ELICITACIÓN DEL VECTOR DE PARÁMETROS DE LA DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL A PARTIR DE VARIOS EXPERTOS

Yurledy Montoya Espinosa

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia
2016

ELICITACIÓN DEL VECTOR DE PARÁMETROS DE LA DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL A PARTIR DE VARIOS EXPERTOS

Yurledy Montoya Espinosa

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Estadística

Director:
Juan Carlos Correa Morales, Ph.D

Línea de Investigación:
Estadística Bayesiana

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia
2016

Dedicatoria

Dedico este trabajo principalmente a mi madre quien ha sido un gran pilar en el trayecto de mi vida, me ha demostrado su amor corrigiendo mis faltas y celebrando mis logros, quien ha creído en mí siempre, dándome ejemplo de superación humildad y sacrificio. Esta tesis ha sido el resultado de lo que nos has enseñado en la vida con tu honestidad, responsabilidad, empuje y entrega a tu trabajo para ser mejores cada día.

Agradecimientos

Agradezco a Dios que me dió fe para creer lo que me parecía imposible terminar. A mi mamá y mis hermanos por su ayuda incondicional y buenos consejos los cuales me permitieron no desfallecer en el intento. A mi novio mil gracias por acompañarme y transmitirme siempre seguridad y valor para terminar con éxito este proceso. Gracias a la colaboración del equipo malaria del Valle del Cauca por su participación en el desarrollo de mi investigación. A mi director de tesis Juan Carlos Correa un especial agradecimiento por su paciencia, disponibilidad, valiosa dirección y apoyo para lograr culminar la meta de mi trabajo de investigación.

Resumen

El objetivo de este trabajo es implementar una metodología de elicitación que permita estimar el vector de parámetros π de la distribución Multinomial a partir de la opinión y creencia de múltiples expertos, buscando así encontrar una única distribución que represente el conocimiento del conjunto de expertos. Inicialmente se hace una revisión del procedimiento adecuado que se debe seguir para llevar a cabo un proceso de elicitación, como también se dan a conocer las heurísticas y sesgos que se deben considerar en dicho proceso. Luego se da una revisión sobre los métodos y la importancia de contar con múltiples expertos. Posteriormente se realiza una revisión bibliográfica sobre los métodos de elicitación que se han desarrollado en la cuantificación de creencias de expertos para el vector de parámetros de la distribución Binomial y Multinomial. Finalmente se propone un método de elicitación para estimar la distribución a priori del vector de parámetros π de la distribución Multinomial a partir de la opinión de múltiples expertos y se presenta una aplicación real de este método en el tema de malaria.

Palabras clave: Distribución Binomial; Distribución Multinomial; Probabilidad Subjetiva; Distribución A priori; Estadística Bayesiana.

Abstrac

The objective of this work is to implement an elicitation methodology to estimate the parameter vector π of the multinomial distribution from the opinion and belief of multiple experts, looking for to find a single distribution that represents the knowledge of all experts. Initially is done a review of the appropriate procedure that should be followed to carry out a process of elicitation, as well are disclosed heuristics and biases that should be considered in this process. A review of the methods and the importance of having multiple experts are then given. Subsequently a literature review on elicitation methods that have been developed in quantifying beliefs of experts to the vector of parameters of the Binomial and Multinomial distribution is made. Finally is proposed an elicitation method to estimate the parameter vector π of the Multinomial distribution from the opinion of many experts and a real application for this method is presented on the issue of malaria disease.

Keywords: Binomial Distribution; Multinomial Distribution; Subjective Probability; A priori Distribution; Bayesian Statistics.

Contenido

Dedicatoria III

Agradecimientos III

Resumen IV

1. Introducción 2

2. Marco Teórico 6

2.1. Heurísticas y Sesgos . . . 7
2.1.1. Representatividad . . . 7
2.1.2. Disponibilidad . . . 10
2.1.3. Anclaje y ajuste: . . . 11
2.2. Proceso de Elicitación . . . 11
2.2.1. Identificación y Selección de Expertos . . . 11
2.2.2. Motivación de Expertos . . . 12
2.2.3. Estructuración y Descomposición . . . 13
2.2.4. Entrenamiento en Probabilidad . . . 13
2.2.5. Elicitación de Probabilidad y Verificación . . . 14
2.2.6. Técnicas de Elicitación . . . 14
2.2.7. Calibración y Retroalimentación . . . 16
2.3. Múltiples Expertos . . . 17
2.3.1. Métodos de Agregación Matemáticos . . . 17
2.3.1.1. Enfoque Axiomático . . . 18
2.3.1.2. Enfoque Bayesiano . . . 18
2.3.2. Métodos de Agregación de Comportamiento . . . 20
2.3.2.1. Método Delphi . . . 20
2.3.2.2. Técnica de Grupo Nominal . . . 22
2.3.2.3. Mini-Delphi . . . 23
2.3.2.4. Impactos Cruzados . . . 23
2.3.2.5. EDSIM . . . 24
2.4. Análisis de Cluster . . . 25

2.5. Distribución Binomial 26
2.5.1. Métodos de Elicitación para los Parámetros de la Distribución Beta . 26
2.6. Elicitación Multivariada 31
2.6.1. Distribución Multinomial 31
2.6.2. Métodos de Elicitación Distribución Dirichlet 32

3. Metodología Propuesta 43

4. Aplicación 50
4.1. Introducción 50
4.2. Metodología 51

5. Conclusiones 59

A. Apéndice: Distribución Beta 60

B. Apéndice: Distribución Dirichlet 61

Bibliografía 63

1. Introducción

El análisis bayesiano se refiere a los métodos para hacer inferencias a partir de datos utilizando modelos de probabilidad para cantidades observables y cantidades sobre las que se quiere aprender. La característica esencial de los métodos bayesianos es el uso explícito de la probabilidad para cuantificar la incertidumbre en inferencias basadas en el análisis de datos estadísticos (Gelman et al, 2003). A diferencia del punto de vista frecuentista, en la teoría bayesiana no es necesario que un evento sea aleatorio (en el sentido en que sus resultados se presentan con variabilidad) para que se le pueda asignar una probabilidad; el aspecto que es relevante es que exista incertidumbre sobre el evento de ocurrencia (Mendoza y Regueiro, 2011). Al aumentar el nivel de información en relación a un fenómeno o experimento aleatorio, con información que proveen datos históricos observados o con la apreciación y experiencia de especialistas en dicho fenómeno, se logra reducir el nivel de incertidumbre y a su vez este enfoque de probabilidad es ampliamente aprovechado por la metodología bayesiana, es por ello que se dice que ésta va más allá que la estadística frecuentista al buscar aprovechar toda la información disponible, así se trate de datos observados o de información de otro tipo que nos ayude a disminuir de manera coherente nuestra incertidumbre en torno a un fenómeno aleatorio de interés (Ruiz, 2004).

La estadística bayesiana produce distribuciones posteriores de las cantidades desconocidas (parámetros) teniendo en cuenta tanto los datos como las densidades a priori sobre estos parámetros, proporcionando de esta manera un cuadro más completo sobre la incertidumbre en la estimación de los parámetros desconocidos (Correa, 2005). La información a priori puede provenir de estudios previos o de información subjetiva de expertos, entre otros, esta cuantificación de información subjetiva se realiza mediante un proceso conocido como elicitación, el cual se define como el proceso de formular el conocimiento y creencias de un experto acerca de una o más cantidades inciertas en forma de una distribución de probabilidad conjunta, donde el experto es la persona a quien la sociedad y/o su/sus compañeros atribuyen conocimiento especial sobre el tema que se elicita (Garthwaite et al, 2005). En el contexto del análisis estadístico bayesiano surge más generalmente como un método para especificar la distribución a priori para uno o más parámetros desconocidos de un modelo estadístico; en gran parte de la literatura sobre elicitación se han ocupado con la formulación de una distribución de probabilidad para cantidades inciertas cuando no hay datos con los que se pueda aumentar el conocimiento expresado en esa distribución (Garthwaite et al, 2005). El proceso de elicitación puede clasificarse en cuatro etapas. La etapa inicial consiste en la preparación de la elicitación como es la selección y entrenamiento de los expertos, la segunda etapa es considerada como el núcleo del proceso, en ella se elicitan los resúmenes del experto y la distribución para estos aspectos, la tercera etapa es el ajuste de la distribución de probabilidad de los resúmenes y finalmente la cuarta etapa consiste en la evaluación de la adecuación de la elicitación, con la opción de volver luego a la segunda etapa y elicitar más resúmenes del experto (Garthwaite et al, 2005). Es importante tener presente que el proceso de elicitación debe hacerse de tal manera que sea lo más fácil posible para que los expertos en la materia puedan expresar lo que creen en términos probabilísticos, al tiempo que se reduzca el nivel de conocimiento que éste debe tener acerca de la teoría de probabilidad (Kadane y Wolfson, 1998).

En la cuantificación de creencias de expertos se han realizado un gran número de estudios en los que los investigadores han tratado de elicitar información subjetiva y representarla de una manera rigurosa como parte de una investigación formal; entre las diversas áreas de estudio se encuentra la medicina en donde Van der Gaag et al (2002) desarrollaron una red bayesiana que describe las características del cáncer de esófago y los procesos fisiopatológicos de la invasión y la metástasis, la red fue utilizada como un sistema de soporte de decisiones para la selección de la terapia específica del paciente con cáncer de esófago, el método adoptado preguntaba a los expertos acerca de eventos condicionales: dada cierta condición observada que tan probable es otra condición para ser observada, en esta red las descripciones de los eventos fueron dadas a los expertos de forma escrita, con una escala de probabilidad y un anclaje verbal asociado. Las redes bayesianas también se han utilizado en las ciencias veterinarias, McKendrick et al (2000) crearon un sistema de diagnóstico de la enfermedad utilizando una red de creencia bayesiana, donde la idea de esta red es utilizar el Teorema de Bayes con el evento que un animal tiene la enfermedad en cuestión y muestra un signo en particular. En diagnósticos radiológicos Berbaum et al (2002) piden al experto la probabilidad de que una característica sea anormal usando una escala cuasi-continua (101 puntos desde 0 % a 100 %) con el uso de la clasificación de cinco puntos estándar de confianza (desde “sospechoso, pero probablemente normal” a “claramente anormal”) para calcular la curva ROC. En ensayos clínicos Kadane (1994) utiliza la elicitación a priori de expertos donde compara dos tratamientos con fármacos alternativos, siendo la medida de éxito la presión arterial sistólica después de la cirugía de corazón abierto, el método consiste en la selección de un panel de expertos, quienes identifican covariables que consideran importantes en la determinación de qué fármaco utilizar, los expertos tienen sus creencias a priori elicitadas usando un modelo de elicitación lineal normal, cuando se reciben los resultados de los pacientes la distribución de cada experto se actualiza utilizando el Teorema de Bayes. En el campo de la industria nuclear DeWispelare et al (1995) discuten la elicitación de probabilidades en el contexto de los residuos nucleares, provocando distribuciones del cambio de temperatura en 7 periodos discretos de tiempo, para este estudio las elicitaciones se realizaron utilizando el método de intervalo variable, elicitando entre 5 y 9 cuantiles a cada experto para cada periodo de tiempo. En las ciencias económicas Pattillo (1998) llevó a cabo un estudio econométrico de la manufactura en Ghana, allí elicitó la opinión de los propietarios de algunas empresas manufactureras, en este método se utilizó la técnica del histograma, donde a cada experto se le daba una lista de nueve rangos de tasas de variación y se les pedía asignar las probabilidades para cada rango, Pattillo los utilizó para obtener una comprensión de la variación de la demanda esperada, que después incluyó en su modelo econométrico. En ecología Gilles y Fried (2000) realizaron un trabajo en elicitación mediante la aplicación a un problema de planificación de incendios forestales al estimar el tiempo requerido para producir una longitud dada de la línea de fuego por los diferentes recursos de extinción de incendios bajo diversas condiciones. En Winkler (1967), Savage (1971) y Hogarth (1975) podemos encontrar trabajos de elicitación enfocados en las ciencias psicológicas, Jenkinson (2005) realiza una amplia exploración bibliográfica de los diversos campos donde se ha utilizado la elicitación de los expertos.

Bajo el principio estadístico subyacente de que cuanta más información se ha recopilado mejores serán los resultados, parte el deseo de obtener la mayor cantidad de información posible motivando elicitar múltiples expertos, pues el resultado de su experiencia combinada puede ser en sí informativo y ser utilizado como una distribución a priori en un análisis bayesiano, donde ésta distribución representa la opinión conjunta de los expertos (Clemen y Winkler, 1999).

Clemen y Winkler (1999) realizan una revisión de la combinación de las distribuciones de probabilidad de los expertos en el análisis de riesgo, los autores discuten una variedad de métodos de combinación (métodos de agregación matemática o enfoques conductuales) tratando de poner en relieve los problemas conceptuales y prácticos más importantes a considerar en el diseño de un proceso de combinación. En Genest y Zideck (1986) y French(1985) también podemos encontrar algunos enfoques que se han propuesto en cuanto a cómo obtener y cómo sintetizar el conocimiento de diferentes expertos. Cooke (1991) describe un método para la elección de los pesos basados en el rendimiento de los expertos en la estimación de las distribuciones de las variables de semillas, que son cantidades que conoce el analista pero no el experto. Coussement et al (2015) detallan las ventajas naturales de un marco bayesiano para la fusión de múltiples fuentes de información en un sistema de apoyo a las decisiones, los autores probaron un enfoque bayesiano de fusión propuesto en el contexto de un estudio de predicción de satisfacción del cliente y mostraron cómo mejora el rendimiento de la predicción de los expertos y un modelo de minería de datos haciendo caso omiso de información de expertos.

La cuantificación y agregación de grados de creencias de expertos pueden proporcionar información importante para un tomador de decisiones y pueden dar lugar a decisiones de manera óptima justificable de los parámetros de los modelos (Goossens et al, 2008), por tal motivo es posible considerar un enfoque donde los expertos interactúan como grupo, un enfoque de elicitación de grupo sencillo y práctico es llevar a los expertos a discutir la cantidad incierta o las cantidades sobre las que sus creencias van a elicitarse y después de una puesta en común lo que se busca es llegar a una opinión de consenso. El método Delphi es una técnica formal para gestionar la interacción grupal (Garthwaite et al, 2005), entre las investigaciones realizadas por medio de este métododo encontramos a Barrera et al (2011) quienes utilizaron una metodología bayesiana donde implementaron el proceso de elicitación y el método Delphi con el fin de determinar la proporción de estudiantes que desertaron del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín, teniendo en cuenta los factores académicos, laboral y personal de los estudiantes. Chu et al (2008) proponen un enfoque basado en el método Delphi para elicitar el conocimiento de múltiples expertos en el diagnóstico del síndrome respiratorio agudo severo, en este estudio los autores consideran el "tiempo" como un parámetro importante que puede afectar significativamente la exactitud de los resultados de inferencias en un sistema de expertos. Yau y Chiu (2015) utilizan el método Delhpi para identificar y dar prioridad a las opciones a combatir contra la ilegalidad en Hong Kong, los autores adoptaron este método por ser un proceso de varias etapas que permite un enfoque sistemático para obtener, intercambiar y desarrollar opciones informadas sobre el tema en cuestión.

Es importante tener en cuenta que un proceso de elicitación es considerado como bueno, si la distribución que es obtenida con precisión, representa de manera adecuada el conocimiento del experto (Garthwaite et al, 2005).

El desarrollo de este trabajo comienza con el marco teórico en el capítulo 2 donde se da una revisión de los pasos para llevar a cabo un proceso de elicitación teniendo en cuenta las heurísticas y sesgos en los que se pueden incurrir al realizar este proceso, adicionalmente se realiza una revisión de los diferentes métodos de agregación cuando se consulta múltiples expertos y una revisión de las distribuciones Binomial y Multinomial con algunos métodos de elicitación que se han desarrollo para los parámetros de estas distribuciones. En el capítulo 3 se presenta un propuesta metodológica para elicitar múltiples expertos que permite elicitar el parámetro π de la distribución Multinomial. En el capítulo 4 se expone una aplicación real en la estimación de la distribución del tipo de malaria en pacientes diagnosticados con la enfermedad en la zona costera rural de Buenaventura y finalmente en el capítulo 5 presenta las conclusiones.

2. Marco Teórico

La estadística bayesiana ha tomado fuerza en los últimos años debido a su potencial para resolver problemas que no se pueden abordar con otros métodos, además permite la incorporación de información útil en la solución del problema. Es importante resaltar que la aproximación bayesiana es una herramienta fundamental en situaciones donde la recolección de información muestral es muy difícil (Correa, 2014). La inferencia bayesiana se puede resumir como el proceso de ajustar un modelo de probabilidad a un conjunto de datos y resumir los resultados mediante una distribución de probabilidad para los parámetros del modelo y para cantidades desconocidas pero observables tales como predicciones para nuevas observaciones (López, 2011). Una característica esencial y distintiva en la estadística bayesiana es que ésta tiene en cuenta de forma explícita la información previa y la involucra en el análisis en forma de distribución, llamada distribución a priori, por lo que el paradigma bayesiano es un medio natural de implementar el método científico donde la distribución a priori representa sus creencias iniciales acerca del modelo, y la distribución posterior las creencias actualizadas después de ver los datos (Correa, 2014). Berger (1999) destaca la variedad de enfoques bayesianos, cada uno de los cuales puede ser de gran utilidad en ciertas situaciones y para ciertos usuarios. Estos enfoques son:

1. **Análisis bayesiano objetivo:** se caracteriza por la utilización de información de distribuciones no informativas.

2. **Análisis bayesiano subjetivo:** este tipo de análisis es catalogado por ser el "alma" de la estadística bayesiana en el cual la utilización de distribuciones a priori subjetivas está a menudo disponible como alternativa en algunos problemas.

3. **Análisis bayesiano robusto:** este análisis reconoce la imposibilidad de la especificación subjetiva completa de la distribución a priori. La idea con este tipo de análisis es trabajar con clases de modelos y clases de distribuciones a priori, las clases reflejan la incertidumbre que queda después de la elicitación.

4. **Análisis bayesiano frecuentista:** tanto la metodología bayesiana como la frecuentista son muy importantes. Para problemas paramétricos, el análisis bayesiano parece tener una ventaja metodológica clara, pero los conceptos frecuentista pueden ser muy útiles, especialmente en la determinación de buenos procedimientos bayesianos objetivos, en los métodos no paramétricos la aproximación frecuentista produce resultados más satisfactorios que los métodos bayesianos.

5. **Análisis cuasibayesiano:** en este tipo de análisis, la distribución a priori puede ser seleccionada de diversas maneras (distribuciones a priori vagas o ajustando los parámetros), de tal forma que se ajustan hasta que la respuesta o solución "se ve bien".

2.1. Heurísticas y Sesgos

Heurística son "reglas de oro" que se utilizan para encontrar soluciones a los problemas rápidamente, estas reglas tienen aparente validez, pueden parecer razonables seguirlas, pero a menudo llevan a sesgos. En muchos experimentos ilustran que las personas no se puede confiar en dar estimaciones de probabilidades precisas en muchos contextos, pues por lo general no tienen un razonamiento estadístico correcto cuando hacen inferencias intuitivas sobre acontecimientos inciertos, bien porque no han aprendido de estas leyes, bien porque superan sus capacidades de cálculo mental. Una explicación de las deficiencias humanas en la estimación de probabilidades es que los seres humanos utilizan una serie de heurísticas para juzgar la probabilidad. Las heurísticas propuestas por Tversky y Kahneman (1974) fueron llamadas representatividad, disponibilidad y anclaje y ajuste.

2.1.1. Representatividad

Muchas de las preguntas de probabilidad con la que la gente está preocupada pertenecen a uno de los siguientes tipos: ¿Cuál es la probabilidad de que un objeto pertenezca la clase B? ¿Cuál es la probabilidad de que el evento A se origina en el proceso B? ¿Cuál es la probabilidad de que el proceso B generará el evento A? Para responder a estas preguntas, los expertos normalmente se basan en la heurística de la representatividad que es la evaluación del grado de correspondencia o similitud entre una muestra y una población, es decir, las probabilidades son evaluadas por el grado en el que el evento A es representativo del evento B. Por ejemplo, si el evento A es altamente representativo del evento B, la probabilidad de que A se origina desde B se considera alta. Por otra parte, si el evento A no es similar al evento B, la probabilidad de que A se origina desde B se considera baja. Sin embargo, el hecho de fijarnos sólo en la similitud de la muestra con la población de origen puede llevarnos a ignorar otros elementos esenciales de la información, ocasionando algunos errores como los siguientes (Tversky y Kahneman, 1974).

