplicación o división no es un número triangular difuso.
- Las operaciones Max y Min no dan como resultado un número difuso triangular.

Sin embargo, a menudo se asume que los resultados operacionales de la multiplicación o la división pueden resultar en números difuso triangulares por aproximación de sus valores. (Ver APÉNDICE A.4 y A.5)

- Adición:

$$A \oplus B = (a_1, a_2, a_3)\,(+)\,(b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \tag{2.11}$$

- Sustracción:

$$A \ominus B = (a_1, a_2, a_3)\,(-)\,(b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \tag{2.12}$$

- Multiplicación:

$$A \otimes B \cong (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3) \tag{2.13}$$

$$k \otimes A = (ka_1, ka_2, ka_3)\,,\ k \geq 0 \tag{2.14}$$

- Imagen simétrica:

$$-(A) = (-a_3, -a_2, -a_1) \tag{2.15}$$

Adicionalmente, la distancia Euclidiana entre dos números difusos triangulares se puede definir de la siguiente manera:

$$d(A, B) = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2\right]} \tag{2.16}$$

(Ver APÉNDICE A.3)

2.3. LÓGICA DIFUSA (Zadeh, 2009)

La lógica difusa pretende introducir un grado de vaguedad en las cosas que califica. En el mundo real existe mucho conocimiento no-perfecto, es decir, conocimiento vago, impreciso, incierto, ambiguo, inexacto, o probabilístico por naturaleza. El razonamiento y pensamiento humano frecuentemente conlleva información de este tipo, probablemente originada de la inexactitud inherente de los conceptos humanos. El lenguaje formal es un lenguaje en el cual la sintaxis está definida de una manera precisa y por lo tanto es diferente del lenguaje informal como el español o el inglés. El estudio del lenguaje formal es el contenido de las matemáticas conocido como lógica matemática. La lógica clásica considera la lógica binaria que consiste en verdadero y falso. La lógica difusa es una generalización de la lógica clásica y trata de la ambigüedad en la lógica.

Dentro de la lógica difusa, el valor de verdad [2]de una proposición difusa[3] puede estar en el intervalo $[0, 1]$. La función de una expresión difusa es una función mapping de $[0, 1]$ a $[0, 1]$.

$$f : [0, 1] \to [0, 1] \tag{2.17}$$

Si se generaliza el dominio a n dimensiones, la función se puede expresar de la siguiente manera:

$$f : [0, 1]^n \to [0, 1] \tag{2.18}$$

[2]En el lenguaje informal ordinario, las "oraciones" son usadas en la lógica. En particular, una oración es "verdadera (1)" o "falsa (0)" y su valor de verdad es llamado "proposición".

[3]Una proposición difusa es aquella que asigna un valor a una variable difusa, por ejemplo: “el sabor de la naranja es agrio” o “la aceleración es baja”. Una proposición difusa tiene por tanto asociado un conjunto difuso A (el valor lingüístico asignado, “agrio” en este caso) y su correspondiente función de pertenencia μ_A definida sobre los elementos del universo de discurso $u \in U$.

Por lo tanto una expresión difusa se puede interpretar como una relación n-aria de n conjuntos difusos a $[0,1]$. En la lógica difusa, las operaciones tales como negación ($\sim$ o $\neg$), conjunción ($\wedge$) y disjunción ($\vee$) se usan de forma similar a la lógica clásica.

Definition 2.3.1. La lógica difusa es una lógica representada por una expresión difusa que satisface las siguientes condiciones:

- Los valores de verdad, 0 y 1, y una variable $x_i \in [0,1]\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$ son expresiones difusas.
- Si f es una expresión difusa, $\sim f$ es también una expresión difusa.
- Si f y g son expresiones difusas, $f \wedge g$ y $f \vee g$ son también expresiones difusas.

2.3.1. Variable Lingüística (Zadeh, 1975)

Cuando se considera una variable, en general, esta asume números como valores. Si la variable asume términos lingüísticos, a esto se llama "variable lingüística".

Definition 2.3.2. Una variable lingüística se define por la siguiente quíntupla:
Variable lingüística $= (x, T(x), U, G, M)$
x : nombre de la variable
$T(x)$: conjunto de términos lingüísticos que pueden ser los valores de la variable
U : conjunto universo del discurso que define las características de la variable
G : gramática sintáctica que produce términos en $T(x)$
M : reglas semánticas que mapean términos en $T(x)$ a conjuntos difusos en U
Los términos lingüísticos difusos a menudo consisten de dos partes:

- Predicado difuso: costoso, viejo, raro, peligroso, bueno, etc.
- Modificador difuso: muy, apropiado, casi imposible, extremadamente inapropiado, etc.

El modificador es usado para cambiar el significado del predicado y este puede ser agrupado en las siguientes dos clases:

- Calificador de verdad difuso: muy cierto, bastante cierto, más o menos cierto, en su mayoría falso, etc.
- Cuantificador difuso: mucho, poco, casi, todo, usualmente, etc.

Definition 2.3.3. Un predicado difuso es un predicado cuya definición contiene ambigüedad.

Por ejemplo "z es costoso" o "w es bueno". Los términos "costoso" y "bueno" son términos difusos. Por lo tanto los conjuntos costoso(z) y bueno(w) son conjuntos difusos. Cuando un predicado difuso "x es P" está dado, se puede interpretar de dos maneras:

- $P(x)$ es un conjunto difuso. El grado de pertenencia de x en el conjunto P es definido por la función de pertenencia $\mu_{p(x)}$
- $\mu_p(x)$ es el grado de satisfacción de x para la propiedad P. Por lo tanto, el valor de verdad del predicado difuso es definido por la función de pertenencia.

Definition 2.3.4. Sea $U = \{u_r \mid r = 0, 1, \ldots, T\}$ un conjunto de términos lingüísticos totalmente ordenado y finito, donde u_r es el $r-ésimo$ término lingüístico del conjunto U y $T+1$ es la cardinalidad del conjunto U. El elemento de la mitad en el conjunto U de términos lingüísticos representa una posibilidad de aproximadamente 0,5 y el resto de elementos de U están ubicados alrededor de éste simétricamente. El conjunto U de términos lingüísticos debe cumplir las siguientes condiciones:

- Ordenado: u_r" $\geq$ "u_h si $r \geq h$, donde " $\geq$ " significa que u_r es preferido o indiferente a u_h;
- Existe una operación de negación: $neg(u_r) = u_h$ tal que $h = T–r$;
- Existe un operador de maximización: $max\{u_r, u_h\} = u_r$ si u_r" $\geq$ "u_h;
- Existe un operador de minimización: $min\{u_r, u_h\} = u_h$ si u_r" $\geq$ "u_h.

Una variable lingüística puede ser representada mediante un número difuso triangular usando la siguiente fórmula Jiang, Fan, and Ma (2008):

$$A = (a_1, a_2, a_3) = \left(max\left(\frac{r-1}{T}, 0\right), \frac{r}{T}, min\left(\frac{r+1}{T}, 1\right)\right) \tag{2.19}$$

Capítulo 3

DISEÑO METODOLÓGICO

El modelo desarrollado a continuación está basado en el trabajo de Fan and Feng (2009) cuyo método para la TDMC incorpora la interacción entre las alternativas de localización en un ambiente difuso a partir de los datos de ciertos atributos de las alternativas. En primer lugar, la información de los atributos de cada alternativa de localización se estandariza. Posteriormente, usando la teoría de la lógica difusa, se expresa por medio de variables lingüísticas la información de los atributos sin interacción, la información de los atributos con interacción y la ponderación de cada uno de ellos, para seguidamente mapear estas variables a números triangulares difusos. Entonces, para poder agregar los datos de los atributos con interacción, se acude a la teoría de conjuntos difusos y se define la dominancia central de una alternativa respecto de todas las demás alternativas. Seguidamente se construye las matrices integradas de decisión de cada criterio, que reune la información de ambos tipos de atributos. Posteriormente, éstas matrices se reunen para obtener una matriz integrada agrupada de decisión. Usando esta última matriz, se aplica una metodología TOPSIS extendida, la cual implica construir la solución ideal positiva difusa (SIPD) y la solución ideal negativa difusa (SIND) para poder calcular la distancia de cada alternativa de localización tanto a la SIPD como a la SIND, que hace las veces de un indicador de cercanía relativa de cada alternativa a la solución ideal. Finalmente, las alternativas son ordenadas de acuerdo a este indicador para tomar la mejor decisión.

3.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Dado un conjunto discreto de alternativas de localización en el espacio para un establecimiento industrial, el empresario busca obtener un orden entre dichas alternativas para tomar la mejor decisión bajo un conjunto de atributos evaluados lingüísticamente. Algunos de los atributos trabajan de forma aislada mientras que otros permiten evaluar el nivel de interacción entre pares de alternativas. Es decir, al empresario le interesa valorar no solo los atributos de las localizaciones candidatas de manera aislada sino también evaluar cuál de ellas es la que mejor que se relaciona con las demás.

3.1.1. Notación

- $U = \{u_r | r = 1, ..., T\}$: conjunto de términos lingüísticos definidos por el investigador usados para evaluar cada alternativa de localización según el desempeño de sus atributos, donde u_r es

el $r-ésimo$ término lingüístico del conjunto U. Este conjunto debe cumplir con las condiciones dadas en la definición 5.4.

- $V = \{v_r | r = 1, ..., T\}$: conjunto de términos lingüísticos definidos por el investigador usados para evaluar el peso de los atributos de las alternativas, donde v_r es el $r-ésimo$ término lingüístico del conjunto V. Este conjunto debe cumplir con las condiciones dadas en la definición 5.4.

- $P = \{p_i | i = 1, ..., m\}$: conjunto discreto de m alternativas factibles de localización, donde p_i es la $i-ésima$ localización candidata. Las alternativas pueden ser unidades geográficas.

- $A = \{A_j | j = 1, ..., n\}$: conjunto de n atributos, donde A_j es el $j-ésimo$ atributo. Los atributos son aditivamente independientes. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $j = 1, ..., k$ es el conjunto de atributos que no ostentan interacción entre las alternativas y, $j = k+1, k+2, ..., n$ es el conjunto de atributos que si ostentan interacción entre alternativas.

- $C = \{C_l | l = 1, ..., q, q \geq 2\}$: conjunto finito de q criterios usados para evaluar mediante el conjunto U los atributos de cada localización candidata, donde C_l es el $l-ésimo$ aspecto.

- $\tilde{W}_l = (\tilde{w}_{1l}, \tilde{w}_{2l}, ..., \tilde{w}_{nl})$: vector de pesos de los n atributos proporcionados por un número de individuos expertos igual a q. Cada experto pondera lingüísticamente, recurriendo al conjunto V, la importancia de los criterios con los que son evaluados los atributos de cada alternativa. En consecuencia, $\tilde{w}_{1l}, \tilde{w}_{2l}, ..., \tilde{w}_{kl}$ denotan los pesos de los k atributos sin interacción entre las alternativas y $\tilde{w}_{(k+1)}, \tilde{w}_{(k+2)}, ..., \tilde{w}_{nl}$ denotan los pesos de los $n-k$ atributos con interacción entre las alternativas.

- $\tilde{X}_l = [\tilde{x}_{ijl}]_{m \times k}$: matriz de decisión de los k atributos sin interacción entre las alterativas proporcionada por el criterio C_l, donde $\tilde{x}_{ijl}$ representa la evaluación lingüística de la alternativa i según el desempeño de esta bajo el atributo sin interacción j.

- $\tilde{Y}_l = [\tilde{y}_{igjl}]_{m \times (n-k)}$: matriz de decisión de los $n-k$ atributos con interacción entre las alternativas proporcionada por el criterio C_l cuyos valores se estandarizan por fila y por columna, donde $\tilde{y}_{igjl}$ representa la evaluación lingüística de la relación entre la localización candidata i y la localización candidata g en presencia del atributo j. En general, el flujo de interacción de la alternativa p_i hacia la alternativa p_g es diferente del flujo de interacción de la alternativa p_g hacia la alternativa p_i, en consecuencia $\tilde{y}_{igjl} \neq \tilde{y}_{gijl}$ para algún i, g, de ahí la necesidad de estandarizar la información en ambos sentidos. Por facilidad computacional, $\tilde{y}_{iijl} = u_{\frac{T}{2}}$, lo cual no afectará el cálculo de los resultados.

Clarificando el problema de acuerdo a la notación anterior, éste consiste entonces en que el empresario industrial pueda ordenar el conjunto discreto de alternativas de localización factibles para su establecimiento industrial con el fin de elegir la mejor localización, dado un vector que reune la importancia difusa que un conjunto de expertos asigna lingüísticamente a cada atributo, y unas matrices de decisión cuyos elementos representan la evaluación lingüística del desempeño aislado y el desempeño de las relaciones entre localizaciones candidatas, basada en información difusa sobre una serie de atributos y criterios.

