UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Propuesta de enseñanza sobre la modelación de funciones por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto.

Sergio Andrés Caro Acevedo

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2013

Propuesta de enseñanza sobre la modelación de funciones por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto.

Sergio Andrés Caro Acevedo

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Magister Fernando Puerta Ortiz

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2013

En la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo.

George Pólya

Agradecimientos

En la realización de este trabajo, agradezco al coordinador Luis Fernando Escobar Hernández de la Unidad Educativa San Marcos por permitirme aplicar esta propuesta en el grado once, a mi director el magister Fernando Puerta Ortiz, quien fue mi docente en el curso de Funciones y Áreas en la Maestría de Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional, primero por motivarme a trabajar la modelación de funciones por tramos y después por la asesoría brindada la cual fue de gran ayuda y a mis estudiantes del grado once de la Unidad Educativa San Marcos apoyar este proceso de aprendizaje con su buena disposición y aportes en el desarrollo de cada una de las actividades que se implementaron en el proceso de clase.

Resumen

El siguiente trabajo corresponde a una propuesta de enseñanza sobre la modelación de funciones por tramos en el grado once. La propuesta se encuentra mediada mediante el aprendizaje significativo en la cual se pretende que los estudiantes cuando se encuentren un problema de funciones donde se le presenten condiciones, identifiquen el modelo que representa el problema como una expresión algebraica. Dicha identificación se va a realizar a partir de los 4 pasos propuestos por George Pólya para solucionar problemas (comprender el problema, pensar en un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás). La propuesta es aplicada en el grado once de la Unidad Educativa San Marcos en donde se realizara una prueba diagnóstico, luego unas actividades que permitan el aprendizaje de la temática y por último una prueba final. Los resultados de estas pruebas se compararán estadísticamente, evidenciando la pertinencia de las actividades implementadas.

Palabras clave:

Propuesta de enseñanza, funciones por tramos, modelación, expresión algebraica y aprendizaje.

Abstract

The following work is a teaching proposal about modeling of piecewise functions in eleventh grade, the proposal is mediated by meaningful learning, in which we expect that when students encounter a function problem where they are presented conditions, they identify the model the problem represents as an algebraic expression. This identification will be done according to the 4 steps proposed by George Pólya to solve problems (to understand the problem, design, and carry out plan, and look back.) The proposal is applied in eleventh grade at Unidad Educativa San Marcos, in which a diagnosis test will be applied, then some activities to allow the learning process of the subject, and finally a final test. The results of these tests will be compared statistically, in order to demonstrate the relevance of the activities implemented.

Keywords:

Teaching proposal, piecewise functions, modeling functions, algebraic expression and learning.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Lista de Símbolos y abreviaturas

Abreviaturas

Abreviatura	Término
UEPS	Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa

Introducción

Hacer matemáticas no es solamente resolver ejercicios algorítmicos, no es solo sumar, restar, multiplicar o dividir. Hacer matemáticas implica recorrer un camino, sortear obstáculos mientras se construyen caminos de solución. Estos caminos nos deben llevar como maestros a formar hombres competentes que sean capaces de responder a las necesidades que la sociedad y el medio ambiente impongan, permeados por la ciencia y la tecnología. Desde el área de matemáticas se pretende formar un hombre que sea capaz de interpretar la información que hay a su alrededor tanto económica, política, social, que le permita tener criterios para la toma de decisiones, un hombre que sepa resolver problemas.

Es necesario entonces crear un ambiente propicio para lograr el aprendizaje significativo de las matemáticas, lo que implica una reorganización de su red conceptual, al replanteamiento de estrategias, métodos y metodologías de los procesos de enseñanza y aprendizaje que posibilite a nuestros estudiantes atribuir un significado a la simbolización que esta ciencia conlleva.

Gran parte de esta responsabilidad recae sobre nosotros los maestros. Sin duda dice el profesor Grimaldo Oleas Liñan:

"Los culpables de este miedo irracional somos los mismos docentes debido a que o no sabemos enseñar o no conocemos bien lo que vamos a enseñar o le metemos miedo al aprendizaje de la materia. Y si somos los culpables, también somos los responsables de que esa situación se corrija"[1].

Por esto, y reconociendo mi responsabilidad como maestro voy a realizar la presente monografía la cual es una propuesta de enseñanza para el aula, dirigida a promover, inicialmente en el área de Matemáticas del grado 11° de la unidad Educativa San Marcos, propuesta que está enfatizada a la enseñanza de la modelación de funciones por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto.

---

[1] Periódico Alma Mater Edición No. 611 Julio 2012 páginas 16-17. Universidad de Antioquia

Una de las temáticas más importantes a la hora de estudiar cálculo son las funciones, temática en la cual los estudiantes aprenden su concepto, dominio, rango, gráficas, características, etc. No se puede dudar que estos conceptos son muy importantes para el estudio de esta temática, son bases y pilares fundamentales, pero pienso que en el estudio del cálculo es fundamental la modelación de funciones, y todo lo que lo relaciona a ella, pero a partir de mi experiencia he notado que cuando se llega al momento de modelarlas, los estudiantes tienen muchas dificultades, una de ellas es el miedo a los problemas resistiéndose a trabajarlos, por esta razón debemos motivarlos brindándoles las estrategias que los lleven a realizar interpretaciones para hacer una modelación de situaciones problemas.

Como fundamento teórico se presenta la psicología cognitiva, buscando que los estudiantes pierdan el miedo por las matemáticas, en especial por los problemas; también se presenta una teoría de aprendizaje, la cual es el aprendizaje significativo de David Ausubel, donde se espera alcanzar un aprendizaje significativo a partir de la implementación de una unidad de enseñanza potencialmente significativa[2] de Marco Antonio Moreira. Por ultimo como referente teórico trabajamos con la teoría de George Pólya, donde trabajaremos las 4 reglas (comprender el problema, pensar en un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás) para solucionar problemas.

En el trabajo final se realiza un diseño teórico el cual contiene el planteamiento del problema que describe la dificultad que tienen los estudiantes a la hora de realizar un modelo de funciones por tramos. Esta dificultad nos lleva a plantear un objetivo el cual se alcanzará realizando las tareas de investigación propuestas en este trabajo; para realizar estas tareas se propone una metodología que consiste en realizar una prueba diagnóstico, la UEPS y una prueba final, para que finalmente se tengan unos resultados que se puedan comparar estadísticamente y se pueda realizar un análisis que permita determinar si se cumplió el objetivo propuesto.

[2] El concepto de unidad de enseñanza potencialmente significativa será abreviado por la palabra UEPS.

1. Diseño teórico

El presente trabajo final de maestría parte de una necesidad, que como docente he tenido de la experiencia, al tratar de enseñar la modelación de funciones, en especial donde se presentan diferentes condiciones, evidenciada en el siguiente planteamiento del problema:

1.1 Planteamiento del problema

Las estrategias de enseñanza sobre algunos conceptos e interpretaciones de la modelación de funciones por tramos, en el grado once, de la unidad educativa San Marcos del municipio de Envigado, no permite el paso de lo concreto a lo abstracto cuando se está trabajando con problemas de funciones. Se hace necesario entonces revisar dicha estrategia y plantear otra que posibilite ese paso conceptual.

Lo anterior se fundamenta en el hecho que, en el aula, al presentarles a los estudiantes el enunciado de un problema de funciones por tramos, primero el estudiante vive prevenido y con temor a los problemas y segundo le cuesta identificar la expresión algebraica que representa el enunciado del problema. A partir de esta necesidad se establece el siguiente objetivo.

1.2 Objetivo

Elaborar, aplicar y evaluar una UEPS en los estudiantes de grado undécimo de la Unidad Educativa San Marcos de Envigado, en donde se brinde estrategias que permitan modelar funciones por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto.

El anterior objetivo se plantea con el fin de responder la siguiente pregunta de investigación.

1.3 Pregunta de investigación

¿Qué estrategias de enseñanza sobre algunos conceptos e interpretaciones de la modelación de funciones por tramos permite a los estudiantes el paso de lo concreto a lo abstracto cuando se está trabajando con problemas de funciones?

Para responder esta pregunta se establecen unas tareas muy concretas, de las cuales se tendrá evidencia de cada una de ellas, puesto que se anexará el formato de cada actividad, e imágenes que indican su aplicación en el aula, así como también la estadística con la comparación de resultados entre la prueba diagnóstico y la prueba final. De acuerdo a esto, se presenta entonces las siguientes tareas de investigación.

1.4 Tareas de Investigación

- Realizar una prueba diagnóstico que permita determinar las fortalezas o dificultades que tienen los estudiantes a la hora de realizar el modelo de una función por tramos.

- Elaborar actividades y estrategias que permitan que el estudiante no le tenga miedo a los problemas en matemáticas.

- Elaborar actividades que permitan identificar los conceptos previos que tiene un estudiante a la hora de elaborar el modelo de una función.

- Realizar actividades que facilite la abstracción y el aprendizaje en la identificación de un patrón que nos permita encontrar una expresión algebraica y se pueda determinar el modelo que represente el problema.

- Realizar una prueba final que permita evidenciar las fortalezas que adquirió el estudiante con las actividades trabajadas.

- Realizar un análisis estadístico entre la prueba diagnóstico y la prueba final que permita identificar si las actividades realizadas fueron pertinentes para alcanzar el objetivo.