- **Insensibilidad a la probabilidad a priori:** este es uno de los factores que no tiene ningún efecto sobre la representatividad sino que tiene un efecto importante en la probabilidad a priori o la frecuencia de la tasa base de los resultados. Por ejemplo, un taxi se vio implicado en un accidente nocturno con choque y huida posterior, hay dos compañías de taxis en la ciudad, la verde y la azul. El 85 % de los taxis en la ciudad son verde y el 15 % azul. Un testigo identificó el taxi como azul. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80 % de las ocasiones y fallaba en el 20 %. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto azul? La mayoría de las personas eligen como respuesta 0.80 (estimación que coincide con la fiabilidad del testigo) y un grupo importante elige 0.50, otros creen que es más probable que el taxi sea azul que verde. Al resolver el problema mediante el teorema de Bayes se obtiene que la probabilidad de que el taxi implicado sea azul es del 0.41. De este error se deduce que las personas ignoran las tasas de base de probabilidad de los sucesos (Díaz, 2003).

- **Insensibilidad al tamaño de muestra:** para evaluar la probabilidad de obtener un resultado determinado en una muestra extraída de una población específica, los expertos normalmente aplican la heurística de la representatividad, es decir, que evalúan la probabilidad de un resultado de la muestra. En consecuencia, si las probabilidades son evaluadas por la representatividad, entonces la probabilidad estimada del estadístico de una muestra será esencialmente independiente de su tamaño. Por ejemplo, si la información dada es que la altura media de una muestra aleatoria de diez hombres es de 6 pies (180 centímetros) y se pide evaluar la distribución de la altura media en diferentes tamaños muestrales de 1000, 100 y 10 hombres, los sujetos producen distribuciones idénticas, ya que estos asigna el mismo valor para los diferentes tamaños muestrales, es decir, que los sujetos no lograron apreciar el papel del tamaño de la muestra (Tversky y Kahneman, 1974).

- **Conceptos erróneos sobre el azar:** se espera que una secuencia de eventos generados por un proceso aleatorio representen las características esenciales de ese proceso, incluso cuando la secuencia es corta. Al considerar lanzamientos de una moneda a cara o cruz, por ejemplo, las personas consideran que la secuencia HTHTTH es más probable que la secuencia HHHTTT, que no parece aleatoria, y también es más probable que la secuencia HHHHTH, pues en éstas no logran representar a la equidad de la moneda, por lo tanto, se espera que las características esenciales del proceso estarán representadas, no sólo a nivel global en toda la secuencia, sino también a nivel local en cada una de sus partes. Una secuencia localmente representativa, sin embargo, se aparta sistemáticamente de la expectativa de la oportunidad: contiene demasiadas alteraciones y muy pocas corridas (Tversky y Kahneman, 1974).

Otra Consecuencia de la creencia en la representatividad local es la falacia del jugador, por ejemplo, en un juego de azar después de observar una serie larga de rojo en la ruleta, la mayoría de las personas creen erróneamente que el negro es el que debe salir a continuación, presumiblemente debido a la ocurrencia de que el color negro resultará en una secuencia más representativa que la ocurrencia de un rojo adicional. La probabilidad es vista comúnmente como un proceso de autocorrección en la que una desviación en una dirección induce una desviación en la dirección opuesta para restaurar el equilibrio; de hecho, las desviaciones no son "corregidas" como un proceso de desarrollo al azar, simplemente están diluidos (Tversky y Kahneman, 1974).

- **Insensibilidad a la previsibilidad:** las personas a veces piden hacer predicciones numéricas tales como el valor futuro de una población, la demanda de una mercancía o el resultado de un partido de futbol, estas predicciones se hacen a menudo por la representatividad, por ejemplo, supongamos que se da una descripción de una empresa y se pide predecir sus beneficios futuros, si la descripción de la empresa es muy favorable, un beneficio muy alto aparecerá más representativo de esa descripción; si la descripción es mediocre, una actuación mediocre aparecerá más representativa.

  El grado en que la descripción es favorable no se ve afectado por la fiabilidad de esa descripción o por el grado en que se permite la predicción exacta, por lo tanto, si las personas predicen solamente en términos de la favorabilidad de la descripción, sus predicciones serán insensibles a la fiabilidad de la evidencia y de la precisión esperada de la predicción.

  Este modo de juicio viola la teoría estadística normativa en la que el extremismo y la gama de predicciones son controlados por consideraciones de previsibilidad. Cuando la previsibilidad es nula, la misma predicción debe hacerse en todos los casos, por ejemplo, si las descripciones de las empresas no proporcionan información relevante para el beneficio, entonces el mismo valor (por ejemplo, la ganancia media) debería ser predicho para todas las empresas. Si la previsibilidad es perfecta, por supuesto, los valores previstos se ajustan a los valores reales y el rango de predicciones serán iguales a la gama de resultados; en general, cuanto mayor es la previsibilidad, más amplia será la gama de valores predichos (Tversky y Kahneman, 1974).

- **Ilusión de validez:** las personas a menudo realizan predicciones al seleccionar un resultado que es el más representativo de la información recibida. La confianza que tienen en su predicción depende principalmente del grado de representatividad (es decir, en la calidad entre el resultado seleccionado y la información recibida) con poca o ninguna consideración por los factores que limitan la exactitud de la predicción. Por lo tanto, las personas expresan una gran confianza en la predicción de que una persona es un bibliotecario cuando se les da una descripción de su personalidad, que coincide con el estereotipo de los bibliotecarios, incluso si la descripción es escasa, poco fiable, o no actualizada. La confianza injustificada que es producida por un buen ajuste entre el resultado predicho y la información recibida puede ser llamada ilusión de validez (Tversky y Kahneman, 1974).

- **Conceptos erróneos en la regresión:** lleva a pronosticar que un suceso que ha tomado últimamente valores extremos continuará comportándose así en el futuro, obviando de este modo la tendencia general de regresión a la media de los valores en el futuro, de manera general, el sesgo fundado en el desconocimiento y/o falta de compresión de la regresión a la media suele darse en toda situación en que se espera que determinados resultados favorables o desfavorables (es decir, alejados de la media X) tenderán a repetirse y/o perpetuarse en mediciones sucesivas $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ (Tversky y Kahneman, 1974).

2.1.2. Disponibilidad

Corresponde a la estrategia de estimar la frecuencia de un evento o la probabilidad de sus ocurrencia, a través de la facilidad en que las instancias o asociaciones de éste llegan a la mente, por ejemplo, uno puede evaluar el riesgo de ataque al corazón en las personas de mediana edad recordando estos hechos entre uno de los conocidos. La disponibilidad es una idea útil para evaluar la frecuencia o probabilidad, ya instancias de clases grandes se suelen recordar mejor y más rápido que las instancias de las clases menos frecuentes. Sin embargo, la disponibilidad se ve afectada por factores distintos de la frecuencia y la probabilidad. En consecuencia, la dependencia de la disponibilidad conduce a sesgos como los son:

- **Sesgo debido a la facilidad para recuperar ejemplos:** cuando el tamaño de una clase se juzga por la disponibilidad de sus instancias, una clase cuyos casos se recuperan fácilmente aparecerán más numerosos que una clase de igual frecuencia pero cuyas instancias son menos recuperables. En una demostración elemental de este efecto, los sujetos escucharon una lista de personalidades conocidas de ambos sexos y se les pidió posteriormente juzgar si la lista contiene más nombres de hombres que de mujeres. Diferentes listas se presentaron a diferentes grupos de sujetos, en algunas de las listas los hombres eran relativamente más famosos que las mujeres, y en otras, las mujeres eran relativamente más famosas que los hombres. En cada una de las listas, los sujetos juzgaron erróneamente la clase (el sexo) que tenía las personalidades más famosas fue la más numerosa (Tversky y Kahneman, 1974).

- **Sesgo debido a la eficacia de un sistema de búsqueda:** ¿Hay más palabras que empiecen por la letra r o hay más palabras con la letra r en la tercer posición?, en este caso las personas evalúan la frecuencia relativa por la facilidad con la que las palabras de los dos tipos vienen a la mente. Debido a que es mucho más fácil de buscar palabras con su primera letra que por su tercera letra, la mayoría de las personas juzgan que las palabras que comienzan con una determinada consonante son más numerosas que las palabras en las que la misma consonante aparece en la tercera posición (Tversky y Kahneman, 1974).

- **Sesgo de imaginabilidad:** a veces uno tiene que evaluar la frecuencia de una clase cuyas instancias no se almacenan en la memoria pero puede ser generadas de acuerdo con una regla dada. En tales situaciones, el investigador típicamente genera varios casos y evalúa la frecuencia o probabilidad por la facilidad con que las instancias pertinentes pueden ser construidas. Sin embargo, la facilidad de construcción de estos casos no siempre refleja su frecuencia real, y este modo de la evaluación es propenso a sesgos (Tversky y Kahneman, 1974).

- **Correlación ilusoria:** es la tendencia de asumir que hay relación entre dos variables aunque no hay datos que lo confirmen.

2.1.3. Anclaje y ajuste:

cuando se pide al experto estimar una cantidad o evaluar una incertidumbre, a menudo comienzan con una estimación inicial (un "ancla") y luego ésta es ajustada hacia arriba o hacia abajo, es decir, en muchas situaciones, los expertos hacen estimaciones partiendo de un valor inicial que se ajusta para dar la respuesta final. El valor inicial, o punto de partida, pueden ser sugeridos por la formulación del problema, o puede ser el resultado de un cálculo parcial. En cualquier caso, los ajustes son típicamente insuficientes, es decir, puntos de partida diferentes producen diferentes estimaciones, que están sesgados hacia los valores iniciales, llamamos a este el fenómeno de anclaje (Tversky y Kahneman, 1974). Los efectos adversos derivados del uso de la heurística de anclaje y ajuste son de particular interés para la elicitación, ya que pueden aplicarse a cualquier tipo de juicio cuantitativo, en consecuencia, ambas estimaciones de probabilidad y los juicios de cantidades observables pueden estar sujetos a efectos de anclaje (O'Hagan et al, 2006).

2.2. Proceso de Elicitación

2.2.1. Identificación y Selección de Expertos

Un experto es alguien que tiene habilidades especiales o formación en un área que se traduce en un conocimiento excepcional o el acceso al conocimiento (Bonano et al, 1989), su identificación se puede dar por diversos métodos como lo son búsquedas bibliográficas, búsquedas de registros de organizaciones profesionales, contactos con empresas consultoras, laboratorios de investigación, organizaciones no gubernamentales y universidades que proporcionan información sobre posibles expertos (Hora y von Winterfeldt, 1997). Bonano et al (1989) hacen referencia sobre tres tipos de expertos: generalistas, especialistas y expertos normativos. Los expertos generalistas deben de tener conocimiento sobre diversos aspectos generales del tema a tratar y una comprensión general de los aspectos técnicos del problema, pero no necesariamente están en la vanguardia de cualquier especialidad dentro de su disciplina principal. Los especialistas por su parte, están en la vanguardia de una especialidad, pero a menudo no tienen conocimiento de lo generalista acerca de cómo su experiencia contribuye a la evaluación de la actuación global. Los expertos normativos suelen tener formación en teoría de la probabilidad, psicología y el análisis de decisiones, ayudan a los generalistas y especialistas con conocimientos sustantivos en la articulación de sus juicios profesionales y procesos de pensamiento para que puedan ser utilizados de manera significativa en la evaluación del desempeño. Una evaluación de rendimiento de alta calidad requiere el trabajo en equipo de los tres tipos de expertos.

Cuando en un proceso de elicitación se presenta controversia o puntos de vista alternativos referentes al tema a tratar es importante considerar un proceso de nombramiento formal, donde se inviten a grupos de interés público, así como organizaciones profesionales a presentar candidatos para así evitar más adelante las críticas de que los expertos fueron seleccionados de un grupo selecto que comparte sólo uno de varios puntos de vista posibles. Los criterios para la selección de un grupo de expertos deben ser específicos y deben documentarse. Estos criterios podrían incluir (Hora y von Winterfeldt, 1997):

- Evidencia tangible de especialización.
- Reputación.
- Disponibilidad y voluntad de participar.
- Comprensión del problema en general.
- Imparcialidad.
- La falta de un interés económico o personal en los resultados potenciales.

Hora y von Winterfeldt (1997) recomiendan tener en cuenta que cuando hay múltiples puntos de vista, es importante que exista equilibrio entre los expertos. Sin ese equilibrio, el verdadero estado de incertidumbre en una situación dada puede ser subestimado significativamente.

2.2.2. Motivación de Expertos

Al inicio de la sesión de elicitación, es fundamental explicar a los expertos por qué se requieren sus juicios y cómo éstos van a ser utilizados. El experto debe tener la claridad de los procedimientos, el propósito y el uso del mismo (O'Hagan et al, 2006). A menudo los expertos desconfían del proceso de estimación de probabilidad, pues normalmente son ellos los propios científicos y prefieren confiar en el proceso de la ciencia para generar conocimiento, sus opiniones pueden o no ser correctas, y de ahí que dude de expresar esas opiniones. Sin embargo el hecho es que se debe de tomar una decisión con la información limitada disponible (Clemen y Reilly, 2004), pero también es importante determinar si ¿hay algo en la estructura de recompensas frente al tema que podría influir en sus elicitaciones de probabilidad? Las dos posibilidades principales son el sesgo de la administración (si lo que quieren es reducir al mínimo, entonces vamos a minimizarlo) y el sesgo del experto (soy el experto en esto, entonces, yo no supongo tener incertidumbre sobre esto). Durante esta etapa el analista debe establecer una buena relación con el experto, estimular un poco su entusiasmo para el proceso de elicitación, como también determinar si existe un potencial significativo para el sesgo de motivación, el cual puede ocurrir debido a que el experto tiene un interés en el tema que puede conducir a distorsiones conscientes o inconscientes de sus juicios (Shephard y Kirkwood, 1994).

2.2.3. Estructuración y Descomposición

La etapa de estructuración y descomposición es también conocida como la etapa de exploración del conocimiento, en la estructuración es donde se identifican variables específicas para las que se necesitan juicios y se explora la comprensión de los expertos de la causalidad y las relaciones estadísticas entre las variables relevantes (Clemen y Reilly, 2004). La descomposición consiste en romper una tarea de juicios en partes que pueden ser tratadas con mayor facilidad. Es así como la sesión de elicitación comienza con facilitar al experto la situación del tema a tratar, el analista debe pedir al experto un breve resumen de su enfoque del problema y en particular la estructura del problema y la descomposición utilizada; después de este intercambio el analista debe definir una hoja de ruta para determinar la cantidad del resto del trabajo de la elicitación. En el caso de tener un evento o variable en descomposición, el analista primero debe trazar una descomposición aproximada para describir claramente la lógica utilizada y simplificar las tareas de juicio (Bonano et al, 1989). En esta etapa el objetivo es desarrollar un modelo general (expresado por ejemplo como un diagrama de influencia) que refleje el pensamiento de los expertos sobre las relaciones entre las variables; así el modelo resultante puede ser una descomposición elaborada del problema original, mostrando qué distribuciones de probabilidad se deben estimar condicionadas a otras variables, el modelo da indicación del orden en el que deben realizarse las estimaciones de probabilidad.

2.2.4. Entrenamiento en Probabilidad

Debido a que muchos expertos no tienen formación básica en estadística en la estimación de probabilidad, es importante explicar los principios de estimación de probabilidades, proporcionar información sobre los sesgos inherentes en el proceso y la manera de contrarrestar esas tendencias, de tal forma que los expertos tengan la oportunidad de practicar al realizar estimaciones de probabilidad (Clemen y Reilly, 2004). Según Jenkinson (2005) el entrenamiento de probabilidad para los expertos debe contar con tres partes fundamentales:

- Probabilidad y distribución de probabilidad.
- Información sobre las heurísticas y sesgos de juicio más comunes, incluyendo consejos sobre cómo superarlos.

- Elicitaciones prácticas, en particular utilizando ejemplos donde se sabe la verdadera respuesta, pero con pocas probabilidades de ser conocidas por cualquiera de los expertos.

Bonano et al (1989) también resaltan la importancia del entrenamiento de los expertos en diversos aspectos con tres tareas.

- Familiarizar a los expertos con el proceso de juicio de expertos y motivarlos para proporcionar juicios formales.
- Dando la práctica a los expertos en expresar sus juicios formalmente.
- Educar a los expertos sobre los posibles sesgos en la opinión de expertos y la aplicación de técnicas.

Para realizar estas tareas es conveniente convocar a los expertos de forma individual o en grupo por lo menos un día antes de la elicitación real. Lo ideal es que la sesión de entrenamiento sea dirigida por un experto en normativa con un profundo conocimiento y experiencia en el arte y la ciencia de los procesos de juicio de expertos formales (Bonano et al, 1989).

2.2.5. Elicitación de Probabilidad y Verificación

En esta etapa los expertos hacen las estimaciones de probabilidad requeridas, por lo general bajo la dirección de una persona entrenada en el proceso de elicitación de probabilidad. Las estimaciones del experto se chequean para asegurarse de que son coherentes (probabilidades suman 1, las probabilidades condicionales son consistentes con las estimaciones de probabilidad marginales y conjuntos, y así sucesivamente). Como parte de este proceso, un experto puede proporcionar una serie de razonamientos para las estimaciones, si se hace, puede ayudar a establecer un fundamento claro para aspectos específicos de las distribuciones estimadas (por ejemplo, los valores extremos de una variable o relaciones de dependencia particulares), al mismo tiempo, fomentar un examen a fondo de la base de conocimientos del experto lo cual puede ayudar a contrarrestar los prejuicios asociados a las heurísticas psicológicas de representatividad, disponibilidad, anclaje y ajuste (Clemen y Reilly, 2004).

2.2.6. Técnicas de Elicitación

Un método de elicitación forma un puente entre las opiniones de un experto y una expresión de estas opiniones en una forma estadísticamente útil, así el desarrollo de un método de elicitación requiere una cierta comprensión tanto de la parte psicológica como de la parte estadística (Garthwaite et al, 2005). Una técnica de elicitación utilizada por el estadístico no provoca una verdadera distribución a priori, pero en un sentido ayuda a elaborar una estimación de una distribución a priori del conocimiento previo del experto (Winkler, 1967). En el proceso de elicitación se puede distinguir dos procedimientos como lo son:

1. **Métodos directos:** son apropiados para elicitar la distribución a priori de parámetros de interés que son intuitivos, por ejemplo medidas de localización o proporciones; entre los principales métodos están (Correa, 2014):

   - **Función de distribución acumulada (CDF):** en este método se le da al experto el valor de un parámetro θ_i y luego se le pregunta por la probabilidad de que el valor real sea menor que el valor del parámetro dado. Esto se repite para varios valores de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ que luego son graficados como una CDF y unidos entre sí con una curva suave (Jenkinson, 2005).
   - **Función de densidad de probabilidad (PDF):** el experto especifica el valor más probable de p, digamos $\hat{p}$, y luego evalúa otros puntos de la función de distribución de probabilidad para p. El procedimiento realizado es similar al del CDF solo que se grafica la función de densidad en lugar de la función de distribución (Jenkinson, 2005).

2. **Métodos indirectos:** estos métodos facilitan el proceso de elicitación del parámetro de proporción p ya que se requiere un menor conocimiento de la teoría de probabilidad, (Correa, 2014).

   - **Método a mano alzada:** este método es una de las primeras aproximaciones al proceso de la distribución a priori, se grafica en el eje horizontal un rango de valores del parámetro a determinar y el eje vertical corresponde a las probabilidades, en este método se pide al experto ubicar un punto en el plano XY donde él considere que se concentra la mayor probabilidad (Correa, 2014).
   - **Método cuantil o intervalo creíble:** este método consiste en preguntar al experto su estimación promedio de p y dar uno o más cuantiles de la distribución subjetiva de p (por lo general al menos dos). Estos pueden ser graficados bajo una función de distribución acumulada que pasa por ellos, y se selecciona una distribución cuyos cuantiles son similares a los que el experto dio (Garthwaite et al, 2005).
   - **Muestra hipotéticas futuras (HFS):** el experto estima primero la proporción en cuestión y luego revisa su opinión a la luz de información a partir de muestras adicionales (hipotética), (Garthwaite et al., 2005).
   - **Información muestral a priori equivalente (EPS):** en este método el experto expresa su conocimiento como una muestra a priori equivalente, (Winkler, 1967; Garthwaite et al., 2005).

- **Apuesta y loterías:** este método se desarrolla bajo la ganancia real o hipotética, por lo cual pueden estar sujetos a efectos causados por la función de utilidad (Kadane y Winkler, 1988).

