UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MANIZALES

EL RAZONAMIENTO ANALÓGICO EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL Y SUS APLICACIONES

URIEL DE JESÚS ARENAS ESCUDERO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA – SEDE MANIZALES

FACULTAD DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Julio de 2015

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

EL RAZONAMIENTO ANALÓGICO EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL Y SUS APLICACIONES

URIEL DE JESÚS ARENAS ESCUDERO

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director**:**
Mg. John Jairo Salazar Buitrago

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA – SEDE MANIZALES
FACULTAD DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Manizales, Julio de 2015

Nota de aceptación:

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Firma del presidente del jurado

_____

Firma del jurado

_____

Firma del jurado

_____

Firma del jurado

_____

Manizales, Julio de 2015

AGRADECIMIENTOS

A Dios por permitirme realizarlo.

A mi familia, especialmente a mi madre Aura Elisa por su apoyo.

Al Decano de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Dr. Fabián Fernando Serrano S., por su valioso apoyo.

Al coordinador de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias, Mgr. John Jairo Salazar Buitrago, por su colaboración y orientación en el presente trabajo.

A los docentes de la Maestría en Enseñanza de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, por sus aportes en mi formación profesional.

A mis compañeros de estudio en la maestría, porque de ellos también recibí aportes, acerca de cómo deben ser y cómo no deben ser las cosas.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN ……	6
ABSTRACT …….	7
0. INTRODUCCIÓN ……..…..	8
1. JUSTIFICACIÓN ……..	9
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ……..…….	10
4. PREGUNTAS ……	10
5. OBJETIVO GENERAL ……	11
6. OBJETIVOS ESPECÍFICOS ……	11
7. ENFOQUE PROCEDIMENTAL …….	12
8. MARCO TEÓRICO …….	13
HABILIDADES A LOGRAR ……..	19
LOS VALORES EN EL PROCESO EDUCATIVO ……	22
9. METODOLOGÍA ……	25
POBLACIÓN OBJETO DE ESTUDIO ……..	29
Variables usadas en la medición de conocimientos ……..	30
LOS VALORES COMO VARIABLES ……..	31
PRETEST …….	36
RESULTADOS DEL PRETEST, PRUEBAS EN ETAPAS INTERMEDIAS Y POSTEST ……..……	38
ANALOGÍAS USADAS EN EL PROCESO ENSEÑANZA – APRENDIZAJE	40
VARIABLES, DESENVOLVIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES ……..	43
POSTEST ……..	53
RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LAS ANALOGÍAS ……..	59
Resultados en pruebas aplicadas a alumnos …….	60
LA BITÁCORA DE CAMPO …….……	63
PRETEST Y POSTEST ……..…..	63
LAS APLICACIONES EN CONTEXTO ……..…..……	64
CONCLUSIONES ……	66
RECOMENDACIONES ……..	70
BIBLIOGRAFÍA ……..	71

ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

	Pág.
Fig. Enfoques …….……	28
Cuadro: Variables Escala Cualitativa ……	34

RESUMEN

En el presente trabajo se pretende mostrar los resultados de la aplicación de la estrategia didáctica del pensamiento analógico en los procesos de enseñanza-aprendizaje, para determinar las respuestas de los problemas de Cálculo en una variable con estudiantes de ingeniería durante un curso de Cálculo Diferencial dictado en la Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales, con un enfoque procesualista y el empleo de pedagogías activas para auscultar cómo resulta el uso de innovación propuesta, partiendo de análogos reales y mentales, extrapolados a partir de situaciones cotidianas en el manejo del saber.

Mediante el uso de las analogías, los estudiantes pueden manipular los diversos conjuntos de variables en las etapas concreta, verbal y mental del aprendizaje.

Se espera que los alumnos logren cambios a partir de las interacciones con el contexto, los compañeros, el profesor y el temario, como una adaptación a los nuevos estilos de pensamiento de corte activo.

Palabras clave: Variaciones instantáneas, variaciones promedio, variaciones unitarias, pedagogía, didáctica.

ABSTRACT

Analogical reasoning in the process teaching - learning of differential calculus and applications

En the present study is intended to show the results of the application of the teaching strategy of the analogical thinking in the teaching-learning processes, to determine the problems of calculation in a variable responses with engineering students during a course of differential calculus taught at the National University of Colombia - Manizales headquarters, with a procesualista approach and the use of pedagogies to listen how is the use of the proposed innovation active based on similar actual and mental, extrapolated from everyday situations in the management of knowledge.

Through the use of analogies students can manipulate the different sets of variables in specific, verbal, and mental phases of learning.

We're expected that students achieve changes from interactions with the context, fellow, Professor and the agenda, as an adaptation to new styles of cutting active thought.

Keywords: pulsating, average variations, unit variations, didactic, pedagogy.

0. INTRODUCCIÓN

En la búsqueda de estrategias pedagógicas para mejorar el aprendizaje de los alumnos de Cálculo Diferencial, en los estudiantes de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales y cambiar la pasividad en los procesos propios del aula de clase, se implementaron metodologías activas como el constructivismo con el aprendizaje situado y el procesualismo, o enseñanza por procesos donde los estudiantes participen en todas y cada una de las fases presenciales y externas, con acompañamiento del profesor y sin él, pero siempre contando con su asistencia y concurso. Se propone el uso de analogías explicadas y aclaradas por el profesor en el inicio de la discusión del tema, aunado a ejercicios de evidente aplicación y progresiva desafiliación a la asistencia permanente. Se trata de facilitar paso a paso la construcción del conocimiento para la aplicación a lo cotidiano y el análisis en tópicos ingenieriles de los principios físicos de que se sirve el cálculo diferencial, las variaciones instantáneas y promedio, pero sobre todo la interpretación de resultados y el planteamiento de nuevas situaciones.

Es siempre muy importante, tratar de plantear nuevos escenarios, nuevas maneras de hacer y de entender las cosas, mejorar los procedimientos de análisis de aproximación al conocimiento y cálculo, que es finalmente, el propósito de la realización de este trabajo académico.

1. JUSTIFICACIÓN

En las pruebas realizadas al interior del aula y en aquellas hechas posteriormente, cuando debe darse aplicación de los conocimientos en otras ramas del saber ingenieril, siempre es importante la madurez conceptual en el uso del pensamiento variacional, por ende, es considerable el cuidado que debe tenerse con estos conocimientos y habilidades básicas, que deben llevar a capacidades nuevas en el uso de los conceptos, que aunado al compromiso en el manejo de otras variables, fomenta la consecución de capacidades y valores, usando estrategias didácticas en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el Cálculo Diferencial, que potencien mejor interiorización y mayor capacidad de aplicación o habilidad, dando ventaja al estudiante, porque al entender apreciablemente mejor las interrelaciones entre las variables y la multiplicidad de aplicaciones, que surgen en el dominio teórico en particular y en los dominios de aplicación ingenieriles que son necesariamente contextuales, y además, resultan ser el basamento, potencian mejoras en posteriores aplicaciones en indagación e investigación de carácter más amplio y general.

Se trata de usar las pedagogías activas, de manera que los estudiantes puedan aplicar la conceptualización a diferentes modelos matemáticos, físicos y un larguísimo etcétera, que involucra todo su desarrollo profesional en etapas posteriores. Se quiere manipular variables, medir e interpretar variaciones y juzgar en base a los resultados, previa conceptualización inicial y representación mental, cálculo con entes contextuales e interpretación y uso de resultados en la realidad, con lo que de ello pueda resultar extrapolable al observar idéntica regla de comportamiento.

Mediante las estrategias propuestas, los estudiantes pueden lograr conexiones analógicas por medio del razonamiento, accediendo hasta niveles superiores en las etapas de pensamiento a saber: verbal y mental.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las relaciones entre las diversas variables son potencialmente abordables por las personas del común, pero son difícilmente explicables desde los lenguajes a saber: gráfico, textual u oral, en tabla o ecuación, motivo por el cual, hacen parte del acervo argumentativo de muy pocos entre los estudiantes. El concepto de variación unitaria, porcentual o total, es de cuidado al explicarse ya que hasta el inicio del Cálculo Diferencial en sí mismo, no se ha tenido ninguna relación con variaciones de ninguna clase.

Este trabajo de profundización de carácter académico, se realiza como antecedente en la mejora paulatina de los procesos de enseñanza–aprendizaje, que hacen parte del Proceso Docente Educativo (PDE), de carácter más general. Es importante abordar la problemática señalada con el fin de que los estudiantes logren mejorar la comprensión y acercamiento a las herramientas matemáticas y su uso adecuado.

3. PREGUNTA

¿Puede mejorarse el nivel de consecución de conocimientos, habilidades, capacidades, aptitudes y cambio en actitudes con el aprendizaje del Cálculo Diferencial, potenciando mejoras en el pensamiento matemático y la consecución de aprendizajes significativos usando analogías?

4. PREGUNTAS ESPECÍFICAS

¿Cómo pueden utilizarse las analogías y en general, el pensamiento analógico, de modo tal que los estudiantes mejoren sus capacidades de planteamiento y resolución de problemas?

¿El uso de las analogías hace más fácil manipular representaciones mentales de conceptos de variaciones en la perspectiva del pensamiento verbal y mental con sus respectivas aplicaciones?

¿El uso de las analogías y el pensamiento analógico, hace más entendible el cálculo de variaciones entre las diversas variables, en los problemas planteados inicialmente en los contextos académicos e ingenieriles?

5. OBJETIVO GENERAL

Evaluar la validez de uso de las analogías, como estrategia para mejorar procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial en la educación terciaria.

6. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

6.1. Hacer uso consciente y programado de las analogías en las clases, talleres y demás actividades académicas, a fin de lograr integrar el conocimiento teórico, con aplicaciones prácticas, haciendo uso del Cálculo Diferencial como herramienta de pensamiento.

6.2. Usar como objetos de análisis y de pensamiento, las analogías en los contenidos de la formación particular de cada estudiante, para potenciar el uso del aparato conceptual adquirido y la experiencia previa en la solución de problemas específicos en cada profesión y en la concepción y comprensión de sus contextos de vida.

6.3. Evaluar el impacto del uso de las analogías en la formación del pensamiento de los alumnos, en el currículo del curso de Cálculo Diferencial determinando en cada uno de ellos el nivel de dominio de contenidos y habilidades específicas desarrolladas (fase concreta, verbal o mental).

7. ENFOQUE PROCEDIMENTAL

El aborde seguido en el desarrollo de la indagación acerca de los resultados de la implementación de las analogías, será el método analógico, de modo que genere respuestas en el concierto educativo particular, en la etapa inicial o exploratoria y con referencia como ya fue dicho a los grupos de semestres anteriores de la asignatura contemplada, aplicando la nueva estrategia de las analogías en el PEA (Proceso Enseñanza Aprendizaje) al grupo de Cálculo Diferencial del actual semestre. Se desarrollará también y paralelamente, un diario de campo, con observaciones individuales acerca del desarrollo de los procesos, estando así explícita la realización de análisis cualitativo y cuantitativo que permita verificar la viabilidad de la estrategia en el contexto de éstos y permitir un estudio posterior, de manera que puedan establecerse correlaciones y tomar decisiones sobre la estrategia implementada.

La población objeto de este estudio, es de un grupo de 25 estudiantes del grupo de Cálculo Diferencial en el primer semestre de 2015, como grupo control, y un grupo de 25 estudiantes como grupo experimental, quienes interactuarán con la nueva metodología.

8. MARCO TEÓRICO

ENCUADRE HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO DE LAS ANALOGÍAS

Las analogías han ocupado históricamente un papel preponderante en el desarrollo del pensamiento del hombre, tanto en el contexto del hogar como en el aula en común, así como cualquier conversación por más baladí que parezca, hasta las de mayor nivel conceptual o de expresión. Por lo que se da en todos los niveles, frecuentemente alguien usa análogos imprecisos, poco entendibles, sin conexión clara con el concepto a comparar, más el pensamiento guiado por analogías, puede hipotéticamente llegar a un nivel de concepción tal, que pueda usarse en la enseñanza-aprendizaje de las ciencias, en particular del Cálculo Diferencial. De tal modo de potenciar la llegada a comprensiones y por ende, a soluciones con mayor facilidad.

Las analogías para la enseñanza de la matemática se encuentran inicialmente documentadas con Aristóteles, quien asevera que en investigación, hay que establecer diferencias; se requieren categorías exclusivas y se hace vital hablar sobre esta clase de problemas, que se deben tener en cuenta los varios sentidos que se dan, y de modo importante, la proporción que es el momento analógico, circunscrito en una lógica idealista aristotélica.