De acuerdo a la notación anterior, en la siguiente tabla se muestra la manera de combinar la información de los atributos con y sin interacción entre las diferentes alternativas de localización.

Cuadro 3.1: Matrices de decisión de atributos con y sin interacción según información del criterio C_l

Matriz de decisión de atributos sin interacción					Matriz de decisión de atributos con interacción								
	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	A_{k+1}				$\cdots$	A_n			
					P_1	P_2	$\cdots$	P_m	$\cdots$	P_1	P_2	$\cdots$	P_m
P_1	$\tilde{x}_{11l}$	$\tilde{x}_{12l}$	$\cdots$	$\tilde{x}_{1kl}$	$\tilde{y}_{11(k+1)l}$	$\tilde{y}_{12(k+1)l}$	$\cdots$	$\tilde{y}_{1m(k+1)l}$	$\cdots$	$\tilde{y}_{11nl}$	$\tilde{y}_{12nl}$	$\cdots$	$\tilde{y}_{1mnl}$
P_2	$\tilde{x}_{21l}$	$\tilde{x}_{22l}$	$\cdots$	$\tilde{x}_{2kl}$	$\tilde{y}_{21(k+1)l}$	$\tilde{y}_{22(k+1)l}$	$\cdots$	$\tilde{y}_{2m(k+1)l}$	$\cdots$	$\tilde{y}_{21nl}$	$\tilde{y}_{22nl}$	$\cdots$	$\tilde{y}_{2mnl}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
P_m	$\tilde{x}_{m1l}$	$\tilde{x}_{m2l}$	$\cdots$	$\tilde{x}_{mkl}$	$\tilde{y}_{m1(k+1)l}$	$\tilde{y}_{m2(k+1)l}$	$\cdots$	$\tilde{y}_{mm(k+1)l}$	$\cdots$	$\tilde{y}_{m1nl}$	$\tilde{y}_{m2nl}$	$\cdots$	$\tilde{y}_{mmnl}$

3.2. METODOLOGÍA

3.2.1. Estandarización y modelación de la información mediante conjuntos difusos.

Se asume que la información recolectada sobre los criterios de cada atributo es imprecisa o incierta, por lo tanto se modela mediante conjuntos difusos. Para lograr esto se estandariza cada una de las variables (criterios) en una escala con una distancia común entre 0 y 1, correspondientes al valor mínimo y al valor máximo de pertenencia, respectivamente, dentro del conjunto difuso. A la localización candidata que tenga el mayor valor en un criterio respectivo se le asigna el valor de 1, mientras que a la que tenga el menor valor se le asigna el valor de 0. El valor de pertenencia para las demás localizaciones candidatas se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$\mu_{C_l}(P) = \frac{Z_i - Z_{min}}{Z_{max} - Z_{min}} \tag{3.1}$$

donde Z_i es el valor del criterio para la localización candidata P_i, Z_{min} el valor mínimo y Z_{max} el valor máximo alcanzados por la localización candidata P_i según el criterio C_l.

3.2.2. Expresión cualitativa de los datos estandarizados

Una vez que se ha definido mediante conjuntos difusos la información recolectada sobre los criterios de los atributos de cada localización candidata, los conjuntos de términos lingüísticos U y V permiten evaluar cualitativamente el desempeño de una alternativa de localización de acuerdo a un criterio determinado y por tanto representar las restricciones de los datos producidos por el conocimiento humano. Se procede entonces a construir las matrices de decisión de los atributos sin interacción X_l y con interacción Y_l entre las localizaciones candidatas, así como el vector de ponderaciones W_l de cada criterio. Para lograr esto se debe establecer una relación entre los valores estandarizados y las variables lingüísticas definidas.

3.2.3. Representación de las evaluaciones lingüísticas mediante números triangulares difusos.

Por medio de la ecuación 2.19, los elementos que componen el vector de pesos de los criterios $\tilde{W}_l = (\tilde{w}_{1l}, \tilde{w}_{2l}, ..., \tilde{w}_{nl})$, la matriz de decisión de los atributos sin interacción $\tilde{X}_l = [\tilde{x}_{ijl}]_{m\times k}$ y

la matriz de decisión de los atributos con interacción $\tilde{Y}_l = [\tilde{y}_{igjl}]_{m\times(n-k)}$ se pueden representar mediante números difusos triangulares. Es decir, $\tilde{w}_{jl} = \left(w^1_{jl}, w^2_{jl}, w^3_{jl}\right)$, $\tilde{x}_{ijl} = \left(x^1_{ijl}, x^2_{ijl}, x^3_{ijl}\right)$ y $\tilde{y}_{igjl} = \left(y^1_{igjl}, y^2_{igjl}, y^3_{igjl}\right)$[1].

3.2.4. Dominancia central de cada alternativa respecto de todas las demás.

Sea $\hat{z}^{\alpha}_{ijl}$ la medida global a la cual la localización candidata P_i interacciona con las otras localizaciones candidatas respecto del atributo A_j según un criterio particular:

$$\hat{z}^{\alpha}_{ijl} = \hat{y}_{i1jl} \oplus \hat{y}_{i2jl} \oplus \cdots \oplus \hat{y}_{imjl} \tag{3.2}$$

$$i = 1, \ldots, m;\ j = k+1, k+2, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, q$$

Sea, $\hat{z}^{\beta}_{ijl}$ la medida global a la cual todas las demás alternativas interaccionan con la localización candidata P_i en presencia del atributo A_j según un criterio particular:

$$\hat{z}^{\beta}_{ijl} = \hat{y}_{1gjl} \oplus \hat{y}_{2gjl} \oplus \cdots \oplus \hat{y}_{mgjl} \tag{3.3}$$

$$g = 1, \ldots, m;\ j = k+1, k+2, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, q$$

Basados en $\hat{z}^{\alpha}_{ijl}$ y $\hat{z}^{\beta}_{ijl}$, la dominancia central se define como:

$$\hat{r}_{ijl} = \frac{1}{2m}\left(\hat{z}^{\alpha}_{ijl} + \hat{z}^{\beta}_{ijl}\right) \tag{3.4}$$

$$i = 1, \ldots, m;\ j = k+1, k+2, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, q$$

Donde $\hat{r}_{ijl}$ denota la dominancia central de la localización candidata Pi respecto de todas las demás localizaciones candidatas de acuerdo al atributo A_j que ostenta relación entre dichas localizaciones. Esto lo que busca es valorar de manera global *qué tan bien* la localización P_i interactúa con todas las demás localizaciones candidatas en presencia del atributo A_j que así lo permite. En una red en su conjunto, la dominancia central refleja la centralidad y predominancia de uno de sus nodos a través de los flujos que se estén observando o midiendo respecto de todos y cada uno de los demás nodos. La dominancia central de un nodo se mide a través de la interacción con los otros nodos (Wasserman and Faust, 1994). En la ecuación 3.4, si $\hat{r}_{ijl}$ alcanza el valor más alto, entonces P_i se presenta como la localización candidata más conveniente dentro de la red de localizaciones. Como $\hat{r}_{ijl}$ es un número triangular difuso, es decir, $\hat{r}_{ijl} = \left(r^1_{ijl}, r^2_{ijl}, r^3_{ijl}\right)$. Entonces r^1_{ijl}, r^2_{ijl} y r^3_{ijl} se pueden expresar como a continuación:

$$r^1_{ijl} = \frac{1}{2m}\left(\sum_{h=1}^{m} y^1_{hijl} + \sum_{s=1}^{m} y^1_{isjl}\right),\ j = k+1, k+2, \ldots, n;\ l = 1, \ldots q, \tag{3.5}$$

$$r^2_{ijl} = \frac{1}{2m}\left(\sum_{h=1}^{m} y^2_{hijl} + \sum_{s=1}^{m} y^2_{isjl}\right),\ j = k+1, k+2, \ldots, n;\ l = 1, \ldots q, \tag{3.6}$$

[1] En adelante, los supra-índices usados para notar los elementos de los números difusos triangulares no se deben confundir con los exponentes de un número.

$$r_{ijl}^3 = \frac{1}{2m}\left(\sum_{h=1}^{m} y_{hijl}^3 + \sum_{s=1}^{m} y_{isjl}^3\right),\ j = k+1, k+2, \ldots, n;\ l = 1, \ldots q, \tag{3.7}$$

3.2.5. Matrices de decisión integrada

Una vez calculado $\hat{r}_{ijl}$, las matrices de decisión integrada de los criterios de los atributos con interacción debe ser construida, es decir, $\hat{R}_l = [\hat{r}_{ijl}]_{m\times(n-k)}$. Adicionalmente, la matriz $\tilde{X}_l = [\tilde{x}_{ijl}]_{m\times k}$ de los criterios sin interacción y la matriz$\hat{R}_l = [\hat{r}_{ijl}]_{m\times(n-k)}$de los criterios con interacción son reunidas en una nueva matriz de la siguiente manera:

$$\hat{D}_l^* = \begin{array}{c|cccccccc} & A_1 & A_2 & \cdots & A_k & A_{k+1} & A_{k+2} & \cdots & A_n \\ \hline P_1 & \hat{x}_{11l} & \hat{x}_{12l} & \cdots & \hat{x}_{1kl} & \hat{r}_{1(k+1)l} & \hat{r}_{1(k+2)l} & \cdots & \hat{r}_{1nl} \\ P_2 & \hat{x}_{21l} & \hat{x}_{22l} & \cdots & \hat{x}_{2kl} & \hat{r}_{2(k+1)l} & \hat{r}_{2(k+2)l} & \cdots & \hat{r}_{2nl} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_m & \hat{x}_{m1l} & \hat{x}_{m2l} & \cdots & \hat{x}_{mkl} & \hat{r}_{m(k+1)l} & \hat{r}_{m(k+2)l} & \cdots & \hat{r}_{mnl} \end{array}, \quad l = 1, \ldots q \tag{3.8}$$

Por facilidades notacionales, como Fan and Feng (2009) proponen, en la matriz anterior se puede sustituir $\hat{r}_{ijl} = \left(r_{ijl}^1, r_{ijl}^2, r_{ijl}^3\right)$ por $\hat{x}_{ijl} = \left(x_{ijl}^1, x_{ijl}^2, x_{ijl}^3\right)$. Luego la matriz $\hat{D}_l^*$ puede ser reescrita como la matriz $\hat{D}_l$ llamada matriz de decisión integrada.

$$\hat{D}_l = \begin{array}{c|cccccccc} & A_1 & A_2 & \cdots & A_k & A_{k+1} & A_{k+2} & \cdots & A_n \\ \hline P_1 & \hat{r}_{11l} & \hat{r}_{12l} & \cdots & \hat{r}_{1kl} & \hat{r}_{1(k+1)l} & \hat{r}_{1(k+2)l} & \cdots & \hat{r}_{1nl} \\ P_2 & \hat{r}_{21l} & \hat{r}_{22l} & \cdots & \hat{r}_{2kl} & \hat{r}_{2(k+1)l} & \hat{r}_{2(k+2)l} & \cdots & \hat{r}_{2nl} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_m & \hat{r}_{m1l} & \hat{r}_{m2l} & \cdots & \hat{r}_{mkl} & \hat{r}_{m(k+1)l} & \hat{r}_{m(k+2)l} & \cdots & \hat{r}_{mnl} \end{array}, \quad l = 1, \ldots q \tag{3.9}$$

3.2.6. Matriz de decisión integrada agrupada

En esta parte de la metodología, los vectores de pesos de los atributos $\hat{W}_1, \hat{W}_2, \ldots, \hat{W}_l$ generados por cada experto son agregados en un vector agrupado de pesos $\hat{W} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_n)$, donde:

$$\hat{w}_j = \left(\frac{1}{q}\right) \otimes \left(\hat{w}_{j1} \oplus \hat{w}_{j2} \oplus \cdots \oplus \hat{w}_{jq}\right), \quad j = 1, ..., n \tag{3.10}$$

De nuevo, como en el caso del cálculo de la dominancia central, hay que notar que las ponderaciones $\hat{w}_j$ para cada atributo son expresadas en variables lingüísticas y posteriormente se representan mediante números difusos triangulares $\hat{w}_j = \left(w_j^1, w_j^2, w_j^3\right)$, luego w_j^1, w_j^2 y w_j^3 se pueden calcular de la siguiente manera:

$$w_j^1 = \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q} w_{jl}^1 \tag{3.11}$$

$$w_j^2 = \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q} w_{jl}^2 \tag{3.12}$$

$$w_j^3 = \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q} w_{jl}^3 \tag{3.13}$$