2. Marco teórico

Partiendo del problema de investigación y con base en algunos referentes teóricos y conceptuales, es importante abordar el trabajo de investigación teniendo como punto de partida una sólida perspectiva teórica, que haga explícitos los conceptos y supuestos que contribuyeron a esta monografía. Este marco referencial tiene precisamente como propósito: dar a la propuesta un sistema coordinado y coherente de conceptos y proposiciones que permitan abordar el problema.

El cometido que cumple el marco referencial es, situar el problema dentro de un conjunto de conocimientos sólidos y confiables que permitan orientar mi búsqueda y me ofrezca una conceptualización adecuada de las teorías y los términos que utilizamos, ya que las teorías son fundamento o la base que llevará a conclusiones verdaderas y útiles en la práctica. El punto de partida para construir los referentes teóricos lo constituye mi conocimiento previo de las temáticas que abordo y las enseñanzas que mi experiencia como docente me ha brindado.

2.1 Una mirada desde la psicología cognitiva

A través de la historia, la psicología cognitiva[3] ha ido evolucionando; en sus inicios se trataba bajo un enfoque asociacionista en el cual el objetivo general era el paradigma psicológico estimulo-respuesta para la obtención de leyes elementales del comportamiento y el aprendizaje, y su extensión a situaciones más complejas. Las deducciones sobre estas leyes estaban vinculadas estrechamente a un comportamiento observado. En este enfoque buscaba principalmente estudiar la memoria, el pensamiento y la solución de problemas.

[3] BRUNING, Roger. GREGORY, Schraw. ROYCE, Ronning. Psicología cognitiva e instrucción. Madrid. Editorial Alianza editorial, 2002. p. 18

Casi a finales del periodo asociacionista, los conductistas, encabezados por Skinner, causaron un fuerte impacto tanto en la psicología como en la Educación. Para estos los estudiantes parecían aprender como una tabula rasa, sujetos al condicionamiento de su entorno, rechazando la idea de que el propósito de psicología fuera estudiar la conciencia, y se afirmó que el objetivo de una psicología científica era predecir y controlar la conducta. Pero, muchos psicólogos que estaban interesados en los procesos mentales, se frustraron cuando intentaron utilizar los marcos teóricos asociacionistas y los conceptos conductistas para describir la complejidad de la memoria humana, el pensamiento, la solución de problemas, la toma de decisiones y la creatividad. Fue entonces cuando en 1956 y 1960 con la aparición de los enfoques de enseñanza por descubrimiento (Jerome Bruner) y aprendizaje significativo (David Ausubel) que se retomaron algunos aspectos de los mismos para lograr brindar una explicación a todos estos aspectos, entre los cuales se destacan las estructuras mentales y los marcos organizativos, que le brindan al sujeto la posibilidad de organizar su conocimiento para retomarlo en las situaciones de su vida diaria.

Hoy en día, lo cognitivo es muy importante en un proceso académico, pero no se puede entender como el acto de conocimiento, como acciones de almacenar, recuperar, reconocer, comprender, organizar y usar la información recibida a través de los sentidos. Por esta razón en la propuesta me quiero centrar en la psicología cognitiva como un acto que estudia los procesos de pensamiento y la elaboración de información de ideas, llamando a estas elaboraciones, percepciones y procesos como cognitivo. De esta forma, los fenómenos cognitivos son el centro de la sintomatología, ocupándose de analizar las interacciones entre cognición y emoción, de lo cual tomare bases sólidas para abarcar la propuesta.

2.1.1 La psicología cognitiva en la enseñanza y el aprendizaje

La psicología cognitiva en la enseñanza y el aprendizaje[4] se basa en 7 reglas fundamentales las cuales son:

1. *El aprendizaje es un proceso constructivo no receptivo:* el aprendizaje es el resultado de la interacción entre lo que los estudiantes ya saben, la información que reciben y lo que hacen mientras aprenden. Aprendizaje no es tanto la adquisición de conocimientos y destrezas como la construcción de significado por parte del

[4] Ibid., p. 23

estudiante. El conocimiento se crea sobre la base del aprendizaje previo, no es una simple adquisición. Lo que motiva la búsqueda es la “búsqueda de significados”.

2. *Los marcos mentales organizan la memoria y guían el pensamiento:* los esquemas son marcos mentales que utilizamos para organizar el conocimiento. Dirigen la percepción y la atención, permiten la comprensión y guían el conocimiento.

3. *La práctica extendida es necesaria para desarrollar destrezas cognitivas:* los procesos automatizados en la atención, la percepción, la memoria y la resolución de problemas nos permiten realizar tareas cognitivas complejas suavemente, de forma rápida, sin problemas y sin prestar atención a los detalles.

4. *El desarrollo de la autoconciencia y la autorregulación son críticos para el crecimiento cognitivo:* al avanzar en sus años de escolarización, los estudiantes, normalmente llegan a ser más conscientes de sus propias habilidades para recordar, aprender y resolver problemas, y más estratégicos en su aprendizaje, más capaces de controlar su propio aprendizaje, pensamiento y resolución de problemas.
   Aunque el conocimiento y las destrezas son importantes, pueden serlo más las estrategias de aprendizaje de los estudiantes y su habilidad para pensar sobre lo que han aprendido, pensar críticamente.

5. *La motivación y las creencias son parte integrante de la cognición:* la teoría y la investigación sobre constructos como la autoeficacia, las expectativas de resultados y el aprendizaje autorregulado han demostrado que los individuos juzgan constantemente su propio rendimiento y lo relacionan con los resultados esperados. Estos juicios son parte integrante de que se intente hacer una tarea, se termine o se repita. Aprender de forma satisfactoria no implica sólo la comprensión del contenido sino aprender a ser un estudiante reflexivo, autorregulado, motivado y activo.

6. *La interacción social es fundamental para el desarrollo cognitivo:* la interacción con los compañeros da a los estudiantes la oportunidad de encontrar ideas y percepciones que difieren de las suyas; a partir de esos intercambios puede construirse un nuevo conocimiento.

7. *El conocimiento, las estrategias y la pericia son contextuales:* los hechos son inherentes situacionales, ocurren en contextos que incluyen otros hechos y adquieren parte o gran parte de su significado de esos contextos.

Aprendizaje y memoria, al contrario de lo que parece, no son un producto que pueda fabricar una máquina con una entrada y una salida, sino algo que los estudiantes construyen en un contexto social, a partir de su conocimiento previo, sus intenciones y las estrategias que usan.

Por último, si describimos bien los conceptos de la psicología cognitiva y los organizamos en forma temática, se podrá ver bien su considerable poder para la educación. No sólo puede ayudarnos a conceptualizar los objetivos de la educación en términos cognitivos sino que también nos ayuda en la formación de estudiantes altamente motivados y capacitados.

2.2 El aprendizaje significativo

La propuesta que voy implementar se encuentra basada en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel, en donde mi propósito es dejar la enseñanza conductista que se realiza en el área de matemáticas y comenzar a realizar una enseñanza constructivista, donde se realice un cambio en el proceso de enseñanza y se logre obtener un aprendizaje significativo, en donde la idea más importante de la teoría de Ausubel se puede resumir en la siguiente proposición:

"Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, diría lo siguiente: el factor aislado más importante que influye en el aprendizaje, es aquello que el aprendiz ya sabe. Averígüese esto y enséñese de acuerdo con ello"[5]*.*

Ausubel en su frase “aquello que el aprendiz ya sabe” se refiere a la estructura cognitiva y al contenido de sus ideas, en este caso en el área de matemáticas, estructura e ideas las cuales debíeron aprenderse de manera significativa, no de una manera arbitraria o literal. En “averígüese esto” es que como docentes debemos conocer los conceptos e ideas que tiene nuestros estudiantes. Finalmente, "enséñese de acuerdo con ello" es que al conocer los conceptos e ideas, se logre identificar los conceptos organizadores básicos de lo que se va a enseñar y se utilicen recursos que faciliten el aprendizaje de manera significativa.

El aprendizaje significativo es el concepto más importante en la teoría de Ausubel, en donde se pretende que la nueva información que va adquiriendo el estudiante vaya interactuando con su estructura cognitiva, en especial con el subsumidor. El "subsumidor" es, por lo tanto, un concepto, una idea, una proposición ya existente en la estructura

---

[5] MOREIRA, Marco Antonio. Aprendizaje significativo: teoría y práctica. Madrid: Editorial Aprendizaje Visor, 2000. p. 9

cognitiva capaz de servir de "anclaje" para la nueva información de modo que ésta adquiera, de esta manera, significado para el individuo.[6]

Por lo tanto podemos decir que el aprendizaje significativo se da por una interacción (no una simple asociación) entre la estructura cognitiva y las nuevas informaciones logrando que estas adquieran significado en la estructura cognitiva no de una manera arbitraria ni literal.