> "*Hay que estudiar primeramente la semejanza en las cosas que pertenecen a géneros distintos, siendo ésta la fórmula para ello: "A es a B, así C es a D" –por ejemplo, lo que es el conocimiento al objeto del conocimiento, eso mismo es la sensación al objeto de la sensación- y también así: "igual que A está en B, así C está en D"; por ejemplo, igual que la vista está en el ojo, así*
> *la razón está en el alma, y de la misma manera que la calma está en el mar, así la falta de viento en el aire*. (Planeta de Agostini, 1999, pág. 430).

Aquí nace metodológicamente la prueba por analogías que parte de la discusión entre lo semejante y lo común. Aristóteles vio la proporción lógica o relación lógica; logró analizar acerca de LOS NOMBRES GENÉRICOS, DE LA PROPIEDAD ESPECÍFICA Y LA DIFERENCIA ESPECÍFICA. El Profesor, aún de manera inconsciente, tiene en cuenta y debe

tenerlo, la definición de qué es lo que se dice de la esencia, cuáles propiedades definen el concepto, y claramente, por qué se dan las diferencias.

Tras superarse el oscurantismo, en el nacimiento de la modernidad, en vísperas de la época de la Ilustración, aparece un nuevo enfoque en la matemática moderna. Las analogías aparecen en el siglo XVII; se dieron importantes avances en lo respectivo al estudio de las series numéricas de términos positivos, como el "Problema de Basilea", en la que se trataba de hallar el valor de la suma infinita de los recíprocos de los cuadrados, del conjunto de los números enteros positivos; entonces la suma corresponde a:

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

El problema lo abordó inicialmente el matemático Jacques Bernoulli (1654-1705), quien no lo resolvió; Leibniz tampoco, pero el matemático suizo Leonard Euler (1707-1783), lo hizo usando una analogía, aplicando una regla de ecuaciones polinómicas a una ecuación polinómica infinita. Se partió de la serie: (Idárraga, 2014).

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = 0$$

Dividiendo por x, eliminando la indeterminación en x=0, y reemplazando x^2 por z, se tiene:

$$0 = 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots = 0$$

De las ecuaciones algebraicas, se sabe que si el término constante es igual a 1, entonces la suma de los inversos de las raíces, es igual al coeficiente del término en primer grado, con signo opuesto, como las raíces en X son $\pi, 2\pi, 3\pi, ...$, las raíces en Z serán: $\pi^2,\ (2\pi)^2,\ (3\pi)^2, ...$, por tanto,

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots$$

Lo que da solución por analogía al problema:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

El uso de las analogías en principio, tuvo carácter metafísico, según (OLIVA, 2004, pp. 16-18). En versión inicial la aproximación al pensamiento mítico de modo imaginativo en lo que concierne a la ciencia, y animista fundado en lo sobrenatural y la cosmología como en la Grecia antigua. Después fue asumido en la visión neoplatónica del mundo.

En su acepción más débil, el razonamiento analógico de tipo metafísico vino dominado por una visión neoplatónica del mundo en la que se incluye lo místico. Este pensamiento analógico fue usado por Copérnico, Kepler, en que era común el uso de categorías místicas.

Después, aparece el uso de las analogías en usar la gravedad por comparación con otros fenómenos del sistema solar, con causas exógenas a comportamientos y deseos del hombre esperando que pueda reflejar la realidad. Los fenómenos son parecidos, no solo por semejanza sino estructuralmente, asumiendo principios causales idénticos. *"Los dos fenómenos de la comparación, no serían tratados como fenómenos diferentes sino como casos particulares o ejemplos concretos de una misma realidad física"*. (OLIVA, 2004).

Para Kuhn, el razonamiento analógico, como proceso que alienta a visualizar situaciones u objetos desde la misma ley científica, juega un papel esencial en el proceso de generalización del conocimiento. (KUHN, 1975).

La labor de Newton, consideró analogías en la caída de los cuerpos y el movimiento de nuestro satélite, potenciando la ley de Gravitación. En otros casos, la identificación causal que establece la analogía, puede fracasar en algunos casos; la analogía sirve como herramienta heurística, que origina predicciones o como representación esquemática.

La enseñanza debe dar valor a las analogías a fin de lograr generalización, que puede ser el cimiento sobre el que construyan la base conceptual nuestros estudiantes.

En nuestra época fundamentalmente, las analogías se encuentran relacionadas con la investigación acerca de modelos mentales de Johnson-Laird; al respecto, Moreira afirma que "*Un modelo mental es una representación interna de informaciones que corresponde, análogamente al estado de las cosas que se están representando, sea cual sea el mismo. Los modelos mentales son análogos estructurales del mundo".* (Moreira, 1999, págs. 5-11).

Porque llegar a una analogía, requiere la madurez conceptual para estructurar y entender a cabalidad, el funcionamiento de un concepto o sistema, e identificar rasgos de comportamiento en otros que pueden en ese sentido ser comparables y finalmente análogos. Por ejemplo, los alumnos usualmente toman modelos de icopor para ejemplificar sistema solar o los átomos, así como las correspondientes analogías entre los sistemas hidráulicos y eléctricos.

En Colombia, recién aparecen trabajos relacionados de carácter aplicativo, mas no teórico como: USO DE LAS ANALOGÍAS COMO UNA ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE REACCIÓN QUÍMICA, Yuly Tatiana Unas Herrera. Universidad Nacional de Colombia, disponible en: www.bdigital.unal.edu.co/9493/1/8411018.2012.pdf

LA FOTOSÍNTESIS, CONCEPCIONES, IDEAS ALTERNATIVAS Y ANALOGÍAS. UNIDAD DIDÁCTICA DIRIGIDA A ESTUDIANTES DE LOS CICLOS 3 Y 4 DE EDUCACIÓN BÁSICA DEL COLEGIO JOSÉ MARÍA CARBONELL disponible en: http://www.bdigital.unal.edu.co/Enrique Sáenz Guarín.2012.pdf

Las revisiones realizadas en diversas investigaciones, concluyen que los resultados obtenidos con el uso de analogías, no resultan concluyentes en el sentido de apoyar o no su uso. Parafraseando algunos términos usados por Camero T., se dice, que Los inconvenientes usualmente hallados en el uso de las analogías, tienen que ver con:

1. La selección de las analogías es poco crítica y poco cuidadosa. Resultando más complejas que lo que se quiere explicar y/o ahondar.
2. La mayoría son dadas y no se trata de que los alumnos las perciban.
3. Se usan puntualmente, no siendo extensivas a otros dominios.
4. No tienen límites en su rango de acción o comparación.

También se detectó que:

1. Los inconvenientes son inevitables y derivan de los conocimientos y aptitudes del alumno, no del método y la actividad que se use.
2. Se ve como poco natural; nacida del sombrero del mago, el profesor.
3. Se cree entender, lo que en realidad no se domina.

Lo realizado en el aula, gravitó alrededor de los siguientes propósitos:

- Análisis y aplicación de criterios para los análogos elegidos.
- Participación activa del alumno en la construcción y/o identificación de la analogía.
- Uso de guías y evaluación en el proceso de construcción de la analogía.

(Camero T., 2014, pág. 36).

Desde el aspecto metodológico, no se llega aún a verdades concluyentes en cuanto a si es meramente expositiva en su aplicación, o si debe caer en cuenta el estudiante o presentársela, por lo que nada resulta perfectamente concluyente y se puede ver como un problema abierto.

> Según OLIVA, J. M., ARAGÓN, M. M., MATEO, J. y BONAT, M.: *"Desgraciadamente, en muy pocas ocasiones los textos aportan consejos y pautas que orienten a los profesores sobre cómo han de desarrollar de un modo adecuado las analogías que se incluyen, o que ayuden a los alumnos a construirlas y aplicarlas"*. (ARAGON, 1998, pág. 32)

A continuación se exponen algunos de los usos de las analogías en el PEA (Proceso Enseñanza Aprendizaje) del Cálculo Diferencial:

- El PEA (Proceso Enseñanza Aprendizaje), del Cálculo Diferencial echa mano de los anteriores conceptos abordados en la formación inicial, en el uso común del lenguaje en referencia a la geometría, forma parte de lo cotidiano. Nuestro lenguaje verbal diario usa multitud de términos geométricos, por ejemplo, punto, recta, plano, curva, ángulo, paralela, círculo, cuadrado, perpendicular, y de modo extendido, variación unitaria, variación promedio, etc. Si nosotros debemos comunicarnos con otros acerca de características como el tamaño o la forma de un objeto, el lenguaje geométrico es esencial. En general un vocabulario geométrico básico, permite comunicarse y entenderse con mayor precisión acerca de observaciones sobre el contexto.

- El PEA (Proceso Enseñanza Aprendizaje) del Cálculo Diferencial, usa las ciencias básicas como la geometría, la trigonometría y el álgebra, y las analogías, tienden puentes a las aplicaciones en problemas contextuales a saber, se relaciona con problemas de medida y patrones de unidades, diseños de formas, cálculos de volúmenes, variaciones unitarias y variaciones promedio, etc.

- El PEA (Proceso Enseñanza Aprendizaje) del Cálculo Diferencial, usa la geometría en casi todas las ramas de las matemáticas. Es una disciplina de carácter estructural y supremamente útil como elemento unificador en cuanto a lo curricular, ya que es una poderosa herramienta de visualización para conceptos en aritmética, álgebra, estadística, trigonometría y Cálculo tanto Diferencial como Integral. Los docentes echan mano con frecuencia de analogías en ejemplos, para que los estudiantes entiendan más fácilmente conceptos no ligados específicamente con el tema a tratar.

- El PEA (Proceso Enseñanza Aprendizaje) del Cálculo Diferencial echa mano de la geometría como medio en el desarrollo de la percepción espacial y la visualización. Es necesario el uso de la capacidad de visualizar objetos en el espacio, y captar sus relaciones, o de la habilidad de abstraer mentalmente representaciones bidimensionales y tridimensionales de los objetos reales o virtuales.

En el PEA (Proceso Enseñanza Aprendizaje) del Cálculo Diferencial, podrían citarse dos categorías: La lógica-racional, que define la enseñanza del Cálculo Diferencial como una teoría aparentemente axiomática que se desarrolla bajo leyes de razonamiento deductivo, y la intuitiva y experimental, basada en la búsqueda, análisis analógico y comprensión de parte del estudiante de los conceptos y propiedades geométricas en función de explicarse aspectos del mundo en que vive.

Sin duda, lo más cercano a la necesidad cognitiva de los alumnos en la educación universitaria es la experimental, pero el profesor comprende que su objetivo principal, es crear las condiciones para que el estudiante pueda interiorizar los conceptos y mejorar en cuanto a su aplicabilidad en etapas posteriores, en la profundización de lo inductivo y deductivo.

HABILIDADES A LOGRAR

Una vía importante en el desarrollo de las analogías en la enseñanza del cálculo, tiene como base los aspectos geométricos y se trata de desarrollar habilidades en estos aspectos, clasificándolas en visuales, verbales, de dibujo, lógicas y aplicativas.

HABILIDADES VISUALES

En cuanto a la representación mental, de acuerdo con su conocimiento anterior (básicamente de tipo analógico), en la lectura, comprensión e interpretación y uso de vocabulario propio, tanto en lo geométrico como desde lo diagramático. Así como el procesamiento de lo visual en cuanto a la transformación de conceptos, establecimiento de paralelismos, reconocimiento de invariantes en cuanto a tamaño, forma y posición, al someter en los problemas a traslación, rotación, etc.

La percepción de la posición propia de un objeto, ya sea este material o mental con relación a sí mismo (auto-observador), permite determinaciones abstractas y operaciones complejas como reconocer, rotar, invertir y desplazar figuras y utilizar simetrías respecto al punto, al plano etc., así como operaciones mentales que involucran el reconocimiento de distancias y completar diagramas usando analogías.

Operaciones anexas, pueden también considerarse como de memoria visual reproduciendo figuras y ubicando cuerpos.

Prepara para la consideración de los distintos tipos de espacio, como el micro-espacio (átomos, células, cristales) para modelarlas; meso-espacio lo que se alcanza manualmente y es manipulable; el macro-espacio con tamaños relacionados con la talla del sujeto actuante 0.5 y hasta 100 veces y el cosmos-espacio, en el que se tienen en cuenta, marcos de referencia y observación en el que se involucran ángulos y grandes distancias, fenómenos topográficos, astronómicos y del diario vivir.

