ENTROPÍA DE ENTANGLEMENT DE AGUJEROS NEGROS EN LA DUALIDAD AdS/CFT

SEBASTIAN ARMANDO ALVARADO CHAVEZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ, D.C
2022

ENTROPÍA DE ENTANGLEMENT DE AGUJEROS NEGROS EN LA DUALIDAD AdS/CFT

SEBASTIAN ARMANDO ALVARADO CHAVEZ

TESIS DE MAESTRÍA PRESENTADA COMO
REQUISITO PARA OPTAR EL GRADO DE:
MAGISTER EN CIENCIAS-FÍSICA

DIRECTOR:
PH.D JOSE ROBEL ARENAS SALAZAR
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ, D.C
2022

ENTROPÍA DE ENTANGLEMENT DE AGUJEROS NEGROS EN LA DUALIDAD AdS/CFT

RESUMEN

En esta tesis se estudia un campo escalar sobre un espacio tiempo de Schwarzschild usando los estados de vacío de Boulware y Hartle-Hawking-Israel teniendo en cuenta la interpretación Mukohyama-Israel para tratar de explicar la entropía de Bekenstein-Hawking y en donde se puede localizar. Igualmente, se estudia la correspondencia entre un espacio tiempo Anti-de Sitter y una teoría de campos cuánticos conformes llamada Dualidad AdS/CFT y la forma en que trata de explicar la entropía de Bekenstein-Hawking.

Palabras claves: Agujero negro de Schwarzschild, estado de vacío de Boulware, estado de vacío de Hartle-Hawking-Israel, entropía de Bekenstein-Hawking, dualidad AdS/CFT, holografía.

BLACK HOLE ENTANGLEMENT ENTROPY IN THE AdS/CFT DUALITY

ABSTRACT

In this thesis a scalar field over a Schwarzschild spacetime is studied using the Boulware and Hartle-Hawking-Israel vacuum states taking into account the Mukohyama-Israel interpretation to try to explain the Bekenstein-Hawking entropy and where it can be to locate. Likewise, the correspondence between an Anti-de Sitter spacetime and a conformal quantum field theory called AdS/CFT Duality is studied and the way in which it tries to explain the Bekenstein-Hawking entropy.

Keywords: Schwarzschild Black Hole, Boulware vacuum state, Hartle-Hawking-Israel vacuum state, Bekenstein-Hawking entropy, AdS/CFT duality, holography.

CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS 6

AGRADECIMIENTOS 7

INTRODUCCIÓN 9

CAPÍTULO 1. TERMODINÁMICA DE ENTANGLEMENT DE AGUJEROS NEGROS . 12

1.1 Entropía de Entanglement en Mecánica Cuántica 12

1.2 Dinámica de campos térmicos 13

1.3 Solución de Schwarzschild 14

1.4 Teoría de campos en un espacio tiempo curvo 15

1.5 Formulación cuántica 17

1.6 Tensor de momentum-energía 18

CAPÍTULO 2. DUALIDAD AdS/CFT 23

2.1 Soluciones Anti-de Sitter 23

2.2 Teoría de campos conformes 26

2.2.1 Invarianza conforme en 2 dimensiones 28

2.2.2 Tensor de energía-momentum 29

2.2.3 Cuantización radial 31

2.2.4 Tensor de energía-eomentum sobre el cilindro 32

2.2.5 Teoría de campos cuánticos conformes sobre un toro 32

2.3 Dualidad AdS(3)/CFT(2) 35

2.4 Conjetura de Ryu-Takayanagi 35

2.4.1 Disco 36

2.4.2 AdS(3) 37

2.4.3 Agujero negro BTZ 39

CAPÍTULO 3. TÉCNICA EUCLIDIANA DE GIBBONS-HAWKING 42

3.1 Integrales de camino gravitacionales 42

3.2 Aplicaciones 43

3.2.1 Solución de Schwarzschild 43

3.2.2 Solución BTZ 45

3.2.3 Caparazón negro (black shell) 48

CONCLUSIONES 49

REFERENCIAS 51

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1 Solución de Schwarzschild maximalmente extendida. 14

2.1 Espacio tiempo Anti-de Sitter global AdS(3). 23

2.2 Parche de Poincaré para el espacio tiempo AdS (3). 24

2.3 Solución BTZ maximalmente extendida. 25

2.4 Mapeo de un cilindro a un plano complejo. 30

2.5 Toro con parámetro modular τ. 32

2.6 Un disco en CFT(3) para t=constante, superficies γ_A y la dirección holográfica z. . . . 35

2.7 Espacio tiempo AdS(3) para t=constante. γ_A es la superficie mínima. 36

2.8 Espacio tiempo BTZ para t=constante. γ_A atrapa el horizonte de eventos. 40

AGRADECIMIENTOS

PUTUMAYO: Mi tierra querida.

Para ti mi canto y devoción.

Muchas gracias al Maestro José Robel Arenas Salazar que me acompaño en este camino de conocimiento. Sin sus críticas y opiniones este trabajo no hubiera sido posible.

Gracias a mi familia: María Ruth Chavez, mi inspiradora madre; Rosita Alvarado Chavez y Estefania Alvarado Chavez, mis queridas hermanas. Gracias por enseñarme a valorar la Vida y sentir la sensación de vivir en toda su plenitud. Sin ustedes, MUJERES INSPIRADORAS nada fuera posible.

A los sonidos del amanecer del Putumayo, a la palabra creadora de realidades, al encuentro con Maestros y Maestras y a la Vida, que me ha dado la oportunidad de Vivir: ¡GRACIAS.... TOTALES!.

INTRODUCCIÓN

Uno de los misterios más profundos en Física teórica es el descubrimiento de Hawking y Bekenstein de que los agujeros negros poseen una entropía igual a un cuarto del área del horizonte eventos [1,2,3,4]; siendo diferente a la entropía de un sistema termodinámico que es proporcional al volumen. Una primera línea de investigación para comprender esta anomalía fue realizada por Srednicki en 1993 [5], que siguiendo las ideas de Bombelli-Koul-Lee-Sorkin [6], considero una matriz densidad reducida para calcular una entropía de entanglement que es una cantidad proporcional al área de la superficie que divide el sistema.

Entonces, es natural asociar la entropía de Bekenstein-Hawking de agujeros negros como siendo una entropía de entanglement porque el horizonte de eventos pone un límite causal que no permite que un observador fuera del horizonte tenga acceso al interior del agujero negro. Sin embargo, el coeficiente de proporcionalidad de la entropía de entanglement es infinito [7,8], de modo que la entropía de entanglement diverge, por lo tanto es necesario agregar un cutoff para regularizar y obtener la entropía de Bekenstein-Hawking.

Un primer cálculo relacionado con la interpretación de entanglement, en el contexto de agujeros negros, fue hecha en 1985 por Gerard 't Hooft donde investigó propiedades termodinámicas de un campo cuántico sobre un espacio tiempo curvo en el estado de vacío de Hartle-Hawking-Israel [9]. En este modelo aparecieron divergencias que fueron controladas con un cuttof α, que es una distancia desde el radio gravitacional hasta un punto físico (una pared) donde los campos se anulen. De modo que escogiendo un valor adecuado de α se puede encontrar una radiación y entropía análogas a la de los agujeros negros (estan cantidades divergen para $\alpha \to 0$). Este modelo se conoce como *Brick Wall* pero fue abandonado por ser inconsistente con el *principio de equivalencia de Einstein*: un observador en caída libre chocaría con este Brick Wall [10].

En este contexto, Mukohyama-Israel encontraron un error importante en los cálculos realizados por 't Hooft [11,12,13]. Aclararon que el estado de vacío correcto en el modelo de Brick wall es el estado de vacío de Boulware y no el de Hartle-Hawking-Israel. Bajo esta corrección el modelo de Brick Wall no representa un agujero negro sino el exterior de un objeto tipo estrella comprimida cerca de su radio gravitacional. En otras palabras, argumentaron que *las propiedades de un agujero negro son indistinguibles con las de una estrella comprimida cerca de su radio gravitacional para un observador externo*.

Además, Mukohyama-Israel interpretaron que la entropía de entanglement no es una corrección a un loop a la técnica euclidiana de Gibbons-Hawking (aceptado comúnmente en la literatura)

sino que existen dos fuentes de entropía: una entropía térmica de entanglement asociada al Brick Wall con un estado de vacío de Boulware (observador externo), donde no hay horizonte de eventos, y otra entropía de origen topológico con estado de vacío Hartle-Hawking-Israel que depende de la presencia del horizonte de eventos asociada a la técnica euclidiana de Gibbons-Hawking (observador en caída libre) . Esto se conoce como el *principio de complementariedad de Mukohyama-Israel*.

En esta línea de investigación, Robel Arenas et al [14, 15, 16, 17], inspirados por las ideas de Mukohyama-Israel-'t Hooft, analizaron el proceso de colapso de un Black Shell para un observador externo encontrando que para este observador *nunca* se genera un agujero negro si no que el Shell permanece cerca a su radio gravitacional, siendo esto un efecto *relativista* y sería interpretado como el Brick Wall de 't Hooft. En este caso, calculan la entropía de entanglement cuando el Black Shell permanece cerca a su radio gravitacional obteniendo la entropía de Bekenstein-Hawking. El punto crucial aquí es que para un observador en caída libre el Shell no permanece estático como una pared si no que seguirá su proceso de colapsó hasta la singularidad, siendo esto consistente con el *principio de equivalencia de Einstein*.

Por consiguiente, para diferenciar las propiedades del Black Shell con las obtenidas por un agujero negro asocian técnicas de entanglement para el observador externo con estado de vacío de Boulware cuando el Black Shell permanece cerca del horizonte y la técnica euclidiana de Gibbons-Hawking para un observador en caída libre con estado de vacío de Hartle-Hawking-Israel asociado a un agujero negro, siendo esto consistente con el principio de complementariedad de Mukohyama-Israel. En si, el aporte principal de esta investigación es aclarar que aunque se obtenga una entropía de Bekenstein-Hawking para un objeto gravitacional no necesariamente representa un agujero negro, puede ser una estrella en colapso gravitacional.

Otra línea de investigación para tratar de comprender la entropía de Bekenstein-Hawking es usando el *Principio Holográfico* [18, 19, 20, 21, 22, 23], el cual postula que la información de un sistema en un cierto volumen se puede conocer estudiando la frontera del sistema, dicho de otra manera, el número de grados de libertad fundamentales esta relacionado con el área de la frontera del espacio tiempo. De esta manera, se ha propuesto una dualidad entre una teoría de gravedad cuántica en un espacio tiempo Ω y una teoría de campos sobre la frontera $\partial\Omega$.

Siguiendo estas ideas, en 1997 Juan Martín Maldacena propuso la *Dualidad AdS/CFT* [24, 25], la cual consiste en una dualidad entre una teoría de la gravedad Anti-de Sitter (AdS) de dimensión D y una teoría de campos conforme (CFT) definida en la frontera con dimensión D-1. Esta *dualidad* es uno de los pilares de la *teoría de cuerdas* [26] y ha brindado información impor-

tante de los agujeros negros, por ejemplo, dando *una* solución a la paradoja de la información incluyendo unitariedad [27], transiciones de fase [28], y reconteo de entropía microscópica [29].

Un cálculo importante en la dualidad AdS/CFT fue realizado por Strominger para un agujero negro BTZ haciendo uso de la ecuación de Cardy, que es una entropía térmica asociada a un estado térmico en CFT, y simetrías asintóticas del espacio tiempo BTZ para calcular la entropía de Bekenstein-Hawking [60, 61, 62, 63], claramente, siendo esta última proveniente de una fuente térmica. Así, se logró obtener propiedades de un sistema gravitacional de dimensiones 2+1 usando un sistema cuántico de dimensión 2.

Sin embargo, como se menciono anteriormente, existe la interpretación de Entanglement que en en el contexto holográfico fue propuesta, en 2006, por Shinsei Ryu y Tadashi Takayanagi [64, 65, 66, 67] argumentando una ecuación para calcular la entropía de entanglement de una región A de una teoría de campos conformes sobre la frontera asintótica de un espacio Anti-de Sitter con una superficie *mínima* en el espacio dual. Para el caso de un agujero negro BTZ, en el límite de altas temperaturas, lograron obtener la entropía de Bekenstein-Hawking, la cual es una entropía térmica de Entanglement.

Debido a la importancia de los aportes de las líneas de investigación anteriores para comprender la entropía de Bekenstein-Hawking, el objetivo de este trabajo es reproducir los cálculos de estas investigaciones. El trabajo se organiza de la siguiente manera: el Capítulo 1 con el calculo realizado por Israel para describir la naturaleza térmica de los agujeros negros. El Capítulo 2, se centra en la dualidad AdS/CFT, específicamente, en la demostración de la ecuación de Cardy y cálculos explícitos de la ecuación de Ryu-Takayanagi. Y en el Capítulo 3 se aborda la técnica Euclidiana de Gibbons-Hawking y se finaliza con conclusiones del trabajo.

CAPÍTULO 1
TERMODINÁMICA DE ENTANGLEMENT DE AGUJEROS NEGROS

En este capítulo se describen las herramientas matemáticas y físicas para la descripción térmica de agujeros negros eternos de Schwarzschild usando: *Entropía de Entanglement en Mecánica Cuántica*, *Dinámica de Campos Térmicos*, *Relatividad General* y *Teoría de Campos en Variedades Curvas*.

1.1 Entropía de Entanglement en Mecánica Cuántica

Considere un sistema que puede ser dividido en dos subsistemas A y B. Entonces, el espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ del sistema total se toma como el producto directo de los dos espacios de Hilbert de los subsistemas A y B, es decir:

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B. \tag{1.1}$$

Ahora, se define la matriz densidad reducida del sistema A ρ_A como siendo la traza sobre el subsistema B de la matriz densidad del sistema total ρ, matemáticamente se expresa como:

$$\rho_A := Tr_B \rho. \tag{1.2}$$

De esta forma, se introduce la definición de *Entropía de Entanglement* del subsistema A S_A como siendo la entropía de von Neumann de la matriz densidad reducida ρ_A:

$$S_A := -Tr\left[\rho_A \ln \rho_A\right], \tag{1.3}$$

igualmente se puede definir S_B asociada a la matriz densidad reducida ρ_B. Para el espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ un estado se dice que es separable ó *puro* cuando se expresa de la forma:

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \tag{1.4}$$

en caso contrario se dice que es no separable o de *entanglement*. Para un estado puro la entropía de entanglement es cero y diferente de cero para un estado de entanglement. Entonces, la entropía de entanglement mide cuanto se diferencia un estado de un estado separable.

Es importante mencionar que la Entropía de Entanglement es proporcional al área de la superficie que separa a los dos subsistemas, es por esto que en la literatura científica se relaciona la Entropía Bekenstein-Hawking de agujeros negros, que también es proporcional al área del horizonte de eventos, como siendo una entropía de Entanglement.