Ausubel no solamente nos define el aprendizaje significativo, también nos habla de un aprendizaje mecánico (o automático), y si el aprendizaje significativo se aprende a partir de interacciones, el mecánico aprende prácticamente sin interacción con conceptos relevantes existentes en la estructura cognitiva, sin ligarse a conceptos subsumidores específicos. O sea, la nueva información es almacenada de manera arbitraria y literal, sin relacionarse con aquella ya existente en la estructura cognitiva y contribuyendo poco o nada a su elaboración y diferenciación.[7]

Ausubel aclara que la distinción entre el aprendizaje significativo y mecánico no se puede confundir con el aprendizaje por descubrimiento y por recepción, ya que en el receptivo se le presenta al estudiante en su forma final, y en el descubrimiento, el objeto de aprendizaje debe ser descubierto por él mismo; pero el hecho que lo haya descubierto no quiere decir que haya una interacción entre los conceptos nuevos con los subsumidores en la estructura cognitiva, por ende no se puede hablar que sea significativo.

Por lo tanto, una de las condiciones para que se de el aprendizaje significativo es que el material que va a ser aprendido sea relacionable (o incorporable) a la estructura cognitiva del estudiante, de manera no arbitraria y no literal. Un material con esa característica es potencialmente significativo.[8]

Para que el material sea potencialmente significativo, deben existir subsumidores, y cabe preguntarnos ¿De dónde vienen los primeros subsumidores? Estos ocurren de manera gradual e idiosincrática, en cada individuo a través del proceso de formación de conceptos (en niños pequeños) y luego por la asimilación de conceptos. Para lograr que los subsumidores sirvan de anclaje en el aprendizaje, Ausubel propone el uso de organizadores previos[9] los cuales son materiales introductorios, presentados antes del

[6] Ibid., p. 11
[7] Ibid., p. 12
[8] Ibid., p.15
[9] Ibid., p. 18

propio material que va a ser aprendido, donde su principal función es de servir de puente entre lo que el estudiante sabe y lo que necesita saber para lograr un aprendizaje significativo.

Ausubel distingue tres tipos de aprendizaje significativo[10]:

- El **aprendizaje representacional** que es el más básico de los aprendizajes significativos del que dependen los demás, ya que este es el que determina el significado entre un símbolo y un referente.

- El **aprendizaje de conceptos** es, en cierta forma, un aprendizaje representacional, pues los conceptos son, también, representados por símbolos particulares, pero son genéricos o categóricos dado que representan abstracciones de los atributos criteriales (esenciales) de los referentes, es decir, representan regularidades en objetos o eventos.

- En el **aprendizaje proposicional**, al contrario del representacional, la tarea no es aprender significativamente lo que representan palabras aisladas o combinadas, sino aprender el significado de ideas en forma de proposición.

También existen otros aprendizajes como el aprendizaje subordinado, el superordenado y el combinatorio.

El **Aprendizaje subordinado**[11] es aquel que refleja una relación de subordinación del nuevo material en relación a la estructura cognitiva preexistente. Ausubel se refiere a este proceso como "subsunción" ya que implican la subsunción de conceptos y proposiciones potencialmente significativos bajo ideas más generales e inclusivas ya existentes en la estructura cognitiva.

Se pueden distinguir dos tipos de aprendizaje subordinado: **derivativo** que es aquel que se produce cuando el material aprendido es entendido como un ejemplo específico de un concepto que se encuentra establecido en la estructura cognitiva de la persona; mientras que el **correlativo** es aquel en el que el nuevo material se aprende como una extensión,

[10] Ibid., p. 20
[11] Ibid., p. 27

elaboración, modificación o calificación de conceptos o proposiciones previamente aprendidas.

El **Aprendizaje superordenado** es el aprendizaje que se da, cuando un concepto potencialmente significativo, es más general que los que se encuentran en la estructura cognitiva y que además de la elaboración de los conceptos subsumidores, es también posible que ocurran interacciones y asimilaciones entre esos conceptos.

El **Aprendizaje combinatorio** es el aprendizaje de proposiciones o conceptos que no guardan una relación de subordinación o de superordenación con otros específicos pero sí con contenido amplio existente en la estructura cognitiva. Esto es, la nueva proposición no puede ser asimilada por otras ya establecidas en la estructura cognitiva ni es capaz de asimilarlas.

A lo largo de la teoría, hemos visto que el aprendizaje significativo se logra cuando un concepto nuevo interactúa con los subsumidores (aprendizaje subordinado) los cuales son también modificados. Cuando esto ocurre en varias oportunidades hablamos de una **diferenciación progresiva**[12] del concepto de subsumidor ya que este se encuentra constantemente elaborado o modificado; por otro lado, en el aprendizaje superordenado (o en el combinatorio), ideas que se encuentran en la estructura cognitiva, mientras se adquiere nuevos aprendizajes, se pueden reconocer como ideas relacionadas, donde los nuevos conceptos son adquiridos mientras que los ya existentes se reorganizan y pueden adquirir nuevos significados, esto es lo que Ausubel denomina **reconciliación integrativa**.

Esos son, por lo tanto, dos procesos relacionados que se desarrollan durante el aprendizaje significativo, el primero (diferenciación progresiva) más relacionado con el aprendizaje subordinado, y el segundo (reconciliación integrativa), con los aprendizajes superordenado y combinatorio.

[12] Ibid., p. 31

2.2.1 Unidades de enseñanza potencialmente significativas – UEPS

Para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes de la Unidad Educativa San Marcos del grado undécimo sobre la modelación de funciones por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto, se propone la construcción de una secuencia didáctica fundamentada en teorías de aprendizaje, particularmente la del aprendizaje significativo David Ausubel, esa construcción es la que Marco Antonio Moreira plantea en su documento[13] *"unidades de enseñanza potencialmente significativas – UEPS",* en donde nos sugiere los siguientes pasos para su construcción:

1. Definir el tema específico que será abordado.

2. Crear y proponer situaciones como una discusión o situación problema que lleve al estudiante a exteriorizar su conocimiento.

3. Proponer como introducción una situación problema donde se tenga en cuenta los conceptos previos del estudiante, que sirvan como preparación para la introducción del nuevo conocimiento. Estas situaciones pueden ser un organizador previo, las cuales les dará sentido a los nuevos conocimientos. Puede ser un video o una situación cotidiana, lo importante es que sea siempre de modo accesible y problemático, es decir, no como ejercicio de aplicación rutinaria de algún algoritmo.

4. Cuando se trabajen las situaciones iniciales, se presenta el nuevo conocimiento, teniendo en cuenta la diferenciación progresiva, en donde se comience con aspectos generales hasta llegar a lo especifico.

5. Se retoman los aspectos más generales, lo que se pretende enseñar en la unidad de enseñanza pero con un nivel más alto de complejidad que los trabajados en el punto 4, en donde se propongan en niveles crecientes de complejidad y se realicen semejanzas o diferencias con relación a las situaciones ya trabajadas, promoviendo la reconciliación integradora. Luego hay que proponer alguna otra actividad colaborativa que lleve a los estudiantes a interactuar socialmente,

[13] MOREIRA, Marco Antonio. Unidades de enseñanza potencialmente significativas-UEPS [en línea]. < http://www.if.ufrgs.br/~moreira/UEPSesp.pdf > [citado en mayo 28 de 2013]

negociando significados, contando con el profesor como mediador; esta actividad puede ser la resolución de problemas, la construcción de un mapa conceptual o un diagrama V.

6. Para concluir la unidad se da continuidad al proceso de diferenciación progresiva retomando las características más importantes del tema buscando la reconciliación integradora. Este paso se puede realizar mediante una nueva presentación de los significados que puede ser mediante una exposición, lectura, recurso computacional, audiovisual, etc. resaltando que lo importante no es la estrategia sino el modo de trabajar el tema de la unidad. Después se debe proponer nuevas situaciones-problema más complejas las cuales se deben resolver en pequeños grupos y presentarlas o discutirlas en el grupo mediante la mediación del docente.

7. La evaluación de la UEPS debe ser constante a medida que se vaya trabajando, sistematizando todo lo que pueda ser considerado evidencia de aprendizaje significativo del contenido de la misma; se debe hacer una evaluación sumativa después del sexto paso, en donde se propongan situaciones que impliquen comprensión y capacidad de transferencia.

8. La UEPS será considerada exitosa si la evaluación del desempeño de los alumnos suministra evidencias de aprendizaje significativo (captación de significados, comprensión, capacidad de explicar, de aplicar el conocimiento para resolver situaciones problema).

2.3 Modelo de George Pólya para resolver problemas

En muchas oportunidades, las clases de matemáticas no son las más apropiadas para crear un pensamiento reflexivo, más bien creamos un pensamiento mecánico debido a que nosotros como docentes caemos en el error de simplemente resolver ejercicios, donde a partir de un proceso rutinario se llega a una respuesta y no trabajamos problemas porque los estudiantes al ver un problema, ven un gran problema. No hay que desmeritar a los procesos algorítmicos, ya que son importantes a la hora de resolver un problema, pero se debe comenzar a formar estudiantes que no solo sean repetitivos, sino que en matemáticas aprendan a cuestionar, a reflexionar sobre cómo llegar a la solución de un problema.

Poco a poco se debe quitar esa mentalidad en los estudiantes, es una gran labor de nosotros los docentes, y para lograrlo se debe tener estrategias que permitan resolver problemas, en este caso, problemas de funciones por tramos. Por tal razón mi propuesta tiene como referente a George Pólya, un gran matemático que nació en Budapest el 13 de diciembre de 1887 y murió en Palo Alto, California el 7 de septiembre de 1985.