HABILIDADES DE CONCEPCIÓN CONCRECIÓN Y CONSTRUCCIÓN

Estas habilidades están relacionadas con representaciones exteriores como un dibujo, un trazo, etc., que son objetos mentales reales pero no con existencia, que hacen evidentes imágenes y conceptos para estudiar propiedades y geometría propia y sirven de base a la intuición analógica y a procesos de deducción e inducción. Están relacionados con manejo de superficies, plegar, imprimir, cortar; ver sombreados, perspectivas, aumentar o disminuir tamaños etc. Actividades de armado utilizando software.

HABILIDADES COMUNICATIVAS

Desarrollando habilidades en constante adquisición y redefinición de capacidades para leer, entender y consecuentemente, redefinir desde los lenguajes múltiples, tales como: oral, escrito, gráfico y de ecuación, íntimamente correlacionados. Determinando equivalencias entre palabras, símbolos y convenciones de los diversos marcos referenciales, para comprender la multiplicidad

relativa de significados (acepciones) en los distintos lenguajes, la polisemia en significados visto desde las palabras, explicar y definir en los lenguajes citados conceptos, procedimientos y formas de razonamiento.

> Van Hiele (1970), en su estudio argumenta que el razonamiento geométrico de diferente nivel *"no sólo se reflejan en la forma de solucionar problemas sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario".* (Arias Goméz, 2013). Es necesario que el docente conozca y domine el vocabulario de sus alumnos, y lo enriquezca continuamente.

HABILIDADES EN PENSAMIENTO

El desarrollo de tareas que tienen en cuenta aprendizaje de conocimientos, involucran y si están bien programadas, desarrollan habilidades en el alumno que tienen que ver con el razonamiento, la deducción, la inducción y demás actividades de orden superior. Abstracción conceptual y relacional, uso de contraejemplos, inferencias analógicas, crear, imaginar, inventar y descubrir regularidades.

HABILIDADES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

De este tipo, como aplicabilidad de reglas en contextos dados y su extrapolación por analogías, aprehensión de condiciones de suficiencia y requerimiento, uso de conceptos y procedimientos intuitivamente. En palabras de Arquímedes:

> *"Mediante el método mecánico, logré entender ciertos resultados aunque posteriormente tuviesen que ser demostrados geométricamente ya que la investigación mediante el método mecánico no proveía las demostraciones. Pero es mucho más fácil poder dar una demostración de una situación, después de haberla comprendido mediante el mencionado método que intentar demostrarla sin ningún conocimiento previo"*. (Aristóteles, 1999).

LOS VALORES EN EL PROCESO EDUCATIVO

La interacción con los estudiantes en las labores académicas propias, hace que puedan conocerse con algún grado de profundidad los problemas que aquejan a las familias en sí mismas y por extensión a las comunidades; es indispensable entonces, tratar de actuar sobre esta realidad con la formación en valores, ya que recordando las estructuras conceptuales de la pedagogía, se tiene que la enseñanza y el aprendizaje, hacen parte del proceso instructivo, lo llamado a dar enseñanzas para vivir o en su expresión final, dar carrera para la vida.

El proceso desarrollador que implica templar el alma y el corazón con la generación del compromiso, con su desarrollo personal individual y ampliando su compromiso con su propio desarrollo a partir de sus potencialidades, haciéndolo extensivo como valor societal, fundido siempre y en todo momento con el proceso educativo; ambos hacen evidente la adecuada formación de los estudiantes en la resolución de la triada dialéctica.

El compromiso del profesor a partir de su vocación, no tanto profesión, tiene que ver con el proceso educativo en su conjunto, de modo que pueda dirigir su atención hacia su desarrollo y el de su contexto familiar y social: La resolución de problemas sociales, que resulta ser la vía más adecuada en la formación de valores.

Trabajo con compañeros

> Francisco Martínez dice: *"El trabajo colaborativo es la conformación de un grupo de sujetos homogéneos (con conocimientos similares en el tema), donde no surge un líder, por el contrario, el liderazgo es compartido por todos los integrantes de esta comunidad"* (Martínez, Francisco, 1999).

El objetivo del trabajo colaborativo, es generar con el concurso de los compañeros, aportes que cohesionan el grupo, tanto desde el punto de vista académico, como social, más allá de realizar una tarea específica programada, de manera que se den aprendizajes significativos,

preferiblemente aplicables de modo extensivo a la comunidad, como aptitudes, actitudes, cualidades, capacidades y valores sociales, que den sentido de pertenencia a una sociedad.

> Lev Semionovich Vygotsky dice: *"El aprendizaje despierta una variedad de procesos de desarrollo que son capaces de operar sólo cuando el niño interactúa con otras personas y en colaboración con sus compañeros"*. (Vigotsky, 1978).

Debe tenerse presente, que la construcción de significados, y por lo tanto de aprendizajes, están mediados por la comunicación; y tanto unos como otros, son de características sociales. Partiendo de valores aceptados como tal por la comunidad, se considera en este trabajo académico valores como la responsabilidad, tomado en principio más de carácter individual, pero con proyección social, el respeto hacia las personas, sus pensamientos, creencias, valores etc. y la tolerancia hacia todo lo que resulte diferente, distinto y de aceptación más tardía.

Respeto

"Nadie es lo suficientemente pequeño o pobre para ser ignorado". Henry Miller.

El ser tenido en cuenta al tomar decisiones, genera apreciación propia de las personas sobre su propia valía y de modo extensivo, se extrapola el valor al brindarse a los demás, por lo que puede decirse que después de recibirlo continuamente, se crea la capacidad de darlo.

Responsabilidad

"La responsabilidad no es la principal manera de llegar al éxito, es la única manera". Anónimo.
La responsabilidad se define como asumir los compromisos de modo explícito e implícito sobre sus deberes y con las personas, para que en su familia, grupo de estudio o de trabajo y de modo extensivo a la sociedad, se logre la imagen de seriedad y confianza con la propia persona, asumiendo las consecuencias de sus actuaciones a todo momento y siendo un mayor de edad desde el punto de vista Kantiano. En su mejor propuesta el imperativo moral kantiano.

Tolerancia

"Si no podemos poner fin a nuestras diferencias, contribuyamos a que el mundo sea un lugar apto para ellas". John Fitzgerald Kennedy.

La tolerancia es el valor más claro en la convivencia entre personas, el respeto como medida de la expresión personal. El reconocimiento a la diferencia y la otredad. En principio, se considera que todos somos iguales, por lo menos ante la ley, y tenemos iguales derechos y deberes.

Disciplina

"La disciplina es el mejor amigo del hombre, ella lleva a realizar los anhelos más profundos de su corazón". Madre Teresa de Calcuta.

La disciplina es la capacidad de acción con un orden definido, e incluye la perseverancia con miras a la consecución de bienes materiales o espirituales; se dice que para cambiar un mal hábito, son necesarios esfuerzos repetitivos hasta lograrlo. Como por experiencia puede observarse, quien la posea tiene la llave mágica para ser el dueño de su destino y el capitán de su alma.

Participación

"Los niños adquieren los conocimientos como resultado de su participación en las experiencias sociales". (Vigotsky, 1978).

La participación es fundamental en cualquier proceso donde se trate de enseñar o aprender algo, porque lleva implícita la interacción con el conocimiento en sí y las propiedades de los objetos; cuando se piensa en procesos guiados por tutores o profesores, no es también determinante: Nadie aprende a nadar por correspondencia. Participar es actuar, es realizar algo, es tomar parte.

9. METODOLOGÍA

En el desarrollo de la propuesta del presente trabajo académico sobre analogías, se utiliza el enfoque cualitativo - cuantitativo con algunos aspectos eminentemente cualitativos y otros de tipo cualitativo; además del analógico ya nombrado y como determinantes, se usan la comprensión y extrapolación analógica y la descripción en nuevos ambientes conceptuales y aplicativos.

Con el enfoque cualitativo se analizan la ejecución en el contexto de los participantes, y con el cuantitativo se expresan en determinaciones basadas en marcos referenciales; se busca entender la realidad usando extrapolación de aspectos cotidianos; el discente será capaz de relacionar lo aprendido con su realidad, con el paulatino desarrollo del proyecto. Se muestran las guías de aplicación y se describe la experiencia de los estudiantes tanto individual como colectiva, como se han dado los progresos conjuntos, colectivos y grupales durante el tiempo de ejecución de actividades en el proyecto.

Las actividades se han desarrollado en el primer semestre de 2015, tiempo en el que se estructuraron las actividades descritas y el establecimiento de correlaciones surgidas a partir de actividades que pueden sugerir abiertamente el uso de las analogías.

Los resultados obtenidos a partir de las actividades realizadas, son tangibles en la medida de ser recogidos en la experiencia directa del análisis de situaciones y aplicaciones.

La población objeto de estudio, fue la de los estudiantes del curso de Cálculo Diferencial del grupo 18 de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia -Sede Manizales-. En pos de lograr mejoras en los PEA (Procesos de Enseñanza Aprendizaje), se ejecutó en el aula y con experiencias grupales extraclase, buscando en todo momento la apropiación vía experimental del conocimiento al ampliarse permanentemente su zona de desarrollo próximo, según la teoría de Vigotsky propia del enfoque histórico cultural de la enseñanza, aplicada en el procesualismo.

El material usado en clase, propugna por el desarrollo continuo de destrezas en el pensamiento lógico y matemático, llegando a extrapolaciones mediante la observación, comparación, clasificación, observación de categorías de semejanza y diferencia en constitución, cualidades de comportamiento y definición en otros ámbitos, consiguiendo la definición de nuevas explicaciones y al continuo desarrollo de pensamiento.

Al aplicar los procesos definidos con los estudiantes, se hace un análisis de la forma como influyó y llevó a los estudiantes a mejorar sus procesos cognitivos.

Al inicio del proceso, los alumnos se encontraron activos, ansiosos de compartir los conocimientos y experiencias del docente, motivados a recibir nuevas herramientas para potenciar el camino en la formación y adquisición de nuevos conceptos y cómo aplicarlos a realidades inexploradas que le ayudarán a enfrentarse a la sociedad, que requiere seres con capacidades de superar las diferentes dificultades que entrañan los procesos de formación, en lo académico y el desarrollo de capacidades de aplicación de éstos en el diario vivir (habilidades), que conjuntamente y con una adecuada orientación, potencian capacidades que redundan en el análisis de los problemas del contexto, fomenta también valores necesarios, como resultado de la implementación de la triada dialéctica de los procesos desarrolladores, instructivos y educativos.

El Modelo didáctico analógico

Tiene cuatro espacios:

• **Anecdótico:** La analogía se ve como juego o problema, con desafíos que los estudiantes deberán enfrentar. Cada estudiante o grupo desarrolla la forma particular. En la exposición grupal, el docente no señala respuestas sino que enfatiza en los elementos comunes y diversos para abordar las soluciones.

• **Conceptualización analógica:** En la búsqueda de concertar conceptos e interpretaciones trabajadas en la solución, se negocian significados, se adecúan las palabras y se desarrollan correlaciones conceptuales entre los lenguajes usados.

• **Correlación conceptual:** Los alumnos procesan la información, sea ésta científica o no, hallando significados adecuados a los contextos de trabajo problémicos, y completan las correlaciones con los elementos datos y palabras que sean útiles y necesarias.

• **Metacognición:** *Todo estudiante debe revisar la cantidad y particularidad de los conceptos usados por él, los que no tuvo en cuenta y las nuevas relaciones establecidas, para discutirlas luego en común, para la analogía.* (Bravo Adúriz, Garófalo, Greco, & Galagovsky, 2005).

La aplicación del método didáctico analógico, hizo parte consustancial de las clases y actividades realizadas en el desarrollo del curso de cálculo, se evaluó la bondad de la estrategia de las analogías en las metas desarrolladoras, instructivas y educativas tan caras a lograr por los estudiantes.

Cada sesión se estructuró en tres momentos: la aplicación individual; la extensión al carácter grupal, con discusión de los resultados obtenidos, el grupo lo integraron tres estudiantes. Y posteriormente, en un tercer momento, se aunaron criterios y se socializó en plenaria para obtener conclusiones que posteriormente se evaluaron de forma continua.