En este caso se está suponiendo que el grado de importancia o el peso de cada individuo experto es igual. De esta forma es posible agrupar las matrices de decisión integradas $\hat{D}_1, \hat{D}_2, \ldots, \hat{D}_q$ en la matriz de decisión integrada agrupada $\hat{D} = [\hat{r}_{ij}]_{m\times n}$, donde:

$$\hat{r}_{ij} = \left(\frac{1}{q}\right) \otimes [\hat{r}_{ij1} \oplus \hat{r}_{ij2} \oplus \cdots \oplus \hat{r}_{ijq}], \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n \tag{3.14}$$

Nuevamente, hay que destacar que $\hat{r}_{ij} = \left(r^1_{ij}, r^2_{ij}, r^3_{ij}\right)$, por lo tanto r^1_{ij}, r^2_{ij} y r^3_{ij}, respectivamente se pueden calcular así:

$$r^1_{ij} = \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q} r^1_{ijl} \tag{3.15}$$

$$r^2_{ij} = \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q} r^2_{ijl} \tag{3.16}$$

$$r^3_{ij} = \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q} r^3_{ijl} \tag{3.17}$$

3.2.7. TOPSIS difuso

3.2.7.1. Matriz de decisión integrada agrupada ponderada.

Se multiplica el vector de pesos de los atributos $\hat{W} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_n)$ por la matriz de decisión integrada agrupada $\hat{D}$ con el objetivo de obtener la matriz de decisión integrada agrupada ponderada $\hat{E} = [\hat{e}_{ij}]_{m\times n}$, es decir:

$$\hat{E} = \begin{array}{c|cccccccc} & A_1 & A_2 & \cdots & A_k & A_{k+1} & A_{k+2} & \cdots & A_n \\ \hline P_1 & \hat{e}_{11} & \hat{e}_{12} & \cdots & \hat{e}_{1k} & \hat{e}_{1(k+1)} & \hat{e}_{1(k+2)} & \cdots & \hat{e}_{1n} \\ P_2 & \hat{e}_{21} & \hat{e}_{22} & \cdots & \hat{e}_{2k} & \hat{e}_{2(k+1)} & \hat{e}_{2(k+2)} & \cdots & \hat{e}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_m & \hat{e}_{m1} & \hat{e}_{m2} & \cdots & \hat{e}_{mk} & \hat{e}_{m(k+1)} & \hat{e}_{m(k+2)} & \cdots & \hat{e}_{mn} \end{array} \tag{3.18}$$

donde,

$$\hat{e}_{ij} = \hat{r}_{ij} \otimes \hat{w}_{j,} \quad i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n \tag{3.19}$$

Otra vez, hay que notar que $\hat{e}_{ij}$ se puede representar mediante números difusos triangulares, es decir, $\hat{e}_{ij} = \left(e^1_{ij}, e^2_{ij}, e^3_{ij}\right)$, por lo tanto e^1_{ij}, e^2_{ij} y e^3_{ij}, respectivamente se pueden calcular así:

$$e^1_{ij} = r^1_{ij} w^1_j, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.20}$$

$$e^2_{ij} = r^2_{ij} w^2_j, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.21}$$

$$e_{ij}^3 = r_{ij}^3 w_j^3, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.22}$$

3.2.7.2. Soluciones ideales.

De acuerdo a la metodología TOPSIS difusa, la solución ideal positiva difusa SIPS y la solución ideal negativa difusa SIND para cada atributo, se pueden expresar mediante números triangulares difusos, respectivamente, de la siguiente forma:

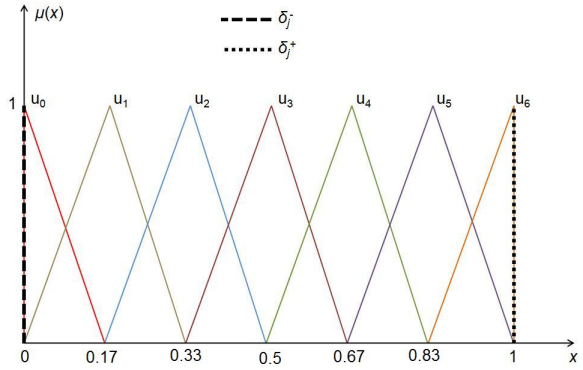
$$S^+ = \left(\delta_1^+, \delta_2^+, ..., \delta_n^+\right), \tag{3.23}$$

$$S^- = \left(\delta_1^-, \delta_2^-, ..., \delta_n^-\right), \tag{3.24}$$

Donde $\delta_j^+ = (1, 1, 1)$ y $\delta_j^- = (0, 0, 0)$, $j = 1, ..., n$.

En la siguiente figura, se observa gráficamente la ubicación de estas soluciones ya que concuerdan con todo el proceso, desde la estandarización de los datos, pasando por la expresión mediante términos lingüísticos y la representación a través números difusos triangulares. Lo que se está queriendo decir con la SIPS (SIND), es que el mejor (peor) desempeño de una localización candidata según cierto atributo se representa a través de número triangular difuso (conjunto difuso) cuyos tres elementos son todos iguales a 1 (0) (el más alto (bajo) de los valores para cada criterio de un atributo) y tienen un valor de pertenencia igual a 1, es decir la posibilidad de pertenecer al conjunto difuso *"mejor (peor)* desempeño" es la mayor.

Figura 3.1: Representación gráfica de la SIPS y la SIND para cada atributo de una localización candidata



3.2.7.3. Distancias entre cada localización candidata y las soluciones ideales.

La distancia entre el desempeño de cada cada localización candidata según todos los atributos definidos para ellas y la SIPD $\left(d_i^+\right)$ y la SIND $\left(d_i^-\right)$, se pueden expresar, respectivamente de la siguiente forma:

$$d_i^+ = \sum_{j=1}^{n} d\left(\hat{e}_{ij}, \delta_j^+\right), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.25}$$

$$d_i^- = \sum_{j=1}^{n} d\left(\hat{e}_{ij}, \delta_j^-\right), \quad i = 1, \ldots m. \tag{3.26}$$

donde

$$d\left(\hat{e}_{ij}, \delta_j^+\right) = \sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(e_{ij}^1 - 1\right)^2 + \left(e_{ij}^2 - 1\right)^2 + \left(e_{ij}^3 - 1\right)^2\right]}, \quad i = 1, ...m; \quad j = 1, ..., n, \tag{3.27}$$

$$d\left(\hat{e}_{ij}, \delta_j^-\right) = \sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(e_{ij}^1 - 0\right)^2 + \left(e_{ij}^2 - 0\right)^2 + \left(e_{ij}^3 - 0\right)^2\right]}, \quad i = 1, ...m; \quad j = 1, ..., n. \tag{3.28}$$

3.2.7.4. Coeficiente de cercanía relativa.

Sobre la base de haber calculado $\left(d_i^+\right)$ y $\left(d_i^-\right)$, se procede a calcular la cercanía relativa de cada localización candidata P_i, así:

$$CR_i = \frac{d_i^+}{d_i^+ + d_i^-}, \quad i = 1, ..., m, \tag{3.29}$$

Este coeficiente CR_i lo que expresa es que si el desempeño de una localización candidata P_i para ubicar un establecimiento industrial está más próxima a la SIPD y más lejos de la SIND, al tomar en cuenta todos los atributos definidos para ella, dicho coeficiente CR_i es el más alto. Luego la alternativa P_i resultaría ser la mejor.

3.2.7.5. Ordenación de las localizaciones candidatas.

De conformidad con la asignación de un orden descendente del coeficiente de cercanía relativa CR_i calculado para todas las localizaciones candidatas, el empresario o quien haga las veces de tomador de decisiones puede obtener una clasificación ordenada de todas las alternativas y proceder a seleccionar la deseada, es decir la que reporte el CR_i más alto.

Capítulo 4

APLICACIÓN: EL CASO DEL SECTOR AUTOMOTOR

4.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA PRÁCTICO

Supóngase que un empresario industrial del sector automotor en Colombia está pensando en abrir un nuevo establecimiento industrial para fabricación y/o ensamblaje de vehículos automotores en el país. Como se comentó en la introducción, este tipo de problemas suelen ser vistos desde un punto de vista multi-etápico y multi-criterio. Es decir, para tomar una decisión racional este empresario deberá tener en cuenta que, en primer lugar tiene que elegir una región geográfica, después una localidad dentro de tal región y finalmente un lugar dentro de dicha localidad para instalar el establecimiento. Adicionalmente, en cada etapa deberá evaluar una serie de atributos con los que cuente cada localización candidata y definir un conjunto criterios para realizar dicha evaluación. La aplicación que se desarrollará en lo que resta de este documento se preocupará del problema de decisión en la primera etapa.

Los elementos que generalmente determinan la localización de las industrias, se basan en la teoría de Alfred Marshall sobre economías de aglomeración (Groenewegen, 1992) y los criterios que Moore (1962) propuso en una lista, que si bien no puede ser considerada como una lista exhaustiva, al menos parece pertinente y puede tomarse en cuenta como una base fundamental y un insumo importante a la hora de abordar este tipo de decisiones. Este autor propuso los siguientes criterios: tamaño del mercado local, costo de insumos, costos de transporte, costos de la energía, calidad de la mano de obra y salarios, leyes e impuestos locales, clima, costos de los combustibles, disponibilidad de servicios comunitarios, actitud social e individual hacia el trabajo, gustos de los individuos y disponibilidad de agua y posibilidades de expansión.

4.2. DEFINICIÓN DE VARIABLES

Para abordar el problema de decidir bajo ambiente difuso la localización de un establecimiento industrial del sector automotor en Colombia, las variables definidas son las siguientes:

- Conjunto $U = \{u_r | r = 1, ..., T\}$ de términos lingüísticos para evaluar cada localización candidata

según el desempeño de sus atributos de acuerdo una serie de criterios:

Cuadro 4.1: Escala lingüística para evaluar el desempeño de cada localización candidata.

Variables lingüísticas
$u_0 = definitivamente\ bajo\ (DB)$
$u_1 = bajo\ (B)$
$u_2 = medio\ bajo\ (MB)$
$u_3 = medio\ (M)$
$u_4 = medio\ alto\ (MA)$
$u_5 = alto\ (A)$
$u_6 = definitivamente\ alto\ (DA)$

- Conjunto de términos lingüísticos $V = \{v_r | r = 1, ..., T\}$ definidos por el investigador usados para evaluar el peso de los atributos de las localizaciones candidatas.[1].

Cuadro 4.2: Escala lingüística para evaluar la importancia de los atributos de cada localización candidata.

Variables lingüísticas
$u_0 = absolutamente\ nimio\ (AN)$
$u_1 = muy\ nimio\ (MN)$
$u_2 = nimio\ (N)$
$u_3 = justo\ (J)$
$u_4 = importante\ (I)$
$u_5 = muy\ importante\ (MI)$
$u_6 = absolutamente\ importante\ (AI)$

- Conjunto discreto $P = \{p_i | i = 1, ..., m\}$ de m alternativas factibles de localización. Las alternativas candidatas son las nueve (9) áreas metropolitanas definidas por el DANE[2].

[1] Debido a dificultades prácticas para obtener esta información de individuos expertos en la realidad, las evaluaciones lingüísticas son simuladas por el investigador.

[2] De acuerdo a la ley 128 de 1994 en su artículo 1, las "Áreas Metropolitanas son entidades administrativas formadas por un conjunto de dos o más municipios integrados alrededor de un municipio núcleo o metrópoli, vinculados entre sí por estrechas relaciones de orden físico, económico y social, que para la programación y coordinación de su desarrollo y para la racional prestación de sus servicios públicos requiere una administración coordinada". Bajo esta definición y dado que la desagregación geográfica con la que el DANE publica la información más completa sobre la industria son las áreas metropolitanas, se trabajó con estas unidades geográficas. No obstante, se reconoce lo restrictivo en la definición de éstas áreas administrativas, ya que en muchos casos el alcance geográfico de la concentración industrial puede no necesariamente coincidir con los límites de las áreas metropolitanas o quizás podría desbordarlos, en tal caso debería considerarse una unidad económicamente representativa de tamaño superior o acorde con los alcances geográficos de la misma.

Cuadro 4.3: Conjunto P de localizaciones candidatas.

Áreas Metropolitanas
$p_1 = Barranquilla$
$p_2 = Bogotá$
$p_3 = Bucaramanga$
$p_4 = Cali$
$p_5 = Cartagena$
$p_6 = Manizales$
$p_7 = Medellín$
$p_8 = Pereira$
$p_9 = Cúcuta$

- Conjunto $A = \{A_j | j = 1, ..., n\}$ de n atributos. Los atributos definidos para evaluar el desempeño de cada área metropolitana son:

Cuadro 4.4: Conjunto A de atributos de las áreas metropolitanas.