Sus investigaciones penetraron en diferentes áreas de la matemática, entre ellas, el análisis complejo, la teoría analítica de los números, teoría de probabilidades, geometría, combinatoria y matemáticas aplicadas. Su postulado era: “Hacer Matemáticas es resolver problemas”.

Pólya era muy claro al decir que un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad de transformar la enseñanza de las matemáticas. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matar en ellos el interés e impedirá su desarrollo intelectual, pero que si por el contrario pone a prueba la curiosidad de sus estudiantes planteándoles problemas acorde a ellos y los guía para encontrar su solución, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello[14].

El propósito de Pólya es que en la escuela en lugar de enseñar algoritmos y dar ejercicios repetitivos, se den muchos más problemas para resolver, con el propósito de no solo buscar soluciones, sino crear un pensamiento donde el estudiante justifique los procesos utilizados a la hora de enfrentar una situación problema.

Por esta razón es importante que el estudiante se sienta motivado, y una de las formas de conseguirlo es demostrándole qué aplicación tienen las matemáticas en su entorno, escogiendo un problema adecuado, que no sea ni muy difícil ni muy fácil, que a la hora de leerlo se vea interesante, y demostrarle que la resolución de problemas es un instrumento magnífico para dar oportunidades de desarrollar habilidades intelectuales, de autonomía, de pensamiento, estrategias, para que aprendan a enfrentarse a situaciones complejas.

Para lograr este propósito, Pólya presentó un esquema general para la solución de problemas. El esquema se descompone en cuatro fases[15]:

1. Comprender el problema.
    - ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?

[14] POLYA, George. Como plantear y resolver problemas. México: Editorial Trillas, 1984. p. 7.
[15] Ibid ., p.19

- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

2. Pensar en un plan:

- Trate de reconocer algo familiar.
- Trate de reconocer algún patrón.
- Ensayo y error.
- Utilice la analogía.
- Introduzca algo adicional.
- Divida en casos.
- Trabaje hacia atrás.
- Establezca objetivos parciales.
- Razonamiento indirecto.
- Inducción matemática.
- Usar un modelo.

3. Ejecute el plan.

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

4. Examinar la solución obtenida (visión retrospectiva).

- Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?

El propósito de implementar estas cuatro fases es el de brindarle a los estudiantes una estrategia o metodología para poder resolver problemas, ya que una de las tareas importantes de nosotros los docentes es ayudar a nuestros estudiantes, no resolver el trabajo de ellos, sino realizar una acompañamiento para que ellos puedan realizar un trabajo razonable.

Es importante estar motivando continuamente al estudiante, el manifestarles que cuando se está encontrando la solución de un problema, se puede tener varias discusiones, varios puntos de vista, el cual puede cambiar nuevamente cuando se está a punto de lograr la solución, pero esta es la única forma de aprender matemáticas, empantanándose en este mundo tan maravilloso, y si en algún momento el estudiante sigue presentando dificultad, el maestro debe mantener al menos la ilusión del trabajo personal, ayudándole al estudiante discretamente hasta lograr desarrollar la habilidad del alumno de tal modo que pueda resolver por sí mismo los problemas, lo importante es que él nunca desfallezca.

Por esta razón Pólya nos sugiere las cuatro fases mencionadas anteriormente en donde nos dice que primero tenemos que comprender el problema, es decir, ver claramente lo que se pide. Segundo tenemos que captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que liga a la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan. Tercero poner en ejecución el plan. Cuarto, volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla.[16]

Hay que concientizar a nuestros estudiantes sobre lo importante que es tener en cuenta las cuatro fases, ya que es una estrategia que posibilita ir verificando cada paso realizado y de esta forma poder alcanzar grandes logros. Es importante revisar la solución con la visión retrospectiva, para verificar que ésta se encuentra correcta, ya que reconsiderando la solución y el camino que los llevo a ella se están consolidando los conocimientos y las aptitudes para resolver problemas.

Algo importante que se debe tener en cuenta a la hora de trabajar las cuatro fases es la motivación constante a los estudiantes, por ejemplo si en la fase 4 (visión retrospectiva) no se adquiere el resultado esperado, es decirle que no tenga miedo de volver a empezar, que realice una pausa ya que un comienzo fresco puede llevar al objetivo.

[16] Ibid., p. 28

3. Metodología

La metodología de la propuesta de enseñanza se basa en unas actividades que se presentan a continuación, donde se indica por qué se diseñaron y aplicaron en el aula con el fin de lograr el objetivo y responder a la pregunta de investigación. En el trabajo se anexa cada actividad que se realizó con los estudiantes del grado once en la Unidad Educativa San Marcos acompañado de sus respectivas imágenes que evidencian su aplicación (Ver anexos).

3.1 Prueba diagnóstico

Esta prueba se encuentra diseñada por 8 problemas de funciones por tramos distribuidos de la siguiente manera: 4 problemas que contiene tramos de funciones lineales, 2 que contienen tramos de funciones cuadráticas y 2 que contiene tramos de funciones parte entera. Los estudiantes debían realizar el modelo que representara la situación problema, en donde ellos a partir de un patrón identificaran la expresión algebraica que ayudara a determinar el modelo.

Cada problema tenía un grado de dificultad diferente, algunos se realizaban con dos tramos, otros con tres, en algunos se tenía que tener en cuenta el máximo valor que adquiere el primer tramo para tenerlo en cuenta al inicio del segundo tramo, en otros no era necesario, todo dependía de las condiciones que se presentaran en el problema.

El propósito era identificar las fortalezas y las dificultades que tenían los estudiantes sobre la modelación de funciones por tramos y observar si tenían alguna estrategia que les permitiera llegar al modelo.

El formato de la prueba fue el siguiente:

UNIDAD EDUCATIVA SAN MARCOS

"Educando en valores a la luz del Evangelio"

PRUEBA DIAGNÓSTICA MODELACIÓN DE FUNCIONES POR TRAMOS

GRADO ONCE

NOMBRE: **GRUPO:**

1. Un museo cobra la entrada a grupos de acuerdo con las siguientes condiciones: los grupos con menos de 50 personas pagan \$3500 por persona. Mientras que los grupos de 50 personas o más pagan una tarifa reducida de \$3000 por persona.

a) Exprese el valor a pagar de un grupo como una función de la cantidad de personas que componen el grupo.
b) ¿Cuánto dinero ahorrará un grupo de 49 personas si incluyen una persona adicional?

2. Un nuevo plan de telefonía celular cobra \$1500 por cada 15 minutos o fracción en la duración de la llamada y si la llamada dura más de una hora el costo será únicamente de \$7500. Representa el modelo y la gráfica que establezca el cobro de la llamada.

3. A fin de regular el consumo de electricidad la alcaldía de una ciudad fijó las siguientes tarifas: Por los primeros 200 KWh se pagará a \$300 el KWh, por los siguientes 400 KWh se pagará a \$500 el KWh y cada KWh adicional costará \$800. Exprese el valor de la factura como una función de la cantidad de KWh consumidos al mes.

4. En un parqueadero, el cobro de los usuarios por un automóvil se realiza de la siguiente manera: \$3000 de cobro por la primera hora y por cada hora adicional hasta tres horas se rebaja \$500; más de tres horas tiene un costo fijo de \$9000 hasta que cumpla el día en el parqueadero. Realiza un modelo de la función que represente el costo que debe pagar un usuario en función del número del tiempo t que utiliza el servicio.

5. Al elevarse el aire seco se expande y al hacerlo se enfría a una tasa de aproximadamente 1^0C por cada 100 metros de altura, hasta aproximadamente 8 Km. Más de 8 Km se enfría a una tasa de 2^0C.

a) Si la temperatura a nivel del suelo es de 20^0C, escriba un modelo que represente la temperatura a una altitud h.
b) ¿Qué temperatura se espera si un aeroplano despega y alcanza una altura de 5 km? ¿Cuál sería la temperatura si alcanza una altura de 8,5 Km?

6. En un teatro con capacidad para 800 personas se presenta cierta obra a determinado colegio, bajo las siguientes condiciones: cobra a cada estudiante \$10.000 hasta llenar la cuarta parte de los cupos. Si la demanda es de más de la cuarta parte, por cada estudiante adicional, se hace una rebaja de \$25 a todos y cada uno de los asistentes. Hallar la cantidad C de dinero que el teatro recauda en términos del número x de estudiantes asistentes de tal manera que no dé pérdidas.

7. Supongamos que en una huerta, cada árbol produce 500 frutas, si se siembran hasta 25 árboles. Si se siembran más de 25 árboles, cada árbol "en toda la huerta", deja de producir 5 frutas por cada árbol adicional que se siembre. Hallar el total de frutas que se produce en función o en términos del número de árboles sembrados en la huerta.

8. El costo de una llamada de larga distancia desde Colombia a New York tiene un costo de \$740 para el primer minuto y 580 para cada minuto adicional (o parte de minuto) hasta 60 minutos. Más de 60 minutos tiene un costo fijo de \$36000 hasta 90 minutos, luego se corta la llamada. Determine una función y gráfica que represente el costo de la llamada telefónica en función del tiempo.