1.2 Dinámica de campos térmicos

Es conocido de la Mecánica Estadística, que el promedio térmico de un operador A es:

$$\langle A\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} Tr\left[A\exp\left(-\beta H\right)\right] = \frac{1}{Z(\beta)}\sum_n \exp\left(-\beta E_n\right)\langle n|A|n\rangle, \tag{1.5}$$

donde $Z(\beta) = Tr\left[\exp\left(-\beta H\right)\right]$ es la función de partición y $\mathbf{H} = H - \mu N$, siendo H el hamiltoniano y μ el potencial químico del sistema [30, 31]. Por otro parte, es conocido que un aspecto de vital importancia en la Teoría de Campos Cuánticos es el valor esperado de un operador en el *estado de vacío*, $\langle 0|A|0\rangle$ [32, 33]. Entonces, es natural preguntarse que conexión existe entre el promedio térmico $\langle A\rangle$ y valor esperado de un operador en el *estado de vacío*, $\langle 0|A|0\rangle$.
Los primeros científicos en abordar esta línea de investigación fueron: Umezawa y Takahashi, los cuales propusieron que el valor esperado en el vacío coincide con el promedio estadístico dado por (1.5) [34, 35, 36], es decir:

$$\langle A\rangle = \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle, \tag{1.6}$$

donde se ha supuesto que $|0(\beta)\rangle$ existe en el espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ que describe al sistema. Expandiendo el estado de vacío $|0(\beta)\rangle$ en términos de la base del espacio de Hilbert tenemos:

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n \mid 0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle f_n(\beta). \tag{1.7}$$

Reemplazando la ecuación (1.7) en (1.6) se llega a la siguiente condición:

$$f_n^*(\beta) f_m(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)}\exp\left(-\beta E_n\right)\delta_{nm}. \tag{1.8}$$

No obstante, la anterior ecuación es inconsistente porque $f_n(\beta)$ solo son números complejos y no cumplen con una condición de ortogonalidad en el espacio de Hilbert. Entonces, para que la anterior condición sea *coherente* es necesario agregar un espacio de Hilbert auxiliar $\widetilde{\mathscr{H}}$, idéntico al espacio de Hilbert original $\mathscr{H}$, caracterizado por un Hamiltoniano $\widetilde{H}$ con base $|\widetilde{n}\rangle$ que satisface las siguientes propiedades:

$$\widetilde{H}|\widetilde{n}\rangle = E_n|\widetilde{n}\rangle, \qquad \langle\widetilde{n}\mid\widetilde{m}\rangle = \delta_{nm}, \tag{1.9}$$

donde E_n es la energía del sistema físico. Así, el vector de estado del sistema total se construye a partir del producto vectorial entre la base del sistema de Hilbert original $\mathscr{H}$ y auxiliar $\widetilde{\mathscr{H}}$, es decir:

$$|n\widetilde{m}\rangle = |n\rangle\otimes|\widetilde{m}\rangle. \tag{1.10}$$

De esta forma, los elementos de matriz de los operadores A y $\widetilde{A}$ son:

$$\langle n\widetilde{m}|A\left|n'\widetilde{m}'\right\rangle = \langle n|A\left|n'\right\rangle \delta_{mm'}, \tag{1.11}$$

$$\langle n\widetilde{m}|\widetilde{A}\left|n'\widetilde{m}'\right\rangle = \langle \widetilde{m}|A\left|\widetilde{m}'\right\rangle \delta_{nn'}, \tag{1.12}$$

además, el hamiltoniano total del sistema H_T esta dado por:

$$H_T = H - \widetilde{H}. \tag{1.13}$$

Ahora, definiendo los coeficientes vectoriales de (1.7) como:

$$f_n(\beta) := Z^{-1/2} \exp\left(-\frac{\beta E_n}{2}\right) |\widetilde{n}\rangle, \tag{1.14}$$

se verifica la ecuación (1.8). De igual manera, usando la ecuación (1.18) se puede demostrar que:

$$|0(\beta)\rangle = Z^{-1/2}(\beta) \sum_n \exp\left(-\frac{\beta E_n}{2}\right) |n\widetilde{n}\rangle. \tag{1.15}$$

Es trivial demostrar que bajo las anteriores ecuaciones se cumple que:

$$\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_i \exp(-\beta E_n) \langle n|A|n\rangle = \langle A\rangle. \tag{1.16}$$

1.3 Solución de Schwarzschild

La solución de Schwarzchild es una solución estática y estacionaria de las *ecuaciones de Hilbert-Einstein* en el vacío, con simetría esférica y constante cosmológica igual a cero [37, 38, 39]. La métrica, en las *coordenadas de Schwarzschild*, tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r^2}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{1.17}$$

Para encontrar su forma *maximalmente extendida*, el primer paso consiste en transformar la métrica (1.16) a las coordenadas (U, V) tal que:

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) dUdV + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{1.18}$$

Ahora, se utilizan las *coordenadas de Kruskal* (T, Z) definidas como:

$$\left.\begin{aligned} T(r,t) &= \exp\left(\frac{r}{4M}\right)\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ Z(r,t) &= \exp\left(\frac{r}{4M}\right)\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}\right\} r > 2M, \tag{1.19}$$

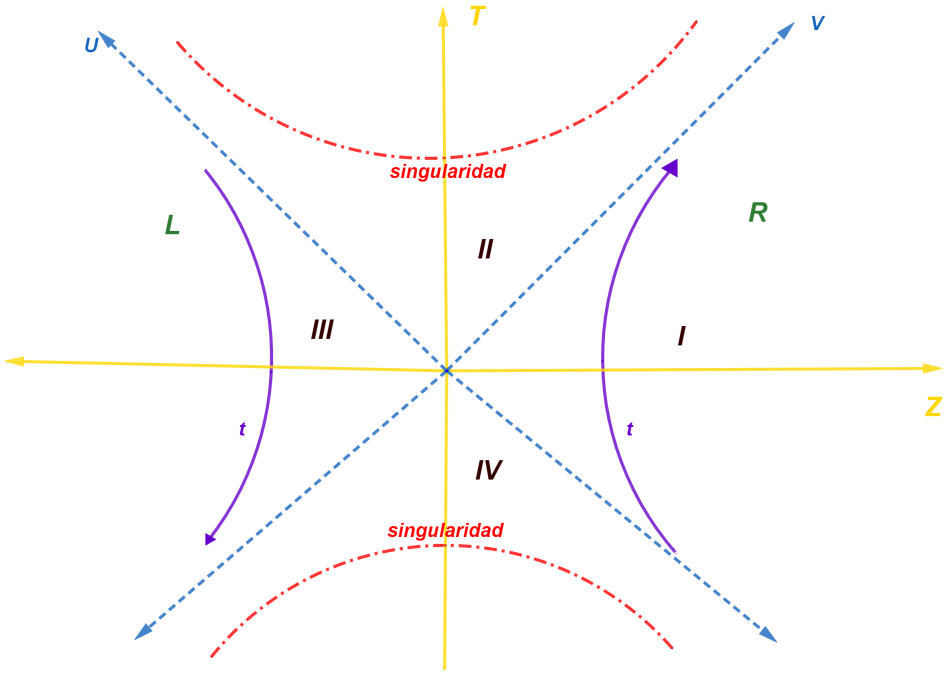

Figura 1.1: Solución de Schwarzschild maximalmente extendida. Fuente: la presente investigación.

$$\left.\begin{aligned} T(r,t) &= \exp\left(\frac{r}{4M}\right)\left(1-\frac{r}{2M}\right)^{1/2}\cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ Z(r,t) &= \exp\left(\frac{r}{4M}\right)\left(1-\frac{r}{2M}\right)^{1/2}\sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}\right\} r<2M, \tag{1.20}$$

con $U = T + Z$, $V = T - Z$. Así, la métrica se escribe de la siguiente manera:

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r}\exp\left(-\frac{r}{2M}\right)\left(-dT^2+dZ^2\right)+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \tag{1.21}$$

La representación de este espacio tiempo es la Figura (1.1). La métrica (1.21) no es singular en $r = 2M$, entonces, es válida para toda la región del espacio-tiempo.

1.4 Teoría de campos en un espacio tiempo curvo

Consideremos un campo escalar ϕ en un espacio tiempo curvo descrito por la métrica estática de la forma:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{ab}dx^a dx^b, \tag{1.22}$$

con ϕ satisfaciendo la siguiente ecuación:

$$\left(\Box - m^2\right)\Phi = 0, \tag{1.23}$$

donde $\Box$ es el *d'Alembertiano*, expresado como:

$$\Box = (-g)^{-1/2}\partial_0\left[(-g)^{-1/2}g^{00}\partial_0\right] + (-g)^{-1/2}\partial_a\left[(-g)^{-1/2}g^{ab}\partial_b\right], \tag{1.24}$$

con $g = \det g_{\mu\nu}$.
Un conjunto de modos de solución para la ecuación (1.23) es la siguiente:

$$\phi_\Omega(t,\underline{x}) = \frac{\exp(-iwt)}{\sqrt{2|w|}}\phi_\Omega(\underline{x}), \tag{1.25}$$

$$\phi_\Omega(\underline{x}) = \phi_{wl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{1.26}$$

$$\underline{x} := x^a = (r,\theta,\varphi), \Omega := wlm. \tag{1.27}$$

Ahora, definimos los modos de *Killing-Boulware* (KB-modos):

$$\phi_\Omega^{(\varepsilon)}(x) := \phi_\Omega(\underline{x},t)\Theta_\varepsilon(x), \tag{1.28}$$

donde:

$$\Theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\left[\Theta(-\varepsilon U) + \Theta(\varepsilon V)\right], \tag{1.29}$$

el factor ε toma los valores ± 1 y expresa si el campo se encuentra en la región Derecha (R) o Izquierda (L) del espacio-tiempo de Kruskal respectivamente (ver Figura 1.1).

El conjunto $\left\{\phi_\Omega^{(\varepsilon)}(x)\right\}$ satisface el producto interno:

$$\left(\phi_\Omega^{(\varepsilon)}, \phi_{\Omega'}^{(\varepsilon')}\right) = \varepsilon(w)\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta_{\Omega\Omega'}, \tag{1.30}$$

y los modos ϕ_Ω cumplen el producto interno:

$$(\phi_\Omega, \phi_{\Omega'}) = \varepsilon(w)\delta_{\Omega\Omega'}, \tag{1.31}$$

con $\varepsilon(w) = \operatorname{sgn}(w)$. Así, se define los modos de *Hartle-Hawking-Israel* (HHI-modos) $\chi_\Omega^{(\varepsilon)}(x)$ con producto interno:

$$\left(\chi_\Omega^{(\varepsilon)}, \chi_{\Omega'}^{(\varepsilon')}\right) = \varepsilon\varepsilon(w)\delta_{\Omega\Omega'}\delta_{\varepsilon\varepsilon}, \tag{1.32}$$

relacionado con los $(KB - modos)$ como:

$$\chi_\Omega^{(\varepsilon)}(x) = \phi_\Omega^{(\varepsilon)}(x)\cosh\chi + \phi_\Omega^{(-\varepsilon)}(x)\sinh\chi, \tag{1.33}$$

donde:

$$\tanh\chi = \exp\left(-\frac{\pi\,|w|}{k_0}\right), \tag{1.34}$$

$$\chi_{\Omega}^{(\varepsilon)}(x) = \sqrt{\frac{\sinh\chi\cosh\chi}{2\,|w|}}\,\phi_{\Omega}(\underline{x})\exp(-iwt)\,\varepsilon\varepsilon(w). \tag{1.35}$$

1.5 Formulación cuántica

En la sección anterior vimos que existen dos modos: los KB-modos $\phi_{\Omega}^{(\varepsilon)}$ y los HHI-modos $\chi_{\Omega}^{(\varepsilon)}$, entonces el campo Φ puede expandirse en términos de estos como:

$$\Phi(x) = \sum_{\varepsilon\Omega} a_{\Omega}^{(\varepsilon)}\chi_{\Omega}^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{\varepsilon\Omega} b_{\Omega}^{(\varepsilon)}\phi_{\Omega}^{(\varepsilon)}(x), \tag{1.36}$$

$$a_{\Omega}^{(\varepsilon)} = b_{\Omega}^{(\varepsilon)}\cosh\chi - b_{\Omega}^{(-\varepsilon)}\sinh\chi = \exp(-iG)\,b_{\Omega}^{(\varepsilon)}\exp(iG), \tag{1.37}$$

con:

$$G = G^{\dagger} = \frac{1}{2}i\sum_{\varepsilon\Omega}\varepsilon\varepsilon(w)\,\chi b_{\Omega}^{(\varepsilon)^{\dagger}} b_{\Omega}^{(-\varepsilon)} = i\sum_{\Omega}\chi\left(b_{\Omega}^{(+)^{\dagger}} b_{\Omega}^{(-)} - b_{\Omega}^{(+)} b_{\Omega}^{(-)}\right) := \sum_{\Omega,w>0} G_{\Omega}, \tag{1.38}$$

$$\left[a_{\Omega}^{(\varepsilon)}, a_{\Omega'}^{(\varepsilon')}\right] = \left[b_{\Omega}^{(\varepsilon)}, b_{\Omega'}^{(\varepsilon')}\right] = \varepsilon\varepsilon(w)\,\delta_{\Omega\Omega'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}, \tag{1.39}$$

con estados de vacío definidos como:

$$a_{\Omega}^{(\varepsilon)}|0\rangle_{HHI} = b_{\Omega}^{(\varepsilon)}|0\rangle_{B} = 0. \tag{1.40}$$

donde $|0\rangle_{HHI}$ es el estado de vacío de *Hartle.Hawking-Israel* y $|0\rangle_{B}$ es el estado de vacío de *Boulware*. De acuerdo a la transformación de Bogoliubov (1.31) los estados de vacío se relacionan de la forma:

$$|0\rangle_{HHI} = \exp(-iG)\,|0\rangle_{B}. \tag{1.41}$$

La ecuación (1.41) se puede escribir de manera más explicita usando la identidad generalizada de Baker-Campbell-Hausdorff, dada por:

$$\exp[\chi(A+B)] = \exp\left[\frac{1}{n}\tanh(\chi)A\right]\exp\left[\frac{1}{2n}\sinh(2n\chi)B\right]\exp\left\{-\frac{1}{n^2}[\ln\cosh(2n\chi)]C\right\}. \tag{1.42}$$

Así, la ecuación (1.41) puede escribirse como:

$$|0\rangle_{HHI} = Z_{\Omega}^{-1/2}\sum_{n}\exp\left(-\frac{1}{2}\beta E_n\right)\left|n^{(-)}n^{(+)}\right\rangle_{B}, \tag{1.43}$$

donde se ha hecho uso de que $|0\rangle_B = |0\rangle_{BL} \otimes |0\rangle_{BR}$, $\beta = \dfrac{1}{T_H} = \dfrac{k_0}{2\pi}$ y $Z_\Omega = \sum_n \exp(-n\beta w)$ es la función de partición.

1.5 Tensor de momentum-energía

En esta sección se describe la naturaleza térmica de la solución de Schwarzschild, es decir, se describe la distribución de energía para los estados de vacío Boulware y Hartle-Hawking-Israel.