Atributos
$A_1 = Beneficios$
$A_2 = Costos$
$A_3 = Gustos\ de\ los\ consumidores$
$A_4 = Posibilidades\ de\ expansión$
$A_5 = Interacción\ espacial$

Nótese que el atributo $A_5 = interacción\ espacial$ es el único atributo definido para evaluar el grado de interacción entre pares de áreas metropolitanas.

- Conjunto finito $C = \{C_l | l = 1, ..., q, q \geq 2\}$ de q criterios usados para evaluar cada atributo A_j de cada área metropolitana P_i. (ver tabla No. 4.5). Definiciones de cada criterio:[3]

[3]En la mayoría de las variables la información es del año 2005, sin embargo para algunas de ellas la información era escasa o no estaba disponible. Para ver las definiciones de cada criterios ver anexo.

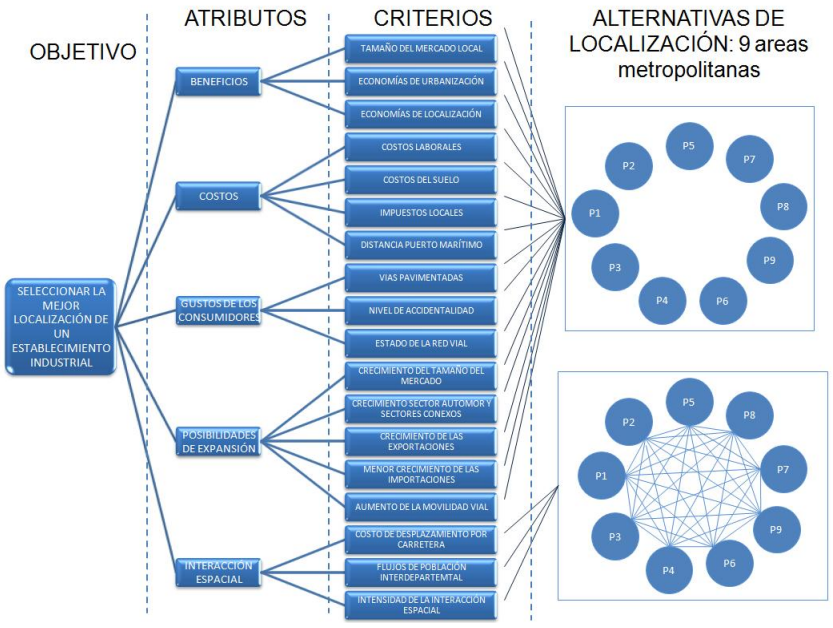
Cuadro 4.5: Conjunto C de criterios para evaluar cada atributo.

Atributos		Criterios
Atributos sin interacción	A_1	C_1: tamaño del mercado local
		C_2: economías de urbanización
		C_3: economías de localización
	A_2	C_1: costos laborales
		C_2: costos del suelo
		C_3: impuestos locales
		C_4: distancia a puerto marítimo más cercano
	A_3	C_1: vías pavimentadas
		C_2: accidentalidad vial
		C_3: estado de la red vial
	A_4	C_1: crecimiento del tamaño del mercado local
		C_2: crecimiento real del sector automotor y sectores conexos
		C_3: crecimiento de las exportaciones del sector automotor
		C_4: menor crecimiento de las importaciones del sector automotor
		C_5: aumento de la movilidad vial
Atributos con interacción	A_5	C_1: costos de inter-desplazamiento por carretera
		C_2: flujos de población inter-áreas metropolitanas
		C_3: Interacción espacial entre áreas metropolitanas

4.3. ANÁLISIS Y RESULTADOS

El diagrama jerárquico de figura No. 4.1 muestra la estructura del problema de decisión abordado:

Figura 4.1: Estructura del problema TDMC difuso



Una vez estandarizada la información de cada criterio usando la ecuación 3.1, se obtuvieron las matrices X_l (ver cuadro No. 4.7) y Y_l con base en la relación establecida entre los valores estandarizados y los términos lingüísticos definidos en el conjunto U (Cuadro No. 4.6). Respecto de las

matrices Y_l cuyos elementos son las evaluaciones lingüísticas del grado de interacción entre pares de áreas metropolitanas según determinado criterio de un atributo particular, la estandarización de la información se hizo por fila (Cuadro No. 4.8), puesto que el flujo de interacción en va en este sentido en los tres criterios (ver anexo en Cuadros No. 6.5, 6.6 y 6.7). Vale recordar que por facilidad computacional, $\tilde{y}_{iijl} = u_{\frac{T}{2}}$, lo cual no afectará el cálculo de los resultados.

Cuadro 4.6: Valores estandarizados, escala lingüística para evaluar el desempeño de las áreas metropolitanas y representación de números difusos triangulares

Rangos de valores estandarizados	Términos lingüísticos	Número Difuso Triangular
[0, 0.085]	$u_0 = bastante\ pobre\ (BP)$	(0, 0, 0.17)
(0.085, 0.25]	$u_1 = pobre\ (P)$	(0, 0.17, 0.33)
(0.25, 0.415]	$u_2 = medio\ pobre\ (MP)$	(0.17, 0.33, 0.5)
(0.415, 0.585]	$u_3 = medio\ (M)$	(0.33, 0.5, 0.67)
(0.585, 0.75]	$u_4 = medio\ bueno\ (MB)$	(0.5, 0.67, 0.83)
(0.75, 0.915]	$u_5 = bueno\ (B)$	(0.67, 0.83, 1)
(0.915, 1]	$u_6 = bastante\ bueno\ (BB)$	(0.83, 1, 1)

Cuadro 4.7: Valores estandarizados y matrices X_l.

Criterios	Áreas Metropolitanas	Atributos sin interacción								
		Valores estandarizados					Evaluaciones Lingüísticas			
		A_1	A_2	A_3	A_4		A_1	A_2	A_3	A_4
C_1	P_1	0.27	0.82	1.00	0.34		MB	A	DA	MB
	P_2	1.00	0.80	0.54	0.42		DA	A	M	M
	P_3	0.72	0.85	0.19	0.76		MA	A	B	A
	P_4	0.51	0.69	1.00	0.09		M	MA	DA	B
	P_5	0.25	0.75	0.81	0.92	$X_1 =$	MB	A	A	DA
	P_6	0.23	0.00	1.00	0.62		B	DB	DA	MA
	P_7	0.52	0.79	0.79	0.47		M	A	A	M
	P_8	0.27	0.99	0.00	1.00		MB	DA	DB	DA
	P_9	0.00	1.00	0.12	0.00		DB	DA	B	DB
C_2	P_1	1.00	0.00	1.00	0.57		DA	DB	DA	M
	P_2	0.63	0.44	0.85	0.30		MA	M	A	MB
	P_3	0.14	0.81	0.62	1.00		B	A	MA	DA
	P_4	0.19	0.81	0.00	0.27		B	A	DB	MB
	P_5	0.04	0.64	0.69	0.06	$X_2 =$	DB	MA	MA	DB
	P_6	0.00	1.00	0.64	0.09		DB	DA	MA	B
	P_7	0.70	0.20	0.16	0.08		MA	B	B	DB
	P_8	0.04	0.93	0.08	0.20		DB	DA	DB	B
	P_9	0.00	0.99	0.63	0.00		DB	DA	MA	DB
C_3	P_1	0.40	0.68	1.00	0.31		MB	MA	DA	MB
	P_2	0.68	0.00	0.17	0.00		MA	DB	B	DB
	P_3	0.11	0.70	0.39	0.22		B	MA	MB	B
	P_4	0.22	0.67	0.37	0.04		B	MA	MB	DB
	P_5	0.10	0.78	0.70	1.00	$X_3 =$	B	A	MA	DA
	P_6	0.07	0.77	0.52	0.12		DB	A	M	B
	P_7	1.00	0.30	0.47	0.20		DA	MB	M	B
	P_8	0.03	0.83	0.27	0.27		DB	A	MB	MB
	P_9	0.00	1.00	0.00	0.59		DB	DA	DB	MA
C_4	P_1	SC	1.00	SC	0.75		SC	DA	SC	A
	P_2	SC	0.10	SC	1.00		SC	B	SC	DA
	P_3	SC	0.17	SC	1.00		SC	B	SC	DA
	P_4	SC	0.80	SC	0.98		SC	A	SC	DA
	P_5	SC	1.00	SC	0.00	$X_4 =$	SC	DA	SC	DB
	P_6	SC	0.41	SC	0.57		SC	MB	SC	M
	P_7	SC	0.16	SC	0.96		SC	B	SC	DA
	P_8	SC	0.48	SC	0.81		SC	M	SC	A
	P_9	SC	0.00	SC	0.35		SC	DB	SC	MB
C_5	P_1	SC	SC	SC	0.61		SC	SC	SC	MA
	P_2	SC	SC	SC	0.18		SC	SC	SC	B
	P_3	SC	SC	SC	0.82		SC	SC	SC	A
	P_4	SC	SC	SC	1.00		SC	SC	SC	DA
	P_5	SC	SC	SC	0.00	$X_5 =$	SC	SC	SC	DB
	P_6	SC	SC	SC	0.68		SC	SC	SC	MA
	P_7	SC	SC	SC	0.46		SC	SC	SC	M
	P_8	SC	SC	SC	0.32		SC	SC	SC	MB
	P_9	SC	SC	SC	0.74		SC	SC	SC	MA

SC: sin criterio

La dominancia central del atributo con interacción entre áreas metropolitanas A_5 se obtuvo aplicando la ecuación No. 3.2 a los elementos de la matriz Y_l calculada mediante los valores estandarizados

Cuadro 4.8: Valores estandarizados y matrices Y_l.

		Atributos con interacción																			
		Valores estandarizados por fila										Evaluaciones lingüísticas									
		A_5										A_5									
C_l	P_i	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9
C_1	p_1	0.50	0.87	0.55	1.00	0.00	0.81	0.62	0.86	0.67		M	A	M	DA	DB	A	MA	A	MA
	p_2	1.00	0.50	0.00	0.37	1.00	0.10	0.19	0.02	0.82		DA	M	DB	MB	DA	B	B	DB	A
	p_3	0.49	0.50	0.50	1.00	0.64	0.66	0.75	0.64	0.00		M	M	M	DA	MA	MA	MA	MA	DB
	p_4	0.92	0.40	0.72	0.50	0.92	0.09	0.33	0.00	1.00		DA	MB	MA	M	DA	B	MB	DB	DA
	p_5	0.00	0.92	0.60	1.00	0.50	0.80	0.62	0.79	0.74	$Y_1 =$	DB	DA	MA	DA	M	A	MA	A	MA
	p_6	0.95	0.54	0.71	0.15	0.92	0.50	0.15	0.00	1.00		DA	M	MA	B	DA	M	B	DB	DA
	p_7	0.40	0.34	0.47	0.21	0.37	0.00	0.50	0.00	1.00		MB	MB	M	B	MB	DB	M	DB	DA
	p_8	0.93	0.46	0.64	0.05	0.90	0.00	0.24	0.50	1.00		DA	M	MA	DB	A	DB	B	M	DA
	p_9	0.48	0.56	0.00	1.00	0.57	0.72	0.76	0.74	0.50		M	M	DB	DA	M	MA	A	MA	M
C_2	p_1	0.50	1.00	0.34	0.15	0.45	0.00	0.42	0.01	0.07		M	DA	MB	B	M	DB	M	DB	DB
	p_2	0.09	0.50	0.94	1.00	0.00	0.22	0.93	0.18	0.06		B	M	DA	DA	DB	B	DA	B	DB
	p_3	0.09	1.00	0.50	0.06	0.08	0.00	0.20	0.00	0.35		B	DA	M	DB	DB	DB	B	DB	MB
	p_4	0.01	1.00	0.04	0.50	0.02	0.25	0.59	0.79	0.00		DB	DA	DB	M	DB	B	MA	A	DB
	p_5	0.98	1.00	0.43	0.10	0.50	0.00	0.58	0.01	0.14	$Y_2 =$	DA	DA	M	B	M	DB	M	DB	B
	p_6	0.00	0.84	0.04	0.52	0.00	0.50	0.66	1.00	0.01		DB	A	DB	M	DB	M	MA	DA	DB
	p_7	0.17	1.00	0.26	0.73	0.23	0.33	0.50	0.00	0.06		B	DA	MB	MA	B	MB	M	DB	DB
	p_8	0.02	0.40	0.03	1.00	0.00	0.68	0.49	0.50	0.01		DB	MB	DB	DA	DB	MA	M	M	DB
	p_9	0.08	0.66	1.00	0.10	0.03	0.00	0.16	0.01	0.50		DB	MA	DA	B	DB	DB	B	DB	M
C_3	p_1	0.50	1.00	0.15	0.24	0.97	0.00	0.55	0.02	0.05		M	DA	B	B	DA	DB	M	DB	DB
	p_2	0.14	0.50	0.26	0.73	0.00	0.14	1.00	0.21	0.07		B	M	MB	MA	DB	B	DA	B	DB
	p_3	0.10	1.00	0.50	0.13	0.02	0.00	0.39	0.01	0.15		B	DA	M	B	DB	DB	MB	DB	B
	p_4	0.05	1.00	0.03	0.50	0.00	0.08	0.43	0.16	0.00		DB	DA	DB	M	DB	DB	M	B	DB
	p_5	1.00	0.44	0.06	0.13	0.50	0.00	0.31	0.01	0.02	$Y_3 =$	DA	M	DB	B	M	DB	MB	DB	DB
	p_6	0.04	1.00	0.04	0.37	0.00	0.50	0.63	0.53	0.00		DB	DA	DB	MB	DB	M	MA	M	DB
	p_7	0.07	1.00	0.08	0.30	0.01	0.09	0.50	0.12	0.00		DB	DA	DB	MB	DB	B	M	B	DB
	p_8	0.04	1.00	0.03	0.48	0.00	0.41	0.59	0.50	0.00		DB	DA	DB	M	DB	MB	MA	M	DB
	p_9	0.12	1.00	0.35	0.16	0.02	0.00	0.39	0.01	0.50		B	DA	MB	B	DB	DB	MB	DB	M
C_4	p_1	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_2	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_3	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_4	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_5	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	$Y_4 =$	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_6	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_7	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_8	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_9	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
C_5	p_1	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_2	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_3	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_4	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_5	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	$Y_5 =$	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_6	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_7	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_8	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC
	p_9	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC		SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC	SC