3.2 Actividad introductoria para resolver problemas en matemáticas.

La actividad consta de tres momentos con los que se pretendía observar cómo se encontraba el estudiante a la hora de enfrentarse a situaciones problemas. Esta actividad se realizó en grupo de tres estudiantes en donde se buscó alcanzar un trabajo colaborativo y un aprendizaje significativo. Los momentos de la actividad son los siguientes:

3.2.1 Lectura motivacional ¿Y por qué temerle a las matemáticas?

Con esta lectura se pretendía demostrarles a los estudiantes que uno de los principales errores a la hora de no comprender los problemas en matemáticas es no realizar una buena lectura y que lo importante es dejar a un lado el miedo que sentimos por la matemáticas, que todos podemos resolver cualquier problema con compromiso, responsabilidad, una buena lectura y una buena disposición para trabajar.

¿Y POR QUÉ TEMERLE A LA MATEMÁTICA?

Grimaldo Oleas Liñan[17]

La eme de **m**iedo no puede ser la misma eme con la que se escribe **m**atemáticas. Ese deslinde ha sido un propósito del profesor Grimaldo Oleas Liñán en su ya largo proceso de formación con varias generaciones de alumnos, a quienes les recalca que la raíz de tal problema radica en muchas ocasiones en la carencia de una buena comprensión lectora.

"¿Y qué se entiende por saber leer?", se pregunta y a renglón seguido responde: "Por supuesto que no consiste simplemente en estar en capacidad de articular o producir una cadena de sonidos con la intención de descifrar un escrito. La capacidad de leer tiene implícito un conjunto amplio y variado de capacidades y habilidades, que permiten hacer de la lectura no sólo una actividad permanente sino objeto de aprendizaje y perfeccionamiento constante".

En los talleres que dicta en la Universidad de Antioquia, con preferencia para alumnos de la Facultad de Ingeniería de los primeros niveles y para aquellos que están en riesgo de desertar o de perder el cupo por rendimiento académico insuficiente, Oleas Liñán echa mano de ejemplos y argumentos que convenzan al estudiante de que la lectura es una de las vías de aprendizaje del ser humano. "Ellos deben comprender que la lectura es un medio ordinario para la adquisición de conocimientos que enriquece nuestra visión de la realidad, fortalece nuestro pensamiento y facilita la capacidad de expresión, y que además juega un papel primordial en la eficacia de nuestro trabajo intelectual, cualquiera que él sea".

Con la finalidad de que los jóvenes comprendan que "muchas veces, por no saber leer o por leer sin la suficiente concentración, sacamos conclusiones apartadas del contenido del texto", expone el siguiente ejemplo:

Una persona tiene en su billetera un total de \$15.000 en dos billetes. Se sabe que uno de los billetes no es de \$5.000. ¿Puede usted determinar las denominaciones de los dos billetes?

[17] Artículo tomado del periódico Alma Mater. Edición No. 611 Julio 2012 páginas 16-17. Universidad de Antioquia

Una lectura deficiente del enunciado podría conducir a soluciones erróneas. He aquí algunas:

- "Teniendo en cuenta que en el enunciado se afirma que ninguno de los billetes es de $5.000, el problema no tiene solución".
- Con base en la interpretación anterior, podrían proponerse soluciones rebuscadas como: un billete entero de $10.000 y medio billete de $10.000.

Ambas "soluciones" tienen el mismo origen: interpretación incorrecta del enunciado. La expresión "uno de los billetes no es de $5.000", suele confundirse con "ningún billete es de $5.000".

Una lectura adecuada del texto permite concluir que el problema sí tiene solución (única, además): la persona tiene un billete de $10.000 y uno de $5.000. Este resultado se ajusta al enunciado. En efecto, uno de los billetes no es de $5.000: se trata del billete de $10.000.

A manera de conclusión, afirma: "Sabemos leer cuando somos capaces de identificar las ideas básicas de un texto, captar sus detalles más relevantes y emitir un juicio crítico sobre su contenido".

En sus exposiciones también hace hincapié en la creatividad como elemento fundamental para alcanzar éxito en el aprendizaje y dominio de la matemática.

"La creatividad –dice– es esencial en la solución de problemas difíciles, aquellos en que la persona debe descubrir nuevos caminos no trajinados anteriormente, o caminos conocidos, pero que no han sido utilizados para enfrentar el problema particular. La creatividad se funda, sobre todo, en la capacidad para adoptar un punto de vista distinto".

3.2.2 Problemas de ecuaciones.

Para modelar funciones por tramos, el cual es nuestro objetivo, es importante realizar una buena lectura, una interpretación de los datos que brinda el problema e identificar qué es lo que piden realizar.

Para muchos de los problemas de la vida cotidiana es importante el uso del álgebra, y para poder solucionarlos es importante plantearlo en términos algebraicos, por esta razón se va a trabajar primero las siguientes situaciones problemas en donde los estudiantes van a tener que realizar un razonamiento sobre los datos brindados, las variables con las que puede trabajar y cuál es el proceso que debe desarrollar para llegar a lo que el problema le pide, también se quiere analizar las fortalezas y dificultades que se tienen a la hora de resolver problemas matemáticos.

1. Un jardín rectangular tiene 10 metros de ancho. Si su área es de 375 metros cuadrados ¿Cuál es su longitud?

2. María pinta con acuarelas en una hoja de papel de 50 cm de ancho y 35 cm de alto. Coloca su hoja en una alfombra de manera que aparezca una banda de ancho constante alrededor de la imagen. El perímetro de la alfombra es de 255 cm ¿Cuál es el ancho de la banda alrededor de la pintura?

3. Se debe fabricar una caja con base cuadrada y sin tapa a partir de un trozo cuadrado de cartón, cortando cuadrados de 10 cm en cada una de las esquinas y doblando los costados. La caja debe tener 250 cm^3. ¿Cuál es el tamaño de la pieza de cartón necesaria?

4. Un vendedor condujo de Ajax a Barrington, que se encuentra a una distancia de 192 kilómetros, a rapidez constante. Luego para recorrer los 240 kilómetros de Barrington a Collins, incremento su rapidez en 16 kilómetros por hora. Si el segundo recorrido tomo 6 minutos más que el primero, ¿Cuál era la rapidez a la cual iba conduciendo entre Ajax y Barrington?

5. Un fabricante de refrescos produce uno de naranja que es anunciado como de “sabor natural” aunque solo contiene 5% de jugo. Una nueva reglamentación gubernamental estipula que para que una bebida se anuncie como “natural” deberá contener por lo menos 10% de jugo de fruta. ¿Cuánto jugo de naranja debe agregar el fabricante a 900 galones de refresco de naranja para cumplir con la nueva reglamentación?

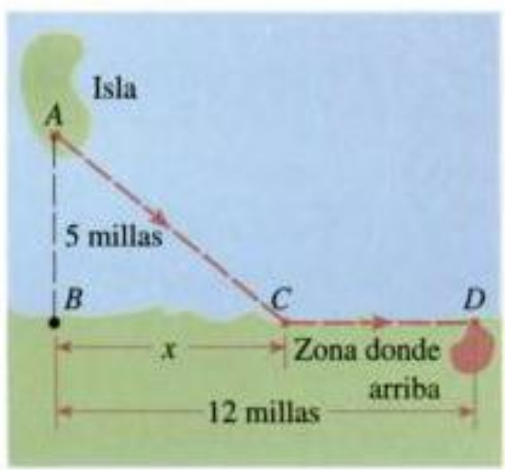
6. Mario tiene \$100000 y los invierte en dos certificados de depósito, un certificado paga 6% y el otro $4\frac{1}{2}$% anual de interés simple. Si el interés total es de \$5025 al año, ¿Cuánto dinero está invertido a cada una de las tasas?

7. Debido a que se pronostica una fuerte lluvia, el nivel del agua en una presa debe ser reducido en 30 cm. Al abrir el vertedero A se reduce al nivel necesario en 4 horas, mientras que con el vertedero B más pequeño se hace en 6 horas. ¿Cuánto tomará reducir el nivel del agua en 30 cm si se abren ambos?

8. Un terreno de forma rectangular para construir mide 240 cm y su área es de 870 m^2. Determine la longitud del lote.

9. Los ornitólogos han determinado que algunas especies de pájaros tienden a evitar volar sobre grandes extensiones de agua durante el día, porque durante estas horas el aire generalmente se eleva sobre tierra y cae sobre el agua, lo que hace que volar sobre el agua requiera de más energía. En una isla se libera un pájaro desde el punto A que se encuentra a 5 millas (en línea recta) del punto B más cercano de una costa. El ave vuela al punto C de la costa y luego a lo largo de la misma hasta su área de anidación en D, como se muestra en la figura. Suponga que el pájaro tiene una reserva de energía de 170 kilocalorías, y que utiliza 10 kilocalorías por milla al volar sobre la tierra y 14 kilocalorías por milla al hacerlo sobre el agua. ¿Dónde deberá estar localizado el punto C, de manera que utilice exactamente 170 kilocalorías durante su vuelo? ¿tiene el ave suficiente reserva de energía para volar directamente de A hasta D?

Figura 3-1: Ilustración del problema número 9 de ecuaciones.



3.2.3 Estrategias para solucionar problemas matemáticos.

El propósito de esta actividad es mostrarles a los estudiantes una de las estrategias que vamos a utilizar para desarrollar los problemas de modelación de funciones por tramos, primero se les dará a conocer las 4 reglas de George Pólya con su respectiva explicación, las cuales vamos a tener presente para la solución de problemas, luego se brindará unos ejemplos de cómo realizarlo y por último deben desarrollar los problemas de la actividad anterior donde presentaron mayor dificultad con estas 4 reglas.

REGLAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR GEORGE PÓLYA[18]

1. **COMPRENDER EL PROBLEMA:** El primer paso es leer el problema y asegurase de comprenderlo con toda claridad. Hágase a sí mismo las siguientes preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas? Para muchos problemas resulta útil dibujar un diagrama e identificar las cantidades dadas y las requeridas en el diagrama. Por lo general es necesario introducir una notación adecuada. Reconozca la cantidad que se pide determinar, generalmente se identifica mediante una lectura cuidadosa de la pregunta planteada al final del problema. Introduzca una notación para la variable (denótela con x o con cualquier otra letra). Asegurese de escribir claramente lo que representa la variable. En algunos casos ayuda usar iniciales como símbolos sugerentes, por ejemplo v para volumen, o bien t para el tiempo.

2. **PIENSE EN UN PLAN:** Determine una relación entre la información dada y la incógnita que le permite calcular ésta. A menudo es bueno preguntarse a sí mismo: "¿de qué manera puedo relacionar los datos con la incógnita?". Exprese todas las cantidades mencionadas mediante la variable definida, identifique la condición del problema que relaciona dos o más de las expresiones establecidas en el paso anterior. Un enunciado que dice que cantidad "es igual a" o "es lo mismo que" otra, generalmente señala el tipo de relación que estamos buscando. Plantee una ecuación que exprese la condición del problema, aquí necesitará una fórmula para obtener la expresión algebraica.

3. **EJECUTE EL PLAN:** En el paso 2 se elaboró un plan, debe verificar cada etapa del mismo y escribir los detalles que prueban que cada etapa es correcta.

4. **VER HACIA ATRÁS:** Después de completar su solución es conveniente ver hacia atrás, con el objetivo de detectar si se han cometido errores en la solución, verifique que su solución satisface el problema original, y exprese la respuesta en la forma de un enunciado que responda a la pregunta planteada en el problema.

[18] STEWART, James. Precálculo. México. Editorial International Thomson editores. 2001, p.122.

A continuacion se mostrarán tres ejemplos donde son aplicadas las 4 reglas de George Pólya

EJEMPLO 1

Una compañía que renta automoviles cobra $ 60000 al día más $200 por kilómetro al rentar un automovil. Laura renta un automovil por dos días y su cuenta es de $360000. ¿Cuántos kilómetros recorrió?

SOLUCIÓN

1. **COMPRENDER EL PROBLEMA**

Es importante tener en cuenta que el automóvil tiene un costo fijo de $60000 independientemente de la cantidad de los kilómetros recorridos y que Laura por rentar el automóvil dos días ya tiene un costo fijo de $120000. Pero la pregunta a responder no es por el costo fijo, ni la cuenta que pagó Laura, es la cantidad de kilómetros que recorrió. Para una mayor facilidad vamos a llamar a x la cantidad de kilómetros recorridos.

2. **PIENSE EN UN PLAN**

Luego traducimos toda la información del problema al lenguaje del álgebra.

Tabla 3-1: Tabla que traduce la información del ejemplo 1 de estrategias para solucionar problemas matemáticos en un lenguaje algebraico.

En palabras	**En lenguaje algebraico**
Cantidad de kilómetros recorridos	x
Costo de la cantidad de kilómetros recorridos ($200 el kilómetro)	$200x$
Costo fijo diario ($60000 por día)	2(60000)

En seguida planteamos el modelo:

Costo de los kilómetros recorridos + costo fijo diario = costo total

$$200x + 2(60000) = 360000$$

3. EJECUTE EL PLAN

Proceda a realizar el proceso algorítmico del plan que pensó

$$200x = 360000 - 120000$$
$$x = \frac{240000}{200}$$
$$x = 1200$$

Laura recorrió 1200 kilómetros con su auto rentado

4. VER HACIA ATRÁS

Verifique si la solución encontrada cumple con el plan pensado y ejecutado.

$$200(1200) + 2(60000)$$
$$= 240000 + 120000$$
$$= 360000$$
$$= \text{costo total}.$$

Además: costo del primer día + costo del segundo día + 200(número de kilómetros recorridos) = costo total

= 60000 + 60000 + 200(1200) = 360000

Cumple con el enunciado del ejercicio.

EJEMPLO 2

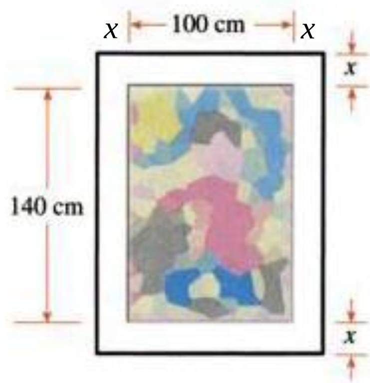
Un cartel tiene una superficie impresa de 100 por 140 cm y una franja de ancho uniforme alrededor de los cuatro lados. El perímetro del cartel es $1\frac{1}{2}$ veces el perímetro del área impresa ¿Cuál es el ancho de la franja en blanco y cuáles son las dimensiones del cartel?

SOLUCIÓN

1. **COMPRENDER EL PROBLEMA**

Para tener una mejor comprensión del problema vamos a realizar una representación del cartel donde se pueda observar la superficie impresa con sus respectivas medidas y la franja de ancho uniforme del cartel. Para una mayor facilidad el ancho de la franja lo vamos a denominar x.

Figura 3-2: Ilustración ejemplo 2 de estrategias para solucionar problemas matemáticos.



2. **PIENSE EN UN PLAN**

Pasemos la información de la figura al lenguaje algebraico:

Tabla 3-2: Tabla que traduce la información del ejemplo 2 de estrategias para solucionar problemas matemáticos en un lenguaje algebraico.

En palabras	En lenguaje algebraico
Ancho de la franja en blanco	x
Perímetro de la superficie impresa	2(100)+2(140)=480
Ancho del cartel	$100 + 2x$
Largo del cartel	$140 + 2x$
Perímetro del cartel	$2(100 + 2x) + 2(140 + 2x)$

A continuación usemos el hecho de que el perímetro del cartel es $1\frac{1}{2}$ veces el perímetro del área impresa para formular el modelo.

$$\text{Perímetro del cartel} = \frac{3}{2} \bullet (\text{perímetro del área impresa})$$

$$2(100+2x)+2(140+2x)=\frac{3}{2}(480)$$

3. EJECUTE EL PLAN

$$200+4x+280+4x=720$$

$$8x=720-200-280$$

$$x=\frac{240}{8}$$

$$x=30$$

La franja en blanco mide 30 cm de ancho, de modo que las dimensiones del cartel son

100 + 30 +30 = 160 de ancho y 140 + 30 +30 = 200 de largo

4. VER HACIA ATRÁS

$$2(100+2(30))+2(140+2(30))=720$$
$$\frac{3}{2}(480)=720$$

EJEMPLO 3

Un jet voló de Nueva York a Los Ángeles, a una distancia de 4200 kilómetros. La rapidez del viaje de regreso excedió en 100 kilómetros por hora a la de ida. Si el total del viaje tomó 13 horas, ¿Cuál fue la rapidez de Nueva York a los Ángeles?

SOLUCIÓN

1. COMPRENDER EL PROBLEMA

Se pide la rapidez del avión de Nueva York a los Ángeles. Hagamos

s = la rapidez de Nueva York a los Ángeles

Entonces $s+100$ = rapidez desde los Ángeles hasta Nueva York

2. PIENSE EN UN PLAN

En seguida organizamos la información en una tabla. Primero llenamos la columna "distancia", porque sabemos que entre las dos ciudades hay 4200 Km. Luego llenamos la columna "rapidez", ya que la hemos expresado en términos de la variable s. Por último, calculamos las entradas para la columna "tiempo" mediante

$$tiempo = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

Tabla 3-3: Tabla que traduce la información del ejemplo 3 de estrategias para solucionar problemas matemáticos en un lenguaje algebraico.

	Distancia (kilómetros)	**Rapidez (kilómetros/hora)**	**Tiempo (horas)**
Nueva York a los Ángeles	4200	s	$\frac{4200}{s}$
Los Ángeles a Nueva York	4200	$s+100$	$\frac{4200}{s+100}$

El viaje total duró 13 horas, de modo que tenemos:

Tiempo desde Nueva York a los Ángeles + tiempo desde Los Ángeles a Nueva York = tiempo total

$$\frac{4200}{s} + \frac{4200}{s+100} = 13$$

3. EJECUTE EL PLAN

Al realizar la suma de fracciones obtenemos

$$4200(s+100)+4200s=13s(s+100)$$

$$8400s+420000=13s^2+1300s$$

$$0=13s^2-7100s-420000$$

$$s=\frac{7100\pm\sqrt{(7100)^2-4(13)(-420000)}}{2(13)}$$

$$s=\frac{7100\pm 8500}{26}$$

$$s=600 \qquad \text{o} \qquad s=-53{,}8$$

Como s representa la rapidez, descartamos la respuesta negativa y concluimos que la rapidez del jet de Nueva York a los Ángeles fue de 600 Kilómetros/hora.