Enfoque Mixto Cualitativo - Cuantitativo

En este trabajo se considera el enfoque mixto, ya que la información y los procesos se dieron en la interacción con el objeto de estudio; se hizo análisis y seguimiento a cada proceso por medio de la observación, el diálogo, la investigación-acción, el diario de observación individual y colectivo y la elaboración y aplicación de la rúbrica; se aplicó prueba diagnóstica (Pretest) y prueba final (Pos test), la que confronta con un análisis estadístico y determina el estado final de los estudiantes en cuanto a conocimientos en la temática abordada.

Figura. Enfoques

ENFOQUES		
CUALITATIVO	**CUANTITATIVO**	**MIXTO**
Metodología El evaluador se sitúa en el lugar donde ocurre el suceso de estudio, para obtener información por medios naturales, tales como preguntar, observar, escuchar...	**Metodología** Se explica con base en información estadística, el fenómeno o suceso, a partir de descripciones, correlaciones y predicciones. Se puede evaluar un gran número de casos o individuos, o solo uno si se le compara con un estándar.	**Metodología** Combina elementos de ambas metodologías
Instrumentos Observación Entrevista Grupo de enfoque	**Instrumentos** Exámenes Cuestionarios Encuestas Escalas	**Instrumentos** Exámenes Cuestionarios Encuestas Escalas Observación Entrevista
Aplicación Presencial	**Aplicación** Presencial	**Aplicación** Presencial

Fuente: Disponible en http://prisma-sm.com.mx/node/66

POBLACIÓN OBJETO DE ESTUDIO

Este trabajo se realizó con 25 estudiantes (16 hombres y 9 mujeres), del curso de Cálculo Diferencial para Ingenierías en la Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, Departamento de Caldas, cuyas edades están comprendidas entre 17 y 21 años. La población se caracteriza porque la totalidad de los estudiantes se dedica al estudio de las ingenierías (Civil, Industrial, Química, Eléctrica, Electrónica), lo que muestra una cierta uniformidad, en tanto han superado las evaluaciones de ingreso a la Universidad Nacional.

Es de tener presente, que como el curso se ha trabajado en varios momentos y se han realizado análisis concienzudamente, pueden usarse los resultados como referencias en el sentido comparativo para apuntalar aún mejor la validez de los resultados y por ende, la mejora del método en el PEA.

RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Guías de aula y trabajo de campo

Son elaboradas a fin de abordar las temáticas propias del Cálculo Diferencial y temarios relacionados con este trabajo.

- Cambio promedio y cambio instantáneo, ejercicios y problemas individuales y taller.
- La razón de cambio y las interpretaciones en problemas ingenieriles.
- Interpretación y uso contextual del conocimiento adquirido y de las habilidades conseguidas.
- La solución de problemas en conjuntos homogéneos (la misma carrera), y en conjuntos heterogéneos (diferente carrera), de problemas de aplicación en ingenierías.
- Indagación sobre el nivel de desarrollo de conocimientos y habilidades de las variaciones en general, en el Cálculo y sus diferentes vertientes temáticas.

Variables usadas en la medición de conocimientos

En este trabajo se proponen como variables a analizar, de acuerdo con los fines que se persiguen en el desarrollo de procesos a saber, como: Dominio de conocimientos previos (preconceptos); manejo de estas variables en problemas específicos del tema en particular, integración de estas habilidades particulares en otras de orden más general, como pueden ser facultades de análisis y/o acción, de tal modo que puedan lograrse, si se consideran habilidades generalizadas con un nivel de profundidad adecuado, para la satisfacción de necesidades en aplicaciones ingenieriles propias de cada disciplina, evidenciadas en la apropiación conceptual y procedimental del tema que lo haga parte de su estructura de pensamiento. Estas variables son:

RESUELVE EJERCICIOS Y PROBLEMAS INDEPENDIENTEMENTE

El estudiante muestra su compromiso y dominio con interés, cuando trabaja individual o en grupo los problemas y ejercicios propuestos en clase, o para resolución independiente, con el propósito de alcanzar las metas establecidas y potencializar mejoras incrementales en su desempeño. En principio, existe dependencia del profesor cuando se entrega el tema (Etapa de Motivación), pero progresivamente se va adquiriendo independencia hasta hacerlo sin compañía, (Etapas concreta, verbal, mental y evaluativa).

ARGUMENTA COHERENTEMENTE

La segunda etapa por la que transita la apropiación de conocimientos, es el desarrollo de la habilidad en la resolución de problemas, y se muestra paulatinamente, en la capacidad de resolver problemas de mayor nivel de complejidad que muestra mejor manejo de la profundidad conceptual propia del tema. Cuando es posible argumentar sobre acápites específicos creando nuevas soluciones a partir del tema estudiado, se está consiguiendo un nivel mayor que es propio de este nivel, y hace posible profundizar de acuerdo a sus necesidades posteriores en niveles mayores como puede ser el nivel investigativo.

APROPIACIÓN EN ESTRUCTURA MENTAL

La etapa final del aprendizaje, se logra cuando el estudiante hace avances notorios en el dominio del marco conceptual, sobre el que ha dimensionado el profesor su Proceso Docente Educativo (PDE), que se ve en el nivel operativo como Proceso Enseñanza Aprendizaje (PEA); el educando reacomoda en su estructura conceptual el nuevo conocimiento y reconfigura las múltiples asociaciones derivadas a partir de la nueva representación; esta reacomodación, puede observarse en la resolución de problemas de mayor nivel que son estudiados en el tema u objeto de aprendizaje. Es propio, además en este nivel, la capacidad de usar los nuevos conocimientos para explicar con mayor profundidad o amplitud, los entes u objetos estudiados.

LOS VALORES COMO VARIABLES

En el desarrollo del trabajo personal y grupal, se ha hecho evidente de modo singular y también general, un ambiente de sana competencia en que se manifiesta el deseo de superarse en cada clase con la participación en las actividades propuestas, a medida que va avanzando y progresivamente mejorar procesos como la comunicación, socialización, empatía, y colaboración entre los estudiantes, y entre éstos y el docente.

En las etapas consideradas, los estudiantes participan y aplican individualmente sus conocimientos adquiridos en el desarrollo de las actividades diseñadas y programadas; se hace evidente la comprensión previa a la asimilación, la llegada a la etapa verbal y posteriormente en la mental.

De los valores observados en el desarrollo de las actividades de clase, puede argüirse que los siguientes cobran mayor relevancia en el contexto propio de las actividades propuestas y la elaboración individual realizada. Tomando en cuenta también el hecho de la preponderancia futura en el desarrollo del individuo y de la comunidad. Estos valores son:

- Autocrítica.
- El tesón y la responsabilidad.

- La tolerancia y el respeto hacia lo demás.
- La solidaridad y la cooperación.

Autocritica

Un proverbio africano anónimo dice: “Se necesita una aldea para educar un niño”. Toda persona se educa entre semejantes, aprehende sus comportamientos y desarrolla la capacidad de apreciar sus valores; el discente tras etapas múltiples y progresivas de comparación, reflexión y adaptación, se da cuenta de que llegar a ser más, a pertenecer más y a desarrollarse mejor, un continuo proceso en el que debe reconocer en sí mismo falencias y la falta de desarrollo de habilidades que se sustenten en conocimientos útiles para su desempeño posterior, además de notar que tiene necesidades, habilidades y debilidades, en un nivel que es necesario expandir, que es necesario fortalecerse para el desarrollo de las actividades y tareas propias que le exige el desarrollo de habilidades de diverso nivel en el tema específico. Los estudiantes más aventajados se muestran como los precisos a emular; los demás, aprecian sus acciones y comportamientos, además de sopesar cómo podrán aproximarse al comportamiento o modo de acción usado como referente.

El tesón y la responsabilidad

La responsabilidad es indispensable para llegar a las metas que individualmente cada uno se señala. Se trata de tener claros los compromisos con el trabajo, el curso, la carrera y después, el desempeño que se nos dé en la vida. Entendiendo que, del cuidado que se tenga con los deberes presentes, se derivarán tanto responsabilidades como oportunidades futuras, teniendo en cuenta que los resultados individuales afectan tanto lo familiar como lo societal.

La tolerancia y el respeto hacia los demás

La tolerancia en el aula, en los alumnos más con respecto a los demás compañeros, permite la existencia de un ambiente de deseo de igualarlos y propugna individualmente por una superación grupal, una mayor aceptación y acato a la manifestación en los otros; en cuanto a los ritmos y

tiempos de aprendizaje individual, lo que se manifiesta en el respeto por el otro, que se manifiesta en ver a los demás con unas capacidades y falencias propias y en general, la diversidad en atributos y potencialidades que lo hacen ver como un valor fundamental, siendo tolerantes y manteniéndose un buen clima para el PEA. Es prudente manifestar que lo demás incluye el resto de la naturaleza y por tanto, la vida en todas sus manifestaciones, los objetos inanimados y toda manifestación artística (lo hecho por el hombre).

La solidaridad y la cooperación

La solidaridad como valor en el aula de clase, se manifestó en actitudes puntuales tales como: traspasar un tiempo estimado para las actividades, aún estaban estudiantes pendientes de resolver la tarea del día, haciendo evidente su deseo de apropiarse del tema y desarrollarlas, los demás compañeros manifestaban estos valores al tender lazos de cooperación intergrupal, haciendo de la resolución de la tarea, un proceso de todos. Aunque por el tamaño del grupo, se observa que ha de manifestarse también, que no fue general en toda la manifestación del término. Es de anotar que la manifestación de solidaridad en lo individual fue de la mayoría y la cooperación (para avanzar en los objetivos como grupo), fue denotativa.

La evaluación cualitativa de cada variable descrita, se plantea en una escala de valores, donde se estratifica particularmente, como se consideró cada uno.

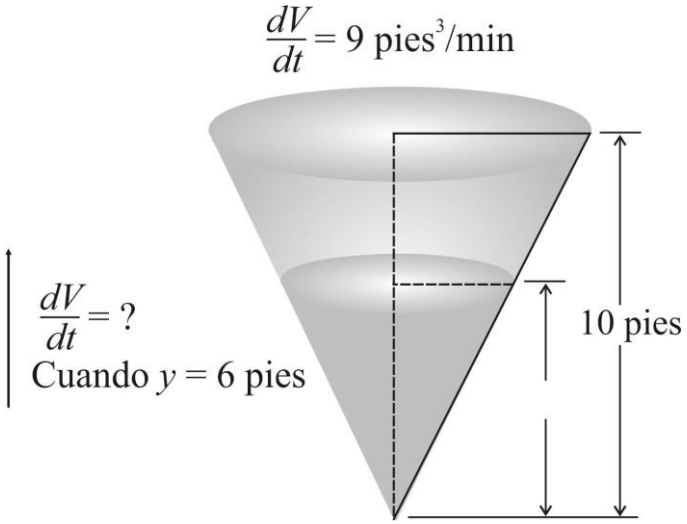
VARIABLES, ESCALA CUALITATIVA

VARIABLE	GRADACIÓN		DESCRIPCIÓN
Resuelve con Independencia, Ejercicios y Problemas	SUPERIOR	S	Demuestra, desarrolla y sustenta correctamente las tareas intra y extraclase.
	ALTO	A	Logra gran parte de las metas propuestas y las explica adecuadamente.
	BÁSICO	B	Realiza actividades propuestas de manera dependiente de los demás.
	BAJO	D	No realiza actividades propuestas.
Argumenta Coherentemente	SUPERIOR	S	Sustenta con dominio los procedimientos, usando la teoría y, extrapola nuevas aplicaciones.
	ALTO	A	Usa la teoría como apoyo, pero no con dominio completo del marco referencial.
	BÁSICO	B	Realiza las actividades propuestas para la clase y la casa con algunas falencias.
	BAJO	D	Soluciona problemas sin conocimiento y/o conciencia precisa.
Apropiación en Estructura Mental	SUPERIOR	S	Compara, deduce comportamientos y hace inferencias.
	ALTO	A	Establece relaciones entre dos o más comportamientos.
	BÁSICO	B	Intuye relaciones entre dos o más comportamientos.
	BAJO	D	No logra establecer relaciones.
Autocrítica	SUPERIOR	S	Se reconoce capaz de desarrollar las actividades y las hace extensivas a otros tópicos.
	ALTO	A	Reconoce habilidades autocrítica y debilidades, procurando su mantenimiento y/o mejora.