por **fila** y aplicando la ecuación No. 3.3 a los elementos de la matriz Y_l calculada mediante los valores estandarizados por **columna**.

Cuadro 4.9: Dominancia central de cada área metropolitana según los criterios C_1, C_2 y C_3 del atributo A_5

Criterios	Áreas Metropolitanas	Dominancia Central r_{i5l}
C_1	p_1	(0.5, 0.65, 0.77)
	p_2	(0.35, 0.5, 0.64)
	p_3	(0.38, 0.52, 0.68)
	p_4	(0.42, 0.57, 0.67)
	p_5	(0.52, 0.67, 0.79)
	p_6	(0.35, 0.49, 0.63)
	p_7	(0.26, 0.41, 0.56)
	p_8	(0.34, 0.45, 0.6)
	p_9	(0.51, 0.66, 0.78)
C_2	p_1	(0.18, 0.28, 0.43)
	p_2	(0.48, 0.63, 0.72)
	p_3	(0.22, 0.32, 0.46)
	p_4	(0.29, 0.41, 0.55)
	p_5	(0.18, 0.28, 0.43)
	p_6	(0.2, 0.3, 0.46)
	p_7	(0.29, 0.44, 0.58)
	p_8	(0.22, 0.31, 0.46)
	p_9	(0.12, 0.2, 0.35)
C_3	p_1	(0.19, 0.3, 0.44)
	p_2	(0.46, 0.61, 0.7)
	p_3	(0.11, 0.2, 0.36)
	p_4	(0.18, 0.32, 0.47)
	p_5	(0.21, 0.3, 0.45)
	p_6	(0.15, 0.23, 0.39)
	p_7	(0.26, 0.39, 0.54)
	p_8	(0.16, 0.25, 0.41)
	p_9	(0.1, 0.18, 0.34)

A continuación se muestran las matrices $\hat{D}_l$ de decisión integrada para cada criterio C_l de acuerdo a la ecuación No. 3.9:

Cuadro 4.10: Matriz de decisión integrada obtenida a partir del criterio C_1

$\hat{D}_1 =$

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
p_1	(0.17, 0.33, 0.5)	(0.67, 0.83, 1)	(0.83, 1, 1)	(0.17, 0.33, 0.5)	(0.5, 0.65, 0.77)
p_2	(0.83, 1, 1)	(0.67, 0.83, 1)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.35, 0.5, 0.64)
p_3	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.67, 0.83, 1)	(0, 0.17, 0.33)	(0.67, 0.83, 1)	(0.38, 0.52, 0.68)
p_4	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.83, 1, 1)	(0, 0.17, 0.33)	(0.42, 0.57, 0.67)
p_5	(0.17, 0.33, 0.5)	(0.67, 0.83, 1)	(0.67, 0.83, 1)	(0.83, 1, 1)	(0.52, 0.67, 0.79)
p_6	(0, 0.17, 0.33)	(0, 0, 0.17)	(0.83, 1, 1)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.35, 0.49, 0.63)
p_7	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.67, 0.83, 1)	(0.67, 0.83, 1)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.26, 0.41, 0.56)
p_8	(0.17, 0.33, 0.5)	(0.83, 1, 1)	(0, 0, 0.17)	(0.83, 1, 1)	(0.34, 0.45, 0.6)
p_9	(0, 0, 0.17)	(0.83, 1, 1)	(0, 0.17, 0.33)	(0, 0, 0.17)	(0.51, 0.66, 0.78)

Cuadro 4.11: Matriz de decisión integrada obtenida a partir del criterio C_2

$\hat{D}_2 =$

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
p_1	(0.83, 1, 1)	(0, 0, 0.17)	(0.83, 1, 1)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.18, 0.28, 0.43)
p_2	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.67, 0.83, 1)	(0.17, 0.33, 0.5)	(0.48, 0.63, 0.72)
p_3	(0, 0.17, 0.33)	(0.67, 0.83, 1)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.83, 1, 1)	(0.22, 0.32, 0.46)
p_4	(0, 0.17, 0.33)	(0.67, 0.83, 1)	(0, 0, 0.17)	(0.17, 0.33, 0.5)	(0.29, 0.41, 0.55)
p_5	(0, 0, 0.17)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0, 0, 0.17)	(0.18, 0.28, 0.43)
p_6	(0, 0, 0.17)	(0.83, 1, 1)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0, 0.17, 0.33)	(0.2, 0.3, 0.46)
p_7	(0.5, 0.67, 0.83)	(0, 0.17, 0.33)	(0, 0.17, 0.33)	(0, 0, 0.17)	(0.29, 0.44, 0.58)
p_8	(0, 0, 0.17)	(0.83, 1, 1)	(0, 0, 0.17)	(0, 0.17, 0.33)	(0.22, 0.31, 0.46)
p_9	(0, 0, 0.17)	(0.83, 1, 1)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0, 0, 0.17)	(0.12, 0.2, 0.35)

Cuadro 4.12: Matriz de decisión integrada obtenida a partir del criterio C_3

$\hat{D}_3 =$

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
p_1	(0.17, 0.33, 0.5)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.83, 1, 1)	(0.17, 0.33, 0.5)	(0.19, 0.3, 0.44)
p_2	(0.5, 0.67, 0.83)	(0, 0, 0.17)	(0, 0.17, 0.33)	(0, 0, 0.17)	(0.46, 0.61, 0.7)
p_3	(0, 0.17, 0.33)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.17, 0.33, 0.5)	(0, 0.17, 0.33)	(0.11, 0.2, 0.36)
p_4	(0, 0.17, 0.33)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.17, 0.33, 0.5)	(0, 0, 0.17)	(0.18, 0.32, 0.47)
p_5	(0, 0.17, 0.33)	(0.67, 0.83, 1)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.83, 1, 1)	(0.21, 0.3, 0.45)
p_6	(0, 0, 0.17)	(0.67, 0.83, 1)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0, 0.17, 0.33)	(0.15, 0.23, 0.39)
p_7	(0.83, 1, 1)	(0.17, 0.33, 0.5)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0, 0.17, 0.33)	(0.26, 0.39, 0.54)
p_8	(0, 0, 0.17)	(0.67, 0.83, 1)	(0.17, 0.33, 0.5)	(0.17, 0.33, 0.5)	(0.16, 0.25, 0.41)
p_9	(0, 0, 0.17)	(0.83, 1, 1)	(0, 0, 0.17)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.1, 0.18, 0.34)

Cuadro 4.13: Matriz de decisión integrada obtenida a partir del criterio C_4

$\hat{D}_4 =$

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
p_1	SC	(0.83, 1, 1)	SC	(0.67, 0.83, 1)	SC
p_2	SC	(0, 0.17, 0.33)	SC	(0.83, 1, 1)	SC
p_3	SC	(0, 0.17, 0.33)	SC	(0.83, 1, 1)	SC
p_4	SC	(0.67, 0.83, 1)	SC	(0.83, 1, 1)	SC
p_5	SC	(0.83, 1, 1)	SC	(0, 0, 0.17)	SC
p_6	SC	(0.17, 0.33, 0.5)	SC	(0.33, 0.5, 0.67)	SC
p_7	SC	(0, 0.17, 0.33)	SC	(0.83, 1, 1)	SC
p_8	SC	(0.33, 0.5, 0.67)	SC	(0.67, 0.83, 1)	SC
p_9	SC	(0, 0, 0.17)	SC	(0.17, 0.33, 0.5)	SC

Cuadro 4.14: Matriz de decisión integrada obtenida a partir del criterio C_5

$\hat{D}_5 =$

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
p_1	SC	SC	SC	(0.5, 0.67, 0.83)	SC
p_2	SC	SC	SC	(0, 0.17, 0.33)	SC
p_3	SC	SC	SC	(0.67, 0.83, 1)	SC
p_4	SC	SC	SC	(0.83, 1, 1)	SC
p_5	SC	SC	SC	(0, 0, 0.17)	SC
p_6	SC	SC	SC	(0.5, 0.67, 0.83)	SC
p_7	SC	SC	SC	(0.33, 0.5, 0.67)	SC
p_8	SC	SC	SC	(0.17, 0.33, 0.5)	SC
p_9	SC	SC	SC	(0.5, 0.67, 0.83)	SC

El cuadro No. 4.15 muestra la matriz de decisión integrada agrupada $\hat{D}$, obtenida mediante la ecuación No. 3.14.

Cuadro 4.15: Matriz de decisión integrada agrupada $\hat{D}$

$\hat{D} =$

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
p_1	(0.39, 0.55, 0.67)	(0.5, 0.62, 0.75)	(0.83, 1, 1)	(0.37, 0.53, 0.7)	(0.29, 0.41, 0.54)
p_2	(0.61, 0.78, 0.89)	(0.25, 0.37, 0.54)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.27, 0.4, 0.53)	(0.43, 0.58, 0.69)
p_3	(0.17, 0.34, 0.5)	(0.46, 0.62, 0.79)	(0.22, 0.39, 0.55)	(0.6, 0.77, 0.87)	(0.24, 0.35, 0.5)
p_4	(0.11, 0.28, 0.44)	(0.58, 0.75, 0.91)	(0.33, 0.44, 0.56)	(0.37, 0.5, 0.6)	(0.3, 0.43, 0.56)
p_5	(0.06, 0.17, 0.33)	(0.67, 0.83, 0.96)	(0.56, 0.72, 0.89	(0.33, 0.4, 0.50)	(0.3, 0.41, 0.55)
p_6	(0, 0.06, 0.22)	(0.42, 0.54, 0.67)	(0.55, 0.72, 0.83)	(0.27, 0.44, 0.6)	(0.23, 0.34, 0.49)
p_7	(0.55, 0.72, 0.83)	(0.21, 0.37, 0.54)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.3, 0.43, 0.57)	(0.27, 0.41, 0.56)
p_8	(0.06, 0.11, 0.28)	(0.66, 0.83, 0.92)	(0.06, 0.11, 0.28)	(0.37, 0.53, 0.67)	(0.24, 0.34, 0.49)
p_9	(0, 0, 0.17)	(0.62, 0.75, 0.79)	(0.17, 0.28, 0.44)	(0.23, 0.33, 0.5)	(0.24, 0.34, 0.49)

Cuadro 4.16: Escala lingüística para evaluar la importancia de los atributos y representación en números difusos triangulares

Términos lingüísticos	Número Difuso Triangular
$u_0 = absolutamente\ nimio\ (AN)$	(0, 0, 0.17)
$u_1 = muy\ nimio\ (MN)$	(0, 0.17, 0.33)
$u_2 = nimio\ (N)$	(0.17, 0.33, 0.5)
$u_3 = justo\ (J)$	(0.33, 0.5, 0.67)
$u_4 = importante\ (I)$	(0.5, 0.67, 0.83)
$u_5 = muy\ importante\ (MI)$	(0.67, 0.83, 1)
$u_6 = absolutamente\ importante\ (AI)$	(0.83, 1, 1)