4. VER HACIA ATRÁS

$$\frac{4200}{s}+\frac{4200}{s+100}$$

$$=\frac{4200}{600}+\frac{4200}{600+100}$$

$$=7+6$$

$$=13$$

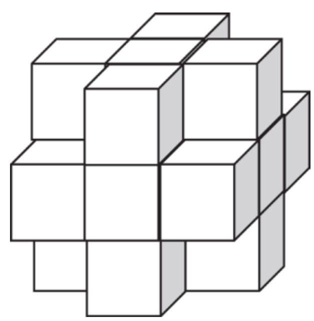
3.3 Actividad de saberes previos “modelación de funciones”

Con esta actividad se quería observar cómo se encontraban los estudiantes con respecto a la temática de funciones en todos sus aspectos como conceptos, gráficas, modelos de funciones, dominio, rango; también se trabajó actividades que se encuentran relacionadas con su vida cotidiana para motivar el trabajo que se está realizando.

3.3.1 Determinemos modelos funcionales[19].

La longitud del lado de cada uno de los cubos de la figura 3 - 3 es x. Determina una expresión algebraica para el perímetro de la base $P(x)$, el área de la cara frontal $A(x)$ y el volumen del cuerpo $V(x)$.

Figura 3-3: Figura cúbica para determinar expresiones algebraicas que representen el perímetro de la base, área de la cara frontal y volumen del cuerpo.



1. Completa cada uno de los registros tabulares de acuerdo con la expresión encontrada y grafica los valores en el plano cartesiano.

[19] RENDON, Paula Andrea. Modulo matemáticas 2012, olimpiadas del conocimiento [en línea]. <http://www.seduca.gov.co/index.php/.../2700-modulo-matematicaspdf.htm> [citado septiembre 17 de 2013]. p. 7

Tabla 3-4: Tablas para registrar los valores del perímetro de la base, área de la cara frontal y volumen del cuerpo de la figura 3-3.

$P(x) =$

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$							

$A(x) =$

x	0	1	2	3	4	5	6
$A(x)$							

$V(x) =$

x	0	1	2	3	4	5	6
$V(x)$							

2. De acuerdo con el contexto del ejercicio, el valor de x no puede tomar valores negativos. Justifica esta afirmación.

3. De acuerdo con las gráficas, del ejercicio # 1, describe las diferencias que hay entre ellas y asocia un nombre a cada una de ellas.

3.3.2 Conceptos previos.

Responde según tus conocimientos, trata de ser lo más preciso(a) posible.

1. ¿Qué es una función?
2. ¿Cuáles son las formas más comunes para representar una función? Descríbelos.
3. ¿Qué es una variable dependiente y una variable independiente? ¿Cómo se relacionan con el concepto de dominio y rango?
4. ¿Qué es modelar una función? ¿para que se modela?

3.3.3 Ejercitación.

1. Expresa verbalmente, algebraicamente, tabularmente y gráficamente la función raíz cuadrada.

2. Para las siguientes expresiones verbales, realiza una tabla con 10 valores, tomando valores negativos (en los casos que sea posible) y positivos. Escribe la regla de asignación respectiva y representa los puntos en el plano cartesiano. Encuentra el dominio y el rango.

a. A todo número real x se le asigna su cuadrado.
b. A todo número real x se le asigna su cubo.
c. A todo número real x se le asigna su raíz cúbica.
d. A todo número real x, excepto 0 (cero) se le asigna el inverso multiplicativo.

3. Para cada una de las siguientes funciones, encuentra el dominio y realiza su respectiva gráfica. (realizar las gráficas en Geogebra[20]).

a. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
b. $g(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$
c. $h(x) = 2^x$
d. $p(x) = (x-1)^{-1}$

3.3.4 El pago de los servicios públicos.

El pago de los servicios públicos está registrado en el recibo que llega mensualmente a nuestra casa. Investiga cuál es el costo por kwh de la energía, el m^3 de agua, saneamiento y gas utilizados en tu vivienda.

a. Realiza un modelo que represente el valor a pagar por cada servicio con respecto al consumo mensual.

b. Realiza un registro tabular y gráfico del consumo de agua en tu casa.

c. Observa si el costo por m^3 es constante o si, de acuerdo con el consumo en tu casa, existe una tarifa diferencial.

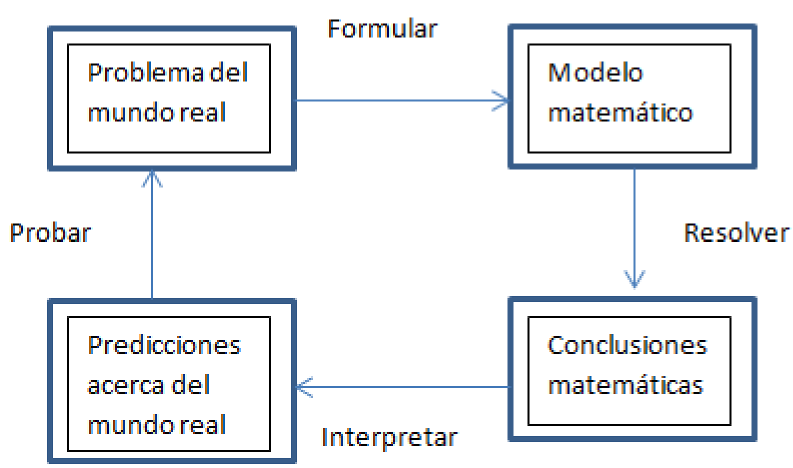
[20] Software libre de matemáticas que se puede descargar en: http://www.geogebra.org/cms/es/

3.3.5 Cómo realizar modelos de funciones.

CÓMO REALIZAR MODELOS DE FUNCIONES[21]

Hasta el momento se han trabajado problemas de la vida cotidiana a partir de ecuaciones. En esta segunda sección trabajaremos en **modelos matemáticos** los cuales son una descripción matemática (a menudo por medio de una función o de una ecuación) de un fenómeno del mundo real, como el tamaño de una población, la demanda de un producto, la velocidad de un objeto que cae, la concentración de un producto, la velocidad de un objeto que cae, la concentración de un producto en una reacción química, la expectativa de vida de una persona al nacer o el costo de la reducción de las emisiones de gases contaminantes. La finalidad del modelo es comprender el fenómeno y, quizá, hacer predicciones acerca de su comportamiento futuro.

Figura 3-4: Figura que ilustra el proceso de modelado matemático



En la figura se ilustra el proceso de modelado matemático. Dado un problema del mundo real, nuestra primera tarea es formular un modelo matemático. Para esto se identifican y nombran las variables independiente y dependiente y se establece hipótesis que simplifiquen el fenómeno lo suficiente para que pueda tratarse matemáticamente.

[21] STEWART, James. Cálculo, Conceptos y Contextos. México. Editorial International Thomson editores, 1999. p. 75

Usamos nuestro conocimiento de la situación física y nuestras habilidades matemáticas para obtener ecuaciones que relacionen las variables. En las situaciones que no existe una ley física que nos guie, quizá necesitemos reunir datos y examinarlos en forma de una tabla, para distinguir los patrones. Es probable que nos convenga obtener una representación gráfica a partir de la representación numérica de una función, utilizando estos datos. En algunos casos la gráfica podría sugerir incluso una fórmula algebraica adecuada.

La segunda etapa es aplicar las matemáticas que conocemos al modelo matemático que hemos formulado para llegar a las conclusiones matemáticas. En la tercera etapa tomamos esas conclusiones y las interpretamos como información acerca del fenómeno original del mundo real, de manera que se ofrezcan explicaciones o se hagan predicciones. El paso final es hacer probar nuestras predicciones comparándolas con nuevos datos reales. Si las predicciones no se ajustan bien con la realidad, necesitamos redefinir el modelo, o formular uno nuevo e iniciar el ciclo una vez más.

Para realizar el modelo de una función vamos a continuar con las reglas de George Pólya.

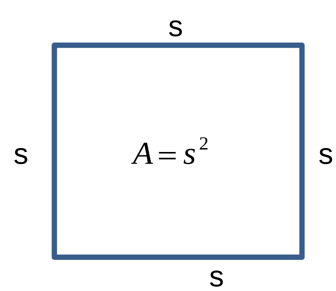
EJEMPLO 1: Exprese el perímetro de un cuadrado como función de su área.

1. **COMPRENDER EL PROBLEMA**

Para tener mayor facilidad a la hora de resolver el problema, vamos a denotar respectivamente el perímetro, el área y la longitud del lado del cuadrado con las variables P, A y s.

Realizar un diagrama ayudará a tener una mejor comprensión del problema.

Figura 3-5: Diagrama que representa el ejemplo 1 de cómo realizar modelos de funciones.



$P = s + s + s + s = 4s$

2. PIENSE UN PLAN

Nuestro objetivo es determinar la relación entre P y A. Empecemos con las fórmulas conocidas para el perímetro y el área.

$$P = 4s \quad \text{y} \quad A = s^2$$

Como el perímetro debe quedar en función del área debemos despejar la variable s en la segunda fórmula y luego sustituimos en $P = 4s$

3. EJECUTE EL PLAN

La segunda fórmula da $\sqrt{A} = s$. Para expresar P como una función de A sustituimos para obtener

$$P = 4s$$

$$P = 4\sqrt{A}$$

Por lo tanto la función que relaciona P y A es: $P = 4\sqrt{A}$

4. MIRAR HACIA ATRÁS

Vamos a verificar si el modelo está cumpliendo.