En general, para un campa escalar Φ, el valor esperado del tensor de momentum-energía $T_{\alpha\beta}(x,x')$ se calcula como:

$$\left\langle T_{\alpha\beta}\left(x,x'\right)\right\rangle = D_{\alpha\beta'} W\left(x,x'\right), \tag{1.44}$$

donde $W(x,x')$ es la *función de Wightman* definida como:

$$W\left(x,x'\right) := \langle 0|\,\Phi(x)\,\Phi\left(x'\right)|0\rangle, \tag{1.45}$$

con:

$$D_{\alpha\beta'} := \partial\left(_\alpha \partial_{\beta'}\right) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta'}\left(\partial^\gamma \partial_\gamma + m^2\right). \tag{1.46}$$

Con respecto al estado de vacío de *Boulware* la *función de Wightman* se expresa como:

$$W_B\left(x,x'\right) = {}_B\langle 0|\,\Phi(x)\,\Phi^\dagger\left(x'\right)|0\rangle_B, \tag{1.47}$$

$$[W_B\left(x,x'\right) = {}_B\langle 0| \sum_{\varepsilon,\Omega,\varepsilon',\Omega'} b_\Omega^{(\varepsilon)} \phi_\Omega^{(\varepsilon)}(x)\, b_{\Omega'}^{(\varepsilon')\dagger} \phi_{\Omega'}^{(\varepsilon')*}\left(x'\right)|0\rangle_B. \tag{1.48}$$

Ahora, usando el hecho que:

$${}_B\langle 0|\, b_\Omega^{(\varepsilon)} b_{\Omega'}^{(\varepsilon')\dagger}|0\rangle_B = \Theta(\varepsilon w)\,\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta_{\Omega\Omega'}, \tag{1.49}$$

la ecuación (1.48) se convierte en:

$$W_B\left(x,x'\right) = \sum_{\varepsilon,\Omega} \Theta(\varepsilon w)\,\phi_\Omega^{(\varepsilon)}(x)\,\phi_\Omega^{(\varepsilon)*}\left(x'\right). \tag{1.50}$$

De manera análoga, la *función de Wightman* en el estado de vacío de *Hartle-Hawking-Israel* es:

$$W_{HHI}\left(x,x'\right) = \sum_{\varepsilon,\Omega} \Theta(\varepsilon w)\,\chi_\Omega^{(\varepsilon)}(x)\,\chi_\Omega^{(\varepsilon)*}\left(x'\right). \tag{1.51}$$

Usando la transformación de Bogoliubov (1.33) la ecuación (1.51) se convierte en:

$$W_{HHI}\left(x,x'\right)=\sum_{\varepsilon,\Omega}\Theta\left(\varepsilon w\right)\left[\cosh^{2}\chi\phi_{\Omega}^{(\varepsilon)}\left(x\right)\phi_{\Omega}^{(\varepsilon)*}\left(x'\right)+\sinh^{2}\chi\phi_{\Omega}^{(-\varepsilon)}\left(x\right)\phi_{\Omega}^{(-\varepsilon)*}\left(x'\right)\right]. \quad (1.52)$$

Ahora, se procede a calcular la función de Wightman de la resta de la función de Wightman en el estado de vacío de Hartle-Hawking-Israel y el estado de vacío de Boulware, es decir:

$$W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_{B}\left(x,x'\right)=\left(W_{HHI}-W_{B}\right)\left(x,x'\right). \quad (1.53)$$

Usando los resultados anteriores (1.50), (1.52) la ecuación (1.53) toma la forma de:

$$W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_{B}\left(x,x'\right)=\sum_{\varepsilon,\Omega}\Theta\left(\varepsilon w\right)\sinh^{2}\chi\left[\phi_{\Omega}^{(\varepsilon)}\left(x\right)\phi_{\Omega}^{(\varepsilon)*}\left(x'\right)+\phi_{\Omega}^{(-\varepsilon)}\left(x\right)\phi_{\Omega}^{(-\varepsilon)*}\left(x'\right)\right], \quad (1.54)$$

donde x y x' estan en el mismo sector R. Realizando la sumatoria en ε y usando (1.34), (1.54) se escribe como:

$$W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_{B}\left(x,x'\right)=\sum_{\Omega}\left[\frac{1}{\exp\left(\beta\left|w\right|-1\right)}\right]\phi_{\Omega}^{(+)}\left(x\right)\phi_{\Omega}^{(+)*}\left(x'\right). \quad (1.55)$$

Entonces, el valor esperado de la energía para la función de Wightman anterior es de la forma:

$$\left\langle T_{00}\left(x,x'\right)\right\rangle=D_{00'}\left[W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_{B}\left(x,x'\right)\right], \quad (1.56)$$

$$\left\langle T_{00}\left(x,x'\right)\right\rangle=\left[\partial\left({}_{0}\partial_{0'}\right)-\frac{1}{2}g_{00'}\left(\partial^{\gamma}\partial_{\gamma}+m^{2}\right)\right]\left[W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_{B}\left(x,x'\right)\right], \quad (1.57)$$

$$\left\langle T_{00}\left(x,x'\right)\right\rangle=\partial_{0}\partial_{0'}\left[W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_{B}\left(x,x'\right)\right]-\frac{1}{2}g_{00'}\left(\partial^{\gamma}\partial_{\gamma}+m^{2}\right)\left[W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_{B}\left(x,x'\right)\right]. \quad (1.58)$$

Escogiendo un mismo punto $x=x'$ en la anterior expresión, *el primer término* de (1.58) es:

$$\partial_{0}\partial_{0'}\left[W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_{B}\left(x,x'\right)\right]=\partial_{0}\partial_{0'}\sum_{\Omega}\left[\frac{1}{\exp\left(\beta\left|w\right|-1\right)}\right]\phi_{\Omega}^{(+)}\left(x\right)\phi_{\Omega}^{(+)*}\left(x'\right)\Bigg|_{x=x'}, \quad (1.59)$$

$$\partial_{0}\partial_{0'}\left[W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_{B}\left(x,x'\right)\right]=\sum_{\Omega}\frac{1}{2}\frac{\left|w\right|}{\exp\left(\beta\left|w\right|-1\right)}\left|\phi_{\Omega}(\underline{x})\right|^{2}, \quad (1.60)$$

donde se ha usado la ecuación (1.25). Ahora, usando (1.26) obtenemos:

$$\partial_{0}\partial_{0'}\left[W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_{B}\left(x,x'\right)\right]=\sum_{lm}\int_{-\infty}^{\infty}dw\frac{1}{2}\frac{\left|w\right|}{\exp\left(\beta\left|w\right|-1\right)}\left|\phi_{wl}\left(r\right)\right|^{2}\left|Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)\right|^{2}, \quad (1.61)$$

$$\partial_0\partial_{0'}\left[W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_B\left(x,x'\right)\right]=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dw\frac{w}{\exp\left(\beta w-1\right)}\sum_l(2l+1)|\phi_{wl}\left(r\right)|^2, \tag{1.62}$$

donde se ha considerado $w>0$. Para continuar con el cálculo anterior se realizara el cambio de variable:

$$\phi_{wl}\left(r\right):=\frac{1}{\sqrt{r^2f\left(r\right)}}\psi_{wl}\left(r\right), \tag{1.63}$$

tal que la ecuación para el campo escalar toma la forma de:

$$\left[\frac{d^2}{d^2r}+k^2(r;w,l)\right]\psi_{wl}\left(r\right)=0, \tag{1.64}$$

donde:

$$k^2(r;w,l):=\frac{1}{f}\left[\frac{w^2}{f}-\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}-m^2-\frac{\left(r^2f\right)''}{2r^2}\right]. \tag{1.65}$$

Para resolver la ecuación diferencial (1.64) se utiliza el método WKB lo cual da como resultado:

$$\psi_{wl\eta}\left(r\right)\approx\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left|\frac{w}{k\left(r\right)}\right|}\exp\left(i\int_{r_0}^{r}dr'k\left(r'\right)\right), \tag{1.66}$$

aquí $\eta=\operatorname{sign}k\left(r\right)$ corresponde a las ondas entrantes y salientes. Usando los resultados de (1.66) y (1.63) la ecuación (1.62) se convierte en:

$$\partial_0\partial_{0'}\left[W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_B\left(x,x'\right)\right]=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dw\frac{w}{\exp\left(\beta w-1\right)}\sum_l(2l+1)\frac{2}{r^2f}\frac{w}{2\pi}\left|\frac{1}{k}\right|, \tag{1.67}$$

$$\partial_0\partial_{0'}\left[W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_B\left(x,x'\right)\right]=\frac{1}{4\pi^2r^2}\int_0^\infty dw\frac{w^2}{\exp\left(\beta w-1\right)}\int_0^{l_{max}}dl\frac{2l+1}{f\left|k\right|}, \tag{1.68}$$

donde se ha considerado l grandes tal que la sumatoria se aproxima a una integral. l_{max} se determina imponiendo la condición:

$$k^2(r;w,l_{max})=0, \tag{1.69}$$

lo que implica:

$$\frac{l_{max}\left(l_{max}+1\right)}{r^2}=\frac{w^2}{f}-m^2-\frac{\left(r^2f\right)''}{2r^2}:=p^2. \tag{1.70}$$

Así la integral en l de (1.68) toma el valor de:

$$\int_0^{l_{max}}dl\frac{2l+1}{f\left|k\right|}=2f^{-1}\sqrt{f}r^2p, \tag{1.71}$$

entonces (1.68) es:

$$\partial_0\partial_{0'}\left[W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_B\left(x,x'\right)\right]=\frac{1}{4\pi^2r^2}\int_0^\infty dw\frac{w^2}{\exp\left(\beta w-1\right)}2f^{-1}\sqrt{f}r^2p, \tag{1.72}$$

$$\partial_0\partial_{0'}\left[W_{HHI}\left(x,x'\right)-W_B\left(x,x'\right)\right]=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dp\frac{p^2}{\exp\left(\beta w-1\right)}Ef. \tag{1.73}$$

Ahora, abordando *el segundo término* de (1.58) tenemos:

$$\frac{1}{2}\sum_m g^{\mu\nu}\phi_{\Omega,\mu}\left(x\right)\phi^*_{\Omega,\nu}\left(x\right)=\frac{1}{2}\sum_m\left[-\frac{1}{f}\left|\phi_{\Omega,t}\right|^2+f\left|\phi_{\Omega,r}\right|^2+\frac{1}{r^2}\left|\phi_{\Omega,\theta}\right|^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left|\phi_{\Omega,\varphi}\right|^2\right], \tag{1.74}$$

$$\frac{1}{2}\sum_m g^{\mu\nu}\phi_{\Omega,\mu}\left(x\right)\phi^*_{\Omega,\nu}\left(x\right)=\frac{1}{4\left|w\right|}\left[-\frac{w^2}{f}\left|\phi_{wl}\left(r\right)\right|^2\sum_m\left|Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right|^2+f\left|\phi_{wl,r}\left(r\right)\right|^2\sum_m\left|Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right|^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2}\left|\phi_{wl}\left(r\right)\right|^2\sum_m\left|\widehat{\nabla}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right|^2\right], \tag{1.75}$$

$$\frac{1}{2}\sum_m g^{\mu\nu}\phi_{\Omega,\mu}\left(x\right)\phi^*_{\Omega,\nu}\left(x\right)=\frac{2l+1}{16\pi\left|w\right|}\left|\phi_{wl}\left(r\right)\right|^2\left[-\frac{w^2}{f}+f\left|\frac{d}{dr}\ln\phi_{wl}\left(r\right)\right|^2+\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\right], \tag{1.76}$$

donde se ha definido:

$$\left|\widehat{\nabla}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right|^2:=\left|Y_{lm,\theta}\left(\theta,\phi\right)\right|^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left|Y_{lm,\phi}\left(\theta,\phi\right)\right|^2, \tag{1.77}$$

y se utilizo las propiedades de los armónicos esféricos:

$$\sum_m\left|Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right|^2=\frac{2l+1}{4\pi}, \tag{1.78}$$

$$\sum_m\left|\widehat{\nabla}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right|^2=\frac{l\left(2l+1\right)\left(l+1\right)}{4\pi}. \tag{1.79}$$

Usando (1.63) y (1.66) es fácil observar que:

$$\ln\phi_{wl}\left(r\right)=2i\int drk-\ln\left(r^2fk\right)+2\ln\left(\frac{w}{2\pi}\right), \tag{1.80}$$

entonces, se obtiene lo siquiente:

$$f\left|\frac{d}{dr}\ln\phi_{wl}\left(r\right)\right|^2-\frac{w^2}{f}+\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}=2\left[\frac{1}{4}\ln\left(r^2fk\right)'^2-m^2-\frac{\left(r^2f\right)'^2}{2r^2}\right], \tag{1.81}$$

así, (1.76) se puede escribir como:

$$\frac{1}{2}\sum_m g^{\mu\nu}\phi_{\Omega,\mu}\left(x\right)\phi^*_{\Omega,\nu}\left(x\right)=\frac{2l+1}{4\pi}\left|\phi_{wl}\left(r\right)\right|^2\frac{\alpha_{wl}\left(r\right)}{2\left|w\right|}, \tag{1.82}$$

donde:

$$\alpha_{wl}(r) := \frac{1}{4}\ln\left(r^2 fk\right)'^2 - m^2 - \frac{\left(r^2 f\right)'^2}{2r^2}. \tag{1.83}$$

Por consiguiente, se tiene:

$$\frac{1}{2}\left(\partial^\gamma\partial_\gamma + m^2\right)\left[W_{HHI}\left(x,x'\right) - W_B\left(x,x'\right)\right] = \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{w^{-1}}{\exp\left(\beta w - 1\right)}\sum_l (2l+1)|\phi_{wl}(r)|^2\alpha_{wl}(r). \tag{1.84}$$

Si comparamos las ecuaciones (1.84) y (1.73), la expresión (1.73) se puede despreciar en comparación con (1.83) porque cerca del horizonte las altas frecuencias dominan. Entonces, se concluye que:

$$\lim_{x\to x'}\left\langle T_0^0\left(x,x'\right)\right\rangle = -\int_0^{\infty} dp \frac{E}{\exp\left(\frac{E}{T} - 1\right)}\frac{4\pi p^2}{(2\pi)^3}. \tag{1.85}$$

La anterior ecuación es *idéntica* a la expresión que se obtiene para un cuerpo negro, así, se concluye que los *agujeros negros se comportan como cuerpos negros*.

CAPÍTULO 2
DUALIDAD AdS/CFT

En 1997 Juan Martín Maldacena propuso la Dualidad AdS/CFT, la cual consiste en una dualidad entre una teoría de la gravedad Anti-de Sitter (ó asintóticamente Anti-de Sitter) de dimensión D y una Teoría Cuántica Conforme, definida en la frontera, con dimensión D-1. En este

capítulo se abordara los aspectos fundamentales de: *Solución Anti-de Sitter*, *Teoría de Campos Conformes* y la *Dualidad AdS/CFT*

2.1 Espacio-tiempo Anti-de Sitter

El espacio-tiempo Anti-de Sitter es una solución maximalmente simétrica en el vacío de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa [40,41]. Para espacios tiempos maximalmente simétricos (D) el tensor de Riemann adquiere la siguiente expresión:

$$\mathscr{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\mathscr{R}}{D(D-1)}\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}\right), \tag{2.1}$$

donde $\mathscr{R}$ es el escalar de Ricci dado por la siguiente expresión:

$$\mathscr{R} = \frac{2D}{D-2}\Lambda, \tag{2.2}$$

con:

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2l^2}, \tag{2.3}$$

donde l se llama radio de AdS. Ahora, si consideramos un espacio tiempo $D = 2+1$ existen tres soluciones para las ecuaciones de Einstein [42,43]:

AdS Global: En esta caso, la métrica es de la forma:

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2}+1\right)dt^2 + \frac{1}{\left(\frac{r^2}{l^2}+1\right)}dr^2 + r^2 d\theta^2, \tag{2.4}$$

donde $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r < \infty$ cuya frontera es *conforme* tipo tiempo con topología cilíndrica $R \times S^1$ y se encuentra en $r \to \infty$. La representación puede verse en la Figura 2.1.

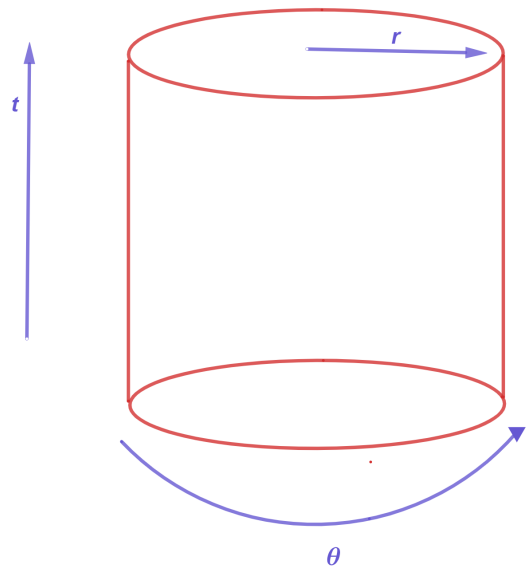

Figura 2.1: Espacio tiempo Anti-de Sitter global AdS(3).