2.2.7. Calibración y Retroalimentación

Las estimaciones de probabilidad subjetivas juegan un papel clave en la toma de decisiones; a menudo es necesario contar con un experto para evaluar la probabilidad de algún evento futuro, ¿qué tan buenas son esas estimaciones?, un aspecto importante de su calidad se llama calibración, la cual mide la validez de las estimaciones de probabilidad. Las opiniones de un experto están bien calibradas si en el largo plazo, para todos los eventos asignados de probabilidad p, la proporción que se produce o es cierta es de hecho p. La calibración puede ser evaluada empíricamente mediante la observación de sus estimaciones de probabilidad, la verificación de las proposiciones asociadas, y luego observar la proporción verdadera en cada categoría de respuesta. Estar bien calibrado es fundamental para la toma óptima y el desarrollo de las técnicas de decisión (Lichtensteinl et al, 1980). La mayoría de los estudios de juicio de probabilidad han encontrado que los juicios tienden a ser demasiado confiados y que el grado de exceso de confianza es mayor dependiendo de la complejidad del tema a tratar. La provisión de retroalimentación apropiada puede conducir a mejoras significativas en la calibración (Bolger y Önkal, 2004).

La base principal para mejorar las estimaciones de los expertos es la retroalimentación precisa y bien resumida. La retroalimentación y el entrenamiento son complementos útiles para el proceso de elicitación, pues estos pueden mejorar las estimaciones de los expertos ayudando a reducir los efectos de exceso de confianza. Los expertos sin formación hacen considerablemente peores estimaciones de probabilidad que los que tienen entrenamiento y retroalimentación apropiada, el entrenamiento puede mejorar el razonamiento analítico y los juicios coherentes (Burgman et al, 2007).

Benson y Önkal 1992, hablan sobre las diversas formas que la retroalimentación de expertos puede tomar, entre ellas están:

- **Retroalimentación de resultados:** corresponde a la información sobre los resultados de los eventos previos que han sido estimados o pronosticados por el experto.
- **Retroalimentación de rendimiento:** se refiere a la información sobre la exactitud de las predicciones anteriores del experto (retroalimentación del *scoring rule* y la retroalimentación de calibración).
- **Información de tarea:** consiste en la información sobre el evento que se predijo, incluidos los factores que pueden influir en él.

- **Retroalimentación de resolución:** corresponde a la información sobre la capacidad del experto para diferenciar juicios correctos e incorrectos por los niveles de confianza asignados.

- **Retroalimentación del proceso:** hace referencia a la información sobre los procesos cognitivos utilizados por el experto, como la percepción, la utilización de pruebas y desarrollo de estimaciones. Las sesiones de retroalimentación del proceso por lo general se hacen individual, intensiva, una evaluación tras otra.

- **Retroalimentación de calibración:** consiste en la información completa sobre el desempeño, incluyendo los resultados, el rendimiento y la información de la tarea.

En general, la retroalimentación sobre la calibración parece ser constantemente el enfoque más exitoso en ayudar a las personas a mejorar su precisión. Las principales limitaciones son que por lo general requieren un gran número de estimaciones similares para generar retroalimentación útil de calibración, y es menos adecuado para eventos que ocurren una sola vez (Burgman et al, 2007).

2.3. Múltiples Expertos

Consultar múltiples expertos puede ser visto como una versión subjetiva de aumentar el tamaño de la muestra en un experimento. Dado que la información subjetiva frecuentemente se considera "más suave" que "los fuertes datos científicos" parece particularmente apropiado consultar varios expertos en un intento de reforzar la base de información. El principio fundamental que subyace en el uso de múltiples expertos es que un conjunto de expertos tiene más información que un solo experto. A pesar de que en algún momento es razonable disponer de la distribución de probabilidad de los expertos por separado, es necesario combinar las distribuciones de los expertos en una sola distribución que represente el conocimiento del conjunto de ellos. Este procedimiento de combinar o agregar distribuciones a menudo se realiza por medio de métodos matemáticos y de comportamiento, aunque en la práctica la agregación podría implicar algunos aspectos de cada uno (Clemen y Winkler, 1999).

2.3.1. Métodos de Agregación Matemáticos

Consisten en procesos o modelos analíticos que operan en la distribución de probabilidad individual para producir una única distribución de probabilidad "combinada", este método va desde simples medidas de resumen, como la media aritmética o geométrica de las probabilidades hasta los procedimientos basados en enfoques axiomáticos o en varios modelos del proceso de agregación de información que requieren insumos respecto a las características, tales como la calidad y la dependencia entre las probabilidades de los expertos (Clemen y Winkler, 1999).

2.3.1.1. Enfoque Axiomático

Los primeros trabajos sobre la agregación matemática de probabilidades se centraron en las fórmulas de agregación basada en axiomas, donde la estrategia de este enfoque es postular ciertas propiedades que la distribución combinada debe seguir y luego derivar la forma funcional de la distribución combinada. Los dos principales enfoques axiomáticos son (Clemen y Winkler, 1999):

Pool de opiniones lineales: es una combinación lineal ponderada de las probabilidades de los expertos y como tal se entiende y se calcula fácilmente; por otra parte, es el único esquema de combinación que satisface la propiedad de la marginación. La expresión para calcular el pool de opiniones lineales está dada por (Clemen y Winkler, 1999):

$$p(\theta) = \sum_{i=1}^{n} w_i p_i(\theta) \tag{2-1}$$

donde n es el número de expertos, $p_i(\theta)$ representa la distribución de probabilidad del i-ésimo experto para el parámetro desconocido θ, w_i representa la calidad relativa de los diferentes expertos y la suma de las ponderaciones de w_i debe ser igual a uno.

Pool de opiniones logarítmicas: es un promedio multiplicativo de la media geométrica ponderada de las densidades, este enfoque satisface el principio externo Bayesiano. Se calcula por medio de la siguiente ecuación (Clemen y Winkler, 1999):

$$p(\theta) = k \prod_{i=1}^{n} w_i p_i(\theta) \tag{2-2}$$

donde k es una constante de normalización y las ponderaciones w_i satisfacen algunas restricciones para asegurar que $p(\theta)$ es una distribución de probabilidad, generalmente las ponderaciones se restringen a que su suma sea igual a uno. Si las ponderaciones son iguales a $\frac{1}{n}$ la distribución combinada es proporcional a la media geométrica de las distribuciones individuales.

2.3.1.2. Enfoque Bayesiano

El enfoque bayesiano implica que el grupo de expertos debe proporcionar información sobre ciertos acontecimientos o cantidades a un tomador de decisiones (a veces llamado un supra-bayesiano) que actualiza una distribución a priori usando el teorema de Bayes. Es decir si n expertos proporcionan información $g_1, g_2, \ldots, g_n$ a un tomador de decisiones respecto a algún evento o cantidad θ de interés, entonces el tomador de decisiones utiliza el teorema de Bayes para actualizar la distribución a priori $p(\theta)$ de la siguiente forma (Clemen y Winkler, 1999; Jenkinsom, 2005):

$$p^* = p(\theta|g_1, \ldots, g_n) \propto \frac{p(\theta)L(g_1, \ldots, g_n)}{p(g_1, \ldots, g_n)} \tag{2-3}$$

donde L representa la función de probabilidad asociada con la información de los expertos.

Clemen y Winkler (1999) describen cuatro modelos para la combinación de probabilidades que pueden ser aplicados cuando se pide al experto estimar la probabilidad de ocurrencia de un evento $\theta = 1$ (es decir, que el evento ocurre). Denotemos $p_i (i = 1, \ldots, n)$ como el i-ésimo experto que indica que el evento ocurre, expresado en términos de probabilidades posteriores de la ocurrencia de θ, $q^* = p^*/(1-p^*)$. Los modelos son los siguientes:

1. **Independencia:** este modelo refleja el concepto de que cada experto aporta información independiente para el problema de estimación de p^*.

   $$q^* = \frac{p_0}{1-p_0} \prod_{i=1}^{n} \frac{f_{li}(p_i|q=1)}{f_{0i}(p_i|q=0)} \tag{2-4}$$

   donde f_{li} (f_{0i}) representa la probabilidad del experto i dada la probabilidad condicional de ocurrencia (no ocurrencia) de θ, y p_0 denota la probabilidad a priori $p(\theta = 1)$

2. **Genest & Schervish:** este modelo se deriva del supuesto de que el tomador de decisiones puede evaluar únicamente ciertos aspectos de la distribución marginal de probabilidad p_i del experto i. Es similar al modelo de independencia pero permite una calibración errónea de los $p_i s$ en una manera específica.

   $$q^* = \frac{p_0^{1-n} \prod_{i=1}^{n} p_0 + \lambda_i(p_i - \mu_i)}{(1-p_0)^{1-n} \prod_{i=1}^{n} 1 - [p_0 + \lambda_i(p_i - \mu_i)]} \tag{2-5}$$

   donde μ_i es el valor esperado marginal del tomador de decisiones de p_i y λ_i es interpretado como el coeficiente de regresión lineal de θ en p_i.

3. **Bernoulli:** este modelo invoca la idea de que la información de cada experto es equivalente a una muestra de un proceso de Bernoulli con parámetro θ. El resultado de p^* es una combinación convexa de la $p_i s$ con los coeficientes interpretados como directamente proporcional a la cantidad de información que cada experto tiene.

   $$p^* = \sum_{i=1}^{n} \beta_i p_i \tag{2-6}$$

4. **Normal:** este modelo capta la dependencia entre las probabilidades de los expertos a través de las funciones de verosimilitud normales multivariantes.

   $$q^* = \frac{p_0}{1-p_0} \mathrm{Exp}[q' \Sigma^{-1}(M_1 - M_0) - (M_1 + M_0)' \Sigma' (M_1 - M_0)/2] \tag{2-7}$$

donde $q^{'} = (\log[\frac{p_1}{1-p_1}], \ldots, \log[\frac{p_n}{1-p_n}])$ es el vector log-odds dado por los expertos, los primeros denotan transposición y funciones de probabilidad de q, condicionadas a $\theta = 1$ o $\theta = 0$, se modelan como una normal con media M_1 y M_0, respectivamente, con igual matriz de covarianza Σ.

Estos cuatro modelos son consistentes con el paradigma bayesiano, sin embargo, son claramente diferentes. El punto no es que uno sea más apropiado que otro, en general, los diferentes modelos pueden ser adecuados en diferentes situaciones, dependiendo de la naturaleza de la situación y una descripción adecuada de las probabilidades de los expertos. Técnicamente, estas diferencias dan lugar a diferentes funciones de verosimilitud, que a su vez dan lugar a los diferentes modelos (Clemen y Winkler, 1999).

2.3.2. Métodos de Agregación de Comportamiento

La agregación de comportamiento se aproxima para generar acuerdo entre los expertos haciendo que interactúen de algún modo; esta interacción puede ser cara a cara, interacción por la computadora o puede implicar el intercambio de información sin contacto directo. Los enfoques conductuales considera la calidad de los juicios de expertos individualmente y la dependencia entre tales juicios implícita más que explícitamente. Como se comparte información, se espera que los mejores argumentos e información sean más importantes para influir en el grupo y que la información redundante se descarte. El énfasis se coloca a veces en el intento de llegar a un acuerdo o consenso dentro del grupo de expertos; mientras que en otras ocasiones se coloca simplemente en el intercambio de información para que los expertos aprendan unos de otros. En la interacción de grupo puede sufrir de muchos problemas, pues algunos expertos tienden a dominar los debates, nuevas ideas pueden ser desalentadoras, o el grupo puede ignorar información importante; en el fenómeno de grupo se puede producir la polarización, en el que un grupo tiende a adoptar una posición más extrema que sus órdenes de información (Clemen y Winkler, 1999).

2.3.2.1. Método Delphi

Listone y Turoff (2002) definen el método Delhpi como un método de estructuración de un proceso de comunicación de grupo de manera que el proceso es efectivo en permitir que un grupo de individuos, como un todo, para tratar un problema complejo. Para llevar a cabo esta "comunicación estructurada" se proporciona alguna retroalimentación de las contribuciones individuales de la información y el conocimiento; algunas estimaciones de grupos de juicios, alguna oportunidad para los individuos revisar puntos de vista y cierto grado de anonimato de las respuestas individuales. Dalkley (1969) expone las características definitorias del método Delphi, las cuales marcan su identidad como una técnica de grupo. Estas características son:

- **Proceso iterativo:** los expertos deben emitir su opinión en más de una ocasión. A través de sucesivas rondas las estimaciones de los participantes tienden a converger, finalizando el proceso en el momento en el que las opiniones se estabilizan. Esta característica ofrece al experto la posibilidad de reflexionar y en su caso, reconsiderar su postura, debido a la aparición de nuevos planteamientos propios o ajenos.

- **Anonimato:** implica que ningún miembro del grupo debe conocer las respuestas particulares que corresponden a cada uno de los otros participantes. Esta característica tiene como fin reducir el efecto de elementos dominantes del grupo, como también se busca eliminar algunas de las causas que impulsan la inhibición de los participantes. No hay nunca interacción directa entre los participantes.

- **Retroalimentación:** el método Delphi mantiene y promueve la interacción, solicitándolas a veces expresamente en cada ronda, y facilitándola antes de la iniciación de la siguiente, se transmite siempre la posición general del grupo en cada momento del proceso frente al problema analizado. La filtración o control de la comunicación entre los expertos por parte del grupo coordinador tiene como finalidad evitar la aparición de ruidos, es decir, la transmisión de información no relevante para el objetivo del estudio, redundante o incluso errónea.

- **Respuesta estadística de grupo:** cuando se realiza una estimación numérica, la respuesta del grupo viene caracterizada generalmente por la mediana de las respuestas individuales. Aunque se promueva el consenso éste no es el objetivo último y no tiene por qué alcanzarse necesariamente. El rango Intercuartílico de las estimaciones será el indicador del nivel del consenso, o de dispersión de las respuestas. La respuesta estadística de grupo garantiza que las aportaciones de todos los miembros estén presentes en las respuestas del grupo y también reduce la presión hacia la conformidad.

Landeta (1999) habla de que el punto de partida para el desarrollo de un proceso Delphi es la existencia de un problema que pueda ser tratado convencionalmente por medio de esta metodología; a partir de ahí el investigador encargado de llevarlo a cabo, solo o lo que es más habitual en grupo (grupo coordinador), contacta a un grupo de personas (expertos), cuyos conocimientos, características y experiencias se estiman a priori como apropiados para la consecución del objetivo del estudio. Una vez asegurada la participación de un plantel adecuado de expertos, el grupo coordinador traslada el tema objeto de estudio a preguntas o demandas aptas, que permitan efectuar sobre las estimaciones de los expertos individuales un tratamiento estadístico posterior que dé lugar a una respuesta estadística de grupo. Éste es el caso de estimaciones de cantidades numéricas (fechas, número de unidades, puntuaciones, etc), de probabilidades o de jerarquizaciones de ítems; para alguna de estas alternativas se puede facilitar a los expertos una relación de ítems confeccionada por el grupo coordinador para que la jerarquicen o la valoren, de modo que sean los propios expertos los que proporcionen los items sobre los que van a trabajar, después previa clasificación y sumarización de sus aportaciones por el grupo coordinador.

Las preguntas diseñadas son enviadas a los expertos. A la recepción de las respuestas, el grupo coordinador procede a la agregación de las distintas estimaciones individuales, extrayendo una medida de tendencia central de la distribución obtenida, generalmente la mediana, que es tomada como respuesta del grupo. En las preguntas que lo permiten se estima también el rango intercuartílico de las respuestas, como medida de su dispersión. La mediana y el rango intercuartílico son remitidas a los expertos, junto con su respuesta individual anterior. Además en ocasiones, se adjunta la información adicional requerida o proporcionada por alguno de ellos, o simplemente facilitada por el grupo coordinador por considerarla de interés para el propósito de la investigación. A la luz de esta nueva información que se les envía, los expertos son requeridos para que revisen sus primeras estimaciones, si es que lo consideran oportuno. En todo caso cuando sus estimaciones caigan fuera del rango intercuartílico, suele ser habitual pedirles las razones de su postura o en que se basan para pensar que la mayoría está equivocada. Estas opiniones de los disidentes, debidamente sumarizadas por el grupo coordinador, serán enviadas a la totalidad del plantel, junto con el resto de información ya mencionada, para solicitarles un nuevo pronunciamiento sobre la misma cuestión. Las iteraciones del proceso continúan hasta que se percibe estabilidad en las respuestas, es decir, cuando su mediana prácticamente no oscila y el espacio intercuartílico deja de estrecharse. Esto indica que se ha llegado al máximo consenso al que se podía optar después del intercambio anónimo de información (Landeta, 1999) .

2.3.2.2. Técnica de Grupo Nominal

La técnica de grupo nominal fue desarrollada por Delbecq y Van de Ven en 1968, es un método estructurado de captación y agregación de opiniones con la particularidad de que los expertos están físicamente reunidos aunque trabajan de manera independiente. Esta técnica se emplea para tratar cuestiones o preguntas únicas o, si no es el caso, que puedan ser planteadas de una en una. El proceso necesita de la presencia y liderazgo de un facilitador o analista. Los pasos que se requieren para llevar a cabo este método son (Landeta, 1999):

- Planteamiento de la pregunta o tema en discusión.
- Generación individual de respuestas o estimaciones, por escrito y en silencio.
- Presentación al grupo de las ideas individuales, de una en una, por turnos y sin comentarios.
- Clasificación (no defensa) de las ideas o estimaciones individuales, una por una, de forma que todos los participantes la entiendan de la misma manera.
- Selección y jerarquización de forma individual y anónima de las aportaciones más interesantes.

- Integración y exposición de los resultados por parte del facilitador o analista del proceso.

La técnica de grupo nominal es esencialmente recomendable para identificar factores de problemas y generar ideas y soluciones en casos en los que haya que trabajar presencialmente con grupos en los que los miembros no tienen experiencia común en el trabajo en equipo y en los que es importante neutralizar las influencias no deseadas derivadas de las personalidades dominantes y de las diferencias entre sus miembros.

2.3.2.3. Mini-Delphi

Hemer (1967) citado en (Landeta, 1999) describe el funcionamiento de esta técnica como una versión simplificada del método Delphi en el que cada miembro del panel escribe sus propias estimaciones en presencia de los demás panelistas, después se revelan todas las aportaciones individuales, sin vincularlas a sus autores concretos (ésa es la principal diferencia con el grupo nominal), se debate en grupo y se vuelve a estimar las opiniones de forma escrita, individual e independiente (posiblemente modificadas por la interacción de grupo), aceptándose la mediana de estas nuevas estimaciones como la decisión de grupo. Entre los principales aspectos positivos del mini-Delphi están:

- Rapidez, pudiéndose realizar en un mismo día numerosas iteracciones.
- Permite una relativa interacción abierta, con lo que se evitan problemas de errores de interpretación.
- Aumenta la motivación.
- Facilita el intercambio de información.

El mini-Delphi es particularmente indicado para la realización de previsiones o valoraciones de grupo cuando se dispone de poco tiempo, se cuenta con los expertos necesarios y se tiene especial interés en guardar en lo posible el anonimato de las respuestas de los mismos para evitar los fenómenos psicológicos no deseados que frecuentemente se dan en este tipo de grupos de trabajo (Landeta, 1999).

2.3.2.4. Impactos Cruzados

Dalkey (1971) citado en Landeta (1999) define el método como una revisión de las probabilidades estimadas de eventos futuros en términos de las interrelaciones que pueden producirse entre diferentes sucesos que están previstos a que ocurran. Esta técnica proporciona una metodología que mejora las estimaciones subjetivas probabilísticas de los expertos sobre acontecimientos futuros diversos, emitidas generalmente vía Delphi, mediante la consideración de las interrelaciones entre dichos acontecimientos, estimadas así mismo por los expertos, y la aplicación de un proceso matemático-estadístico corrector que da coherencia al conjunto de estimaciones. El proceso habitual del método es el siguiente (Landeta, 1999).

- Identificación de los sucesos o variables importantes a estudiar.
- Estimación de probabilidades de ocurrencia en un periodo determinado (probabilidades a priori).
- Estimación de la interdependencia de las variables.
- Manipulación estadístico-matemática, donde las probabilidades iniciales de cada evento son modificadas por el impacto de los demás sucesos en el sistema.
- Reestimación de las probabilidades de ocurrencia futura.
- Análisis de sensibilidad (opcional), tiende a determinar qué eventos son más influyentes sobre los demás y cuáles son más fácilmente influibles directa o indirectamente.

2.3.2.5. EDSIM

El EDSIM es presentado por Weaver en 1971 como una derivación del método Delphi, este método renuncia al anonimato en aras de conseguir una mayor interacción y aprovechar las consecuencias motivacionales positivas de la comunicación abierta, también busca hacer reflexionar sobre el futuro como algo complejo e influido por multitud de factores; los resultados finales no se puede saber si serán ciertos, pero sí que serán razonados y argumentados. El proceso del EDSIM se realiza con las siguientes fases (Landeta, 1999):

Fase 1: Clarificación por los participantes de sus propias asunciones acerca del futuro.