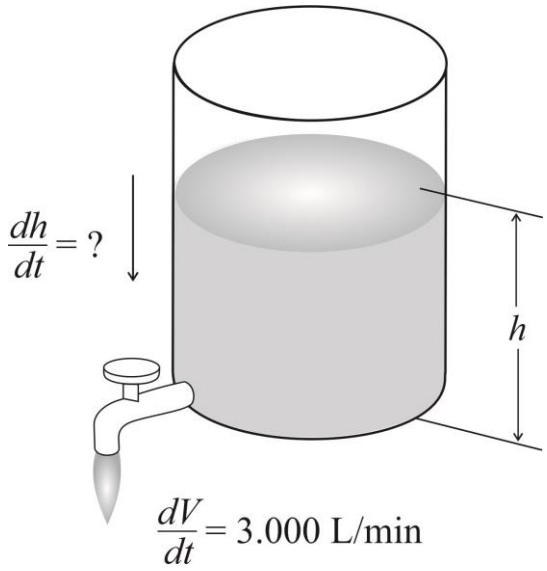
	BÁSICO	B	Está comprometido en mejorar las debilidades presentadas y lo demuestra día a día.
	BAJO	D	Muestra poco o nulo compromiso.
El tesón y la Responsabilidad	SUPERIOR	S	Realiza las actividades de manera interesada, con cumplimiento y participación grupal.
	ALTO	A	Muestra compromiso con su propio proceso, y trata de mejorar en aspectos, para él importantes
	BÁSICO	B	Reconoce falencias en su propio proceso y trata de corregir sus debilidades.
	BAJO	D	Está poco comprometido en la mejora de sus debilidades.
La tolerancia y el respeto hacia los demás	SUPERIOR	S	Fomenta el respeto y consideración con sus pares, que presentan ciertas debilidades.
	ALTO	A	Atiende el llamado al respeto y consideración con sus pares que tienen debilidades.
	BÁSICO	B	Se le hacen llamados al respeto y consideración con sus pares.
	BAJO	D	Evita el llamado al respeto y consideración con sus pares.
La Solidaridad y la Cooperación	SUPERIOR	S	Se apropia de la vocería del grupo, apoya a sus compañeros y trabaja en procura de todos.
	ALTO	A	Hace su trabajo y apoya a sus compañeros.
	BÁSICO	B	Apoya raramente y se desentiende por acción u omisión de las necesidades de sus pares.
	BAJO	D	Se aisla, tanto si es capaz de resolver los problemas y ejercicios, como si no lo es.

PRETEST

1. ¿Qué significa para usted la derivada de una función?
2. ¿Qué significa el valor promedio de una función?
3. ¿Qué significa el valor instantáneo en una función?
4. Se vierte agua en un tanque cónico a razón de 9 pies cúbicos por minuto. El tanque tiene su vértice abajo, y tiene una altura de 10 pies y un radio de la base de 5 pies. ¿Con qué rapidez se está elevando el nivel de agua, cuando la profundidad es de 6 pies?



5. ¿Con qué rapidez baja el nivel de un fluido contenido en un tanque cilíndrico de almacenamiento, si bombeamos hacia afuera el fluido a razón de 3.000 litros por minuto?



6. SI:

$$r'(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

Da el ingreso en dólares por vender x millares de barras de caramelo, $5 \leq x \leq 20$, hallar el ingreso marginal cuando se venden 11 millares de barras de caramelo a la semana.

Justificación de las preguntas en PRETEST

1. ¿Qué significa para usted la derivada de una función?
   La pregunta trata de determinar cuál es el nivel de conocimientos de los estudiantes del curso de Cálculo Diferencial, sometidos a análisis para hacer posibles las comparaciones, en los cambios en los niveles de aprendizaje al usar la enseñanza por analogías y la acepción, si manejan alguna, del término derivada para proceder a su adecuada contextualización e interpretación.

2. ¿Qué significa el valor promedio de una función?
   El interrogante planteado se usa con el propósito de medir, así sea tentativamente, el grado de conocimientos de Cálculo Diferencial en los integrantes del conjunto de

indagación, sometidos a estudio para determinar los cambios en los niveles de aprendizaje al usar la enseñanza por analogías y la acepción, si manejan alguna, del término medio o promedio, con su adecuada contextualización e interpretación.

3. ¿Qué significa el valor instantáneo en una función?
   Se trata en este acápite de consultar en primer lugar el significado en el lenguaje normal y si lo posee en su acervo, como lo contextualiza en el Cálculo Diferencial, y si puede extenderse o coligarse desde la interpretación física, con el objeto de determinar potenciales mejoras en los niveles de aprendizaje al usar la enseñanza por analogías y la concepción, si manejan alguna, de la expresión valor instantáneo de cambio, con su adecuada contextualización e interpretación.

4. Se vierte agua en un tanque cónico a razón de 9 pies cúbicos por minuto. El tanque tiene su vértice abajo, y tiene una altura de 10 pies y un radio de la base de 5 pies. ¿Con qué rapidez se está elevando el nivel de agua, cuando la profundidad es de 6 pies?

   La pregunta consulta al estudiante acerca de la capacidad de aplicación conceptual en un problema específico que implica variaciones de dos variables con elementos de razón de cambio; lo que sería en caso afirmativo la evidencia de un nivel mental en el conocimiento.

RESULTADOS DEL PRETEST, PRUEBAS EN ETAPAS INTERMEDIAS Y POST TEST

ANÁLISIS PRETEST

Para esta etapa se formaron dos grupos, experimental y de control, a los que les fue aplicada idéntica prueba el mismo día, con el fin de determinar la similitud entre las características de ambos. Inicialmente, se verifica que ambos son grupos de ingeniería de las carreras existentes en la sede, donde los estudiantes están en la misma franja etaria, con distribución aproximadamente

igual, de estudiantes desde el punto de vista geográfico y similar proporción entre géneros para cada uno de los grupos.

Estos grupos fueron caracterizados de acuerdo a los resultados, arrojando resultados prácticamente idénticos, en cuanto a la media aritmética y desviación estándar grupales, por lo que podemos considerar, que dada la gran similitud desde los puntos de vista analizados en la caracterización del grupo, éstos son comparables desde el punto de vista estadístico y pueden tomarse referencias y conclusiones, y como colofón, algunas inferencias en el desarrollo posterior del curso, al ser sometidos a la metodología clásica de enseñanza (grupo control) y la metodología sustentada en analogías (grupo experimental).

DIAGNÓSTICO Y ANÁLISIS

Con miras a explorar la situación con relación a la determinación de los conocimientos y el conjunto de habilidades y capacidades, se observó a los alumnos tanto en la clase de características magistrales, como en actividades de taller y extraclase:

- En las clases se sigue la estructura y la lógica del profesor, y su guía establecida inicialmente.
- Prevalece la orientación del profesor a los alumnos y la actividad, lo más independientemente posible con ayuda del profesor.
- En las clases observadas, predomina la resolución de ejercicios con textos y problemas.
- En los resultados hallados al finalizar las clases, se notó que dominan las habilidades específicas de la clase actual, y progresivamente todo el conjunto.
- En las clases se comprobó que el objetivo planteado, tiende a resolverse correctamente. Éstas incluían ejercicios dirigidos a evaluar el dominio de procedimientos específicos y las exigencias del problema o situación.

La situación encontrada, evidencia la falta de estrategias para lograr una adecuada llegada a la fase mental del aprendizaje, así como de la modelación y formulación de preguntas en el dominio de métodos y procedimientos matemáticos, siendo limitados los logros en la sistematización de habilidades. Las situaciones que presentan los libros de texto son significativas, ya que las clases

se estructuran a partir de la lógica del tema y es el medio básico del alumno en la ejecución de su actividad independiente.

Del análisis de los libros usados se desprenden las siguientes conclusiones:
- Los ejemplos propuestos muestran estrategias y modelos de la actuación sobre el análisis y la búsqueda de vías de solución.
- Se dan explicaciones sobre los métodos de solución con diversos niveles de generalidad y su uso, con miras a la contribución en la sistematización de habilidades buscadas.

El diagnóstico inicial muestra algunos rasgos de la situación encontrada que tienen influencia en el alumno, especialmente los que deben lograr su orientación hacia lo que debe saber hacer. La tendencia históricamente está en prestar atención a que el alumno se apropie del contenido del concepto, procedimiento, y, en menor grado, a la interpretación de las posibilidades de uso y las vías de aplicación, lo que constituye limitación en la concepción de los procesos de formación de habilidades en cálculo.

ANALOGÍAS USADAS EN EL PROCESO ENSEÑANZA – APRENDIZAJE

En las clases se utilizaron analogías sobre

- Conceptos de función creciente y decreciente.

  Se usó la analogía de un hombre subiendo por una calle con diversos grados de inclinación, subiendo, bajando y moviéndose horizontalmente.
- Conceptos de movimiento en una dimensión.

  Se usaron movimientos uniformes, movimiento uniformemente acelerado y movimiento uniformemente retardado, caída libre, lanzamiento vertical hacia arriba y hacia abajo, apelando a los conceptos físicos que dominan como bachilleres y su extrapolación en el análisis matemático.
- Para la explicación de funciones económicas como costo, ingreso, costo marginal, ingreso marginal, utilidad, utilidad marginal y punto de equilibrio, se usaron ejemplos cotidianos de la economía nacional.
- Las variables físicas, como corriente, voltaje y potencia, etc.,

- Y en las variables termodinámicas, se usaron analogías hidrostáticas.
- En los problemas de aplicación, se usaron las variables geométricas y físicas propias de cada problema que habían tenido uso previo tanto en explicación, como en el trabajo propio de los estudiantes.

Finalmente, se usaron funciones implícitas para relacionar variables de modo simple, e inferir su comportamiento.

PRUEBA 1. CONSIDERE y COMO UNA FUNCIÓN DEPENDIENTE APLICABLE EN SU PROFESIÓN, Y EXPLIQUE QUÉ OBTIENE AL DERIVAR USANDO LAS REGLAS PARA ELLO, CALCULANDO LA DERIVADA DE CADA FUNCIÓN, Y AL TRAZAR LA GRÁFICA DE LA PENDIENTE EN EL PUNTO DADO, SI:

1) $y = (1 - x)(1 + x^2)^{-1}$ en $x = 2$

2) $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$ en $x = -1$

3) $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)$ en $x = -2$

4) $y = \frac{12}{x} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}$

5) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

Preguntas:

- ¿Qué significa la derivada?
- ¿Qué significa la asíntota?
- ¿Qué significa la pendiente en un punto?

VARIABLES, DESENVOLVIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES

En los siguientes cuadros, podemos encontrar la escala cualitativa por cada variable otorgada a los estudiantes, de acuerdo con cada guía aplicada, su desempeño y progreso durante las clases.

Tabla de progreso en cada variable. Guía de trabajo Nº 1

ESTUDIANTES	Resuelve problemas y ejercicios independientemente	Argumenta coherentemente	Apropia a nivel mental	Autocrítica	El tesón y la responsabilidad	Tolerancia y respeto por los demás	La Solidaridad y la Cooperación
1	A	A	A	A	A	A	A
2	D	D	D	B	B	A	B
3	B	B	B	A	A	S	S
4	A	A	A	S	S	A	A
5	A	A	A	A	A	A	A
6	B	B	B	B	A	A	A
7	B	B	B	A	B	A	B
8	A	A	A	S	A	S	S
9	S	S	S	S	S	A	A
10	B	B	B	B	B	A	A
11	D	D	D	D	D	B	B
12	B	B	B	B	B	A	A
13	A	A	A	A	A	A	A
14	A	A	A	A	A	S	S
15	S	S	S	S	S	S	A
16	A	A	A	A	A	A	A
17	A	A	A	A	A	A	A
18	A	A	A	A	A	B	B
19	A	A	A	A	A	A	A
20	B	B	B	B	A	B	B
21	B	B	B	B	B	A	A
22	B	B	B	B	A	B	B
23	S	S	S	S	S	A	A
24	A	A	A	A	A	A	A
25	D	D	D	D	B	A	A

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MANIZALES

PRUEBA 2.

1) Si una piedra se arroja desde el piso hacia arriba en forma vertical con una velocidad inicial de $10\ mts/seg$, y si $s(t) = 5t^2 + 10t$, donde $s(t)$ es la altura en metros de la piedra desde el punto de partida a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. Hallar:

a) La velocidad media de la piedra durante el intervalo de tiempo $3/4 \leq t \leq 5/4$.
b) La velocidad instantánea de la piedra a los 3/4 de segundo.
c) Cuánto tiempo tardará para llegar al punto más elevado?
d) Cuál es la altura máxima que alcanzará la piedra?
e) Cuál es la velocidad de la piedra cuando llega al piso?

2) Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $-2/9$ y que es tangente a la parábola

$$x^2 + 4_y = 20.$$

3) Un objeto recorre $t^3 + t + 2$ metros en los primeros t segundos.

a) Cuánto recorre entre $t = 2$ y $t = 3$ segundos?
b) Cuál es su velocidad media en ese intervalo?
c) Cuál es su velocidad en $t = 4$ segundos?

Tabla de progreso en cada variable. Guía de trabajo Nº 2

ESTUDIANTES	Resuelve problemas y ejercicios independientemente	Argumenta coherentemente	Apropia a nivel mental	Autocrítica	El tesón y la responsabilidad	Tolerancia y respeto por los demás	La Solidaridad y la Cooperación
1	B	B	B	A	A	A	A
2	D	D	D	D	D	B	B
3	A	A	A	A	A	A	A
4	B	B	B	B	B	A	A
5	A	A	A	A	A	A	A
6	A	A	A	A	A	A	A
7	B	B	B	B	B	B	B
8	A	A	A	A	A	S	S
9	A	A	A	A	A	A	A
10	B	B	B	B	B	A	A
11	B	B	B	B	B	A	A
12	B	B	B	B	B	A	B
13	B	B	B	B	B	A	A
14	A	A	A	A	A	A	B
15	S	S	S	S	S	A	A
16	B	B	B	B	B	A	B
17	B	B	B	B	B	A	A
18	A	A	A	A	A	A	B
19	A	A	A	A	A	B	B
20	B	B	B	B	B	A	A
21	B	B	B	B	B	B	A
22	B	B	B	B	B	A	A
23	S	S	S	S	S	S	A
24	B	B	B	B	B	B	B
25	D	D	D	D	D	A	A

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

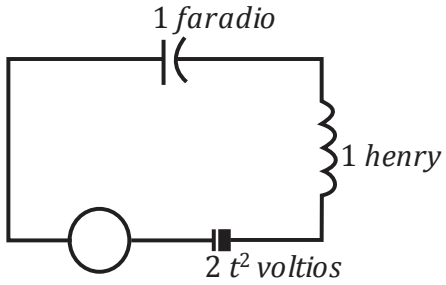
SEDE MANIZALES

PRUEBA 3.

1. El diagrama muestra un circuito eléctrico simple. Si la capacitancia es 1 faradios, la inductancia es 1 en henrios y el voltaje es $2\ t^2$ en voltios, en el tiempo t, entonces la carga total $\mathrm{Q}(t)$ del circuito en el tiempo t es:

   $\mathrm{Q}(t) = 2\ \mathrm{sen}\ t + 2\ t^2$ en coulombios. Compare la corriente en los tiempos

   $t = 0$ y $t = 1$



2. Supón que cuesta

   $c\ (x) = x^3 - 6\ x^2 + 15x$ dólares producir x radiadores, cuando se producen de 8 a 30 radiadores. Tu taller actualmente produce 10 radiadores al día. ¿Cuál será el costo extra de producir un radiador más al día?

3. Un objeto que cuelga de un resorte (Fig. 236, Thomas Finney, pág. 148), se estira 5 unidades más allá de su posición de reposo y se suelta en el instante $t = 0$ para moverse de arriba abajo.
   Su posición en cualquier instante t posterior es $5 = 5\ cos\ t$

¿Cuáles son su velocidad y aceleración en el instante t?

4. Si un gas en un recipiente cerrado se mantiene a temperatura constante t, la presión P se relaciona con el volumen V, mediante una fórmula de la forma:

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

en la cual a, b, n y R son constantes:

Encuentra $\frac{dP}{dV}$

Tabla de progreso en cada variable. Guía de trabajo Nº 3

ESTUDIANTES	Resuelve problemas y ejercicios independientemente	Argumenta coherentemente	Apropia a nivel mental	Autocrítica	El tesón y la responsabilidad	Tolerancia y respeto por los demás	La Solidaridad y la Cooperación
1	B	B	B	A	A	A	S
2	D	D	D	B	B	A	B
3	B	B	B	A	A	A	S
4	B	B	B	B	A	A	A
5	A	A	A	A	A	A	S
6	A	A	A	A	A	S	S
7	D	D	D	B	B	A	A
8	A	A	A	S	A	A	S
9	B	B	B	A	A	S	A
10	B	B	B	A	B	A	S
11	B	B	B	A	A	A	A
12	A	A	A	S	S	S	S
13	B	B	B	S	S	S	A
14	A	A	A	S	S	A	A
15	S	S	S	S	S	S	A
16	B	B	B	A	A	A	A
17	B	B	B	A	A	A	S
18	S	S	S	S	S	S	S
19	A	A	A	S	S	S	S
20	A	A	A	A	S	S	A
21	B	B	B	A	A	A	A
22	B	B	B	A	A	A	A
23	S	S	S	S	S	S	S
24	A	A	A	A	S	S	S
25	D	D	D	B	B	A	A

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MANIZALES

PRUEBA 4.

1) Si $f(x) = x^{2/3}\left(\frac{5}{2} - x\right)$ Hallar:

a) Los intervalos donde la función crece o decrece
b) Los valores extremos
c) Los intervalos de concavidad y
d) Trace la gráfica

2) ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro circular recto sin tapa más ligero (con menos material), que puede contener un volumen de 1.000 cm^3?

3) Hay que construir una pileta de las dimensiones que se muestran. Solo se puede variar el ángulo θ. ¿Con qué ángulo se obtendrá el volumen máximo de la pileta?.

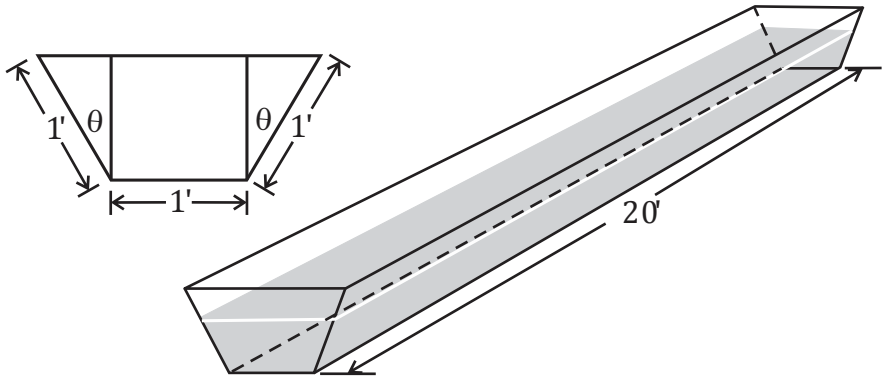


Tabla de progreso en cada variable. Guía de trabajo Nº 4

ESTUDIANTES	Resuelve problemas y ejercicios independientemente	Argumenta coherentemente	Apropia a nivel mental	Autocrítica	El tesón y la responsabilidad	Tolerancia y respeto por los demás	La Solidaridad y la Cooperación
1	A	A	A	A	A	A	S
2	B	B	B	B	B	A	A
3	B	B	B	A	A	A	S
4	B	B	B	A	A	A	A
5	S	S	S	S	S	S	S
6	A	A	A	A	A	S	S
7	B	B	B	B	A	A	A
8	S	S	S	S	S	S	S
9	S	S	S	S	S	S	S
10	B	B	B	A	A	A	A
11	D	D	D	B	B	A	B
12	B	B	B	B	B	A	A
13	A	A	A	S	S	S	S
14	S	S	S	S	S	S	S
15	S	S	S	S	S	S	S
16	A	A	A	A	A	A	S
17	A	A	A	A	A	S	A
18	S	S	S	S	S	S	S
19	S	S	S	S	S	S	S
20	A	A	A	A	A	A	S
21	A	A	A	A	A	A	A
22	A	A	A	A	A	A	A
23	S	S	S	S	S	S	S
24	A	A	A	A	A	A	S
25	B	B	B	A	A	A	B

PRUEBA 5. HALLAR LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES:

Hallar $\frac{dy}{dx}$ si:

1) $x^2\,(x-y)^2 = x^2 - y^2$

2) $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

3) Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ si

$$2\sqrt{y} = x - y$$

4) Verificar que el punto dado esté sobre la curva y hallar las rectas que son: a) tangente y b) normal a la curva.

$$2xy + \pi sen\, y = 2\pi \text{ en } (1,\ \pi/2)$$

Tabla de progreso en cada variable. Guía de Trabajo Nº 5

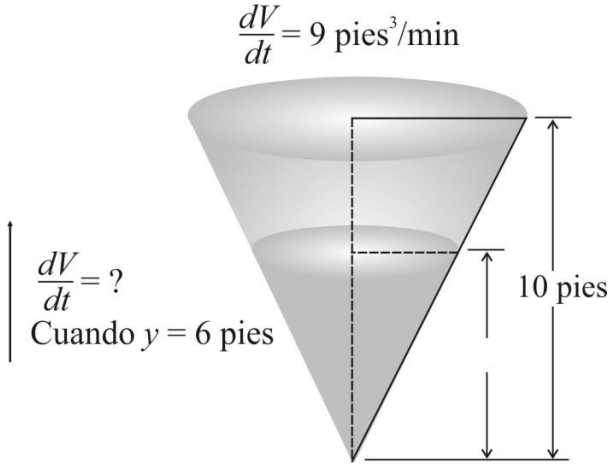
ESTUDIANTES	Resuelve problemas y ejercicios independientemente	Argumenta coherentemente	Apropia a nivel mental	Autocrítica	El tesón y la responsabilidad	Tolerancia y respeto por los demás	La Solidaridad y la Cooperación
1	A	A	A	A	A	S	S
2	B	B	B	B	A	A	A
3	B	B	B	A	A	A	S
4	B	B	B	A	A	A	A
5	S	S	S	S	S	S	S
6	A	A	A	A	S	S	S
7	B	B	B	B	B	A	A
8	B	B	S	S	S	S	S
9	S	S	S	S	S	A	B
10	B	B	B	A	A	A	A
11	D	D	D	B	B	A	B
12	B	B	B	B	B	A	A
13	A	A	A	S	S	S	S
14	S	S	S	S	S	S	S
15	S	S	S	S	S	B	A
16	A	A	A	A	A	A	B
17	A	A	A	A	A	S	A
18	S	S	S	S	S	S	S
19	S	S	S	S	S	S	S
20	A	A	A	A	A	S	S
21	A	A	A	A	A	A	A
22	A	A	A	A	A	A	A
23	S	S	S	S	S	S	S
24	A	A	A	A	A	S	S
25	B	B	B	A	A	B	B

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

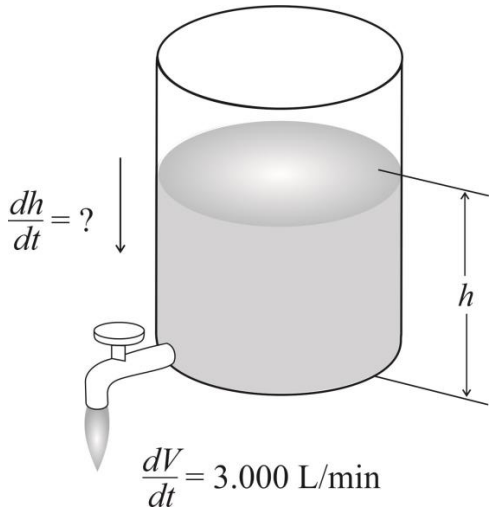
SEDE MANIZALES

POSTEST.

1. ¿Qué significa para usted la derivada de una función?
2. ¿Qué significa el valor promedio de una función?
3. ¿Qué significa el valor instantáneo en una función?
4. Se vierte agua en un tanque cónico a razón de 9 pies cúbicos por minuto. El tanque tiene su vértice abajo, y tiene una altura de 10 pies y un radio de la base de 5 pies. ¿Con qué rapidez se está elevando el nivel de agua, cuando la profundidad es de 6 pies?



5. ¿Con qué rapidez baja el nivel de un fluido contenido en un tanque cilíndrico de almacenamiento, si bombeamos hacia afuera el fluido a razón de 3.000 litros por minuto?



6. SI:

$$r'(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

Da el ingreso en dólares por vender x millares de barras de caramelo, $5 \leq x \leq 20$, hallar el ingreso marginal cuando se venden 11 millares de barras de caramelo a la semana.