Existen otras coordenadas de suma importancia para esta investigación que son las *coordenadas globales* (τ, ρ, θ) donde la métrica toma la forma:

$$ds^2 = l^2 \left(-\cosh^2\rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho d\theta^2\right). \tag{2.5}$$

Además, el espacio Anti-de Sitter puede ser expresado como un espacio tiempo hiperbólico con dos componentes temporales, la métrica toma la forma de:

$$ds^2 = -(dZ_0)^2 - (dZ_1)^2 + (dZ_2)^2 + (dZ_3)^2, \tag{2.6}$$

que satisface la siguiente relación:

$$-(Z_0)^2 - (Z_1)^2 + (Z_2)^2 + (Z_3)^2 = -l^2, \tag{2.7}$$

cuyas transformaciones son:

$$\begin{aligned} Z_0 &= l\cosh\rho\cos\tau, \\ Z_1 &= l\cosh\rho\sin\tau, \\ Z_2 &= l\sinh\rho\cos\theta, \\ Z_3 &= l\sinh\rho\sin\theta. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por otro lado, este métrica también puede escribirse en las *coordenadas de Poincaré* (Parche de Poincaré) que toma la forma de:

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2}\left(dz^2 - dt^2 + dx^2\right), \tag{2.9}$$

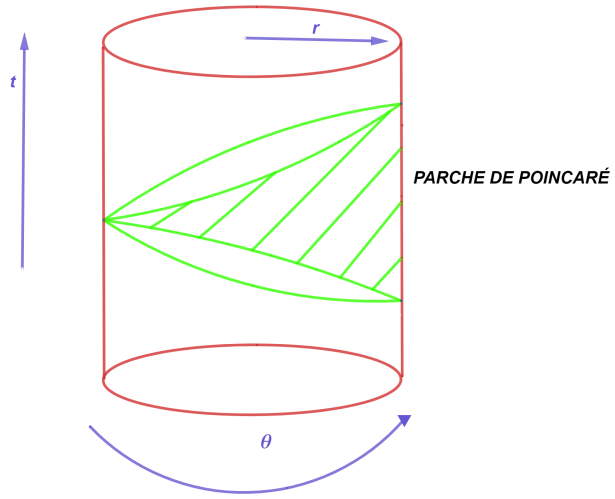

Figura 2.2: Parche de Poincaré para el espacio tiempo AdS(3).

donde $0 < z < \infty$, $-\infty < t < \infty$ y $-\infty < x < \infty$. En estas coordenadas la frontera se encuentra en $z \to 0$. La representación puede verse en la Figura 2.2.

Solución BTZ ó Agujero negro BTZ: Esta solución fue encontrada por Bañados, Teitelboim y Zanelli en 1992 cuya métrica toma la siguiente expresión:

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2} - 8M\right)dt^2 + \frac{1}{\left(\frac{r^2}{l^2} - 8M\right)}dr^2 + +r^2 d\theta^2, \tag{2.10}$$

el horizonte de eventos se encuentra en $r_H = \sqrt{8M}l$. Se observa que es asintóticamente AdS. Para conocer su forma maximalmente simétrica de la solución BTZ se procede a transformar la métrica a las coordenadas (U,V) tal que la métrica toma la forma de:

$$ds^2 = \frac{-4l^2 dU dV + \left(r_+^2/l^2\right)(1-UV)^2 d\theta^2}{(1+UV)^2}. \tag{2.11}$$

Ahora, se utilizan las coordenadas de Kruskal (T, Z) definidas como:

$$\left.\begin{aligned} T(r,t) &= \left(\frac{r-r_+}{r+r_+}\right)^{1/2} \sinh(t\xi) \\ Z(r,t) &= \left(\frac{r-r_+}{r+r_+}\right)^{1/2} \cosh(t\xi) \end{aligned}\right\} r > 2M, \tag{2.12}$$

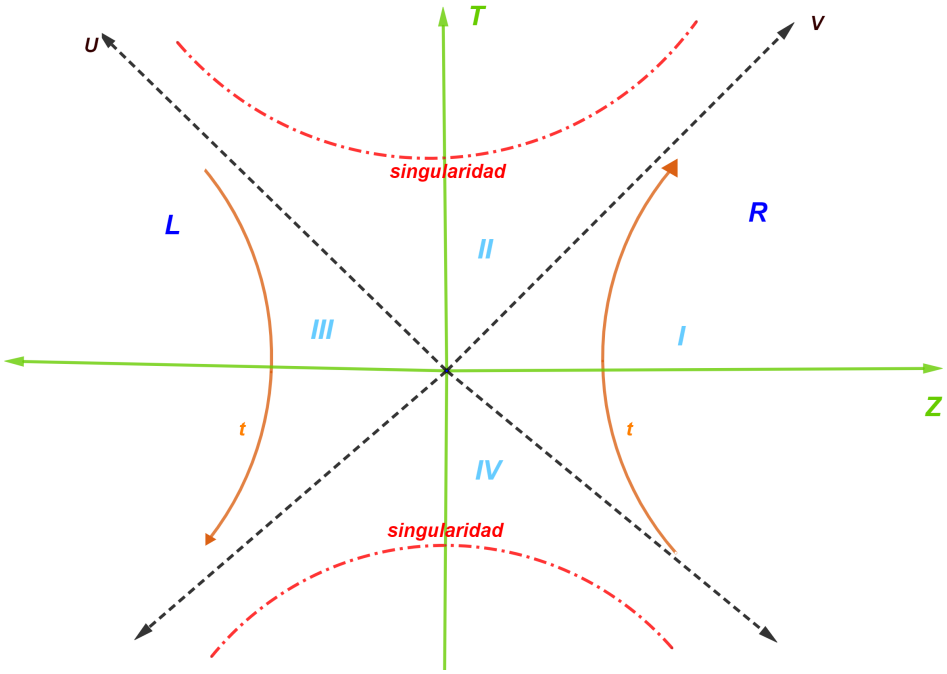

Figura 2.3: Solución BTZ maximalmente extendida.

$$\left.\begin{aligned} T(r,t) &= \left(\frac{r_+ - r}{r + r_+}\right)^{1/2} \cosh(t\xi) \\ Z(r,t) &= \left(\frac{r_+ - r}{r + r_+}\right)^{1/2} \sinh(t\xi) \end{aligned}\right\} r < 2M, \tag{2.13}$$

donde $\xi = \frac{r_+}{l^2}$ y $U = T + Z$, $V = T - Z$. Así, la métrica se escribe como:

$$ds^2 = \frac{1}{2M}(r + r_+)^2 \left(-dT^2 + dZ^2\right) + r^2 d\theta^2, \tag{2.14}$$

la representación de este espacio tiempo es la Figura (2.3). Se observa que la métrica (2.14) no es singular en $r = r_+$, entonces es válida para toda la región del espacio tiempo.

Estado base del agujero negro BTZ: En este último caso, la métrica toma la forma de:

$$ds^2 = -\frac{r^2}{l^2}dt^2 + \frac{l^2}{r^2}dr^2 + r^2 d\theta^2, \tag{2.15}$$

esta solución puede verse como la solución BTZ con $M = 0$ o tomando el límite cuando $r \to \infty$.

2.2 Teoría de campos conformes

Una teoría de campos conformes es una teoría de campos invariante bajo transformaciones conformes, es decir, transformaciones tales que [44, 45]:

$$\widetilde{g}_{\mu\nu} = \Omega g_{\mu\nu}. \tag{2.16}$$

Para el caso de $D \geq 3$ en el espacio de Minkowski es sencillo identificar el grupo de transformaciones que cumplen (2.16) conocido como: *Grupo Conforme* [46,47]. El grupo de Poincaré (traslaciones, rotaciones y boots) es un subgrupo del grupo conforme. El otro tipo de transformaciones que cumplen (2.16) son las *Dilataciones* que son de la forma $\widetilde{x}^{\mu} = \kappa x^{\mu}$ y las no triviales *Conformes Especiales*:

$$\widetilde{x}^{\mu} = \frac{x^{\mu} + f^{\mu} x^2}{1 + 2x^{\mu} f_{\mu} + a^2 x^2}. \tag{2.17}$$

De esta manera, se identifican a los generadores del grupo conforme como:

$$P_{\mu} = -i\partial_{\mu}, \quad Traslaciones, \tag{2.18}$$

$$M_{\mu\nu} = i\left(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}\right), \quad Rotaciones, \tag{2.19}$$

$$K_{\gamma} = -i\left\{2x_{\gamma}x^{\mu}\partial_{\mu} - x^2\partial_{\gamma}\right\}, \quad Conformes \quad especiales, \tag{2.20}$$

$$D = -ix^{\mu}\partial_{\mu}, \quad Dilataciones, \tag{2.21}$$

cuya álgebra esta dada por:

$$\left[D, K_{\gamma}\right] = -iK_{\gamma}, \tag{2.22}$$

$$\left[D, P_{\mu}\right] = iP_{\mu}, \tag{2.23}$$

$$\left[P_{\mu}, K_{\gamma}\right] = 2i\left(M_{\mu\gamma} - \eta_{\mu\gamma}D\right), \tag{2.24}$$

$$\left[M_{\mu\nu}, K_{\gamma}\right] = -i\left(\eta_{\mu\gamma}K_{\nu} - \eta_{\nu\gamma}K_{\mu}\right), \tag{2.25}$$

$$\left[P_{\gamma}, M_{\mu\nu}\right] = i\left(\eta_{\gamma\mu}P_{\nu} - \eta_{\gamma\nu}P_{\mu}\right), \tag{2.26}$$

$$\left[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}\right] = i\left(\eta_{\beta\mu}M_{\alpha\nu} + \eta_{\alpha\nu}M_{\beta\mu} - \eta_{\alpha\mu}M_{\beta\nu} - \eta_{\beta\nu}M_{\alpha\mu}\right). \tag{2.27}$$

La anterior estructura algebraica se puede escribir de manera alternativa definiendo un nuevo operador J_{ab}:

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}, \tag{2.28}$$

$$J_{-1,0} = D, \tag{2.29}$$

$$J_{-1,\mu} = \frac{1}{2}\left(P_{\mu} - K_{\mu}\right), \tag{2.30}$$

$$J_{0,\mu} = \frac{1}{2}\left(P_{\mu} + K_{\mu}\right), \tag{2.31}$$

donde $a, b =\in \{-1, 0, 1, ..., d\}$ de modo que el nuevo operador cumple con la relación de conmutación $SO(d,2)$:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i\left(\eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}\right), \tag{2.32}$$

con $\eta_{bc} = diag\left(-, -, +, .., +\right)$.

2.2.2 Invarianza conforme en 2 dimensiones

Consideremos un plano Euclidiano parametrizado por las variables (σ^0, σ^1). Bajo una transformación $\sigma \to w$ la métrica transforma como:

$$\widetilde{g}^{\mu\nu}(w) = \frac{\partial w^\mu}{\partial \sigma^\alpha}\frac{\partial w^\nu}{\partial \sigma^\beta} g^{\alpha\beta}(\sigma). \tag{2.33}$$

Para que la anterior ecuación sea una transformación conforme se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial w^1}{\partial \sigma^0} = \frac{\partial w^0}{\partial \sigma^1}, \quad \frac{\partial w^0}{\partial \sigma^0} = -\frac{\partial w^1}{\partial \sigma^1}, \tag{2.34}$$

ó:

$$\frac{\partial w^1}{\partial \sigma^0} = -\frac{\partial w^0}{\partial \sigma^1}, \quad \frac{\partial w^0}{\partial \sigma^0} = \frac{\partial w^1}{\partial \sigma^1}. \tag{2.35}$$

Remitiéndonos a variable compleja, se observa que (2.34) son las ecuaciones de Cauchy-Riemann [48, 49, 50] para funciones holomorfas y (2.35) para funciones antiholomorfas, lo que motiva a trabajar en variables complejas $(z, \bar{z})$, tales que:

$$z = \sigma^0 + i\sigma^1, \quad \bar{z} = \sigma^0 - i\sigma^1, \tag{2.36}$$

$$\partial_z := \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1), \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1). \tag{2.37}$$

La métrica en las coordenadas (z^0, z^1) se escribe como:

$$\widetilde{g}^{\mu\nu}(z,\bar{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{g}_{\mu\nu}(z,\bar{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Ahora, se encontrara el álgebra de las transformaciones infinitesimales holomorfas expresadas como:

$$z' = z + \varepsilon(z) = z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1}, \tag{2.39}$$

donde se ha usado la expansión de Laurent alrededor del punto $z = 0$ y c_n son coeficientes constantes. El efecto de la transformación z' en un campo sin espín $\phi(z,\bar{z})$ es:

$$\delta\phi = -\varepsilon(z)\,\partial_z\phi - \bar{\varepsilon}(\bar{z})\,\partial_{\bar{z}}\phi, \tag{2.40}$$

$$\delta\phi = \sum_n \left\{ c_n l_n \phi(z,\bar{z}) + \bar{c}_n \bar{l}_n \phi(z,\bar{z}) \right\}. \tag{2.41}$$

Por consiguiente, se identifican los generadores $l_n, \bar{l}_n$ como:

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z, \tag{2.42}$$

$$\bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}, \tag{2.43}$$

que satisfacen la siguientes relaciones de conmutación:

$$[l_n, l_m] = (n-m)\, l_{n+m}, \tag{2.44}$$

$$\left[\bar{l}_n, \bar{l}_m\right] = (n-m)\, \bar{l}_{n+m}, \tag{2.45}$$

$$\left[l_n, \bar{l}_m\right] = 0. \tag{2.46}$$

Debido a que $n \in \mathbb{Z}$ se tienen infinitas transformaciones independientes, entonces, se concluye que el álgebra para un espacio Euclidiano de dos dimensiones es infinitamente dimensional. Esta álgebra conforme se conoce como: *álgebra de Witt* [51].
Un aspecto importante es identificar los operadores que generan traslaciones, rotaciones, dilataciones y las conformes especiales para teoría de campos conformes en 2D. Se observa que los operadores l_{-1} y $\bar{l}_{-1}$ generan *traslaciones* en el espacio complejo, l_1 y $\bar{l}_1$ generan las *conformes especiales*, el operador; $\left(l_0 + \bar{l}_0\right)$, se identifica como el generador de las *dilataciones* y el operador; $i\left(l_0 - \bar{l}_0\right)$, es el generador de las *rotaciones*.

El álgebra de Witt permite una *extensión central* [48, 49, 50, 51], es decir, agregar un generador c que satisface las siguientes relaciones de conmutación:

$$[L_n, L_m] = (n-m)\, L_{n+m} + \frac{1}{12} c \left(n^3 - n\right) \delta_{n+m,0}, \tag{2.47}$$

$$\left[\bar{L}_n, \bar{L}_m\right] = (n-m)\, \bar{L}_{n+m} + \frac{1}{12} c \left(n^3 - n\right) \delta_{n+m,0}, \tag{2.48}$$

$$\left[L_n, \bar{L}_m\right] = 0, \tag{2.49}$$

c y $\bar{c}$ se llaman *Carga Central* ó *Anomalía Conforme* y en general, $c \neq \bar{c}$. Para N campos bosónicos, las cargas centrales toman el valor de $c = N$ y $\bar{c} = N$. Para N campos fermiónicos, las cargas centrales toman el valor de $c = \frac{1}{2}N$ y $\bar{c} = \frac{1}{2}N$ es decir, c y $\bar{c}$ miden los grados de libertad de la Teoría Conforme [49, 50, 51]. Esta álgebra se conoce como *álgebra de Virasoro* y se obtiene a trabajar en una Teoría *Cuántica* de Campos Conforme en 2D.