- Asignar la fecha más probable a un evento, haciendo pensar a los expertos en forma de distribución triangular (considerando fechas antes de la cual consideran muy improbable que ocurra el evento, fecha más probable; fecha a partir de la cual consideran muy improbable que suceda el evento).
- Considerar y escribir los factores que podrían influir en retardar la ocurrencia del evento.
- Considerar y escribir los factores que podrían contribuir positivamente a acelerar la ocurrencia del evento.
- Retroalimentación en pequeños grupos.
- Conclusiones de cada pequeño grupo.
- Puesta en común entre grupos.

- Integración de los resultados por parte del facilitador o analista y exposición de los mismos.

Fase 2: Clarificación de las implicaciones de las asunciones que mantienen acerca del futuro.

- Matriz de impactos cruzados entre una serie de eventos posibles y relevantes.
- Identificación del suceso de mayor impacto sobre los demás.
- Estimar la fecha de suceso de ese evento mediante el proceso descrito en la fase 1.

Fase 3: Definición del proceso de llegada al futuro.

- Construcción de una cadena de prerrequisitos que se deberían dar para llegar al evento de un alto impacto seleccionado.
- Trabajo en pequeños grupos.
- Interacción entre los grupos.

Fase 4: Construcción del futuro.

- Considerar y escribir las opciones disponibles para acercar en el tiempo el suceso del evento en cuestión.
- Diseñar las opciones en forma de objetivos a corto y largo plazo.
- Formular estrategias para alcanzar los objetivos.
- Construcción de escenarios: definidos por las asunciones y argumentos acerca del futuro y por las acciones a tomar para encaminarlo en la dirección posible deseada.
- Valoración del escenario tanto en lo social, como cultural, tecnológico y humano.

El método EDSIM puede ser útil para grupos de reflexión acerca del futuro; podría ser así empleado como un instrumento para la planificación estratégica empresarial o institucional.

2.4. Análisis de Cluster

En el desarrollo de la metodología se va a realizar un análisis de cluster el cual nos ayuda a entender cómo se puede clasificar el comportamiento de los expertos por cada ronda elicitada. El análisis cluster, conocido como análisis de conglomerados, es una técnica estadística multivariante que busca agrupar elementos o variables tratando de lograr la máxima homogeneidad en cada grupo y la mayor diferencia entre los grupos, es un método basado en criterios geométricos y se utiliza fundamentalmente como una técnica exploratoria y descriptiva (Johnson y Wichern, 2002).

2.5. Distribución Binomial

La distribución Binomial es utilizada para caracterizar el número de éxitos en n ensayos Bernoulli. Se utiliza para modelar algunos experimentos muy comunes en los que se lleva a cabo n veces un experimento en el que podemos obtener éxito, E, con probabilidad π y fracaso F, entonces el número de éxitos en los que ocurre E puede ser presentado por una variable aleatoria X que tiene una distribución binomial con parámetros n, π. Esto ocurre cuando se toma una muestra de tamaño n de una población infinita de tal manera que cada elemento se selecciona independientemente y tiene la misma probabilidad, π, de presentar un atributo específico (Zwillinger y Kokoska, 2000; Johnson et al, 2005). La probabilidad de obtener x éxitos viene dada por la siguiente función de probabilidad:

$$P[X = x] = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \pi^x (1-\pi)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n \tag{2-8}$$

Su media y varianza vienen dadas por:

$$E(X) = n\pi; \qquad Var(X) = n\pi(1-\pi) \tag{2-9}$$

La a priori conjugada natural de la distribución Binomial es la Beta, esta tiene la propiedad de tener la misma forma funcional de la verosimilitud, lo que significa que la información a priori puede ser interpretada de la misma manera que la información en la función de verosimilitud, como lo muestra el teorema 1 dado en el apéndice A.

2.5.1. Métodos de Elicitación para los Parámetros de la Distribución Beta

La distribución Beta contiene una amplia variedad de formas, incluyendo las distribuciones tanto unimodales como bimodales (Gavasakar, 1998). Entre las familias de distribuciones a priori la familia Beta es una primera opción obvia por ser esta una distribución conjugada natural (Raiffa y Schlaifer 1961). Algunos de los métodos que se han desarrollado para elicitar los parámetros $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ de la distribución Beta son:

- **El Método de Fox (1966):** este método pide al experto una estimación de la probabilidad del valor modal, llamado $\hat{m}$, y luego pide su probabilidad subjetiva, digamos u, tal que la moda verdadera se encuentre en el intervalo $(\hat{m} - K\hat{m}, \hat{m} + K\hat{m})$, donde $0 < K < 1$ es dada al experto por el facilitador. La estimación de los parámetros $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ se encuentran mediante las siguientes ecuaciones:

$$\hat{m} = \frac{\hat{\alpha} - 1}{\hat{\alpha} + \hat{\beta} - 2} \tag{2-10}$$

$$u = \int_{\hat{m}-K\hat{m}}^{\hat{m}+K\hat{m}} \frac{\pi^{(\hat{\alpha}-1)}(1-\pi)^{(\hat{\beta}-1)}}{B(\hat{\alpha},\hat{\beta})} d\pi \tag{2-11}$$

La ecuaciones 2-10 y 2-11 se pueden resolver utilizando la tabla de la función Beta incompleta.

- **El Método de Gross (1971):** este método requiere que el experto de su valor medio, $\hat{p}$ de la distribución de probabilidad de éxito, luego se le pide al experto su probabilidad subjetiva, u, tal que la media real esté en el intervalo $(0, k\hat{p})$, donde $0 < k < 1$ es dado al experto por el facilitador. Similar al método de Fox, las ecuaciones requeridas son la fórmula para la media de la distribución Beta y la integral de la densidad en el intervalo $(0, k\hat{p})$:

$$\hat{p} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}+\hat{\beta}} \tag{2-12}$$

$$u = \int_{0}^{k\hat{p}} \frac{\pi^{(\hat{\alpha}-1)}(1-\pi)^{(\hat{\beta}-1)}}{B(\hat{\alpha},\hat{\beta})} d\pi \tag{2-13}$$

- **El Primer Método de Duran y Booker (1988):** es similar al de Gross, excepto que en lugar de dar al experto un intervalo y pedir la probabilidad, el analista da al experto una probabilidad, u, y se le pide estimar el valor de k_u, tal que la probabilidad de que el verdadero valor de la media esté en el intervalo $(0, k_u)$ es u. las ecuaciones que se deben resolver son las mismas, sólo cambia el límite superior de la integral por k_u.

$$\hat{p} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}+\hat{\beta}} \tag{2-14}$$

$$u = \int_{0}^{k\hat{u}} \frac{\pi^{(\hat{\alpha}-1)}(1-\pi)^{(\hat{\beta}-1)}}{B(\hat{\alpha},\hat{\beta})} d\pi \tag{2-15}$$

- **El Primer Método de Weiler (1965):** es también similar al de Gross, pero el intervalo que se le pide al experto evaluar es la probabilidad de que la media real se encuentre dentro es $(2\hat{p}, 1)$ y estos valores son usados en los límites de la integral.

- **El Segundo Método de Weiler (1965):** el facilitador da una probabilidad u, luego le pide al experto estimar dos valores k_1 y k_2, con $k_1 < k_2$, tal que la probabilidad de que la verdadera media este en el intervalo $(0, k_1)$ es u y la probabilidad de que la verdadera media este en el intervalo $(k_2, 1)$ sea también u. Las ecuaciones que se deben resolver para los parámetros son:

$$u = \int_0^{k_1} \frac{\pi^{(\hat{\alpha}-1)}(1-\pi)^{(\hat{\beta}-1)}}{B(\hat{\alpha},\hat{\beta})} d\pi \tag{2-16}$$

$$1 - u = \int_0^{k_2} \frac{\pi^{(\hat{\alpha}-1)}(1-\pi)^{(\hat{\beta}-1)}}{B(\hat{\alpha},\hat{\beta})} d\pi \tag{2-17}$$

- **El Segundo Método de Duran y Booker(1988):** es similar al segundo método de Weiler. Una vez más dos valores k_1 y k_2 son elicitados, pero esta vez se representan los extremos superiores de los intervalos de tal manera que la probabilidad de que la media verdadera se encuentra en $(0, k_1)$ es u_1 y para $(0, k_2)$ es u_2, donde u_1 y u_2 son dados al experto por el facilitador. Las ecuaciones son las mismas que en el segundo método de Weiler, excepto que las integrales se ajustan a la igualdad de u_1 y u_2, respectivamente.

$$u_1 = \int_0^{k_1} \frac{\pi^{(\hat{\alpha}-1)}(1-\pi)^{(\hat{\beta}-1)}}{B(\hat{\alpha},\hat{\beta})} d\pi \tag{2-18}$$

$$u_2 = \int_0^{k_2} \frac{\pi^{(\hat{\alpha}-1)}(1-\pi)^{(\hat{\beta}-1)}}{B(\hat{\alpha},\hat{\beta})} d\pi \tag{2-19}$$

- **El Primer Método descrito por Pham Gia , Turkkan y Duong (1992)**: este método también requiere una estimación de la media, $\hat{p}$, de la probabilidad de éxito, pero la elección de la segunda cantidad es una estimación subjetiva de la desviación absoluta media respecto a la media, denotada $\delta_1(\pi)$. Soluciones numéricas de las siguientes ecuaciones luego dan las estimaciones de α y β.

$$\hat{p} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}+\hat{\beta}} \tag{2-20}$$

$$\delta_1(\pi) = \frac{2\Gamma(\hat{\alpha}/\hat{p})\hat{p}^{\hat{\alpha}+1}(1-\hat{p})^{((1/\hat{p})-1)\hat{\alpha}}}{\Gamma(\hat{\alpha}+1)\Gamma((1/\hat{p})-1)\hat{\alpha}} \tag{2-21}$$

- **El Segundo Método por Pham-Gia, Turkkan y Duong (1992):** este método pide al experto hacer una estimación de la mediana, $\hat{M}$ de su distribución para la probabilidad de éxito y una estimación de la desviación absoluta media de la mediana, denotada por $\delta_2(\pi)$. Las estimaciones de los parámetros se encuentran resolviendo numéricamente, las siguientes ecuaciones:

$$\int_0^{\hat{M}} \frac{\pi^{(\hat{\alpha}-1)}(1-\pi)^{(\hat{\beta}-1)}}{B(\hat{\alpha},\hat{\beta})} d\pi = 0{,}5 \tag{2-22}$$

$$\delta_2(\pi) = \frac{2\hat{M}^{\hat{\alpha}}(1-\hat{M})^{\hat{\beta}}}{(\hat{\alpha}+\hat{\beta})B(\hat{\alpha},\hat{\beta})} \tag{2-23}$$

Estos dos métodos de Pham Gia, Turkkan y Duong (1992) son los únicos métodos que no requieren que el analista dé al experto ningún valor en el cual él debería hacer sus estimaciones.

- **Método (PM) de Chaloner y Duncan (1983):** al experto se le dice que hay n ensayos Bernoulli y se le pide estimar el valor modal del número de éxitos $\hat{\lambda}$. El experto es preguntado cuanto menos probable es que el número de éxitos sea uno más y uno menos que el número modal, estas dos cantidades posteriormente son llamadas "dropoffs" y son definidas por:

$$d_l = \frac{P(X=\hat{\Lambda}-1)}{P(X=\hat{\lambda})}, d_r = \frac{P(X=\hat{\Lambda}+1)}{P(X=\hat{\lambda})}$$

Siempre y cuando, $d_l d_r > \frac{\hat{\lambda}(n-\hat{\lambda})}{(\hat{\lambda}+1)(n-\hat{\lambda}+1)}$ se satisface las estimaciones de los parámetros, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ se encuentran resolviendo la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} d_l(\hat{\lambda}+1) & -(n-\hat{\lambda}) \\ -\hat{\lambda} & d_r(n-\hat{\lambda}+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}-1 \\ \hat{\alpha}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-d_l)(n-\hat{\lambda}) \\ (1-d_r)(n-\hat{\lambda}-1)\hat{\lambda} \end{bmatrix}$$

- **Método de Gavasakar (1988):** este método es diferente de los anteriores, en él se utilizan muestras hipotéticas futuras, en lugar de estimar algunos parámetros de localización y escala. El método comienza como el de Chaloner y Duncan, donde se le pide al experto imaginar un conjunto de ensayos n_0 y se le pide el valor modal del número de éxitos, m_0. Luego se le pide al experto una muestra hipotética futura, que s_i éxitos se observaron en k_i ensayos, y se le pide que imagine otros ensayos n_i para dar su número modal de éxitos, m_i. Esto se repite de manera que se otorgan I muestras hipotéticas futuras. Tenga en cuenta que el analista tiene que dar al experto los valores de n y k. Gavasakar sugiere usar $n_i = 20$, $k_i = 25$ o 40 y para difundir los valores de k sobre el rango de resultados razonablemente probables. Las estimaciones de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ se encuentran por el método de mínimos cuadrados, minimizando la siguiente expresión

$$\sum_{i=0}^{I} \left[m_i - \left(\frac{(n_i+1)(\hat{\alpha}+s_i)}{\hat{\alpha}+\hat{\beta}+k_i} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 \tag{2-24}$$

donde $k_0 = s_0 = 0$

- **Método menos informativo de León, Vázquez y León (2003):** este método elicita la media y la moda y consiste en realizar los siguientes pasos:
  1. Pedir al experto la media λ y la moda d de la distribución a priori para los resultados que se espera obtener.
  2. Resolver los parámetros α y β teniendo en cuenta las respuestas del primer paso y considerando las siguientes ecuaciones:

     $$\lambda = a + (b-a)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad d = a + (b-a)\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$$

  3. Presentar al experto los resultados sobre la forma de la distribución de elicitación de sus respuestas en los pasos anteriores, solicitando su revisión y ajuste.
  4. Repetir los pasos 1-3 hasta que se logre un acuerdo.
- **Método más informativo de León, Vázquez y León (2003):** este método elicita la media y los tres cuartiles. Comenzando con una distribución Beta$(1,1)$, variando iterativamente los parámetros hasta que la mediana y el cuartil superior de la distribución coincidan con los elicitados. El cuartil inferior y la media de la distribución son chequeados contra los valores elicitados, la media y los cuartiles son re-elicitados si los valores no están lo suficientemente cerca. Para este método se deben realizar los siguientes pasos:
  1. Pedir al experto la media λ, la moda d y los cuantiles de la distribución que espera obtener.
  2. Compruebe si el intervalo cerrado definido por la primer cuantil q_1 y el tercer cuantil q_3 comprenden una región de alta densidad de $50\,\%$ para una distribución Beta con parámetros $\alpha = \beta = 1$.
  3. Si la condición en el paso anterior no se cumple, el parámetro α es incrementado en $0,001$, y el correspondiente parámetro β es generado con la relación $\beta = (\alpha-1)\frac{b-a}{d-a} - \alpha + 2$. Este paso se repite hasta que los parámetros α y β satisfagan las siguientes ecuaciones:

     $$F(q_2;\alpha,\beta) = 0{,}5, \qquad F(q_3;\alpha,\beta) = 0{,}75$$

     donde F es la función de distribución acumulada de Beta. Cuando se logra la convergencia, el intervalo q_1, q_3 define una región de alta densidad del $50\,\%$ para los parámetros $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$.
  4. La coherencia se comprueba examinando si el primer cuantil q_1 satisface $F(q_1;\alpha,\beta) \approx 0{,}25$ y la media $\mu = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}$.

5. Si el primer cuantil o la media obtenida a partir de la distribución elicitada se desvía más del 30 % de lo especificado en el primer paso, se debe pedir al experto volver a evaluar las cantidades elicitadas, hasta conseguir consistencia.

2.6. Elicitación Multivariada

Cuando se busca la opinión del experto en dos o más variables desconocidas, la elicitación resultante debe ser la distribución de probabilidad conjunta de los expertos para esas variables. Un caso especialmente importante es cuando las variables son independientes, lo que significa que si el experto obtiene nueva información sobre alguna de las variables, esto no cambiaría sus creencias respecto a las otras. Así el ejercicio de elicitación se reduce entonces a la elicitación de las creencias de los expertos acerca de cada variable por separado, por lo que se requieren técnicas de elicitación únicamente univariadas. La tarea es aún más compleja cuando las variables son dependientes, para este caso generalmente se elicitan los resúmenes de las distribuciones marginales del experto junto con los resúmenes eficaces y confiables de la estructura de dependencia de la distribución conjunta. En general, las probabilidades condicionales son una forma natural para aumentar las probabilidades marginales cuando se trata de especificar una distribución de probabilidad conjunta y en particular permiten dispersión condicional para ser elicitadas y modeladas (Garthwaite et al., 2005).

2.6.1. Distribución Multinomial

La distribución Multinomial juega un papel fundamental en el trabajo aplicado, siendo ésta la generalización multivariable de la distribución Binomial, surge cuando cada ensayo tiene más de dos posibles resultados.
Consideremos el caso de n ensayos independientes, que permiten k resultados mutuamente excluyentes $E_1, \ldots, E_k$ cuyas probabilidades respectivas son $\pi_1, \ldots, \pi_k$ (con $\sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$). Denotemos $n_1, \ldots, n_k$ la variable aleatoria del número de ocurrencias de los eventos $E_1, \ldots, E_k$ respectivamente en n ensayos con $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. La función de probabilidad de $n_1, \ldots, n_k$ viene dada por (Johnson et al., 1997):

$$f(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \ldots \pi_k^{n_k} \tag{2-25}$$

para $n_i = 0, 1, \ldots, n$, pero sujeto a la restricción de $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

La media y varianza de la distribución Multinomial están dadas por:

$$E(n_i) = n\pi_i; \qquad Var(n_i) = n\pi_i(1 - \pi_i) \tag{2-26}$$

Su distribución a priori conjugada es la generalización multivariada de la distribución Beta conocida como la distribución Dirichlet.

2.6.2. Métodos de Elicitación Distribución Dirichlet

Algunos de los métodos que se han realizado para introducir la elicitación de los parámetros de la distribución Dirichlet son:

- **Método de Dickey, Jiang y Kadane (1983):** los autores proponen un método simple para estimar la distribución a priori subjetiva de la Dirichlet en un muestreo Multinomial, su método lo definen como un dispositivo de resultados imaginarios, es decir, el experto cuya opinión se está estimando imagina datos hipotéticos y el método elicita su reacción respecto a los datos. Los datos reales se pueden utilizar de manera similar. El método es desarrollado bajo tres pasos:

  - **Paso 1:** Elicitar con el experto la probabilidad de predicción para una única observación futura.

    $$P(X=i)=\frac{b_i}{b_.}; \qquad b_. = \sum_{i=1}^{k} b_i; \qquad i=1,\ldots,k \tag{2-27}$$

  - **Paso 2:** Darle al experto una muestra futura, ya sea imaginaria o real, con frecuencias $\underline{x}=x_1,\ldots,x_k$ y se le pide estimar la probabilidad condicional para una observación más futura.

    $$P(X=i|\underline{x})=\frac{b_.}{b_.+x_.}P(X=i)+\frac{x_.}{b_.+x_.}\hat{\mu}_i \tag{2-28}$$

    donde $P(X=i)$ fue obtenida en el Paso 1; $x_. = \sum_{i=1}^{k} x_i$ y $\hat{\mu}_i$ denota la estimación habitual de la frecuencia relativa, $\hat{\mu}_i=\frac{x_i}{x_.}$, para $b_.$ se resuelve la siguiente ecuación:

    $$b_. = x_. \left[\frac{\hat{\mu}_i - P(X=i|\underline{x})}{P(X=i|\underline{x})-P(X=i)}\right] \tag{2-29}$$

  - **Paso 3:** Calcular b_i :

    $$b_i = P(X=i)b_.; \qquad i=1,\ldots,k \tag{2-30}$$

  Bajo el modelo a priori conjugado, $P(X=i|\underline{x})$ está entre $P(X=i)$ y $\hat{\mu}_i$. El radio de distancia a $\hat{\mu}_i$ y $P(X=i)$ es $b_./x_.$, es una constante positiva en i. Si $P(X=i|\underline{x})$ es elicitada y $b_.$ es resuelta para varios valores de i, entonces los valores de $b_.$ pueden ser promediados. Del mismo modo, un promedio de $b_.$ puede obtenerse a partir de la consideración de varias muestras de $\underline{x}$.

- **Método de Elfadaly y Garthwaite (2012):** el método que proponen los autores está diseñado para elicitar una distribución generalizada Dirichlet, conocida como distribución Connor-Mosimann, que es también una conjugada a priori, la cual tiene un mayor número de parámetros y por lo tanto una estructura de dependencia más flexible. En el método propuesto presentan la cuantificación de la opinión de expertos sobre los hiperparámetros de la a priori conjugada Dirichlet, basando su método en la elicitación de los parámetros de las distribuciones Beta univariantes como la distribución marginal y condicional de la Dirichlet, permitiendo así generalizar el método para obtener otras dos más a priores generales.