La metodología de Fan and Feng (2009) y en general del TOPSIS difuso asume que la importancia o el peso de cada uno de los cinco atributos es asignada por un número de individuos expertos igual al número de criterios para evaluar cada atributo, en este caso $l = 5$. A continuación se muestra unos vectores de pesos $\hat{W}_l$ **simulados** de acuerdo a los términos lingüísticos definidos para tal efecto y su correspondiente expresión en números difusos triangulares. Nótese que se han asignado pesos importantes a los atributos de beneficios y costos, pesos medios al de gustos de los consumidores y pesos bajos a las posibilidades de expansión e interacción espacial. En la parte inferior se incluye el vector agrupado de pesos de atributos $\hat{W}$ calculado mediante las ecuaciones No. 3.10, 3.11, 3.12 y 3.13 (ver cuadro No. 4.17):

La matriz de decisión integrada agrupada ponderada $\hat{E}$ es calculada mediante las ecuaciones 3.18, 3.19, 3.20, 3.21 y 3.22. (ver Cuadro No. 4.18)

Cuadro 4.17: Vectores de pesos asignados por cada experto l a los atributos

	Evaluaciones Lingüísticas					Expresión en Números Difusos Triangulares				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\hat{W}_1 =$	AI	AI	J	I	N	(0.83, 1, 1)	(0.83, 1, 1)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.17, 0.33, 0.5)
$\hat{W}_2 =$	I	MI	N	AI	J	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.67, 0.83, 1)	(0.17, 0.33, 0.5)	(0.83, 1, 1)	(0.33, 0.5, 0.67)
$\hat{W}_3 =$	MI	I	AI	J	I	(0.67, 0.83, 1)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.83, 1, 1)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.5, 0.67, 0.83)
$\hat{W}_4 =$	MI	I	AI	J	I	(0.67, 0.83, 1)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.83, 1, 1)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.5, 0.67, 0.83)
$\hat{W}_5 =$	I	I	MI	J	N	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.5, 0.67, 0.83)	(0.67, 0.83, 1)	(0.33, 0.5, 0.67)	(0.17, 0.33, 0.5)

Vector agrupado de pesos de atributos

$\hat{W} =$	(0.63, 0.8, 0.93)	(0.6, 0.77, 0.9)	(0.57, 0.73, 0.83)	(0.46, 0.63, 0.77)	(0.33, 0.5, 0.67)

Cuadro 4.18: Matriz de decisión integrada agrupada ponderada $\hat{E}$

$\hat{E} =$

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
p_1	(0.25, 0.44, 0.62)	(0.3, 0.48, 0.67)	(0.47, 0.73, 0.83)	(0.17, 0.34, 0.54)	(0.1, 0.2, 0.36)
p_2	(0.39, 0.62, 0.83)	(0.15, 0.29, 0.49)	(0.19, 0.37, 0.56)	(0.12, 0.25, 0.41)	(0.14, 0.29, 0.46)
p_3	(0.11, 0.27, 0.46)	(0.28, 0.48, 0.71)	(0.13, 0.29, 0.46)	(0.28, 0.49, 0.67)	(0.08, 0.17, 0.33)
p_4	(0.07, 0.22, 0.41)	(0.35, 0.58, 0.82)	(0.19, 0.32, 0.46)	(0.17, 0.32, 0.46)	(0.1, 0.21, 0.37)
p_5	(0.04, 0.13, 0.31)	(0.4, 0.64, 0.86)	(0.32, 0.53, 0.74)	(0.15, 0.25, 0.39)	(0.1, 0.21, 0.37)
p_6	(0, 0.05, 0.21)	(0.25, 0.41, 0.6)	(0.31, 0.53, 0.7)	(0.12, 0.28, 0.46)	(0.08, 0.17, 0.33)
p_7	(0.35, 0.58, 0.78)	(0.13, 0.29, 0.48)	(0.19, 0.37, 0.56)	(0.14, 0.28, 0.44)	(0.09, 0.21, 0.37)
p_8	(0.04, 0.09, 0.26)	(0.4, 0.64, 0.82)	(0.03, 0.08, 0.23)	(0.17, 0.34, 0.51)	(0.08, 0.17, 0.33)
p_9	(0, 0, 0.16)	(0.37, 0.58, 0.71)	(0.09, 0.2, 0.37)	(0.11, 0.21, 0.38)	(0.08, 0.17, 0.33)

La SIPD (S^+) y SIND (S^-) son determinadas mediante las ecuaciones 3.23 y 3.24, respectivamente, de la siguiente manera:

$$S^+ = ((1,1,1),(1,1,1),(1,1,1),(1,1,1),(1,1,1))$$

$$S^+ = ((0,0,0),(0,0,0),(0,0,0),(0,0,0),(0,0,0))$$

Las distancias de cada área metropolitana a la SIPD y a la SIND se calculan mediante las ecuaciones No. 3.25, 3.26, 3.27 y 3.28. Mientras que los coeficientes de cercanía relativa CR_i se obtienen a través de la ecuación No. **??**. Los resultados de ambos cálculos son mostrados en el Cuadro No. 4.19.

Cuadro 4.19: Distancias de cada área metropolitana a la SIPD y a la SIND y coeficiente de cercanía relativa CR_i.

Áreas Metropolitanas		Distancias		
		d_i^+	d_i^-	RC_i
BARRANQUILLA	p_1	2.93	2.29	0.44
BOGOTÁ	p_2	3.24	1.99	0.38
BUCARAMANGA	p_3	3.36	1.88	0.36
CALI	p_4	3.39	1.83	0.35
CARTAGENA	p_5	3.29	1.94	0.37
MANIZALES	p_6	3.57	1.64	0.31
MEDELLÍN	p_7	3.34	1.89	0.36
PEREIRA	p_8	3.67	1.53	0.29
CÚCUTA	p_9	3.79	1.39	0.27

De acuerdo al coeficiente de cercanía relativa CR_i de cada área metropolitana, el orden de clasificación de estas alternativas de localización es el siguiente: $P_1 \succ P_2 \succ P_5 \succ P_3 \succ P_7 \succ P_4 \succ P_6 \succ P_8 \succ P_9$. De esta manera, la mejor área metropolitana para localizar un establecimiento industrial del sector automotor es la de Barranquilla. No obstante, si quisiéramos alterar los vectores de pesos de los atributos $\hat{W}_l$, este resultado podría variar.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

- La implementación de la metodología de TDMC difusa en un caso práctico, como el de indagar sobre la mejor localización para un establecimiento industrial del sector automotor, mostró que la información cuantitativa con características borrosas o imprecisas puede ser modelada de manera precisa mediante conjuntos difusos y evaluada cualitativamente a través de un conjunto de términos lingüísticos formalmente definido. Es una metodología alternativa, que permite a la industria tomar decisiones de localización o relocalización basada en información imprecisa, que es como se presenta la información en el mundo real.

- Este estudio presentó la combinación y la comparación de información imprecisa sobre un conjunto de variables, tales como los beneficios, los costos, los gustos de los consumidores, las posibilidades de expansión y la interdependencia entre distintas áreas metropolitanas, con el fin de evaluar la mejor localización de un establecimiento industrial para el sector automotor. Esto permitió obtener comparativamente como mejor alternativa de localización al área metropolitana de Barranquilla. Es decir, que esta localización mostró el mejor desempeño según el conjunto de atributos considerado, respecto de las demás áreas metropolitanas. Aún cuando la ponderación de dichas variables se alteró, este resultado se mantuvo, pero el orden de clasificación de las distintas áreas metropolitanas si cambió. Lo cual revela que independientemente de la importancia que tenga uno u otro atributo para influir la decisión de localización, el área metropolitana de Barranquilla sigue siendo la mejor alternativa de localización.

- La metodología explorada en esta investigación observó la validez de la TDMC difusa como una metodología alternativa, menos explorada y quizás más sencilla, para el tratamiento y modelamiento de información sobre variables que pueden ser tomadas como determinantes de las decisiones de localización industrial a nivel micro, es decir, a nivel de empresa o establecimiento industrial. Esto se afirma, sin desconocer la valor y la pertinencia de las metodologías existentes basadas en la teoría de la probabilidad, en particular la econometría espacial y los índices de concentración industrial para medir los patrones de distribución y de localización de la industria a nivel macro, a partir de los postulados que ofrece la Nueva Geografía Económica sobre los alcances industrial, geográfico y temporal de las economías de aglomeración (Duranton and Overman, 2005; Ellison and Glaeser, 1997; Rosenthal and Strange, 2004). Es decir, los problemas que aborda cada enfoque son distintos pero se relacionan al menos en los postulados básicos

de la Nueva Geografía Económica, de tal manera que las metodologías aplicadas responden igualmente a problemas de diferente naturaleza sobre el modelamiento de la incertidumbre en los problemas de la localización industrial.

- El modelo de decisión aplicado no puede considerarse como completo dadas las variables que se combinaron, pues como lo señala la literatura sobre la metodología de TDMC difuso y en general sobre control e inferencia difusa, la robustez de estos modelos depende en gran medida del conocimiento experto que se tenga sobre el problema modelado. En particular, se podría pensar en el uso de variables adicionales para mejorar la capacidad estimativa del modelo de decisión, según lo pudiera recomendar un individuo o conjunto de individuos expertos. Por ejemplo, los costos de la energía, la ética de los trabajadores o la calidad de vida en cada área metropolitana pueden ser así mismo determinantes de las decisiones de localización industrial. No obstante, las variables usadas funcionaron como un buen indicador para orientar la mejor decisión, y es susceptible de mejorar.
- A este respecto se recomienda como agenda futura de investigación:
  - Adicionar variables al modelo de decisión que, según la literatura sobre determinantes de la localización o conocimiento experto, puedan influir en este tipo de decisiones.
  - Aplicar otras metodologías para TDMC difuso y comparar si los resultados se mantienen o no, destacando puntualmente las ventajas y las desventajas.
  - Desarrollar un esquema de análisis de sensibilidad para observar cómo cambia el resultado cuando cambian los vectores de pesos de los atributos.
  - Incluir en la metodología de desarrollo un vector de pesos que evalúe la importancia de las opiniones de los expertos. En muchos procesos de decisión el grado de experiencia o de conocimiento de un experto puede influir en el resultado final.
  - Aplicar esta misma metodología en otros campos, como competitividad regional, desarrollo de productos, alianzas organizacionales o decisiones de localización de aeropuertos, hospitales, zonas francas, zonas industriales, etc.
  - Desarrollar formalmente una propuesta que involucre esta metodología con procesos de decisión multi-etapa.

Capítulo 6

ANEXOS

Cuadro 6.1: Beneficios.

Área Metropolitana	Ingreso percápita ($)	Economías de Urbanización	Economías de Localización
Barranquilla	4,649,304	8.648438	0.130859
Bogotá	9,058,230	5.693711	0.215979
Bucaramanga	7,380,165	1.749584	0.037914
Cali	6,121,554	2.140519	0.072216
Cartagena	4,557,110	1.001478	0.036119
Manizales	4,394,479	0.649072	0.025314
Medellín	6,146,161	6.286942	0.316151
Pereira	4,655,358	1.006514	0.014299
Cúcuta	3,035,058	0.646651	0.005040
FUENTE:	DANE: cuentas departamentales	- DANE: Encuesta Anual Manufacturera e Informes de Coyuntura Económica Regional de 2000 a 2005. - Páginas web de los municipios.	- DANE: Encuesta Anual Manufacturera. - Páginas web de los municipios.
DEFINICIÓN:	Producto interno bruto del departamento, por habitante a precios constantes de 2000 /2000 - 2007p.	Número de establecimientos industriales y de servicios por km^2 a dos dígitos según CIIU Rev. 3 A.C. En el sector servicios se incluyeron los siguientes sectores: suministro de luz, gas y agua; transporte; intermediación financiera; hoteles y restaurantes; actividades inmobiliarias y de alquiles; administración pública y defensa; servicios sociales y de salud; educación; y otros servicios. Número de establecimientos del sector servicios se toma como la suma del número sociedades constituidas y renovadas menos las liquidadas por año entre 2000 y 2005 de los sectores de servicios. Dado que la cámara de comercio de Bogotá y Barranquilla no ha reportado al DANE las sociedades renovadas por año, solo se tuvo en cuenta las sociedades constituidas y las liquidadas. Para Cali se tomaron los años 2004 a 2007 pues para los años anteriores la información no estaba disponible.	Número de establecimientos industriales del sector automotor y de los sectores de metal-mecánica, petroquímica (plástico y caucho) y textiles por km^2 a dos dígitos CIIU Rev. 3 A.C. (La cadena productiva del sector automotor involucra artículos producidos de las cadenas productivas de estos sectores).