2.2.1 Tensor de energía-momentum

El tensor de Energía-Momentum $T_{\mu\nu}$ se define como [52, 53]:

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathscr{A}}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{2.50}$$

Si consideramos una transformación conforme de la forma $g'_{\mu\nu} = \exp(2\sigma)\, g_{\mu\nu}$ cuya variación infinitesimal es $\delta g_{\mu\nu} = 2\sigma g_{\mu\nu}$ la variación de la acción $\mathscr{A}$ esta dada por:

$$\delta\mathscr{A} = \int d^2x \frac{\delta\mathscr{A}}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu}, \tag{2.51}$$

$$\delta\mathscr{A} = 2\sigma \int d^2x \frac{\delta\mathscr{A}}{\delta g_{\mu\nu}} g_{\mu\nu}, \tag{2.52}$$

$$\delta\mathscr{A} = -\sigma \int d^2x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}, \tag{2.53}$$

$$\delta\mathscr{A} = -\sigma \int d^2x \sqrt{-g} T^{\mu}_{\mu}. \tag{2.54}$$

Debido a que las transformaciones conformes no deben cambiar la acción se debe cumplir que:

$$T^{\mu}_{\mu} = 0, \tag{2.55}$$

Para conocer como transforma el tensor de energía momento bajo (2.36) se usa el hecho que:

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu}} T_{\alpha\beta}. \tag{2.56}$$

Así se tiene que:

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}\left(T_{00} + 2iT_{10} - T_{11}\right), \tag{2.57}$$

$$T_{zz} = \frac{1}{4}\left(T_{00} - 2iT_{10} - T_{11}\right), \tag{2.58}$$

$$T_{\bar{z}z} = T_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}\left(T_{00} + T_{11}\right) = \frac{1}{4} T^{\mu}_{\mu}. \tag{2.59}$$

Debido a (2.55) es trivial observar que las componentes diferentes de cero son $T_{\bar{z}\bar{z}}$ y T_{zz}. Además, teniendo en cuenta que $\partial^{\alpha} T_{\alpha\beta} = 0$ implica que:

$$\partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad y \quad \partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0, \tag{2.60}$$

entonces, $T(z) := T_{zz}(z)$ es holomorfa y $\overline{T}(\bar{z}) := T_{\bar{z}\bar{z}}(z)$ es antiholomorfa. Así se pude expandir $T(z)$ en términos de una integral de contorno como:

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n \quad con \quad L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z), \tag{2.61}$$

$$\overline{T}(\bar{z}) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} \overline{L}_n \quad con \quad \overline{L}_n = \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^{n+1} \overline{T}(\bar{z}). \tag{2.62}$$

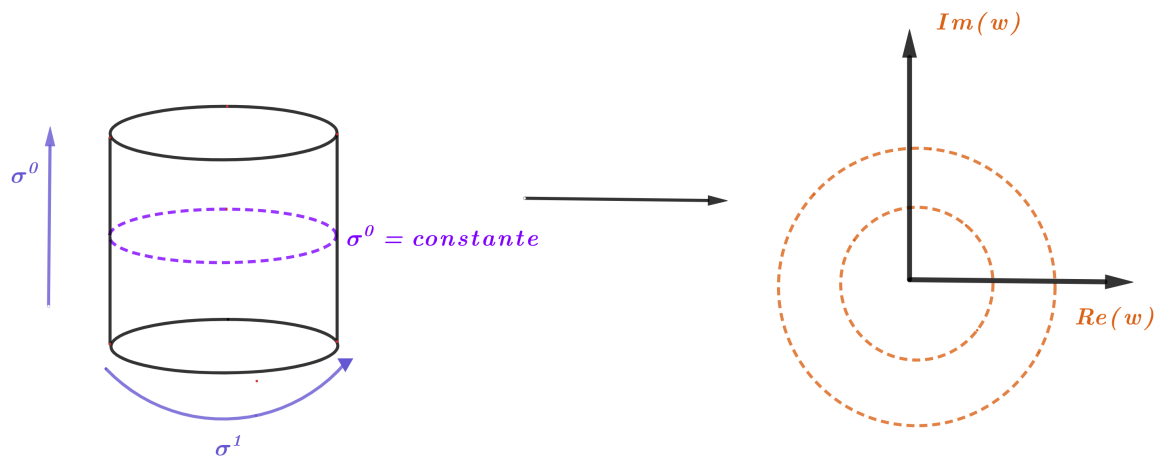

Figura 2.4: Mapeo de un cilindro a un plano complejo.

2.2.3 Cuantización radial

Consideremos un cilindro unitario parametrizado por las variables $\left(\sigma^0, \sigma^1\right)$ donde σ^0 es la coordenada temporal y σ^1 es la coordenada espacial. Este cilindro puede mapearse al espacio complejo usando la transformación:

$$w = \exp(z) = \exp\left(\sigma^0 + i\sigma^1\right), m \quad \overline{w} = \exp(\overline{z}) = \exp\left(\sigma^0 - i\sigma^1\right). \tag{2.63}$$

Superficies de $\sigma^0 = constante$, son mapeadas al plano complejo como circulos centrados en $w = 0$, el pasado infinito se mapea como $z = 0$ y el futuro infinito se mapea como $z = \infty$, Ver Figura 2.4. Es interesante observar que ocurre con los operadores asociados a las simetrías conformes, las traslaciones en el tiempo $\sigma^0 + a$ se convierten en Dilataciones en el espacio complejo $w \to \exp(a)\, w$ y traslaciones en el espacio $\sigma^1 + a$ se convierten en Rotaciones $w \to \exp(ia)\, w$. Debido a que el hamiltoniano H genera traslaciones en el tiempo y el operador momento P genera traslaciones en el espacio se tiene que:

$$H = L_0 + \overline{L}_0, \quad P = i\left(L_0 - \overline{L}_0\right). \tag{2.64}$$

En otras palabras, el generador de dilataciones sobre el espacio complejo puede considerarse como el hamiltoniano H y el generador de rotaciones sobre el espacio complejo se considera como el operador momento P. Este procedimiento, de construir una teoría cuántica de campos sobre un plano complejo se conoce como *Cuantización radial*.

2.2.4 Tensor de energía-momentum sobre el cilindro

Para conocer la forma del tensor de Energía-Momentum en el cilindro se utiliza la relación [52]:

$$T_{zz}(z) = \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]^2 T_{ww}(w) + \frac{1}{12} c S(w,z), \tag{2.65}$$

donde $S(w,z)$ es el *Schwarzian* definido como:

$$S(w,z) := \left(\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-2}. \tag{2.66}$$

Teniendo en cuenta la transformación de la sección. El tensor de energía-momentum sobre el cilindro es:

$$T_{zz}(z) = w^2 T_{ww}(w) - \frac{1}{24} c, \tag{2.67}$$

usando (2.61) obtenemos que:

$$T_{zz}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[L_n - \frac{1}{24} c\delta_{n,0}\right]\exp(-nz), \tag{2.68}$$

de la ecuación (2.63) se observa que se puede definir:

$$L_n^{Cilindro} := L_n - \frac{1}{24} c\delta_{n,0} \quad y \quad \overline{L}_n^{Cilindro} := \overline{L}_n - \frac{1}{24}\overline{c}\delta_{n,0}, \tag{2.69}$$

de modo que el hamiltoniano H y el operador momentum P sobre el cilindro, siguiendo el argumento dado en la sección, son de la forma:

$$H = L_0^{Cilindro} + \overline{L}_0^{Cilindro} = \left(L_0 + \overline{L}_0\right) - \frac{1}{24}(c + \overline{c}), \tag{2.70}$$

$$P = i\left(L_0^{Cilindro} - \overline{L}_0^{Cilindro}\right) = i\left(L_0 - \overline{L}_0\right) + i\frac{1}{24}(\overline{c} - c). \tag{2.71}$$

2.2.5 Teoría de campos cuánticos conformes sobre un toro

Una teoría de campos conformes cuánticos sobre un cilindro parametrizado por z puede mapearse a un toro en el espacio complejo. En este caso, es necerario identificar dos periodos z para el toro. Es conveniente redefinir $z \to iz$ así que se puede identificar uno de los periodos $z + 2\pi$ [54]. Para el otro periodo se puede usar la argucia $z + 2\pi\tau$ donde $\tau = \tau_1 + i\tau_2$. Por lo tanto, las superficies $Imz = 2\pi\tau$ y $Imz = 0$ se puede identificar con una transformación $Rew + 2\pi\tau_1$, ver Figura 2.5. El parámetro τ se conoce como *parámetro modular*.

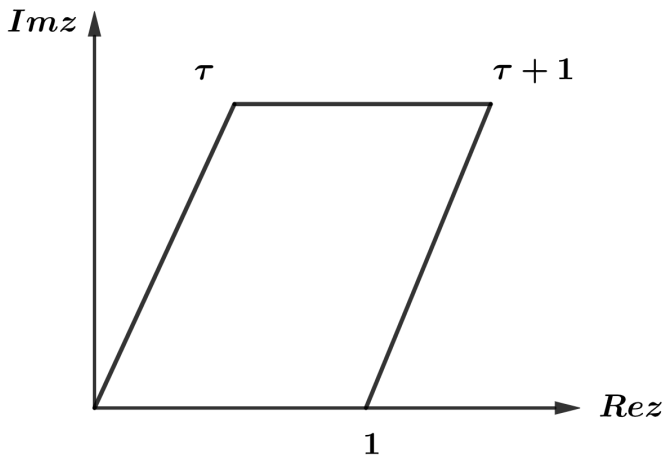

Figura 2.5: Toro con parámetro modular τ.

Debido a que se define una traslación de tiempo imaginario de *Imw* como $2m\pi\tau_1$ acompañado con una traslación espacial de *Rew* por $2\pi\tau_2$ se puede definir la función de partición del toro sobre un espacio complejo como:

$$Z(\tau_1,\tau_2) = Tr\left[\exp(2\pi\tau_1 P)\exp(-2\pi\tau_2 H)\right], \tag{2.72}$$

usando (2.70) y (2.71) la anterior ecuación se expresa como:

$$Z(\tau,\overline{\tau}) = Tr\left[\exp\left(2\pi i\tau L_0^{Cilindro} - 2\pi i\overline{\tau}\overline{L}_0^{Cilindro}\right)\right], \tag{2.73}$$

$$Z(\tau,\overline{\tau}) = Tr\left[q^{L_0^{Cilindro}}\overline{q}^{\overline{L}_0^{Cilindro}}\right], \tag{2.74}$$

$$Z(\tau,\overline{\tau}) = q^{-\frac{1}{24}c}\overline{q}^{-\frac{1}{24}\overline{c}}Tr\left[q^{L_0}\overline{q}^{\overline{L}_0}\right], \tag{2.75}$$

donde $q := \exp(2\pi i\tau)$. Una propiedad importante de (2.71) es que es invariante bajo transformaciones de la forma $\tau \to -\frac{1}{\tau}$, llamada *invarianza modular* y son de vital importan para calcular la entropía de una teoría cuánticas conformes en 2D, como veremos a continuación. Este cálculo se basa en las referencias [55,56,57,58]. Si consideramos el límite de altas energías en (2.75) tenemos que:

$$Z_0(\tau,\overline{\tau}) \approx Tr\left[q^{L_0}\overline{q}^{\overline{L}_0}\right], \tag{2.76}$$

la expresión (2.76) puede escribirse en términos de la densidad de estados $\rho\left(\Delta,\overline{\Delta}\right)$ como:

$$Z_0(\tau,\overline{\tau}) = \sum \rho\left(\Delta,\overline{\Delta}\right)q^{\Delta}\overline{q}^{\overline{\Delta}}, \tag{2.77}$$

realizando integrales de contorno alrededor del punto $q=0$ y $\overline{q}=0$ obtenemos:

$$\rho\left(\Delta,\overline{\Delta}\right)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\frac{dq}{q^{\Delta+1}}\frac{d\overline{q}}{\overline{q}^{\Delta+1}}Z_0\left(\tau,\overline{\tau}\right). \tag{2.78}$$

Asumiremos que las variables τ y $\overline{\tau}$ son independientes de modo que trabajara la variable τ y al final se retomara $\overline{\tau}$. De la relación (2.76) y (2.77) se observa que:

$$Z\left(\tau\right)=q^{\frac{c}{24}}Z_0\left(\tau\right)=\exp\left(\frac{2\pi i}{24}\tau c\right)Z_0\left(\tau\right), \tag{2.79}$$

usando la invarianza modular se observa que:

$$Z\left(\tau\right)=\exp\left(\frac{2\pi i}{24}c\tau\right)Z_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\exp\left(\frac{2\pi i}{24}c\tau\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{24\tau}c\right)Z\left(-\frac{1}{\tau}\right). \tag{2.80}$$

Entonces, la ecuación (2.78) puede expresarse como:

$$\rho\left(\Delta\right)=\int d\tau\exp\left(-2\pi i\Delta\tau\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{24}c\tau\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{24\tau}c\right)Z\left(-\frac{1}{\tau}\right). \tag{2.81}$$

El siguiente paso es utilizar la aproximación de punto de silla de modo que se obtiene la aproximación:

$$\rho\left(\Delta\right)\approx\exp\left(2\pi\sqrt{\frac{1}{6}c\Delta}\right), \tag{2.82}$$

donde se considero el límite de altas energías $\Delta>>\frac{1}{12}c$. Si retomamos la dependencia $\overline{\tau}$ la densidad de estados $\rho\left(\Delta,\overline{\Delta}\right)$ esta dada por:

$$\rho\left(\Delta,\overline{\Delta}\right)=\exp\left(2\pi\sqrt{\frac{1}{6}c\Delta}\right)\exp\left(2\pi\sqrt{\frac{1}{6}\overline{c}\overline{\Delta}}\right), \tag{2.83}$$

así la entropía de una teoría cuántica conformes 2D esta dada por:

$$S=\ln\rho\left(\Delta,\overline{\Delta}\right), \tag{2.84}$$

$$S\approx 2\pi\sqrt{\frac{1}{6}c\Delta}+2\pi\sqrt{\frac{1}{6}c\overline{\Delta}}, \tag{2.85}$$

(2.85) se conoce como la *ecuación de Cardy* y se la puede utilizar para calcular las temperaturas relacionados con los autovalores de los operadores del álgebra de Virasoro, es decir:

$$\frac{1}{2\pi}L_{circ}\frac{\partial S}{\partial\Delta}=\frac{1}{T},\quad\frac{1}{2\pi}L_{circ}\frac{\partial S}{\partial\overline{\Delta}}=\frac{1}{\overline{T}}, \tag{2.86}$$

donde L_{circ} es la longitud de la circunferencia del cilindro. La forma explícita de (2.86) es:

$$T=\frac{1}{L_{circ}}\sqrt{\frac{\Delta}{c/24}},\quad\overline{T}=\frac{1}{L_{circ}}\sqrt{\frac{\overline{\Delta}}{\overline{c}/24}}. \tag{2.87}$$

2.3 Dualidad AdS(3)/CFT(2)

En 1986 Brown y Henneaux [59] demostraron que las simetrías asintóticas del espacio Anti-de Sitter en tres dimensiones AdS(3) forman el álgebra de Virasoro, ecuaciones (2.47-2.49), con carga central $c = \frac{3l}{2}$. Strominger [60] aplicó estos resultados a la solución BTZ la cual es asintóticamente AdS; de modo que sus simetrías asintóticas se describen a partir del álgebra de Virasoro con carga central $c = \frac{3l}{2}$, para obtener la entropía de un agujero negro BTZ a partir de la formula de Cardy. En esta sección se obtendrá este último resultado.
Considerando la solución BTZ sin rotación, es natural asociar los valores propios de los generadores con el álgebra de Virasoro con la masa M del agujero negro BTZ, tal que:

$$\frac{1}{2}Ml = \Delta = \overline{\Delta}, \tag{2.88}$$

si reemplazamos (2.88) en (2.85) y (2.86), obtenemos la entropía de Bekenstein-Hawking y la temperatura de Hawking:

$$S = \frac{2\pi}{4}\sqrt{8Ml} = \frac{2\pi}{4}r_+ = \frac{1}{4}A = S_{BH}, \tag{2.89}$$

$$T = \overline{T} = \frac{2\pi r_+}{8M}, \tag{2.90}$$

respectivamente. Los anteriores resultados están relacionados con la dualidad AdS(3)/CFT(2) ya que propiedades de un sistema gravitacional en tres dimensiones se pueden obtener a partir de una teoría cuántica conforme de dimensión 2. Además, ya que la ecuación de Cardy proviene de la interpretación estadística se concluye que la entropía de un agujero negro es *térmica*, es decir, un agujero negro se comporta como un sistema termodinámico.