- **Elicitación de una distribución Dirichlet utilizando sus variables aleatorias Beta condicionales:** sea $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ el vector de variables aleatorias que siguen una distribución Multinomial, con k categorías, n ensayos y un vector de probabilidades $\underline{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ de forma que su distribución de probabilidad es:

$$f(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\pi_1^{n_1}\pi_2^{n_2}\ldots\pi_k^{n_k} \tag{2-31}$$

donde $0 \leq n_i \leq n, \sum n_i = n, 0 \leq \pi_i \leq 1, \sum \pi_i = 1$. La conjugada a priori del vector de parámetros $\underline{\pi}$ es la distribución Dirichlet de la forma B-1 para $\alpha_i > 0$ y $N = \sum \alpha_i$.

Los autores proponen un nuevo método para la elicitación de los parámetros de una Beta a priori, para ello utilizan las estimaciones de la mediana y dos cuartiles, la mediana es elicitada como un valor de ubicación y los cuartiles como un valor de escala. Después es necesario conciliar estas tres estimaciones en dos parámetros únicos. Como primer paso, los autores utilizan una aproximación normal a la distribución Beta para transformar y comprometer los tres valores en dos valores iniciales de los parámetros Beta, seguidamente se aplica el método numérico de mínimos cuadrados sobre los valores de los parámetros iniciales con el fin de optimizarlos. Después de tener estos dos parámetros y haciendo uso de la propiedad vista en B-3 se puede demostrar que la distribución condicional de las variables Dirichlet tienen la siguiente forma:

$$f(\pi_r|\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{r-1}) = \frac{1}{\beta(a_r, \sum_{i=r+1}^{k} a_i)}\frac{\pi_r^{a_1-1}}{(1-\sum_{i=1}^{r-1}\pi_i)^{a_r}}\left(1-\frac{\pi_r}{1-\sum_{i=1}^{r-1}\pi_i}\right)^{\sum_{i=r+1}^{k} a_i - 1} \tag{2-32}$$

la cual es una distribución Beta sobre el intervalo $(0, 1-\sum_{i=1}^{r-1}\pi_i)$. La distribución 2-32 también es conocida como la distribución Beta de tres parámetros.

$(\pi_r|\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{r-1}) \sim \text{Beta}\left(a_r, \sum_{i=r+1}^{k} a_i, 1-\sum_{i=1}^{r-1}\pi_i\right); \quad 1 < r \leq k-1.$

Aplicando la transformación

$$\pi_r^* = \begin{cases} \pi_1 & \text{para } \ r = 1, \\ \frac{\pi_r}{1-\sum_{i=1}^{r-1}\pi_i} & \text{para } \ r = 2, 3, \ldots, k-1 \end{cases}$$

Obtenemos:

$$\pi_r^* \sim \text{Beta}\left(a_r, \sum_{i=r+1}^{k} a_i\right) \quad \text{para } \ r = 1, 2, \ldots, k-1 \tag{2-33}$$

Así, el proceso de elicitación es conducido de la siguiente manera:

1. El experto elige la categoría más conveniente para empezar; denotamos su probabilidad como π_1.
2. El experto estima tres cuartiles para π_1, que luego se convierten en las estimaciones de los dos hiperparámetros α_1 y β_1 de la distribución Beta(α_1, β_1) de $\pi_1^* = \pi_1$.
3. Se le pide al experto suponer que el valor de la mediana que dio en el primer paso es el valor correcto de π_1, y que estime tres cuartiles para π_2.
4. Divida cada uno de los tres cuartiles de π_2 en $1 - \pi_1$, se obtienen los cuartiles de π_2^*. De ahí obtenemos las estimaciones de los hiperparámetros α_2 y β_2 de la distribución marginal de Beta de π_2^*.
5. El proceso se repite para cada categoría, excepto para la última. Para $r = 3, 4, \ldots, k-1$, el experto estima cuartiles para $(\pi_r|\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{r-1})$, dividiendo entre $1 - \sum_{i=1}^{r-1}\pi_i$ donde se obtienen los tres cuartiles de π_r^*, que se utilizan para estimar los dos hiperparámetros α_r y β_r de la distribución marginal. (No necesita la distribución marginal de π_k).

Usando el resultado 2-33 obtenemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_r &= a_r, & \text{para } \ r = 1, 2, \ldots, k-1; \\ \beta_r &= \textstyle\sum_{i=r+1}^{k} a_i, & \text{para } \ r = 1, 2, \ldots, k-1; \end{aligned} \tag{2-34}$$

Cada distribución Beta elicitada tiene su propia estimación de N diferente, dada por:

$$N_r = \sum_{i=1}^{r-1}\alpha_i + \alpha_r + \beta_r \tag{2-35}$$

Basados en α_i, $i = 1, 2, \ldots, r-1$, estimado en el pasos anteriores.

El sistema de ecuaciones 2-33 como en el enfoque marginal, puede no ser consistente ni tener una solución única para $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, por lo que se trata de encontrar una manera de promediar este sistema de ecuaciones para obtener un vector de estimaciones $\underline{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_k^*)$ que represente bien la opinión del experto; un enfoque razonable puede ser mantener el valor de la media fijo, cuando sea posible, mientras se mueve a partir de diferentes distribuciones Beta a una distribución Dirichlet (Elfadaly y Garthwaite, 2012).

Usando B-2 se tiene:

$$\mu_r \equiv E(\pi_r) = \frac{a_r}{N_r} \tag{2-36}$$

y en vista de (2-34) y (2-35)

$$\mu_r = \begin{cases} \frac{\alpha_r}{\sum_{i=1}^{r}\alpha_i+\beta_r}, & \text{para } \ r = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \frac{\beta_{k-1}}{\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i+\beta_{k-1}}, & \text{para } \ r = k \end{cases} \tag{2-37}$$

Dado que, para la distribución Dirichlet, se requiere que

$$\sum_{r=1}^{k} \mu_r = 1 \tag{2-38}$$

La normalización de μ_r para $r = 1, 2, \ldots, k$, es $\mu_r^* = \frac{\mu_r}{\sum_{i=1}^{k}\mu_i}$, para $r = 1, 2, \ldots, k$. De otro lado tenemos que:

$$N^* \equiv \sum_{r=1}^{k} a_r^*, \tag{2-39}$$

Ahora, si $a_r^* = \mu_r^* N^*, \ \ r = 1, 2, \ldots, k$.

Queda ahora encontrar una estimación adecuada de N^*. tomamos esto como el promedio de todos los denominadores en 2-37

$$N^* = \frac{\sum_{r=1}^{k-1}\left[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i + \beta_r\right] + \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i + \beta_{k-1}}{k} \tag{2-40}$$

Cambiar la selección de los expertos en la primera categoría, así como el orden de las categorías acondicionada en cada paso, dará lugar a estimaciones diferentes de $\underline{a}$. Para superar esto, una posibilidad es tratar a todo el proceso con las categorías de partida diferentes y ordenar. Esto dará a los conjuntos de estimaciones $\underline{a}^*$, para el que un simple promedio pueda ser adecuado para conseguir una opción única para $\underline{a}^*$.

- **Elicitación de una distribución Dirichlet generalizada para un modelo Multinomial:** la distribución Dirichlet estándar es ampliamente utilizada por su simplicidad. Sin embargo en la literatura, la distribución Dirichlet en su forma estándar ha sido criticada por no ser suficientemente flexible para representar la información a priori sobre los parámetros de los modelos multinomiales. Debido a esta insuficiencia muchos autores se han interesado en la construcción de nuevas familias de distribuciones de proporciones que permiten una estructura de dependencia más general, algunas de las nuevas distribuciones son generalizaciones directas de la distribución Dirichlet estándar (por ejemplo, Dickey (1983); Connor y Mosimann (1969)). Elfadaly y Garthwaite (2012) seleccionaron la distribución introducida por Connor y Mosiman (1969), esta es una forma de la distribución Dirichlet generalizada que tiene una estructura de covarianza más general que la distribución de Dirichlet estándar y un mayor número de parámetros $2(k-1)$, su función de densidad puede ser escrita de la forma:

$$f(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k) = \prod_{i=1}^{k-1} \left[\frac{\Gamma(a_i + b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i)} \pi_i^{a_i - 1} \left(\sum_{j=i}^{k} \pi_j \right)^{b_{i-1} - (a_i + b_i)} \right] \pi_k^{b_{k-1} - 1} \tag{2-41}$$

donde $0 \leq \pi_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$, $a_i > 0$ y $b_i > 0$

Al igual que en el caso de la distribución Dirichlet estándar, las distribuciones condicionales de las variables aleatorias Dirichlet generalizadas siguen una distribución Beta escalada, ayudando así al proceso de elicitación de los hiperparámetros de la Dirichlet generalizada la utilización de los hiperparámetros elicitados de cada distribución Beta. Luego la distribución condicional de $\pi_r | \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{r-1}$, para $r = 2, 3, \ldots, k-1$, se puede calcular a partir de 2-41 obteniendo:

$$f(\pi_1 | \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{r-1}) = \frac{1}{\beta(a_r, b_r)} \frac{\pi_r^{a_r - 1}}{(1 - \sum_{i=1}^{r-1} \pi_i)^{a_r}} \left(1 - \frac{\pi_r}{1 - \sum_{i=1}^{r-1} \pi_i} \right)^{b_r - 1} \tag{2-42}$$

También se les conoce como distribuciones Beta de tres parámetros, es decir:

$(\pi_1 | \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{r-1}) \sim \text{Beta}(a_r, b_r, 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \pi_i)$, para $r = 2, 3, \ldots, k-1$

Realizando la misma transformación que se aplicó en la elicitación de los parámetros de la Dirichlet estándar y haciendo uso de la distribución condicional tenemos:

$$\pi_r^* = \begin{cases} \pi_1 & \text{para } \ r = 1, \\ \frac{\pi_r}{1 - \sum_{i=1}^{r-1} \pi_i} & \text{para } \ r = 2, 3, \ldots, k-1 \end{cases}$$

entonces,

$$\pi_r^* \sim \text{Beta}\,(a_r, b_r) \quad \text{para} \;\; r = 1, 2, \ldots, k-1 \tag{2-43}$$

El mismo proceso de elicitación dado antes en el enfoque condicional para el caso de la Dirichlet estándar sigue siendo válido aquí. La principal diferencia en el caso actual es que los hiperparámetros de la Dirichlet generalizada $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ son estimados directamente como los mismos parámetros (α_i, β_i) de la distribución Beta de π_r^*, $r = 1, 2. \ldots, k-1$. Tenga en cuenta que no es necesario promediar los parámetros estimados aquí, ya que el número de hiperparámetros elicitados a partir de las distribuciones Beta condicionales es el mismo número de hiperparámetros de la Dirichlet generalizada, es decir, $2(k-1)$.

- **Elicitación de una distribución Dirichlet utilizando sus variables aleatorias Beta marginales:** se puede demostrar mediante la función de densidad de probabilidad Dirichlet en 2-41, que la distribución marginal de π_i es una distribución Beta:

$$p_i \sim \text{Beta}\,(\alpha_i, \beta_i) \quad \text{para} \;\; i = 1, 2, \ldots, k \tag{2-44}$$

donde,

$$\alpha_i = a_i; \qquad \beta_i = \sum_{j \neq i}^{k} a_j; \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2-45}$$

Aprovechando las distribuciones marginales de Beta, el proceso de elicitación se puede dividir en k pasos. En cada paso, se le pedirá al experto estimar tres cuantiles de π_i , la probabilidad de la categoría i, $i = 1, 2, \ldots, k$, donde los cuantiles inferiores y superiores ya han sido elicitados por las dos primeras categorías; estos cuantiles se pueden transformar a las estimaciones de los dos hiperparámetros α_i y β_i de la distribución a priori Beta de π_i. Desde que usamos el enfoque marginal, las categorías aquí son intercambiables, es decir, no importa por dónde empezar la estimación ni tampoco importa el orden de las categorías. Para finalizar el proceso de elicitación, los parámetros de la Beta son comprometidos para estimar el vector de parámetros Dirichlet mediante técnicas de mínimos cuadrados. Las ecuaciones vistas en 2-45 no tienen una solución consistente para $a = (a_1, a_2 \ldots, a_k)$. De 2-45 cada marginal elicitada entrega dos estimaciones para a_i y N_i

$$a_i = \alpha_i; \quad \beta_i = \sum_{i \neq j}^{k} a_j; \quad N_i = \alpha_i + \beta_i = \sum_{j=1}^{k} a_j; \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2-46}$$

Por otra parte, los hiperparámetros estimados deben cumplir la restricción que la suma debe ser igual a 1, es decir, deben satisfacer,

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1 \tag{2-47}$$

donde,

$$\mu_i = \frac{a_i}{N_i}; \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2-48}$$

Los autores siguen el enfoque para unir estimaciones de expertos propuesto por Lindley et al. (1979), proponiendo tres diferentes opciones para reconciliar o promediar estimaciones incoherentes de μ_i y N dentro de estimaciones matemáticamente coherentes de μ_i^*, N^*, respectivamente.

1. La normalización $\mu_i^{'}s$ en $\mu_i^{*'}s$ que suman 1 y tomando N^* como el promedio de $N_i^{*'}s$.
2. Minimizando la suma de cuadrados de las diferencias entre μ_i^* y μ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, sujeto a la restricción $\sum_{i=1}^{k} \mu_i^* = 1$, manteniendo N^* como el promedio de $N_i^{*'}s$.
3. La precisión de cada π_i, es decir, la inversa de su varianza, se puede utilizar como un peso para reflejar la confianza del experto sobre cada una de sus estimaciones (Lindley et al, 1979). Estos pesos se utilizan en un procedimiento de mínimos cuadrados ponderados para $\mu_i^{*'}s$, tomando N^* como un promedio ponderado de $N_i^{*'}s$.

- **Método de Zapata, O'Hagan y Soares (2012):** en este método los autores emplean un dispositivo de sobre ajuste, es decir, elicitan más juicios de los mínimos requeridos, con el fin de producir una distribución Dirichlet más cuidadosamente considerada y asegurar que la distribución Dirichlet es de hecho un ajuste razonable para el conocimiento del experto. El método se aplicó en una extensión del software de Elicitación Sheffield, que es un paquete de documentos, plantillas y software que proporcionan los protocolos de elicitación estructurados que se ajustan a las buenas prácticas de elicitación moderna para facilitar el proceso de elicitación multivariante. A continuación se presenta la descripción de los pasos involucrados en el método para la elicitación de la distribución Dirichlet:

  1. **Preparación y entrenamiento:** preparar y entrenar al experto en el significado de los juicios de probabilidad personales y distribuciones, y familiarizarlo con el método de elicitación específico que se utilizará, idealmente a través del uso de un ejercicio de práctica.
  2. **Obtener distribuciones Betas para cada π_i utilizando SHELF.**

3. **Chequeo y ajuste de medias:** asumiendo que la distribución Beta puede representar adecuadamente las creencias del experto sobre cada π_i por separado, el siguiente paso es chequear la restricción $\sum \pi_i = 1$. Suponga que la distribución elicitada para π_i es una Beta(α_i, e_i), esto implica que $E(\pi_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha_i+e_i}$. La restricción ahora requiere que:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha_i + e_i} = 1 \tag{2-49}$$

En la práctica, es poco probable que elicitationes por separado den lugar a valores α_i y e_i que satisfagan esta ecuación. En la situación común cuando todos los valores de la mediana elicitados están a menos de 0,5, las distribuciones Beta serán todas sesgadas positivamente, incluso si la implicación de esto se explica y se entiende completamente por el experto, la tentación es especificar los valores medios que resumen a 1. Con frecuencia se encuentra que la suma de los valores esperados excede 1, si es mayor o menor que 1, es necesario ajustar las distribuciones elicitadas de manera que 2-49 sea satisfecha. Si la discrepancia es grande, fuera del rango $[0.9, 1.1]$ es necesario revisar todo el proceso de elicitación para resolver posibles mal entendidos que haya tenido el experto. Pequeñas discrepancias en los valores de α_i y e_i pueden ser corregidas por medio de un ajuste mecánico. Si la suma del lado izquierdo de la ecuación (2-49) es $r \neq 1$, entonces nuevos valores α_i^* y e_i^* vienen dados por:

$$\alpha_i^* = \alpha_i / r, \qquad e_i^* = \alpha_i + e_i - \alpha_i^* \tag{2-50}$$

El facilitador puede optar por dar nueva información al experto sobre qué tan cercanas son las nuevas medias ajustadas con las estimadas originalmente. Sin embargo, en la práctica es poco probable que la calidad de ajuste cambie apreciablemente cuando r es cercano a 1.

4. **Encontrando un valor de n:** en este punto, se debe tener una distribución Beta aceptable para cada hiperparámetro de la distribución Dirichlet de interés. Las distribuciones separadas Beta corresponden a una distribución Dirichlet si los valores de $n_i = \alpha_i^* + e_i^*$ son todos iguales. En la práctica, esto es poco probable que suceda, si se encuentra una distribución Dirichlet que sea una representación aceptable de las creencias del experto se puede buscar un valor de n que actué como un valor común para reemplazar las discrepancia entre los $n_i^{'}s$. Teniendo en cuenta cualquier n propuesto se define la correspondiente distribución Dirichlet como:

$$Di(\alpha(n)) \tag{2-51}$$

Donde el vector de parámetros $\alpha(n)$ tiene el i-ésimo elemento en $\alpha_i(n) = n\frac{\alpha_i^*}{\alpha_i^*+e_i^*}$

¿Qué valor de n produciría una distribución 2-51 que refleje mejor el conocimiento del experto? En general, un mayor n implica mayor información y un valor apropiado podría estar entre $n_{min} = min_i \{n_i\}$ y $n_{max} = max_i \{n_i\}$. Idealmente se debe seleccionar un n que haga que la Dirichlet ajuste todos los juicios de expertos elicitados con la mayor precisión posible. Sin embargo, esto implica una gran computación en la práctica y es seguramente innecesaria porque un valor seleccionado por métodos aproximados más simples pueden proporcionar un ajuste esencialmente equivalente. Los siguientes métodos pueden ser considerados:

- Utilice un valor cerca de la mitad del intervalo (n_{min}, n_{max}). El valor medio estricto es $n_{medio} = (n_{min} + n_{max})/2$, pero igualmente se puede considerar la media ($\bar{n} = \sum n_i/k$) y la mediana ($n_{mediana}$) de los n_i's.
- Use una optimización simplificada, cree un criterio objetivo simple $F(n)$, y seleccione un n que optimice este criterio. Un criterio $F(n)$ útil en la práctica se basa en la aproximación de la distribución Dirichlet $Di(\alpha(n))$ a las desviaciones estándar de las distribuciones Beta elicitadas separadamente. Este criterio se formula y se muestra para producir el valor optimizado:

$$n_{opt} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} v_i^*(n_i + 1)}{\sum_{i=1}^{k} v_i^* \sqrt{n_i + 1}} \right)^2 - 1 \tag{2-52}$$

  donde $v_i^* = \frac{\alpha_i^*(n_i - \alpha_i^*)}{n_i^2(n_i+1)}$ es la varianza de la i-ésima media ajustada de la distribución Beta$(\alpha_i^*, n_i - \alpha_i^*)$
- Use un valor conservador de n. Seleccionar n_{min} implica que los juicios elicitados no necesariamente estarán representados por una distribución Dirichlet, sin embargo se selecciona esta distribución por conveniencia e ir seguros de no requerir más información sobre $\pi_i^{'} s$.

5. **Proceso de retroalimentación:** si se ha calculado un valor central representativo como n_{mid} o $\bar{n}$, o si hemos encontrado un valor óptimo simplificado n_{opt}, entonces es importante presentar retroalimentación nuevamente al experto sobre las implicaciones de la distribución Dirichlet ajustada. En particular, esto implicará examinar la densidad marginal implícita para cada π_i y ver qué tan cerca coincide con los valores originalmente elicitados. Si el experto considera la distribución Dirichlet ajustada como aceptable, entonces el procedimiento termina con esta distribución elicitada como conclusión. Por otra parte, particularmente si los valores originales de n_i no eran razonablemente similares, podemos encontrar que el ajuste es ahora demasiado pobre para que la distribución Dirichlet represente adecuadamente el conocimiento del experto. En este caso, el procedimiento termina con la conclusión de que una distribución Dirichlet no representaría una distribución conjunta adecuada para π.