Tabla de progreso en cada variable. CUALIFICACIÓN FINAL (Post Test)

ESTUDIANTES	Resuelve problemas y ejercicios independientemente	Argumenta coherentemente	Apropia a nivel mental	Autocrítica	El tesón y la responsabilidad	Tolerancia y respeto por los demás	La Solidaridad y la Cooperación
1	A	A	A	A	A	S	S
2	D	D	D	B	B	A	B
3	B	B	B	A	A	S	S
4	B	B	B	A	A	A	A
5	S	S	S	S	S	S	S
6	S	S	S	S	S	S	S
7	B	B	B	A	A	A	A
8	S	S	S	S	S	S	S
9	S	S	S	S	S	S	S
10	B	B	B	A	A	A	A
11	D	D	D	B	B	A	B
12	B	B	B	B	B	A	A
13	S	S	S	S	S	S	S
14	S	S	S	S	S	S	S
15	S	S	S	S	S	S	S
16	A	A	A	A	A	A	S
17	A	A	A	A	A	S	A
18	S	S	S	S	S	S	S
19	S	S	S	S	S	S	S
20	A	A	A	A	A	A	S
21	A	A	A	A	A	A	A
22	A	A	A	A	A	A	A
23	S	S	S	S	S	S	S
24	A	A	A	A	A	A	S
25	D	D	D	A	A	A	B

POSTEST

POSITIVO	NEGATIVO	INTERESANTE
Cuando se utilizan analogías en la enseñanza del Cálculo Diferencial, se genera un mayor interés en los estudiantes por comprender los conceptos matemáticos utilizados en sus respectivas disciplinas, lo que conlleva a un mejoramiento de sus habilidades para entender mejor el medio en que se desarrollan.	El empleo de analogías en la enseñanza del Cálculo Diferencial, no garantiza que dichas analogías conlleven a una mayor comprensión de los conceptos matemáticos utilizados por parte de los estudiantes, ya que cada uno de ellos los puede interpretar de acuerdo a sus criterios propios, y esto puede ocasionar malas interpretaciones conceptuales que en su mayoría se vuelven difíciles de corregir en tiempos futuros.	Al emplear el uso de analogías en la enseñanza del Cálculo Diferencial, el profesor debe ser muy cuidadoso con las analogías que vaya a utilizar ya que lo que se pretende es mejorar la comprensión de los conceptos que éste debe manejar en su quehacer como professional. Lo mejor que un docente puede esperar, es que su labor sea vea reflejada en el mejoramiento de las habilidades de sus estudiantes, competencias para lo cual el uso de las analogías es una herramienta no siempre efectiva pero que en muchos casos ayuda a lograr los objetivos del docente.

	GRUPO CONTROL						GRUPO EXPERIMENTAL				
	PRETEST	P_1	P_2	P_3	P_4		PRETEST	P_1	P_2 +1.0	P_3 +0.5	P_4 +0.6
1	1.0	2.0	1.6	2.1	1.9		0.0	2.4	3.0	2.9	3.0
2	1.0	2.7	1.1	1.2	1.7		0.0	3.1	2.2	1.8	2.5
3	1.0	2.8	2.4	3.2	2.8		1.0	3.2	4.8	5.0	4.6
4	0.0	3.0	1.5	1.4	2.0		2.0	3.4	2.9	2.4	3.0
5	0.0	2.7	1.6	2.2	2.2		0.0	2.3	3.0	3.1	3.2
6	0.0	3.1	1.8	1.2	2.1		1.0	3.4	3.0	1.9	3.0
7	1.0	2.5	1.7	1.7	2.0		0.0	2.9	2.9	2.5	3.0
8	0.0	1.8	1.4	3.0	2.0		2.0	2.0	2.6	4.8	3.0
9	1.0	1.7	1.7	1.8	1.8		1.0	2.0	3.0	2.6	3.0
10	2.0	3.3	1.7	1.6	2.2		0.0	3.7	3.1	2.3	3.2
11	1.0	3.0	2.2	1.7	2.3		2.0	3.3	3.6	2.5	3.3
12	0.0	2.0	1.2	1.0	1.4		1.0	2.3	2.3	1.6	2.2
13	2.0	4.0	2.3	2.2	2.9		1.0	4.8	3.6	3.1	4.0
14	0.0	2.8	1.1	2.6	2.1		1.0	3.2	2.3	3.5	3.1
15	0.0	1.6	1.5	1.8	1.6		0.0	1.8	2.9	2.6	2.5
16	2.0	3.8	3.0	1.7	2.8		1.0	4.6	5.0	2.5	4.6
17	2.0	4.2	1.6	2.5	2.8		0.0	5.0	2.8	3.5	4.6
18	1.0	1.6	1.4	1.2	1.4		0.0	1.7	2.6	1.9	2.2
19	0.0	1.7	1.6	3.0	2.1		1.0	1.9	2.8	4.6	3.0
20	1.0	3.3	3.7	2.6	3.2		2.0	4.5	5.0	3.4	5.0
21	0.0	1.7	2.3	1.0	1.7		0.0	1.9	3.6	1.7	2.5
22	0.0	3.1	2.3	2.2	2.6		1.0	3.4	3.5	3.1	3.6
23	1.0	4.2	2.7	3.8	3.6		0.0	5.0	4.6	5.0	5.0
24	0.0	2.2	1.8	1.7	1.9		1.0	2.0	3.1	2.5	3.0
25	1.0	3.3	4.0	2.9	3.4		1.0	4.0	5.0	4.3	5.0

Cuyas medias y desviaciones típicas son:

Para el grupo control $U_p = 0.72$ y $S_p = 0.7222$

$U_1 = 2.724$ $S_1 = 0.812049$

$U_2 = 1.968$ $S_2 = 0.72923$

$U_3 = 2.052$ $S_3 = 0.73219$

$U_4 = 2.26$ $S_4 = 0.58924$

Para el grupo experimental $U_p = 0.76$ y $S_p = 0.5024$

$U_1 = 3.184$ $S_1 = 1.05671$

$U_2 = 3.3280$ $S_2 = 0.8604$

$U_3 = 3.404$ $S_3 = 1.02525$

$U_4 = 3.404$ $S_4 = 0.87566$

RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LAS ANALOGÍAS

Se señala como característica la heterogeneidad del colectivo estudiantil por su aprovechamiento, y las condiciones previas en la formación que se vieron reflejadas en los diagnósticos y las comprobaciones.

En el desarrollo de la aplicación metodológica se incluyó un sistema de actividades (conferencia, seminarios y talleres), con el fin de analizar el modelo teórico y el modelo didáctico concreto para el tratamiento de los temas estudiados a saber, las variaciones medias o promedio y las variaciones instantáneas.

Las actividades abordaron estos temas:

• El concepto de conocimiento y el de habilidad en Cálculo; variaciones. Caracterización.
• La determinación de habilidades básicas y elementales y su aplicación en el campo disciplinar.
• La motivación hacia el objetivo. Las habilidades aplicativas en problemas contextuales.
• La selección de los ejemplos, como apoyo en la formación del sistema de habilidades y conocimientos matemáticos al aplicar conceptos de variaciones.
• La obtención de las habilidades básicas en el sistema de clases.
• Categorización en la medición y control de las habilidades en ejercicios y problemas propuestos.

Las observaciones en clase (Investigación Acción Participativa)

En las clases de aproximación a nuevos conceptos, se logró la motivación a través de un problema o situación concreta, que destacara el procedimiento o método a emplear con la habilidad que correspondiera desarrollar.

Los ejemplos (para mostrar una situación puntual), se utilizaron en las clases de orientación de nuevo contenido, por las deficiencias halladas en los saberes previos de los alumnos.

En el caso de ejercicios que integran múltiples procedimientos aparecen: de demostración, de cálculo y de construcción; se utilizaron conceptos de uno o varios sistemas de clases que conforman la habilidad determinada.

En las clases, el nivel de independencia en la población de 25 estudiantes, fue manifiesto así:
- Orientación total del profesor: 0
- Orientación parcial del profesor a los alumnos: 3
- Actividad independiente del alumno con ayuda del profesor: 14
- Actividad totalmente independiente del alumno: 8

Se presentaron ejemplos en la orientación de la actividad con declaración de habilidades elementales a formar o a aplicar, pero la heterogeneidad en las características individuales de los alumnos, requiere de labor constante del profesor, desde la dosificación de la clase y el diagnóstico previo de los alumnos.

La frecuencia y tipo de las preguntas usadas en clases, guían al alumno a establecer relaciones y a valorar aplicaciones en la solución de ejercicios y problemas, tanto en la búsqueda del nuevo contenido como en su uso, viéndose una mayor frecuencia comparada con el diagnóstico inicial.

Resultados en pruebas aplicadas a alumnos

Se tiene en cuenta la capacidad del alumno para hallar y representar un camino de solución a un problema o ejercicio. Para esto se propuso la escala a continuación para control y categorización del alumno, en cualquier momento del proceso de enseñanza-aprendizaje de una unidad.

Nivel D: Bajo. El alumno no responde el ejercicio.
Nivel B: Básico. El alumno reconoce algunas condiciones, pero no es capaz de establecer relaciones o inferir vías de solución. Demuestra manejar habilidades elementales que no resultan suficientes para lograr un método de solución.

Nivel A: Alto.
El estudiante puede plantearse la vía reconociendo propiedades e infiriendo, aunque tenga imprecisiones en alguna propiedad o característica en su estructuración conceptual. Domina las habilidades básicas y/o elementales que allegan a una vía de solución.

Nivel S: Superior.
El alumno plantea la vía y la expresa con exactitud en el lenguaje propio del concepto, selecciona la vía especial para solucionar el problema. Aquí el discente muestra un elevado desarrollo en las habilidades necesarias para completar la solución del ejercicio.

Las pruebas se aplicaron en la unidad a lo largo del período de duración del curso, con el fin de auscultar el dominio de habilidades, la sistematización en cuanto a las vías de solución y cómo se solucionan las incoherencias e insuficiencias halladas en las habilidades elementales y básicas.

En algunas pruebas, se propusieron ejercicios de cálculo de variaciones, por ser éste el objetivo del trabajo. Se examinó la habilidad en la aplicación de conceptos, la fundamentación de propiedades y su uso en las figuras y diagramas, y en particular, donde intervienen habilidades elementales. La habilidad es importante en la formación porque direcciona la unidad temática.

Los resultados se resumen a continuación:

- Hay tendencia a que los alumnos amplíen el dominio de la habilidad, favoreciendo el progreso hacia los niveles superiores (medio y alto), además de incrementarse progresivamente, el número que mejoran la precisión en las respuestas dadas (niveles altos).
- En los ejercicios de cálculo de variaciones, los estudiantes hallan relaciones y las muestran con buena precisión. Se observan progresos en establecer relaciones y realizar inferencias para hallar soluciones usando las propiedades. Se hace evidente el resultado satisfactorio en la búsqueda de vías de solución (nivel medio), que también pueden hablar en un lenguaje adecuado (nivel superior).
- En las aplicaciones específicas, aunque los alumnos se mantienen en los niveles inferiores, es evidente la mejora alcanzada ya que se manifiesta un desarrollo en la búsqueda y logro de vías de

solución para hacer los problemas, hallar propiedades para fundamentar las relaciones y ser capaz de establecer inferencias.
Aquí es importante señalar acciones en que se detectan avances satisfactorios:
- La determinación de las premisas;
- El reconocimiento de propiedades;
- El reconocimiento de los marcos de referencia;
- El establecimiento de inferencias para lograr resultados.

Debe señalarse además, que los avances en uso de terminología adecuada y la simbología, siendo problemática la similitud en problemas de los alumnos al denotar los objetos propios del cálculo y las variaciones, es lo que debe ser objeto de mayor atención mediante los ejemplos.

Los resultados de estas pruebas, demuestran que la sistematización en las habilidades en el uso del cálculo de variaciones, usando las analogías mostradas por los alumnos en la consecución de vías de solución en los problemas, se consiguió un desarrollo progresivo.
Es posible argumentar que las tres primeras pruebas, denotan un bajo desarrollo en las habilidades porque existe un alto porcentaje de estudiantes por encima de los niveles menores y un bajo número de ellos en los niveles superiores, lo que se ve como pobre resultado a nivel general.

En las pruebas se ve la tendencia hacia niveles medios con alto porcentaje por arriba de lo pensado, en tanto por debajo, resaltan los niveles inferiores. La última prueba muestra un adecuado desarrollo de las habilidades con prácticamente el 70% de los alumnos en los niveles superiores y que está significativamente por encima de lo esperado y por debajo en el nivel inferior.
La prueba final muestra un buen ajuste a lo esperado en cada nivel.