2.4 Conjetura de Ryu-Takayanagi

En 2006, Shinsei Ryu y Tadashi Takayanagi [61, 62, 63] propusieron una ecuación para calcular la entropía de entanglement de una región A de una teoría de campos conformes sobre la frontera asintótica de un espacio Anti-de Sitter con una superficie *mínima* en el espacio dual, dada por:

$$S_A = \frac{1}{4}\frac{A(\gamma_A)}{G}, \tag{2.91}$$

donde γ_A es una superficie que minimiza el área tal que sus fronteras coincidan $\partial\gamma = \partial A$. (2.87) se conoce como la *Ecuación de Ryu-Takayanagi*. A continuación, se analizara tres ejemplos: *un disco en una CFT de 3 dimensiones*, AdS(3) y *un agujero negro BTZ euclidiano*.

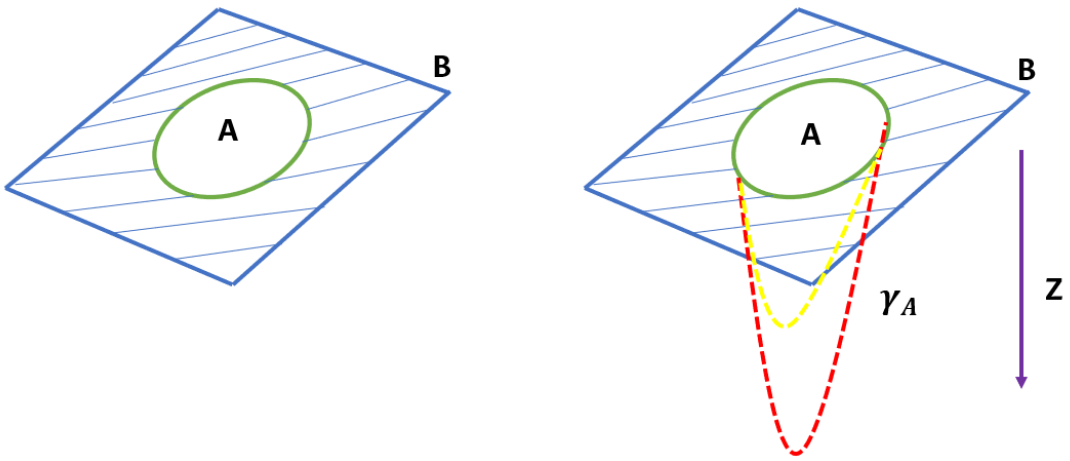

Figura 2.6: Un disco en CFT(3) para t=constante, superficies γ_A y la dirección holográfica z.

2.4.1 Disco

Consideremos una superficie en una CFT en 3 dimensiones siendo un disco para un t=constante siendo la región A el disco y la región B como su complementario, ver Figura 2.6. Ahora, se desea calcular la entropía de entanglement del disco tomando como base los artículos [64, 66, 66]. Para eso se debe parametrizar el área del disco A y de la superficie γ_A:

$$\begin{aligned} A &= \{(r,\theta,z,t)\,/t=0, z=\delta, r\leq R\} \\ \gamma_A &= \{(r,\theta,z,t)\,/t=0, z=f(r), r\leq R\}, \end{aligned} \tag{2.92}$$

donde $\delta << 1$ y R es el radio del disco. La métrica de AdS en coordenadas de Poincaré es:

$$ds^2_{AdS} = \frac{l^2}{z^2}\left[-dt^2+dz^2+dr^2+r^2d\theta^2\right], \tag{2.93}$$

para γ_A tenemos que la métrica inducida AdS es:

$$ds^2_{\gamma_A} = \frac{l^2}{z^2}\left[\left(1+f'^2\right)dr^2+r^2d\theta^2\right]. \tag{2.94}$$

Ahora, se calcula el área del disco según esta paremetrización:

$$A = \int_{\gamma_A} d^2x\sqrt{h}, \tag{2.95}$$

$$A = \int_0^R\int_0^{2\pi} drd\theta l^2 r\frac{\sqrt{1+f'^2}}{f^2}. \tag{2.96}$$

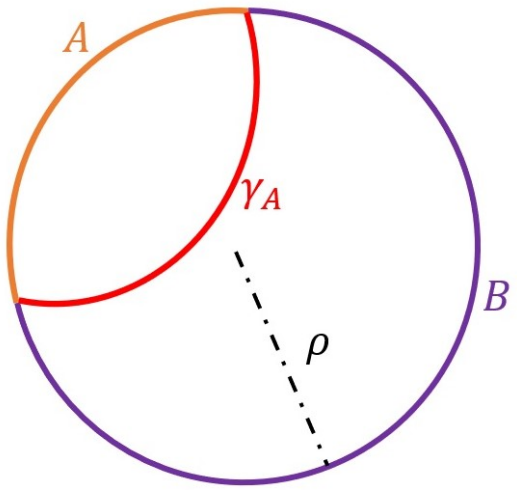

Figura 2.7: Espacio tiempo AdS(3) para t=constante. γ_A es la superficie mínima.

Ahora minimizamos el área usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, de modo que se obtiene $f(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$, entonces reemplazamos en (2.91) para obtener la entropía de entanglement del disco:

$$S_A = \frac{1}{2}\pi l^2 \frac{R}{\delta} - \frac{1}{2}\pi l^2, \tag{2.97}$$

dicho valor coincide con los obtenidos de la teoría de campos conformes en 3D [65, 66].

2.4.2 AdS(3)

Consideremos dos subsistemas A y B en AdS (3) para t =constante, ver Figura 2.7. Se desea calcular la entropía de entanglement de la región A. En este caso la longitud de la geodésica γ_A es infinita ya que termina en la frontera ubicada en el infinito, entonces, es necesario considerar una restricción en la coordenada $\rho \leq \rho_0$. Ahora, para hallar las geodésicas en AdS se escoge las coordenadas (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) que satisfacen las ecuaciones (2.6-2.8). Se escogerá un vector $\xi^\mu = (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3)$ con $\xi_\mu = (-Z_0, -Z_1, Z_2, Z_3)$. Para obtener las geodésicas se debe minimizar el funcional:

$$I = \frac{1}{2}\int d\lambda \left[g_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta + \vartheta \left(g_{\alpha\beta}\xi^\alpha \xi^\beta + l^2 \right) \right], \tag{2.98}$$

donde ϑ es un multiplicador de lagrange y $\dot{\xi}^\alpha = \dfrac{d\xi^\alpha}{d\lambda}$. Para minimizar el funcional se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_\mu} - \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\mu} \right] = 0, \tag{2.99}$$

para obtener:

$$\ddot{\xi}^{\mu} - \vartheta \xi^{\mu} = 0, \tag{2.100}$$

contrayendo con ξ_{μ}:

$$\ddot{\xi}^{\mu} \xi_{\mu} + \vartheta l^2 = 0, \tag{2.101}$$

usando el hecho que:

$$\frac{d^2 \left(\xi^{\mu} \xi_{\mu}\right)}{d\lambda^2} = 0 = \ddot{\xi}^{\mu} \xi_{\mu} + \dot{\xi}^2, \tag{2.102}$$

el multiplicador de lagrange ϑ es:

$$\vartheta = \frac{\dot{\xi}^2}{l^2}, \tag{2.103}$$

Reemplazando en (2.99) se obtiene:

$$l^2 \ddot{\xi}^{\mu} - \dot{\xi}^2 \xi^{\mu} = 0. \tag{2.104}$$

Debido a que estamos interesados en las geodésicas *spacelike* $(\dot{\xi}^2 = 1)$ la solución general de (2.103) es:

$$\xi^{\mu}(\lambda) = a^{\mu} \exp\left(\frac{\lambda}{l}\right) + b^{\mu} \exp\left(-\frac{\lambda}{l}\right), \tag{2.105}$$

con:

$$a^2 = 0 = b^2, \quad 2a \cdot b = -l^2, \tag{2.106}$$

Como ya se tiene la parametrización de las geodésicas, la longitud de γ_A L_{γ_A} puede expresarse en términos de la distancia propia:

$$L_{\gamma_A} = \Delta\lambda. \tag{2.107}$$

Los puntos de γ_A como $\theta(\lambda_1) = 0$ y $\theta(\lambda_2) = \dfrac{2\pi L_A}{L_{circuferencia}}$ donde L_A es la longitud del subsistema A y $L_{circuferencia}$ es la longitud de la circunferencia. Para la coordenada radial los puntos son los mismos $\rho(\lambda_1) = \rho_0 = \rho(\lambda_2)$. Ahora, usando (2.105) se tiene que:

$$\xi(\lambda_1) \cdot \xi(\lambda_2) = a \cdot b \left[\exp\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{l}\right) + \exp\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l}\right)\right] = 2a \cdot b \cosh\left(\frac{\Delta\lambda}{l}\right), \tag{2.108}$$

$$\xi(\lambda_1) \cdot \xi(\lambda_2) = -l^2 \cosh\left(\frac{\Delta\lambda}{l}\right), \tag{2.109}$$

por otro lado, de (2.8) obtenemos:

$$\xi(\lambda_1) \cdot \xi(\lambda_2) = l^2 \left[-\cosh^2\rho_0 \cos^2\tau - \cosh^2\rho_0 \sin^2\tau + \sinh^2\rho_0 \cos\left(\frac{2\pi L_A}{L_{circuferencia}}\right)\right], \tag{2.110}$$

$$\xi(\lambda_1)\cdot\xi(\lambda_2) = l^2\left[-1-\sinh^2\rho_0+\sinh^2\rho_0\cos\left(\frac{2\pi L_A}{L_{circuferencia}}\right)\right], \tag{2.111}$$

$$\xi(\lambda_1)\cdot\xi(\lambda_2) = l^2\left\{-1+\sinh^2\rho_0\left[\cos\left(\frac{2\pi L_A}{L_{circuferencia}}\right)-1\right]\right\}, \tag{2.112}$$

$$\xi(\lambda_1)\cdot\xi(\lambda_2) = -l^2\left[1+2\sinh^2\rho_0\sin^2\left(\frac{1}{2}\frac{2\pi L_A}{L_{circuferencia}}\right)\right], \tag{2.113}$$

de (2.109) y (2.113) se cumple que:

$$\cosh\left(\frac{\Delta\lambda}{l}\right) = 1+2\sinh^2\rho_0\sin^2\left(\frac{\pi L_A}{L_{circuferencia}}\right), \tag{2.114}$$

usando la ecuación de Ryu-Takayanagi (2.91) y (2.114) tenemos:

$$S_A = \frac{1}{4}L_{\gamma_A} = \frac{l}{4}\text{arccosh}\left[1+2\sinh^2\rho_0\sin^2\left(\frac{\pi L_A}{L_{circuferencia}}\right)\right], \tag{2.115}$$

$$S_A \approx \frac{l}{4}\text{arccosh}\left[\frac{1}{2}\exp(2\rho_0)\sin^2\left(\frac{\pi L_A}{L_{circuferencia}}\right)\right], \tag{2.116}$$

El cuttof de distancias largas (IR) ρ_0 se relaciona con un cuttof ε (UV) en la CFT por medio de $\exp(\rho_0) = \frac{L_{circuferencia}}{\pi\varepsilon}$, esto se conoce como la *relación UV/IR* [67,68]. Así, (2.116) se escribe como:

$$S_A \approx \frac{c}{3}\ln\left[\frac{L_{circuferencia}}{\pi\varepsilon}\sin\left(\frac{\pi L_A}{L_{circuferencia}}\right)\right], \tag{2.117}$$

donde se ha hecho uso de la relación de Brown-Henneaux $c = \frac{3}{2}l$. Esta entropía de entanglement es igual a la obtenida a partir de propiedades de la CFT para un cilindro [69,70,71,72].

2.4.3 Agujero negro BTZ euclidiano

Un agujero negro BTZ se describe por la métrica (2.6). Si se Euclidianiza se obtiene que:

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{l^2}-8M\right)dt_E^2 + \frac{1}{\left(\frac{r^2}{l^2}-8M\right)}dr^2 + r^2 d\theta^2, \tag{2.118}$$

Considerando la siguiente transformación:

$$r = \sqrt{8M}\,l\cosh\rho, \tag{2.119}$$

$$t_E = \frac{l}{\sqrt{8M}}\phi, \tag{2.120}$$

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{8M}}\widetilde{t}, \tag{2.121}$$

la métrica (2.6) se convierte en:

$$ds^2 = l^2\left(\cosh^2\rho d\widetilde{t}^2 + \sinh^2\rho d\phi^2 + d\rho^2\right), \tag{2.122}$$

que es la versión Eucidianizada de AdS (3), ver expresión (2.5) de modo que se puede utilizar el resultado de la sección anterior, especificamente (2.109) donde se usa (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) asociada al conjunto de transformaciones:

$$\begin{aligned} Z_0 &= l\cosh\rho\cosh\widetilde{t}, \\ Z_1 &= l\cosh\rho\sinh\widetilde{t}, \\ Z_2 &= l\sinh\rho\cos\phi, \\ Z_3 &= l\sinh\rho\sin\phi, \end{aligned} \tag{2.123}$$

que satisface las siguientes relaciones:

$$ds^2 = -(dZ_0)^2 + (dZ_1)^2 + (dZ_2)^2 + (dZ_3)^2, \tag{2.124}$$

$$-(Z_0)^2 + (Z_1)^2 + (Z_2)^2 + (Z_3)^2 = -l^2. \tag{2.125}$$

Los puntos de γ_A se pueden identificar como $\widetilde{t}(\lambda_1) = 0$ y $\widetilde{t}(\lambda_2) = \dfrac{2\pi L_A}{\beta}$ donde $\beta = \dfrac{2\pi r_H}{8M}$ (ver sección **3.2.2**) y L_A es la longitud del subsistema A. Para la coordenada radial los puntos son $\rho(\lambda_1) = \rho_0 = \rho(\lambda_2)$. De esta manera, usando (2.123) se tiene que:

$$\xi(\lambda_1)\cdot\xi(\lambda_2) = l^2\left[-\cosh^2\rho_0\cosh\left(\frac{2\pi L_A}{\beta}\right) + \sinh^2\rho_0\cos^2\phi + \sinh^2\rho_0\sin^2\phi\right], \tag{2.126}$$

$$\xi(\lambda_1)\cdot\xi(\lambda_2) = l^2\left[-\cosh^2\rho_0\cosh\left(\frac{2\pi L_A}{\beta}\right) + \sinh^2\rho_0\right], \tag{2.127}$$

$$\xi(\lambda_1)\cdot\xi(\lambda_2) = l^2\left[-\cosh^2\rho_0\cosh\left(\frac{2\pi L_A}{\beta}\right) + \cosh^2\rho_0 - 1\right], \tag{2.128}$$

$$\xi(\lambda_1)\cdot\xi(\lambda_2) = l^2\left\{\cosh^2\rho_0\left[1 - \cosh\left(\frac{2\pi L_A}{\beta}\right)\right] - 1\right\}, \tag{2.129}$$

$$\xi(\lambda_1)\cdot\xi(\lambda_2) = -l^2\left[1 + \cosh^2\rho_0\sinh^2\left(\frac{\pi L_A}{\beta}\right)\right], \tag{2.130}$$

de la ecuación (2.109) se deduce que:

$$\cosh\left(\frac{\Delta\lambda}{l}\right) = 1 + \cosh^2\rho_0\sinh^2\left(\frac{\pi L_A}{\beta}\right), \tag{2.131}$$

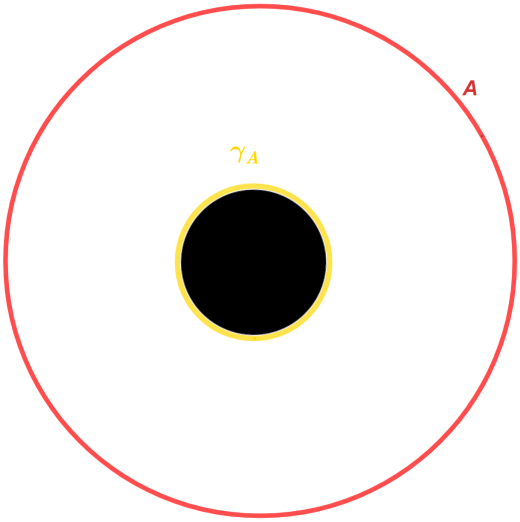

Figura 2.8: Espacio tiempo Euclidiano BTZ para ϕ=constante. La geodésica γ_A atrapa el horizonte de eventos.