- **Método de Flórez y Correa (2015):** los autores basan su propuesta para elicitar el vector de parámetros π de la distribución Multinomial por medio de 4 pasos:

  1. **Estimación del n equivalente:** la estimación del tamaño muestral de n que representa la opinión del experto se basa en el enfoque dado por Bromaghin (1993), donde fija un valor de d ($d = 0{,}05, d = 0{,}075, d = 0{,}10$) y se asigna un valor de α dado por el facilitador quién es el que considera el nivel de experticia del experto. El autor propone trabajar con tres valores de α, para cuando el experto tiene un nivel alto ($\alpha = 0{,}20$), medio ($\alpha = 0{,}40$) o bajo ($\alpha = 0{,}60$). Así el valor del tamaño de muestra puede ser calculado n_{mc} por:

$$n_{mc} = \left(\frac{z^2_{(1-(\alpha_i/2))}}{2d_i^2}\right)\left[\pi_i(1-\pi_i) - 2d_i^2 + \sqrt{\pi_i^2(1-\pi_i)^2 - d_i^2\left[4\pi_i(1-\pi_i)-1\right]}\right] \tag{2-53}$$

     Si no se cuenta con información a priori sobre la probabilidad de cada categoría, la muestra puede ser estimada como:

$$n_{mc} = 1 + int\left(\underbrace{max}_{i\in\{1,2,\ldots,k\}}\left[\frac{0{,}25z^2_{(1-(\alpha_i/2))}}{2d_i^2} - z^2_{(1-(\alpha_i/2))}\right]\right) \tag{2-54}$$

  2. **Estimación de la frecuencia relativa:** el facilitador da una muestra hipotética N y pide al experto que ésta sea distribuida en las diferentes categorías de la variable, de manera que la probabilidad de ocurrencia de cada categoría pueda ser estimada como $E_1/N, E_2/N, \ldots, E_k/N$. El facilitador puede repetir este procedimiento las veces que considere prudente y validar si el experto es consistente con la distribución de los eventos E_i en las diferentes muestras hipotéticas N.

  3. **Simulación:** una vez el facilitador haya realizado los dos pasos anteriores, procede con la simulación de una distribución Multinomial a través de la función rmultinom del software R, ingresando como parámetros el número de simulaciones a realizar, el tamaño de muestra equivalente obtenido en el paso 1, y el vector de probabilidades de cada categoría estimado en el paso anterior.

  4. **Estimación de α_i:** se estima el vector de parámetros $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ de la distribución Dirichlet. Dado que cada X_{ij} simulado en el paso 3 sigue una distribución Multinomial, entonces $Y_i = X_j/n$ (con $i = 1, 2, \ldots, k$ y $j = 1, 2, \ldots, r$) tiene una distribución Dirichlet con un vector de parámetros $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, donde n es el tamaño muestral equivalente estimado en el paso 1, k representa el número de categorías, r el número de simulaciones, $\alpha_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i$, luego su primer y segundo momento vienen dados por:

$$E[Y_i] = \frac{\alpha_i}{\alpha_0}. \tag{2-55}$$

$$Var[Y_i] = \frac{\alpha_i(\alpha_0 - \alpha_i)}{\alpha_0^2(\alpha_0 + 1)}. \tag{2-56}$$

y la moda de Y_i viene dada por:

$$Moda = \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_0 - k}; \qquad \alpha_i > 1. \tag{2-57}$$

Los valores de 2-55, 2-56 y 2-57 pueden ser estimados a partir de los valores simulados en el paso anterior, reduciéndose el problema en resolver las ecuaciones 2-55 y 2-56 en términos de α_0 y α_i. De 2-55 tenemos que:

$$\alpha_i = \alpha_0 E[Y_i] \tag{2-58}$$

de 2-56 despejamos a α_0 en términos de $E[Y_i]$ y $Var[Y_i]$ se tiene que:

$$\alpha_0 = \frac{(E[Y_i] - E[Y_i]^2)}{Var[Y_i]} - 1 \tag{2-59}$$

Reemplazamos 2-59 en 2-58 y obteniendo así los valores de cada α_i:

$$\alpha_i = \left(\frac{(E[Y_i] - E[Y_i]^2)}{Var[Y_i]} - 1\right) E\left[Y_i\right] \tag{2-60}$$

Normalizando Y_i de manera que se cumpla la restricción $\sum_{i=1}^{k} \bar{Y}_i = 1$:

$$\bar{\bar{y}}_i = \frac{\bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^{k} \bar{Y}_i} \tag{2-61}$$

Así cada α_i puede ser estimado reemplazando los valores de $\bar{\bar{y}}_i$ y S_i^2 en 2-60:

$$\alpha_i = \left(\frac{(\bar{\bar{y}}_i - \bar{\bar{y}}_i^2)}{S_{Y_i}^2} - 1\right) \bar{\bar{y}}_i \tag{2-62}$$

5. **Estimación de α_0 y α_i usando su valor modal:** los autores proponen otro enfoque para la estimación despejando α_i en términos de su valor modal. De 2-57 se tiene que:

$$\alpha_i = Moda_i \times \left[\frac{(\bar{\bar{y}}_i - \bar{\bar{y}}_i^2)}{S_{Y_i}^2} - 1\right] - Moda_i \times k + 1. \tag{2-63}$$

Luego el facilitador podrá escoger el valor de α_i que más le convenga o simplemente promediar los dos valores de α_i.

3. Metodología Propuesta

La propuesta de elicitación se lleva a cabo mediante el método Delphi con lo cual se busca que la obtención y transmisión de información sea concisa y eficaz, para así conseguir un resultado diferenciador y de más valor que la suma de aportaciones individuales. El proceso de elicitación propuesto se realiza mediante seis pasos. En el primer paso se lleva a cabo el método Delphi por medio de formulación de preguntas y retroalimentación, en el segundo paso se realiza un análisis descriptivo por medio de cluster, el tercer paso se integra las opiniones individuales de los expertos con el fin de llegar a un sólo vector de parámetros π de la distribución Multinomial que represente el conocimiento de todos los expertos. En el cuarto paso se halla el tamaño de muestra que representa el conocimiento del conjunto de expertos que seguidamente será utilizado en el quinto paso para realizar la simulación de la distribución Multinimomial y finalmente en el sexto paso se halla el vector de parámetros α de la distribución Dirichlet.

1. **Método Delphi**

    - **Formulación de las preguntas:** la formulación de las preguntas tiene una consecuencia importante sobre el resultado final ya que si las preguntas reflejan inevitablemente las actitudes culturales, sesgos subjetivos y conocimiento de sus diseñadores, condicionan la compresión correcta por parte del experto de la cuestión sobre la que se requiere su conocimiento, e influyen, por consiguiente en la calidad, propiedad y extensión de su respuesta. Por tal motivo es muy importante confeccionarlas de manera que sean claras y concisas, asegurándose que son correctamente entendidas y de que no condicionan en absoluto la respuesta (Landeta, 1999).

    - **Retroalimentación:** el proceso de elicitación en la ronda 1 comienza dando un tamaño de muestra hipotético a cada experto para que éste sea distribuido entre los niveles de la variable, en esta misma ronda se varía el tamaño de muestra con el fin de validar que el experto esté siendo coherente con sus respuestas. Las demás rondas se llevan a cabo por medio de retroalimentación, donde se envía a cada experto por separado la mediana y la desviación estándar obtenida en cada categoría por los demás expertos elicitados junto con su respuesta individual, en este punto se pide al experto reevaluar sus creencias con base a los resultados de los demás expertos.

2. **Análisis descriptivo:** esta etapa hace uso de la distancia de Hellinger en un análisis de cluster con el fin de visualizar en cada ronda comportamientos entre los expertos. La popularidad de la distancia mínima de Hellinger se debe a la capacidad de combinar dos propiedades fundamentales en la estimación paramétrica: la eficiencia en la densidad del modelo y las excelentes propiedades de robustez (Toma, 2007). La distancia de Hellinger para dos distribuciones Multinomiales definidas sobre las mismas k categorías, se definen como:

$$Hellinger = HL = \sum_{i=1}^{k} \left(\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i}\right)^2 \tag{3-1}$$

$$HL = \begin{bmatrix} HL_{1,1} & HL_{1,2} & HL_{1,3} & \dots & HL_{1,n} \\ HL_{2,1} & HL_{2,2} & HL_{2,3} & \dots & HL_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ KL_{n,1} & HL_{n,2} & HL_{n,3} & \dots & HL_{n,n} \end{bmatrix}$$

Donde la matriz de distancia Hellinger (HL) es una matriz simétrica, positiva y su diagonal principal es cero.

Ejemplo: suponga que se cuenta con 4 expertos a quiénes se les aplicó el método Delphi obteniendo así una distribución a priori para cada uno de las 4 rondas elicitadas. La información registrada se muestra a continuación:

	Experto 1				Experto 2			
Ronda	I_1	I_2	I_3	I_4	I_1	I_2	I_3	I_4
R1	0.250	0.600	0.100	0.050	0.700	0.200	0.050	0.050
R2	0.200	0.650	0.100	0.050	0.650	0.200	0.100	0.030
R3	0.150	0.700	0.080	0.070	0.600	0.250	0.060	0.090
R4	0.100	0.700	0.100	0.100	0.600	0.170	0.020	0.080

	Experto 3				Experto 4			
Ronda	I_1	I_2	I_3	I_4	I_1	I_2	I_3	I_4
R1	0.300	0.500	0.050	0.150	0.300	0.570	0.080	0.050
R2	0.250	0.550	0.080	0.120	0.200	0.600	0.100	0.100
R3	0.100	0.650	0.100	0.150	0.150	0.700	0.100	0.050
R4	0.100	0.700	0.100	0.100	0.150	0.700	0.100	0.050

donde $I_1, \cdots, I_4$ representan los niveles o categorías de la pregunta elicitada.

Una vez elicitadas todas las rondas se utiliza la distancia de Hellinger, obteniendo así una matriz distancia en cada ronda, donde cada fila representa al experto y cada columna representa el nivel de la variable de interés.

$$R1 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.229 & 0.042 & 0.004 \\ 0.229 & 0.000 & 0.178 & 0.182 \\ 0.042 & 0.178 & 0.000 & 0.033 \\ 0.004 & 0.182 & 0.033 & 0.000 \end{bmatrix}; R2 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.260 & 0.023 & 0.009 \\ 0.260 & 0.000 & 0.212 & 0.257 \\ 0.023 & 0.212 & 0.000 & 0.006 \\ 0.009 & 0.257 & 0.006 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$R3 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.266 & 0.022 & 0.003 \\ 0.266 & 0.000 & 0.317 & 0.274 \\ 0.022 & 0.317 & 0.000 & 0.033 \\ 0.003 & 0.274 & 0.033 & 0.000 \end{bmatrix}; R4 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.422 & 0.000 & 0.014 \\ 0.422 & 0.000 & 0.422 & 0.364 \\ 0.000 & 0.422 & 0.000 & 0.014 \\ 0.014 & 0.364 & 0.014 & 0.000 \end{bmatrix}$$

Cada matriz distancia es utilizada en el análisis de cluster para clasificar a los expertos según sus respuestas por ronda.

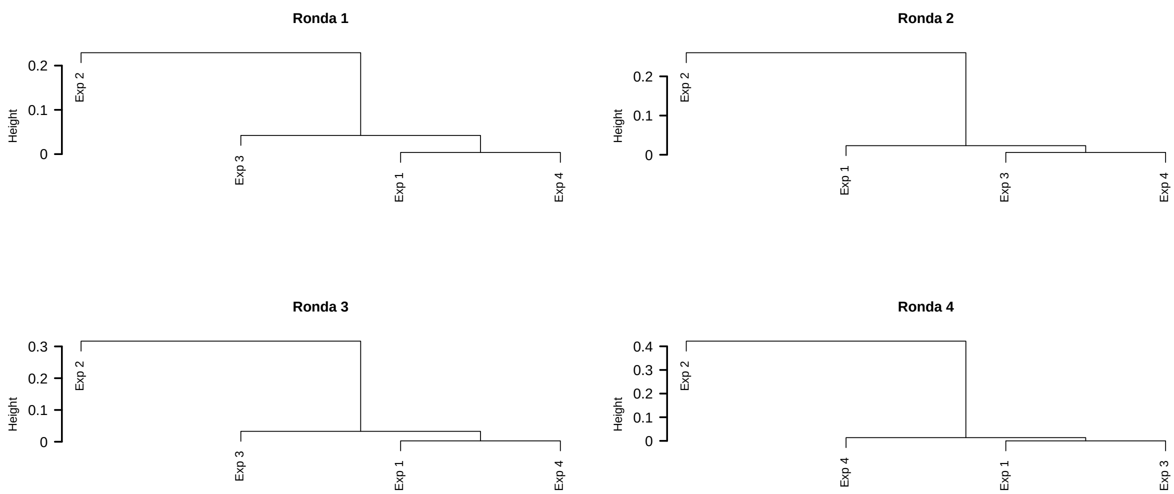

Figura 3-1.: Clasificación de expertos por ronda

3. **Integración de las opiniones individuales:** esta etapa se realiza con el fin de obtener una única distribución que represente el conocimiento del conjunto de expertos, para esto es fundamental la integración de las respuestas individuales de los expertos la cual se realiza haciendo una simulación de la distribución Multinomial en R. Para llevar a cabo esta simulación es necesario primero estimar el N-equivalente para cada experto.

   - **N-equivalente para cada experto:** con el fin de cuantificar el conocimiento del experto en términos de un tamaño muestral, se pide al experto estimar un valor mínimo y un valor máximo en el que él considere se encuentra el verdadero valor de cada nivel de la variable de interés. Estos dos valores son utilizados en la fórmula del intervalo de confianza para la distribución Multinomial basado en el teorema del límite central, para así despejar el valor de n, obteniendo de esta forma un n para cada nivel de la variable de interés. Finalmente el N-equivalente asociado al nivel de experticia que tiene el experto elicitado es el n de la categoría que tenga asociado el menor valor.

El intervalo de confianza para la distribución Multinomial basado en el teorema del límite central se define como:

$$\left(\hat{\pi} - Z_{(\alpha/2k)}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}},\, \hat{\pi} + Z_{(\alpha/2k)}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}\right) \tag{3-2}$$

Donde k es el número de niveles que tiene la variable, α es el nivel de significancia, $\hat{\pi}$ es pedido al experto como el valor que él considera más probable que esté en el intervalo y (a, b) son los extremos de cada categoría dados por el experto. Al igualar los valores a y b al límite inferior y superior del intervalo de proporción tenemos:

$$\hat{\pi} - Z_{(\alpha/2k)}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}} = a \tag{3-3}$$

$$\hat{\pi} + Z_{(\alpha/2k)}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}} = b \tag{3-4}$$

Ahora, haciendo la diferencia entre 3-4 y 3-3 tenemos:

$$b - a = 2Z_{(\alpha/2k)}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}$$

$$\frac{b-a}{2Z_{(\alpha/2k)}} = \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}$$

$$n = \frac{4Z^2_{(\alpha/2k)}\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{(b-a)^2} \tag{3-5}$$

Ejemplo: suponga que se estima el vector de probabilidad del estado civil de las estudiantes de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, suponga que las categorías o niveles de la pregunta son soltera, casada, viuda o en unión libre, además suponga que el facilitador da al experto una tamaño de muestra hipotético de 100 y realiza la siguiente pregunta, ¿de 100 mujeres de la Universidad Nacional Sede Medellín cuántas como máximo son solteras? ¿Cuántas como mínimo son solteras? y posteriormente se le pide al experto el valor modal o el valor que tenga mayor probabilidad para él en esta categoría. Estas preguntas son aplicadas para cada nivel de la variable de interés y su información se registra en la siguiente tabla.

Categoría	*Muestra*	Intervalo	$\hat{\pi}$	Proporción
Solteras	100	(60, 80)	0.70	(0.60, 0.80)
Casadas	100	(8, 15)	0.10	(0.08, 0.15)
Unión Libre	100	(20, 30)	0.25	(0.20, 0.30)
Viudas	100	(1, 3)	0.02	(0.01, 0.03)

Tabla 3-1.: Resumen de valores elicitacidos para obtener el N-equivalente

Reemplazamos estos valores en 3-5 para obtener n

$$n = \frac{(4Z_{(\alpha/2k)})^2 \hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{(b-a)^2} = \frac{4(2.497)^2 0.70(1-0.70)}{(0.80-0.60)^2} = 131.$$

Este procedimiento se repite para cada experto en cada categoría, hallando de esta forma un n para cada una de ellas, donde finalmente el N-equivalente de cada experto es el n de la categoría que tenga asociado el menor valor.

Categoría	$\hat{\pi}$	n
Solteras	0.70	131
Casadas	0.10	458
Unión Libre	0.25	468
Viudas	0.02	1223
N-equivalente		131

Tabla 3-2.: Estimación N-equivalente

Después de finalizar las rondas de elicitación y hallar el respectivo N-equivalente para cada experto, se define el vector de probabilidades π de cada experto como el vector de probabilidad dado por cada experto en la última ronda de elicitación, así:

$$\begin{array}{llll}
E_1, & \pi^{(1)} = \left(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \ldots, \pi_k^{(1)}\right), & N_1, & w_1 = \frac{N_1}{N_1+N_2+\ldots+N_e} \\
E_2, & \pi^{(2)} = \left(\pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}, \ldots, \pi_k^{(2)}\right), & N_2, & w_2 = \frac{N_2}{N_1+N_2+\ldots+N_e} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
E_e, & \pi^{(e)} = \left(\pi_1^{(e)}, \pi_2^{(e)}, \ldots, \pi_k^{(e)}\right), & N_e, & w_e = \frac{N_e}{N_1+N_2+\ldots+N_e}
\end{array}$$

- **Integración de opiniones de los expertos por medio de simulación:** se genera una simulación de la distribución Multinomial en el software estadístico R por medio de la función rmultinom, la cual recibe tres argumentos. El primero corresponde al número de simulaciones a realizar, el segundo argumento es el tamaño de muestra el cual varía para cada experto $N_1, N_2, \ldots, N_e$ y el tercer argumento es el vector $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots, \pi^{(e)}$ dado por cada experto. Por ejemplo la simulación para el experto 1 se puede ejecutar con el siguiente comando en R:

```
sim=t(rmultinom(Numsim,Nequi,prob=c(pi11,pi21,...pik1)))
```

donde, Numsim=Número de simulaciones; Nequi=N-equivalente estimado para el experto 1 es decir (N_1) y pi11,...,pik1= vector de parámetros π del experto 1, el cual se representa por $\pi^{(1)} = \left(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \ldots, \pi_k^{(1)}\right)$.

Así, la integración de las opiniones de los expertos se denota como π_k el cual representa el conocimiento del conjunto de expertos para cada categoría y puede ser hallado de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{\hat{n_1}^{(1)} + \hat{n_1}^{(2)} + \ldots + \hat{n_1}^{(e)}}{N_1 + N_2 + \ldots + N_e} \\
\pi_2 &= \frac{\hat{n_2}^{(1)} + \hat{n_2}^{(2)} + \ldots + \hat{n_2}^{(e)}}{N_1 + N_2 + \ldots + N_e} \\
&\vdots \\
\pi_k &= \frac{\hat{n_k}^{(1)} + \hat{n_k}^{(2)} + \ldots + \hat{n_k}^{(e)}}{N_1 + N_2 + \ldots + N_e}
\end{aligned}
$$

donde $\hat{n_i}^{(e)}$ representa el promedio del experto e en cada nivel de la varible simulada, por ejemplo $\hat{n_1}^{(2)}$ representa el promedio de las estimaciones simuladas del experto 2 en la categoría 1 y se puede hallar por medio del siguiente comando en R:

```
promedio=colMeans(sim)
n12=promedio[1]
```

Finalmente el vector de probabilidades que representa el conocimiento del conjunto de expertos está dado por:

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k) \tag{3-6}$$

4. N**-global:** una vez hallado el vector de parámetros π de la distribución Multinomial que representa el conocimiento del conjunto de expertos, es necesario hallar un N-global que represente el tamaño de muestra del conocimiento del total de los expertos. Para esto se realiza un promedio ponderado por los pesos del $N-$equivalente.

Sea $N_1, N_2, \ldots, N_e$ el tamaño de muestra que representa el conocimiento de cada uno de los expertos y $w_1, w_2, \ldots, w_e$ los pesos asociados a cada N_e, definimos como N-global a:

$$\text{N}-\text{global} = \frac{N_1w_1+N_2w_2+\ldots+N_ew_e}{w_1+w_2+\ldots+w_e} \tag{3-7}$$

5. **Simulación:** en este paso se lleva a cabo la simulación para la distribución Multinomial realizada en el software estadístico R con la función rmultinom, la cual recibe tres argumentos. El primero corresponde al número de simulaciones a realizar, el segundo argumento es el tamaño de muestra que representa el conocimiento del conjunto de expertos (N-global) y el tercero es el vector de probabilidades de la distribución del conjunto de expertos representados en la ecuación 3-6.

```
t(rmultinom(Numsim,Nglobal,prob=c(pi1,pi2,...pik)))/Nglobal
```

6. **Estimación de α_i:** en esta etapa se realiza la estimación del vector de parámetros $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ de la distribución Dirichlet por medio de la propuesta de Flórez y Correa (2015) descrita en el capítulo anterior, donde α_0 y α_i son expresados por el primer y segundo momento como se muestra en la ecuación 2-58 y 2-59 los cuales pueden ser estimados a partir de los valores simulados en el punto 5. Una vez hallados estos valores se normaliza el vector de medias como se muestra en la ecuación 2-61 para así garantizar que se cumpla la restricción $\sum_{i=1}^{k} \bar{Y}_i = 1$ de tal forma que los valores de cada α_i son hallados por medio de la ecuación 2-62.