Cuadro 6.2: Costos

Área Metropolitana	Costos laborales	Costos del suelo	Impuestos por persona	Distancia a puerto marítimo más cercano
Barranquilla	22,104.721609	3,455.740234	0.178132	0
Bogotá	23,133.304739	2,099.727977	0.386801	568
Bucaramanga	20,468.551267	947.244313	0.173431	525
Cali	27,955.598128	947.655283	0.182014	128
Cartagena	25,193.478448	1,465.350517	0.148247	0
Manizales	59,718.584973	341.390703	0.151940	371
Medellín	23,560.967111	2,840.627148	0.296316	527
Pereira	14,023.052743	550.377344	0.134800	326
Cúcuta	13,710.268657	375.540682	0.081397	629
FUENTE:	DANE: Encuesta Anual Manufacturera	DANE - Proyecciones de población por municipios. 2005-2020 - Páginas web de los municipios.	DANE: Informes de coyuntura económica regional 2005 o 2006 y proyecciones de población por municipios. 2005-2020	INVÍAS: mapa de la red vial de Colombia.
DEFINICIÓN:	Sueldos e ingresos salariales más prestaciones sociales por trabajador del sector automotor y de los sectores de metal-mecánica, petroquímica (plástico y caucho) y textiles en 2005.	Densidad poblacional por km^2.	Gastos tributarios por persona. Situación fiscal de los gobiernos centrales distritales o municipales. Ingresos tributarios sobre total de habitantes. Cifras en Millones de pesos. Para Bogotá la fuente es la Secretaria de Hacienda del Distrito. Para Cartagena, Pereira y Dosquebradas la fuente es Ministerio de Hacienda.	Distancia en km. Los principales puertos marítimos son: Barranquilla, Buenaventura, Santa Marta y Cartagena. Al puerto de Buevaventura se sumó la distancia hasta Cali y de ahí hasta Buenaventura.

Cuadro 6.3: Gustos de los consumidores.

Área Metropolitana	Vías pavimentadas	Accidentalidad vial	Estado de la red vial
Barranquilla	1.000000	7.686486	0.913013
Bogotá	0.838976	8.825616	0.432170
Bucaramanga	0.716915	10.640894	0.560108
Cali	1.000000	15.466284	0.546726
Cartagena	0.933567	10.083525	0.737659
Manizales	1.000000	10.456930	0.635210
Medellín	0.927382	14.184226	0.603470
Pereira	0.649093	14.866884	0.489950
Cúcuta	0.689990	10.602618	0.333113
FUENTE:	Ministerio de Transporte: caracterización del transporte en Colombia - 2005. Cuadro: Estado de la red nacional.	- Fondo de prevención vial: accidentalidad vial en Colombia 2007. - DANE: proyecciones de población por municipios. 2005-2020	Ministerio de Transporte: caracterización del transporte en Colombia - 2005. Cuadro: Estado de la red nacional.
DEFINICIÓN:	Kilómetros de vías pavimentadas sobre el total de kilómetros de la red vial.	Lesiones fatales por accidentes de tránsito por cada 100.000 habitantes.	Porcentaje de vías pavimentadas en buen estado sobre el total de vías pavimentadas de la red vial.

Cuadro 6.4: Posibilidades de expansión.

Área Metropolitana	Crecimiento del tamaño del mercado local	Crecimiento real del sector automotor y sectores conexos	Crecimiento de las exportaciones del sector	Menor crecimiento de las importaciones del sector	Aumento de la movilidad vial
Barranquilla	0.026767	0.288709	0.694109	0.499658	0.007276
Bogotá	0.029574	0.191052	0.116942	0.237638	-0.003091
Bucaramanga	0.042011	0.448486	0.539708	0.235106	0.012446
Cali	0.017849	0.179921	0.185904	0.258372	0.016719
Cartagena	0.047677	0.104303	2.006990	1.314816	-0.007417
Manizales	0.036990	0.115779	0.350153	0.703091	0.008947
Medellín	0.031634	0.108789	0.496179	0.282315	0.003602
Pereira	0.050446	0.153135	0.630293	0.441929	0.000379
Cúcuta	0.014652	0.081079	1.231320	0.938224	0.010485
FUENTE:	DANE: cuentas departamentales	DANE: Encuesta Anual Manufacturera.	DIAN: Sistema Estadístico de Comercio Exterior - SIEX.	DIAN: Sistema Estadístico de Comercio Exterior - SIEX.	DANE: Transporte urbano y de pasajeros.
DEFINICIÓN:	Aumento promedio del ingreso por persona en los últimos cinco años 2001-2005.	Aumento promedio del valor agregado de los sectores automotor, metal-mecánica, petroquímica y textil en los últimos cinco años. EAM - sistema de consulta. Variables principales según áreas metropolitanas y grupos industriales de 2002 a 2007. Promedio del crecimiento anual % del valor agregado del sector automotor y conexos de 2003 a 2007.	Aumento promedio de las exportaciones del sector construcción de equipo y material de transporte CIIU Rev. 2 (384) durante los últimos seis años. 2000 a 2005. Exportaciones departamentales.	Aumento promedio de las importaciones del sector construcción de equipo y material de transporte CIIU Rev. 2 (384) durante los últimos seis años. Importaciones departamentales.	Aumento promedio de kilómetros recorridos por el transporte urbano de pasajeros durante los últimos siete años. Sistema de Consulta. Kilómetros recorridos en el mes. Información trimestral desde I-1999 a IV-2005.

Cuadro 6.5: Costos de desplazamiento entre áreas metropolitanas.

origen\destino	Barranquilla	Bogotá	Bucaramanga	Cali	Cartagena	Manizales	Medellín	Pereira	Cúcuta
Barranquilla	-	123,723	91,090	137,667	33,665	118,157	98,663	122,884	102,989
Bogotá	81,214	-	57,715	66,296	81,214	59,973	62,168	58,259	76,934
Bucaramanga	70,868	71,006	-	100,983	79,580	80,933	86,121	79,377	41,560
Cali	118,850	73,897	101,422	-	118,850	47,232	67,474	39,341	125,363
Cartagena	29,992	127,089	93,730	135,408	-	113,805	94,938	113,085	108,233
Manizales	97,658	70,952	82,143	45,913	95,343	-	46,346	36,398	100,670
Medellín	68,028	65,042	71,296	58,357	66,598	47,557	-	47,778	98,374
Pereira	103,470	68,309	81,375	37,366	101,273	33,665	51,956	-	108,615
Cúcuta	79,159	85,031	43,276	118,050	85,840	97,003	99,801	98,375	-

Fuente: Ministerio de Transporte - Diagnostico del transporte den 2008. Resolución 3175 de agosto de 2008. la cual fija los valores que los transportadores deben cobrar por la movilización de carga dentro del territorio nacional: $ / tonelada según la relación origen-destino de la carga, teniendo en cuenta todos los componentes de los estudios de estructuración de costos.

Cuadro 6.6: Flujos de población entre áreas metropolitanas.

antes/ahora	Barranquilla	Bogotá	Bucaramanga	Cali	Cartagena	Manizales	Medellín	Pereira	Cúcuta
Barranquilla	1,822,715	13,147	4,673	2,268	6,099	346	5,716	533	1,304
Bogotá	4,666	5,652,316	15,510	16,334	3,563	6,435	15,383	5,913	4,385
Bucaramanga	2,787	24,127	1,641,570	2,111	2,540	696	5,286	650	8,838
Cali	1,132	20,488	1,744	3,521,829	1,376	5,781	12,441	16,293	944
Cartagena	11,163	11,331	4,979	1,358	1,558,501	248	6,665	379	1,785
Manizales	258	14,454	1,009	8,948	305	769,894	11,425	17,126	346
Medellín	3,594	18,585	5,289	13,707	4,638	6,468	4,820,244	533	1,596
Pereira	353	4,592	465	11,210	182	7,675	5,611	713,267	257
Cúcuta	1,289	8,701	12,951	1,539	741	325	2,335	408	1,036,493

Número de personas que cambiaron el departamento de residencia por lo menos cinco años antes, según departamento de residencia actual.

Fuente: DANE - Censo 2005.

Cuadro 6.7: Interacción espacial entre áreas metropolitanas.

	Barranquilla	Bogotá	Bucaramanga	Cali	Cartagena	Manizales	Medellín	Pereira	Cúcuta
Barranquilla		14,824	3,185	4,372	14,356	1,080	8,616	1,393	1,739
Bogotá	14,824		21,468	48,087	6,688	14,658	63,437	18,717	10,419
Bucaramanga	3,185	21,468		3,663	1,440	1,073	9,056	1,297	4,038
Cali	4,372	48,087	3,663		2,349	5,766	22,075	9,321	2,125
Cartagena	14,356	6,688	1,440	2,349		575	4,814	760	807
Manizales	1,080	14,658	1,073	5,766	575		9,503	8,098	567
Medellín	8,616	63,437	9,056	22,075	4,814	9,503		11,397	4,376
Pereira	1,393	18,717	1,297	9,321	760	8,098	11,397		701
Cúcuta	1,739	10,419	4,038	2,125	807	567	4,376	701	

El índice de interacción espacial se define como el producto de las poblaciones de cada área metropolitana sobre la distancia por carretera en kilómetros al cuadrado. Cifras en millones.

Fuente: INVÍAS - Mapa vial de Colombia y DANE - Censo 2005.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Algunas Propiedades De Conjuntos Difusos

- **Soporte.** El soporte de un conjunto difuso A es un conjunto:

$$S(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \tag{A.1}$$

  En este caso el símbolo | significa "tal que". Si $\mu_A(x) = constante$ sobre $S(A)$, entonces A es no difuso.

- **Conjunto** $\alpha - corte$**.** El conjunto $\alpha - corte$ A_α se compone de los elementos cuya pertenencia es mayor o igual a α.

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \tag{A.2}$$

  nótese que α es arbitrario. El conjunto $\alpha - corte$ es un conjunto nítido.

- **Conjunto nivel.** El valor α que explícitamente muestra el valor de la función de pertenencia, está en el rango $[0, 1]$. El conjunto nivel es obtenido mediante los $\alpha's$. Es decir,

$$\Lambda_A = \{\alpha \mid \mu_A(x) = \alpha, \alpha \geq 0, x \in X\} \tag{A.3}$$

- **Conjunto difuso convexo.** Asúmase que el conjunto universal X está definido en un espacio vectorial euclidiano de n dimensiones $\mathbb{R}^n$. Si todos los conjuntos $\alpha - corte$ son convexos, el conjunto difuso con estos conjuntos $\alpha - corte$ es convexo. En otras palabras, si la relación

$$\mu_A(t) \geq Min[\mu_A(r), \mu_A(s)] \tag{A.4}$$

  donde $t = \lambda r + (1 + \lambda) s \;\; r, s \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$, se mantiene, el conjunto difuso A es convexo. La función Min elije el menor valor entre sus argumentos.

- **Normalidad.** Un conjunto difuso A es normal si y solo si $Sup_x \mu_A(x) = 1$, es decir, el supremo de $\mu_A(x)$ sobre X es igual a 1. Un conjunto difuso es subnormal si no es normal. Un conjunto difuso subnormal no-vacío puede ser normalizado al dividir cada $\mu_A(x)$ por el factor $Sup_x \mu_A(x)$.

(Un conjunto difuso A es vacío si y solo si el soporte del conjunto es vacío, $S(A) = \emptyset$, es decir si para todo $x \in X$ se tiene que $\mu_A(x) = 0$).

A.2. Operaciones Estándar en Conjuntos Difusos

El conjunto complemento $\overline{A}$, la unión $A \cup B$ y la intersección $A \cap B$ representan las operaciones estándar de la teoría difusa. Ellas son generalizaciones de las mismas en el caso de los conjuntos nítidos.

- **Complemento.** Es posible hallar el conjunto complemento de un conjunto difuso A de manera similar a la un conjunto nítido. Denótese el conjunto complemento del conjunto A como $\overline{A}$. El grado de pertenencia puede ser calculado como a continuación:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \ \forall x \in X \tag{A.5}$$

  El símbolo $\forall$ significa "para todo".

- **Intersección.** La intersección de los conjuntos difusos A y B toma el valor más pequeño del valor de la función de pertenencia entre A y B:

$$\mu_{A \cap B}(x) = Min\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right], \ \forall x \in X \tag{A.6}$$

  La intersección $A \cap B$ es un subconjunto de A o B. La noción de intersección guarda una relación estrecha con la noción del conector "y".