Usando la ecuación de Ryu-Takayanagi (2.91) se obtiene:

$$S_A = \frac{1}{4}L_{\gamma_A} = \frac{l}{4}\text{arccosh}\left[1+\cosh^2\rho_0\sinh^2\left(\frac{\pi L_A}{\beta}\right)\right], \tag{2.132}$$

$$S_A \approx \frac{l}{4}\ln\left[\exp\left(2\rho_0\right)\sinh^2\left(\frac{\pi L_A}{\beta}\right)\right], \tag{2.133}$$

$$S_A = \frac{c}{3}\ln\left[\frac{\beta}{\pi\varepsilon}\sinh\left(\frac{\pi L_A}{\beta}\right)\right] = \frac{c}{3}\ln\left[\frac{2l^2}{r_H\varepsilon}\sinh\left(\frac{r_H L_A}{2l^2}\right)\right], \tag{2.134}$$

donde se ha hecho uso de la relación UV/IR, $\exp\left(\rho_0\right) = \dfrac{\beta}{\pi\varepsilon}$. La expresión (2.134) es igual a la entropía de entanglement obtenida a partir de propiedades de la CFT. Ahora, se va a considerar el caso que el subsistema A ocupa toda la frontera, $L_A = 2\pi l$ y el límite de altas temperatura $\dfrac{r_H}{l} \gg 1$, ver Figura (2.8). De esta forma (2.134) se aproxima a:

$$S_A \approx \frac{l}{2}\frac{\pi r_H}{l} = \frac{1}{4}A, \tag{2.135}$$

la cual es la entropía Bekenstein-Hawking. Este resultado, como es de esperarse, es consistente con lo obtenido a partir de la formula de Cardy (ver sección **2.3**). Entonces, se concluye que se ha obtenido una entropía térmica de entanglement para un agujero negro BTZ usando la ecuación de Ryu-Takayanagi donde γ_A atrapa el horizonte de eventos.

CAPÍTULO 3
TÉCNICA EUCLIDIANA DE GIBBONS-HAWKING

La técnica euclidiana de Gibbons-Hawking es una técnica de aproximación de integrales de camino gravitacionales de la cual se obtienen propiedades termodinámicas desde la función de partición de la acción gravitacional a *orden cero*, consiguiendo la conexión entre los agujeros negros y la termodinámica.

En este capítulo se aborda la técnica euclidiana de Gibbons-Hawking y se aplica a la solución de Schwarzschild, la solución BTZ y un caparazón negro BTZ (black shell) ubicado sobre el horizonte de eventos.

3.1 Integrales de camino gravitacionales

Sea $g_{\mu\nu}$ la métrica del espacio tiempo y Φ un campo de materia, entonces, la amplitud de probabilidad para ir de un estado inicial g_1, Φ_1 sobre una superficie S_1 a un estado final g_2, Φ_2 sobre una superficie S_2 es [76, 77, 78, 79]:

$$\langle g_2\Phi_2 S_2 \mid g_1\Phi_1 S_1\rangle = \int \mathscr{D}[g,\Phi]\mathrm{e}^{i\mathscr{A}[g,\Phi]}, \tag{3.1}$$

donde $\mathscr{D}[g,\Phi]$ es una medida de todas las configuraciones de los campos g y Φ y $\mathscr{A}[g,\Phi]$ es la acción de los campos dada por la expresión:

$$\mathscr{A}[g,\Phi] = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\,(\mathscr{R}-2\Lambda) + \frac{1}{8\pi}\int d^3x\sqrt{-h}\,(K-K_0) + \int d^4x\sqrt{-g}\mathscr{L}_m, \tag{3.2}$$

donde $\mathscr{R}$ es el escalar de Ricci, Λ es la constante cosmológica, h_{ij} es la métrica inducida sobre la frontera, K es la traza de la curvatura extrínseca de la frontera, K_0 es un contra término que depende del espacio tiempo de estudio y $\mathscr{L}_m$ es la densidad lagrangiana del campo de materia Φ.

Debido a que (3.1) tiene problemas de convergencia [49] es usual introducir la acción euclidiana $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$:

$$-\mathscr{A}_E = i\mathscr{A}, \tag{3.3}$$

para el caso de ausencia de campos de materia la toma la forma de:

$$\mathscr{A}_E[g,\Phi] = -\frac{1}{16\pi}\int d^4x_E\sqrt{g_E}\,(\mathscr{R}-2\Lambda) - \frac{1}{8\pi}\int d^3x_E\sqrt{h_E}\,(K-K_0), \tag{3.4}$$

de modo que, (3.1) se puede identificar con la función de partición Z, es decir:

$$Z = \int \mathscr{D}[g,\Phi]\mathrm{e}^{-\mathscr{A}_E[g,\Phi]}. \tag{3.5}$$

Sin embargo, aún no se ha resuelto el problema de la divergencia ya que la acción euclidiana no tiene un límite inferior, además, no hay una definición clara de como integrar en la geometría. Debido a lo anterior, se realiza una *aproximación* alrededor de un punto silla clásico, es decir, se espera que la principal contribución proceda de la solución de los campos clásicos [80, 81, 82]. Entonces, la función de partición Z (3.5) puede *aproximarse a orden cero* como:

$$Z \approx \mathrm{e}^{-\mathscr{A}_E\left[\overline{g},\overline{\Phi}\right]}, \tag{3.6}$$

donde $\mathscr{A}_E\left[\overline{g},\overline{\Phi}\right]$ es la acción evaluada en las soluciones clásicas $\overline{g}$ y $\overline{\Phi}$. Desde la función de partición Z se puede calcular propiedades termodinámicas, por ejemplo: la energía y entropía, dadas por la expresión:

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \tag{3.7}$$

$$S = \ln Z + \beta E, \tag{3.8}$$

respectivamente.

3.2 Aplicaciones

En esta sección se evaluara la función de partición Z (3.6) y sus cantidades termodinámicas para: *la solución de Schwarzschild*, *la solución BTZ* y para un *caparazón negro BTZ* (black shell).

3.2.1 Solución de Schwarzschild

La métrica de *Schwarzschild* esta dada por:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{3.9}$$

cuya topología es $R^2 \times S^2$. Si consideramos una hipersuperficie $\Phi := r - 2M$ se puede construir un vector normal n usando la expresión:

$$n = N g^{\mu\sigma} \partial_\mu \Phi \partial_\sigma, \tag{3.10}$$

donde N es una función de normalización. Para la solución de Schwarzschild el vector normal n a la hipersuperficie Φ es:

$$n = \sqrt{1-\frac{2M}{r}}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{3.11}$$

Ahora, para calcular la traza de la curvatura extrínseca K es necesario euclidianizar la métrica de Schwarzschild, es decir, haciendo $t \to i\tau$ en (3.9). Así, se obtiene que:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{3.12}$$

cuya topología es $R \times S^1 \times S^2$. Para calcular la traza de la curvatura extrínseca K se usa:

$$K = \nabla_\alpha n^\alpha = \frac{\left(\sqrt{|g|} n^\alpha\right)_{,\alpha}}{\sqrt{|g|}}, \tag{3.13}$$

debido a que el vector normal n solo tiene componente r obtenemos:

$$K = \left.\frac{\left(r^2 n^r\right)_{,r}}{r^2}\right|_{r=R}, \tag{3.14}$$

$$K = \frac{2}{R}\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} + \frac{M}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}}. \tag{3.15}$$

De esta manera, tenemos que:

$$\frac{1}{8\pi}\int d^3x_E \sqrt{h_E} K = \frac{1}{8\pi}\int_0^\beta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\tau d\theta d\phi \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} R^2 \sin\theta \left(\frac{2}{R}\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} + \frac{M}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}}\right), \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{8\pi}\int d^3x_E \sqrt{h_E} K = \frac{1}{2}\beta\left(2R - 3M\right). \tag{3.17}$$

Se observa que para $R >> 1$ la ecuación (3.17) diverge, entonces se propone al factor K_0 siendo la traza de curvatura extrínseca del espacio tiempo de Minkowski. Siguiendo un proceso análogo al anterior se puede determinar, de manera trivial, que $K_0 = \frac{2}{R}$. Entonces:

$$-\frac{1}{8\pi}\int d^3x_E \sqrt{h_E} K_0 = -\frac{1}{8\pi}\int_0^\beta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\tau d\theta d\phi \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} R^2 \sin\theta \left(\frac{2}{R}\right), \tag{3.18}$$

$$-\frac{1}{8\pi}\int d^3x_E \sqrt{h_E} K_0 \approx -\beta\left(R - M\right). \tag{3.19}$$

Así se concluye que la acción gravitacional euclidianizada para el caso de la solución Schwarzschild es $\mathscr{A}_E$:

$$\mathscr{A}_E = -\frac{1}{8\pi}\int d^3x_E \sqrt{h_E}\left(K - K_0\right), \tag{3.20}$$

$$\mathscr{A}_E = \frac{\beta M}{2}. \tag{3.21}$$

Para encontrar la relación entre β y M se realiza la transformación $\chi = 4M\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}$ en (3.12) para obtener:

$$ds^2 = \chi^2\left(\frac{d\tau}{4M}\right)^2 + \left(\frac{r^2}{4M^2}\right)^2 d\chi^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right). \tag{3.22}$$

Se observa que la métrica (3.22) en el plano χ-τ tiene una estructura de la métrica en coordenadas polares, por eso se puede inferir que la coordenada τ posee período $8\pi M$, es decir:

$$\beta = 8\pi M, \tag{3.23}$$

Por tanto, la energía y entropía para la solución de Schwarzschild son:

$$E = M, \tag{3.24}$$

$$S = \frac{1}{4}A, \tag{3.25}$$

donde se ha obtenido la equivalencia masa-energía y la entropía de Bekenstein-Hawking.

3.2.2 Solución BTZ

La solución BTZ esta descrita por la métrica:

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2} - 8M\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{l^2} - 8M\right)} + r^2 d\theta^2. \tag{3.26}$$

El espacio tiempo BTZ se caracteriza porque el escalar de Ricci toma el valor de $\mathscr{R} = -\frac{6}{l^2}$, la constante cosmológica es $\Lambda = -\frac{1}{l^2}$ y el horizonte de eventos se encuentra en $r_H = \sqrt{8M}l$. En este caso, el primer término de la ecuación (3.4) esta dado por:

$$-\frac{1}{16\pi}\int d^3x_E\sqrt{g_E}\left(\mathscr{R} - 2\Lambda\right) = -\frac{1}{16\pi}\int_0^{\beta}\int_{r_H}^{R}\int_0^{2\pi} d\tau dr d\theta r\left(-\frac{4}{l^2}\right), \tag{3.27}$$

$$-\frac{1}{16\pi}\int d^3x_E\sqrt{g_E}\left(\mathscr{R} - 2\Lambda\right) = \frac{1}{4l^2}\beta\left(R^2 - 8Ml^2\right). \tag{3.28}$$

Para calcular el segundo término de (3.4) se calcula la traza de la cuvatura extrínseca K y para eso se euclidianiza la métria BTZ, es decir, se hace $t \to i\tau$ en (3.26) para obtener:

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{l^2} - 8M\right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{l^2} - 8M\right)} + r^2 d\theta^2. \tag{3.29}$$

Considerando la hipersuperficie $\Phi := \frac{r^2}{l^2} - 8M$ y usando la expresión (3.10) se determina el vector normal n dado por:

$$n = \sqrt{\frac{r^2}{l^2} - 8M}\partial_r. \tag{3.30}$$

Entonces, usando (3.13) se logra determinar que la traza de la curvatura extrínseca K es:

$$K = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R^2}{l^2} - 8M} + \frac{R}{l^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{l^2} - 8M}}. \tag{3.31}$$

Por lo cual, el segundo término de (3.4) es:

$$\frac{1}{8\pi}\int d^3x_E \sqrt{h_E} K = \frac{1}{8\pi}\int_0^{\beta}\int_0^{2\pi} d\tau d\theta \sqrt{\frac{R^2}{l^2} - 8M} R \left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{R^2}{l^2} - 8M} + \frac{R}{l^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{l^2} - 8M}}\right), \tag{3.32}$$

$$\frac{1}{8\pi}\int d^3x_E \sqrt{h_E} K = \frac{1}{4}\beta\left(2\frac{R^2}{l^2} - 8M\right). \tag{3.33}$$

De las ecuaciones (3.28) y (3.33) se observa que para $R >> 1$ tenemos una divergencia, entonces se propone como contra término el factor $K_0 = \frac{1}{l}$. Entonces:

$$-\frac{1}{8\pi}\int d^3x_E \sqrt{h_E} K_0 = -\frac{1}{8\pi}\int_0^{\beta}\int_0^{2\pi} d\tau d\theta \sqrt{\frac{R^2}{l^2} - 8M} R \left(\frac{1}{l}\right), \tag{3.34}$$

$$-\frac{1}{8\pi}\int d^3x_E \sqrt{h_E} K_0 \approx -\frac{1}{4}\beta\left(\frac{R^2}{l^2} - 4M\right). \tag{3.35}$$

Por consiguiente, la acción gravitacional euclidianizada para el caso de la solución BTZ es $\mathscr{A}_E$:

$$\mathscr{A}_E = \frac{1}{4l^2}\beta\left(R^2 - 8Ml^2\right) - \frac{1}{4}\beta\left(2\frac{R^2}{l^2} - 8M - \frac{R^2}{l^2} + 4M\right), \tag{3.36}$$

$$\mathscr{A}_E = -\beta M. \tag{3.37}$$

Para encontrar la relación entre β y M se realiza la transformación $\chi := \frac{l^2}{r_H}\left(\frac{r^2}{l^2} - 8M\right)^{1/2}$ en (3.29) para obtener:

$$ds^2 = \frac{r_H^2}{l^4}\chi^2 d\tau^2 + \frac{r_H^2}{r^2}d\chi^2. \tag{3.38}$$

Se observa que la métrica (3.38) en el plano χ-τ tiene una estructura de una métrica en coordenadas polares, por eso se puede inferir que la coordenada τ posee período $\frac{2\pi r_H}{8M}$, es decir:

$$\beta = \frac{2\pi r_H}{8M}, \tag{3.39}$$

Por tanto, la energía y entropía para la solución BTZ son:

$$E = M, \tag{3.40}$$

$$S = \frac{1}{4}A, \tag{3.41}$$

donde se ha obtenido la equivalencia de masa-energía y la entropía de Bekenstein-Hawking.