   Finalmente haciendo uso de la propiedad marginal de la distribución Dirichlet, donde $\pi_i \sim \text{Beta}(\alpha_i, n - \alpha_i)$ con $n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$, se obtiene así la distribución de cada nivel de la variable de interés.

4. Aplicación

Estimación de la distribución de la especie de malaria en pacientes diagnosticados con la enfermedad en la zona costera rural de Buenaventura

4.1. Introducción

La malaria o paludismo es una enfermedad infecciosa de gran relevancia para la salud pública potencialmente mortal causada por parásitos del género Plasmodium, que se transmite entre los seres humanos por la picadura de mosquitos infectados del género Anopheles, los llamados vectores del paludismo, que pican sobre todo entre el anochecer y el amanecer. La malaria es una enfermedad infecciosa de origen parasitológico febril aguda, se reconoce un espectro de manifestaciones de la enfermedad que va desde procesos asintomáticos, cuadros sintomáticos con escalofrió, fiebre, sudoración y cefalea hasta cuadros severos que pueden llevar a la muerte; es así como se definen dos formas clínicas: malaria no complicada y malaria complicada, esta última se asocian a una mayor mortalidad (Proyecto Malaria Colombia, 2015).
Existen cuatro especies del parásito que infectan a los seres humanos: Plasmodium vivax, Plasmodium falciparum, Plasmodium malariae y Plasmodium ovale. Los más frecuentes son el paludismo por P. falciparum y por P. vivax, y el más mortal el paludismo por P.falciparum. En los últimos años se han presentado algunos casos humanos por P. knowlesi, una especie que circula en primates y que aparece en zonas boscosas de Asia Sudoriental por lo que este parásito ha sido propuesto como el quinto parásito que infecta a los humanos (Instituto Nacional de Salud, 2014).

Malaria no complicada: las características clínicas dependen a menudo de la edad del paciente, el estado inmunitario, la especie, el número de parásitos y el tiempo de padecimiento de la enfermedad. Se caracteriza por un inicio súbito de escalofrío seguido por fiebre y sudoración que puede estar acompañado por cefalea, dolores musculares y articulares, que según la especie parasitaria presente produce paroxismos febriles que varían de 24 a 72 horas, originados por la ruptura de los esquizontes eritrocitarios, hasta complicaciones mayores (Instituto Nacional de Salud, 2014).

Malaria complicada: los casos de malaria complicada principalmente producidos por la infección por P. falciparum, se caracterizan por producir en su fase eritrocitaria una obstrucción vascular derivada del secuestro de glóbulos rojos parasitados y el proceso inflamatorio debido a la presencia del Plasmodium spp, lo que produce el proceso de disfunción, daño y muerte celular en los diferentes órganos. Lo cual induce extravasación severa de plasma que llevan al paciente a Shock, hipoxia celular, la inducción de metabolismo anaerobio que resultan del compromiso intenso de los diferentes órganos o sistemas, llevando a un estado de acidosis y falla multiorgánica produciendo principalmente lesiones localizadas en cerebro y pulmón (Instituto Nacional de Salud, 2014).

En Colombia, la malaria continúa siendo un problema grave de salud pública, debido a que cerca del 85 % del territorio rural está situado por debajo de los 1.500 metros sobre el nivel del mar y presenta condiciones climáticas, geográficas y epidemiológicas aptas para la transmisión de la enfermedad. Cerca del 60 % de la población colombiana se encuentra en riesgo de enfermar o morir por esta causa. A semana epidemiológica 53 de 2014 se notificaron al SIVIGILA un total de 40.718 casos de malaria no complicada en todo el territorio nacional, de los cuales el 49,3 % fueron producto de la infección con P.vivax y otro 49,3 % fueron debidos a P.falciparun y el 1,4 % restante a infecciones mixtas y por P. malariae (Proyecto Malaria Colombia, 2015).

En Colombia, las especies más frecuentes en zonas endémicas son P. vivax y P. falciparum. La transmisión de P. malariae ocurre en focos dispersos a lo largo de la costa pacífica principalmente en el departamento del Chocó, y no existe la transmisión de P. ovale ni de P. knowlesi. También pueden ocurrir casos de infecciones mixtas, definidas como infecciones simultáneas por dos especies, usualmente P. vivax y P. falciparum. A partir del año 1974, en Colombia predomina la infección por P. vivax aportando el 60 % de los casos anuales, en la región Pacífica la relación cambia y favorece a P.falciparum. La malaria es un problema de salud pública, cuya vigilancia, prevención y control es de especial interés para el país y una responsabilidad del sistema general de seguridad social en salud (Instituto Nacional de Salud, 2014).
Colombia hace parte de los países firmantes de los objetivos de desarrollo del milenio en la Cumbre del Milenio de las Naciones Unidas, donde asume los compromisos de combatir el paludismo para el año 2015, dirigido a detener y revertir la incidencia de la enfermedad (Instituto Nacional de Salud, 2014).

4.2. Metodología

- **Identificación y selección de expertos:** la identificación de expertos se realizó por medio del Proyecto Malaria Colombia, donde se seleccionaron diferentes áreas de profesionales como expertos, obteniendo así a 4 expertos para nuestra elicitación, dos biólogos entomólogos, una microscopista y la coordinadora del equipo malaria del Valle del Cauca, como grupo coordinador se contó con la participación de la consultora en sistemas de información monitoreo y evaluación del Proyecto Malaria del Valle del Cauca. Estas personas son consideradas como expertos por su comprensión del tema debido al alto conocimiento y experiencias adquiridas en sus funciones realizadas en el Proyecto Malaria Colombia.

- **Estructuración y descomposición:** el proceso de elicitación comienza dando a cada experto una breve introducción sobre la distribución Multinomial y como ésta puede ser utilizada en la distribución de los casos de malaria según la especie, proceso que se realiza teniendo en cuenta el conocimiento de cada uno de ellos por medio de elicitación enfocado a una metodología Delphi, por tal motivo se le explica a cada experto que la variable de interés para el desarrollo de este trabajo es la prevalencia de cada una de las especies de malaria en pacientes diagnosticados con la enfermedad en la zona costera rural de Buenaventura, como también se indica que la escala de medición corresponde al número de pacientes con la enfermedad en cada especie de malaria.

- **Aplicación de la Metodología:**

  1. **Formulación de las preguntas:** en este primer paso se explicó y se validó con cada experto que la pregunta realizada fuera comprendida para llevar a cabo su ejecución, una vez realizada la validación a cada experto en la primer ronda se le dio 5 muestras hipotéticas por medio de preguntas como "si se seleccionaran 100 pacientes diagnosticados con malaria de la zona costera rural de Buenaventura, según su conocimiento cuántos de ellos se encuentran en P. vivax, cuántos en P. falciparum y finalmente cuántos pacientes presentan una malaria mixta."
  Las demás rondas elicitadas se realiza por medio de retroalimentación, es decir que finalizada cada ronda se envía a cada experto por separado la medida resumen como la mediana y la desviación estándar obtenida en cada categoría por los demás expertos junto con su respuesta individual, en este punto el experto puede reconsiderar sus respuestas y realizar algún cambio si él lo considera necesario; en el caso de que el experto no cambie su respuesta la información registrada en la ronda es igual a la de la ronda anterior.

Ronda 1	**Experto 1**						**Experto 2**					
	Muestra hipotética						**Muestra hipotética**					
Especie	**100**	**200**	**300**	**700**	**900**	**Media**	**100**	**200**	**300**	**700**	**900**	**Media**
P.vivax	0.090	0.095	0.100	0.057	0.056	0.080	0.200	0.150	0.133	0.143	0.178	0.161
P.falciparum	0.900	0.900	0.897	0.943	0.943	0.917	0.750	0.800	0.833	0.786	0.778	0.789
P.mixta	0.010	0.005	0.003	0.001	0.001	0.004	0.050	0.050	0.033	0.071	0.044	0.050

Ronda 1	Experto 3						Experto 4					
	Muestra hipotética						Muestra hipotética					
Especie	**100**	**200**	**300**	**700**	**900**	**Media**	**100**	**200**	**300**	**700**	**900**	**Media**
P.vivax	0.200	0.130	0.100	0.070	0.110	0.122	0.100	0.100	0.073	0.100	0.111	0.097
P.falciparum	0.750	0.800	0.870	0.900	0.860	0.834	0.820	0.825	0.867	0.829	0.833	0.835
P.mixta	0.050	0.080	0.030	0.030	0.030	0.044	0.080	0.075	0.060	0.071	0.056	0.068

Tabla 4-1.: Elicitación de expertos ronda 1 por tamaño de muestra hipotético

De esta forma los resultados registrados para cada experto en la ronda 1 corresponden a la media de cada categoría de las muestras hipotéticas dadas. La segunda ronda comienza dando retroalimentación a cada experto, en este punto el experto puede cambiar sus respuestas si lo considera necesario. En nuestro caso el experto 1 y el experto 2 presentaron modificaciones en sus opiniones.

	Ronda 1				Ronda 2			
Especie	**Exp 1**	**Exp 2**	**Exp 3**	**Exp 4**	**Exp 1**	**Exp 2**	**Exp 3**	**Exp 4**
P.vivax	0.080	0.161	0.122	0.097	0.080	0.110	0.122	0.097
P.falciparum	0.917	0.789	0.834	0.835	0.850	0.840	0.834	0.835
P.mixta	0.004	0.050	0.044	0.068	0.070	0.050	0.044	0.068

Tabla 4-2.: Elicitación de expertos por ronda.

Posteriormente se dio retroalimentación a los expertos quienes mantuvieron sus opiniones igual a las de la ronda 2, así el total de rondas elicitadas son las mostradas en la tabla anterior.

2. **Análisis descriptivo:** una vez llevado a cabo las dos rondas de elicitación se realiza un análisis de cluster en cada ronda por medio de la distancia de Hellinger con el fin de observar similitudes entre los expertos.

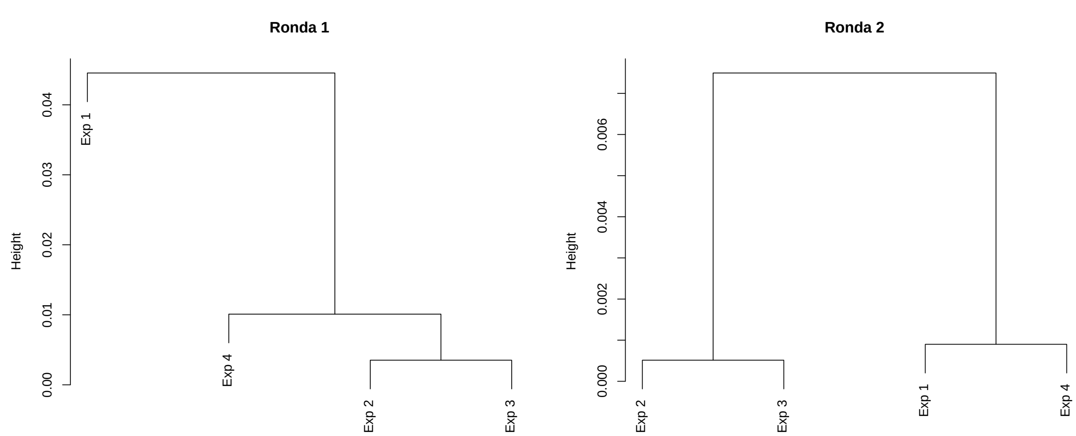

Figura 4-1.: Clasificación de expertos por ronda

Del gráfico anterior podemos observar que en la ronda 1 la opinión de los expertos se puede clasificar en 3 grupos, un grupo donde los expertos 2 y 3 presentan opiniones similares, el siguiente grupo se compone por el experto 4, y finalmente, en el último grupo encontramos las opiniones del experto 1 las cuales muestran mayor diferencia de los demás expertos. Una vez dada la retroalimentación se observa en la nueva clasificación que las opiniones del experto 1 se asemejan a las del experto 4 y las opiniones del experto 2 y 3 siguen permaneciendo en el mismo grupo.

3. **Integración de las opiniones individuales:**

   - **N-equivalente para cada experto:** con el fin de cuantificar el conocimiento del experto en un tamaño muestral, se realiza una pregunta por cada especie de malaria, donde cada experto dará el valor mínimo, máximo y el valor más probable de cada categoría. La pregunta realizada a cada experto es "si se cuenta con 100 pacientes diagnosticados con malaria en la zona costera rural de Buenaventura, según su conocimiento ¿cuántos como mínimo presentan P.Vivax?, ¿cuántos como máximo presentan P. Vivax?, ¿cuál será el valor más frecuente de encontrar pacientes contagiados por P.Vivax? " Esta pregunta es realizada a cada experto variando la especie de malaria (P.Vivax, P.Falciparun, P.mixta). La información dada por cada experto se muestra a continuación:

		Experto 1		**Experto 2**		**Experto 3**		**Experto 4**	
Especie	**Muestra**	**Intervalo**	$\hat{\pi}$	**Intervalo**	$\hat{\pi}$	**Intervalo**	$\hat{\pi}$	**Intervalo**	$\hat{\pi}$
P.vivax	100	(0.03, 0.10)	0.08	(0.05, 0.25)	0.20	(0.12, 0.25)	0.20	(0.08, 0.15)	0.09
P.falciparun	100	(0.80, 0.95)	0.90	(0.50, 0.80)	0.75	(0.60, 0.80)	0.75	(0.80, 0.90)	0.84
P.mixta	100	(0.01, 0.10)	0.01	(0.00, 0.15)	0.05	(0.01, 0.05)	0.04	(0.01, 0.12)	0.07

Tabla 4-3.: Resumen de valores elicitacidos para obtener el N-equivalente

Una vez obtenida esta información reemplazamos estos valores en 3-5 obteniendo así un n para cada experto en cada categoría y finalmente el N-equivalente para cada experto es el n de la categoría que tenga asociado el menor valor.

	Experto 1	**Experto 2**	**Experto 3**	**Experto 4**
Especie	n	n	n	n
P.vivax	94	92	217	104
P.falciparun	37	48	107	84
P.mixta	57	48	681	34
N-equivalente	$N_1 = 37$	$N_2 = 48$	$N_3 = 107$	$N_4 = 34$

Tabla 4-4.: Estimación N-equivalente

Así, la información obtenida para cada experto es la siguiente:

$$
\begin{array}{llll}
E_1, & \pi^{(1)} = (0.080, 0.850, 0.070)\,, & N_1 = 37, & w_1 = \frac{N_1}{N_1+N_2+N_3+N_4} = 0.163 \\
E_2, & \pi^{(2)} = (0.110, 0.840, 0.050)\,, & N_2 = 48, & w_2 = \frac{N_2}{N_1+N_2+N_3+N_4} = 0.212 \\
E_3, & \pi^{(3)} = (0.122, 0.834, 0.044)\,, & N_3 = 107, & w_3 = \frac{N_3}{N_1+N_2+N_3+N_4} = 0.473 \\
E_4, & \pi^{(4)} = (0.097, 0.835, 0.068)\,, & N_4 = 34, & w_4 = \frac{N_4}{N_1+N_2+N_3+N_4} = 0.150
\end{array}
$$

- **Integración de las opiniones de los expertos:** con el fin de obtener la única distribución que representa el conocimiento del conjunto de expertos en el tema de malaria se realiza una simulación utilizando como vector π la distribución dada por cada experto en la última ronda de elicitación, así la simulación para cada experto puede ser calculada mediante el software R con el siguiente comando:

```
sim1=t(rmultinom(10000,37,prob=c(0.080,0.850,0.070)))
sim2=t(rmultinom(10000,48,prob=c(0.110,0.840,0.050)))
sim3=t(rmultinom(10000,107,prob=c(0.122,0.834,0.044)))
sim4=t(rmultinom(10000,34,prob=c(0.097,0.835,0.068)))
```

  Una vez realizada la simulación se promedia las estimaciones simuladas de cada experto así:

```
promedio1=colMeans(sim1)
promedio2=colMeans(sim2)
promedio3=colMeans(sim3)
promedio4=colMeans(sim4)
```

  Luego se halla el vector de parámetros π_k que representa la opinión conjunta de los expertos:

$$\pi_1 = \frac{\hat{n_1}^{(1)} + \hat{n_1}^{(2)} + \hat{n_1}^{(3)} + \hat{n_1}^{(4)}}{N_1 + N_2 + N_3 + N_4} = \frac{2.97 + 5.31 + 13.10 + 3.32}{37 + 48 + 107 + 34} = 0.109$$

$$\pi_2 = \frac{\hat{n_2}^{(1)} + \hat{n_2}^{(2)} + \hat{n_2}^{(3)} + \hat{n_2}^{(4)}}{N_1 + N_2 + N_3 + N_4} = \frac{31.44 + 40.31 + 89.18 + 28.38}{37 + 48 + 107 + 34} = 0.838$$

$$\pi_3 = \frac{\hat{n_3}^{(1)} + \hat{n_3}^{(2)} + \hat{n_3}^{(3)} + \hat{n_3}^{(4)}}{N_1 + N_2 + N_3 + N_4} = \frac{2.59 + 2.38 + 4.71 + 2.29}{37 + 48 + 107 + 34} = 0.053$$

Así finalmente el vector de parámetros $\pi = (0.109, 0.838, 0.053)$ es el que representa el conocimiento del conjunto de los expertos respecto a la especie de malaria dada en la zona costera rural de Buenaventura.

4. N**-global:** el tamaño de muestra que representa el conocimiento del conjunto de los experto sobre la especie de malaria en la zona costera rural de Buenaventura puede ser calculado de la siguiente forma:

   $\text{N}-\text{global} = \frac{N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} = 72$

5. **Simulación y estimación:** una vez validada la distribución resumen por cada uno de los expertos, se realiza una simulación estadística en R por medio de la función rmultinom y se estima el vector de parámetros $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de la distribución Dirichlet basado en la propuesta de Flórez y Correa en 2015.

```
simt=t(rmultinom(10000,72,prob=c(0.109,0.838,0.053)))/72
```

   De esta forma se asegura que *simt* $\sim$ Dirichlet$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ por lo que la media y varianza pueden ser calculados de *simt*:

```
medias<-colMeans(simt)
varianza<-sapply(1:3,function(x)var(simt[,x]))
```

   Para garantizar que se cumpla la restricción $\sum_{i=1}^{k} \bar{Y}_i = 1$ normalizamos el vector de medias estimado de la siguiente forma:

```
medias<-colMeans(simt)/sum(colMeans(simt))
```

   Reemplazando los valores de la media normalizados y la varianza en la ecuación 2-62 así:

```
alfa<-(((medias-medias^2)/varianza)-1)*medias
medias.alfa<-alfa/sum(alfa)
var.alfa<-(alfa*sum(alfa)-alfa)/((sum(alfa)+1)*sum(alfa)^2)
```

   llegando de esta forma al vector de parámetros $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de la distribución Dirichlet.

	Alfa	Media	Varianza
α_1	7.789	0.109	0.0013
α_2	59.724	0.838	0.0018
α_3	3.806	0.053	0.0006

Tabla 4-5.: Vector de parámetros α distribución Dirichlet

Finalmente para encontrar la distribución de la especie de malaria de la zona costera rural de Buenaventura se hace uso de la propiedad marginal de la distribución Dirichlet, donde $\pi_i \sim Beta(\alpha_i, n - \alpha_i)$ con $n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$, de esta forma tenemos:

Especie de Malaria	Marginal
P.Vivax	Beta(7.789, 63.52)
P.Falciparun	Beta(59.724, 11.59)
P.Mixta	Beta(3.806, 67.51)

Tabla 4-6.: Distribución de probabilidad marginal por especie de malaria

Así la distribución de probabilidad marginal para cada especie de malaria dada en la zona costera rural de Buenaventura se muestra en el siguiente gráfico

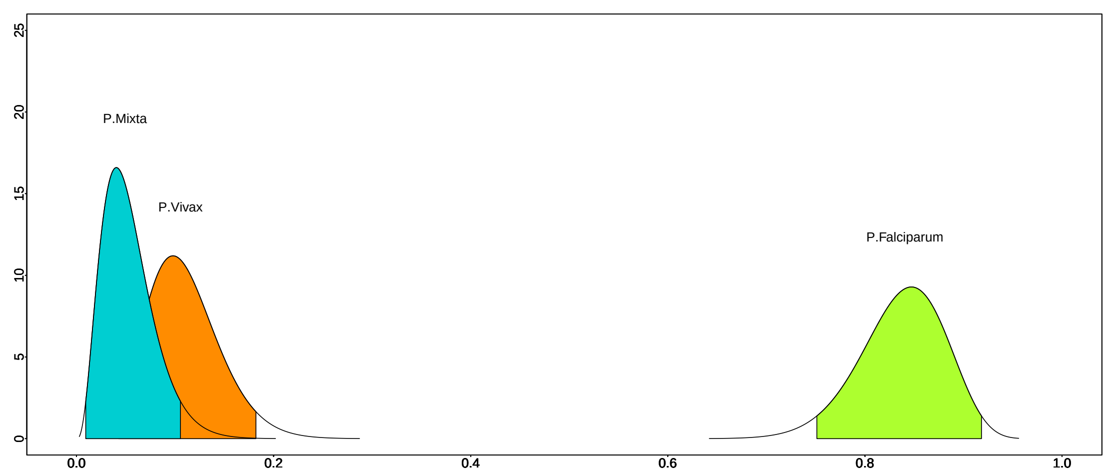

Figura 4-2.: Densidad por Especie de Malaria

Del anterior gráfico se puede observar que para la especie de malaria mixta la mayor densidad se concentra alrededor de 0.05, para la especie vivax la densidad se concentra en 0.10, adicional a esto vemos que las densidades de estas dos especies de malaria se traslapan. Finalmente encontramos que la mayor concentración de densidad en malaria se da en la especie falciparum con 0.85, es decir que alrededor del 85 % de los casos son de esta especie, esto es debido a las condiciones geográficas y la actividad económica de la región, pues esta especie de malaria se desarrolla en zona costera donde las actividades económicas más frecuentes son la pesca, el corte de madera y actividades de agricultura.