Podemos concluir entonces, que en el desarrollo de las habilidades de cálculo con el uso de analogías, se logra mejoría considerable hacia los niveles medios; en las habilidades de aplicación propias de sus intereses la evolución fue más pronunciada.

El uso de analogías es un modelo adecuado aplicable a los programas de cálculo en el que se destacan aspectos como:

- Aumento en la comprensión de contenidos, objetivos a lograr y control de logros y resultados en los alumnos;
- La orientación de los alumnos en la formación de las habilidades mejora notablemente;
- Aumenta la motivación de alumnos hacia el saber hacer en las aplicaciones de su carrera, y aquellas que demandan esos conocimientos en perspectiva futura.

LA BITÁCORA DE CAMPO

Es una herramienta pedagógica, utilizada por los experimentadores o investigadores para llevar seguimientos particulares a los estudiantes de forma individual y colectiva, tomando en cuenta las actividades en grupo e individuales y las apreciaciones personales para hacer explícitas las rutas y progresos, y seguirlas de modo reflexivo y pedagógico para observar la creatividad y autonomía de cada discente, mediante la observación del modo propio, para llevar a cabo el trabajo (análisis y opiniones, capacidades personales, gráficos y tablas, capacidades de extrapolación), que ha sido objeto de análisis de comportamientos y rendimientos de los diversos grupos, históricamente.

PRETEST Y POSTEST

Estrategia usada para diagnosticar el nivel de capacidades, habilidades y conocimientos con el fin de establecer la diferencia entre dos momentos en el tiempo, definidos al inicio del período en que se determina el uso de una estrategia y por ende, la capacidad de ésta en generar resultados apreciables, en comparación con los ofrecidos en la culminación del curso, de modo que potencien mejoras en la comparación de los resultados obtenidos, usando los distintos modelos de procesos de enseñanza-aprendizaje.

LAS APLICACIONES EN CONTEXTO

Es un espacio que permite relacionarse con situaciones contextuales y hacer más asequible la relación teórico-práctica entre los temas estudiados y como se aplicarán en las asignaturas en el futuro, haciendo posible la identificación, la adecuación al marco contextual desde el teórico, la interpretación adecuada de las respuestas creando incrementalmente la independencia cognoscitiva, la capacidad en la resolución de problemas y la creatividad.

SIGNIFICADO DE SÍMBOLOS UTILIZADOS

x: Variable independiente

y: Variable dependiente

$f(x)$: Función dependiente de x

$\frac{dy}{dx}$: Derivada de y respecto de x

$\frac{d^2y}{dx^2}$: Segunda derivada de y respecto a x dos veces

CONCLUSIONES

Los resultados tras la implementación del uso de las analogías en los procesos de enseñanza-aprendizaje, vistos desde su diseño en el PDE y su aplicación en el aula, junto con las actividades extraclase, muestran que el objetivo general se cumplió como tal: ***Evaluar la validez del uso de las analogías, para mejorar procesos de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial en la educación terciaria***, a través del cumplimiento de los objetivos específicos, y consecuentemente, el logro de los resultados del proceso así:

Respecto del **primer objetivo específico**, se tiene que todas las actividades llevadas a cabo en el Proceso Docente Educativo (PDE), en el curso de Cálculo Diferencial, atendieron ese lineamiento, cumpliéndose puntualmente las etapas de:

Orientación-Motivación, en la que, con lenguaje común (previamente puesto en común con el grupo), se expuso por medio de la categorización y la contextualización precisa, el uso de analogías cuando fue posible con conocimientos previos y habilidades analíticas ya desarrolladas, de tal manera que pudieran lograr el tránsito fluido, contando con el interés de los estudiantes al desarrollar el tema con ejemplos específicos que apuntaran a desarrollos futuros en otras disciplinas o asignaturas.

Asimilación. El método de aprendizaje se basó en las analogías de carácter más evidente, que progresivamente y mayor nivel de manejo se llevaron a campos conceptuales de mayor envergadura, donde éstas no resultaban claramente evidentes. Durante esta etapa se ampliaron los conocimientos y readecuaron en sí mismos, las estructuras conceptuales y el sistema de habilidades analíticas y procedimentales en los estudiantes.

Dominio. En ella, los estudiantes mostraban progresivamente a través de la aplicación del conocimiento en situaciones cada vez más generales y exigentes, la habilidad analítica en la toma de decisiones en marcos más generales, haciéndose esto evidente a partir de la explicación a sus compañeros, de forma oral en el trabajo en grupo, lo que puede verse atendiendo a los resultados tanto individuales como grupales que figuran en las tablas de doble entrada (Estudiantes versus Variables) y la conclusión grupal conseguida por el profesor respecto a los aspectos positivos, negativos e interesantes revelados en el proceso.

Sistematización. La llegada a esta etapa se da de manera individual, pero se hace evidente su consecución, cuando se logra extrapolación a otros entornos conceptuales y/o a otras disciplinas, mostrándose el dominio de las habilidades cada vez más desarrollado, y viéndose la consecución de nuevas capacidades y facultades.

Evaluación. En la que se observó individualmente la capacidad del estudiante, de resolver situaciones, interpretar marcos y generar acciones a partir del conocimiento obtenido y las habilidades individuales o generales de uso desarrolladas, vistas en la perspectiva de aquellas que el estudiante debería resolver, si hubiese desarrollado cabalmente la actividad.

- Respecto del **segundo objetivo específico**: usar como objeto de análisis y de pensamiento, las analogías en los contenidos, puede afirmarse que la resolución de problemas de cálculo, usando analogías como medio y fin de aprendizaje, es una actividad compleja e integral que requiere de formación, métodos de uso y procedimientos puntuales, a partir de los que se estructuró un sistema de habilidades, usando las analogías, como una metodología de aplicación. Las habilidades y capacidades, se asumieron como procesos de construcción de los modos de actuación, análisis, solución o procedimientos específicos connaturales, con la actividad determinada que están inmersos en todos los eslabones del proceso docente educativo.

Las características de las habilidades y conocimientos ya logrados, son habilidades para elaborar analogías y usar inferencias, usando conceptos y propiedades, la consecución y uso de procedimientos que pueden llegar a ser algorítmicos, uso de procedimientos heurísticos y el análisis situacional en problemas y contextos de carácter intra y extra matemáticos. Definir y caracterizar habilidades a partir de la formación con analogías en los diversos niveles (global, particular y puntual), lo que permitió lograr precisión en los conceptos de habilidad en la resolución de problemas, habilidades básicas y elementales en el desarrollo de las analogías y su uso posterior en problemas más avanzados.

Las habilidades tienen estructuras sistémicas, y la solución de problemas constituye la expresión de lo esencial, guiando los procesos de formación de habilidades básicas. La caracterización brindó condiciones favorables para planificar y dirigir el proceso de estructuración de una unidad, sistema de clases y clases.

El profesor propició la estructuración de las habilidades, atendiendo a qué debe hacer y saber el alumno y las condiciones para llegar a esa meta. Los cambios propuestos con el uso de las analogías para la orientación del contenido de la asignatura, requirieron que las orientaciones incluyeran problemas esenciales, la definición de analogía, su construcción teórica y la habilidad general, en la unidad temática e indicadores para la determinación del logro de habilidades básicas.

- Respecto del **tercer objetivo específico**, acerca de evaluar el impacto del uso de las analogías en la formación del pensamiento de los alumnos, se determinó el progreso de forma individual y colectiva, respecto del progreso en los niveles de pensamiento y la reconfiguración de sus estructuras mentales, evidenciándose el dominio requerido en el nivel de contenidos y habilidades específicos y generales, en consonancia con lo manifestado en las tablas de resultados generales y particulares.

- Desde el punto de vista de aspectos de formación personal y valorativo, puede afirmarse que con la cooperación y trabajo en equipo entre los integrantes del grupo, los trabajos externos y los programados en grupo, sensibilizaron a los alumnos, lograron la exteriorización del sentido de pertenencia a su grupo, a la institución de la que hacen parte y fortalecieron valores; todo esto, es un aporte fundamental en la convivencia y el desarrollo armónico de la comunidad. Al estudiar los distintos temas, se pudo verificar la cada vez mejor organización y comunicación al interior del grupo; esta cooperación e interacción armónica entre los alumnos de las distintas ingenierías, lograron aprendizajes significativos en los estudiantes, para su comportamiento con compañeros, pares y comunidad en general, para la vida. También fue apreciable, ya que la interacción y trabajo en equipo de los miembros del grupo en el desarrollo de las actividades programadas, consiguió el fortalecimiento de valores personales y sociales como son la solidaridad, la disciplina, el trabajo colaborativo, entre otros, como resulta evidente al aplicar los resultados en las tablas individuales, y el PNI (Positivo-Negativo-Interesante) grupal. De ahí resultan diferencias en los niveles de llegada en cuanto a la consecución de logros, como resulta natural, pero con mejoras sustanciales respecto al uso de los métodos definidos tradicionalmente en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Por lo tanto, se concluye que con la realización del presente trabajo académico, las preguntas formuladas inicialmente, agrupadas en la siguiente pregunta general: ¿Puede mejorarse el nivel de consecución de conocimientos, habilidades, capacidades, aptitudes y cambio de actitudes en el aprendizaje del Cálculo Diferencial, potenciando mejoras en el pensamiento y la consecución de aprendizajes significativos usando analogías?, se responde afirmativamente.

RECOMENDACIONES

- Profundizar en las posibilidades que brindan la determinación y la caracterización de las habilidades matemáticas en principio y de aplicaciones del Cálculo Diferencial, para el control, evaluación y corrección en el PEA llevado a cabo con los alumnos, echando mano de herramientas de pensamiento poderosas, como las analogías y el desarrollo del pensamiento analógico.

- Incorporar las disciplinas Metodología y Didáctica de la Enseñanza de la Matemática, el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, como resultado de este trabajo sobre la estructuración de la enseñanza por analogías y acerca del sistema de habilidades matemáticas, sus fundamentos y aplicación que se muestran aquí como resultado.

- Generalizar los métodos a partir de la preparación del personal docente en las facultades de educación, que tengan que ver con la enseñanza de las matemáticas y con la utilización de materiales concretos y conceptuales, que propendan por facilitar el tránsito entre las diversas etapas de aprendizaje (concreta, verbal y mental).

- Considerar los cambios que se producen en la estructuración del contenido al aplicar este modelo didáctico, condicionando la estructura del sistema a los frutos y expectativas en cuanto a conocimientos, habilidades, capacidades, facultades, aptitudes y actitudes que se esperan de él.

BIBLIOGRAFÍA

Aragón, M. B. (1998). Las analogías como estratégia didáctica en la enseñanza de la fisica y la quimica. *Investigación e innovación en la enseñanza de las ciencias.*

Arias Goméz, H. (2013). *Estrategia para enseñar áreas de sólidos regulares e irregulares utilizando manipulables físicos y virtuales.* Manizales: Universidad Nacional de Colombia.

Aristóteles, P. D. (1999). *Física.* Barcelona, España, Barcelona: Planeta Agostini.

Bravo Adúriz, A., Garófalo, J., Greco, M., & Galagovsky, L. (2005). *Modelo Didáctico Analógico.* San Martín: Universidad de San Martín .

Camero, T., D. I. (2014). *Comprender e interpretar modelos Mentales que se manifiestan en los procesos de transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico en la resolución de problemas.* Manizales: Universidad Nacional de Colombia.

Idárraga, R. I. (2014). *Las analogías en la enseñanza de las series de términos positivos.* Manizales: Universidad de Caldas.

Kuhn, T. (1975). *La Estructura de las Revoluciones Científicas.* Madrid: Fondo de Cultura Económica.

Martínez, Francisco, M. (1999). *La formación del profesorado ante las nuevas tecnologías de Comunicación.* Murcia: Universidad de Murcia.

Moreira, M. A. (1999). *MODELOS MENTALES.* Universidad de Burgos, Departamento de Didácticas Específicas, Burgos ,España. Porto Alegre: Universidad Federal do Rio Grande do Sul.

Oliva, J. M. (2004). El papel del razonamiento analógico en la construcción histórica de la noción de fuerza gravitatoria y del modelo de sistema solar (primera parte). *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*.

Planeta de Agostini. (1999). *Física.* Barcelona, España, Barcelona: Planeta Agostini.

Vigotsky, L. S. (1978). *Mind and society, the development of higher psychological processes.* Massachusetts: Harvard University Press.