3.2.3 Caparazón negro (black shell)

Asumiendo que la masa del Shell permanezca en el horizonte de eventos BTZ (o cerca a el), dentro del horizonte se tiene una métrica de la forma:

$$ds^2 = -\left(\frac{r}{l}\right)^2 d\tau^2 + \frac{1}{\left(\frac{r}{l}\right)^2}dr^2 + r^2 d\theta^2, \tag{3.42}$$

Para aplicar el método de Gibbons-Hawking se debe tener en cuenta que la integral en r es en el intervalo $(0, r_H)$. El primer término de (3.4) toma la forma de:

$$-\frac{1}{16\pi}\int d^3x_E\sqrt{g_E}\,(\mathscr{R} - 2\Lambda) = -\frac{1}{16\pi}\int_0^{\beta}\int_0^{r_H}\int_0^{2\pi} d\tau dr d\theta r\left(-\frac{4}{l^2}\right), \tag{3.43}$$

$$-\frac{1}{16\pi}\int d^3x_E\sqrt{g_E}\,(\mathscr{R} - 2\Lambda) = \frac{1}{4}\beta 8M. \tag{3.44}$$

El segundo término de (3.4) toma el valor de:

$$-\frac{1}{8\pi}\int d^3x_E\sqrt{h_E}K = \frac{1}{8\pi}\int_0^{\beta}\int_0^{2\pi} d\tau d\theta \frac{r_H^2}{l}\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l}\right), \tag{3.45}$$

$$-\frac{1}{8\pi}\int d^3x_E\sqrt{h_E}K = -\frac{1}{2}\beta 8M. \tag{3.46}$$

Así, se concluye que la acción gravitacional euclidianizada para el caso del caparazón negro es $\mathscr{A}_E$:

$$\mathscr{A}_E = \frac{1}{4}\beta 8M - \frac{1}{2}\beta 8M, \tag{3.47}$$

$$\mathscr{A}_E = -\frac{1}{4}\beta 8M. \tag{3.48}$$

Por tanto, la energía y entropía para el caparazón negro es:

$$E = 0, \tag{3.49}$$

$$S = \frac{1}{4}A, \tag{3.50}$$

donde hemos obtenido la entropía Bekenstein-Hawking.

CONCLUSIONES

A. Se encontró que un campo escalar sobre el espacio tiempo de Schwarzschild se puede expandir en los modos Killing-Boulware y los modos de Hartle-Hawking-Israel, asociados al estado de vacío de Boulware y Hartle-Hawking-Israel, respectivamente. Dichos estados de vacío se relacionan a partir de una transformación de Bogoliubov (sección **1.5**, ecuación 1.43). De esta manera, usando técnicas de WKB cerca del horizonte de eventos se obtuvo que los agujeros negros tienen una distribución de energía Planckiana, es decir, se ha logrado describir la naturaleza térmica intrínseca de un agujero negro eterno de Schwarzschild (sección **1.6**, ecuación 1.85).

B. Se encontró la función de partición de una Teoría de Campos Conformes sobre un toro; con topología $S^1 \times S^1$, haciendo uso de las transformaciones invariantes llamadas invarianzas modulares las cuales permiten parametrizar el toro sobre un espacio complejo $\mathbb{C}$ con el parámetro modular τ (sección **2.2.5**). De esta manera, se logró deducir la entropía térmica de una CFT en 2D en el límite $\Delta \gg \frac{1}{12}c$, llamada ecuación de Cardy.

C. Usando la ecuación de Cardy y las simetrías asintóticas de un espacio tiempo BTZ, las cuales forman un álgebra de Virasoro con carga central $c = \frac{3}{2}l$, se obtuvo la entropía de Bekenstein-Hawking en el límite de altas energías $\Delta \gg \frac{1}{12}c$ (sección **2.3**). Así se concluye que la entropía térmica de una teoría de campos conformes es dual a la entropía de un agujero negro BTZ, entonces, la entropía de un agujero negro es una medida del número de microestados de la CFT.

D. Usando la ecuación de Ryu-Takayanagi se logro obtener la entropía de Entanglement en tres situaciones: un disco en una CFT en tres dimensiones, un espacio tiempo Anti-de Sitter en 3 dimensiones y un agujero negro BTZ euclidiano (sección **2.4**) cuyos resultados coinciden con la entropía calculada de la Teoría de Campos Conformes. En el caso de un agujero negro BTZ euclidiano se utilizó el límite de altas temperaturas $\frac{r_H}{l} >> 1$ para obtener la entropía de Bekenstein-Hawking lo cual es consistente con lo obtenido de la formula de Cardy. Así, la entropía para un agujero negro BTZ en el límite de altas temperaturas es una entropía térmica de entanglement.

E. Empleando la técnica euclidiana de Gibbons-Hawking se obtuvo la periodicidad β y la entropía Bekenstein-Hawking para el espacio tiempo de Schwarzschild euclidiano, el espacio tiempo BTZ euclidiano y un caparazón negro BTZ euclidiano cuyos resultados coinciden con los obtenidos con técnicas de Entanglement. Es importante señalar que la técnica de Gibbons-

Hawking se considera un resultado puramente clásico y las técnicas de Entanglement brindan las correcciones a dicho método. Sin embargo, existen otros enfoques que interpretan el resultado de la técnica de Gibbons-Hawking y la técnica de Entanglement como siendo dos fuentes de entropía complementarias asociados a objetos diferentes, esto se conoce como principio de complementariedad de Mukohyama-Israel. Como perspectiva de este trabajo, se propone profundizar este principio en el contexto de la Teoría de Cuerdas.

REFERENCIAS

[1] Hawking, S. W. (1975). Particle creation by black holes. In Euclidean quantum gravity (pp. 167-188).

[2] Bekenstein, J. D. (1983). Entropy bounds and the second law for black holes. Physical Review D, 27(10), 2262.

[3] Domagala, M., & Lewandowski, J. (2004). Black-hole entropy from quantum geometry. Classical and Quantum Gravity, 21(22), 5233.

[4] Ydri, B. (2017). Lectures on General Relativity, Cosmology and Quantum Black Holes.

[5] Srednicki, M. (1993). Entropy and area. Physical Review Letters, 71(5), 666.

[6] Bombelli, L., Koul, R. K., Lee, J., & Sorkin, R. D. (1986). Quantum source of entropy for black holes. Physical Review D, 34(2), 373.

[7] Terashima, H. (2000). Entanglement entropy of the black hole horizon. Physical Review D, 61(10), 104016.

[8] Emparan, R. (2006). Black hole entropy as entanglement entropy: a holographic derivation. Journal of High Energy Physics, 2006(06), 012.

[9] Hooft, G. T. (1985). On the quantum structure of a black hole. Nuclear Physics B, 256, 727-745.

[10] Susskind, L., & Lindesay, J. (2004). Introduction To Black Holes, Information And The String Theory Revolution, An: The Holographic Universe. World Scientific.

[11] Takahashi, Y., & Umezawa, H. (1996). Thermo field dynamics. International journal of modern Physics B, 10(13n14), 1755-1805.

[12] Israel, W. (1976). Thermo-field dynamics of black holes. Physics Letters A, 57(2), 107-110.

[13] Mukohyama, S., & Israel, W. (1998). Black holes, brick walls, and the Boulware state. Physical Review D, 58(10), 104005.

[14] Tejeiro-Sarmiento, J. M., & Arenas-Salazar, J. R. (2006, June). Black Hole Entanglement Entropy. In AIP Conference Proceedings (Vol. 841, No. 1, pp. 385-388). American Institute of Physics.

[15] Pulido, W., & Arenas, J. R. Dinámica de Campos Térmicos y Agujeros Negros Thermo-fields Dynamics and Black Holes.

[16] Rojas Castillo, W. A. (2018). Mecánica estadística de la termódinamica de black shells. Departamento de Física.

[17] Rojas Castillo, W. A., & Arenas Salazar, J. R. (2020). A Conceptual Model for the Origin of the Cutoff Parameter in Exotic Compact Objects. Symmetry, 12(12), 2072.

[18] Susskind, L. (1995). The world as a hologram. Journal of Mathematical Physics, 36(11), 6377-6396.

[19] Hooft, G. T. (2001). The holographic principle. In Basics and Highlights in Fundamental Physics (pp. 72-100).

[20] Bousso, R. (2002). The holographic principle. Reviews of Modern Physics, 74(3), 825.

[21] Bigatti, D., & Susskind, L. (2001). TASI lectures on the holographic principle. In Strings, branes and gravity (pp. 883-933).

[22] Bak, D., & Rey, S. J. (2000). Holographic principle and string cosmology. Classical and Quantum Gravity, 17(1), L1.

[23] Thorlacius, L. (2004). Black holes and the holographic principle. Note Lectures. arXiv preprint hep-th/0404098.

[24] Itzhaki, N., Maldacena, J. M., Sonnenschein, J., & Yankielowicz, S. (1998). Supergravity and the large N limit of theories with sixteen supercharges. Physical Review D, 58(4), 046004.

[25] Introduction to gauge/gravity duality. In String Theory And Its Applications: TASI 2010 From meV to the Planck Scale (pp. 3-45).

[26] Polchinski, J. (1998). String theory: Volume 1, an introduction to the bosonic string. Cambridge university press.

[27] Penington, G. (2020). Entanglement wedge reconstruction and the information paradox. Journal of High Energy Physics, 2020(9), 1-84.

[28] Zhang, J. L., Cai, R. G., & Yu, H. (2015). Phase transition and thermodynamical geometry for Schwarzschild AdS black hole in AdS 5× S 5 spacetime. Journal of High Energy Physics, 2015(2), 1-16.

[29] Hawking, S., Maldacena, J., & Strominger, A. (2001). DeSitter entropy, quantum entanglement and AdS/CFT. Journal of High Energy Physics, 2001(05), 001.

[30] Pathria, R. K., & Beale, P. D. (2011). Statistical mechanics.

[31] Reif, F. (1969). Física estadística (Vol. 5). Reverté.

[32] Greiner, W., & Reinhardt, J. (2013). Field quantization. Springer Science & Business Media.

[33] Ryder, L. H. (1996). Quantum field theory. Cambridge university press.

[34] Takahashi, Y., & Umezawa, H. (1996). Thermo field dynamics. International journal of modern Physics B, 10(13n14), 1755-1805.

[35] Umezawa, H., Matsumoto, H., & Tachiki, M. (1982). Thermo field dynamics and condensed states.

[36] Khanna, F. C. (2009). Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications.

World Scientific.

[37] De la Torre, L. (2008). Elementos de relatividad. Universidad de Antioquia.

[38] Carroll, S. M. (2019). Spacetime and geometry. Cambridge University Press.

[39] Frolov, V. P., & Zelnikov, A. (2011). Introduction to black hole physics. OUP Oxford.

[40] Blau, M. (2011). Apuntes de clase sobre relatividad general . Berna: Centro Albert Einstein de Física Fundamental.

[41] Griffiths, J. B.,& Podolský, J. (2009). Exact space-times in Einstein's general relativity. Cambridge University Press.

[42] Bañados, M., Teitelboim, C., & Zanelli, J. (1992). Black hole in three-dimensional space time. Physical Review Letters, 69(13), 1849.

[43] Bañados, M., Henneaux, M., Teitelboim, C., & Zanelli, J. (1993). Geometry of the 2+ 1 black hole. Physical Review D, 48(4), 1506.

[44] Francesco, P., Mathieu, P., & Sénéchal, D. (2012). Conformal field theory. Springer Science & Business Media.

[45] Ketov, S. V. (1995). Conformal field theory. World Scientific.

[46] Moore, G., & Seiberg, N. (1989). Classical and quantum conformal field theory. Communications in Mathematical Physics, 123(2), 177-254.

[47] Gaberdiel, M. R. (2000). An introduction to conformal field theory. Reports on Progress in Physics, 63(4), 607.

[48] Hassani, S. (2009). Mathematical methods: for students of physics and related fields (Vol. 2). New York: springer.

[49] Ash, R. B. (2014). Complex variables. Academic Press.

[50] Krantz, S. G., Kress, S., & Kress, R. (1999). Handbook of complex variables. Boston: Birkhäuser.

[51] Năstase, H. (2015). Introduction to AdS/CFT Correspondence. Cambridge University Press.

[52] D. Tong. Lectures on string theory. arXiv: hep-th/0908.0333, 2012.

[53] Petersen, J. L. (1994). Notes on Conformal Field Theory. University of Copenhagen, Niels Borh Institute tryk (1994).

[54] Ginsparg, P. (1988). Applied conformal field theory. arXiv: hep-th/9108028.

[55] Visser, M., Verlinde, E., & Hofman, D. (2014). The emergence of space and gravity from entanglement in AdS3/CFT2. Master thesis, University of Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands.

[56] Michopolus N., (2019). Conformal quantum field theory and black hole entropy. Doctoral dissertation. University of Patras, Grecia.

[57] Karozis, N., (2011). Black Hole Entropy and 2D Confermal Field Theory-Towards Quan-

tum Gravity. Doctoral dissertation, Kobenhavns Universitet. Niels Bohr Institutet.

[58] Gómez R. S., (2017). La fórmula de Cardy Anisotrópica. Disertación Doctoral, Universidad de Talca, Chile.

[59] Brown, J.D., Henneaux, M. Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: An example from three dimensional gravity. Commun.Math. Phys. 104, 207–226 (1986).

[60] A. Strominger, Black hole entropy from near-horizon microstates, JHEP 9802 (1998) 009. arXiv:hep-th/9712251.

[61] Ryu, S., & Takayanagi, T. (2006). Aspects of holographic entanglement entropy. Journal of High Energy Physics, 2006(08), 045.

[62] Ryu, S., & Takayanagi, T. (2006). Holographic derivation of entanglement entropy from the anti–de sitter space/conformal field theory correspondence. Physical review letters, 96 (18), 181602.

[63] Rangamani, M., & Takayanagi, T. (2017). Holographic entanglement entropy. In Holographic Entanglement Entropy (pp. 35-47). Springer, Cham.

[64] Bueno, P., & Myers, R. C. (2015). Corner contributions to holographic entanglement entropy. Journal of High Energy Physics, 2015(8), 1-54.

[65] Casini, H., Huerta, M., Myers, R. C., & Yale, A. (2015). Mutual information and the F-theorem. Journal of High Energy Physics, 2015(10), 1-70.

[66] Casini, H., Huerta, M., & Myers, R. C. (2011). Towards a derivation of holographic entanglement entropy. Journal of High Energy Physics, 2011(5), 1-41.

[67] Susskind, L., & Witten, E. (1998). The holographic bound in anti-de Sitter space. arXiv preprint hep-th/9805114.

[68] Peet, A. W., & Polchinski, J. (1999). UV-IR relations in AdS dynamics. Physical Review D, 59(6), 065011.

[69] Holzhey, C., Larsen, F., & Wilczek, F. (1994). Geometric and renormalized entropy in conformal field theory. Nuclear physics b, 424(3), 443-467.

[70] Calabrese, P., & Cardy, J. (2004). Entanglement entropy and quantum field theory. Journal of statistical mechanics: theory and experiment, 2004(06), P06002.s

[71] Calabrese, P., & Cardy, J. (2009). Entanglement entropy and conformal field theory. Journal of physics a: mathematical and theoretical, 42(50), 504005.

[72] Cadoni, M., & Melis, M. (2010). Entanglement entropy of AdS black holes. Entropy, 12 (11), 2244-2267.

[76] Penrose, R.,& Hawking, S. (2010). The nature of space and time. Princeton University Press.

[77] Hawking, S. W. (1979). Euclidean quantum gravity. In Recent developments in gravitation (pp. 145-173). Springer, Boston, MA.

[78] Gibbons, G. W., & Hawking, S. W. (1993). Action integrals and partition functions in quantum gravity. In Euclidean Quantum Gravity (pp. 233-237).

[79] Hawking, S. W. (1977). Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime. In Euclidean quantum gravity (pp. 114-129).

[80] Cassani, D. (2020). Black Holes and Semiclassical Quantum Gravity.

[81] Arenas Salazar, J. R, (2020). Notas de clase: Agujeros Negros cuánticos. Universidad Nacional de Colombia. Departamento de Física.

[82] Hartman, T. (2015). Lectures on quantum gravity and black holes. Cornell University, 21.