5. Conclusiones

- El método de elicitación propuesto cuenta con la participación de varios expertos, lo cual es una ventaja sobre otros métodos de elicitación (donde sólo se cuenta con la opinión y conocimiento de un experto), ya que el consenso de un grupo de individuos puede ser superior bajo determinadas condiciones a la suma de los resultados individuales de los miembros que la componen (Landeta, 1999).

- La estimación del N-Equivalente se realiza de una forma menos subjetiva a la propuesta utilizada por Bromaghin (1993) y por Flórez y Correa (2015), ya que no es el analista quien califica al experto, en lugar de esto, la estimación se realiza teniendo en cuenta el conocimiento de cada experto por medio de un intervalo de confianza, de esta forma se espera por parte del grupo coordinador que la persona que ellos consideran con un conocimiento más alto sus intervalos de confianza no sean tan amplios en las categorías de la variable de interés.

- Se evidenció que el análisis descriptivo por medio de cluster es una herramienta útil, ya que permite al grupo coordinador observar similitudes entre las opiniones de los expertos y el comportamiento que éstas van tomando al realizar el feedback por cada ronda de elicitación.

- Tomando una de las sugerencias dadas por uno de los revisores de la tesis, el análisis descriptivo de cluster puede ser utilizado para investigaciones futuras tanto para el grupo coordinador como para el grupo de expertos, de esta forma los expertos pueden visualizar de una manera gráfica cómo están sus respuestas frente a los demás, es decir, los confronta con la opinión de los demás expertos ayudando así a la formación de consensos.

- Para futuros trabajos se recomienda a los investigadores apoyarse en el aplicativo propuesto por Flórez (2015), de esta forma podrán realizar comparaciones de las distribuciones individuales de cada experto permitiendo llevar un análisis descriptivo más completo y por ende un mayor entendimiento del proceso.

A. Apéndice: Distribución Beta

La distribución Beta tiene un rango $[0,1]$ puede ser simétrica y con alta curtosis, esta flexibilidad hace que la distribución Beta sea muy apropiada para describir procesos no determinísticos para los cuales la verdadera distribución es desconocida, (Gilless y Fried, 2000); esta distribución se asocia con muchos resultados en la estadística aplicada debido a su forma conveniente y las diversas formas que puede tomar para varios valores de α y β, (Pham y Turkkan, 1992). La función de densidad de probabilidad de la distribución Beta está dada por:

$$f(\pi) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\pi^{(\alpha-1)}(1-\pi)^{(\beta-1)} \tag{A-1}$$

donde $0 < \pi < 1$ es la probabilidad de éxito en una distribución Binomial de interés, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son parámetros de la distribución, $B(\alpha,\beta)$ es la función Beta que viene realacionada por la función Gamma por la siguiente identidad:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma\alpha+\beta} \tag{A-2}$$

Así, finalmente su función de densidad de probabilidad es:

$$f(\pi) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\pi^{(\alpha-1)}(1-\pi)^{(\beta-1)} \tag{A-3}$$

Teorema 1: Suponga que $x_1,\ldots,x_n$ es una muestra aleatoria de una distribución Bernoulli con parámetro π, donde el valor de π es desconocido. También suponga que la distribución a priori de π es una Beta con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Entonces la distribución posterior de π es una Beta con parámetros $\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $\beta + n - \sum_{i=1}^{n} x_i$

B. Apéndice: Distribución Dirichlet

La distribución Dirichlet es la distribución multivariable más simple y apropiada para representar el conocimiento del experto, también es la más conveniente cuando el conocimiento a priori del experto es combinado con una muestra multinomial, la distribución Dirichlet es la conjugada a priori para los modelos Multinomiales y es ampliamente utilizada por su tratabilidad y simplicidad matemática. Entonces decimos que π tiene una distribución Dirichlet con vector de parámetros $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, denotado por $\pi \sim Di(\alpha)$ y su función de densidad de probabilidad se puede escribir como (Elfadaly y Garthwaite, 2012; Zapata et al, 2012):

$$f(\pi|\alpha) = \left[\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^{k}\Gamma(\alpha_i)}\right]\prod_{i=1}^{k}\pi_i^{\alpha_i-1} \tag{B-1}$$

donde $\alpha_i > 0; i = 1, \ldots, k$; $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = n$ y $\sum_{i=1}^{k}\pi = 1$. La media y la varianza de la distribución Dirichlet vienen dadas por:

$$E(\pi_i|\alpha_i) = \frac{\alpha_i}{n}; \qquad Var(\pi_i|\alpha_i) = \frac{\alpha_i(n-\alpha_i)}{n^2(n+1)} \tag{B-2}$$

Teorema 2: Supongamos que $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_k)'$ tiene una distribución multinomial con parámetro n fijo y $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)'$ vector de probabilidad de ocurrencian desconocido del evento. Suponga también que la distribución a priori de π es una Dirichlet con vector de parámetros $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)'$ con $\alpha_i > 0$; $i = 1, \ldots, k$. Entonces la distribución posterior de π cuando $Y_i = y_i$, $i = 1, \ldots, k$ es una distribución Dirichlet con vector de parámetros $\alpha^* = (\alpha_1 + y_1, \ldots, \alpha_k + y_k)'$.

El parámetro α_k puede ser interpretado como el conteo a priori, antes de ver los datos, que esperaríamos ver en la celda k. Un valor grande para este parámetro muestra un gran conocimiento previo acerca de la distribución, mientras que los valores pequeños corresponden a poco conocimiento, (Correa, 2014).

La distribucción Dirichlet cuenta con dos propiedades útiles para su elicitación, la propiedad de distribución marginal y la condicional:

- **Distribución marginal:** sea $m < k-1$ el primer elemento de π que puede ser denotado por $\pi^m = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$ y sea $\pi^*_{m+1} = \sum_{i=m+1}^{k} \pi_i = 1 - \sum_{i=1}^{m} \pi_i$. Entonces $\pi^{m+} = (\pi^m, \pi^*_{m+1}) = (\pi_1, \ldots, \pi_m, \pi^*_{m+1})$ toma valores m-dimensional simples. La propiedad marginal es que la distribución de π^{m+} es una $Di(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha^*_{m+1})$ donde $\alpha^*_{m+1} = \sum_{i=m+1}^{k} \alpha_i = n - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$. Un caso especial de la propiedad marginal afirma que la distribución marginal de π_i es una Beta con parámetros α_i y $n - \alpha_i$, es decir, $\pi_i \sim$ Beta$(\alpha_i, n - \alpha_i)$

- **Distribución condicional:** para $i = m+1, \ldots, k$ tenemos:

$$\pi_i^{'} = \frac{\pi_i}{1 - \pi_1 - \pi_2 - \ldots - \pi_m} \tag{B-3}$$

  Note que $\pi_i^{'} = (\pi_{m+1}^{'}, \ldots, \pi_m^{'})$ satisface la condición de caer en $(k-m-1)$. La propiedad condicional es que la distribución condicional de $\pi^{'}|\pi^m$ es una $Di(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_k)$, utilizando esta propiedad podemos descomponer la distribución Dirichlet en una secuencia de $k-1$ Beta condicional.

Una implicación de las dos condiciones es que la suma de los parámetros de la distribución condicional Dirichlet es $\pi^{'}|\pi^{m+} = \alpha^*_{m+1}$, que es el último parámetro de la distribución marginal Dirichlet de π^{m+}.

Bibliografía

[1] Barrera C., Sandoval J., Sepúlveda F., 2011, Estimación por Intervalos de Probabilidad a Posteriori para la Proporción de Estudiantes Desertores, *Revista Tecno Lógicas,* Vol 27, 75-87.

[2] Berbaum K., Dorfman., Franken E., Caldwell R., 2002, An Empirical Comparison of Discrete Ratings and Subjective Probability Ratings, *Academic Radiology,* Vol 9, 756-763.

[3] Berger J., 2000, Bayesian Analysis: A Look at Today and Thoughts of Tomorrow, *The Statistician,* Vol 95, 1269-1272, No. 452.

[4] Benson P., Önkal-Atay D., 1992, The Effects of Feedback and Training on the Performance of Probability Forecasters, *International Journal of Forecasting,* 20, 29-39.

[5] Bolger F., Önkal-Atay D., 2004, The Efects of Feedback on Judgmental Interval Predictions, *International Journal of Forecasting,* VOL 8, 559-573.

[6] Bonano E., Hora S., Keeney R., von Winterfeldt D., 1989, Elicitation and Use of Expert Judgment in Performance Assessment for High-Level Radioactive Waste Repositories, *Sandia Report,* NUREG/CR-5411, No. SAND89-1821.

[7] Bromaghin J., 1993, Sample Size Determination for Interval Estimation of Multinomial Probabilities, *The American Statistician,* Vol 47, 203– 206, No. 3.

[8] Burgman N., Fidler F., McBride M., Walshe T., Wintle B., 2007, Eliciting Expert Judgments: Literature Review, *University of Melbourne,* Round 1, Project 11.

[9] Chaloner K., Duncan T., 1983, Assessment of a Beta Prior Distribution: PM Elicitation, *The Statistician*, Vol 27, 174-180.

[10] Chu H., Hwang G., 2008, A Delphi-Based Approach to Developing Expert Systems with the Cooperation of Multiple Experts, *Expert Systems with Applications*, Vol 34, 2826-2840.

[11] Clemen R., Winkler R., 1999, Combining Probability Distributions from Experts in Risk Analysis, *Risk Analysis,* 19 187-203.

[12] Clemen R., Reilly T., 2004, Making Hard Decisions with Decision Tools, *Duxberry.*

[13] Connor R., Mosimann J., 1969, Concepts of Independence for Proportions with a Generalization of the Dirichlet Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 64, 194-206.

[14] Cooke R., 1991, Experts in Uncertainty : Opinion and Subjective Probability in Science, *Oxford University Press.*

[15] Correa J., 2005, Una Aproximación Bayesiana al Problema de Heteroscedasticidad en el Modelo Lineal Simple , *Revista Colombiana de Estadística,* Vol 28, 17-21.

[16] Correa J., 2014, Elementos de Estadística Bayesiana, *Notas de clase.*

[17] Coussement K., Benoit D., Antioco M., 2015, A Bayesian Approach for Incorporating Expert Opinions into Decision Support Systems: A Case Study of Online Consumer-Satisfaction Detection,*Decision Support Systems*, 79, 24-32.

[18] Dalkey N., 1969, The Delphi Method: An Experimental Study of Group Opinion, *Memorandum RM-5888,* The Rand Corporation, Santa Monica, CA, 90406.

[19] DeWispelare A., Herren L., Clemen R., 1995, The Use of Probability Elicitation in the high-level Nuclear Waste Regulation Program, *International Journal of Forecasting,* Vol 11, 5-24.

[20] Diaz C., 2003, Heurísticas y Sesgos en el Razonamiento Probabilistico. Implicaciones para la Enseñanza de la Estadística, *27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa.*

[21] Dickey J., 1983, Multiple Hypergeometric Functions: Probabilistic Interpretations of Statistical Uses, *Journal of the American Statistical Association*, 78, 628-637.

[22] Dickey J., Jiang J., Kadene J., 1983, Bayesian Methods for Multinomial Sampling with Missing Data Using Multiple Hypergeometric Functions, *State University of New York at Albany Department of Mathematics and Statistics*, Research Report, 6/83 No. 15.

[23] Duran B., Booker J., 1988, A Bayes Sensitivity Analysis when Using the Beta Distribution as a Prior, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol 37, 239-247, No. 2.

[24] Elfadaly F., Garthwaite P., 2012, On Eliciting Some Prior Distributions for Multinomial Models, *Department of Mathematics and Statistics,* The Open University, UK.

[25] Flórez A., Correa J., 2015, Elicitación de una Distribución Subjetiva del Vector de Parámetros π de la Distribución Multinomial, *Tesis de Maestría,* Universidad Nacional de Colombia.

[26] Fox B., 1966, A Bayesian Approach to Reliability Assessment, *Memorandum RM-5084-NASA,* The Rand Corporation, Santa Monica, CA, 23 pp.

[27] French S., 1985, Group Consensus Probability Distributions: a Critical Survey., *Bayesian Statistics 2,* Amsterdam: North Holland and Company.

[28] Garthwaite P., Kadane, J ., O'Hagan A., 2005, Statistical Methods for Eliciting Probability Distributions, *Journal of the American Statistical Association,* Vol 100, 680-700, No. 470.

[29] Gavasakar U., 1988, A Comparison of Two Elicitation Methods for a Prior Distribution for a Binomial Parameter, *Managment Science,* Vol 34, No. 6 784-790.

[30] Gelman A., Carlin J., Stern H., Rubin D., 2003, Bayesian Data Analysis, *Chapman & Hall/CRC,* 2da Edición.

[31] Genest C., Zidek J., 1986, Combining Probability Distributions. A Critique and Annotated Bibliography, *Statistical Scienc,* 1, 114-148.

[32] Gilles J., Fried S., 2000, Generating Beta Random Rate Variables from Probabilistic Estimates of Fireline Production Times, *Annals of Operations Research*, Vol. 95, 205-215.

[33] Goossens L., Cooke R., Hale A., Rodic-Wiersma., 2008, Fifteen Years of Expert Judgement at TUDelft, *Safety Science*, Vol. 46, 234-244.

[34] Gross A., 1971, The Application of Exponential Smoothing to Reliability, *Technometrics,* Vol 13, 877-883, No. 4.

[35] Hogarth R., 1975, Cognitive Processes and the Assessment of Subjective Probability Distributions, *Journal of the American Statistical Association,* Vol 70, 271-289.

[36] Hora S., von Winterfeldt D., 1997, Nuclear Waste and Future Societies: A Look into the Deep Future, *Technological Forecasting and Social Change,* Vol 56, 155-170.

[37] Instituto Nacional de Salud., 2014, Protocolo de Vigilancia en Salud Pública, *http://www.ins.gov.co/lineas-de-accion/Subdireccion-Vigilancia/sivigila/Protocolos %20SIVIGILA/PRO %20Malaria.pdf*, tomado el 08/01/2016.

[38] Jenkinson D., 2005, The Elicitation of Probabilities - A Review of the Statistical Literature

[39] Johnson N., Kotz S., Balakrishnan N., 1997, Discrete Multivariate Distributions, *John Wiley & Sons,* primera edición, 31-83.

[40] Johnson N., Kotz S., Kemp A., 2005, Univariate Discrete Distributions, *John Wiley & Sons,* tercera edición, 108-155.

[41] Johnson R., Wichern D., 2002, Applied Multivariate Statistical Analysis, *Prentice Hall, Upper Saddle River,* quinta edición.

[42] Kadane J., 1994, An Application of Robust Bayesian Analysis to a Medical Experiment, *Journal of Statistical Planning and Inference,* Vol. 40, 221-232.

[43] Kadane J., Winkler R., 1988, Separating Probability Elicitation From Utilities, *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 83, 357-363, No. 402.

[44] Kadane J., Wolfson L., 1998, Experiencies in Elicitation, *The Statistician,* Vol. 47, 3-19, No. 1.

[45] Landeta J., 1999, El método Delphi: Una Técnica de Previsión para la incertidumbre, *Editorial Ariel.*

[46] León C., Vázquez F., León C., 2003, Elicitation of Expert Opinion in Benefit Transfer of Environmental Goods, *Environmental and Resource Economics,* Vol 26, No. 199-210.

[47] Lichtenstein S., Fischhoff B., Phillips L., 1980, Calibration of Probabilities: The State of the Art to 1980, *Decision Research a Branch of Perceptronics,* Vol 62, No. 776-800.

[48] Lindley D., Tversky A., Brown R., 1979, On the Reconciliation of Probability Assessments., *Journal of the Royal Statistical Society,* Series A, 142, 146-180.

[49] Liston H., Turoff M., 2002, The Delphi Method Techniques and Applications.

[50] López C., 2011, Estadística Bayesiana.

[51] McKendrick I., Gettinby G., Gu Y., Reid S., Revie C., 2000, Using a Bayesian Belief Network to aid Differential Diagnosis of Tropical Bovine Diseases, *Preventive Veterinary Medicine.* Vol 47, 141-156

[52] Mendoza M., Regueiro P., 2011, Estadística Bayesiana, *Instituto Teconológico de México.*

[53] O'Hagan A., Buck C., Daneshkhah A., Eiser J., Garthwaite P., Jenkinson D., Oakley J., Rakow T., 2006, Uncertain Judgements: Eliciting Expert Probabilities, *John Wiley, Chicester.*

[54] Pattillo C., 1998, Investment Uncertainty and Irreversibility in Ghana, *International Monetary Fund*, Vol 45, No 3.

[55] Pham-Gia T., Turkkan N., Duong Q., 1992, Using the Mean Deviation in the Elicitation of the Prior Distribution, *Statistics & Probability*, Vol 13, 373-381, No 5.

[56] Proyecto Malaria Colombia., 2015, Vigilancia de Susceptibilidad a Insecticidas de Anopheles (Nyssorhynchus) darlingi, An. (N.) Nuneztovari y An. (N.) Albimanus en Localidades Centinelas de los Departamentos de Antioquia, Cauca, Choco, Córdoba y Valle del Cuaca, *http://www.ins.gov.co/temas-de-interes/Memorias %20Malaria/10.Resistencia %20a %20insecticidas.pdf*, tomado el 08/01/2016.

[57] Raiffa H., Schlaifer R., 1961, Applied Statistical Theory, *Harvard University Press: Boston.*

[58] Ruiz A., 2004, Apuntes de Estadística Bayesiana, *http://www.angelfire.com/ex/proba/Notas/Bayes2.pdf*, tomado el 11/03/2016.

[59] Savage L., 1971, Elicitation of Personal Probabilities and Expectations, *Journal of the American Statistical Association,* 783-801.

[60] Shephard G., Kirkwood C., 1994, Managing the Judgmental Probability Elicitation Process: A Case Study of Analyst / Manager Interaction, *IEEE Transactions on Engineering Management,* Vol 41, 414-425.

[61] Toma A., 2007, Minimum Hellinger Distance Estimators for some Multivariate Models: Influence Functions and Breakdown Point Results, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I,* 345, 353-358.

[62] Tversky A., Kahneman D., 1974, Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases, *Sciense, New Series,* Vol 185, No. 4157 1124-1131.

[63] Van der Gaag L., Renooij S., Witteman CLM., Aleman B., Tall B., 2002, Probabilities for a probabilistic network: a case study in oesophageal cancer, *Artificial Intelligence in Medicine*, 25 123-148.

[64] Weaver T., 1971, Delphi a Critical Review, *Educational Policy Research Center, Syracuse University Research Corporation*, Report RR-7.

[65] Weiler H., 1965, The Use of Incomplete Beta Functions for Prior Distributions in Binomial Sampling, *Technometrics*, Vol 7, 335-347, No. 3.

[66] Winkler R., 1967, The Assessment of Prior Distributions in Bayesian Analysis, *Journal of the American Statistical Association,* Vol 62, No. 776-800.

[67] Yau Y., Chiu S., 2015, Combating Building Illegality in Hong Kong: A Policy Delphi Study, *Habitat International,* Vol 48, No. 349-356.

[68] Zapata R., O'Hagan A., Soares L, 2012, Eliciting Expert Judgements About a Set of Proportions, *Journal of Applied Statistics.*

[69] Zwillinger D., Kokoska S., 2000, Standard Probability and Statistics Tables and Formulae, *Chapman & Hall/CRC.*