- **Unión.** El valor de pertenencia del elemento x en la unión toma el valor mas alto del valor de pertenencia entre A y B:

$$\mu_{A \cup B}(x) = Max\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right], \ \forall x \in X \tag{A.7}$$

  A y B son subconjuntos de $A \cup B$. Como en el caso de la intersección, la operación de unión guarda una cercana relación con la noción del conector "o". La función Max elije el máximo valor entre sus argumentos.

- **Producto algebraico.** El producto algebraico de A y B es denotado por AB y se define como a continuación:

$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\,\mu_B(x), \ \forall x \in X \tag{A.8}$$

- **Suma.**

  - Suma algebraica. La suma algebraica de A y B es denotada por $A \widetilde{\oplus} B$ y se define como a continuación:

$$\mu_{A \widetilde{\oplus} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\,\mu_B(x), \ \forall x \in X \tag{A.9}$$

  - Suma disjunta simple. La suma disjunta en conjuntos nítidos se denota de la siguiente manera:

$$A + B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \tag{A.10}$$

es decir, en conjuntos difusos la suma disjunta simple se expresaría así:

$$\mu_{A\oplus B}(x) = Max\{Min[\mu_A(x), 1-\mu_B(x)], Min[1-\mu_A(x), \mu_B(x)]\} \tag{A.11}$$

- Suma disjunta. Esta operación se refiere al operador lógico "o exclusivo" y la idea clave es la eliminación del área común de la unión de A y B. Con esta idea, es posible definir un operador $\triangle$ (deltha) para la suma disjunta "o exclusivo" como a continuación:

$$\mu_{A\triangle B}(x) = \mid \mu_A(x) - \mu_B(x) \mid \tag{A.12}$$

El símbolo $\mid \quad \mid$ indica que el valor entre ellos es valor absoluto.

- **Diferencia.** La diferencia en conjuntos nítidos se define así: $A - B = A \cap \overline{B}$. En conjuntos difusos, hay dos formas para obtener la diferencia:

  - Diferencia simple: para el operador $\ominus$, la función de pertenencia se define así:

$$\mu_{A\ominus B}(x) = Min[\mu_A(x), 1-\mu_B(x)] \tag{A.13}$$

  - Diferencia delimitada: para el operador θ(theta), la función de pertenencia se define así:

$$\mu_{A\theta B}(x) = Max[0, \mu_A(x) - \mu(x)] \tag{A.14}$$

A.3. Distancia en Conjunto Difusos

El concepto de "distancia" es designado para describir la diferencia entre conjuntos difusos. Sin embargo, existe cierta disparidad en la medida matemática respecto de la diferencia entre conjuntos difusos definida en el anterior numeral. Las medidas de distancia son definidas como a continuación:

- **Distancia Hamming.**

$$d(A,B) = \sum_{i=1, x_i \in X}^{n} \mid \mu_A(x_i) - \mu(x_i) \mid \tag{A.15}$$

La distancia Hamming contiene el sentido matemático usual de distancia:

$$d(A,B) \geq 0 \tag{A.16}$$

$$d(A,B) = d(B,A) \tag{A.17}$$

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C) \tag{A.18}$$

$$d(A,A) = 0 \tag{A.19}$$

Asumiendo n elementos en el conjunto universal X; es decir, $\mid X \mid = n$, la distancia Hamming relativa es,

$$\delta(A,B) = \frac{1}{n} d(A,B) \tag{A.20}$$

$\mid X \mid$ indica la cardinalidad de X, es decir el número de elementos que lo componen.

- **Distancia euclidiana.**

$$e(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_A(x) - \mu_B(x)\right)^2} \tag{A.21}$$

La distancia relativa euclidiana es:

$$\varepsilon(A,B) = \frac{e(A,B)}{\sqrt{n}} \tag{A.22}$$

- **Distancia Minkowski.**

$$d_w(A,B) = \left(\sum_{x \in X} \mid \mu_A(x) - \mu_B(x) \mid^w\right)^{1/w} \tag{A.23}$$

La distancia Minkowski es una generalización de la distancia Hamming y la distancia Euclidiana, cuando $w = 1$ y cuando $w = 2$, respectivamente.

A.4. Operaciones con Intervalos

Las operaciones de los números difusos pueden ser generalizadas a partir de las operaciones de intervalos. A continuación se describen las operaciones de intervalos. $\forall\, a_1, a_3, b_1, b_3 \in \mathbb{R}$

$$A = [a_1, a_3]\,,\ B = [b_1, b_3]$$

Asumiendo que A y B son números expresados en forma de intervalo, las principales operaciones de intervalos son:

- Adición:

$$[a_1, a_3]\,(+)\,[b_1, b_3] = [a_1 + b_1, a_3 + b_3] \tag{A.24}$$

- Substracción:

$$[a_1, a_3]\,(-)\,[b_1, b_3] = [a_1 - b_1, a_3 - b_3] \tag{A.25}$$

- Multiplicación:

$$[a_1, a_3]\,(\bullet)\,[b_1, b_3] = [a_1 \bullet b_1 \wedge a_1 \bullet b_3 \wedge a_3 \bullet b_1 \wedge a_3 \bullet b_3, a_1 \bullet b_1 \vee a_1 \bullet b_3 \vee a_3 \bullet b_1 \vee a_3 \bullet b_3] \tag{A.26}$$

Los símbolos $\wedge$ y $\vee$ indican que se aplica la función Min y Max, respectivamente, definidas en la ecuación No. A.4 y No. A.7.

- División:

$$[a_1, a_3]\,(/)\,[b_1, b_3] = [a_1/b_1 \wedge a_1/b_3 \wedge a_3/b_1 \wedge a_3/b_3, a_1/b_1 \vee a_1/b_3 \vee a_3/b_1 \vee a_3/b_3] \tag{A.27}$$

se excluye el caso en el que $b_1 = 0$ y $b_3 = 0$

- Intervalo inverso:

$$[a_1, a_3]^{-1} = [1/a_1 \wedge 1/a_3, 1/a_1 \vee 1/a_3] \tag{A.28}$$

A.5. Operaciones con Números Difusos

Las anteriores operaciones con intervalos son también aplicables a números difusos. Debido a que el resultado de operar números difusos (conjunto difuso) toma la forma de un conjunto difuso, este será expresado mediante funciones de pertenencia. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

- Adición: $A\,(+)\,B$

$$\mu_{A(+)B}\,(z) = \underset{z=x+y}{\vee}\,(\mu_A\,(x) \wedge \mu_B\,(y)) \tag{A.29}$$

- Substracción: $A\,(-)\,B$

$$\mu_{A(-)B}\,(z) = \underset{z=x-y}{\vee}\,(\mu_A\,(x) \wedge \mu_B\,(y)) \tag{A.30}$$

- Multiplicación: $A\,(\bullet)\,B$

$$\mu_{A(\bullet)B}\,(z) = \underset{z=x\bullet y}{\vee}\,(\mu_A\,(x) \wedge \mu_B\,(y)) \tag{A.31}$$

- División: $A\,(/)\,B$

$$\mu_{A(/)B}\,(z) = \underset{z=x/y}{\vee}\,(\mu_A\,(x) \wedge \mu_B\,(y)) \tag{A.32}$$

- Mínimo: $A\,(\wedge)\,B$

$$\mu_{A(\wedge)B}\,(z) = \underset{z=x\wedge y}{\vee}\,(\mu_A\,(x) \wedge \mu_B\,(y)) \tag{A.33}$$

- Máximo: $A\,(\vee)\,B$

$$\mu_{A(\vee)B}\,(z) = \underset{z=x\vee y}{\vee}\,(\mu_A\,(x) \wedge \mu_B\,(y)) \tag{A.34}$$

Es posible multiplicar un valor escalar por el intervalo. Por ejemplo, multiplicar $a \in \mathbb{R}$,

$$a\,[b_1, b_3] = [a \bullet b_1 \wedge a \bullet b_3, a \bullet b_1 \vee a \bullet b_3] \tag{A.35}$$

A.6. Código de programación en R

El CD contiene un archivo plano llamado "Código.txt" que es el código en R mediante el cual fue estandarizada la información y calculadas las matrices. Además contiene el archivo con la información de las variables llamado "criterios.csv". Para poder correrlo, hay que actualizar el directorio de trabajo en la primera línea del código.

Bibliografía

Bellman, R. E., and L. A. Zadeh (1970): "Decision-Making in a Fuzzy Environment," *Management Science*, 17(4), pp. 141–164.

Boix, R. (2007): "Knowledge, networks of cities and growth in regional urban systems," *Papers in Regional Science*, 86(4), 551–574.

Chen, C.-T. (2001): "A fuzzy approach to select the location of the distribution center," *Fuzzy Sets and Systems*, 118(1), 65 – 73.

Chu, T.-C., and M.-T. Lai (2005): "Selecting distribution centre location using an improved fuzzy MCDM approach," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 26, 293–299, 10.1007/s00170-003-1896-3.

Cowan, R., N. Jonard, and J.-B. Zimmermann (2007): "Bilateral Collaboration and the Emergence of Innovation Networks," *MANAGEMENT SCIENCE*, 53(7), 1051–1067.

Duranton, G., and H. Overman (2005): "Testing for Localization Using Micro-Geographic Data," *Review of Economic Studies*, 72(4), 1077–1106.

Ellison, G., and E. L. Glaeser (1997): "Geographic Concentration in U.S. Manufacturing Industries: A Dartboard Approach," *The Journal of Political Economy*, 105(5), pp. 889–927.

Emden, Z., R. J. Calantone, and C. Droge (2006): "Collaborating for New Product Development: Selecting the Partner with Maximum Potential to Create Value," *Journal of Product Innovation Management*, 23(4), 330 – 341.

Fan, Z.-P., and B. Feng (2009): "A multiple attributes decision making method using individual and collaborative attribute data in a fuzzy environment," *Information Sciences*, 179(20), 3603 – 3618.

Feng, C.-M., P.-J. Wu, and K.-C. Chia (2010): "A hybrid fuzzy integral decision-making model for locating manufacturing centers in China: A case study," *European Journal of Operational Research*, 200(1), 63 – 73.

Groenewegen, P. (1992): "Alfred Marshall's Principles of Economics: A Centenary Perspective from the Antipodes," *Australian Economic Papers*, 31(59), 219–33.

Gulati, R. (1998): "Alliances and networks," *Strategic Management Journal*, 19(4), 293–317.

Jiang, Y.-P., Z.-P. Fan, and J. Ma (2008): "A method for group decision making with multi-granularity linguistic assessment information," *Information Sciences*, 178(4), 1098 – 1109.

Kahraman, C. (2008): *Fuzzy Multi-criteria Decision Making: theory and applications with recents developments*. Springer, Istanbul,Turkey.

Kuo, R. J., S. C. Chi, and S. S. Kao (1999): "A decision support system for locating convenience store through fuzzy AHP," *Computers and Industrial Engineering*, 37(1-2), 323 – 326, Proceedings of the 24th international conference on computers and industrial engineering.

Moore, J. M. (1962): *Plant layout and design*. Macmillan, New York,.

Mori, T., K. Nishikimi, and T. E. Smith (2004): "A Divergence Statistic for Industrial Localization," KIER Working Papers 587, Kyoto University, Institute of Economic Research.

Novák Vilém, Irina Perfilieva, J. M. (1999): *Mathematical Principles of Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, EEUU.

Precedo, A. (1992): *La localización industrial*. Ed. Sintesis, Madrid - España.

Pred, A. (1967): *Behavior and location. Foundations for a geographic and dynamic location theory*. Gleerup, Lund,.

Rawstron, E. M. (1958): "Three Principles of Industrial Location," *Transactions and Papers (Institute of British Geographers)*, (25), pp. 135–142.

Rosenthal, S. S., and W. C. Strange (2004): "Evidence on the nature and sources of agglomeration economies," in *Handbook of Regional and Urban Economics*, ed. by J. V. Henderson, and J. F. Thisse, vol. 4, chap. 49, pp. 2119–2171. Elsevier, 1 edn.

Tzeng, G.-H., and Y.-W. Chen (1999): "The optimal location of airport fire stations: a fuzzy multi-objective programming and revised genetic algorithm approach," *Transportation Planning and Technology*, 23, 37–55.

Wasserman, S., and K. Faust (1994): *Social network analysis: Methods and applications*. Cambridge Univ Pr.

Yong, D. (2006): "Plant location selection based on fuzzy TOPSIS," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 28, 839–844, 10.1007/s00170-004-2436-5.

Zadeh, L. A. (1975): "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - II," *Inf. Sci.*, 8(4), 301–357.

——— (2005): "Toward a generalized theory of uncertainty (GTU)-An outline," *Information Sciences*, 172, 1–40.

——— (2009): "Toward extended fuzzy logic: A first step," *Fuzzy Sets and Systems*, 160(21), 3175–3181.