Si un terreno cuadrado tiene un área de 25 m^2, su perímetro será:

$$P = 4\sqrt{A} = 4\sqrt{25} = 20cm$$

Lo que quiere decir que cada lado del cuadrado mide 5 cm, y su área es $(5)(5) = 25cm^2$

EJEMPLO 2

Los asistentes a un parque de diversiones deben pagar por la entrada un valor de \$10000 y subir a cada una de las atracciones tiene un costo adicional de \$2000. Expresemos de forma analítica y gráfica una función que represente el valor que debe pagar cada asistente.

1. COMPRENDER EL PROBLEMA

Se pide determinar el valor que debe pagar cada asistente, pero se debe tener en cuenta que independientemente de las atracciones que monte, él debe pagar $10000 de la entrada. También se debe analizar que cada asistente puede pagar un valor diferente dependiendo de la cantidad de atracciones que utilice. Para una mejor interpretación vamos a denotar con x el número de atracciones a las que se va a subir un asistente y con $f(x)$ el valor a pagar de cada asistente.

2. PIENSE UN PLAN

Vamos a representar en una tabla el valor $f(x)$ que debe pagar el asistente si monta en x atracciones.

Tabla 3-5: Tabla que representa el valor a pagar del ejemplo 2 de cómo realizar modelos de funciones.

x	$f(x)$	$f(x)$
1	2000+10000	$12000
2	4000+10000	$14000
3	6000+10000	$16000
4	8000+10000	$18000
….	……	……..
……	……….	……..

Tenemos claro el valor que se debe pagar, el problema es que no estamos llegando a un patrón para realizar nuestro modelo por esta razón se debe buscar siempre un patrón que generalice una ecuación para encontrar el valor a pagar si se sube a x atracciones.

3. EJECUTE EL PLAN

Tabla 3-6: Tabla que representa el patrón del valor a pagar del ejemplo 2 de cómo realizar modelos de funciones.

x	$f(x)$	$f(x)$
1	2000(1)+10000	$12000
2	2000(2)+10000	$14000
3	2000(3)+10000	$16000
4	2000(4)+10000	$18000
….	……	……..
x	2000x+10000	………

Para encontrar el modelo se necesita mantener el patrón del valor que se paga por cada atracción, que lo único cambiante sea la variable independiente, en este caso x.

Al encontrar el patrón se establece el siguiente modelo

$$f(x) = 2000x + 10000$$

4. **MIRAR HACIA ATRÁS**

Vamos a verificar si el modelo cumple. Si un asistente solo monta en una atracción debe pagar $12000, si monta 3 veces debe pagar $16000, etc, entonces

$$f(1) = 2000(1) + 10000 = 12000$$

$$f(3) = 2000(3) + 10000 = 16000$$

Luego, queda verificado que el modelo cumple.

EJEMPLO 3

El aire seco al moverse hacia arriba se expande y se enfría a razón de aproximadamente $1^0 C$ por cada 100 m de elevación. Si la temperatura del suelo es de $20^0 C$, modele una función que represente cual es la temperatura a una altura h. ¿Qué rango de temperatura puede esperarse si un avión despega y alcanza una altura máxima de 5 Km?

1. **COMPRENDER EL PROBLEMA**

Para tener una mejor comprensión del problema, se debe tener en cuenta que la temperatura inicial del aire es de $20^0 C$ y que a pesar de que la pregunta es por la temperatura a una altura máxima de 5 Km, la altura la vamos a trabajar en metros. Para una mejor interpretación vamos a utilizar la siguiente notación:

h = La altura a la que se encuentra el avión.

$t(h)$ = La temperatura del avión a una altura h.

2. PIENSE UN PLAN

Vamos a representar en una tabla el valor $t(h)$ para un avión que se encuentra a una altura h

Tabla 3-7: Tabla que representa la temperatura del ejemplo 3 de cómo realizar modelos de funciones.

h (En metros)	$t(h)$	$t(h)$
0	$20^0 C$	$20^0 C$
100	$20^0 C - 1^0 C$	$19^0 C$
200	$19^0 C - 1^0 C$	$18^0 C$
300	$18^0 C - 1^0 C$	$17^0 C$
….	……	……..
……	……….	……..

Tenemos claro que cada 100 metros la temperatura disminuye $1^0 C$, el problema es que no estamos llegando a un patrón para realizar nuestro modelo. Debemos buscar un patrón que generalice nuestra situación problema, también hay que tener claro qué operación matemática se debe realizar para que cuando el aire suba 100 metros se disminuya $1^0 C$, cuando suba 200 metros disminuya $2^0 C$, cuando sea 300 metros disminuya $3^0 C$, etc.

3. EJECUTE EL PLAN

Vamos tomar la muestra para 0, 100, 200 y 300 metros como se representa en la tabla 3-8.

Tabla 3-8: Tabla que representa el patrón de la temperatura del ejemplo 3 de cómo realizar modelos de funciones.

$h(\text{En metros})$	$t(h)$	$t(h)$
$0(100)$	$(20-0)^0 C$	$20^0 C$
$1(100)$	$(20-1)^0 C$	$19^0 C$
$2(100)$	$(20-2)^0 C$	$18^0 C$
$3(100)$	$(20-3)^0 C$	$17^0 C$
….	……	……..
$x(100)$	$(20-x)^0 C$	……..

Si $h = 100x$ entonces $x = \dfrac{h}{100}$, como $t(h) = t(100x) = (20 - x)^0 C$ se concluye que

$t(h) = t(100x) = \left(20 - \dfrac{h}{100}\right)^0 C$

Ahora tenemos nuestro modelo el cual es $t(h) = \left(20 - \dfrac{h}{100}\right)^0 C$ y podemos dar respuesta a la pregunta planteada en el problema.

¿Qué rango de temperatura puede esperarse si un avión despega y alcanza una altura máxima de 5 km?

Lo primero que debemos hacer es convertir 5 Km a metros ya que en nuestro modelo la variable h se encuentra en metros, luego remplazamos en nuestro modelo de la siguiente forma

$$t(5000) = \left(20 - \frac{5000}{100}\right)^0 C$$

Podemos concluir que la temperatura que se espera a una altura de 5 Km es de $-30^0 C$

4. MIRAR HACIA ATRÁS

Se tiene claro que la temperatura del aire se encuentra disminuyendo a medida que se eleva, comprobemos si nuestro modelo cumple con los valores establecidos en la tabla de la regla 2. (Piense un plan).

$$t(100) = \left(20 - \frac{100}{100}\right)^0 C = 19^0 C$$

$$t(300) = \left(20 - \frac{300}{100}\right)^0 C = 17^0 C$$

Luego, queda verificado que el modelo cumple.

EJEMPLO 4

Un equipo de hockey juega en una pista con una capacidad de asientos de 15000 espectadores, con el precio del boleto en $12000. La asistencia promedio en juegos recientes ha sido de 11000 personas. Una investigación de mercado indica que por cada $1000 que se reduzca el precio del boleto, la asistencia promedio se incrementará en 1000 espectadores a partir de 11000 asistentes. ¿A qué precio deberán fijar los propietarios del equipo el precio del boleto para maximizar sus ingresos por la venta de los mismos?

1. **COMPRENDER EL PROBLEMA**

Se pide determinar el precio del boleto para que el ingreso sea máximo. No quiere decir que si el boleto se reduce hasta $8000 para alcanzar los 15000 espectadores se alcanzará este ingreso.

Para lograr determinar el valor debemos expresar primero el modelo en términos del precio. Para una mayor facilidad llamaremos x al precio de venta del boleto y $I(x)$ al ingreso de dinero con respecto al precio.

2. **PIENSE UN PLAN**

Vamos a representar en una tabla el dinero $I(x)$ que ingresa por la cantidad de boletos vendidos a x precio.

Tabla 3-9: Tabla que representa el ingreso del ejemplo 4 de cómo realizar modelos de funciones.

x	Cantidad de boletos vendidos	$I(x)$
12000	11000	$132’000000
11000	12000	$132’000000
10000	13000	$130’000000
9000	14000	$126’000000
8000	15000	$120’000000

Tenemos claro el ingreso que está teniendo el equipo, pero necesitamos un modelo que nos permita determinar cuál es el precio que permite el ingreso máximo. Debemos ir buscando una función que tenga un patrón donde sólo se encuentre cambiando nuestra variable independiente x, teniendo en cuenta que por cada \$1000 que se reduce al precio inicial se tendrán 1000 espectadores de más.

3. EJECUTE EL PLAN

Tabla 3-10: Tabla que representa el patrón de ingreso del ejemplo 4 de cómo realizar modelos de funciones.

x	Cantidad de boletos vendidos	$I(x)$
$12000-0(1000))$	$11000+1000(0)$	$[12000-0(1000)]\,[11000+1000(0)]$
$12000-1(1000)$	$11000+1000(1)$	$[12000-1(1000)]\,[11000+1000(1)]$
$12000-2(1000)$	$11000+1000(2)$	$[12000-2(1000)]\,[11000+1000(2)]$
$12000-3(1000)$	$11000+1000(3)$	$[12000-3(1000)]\,[11000+1000(3)]$
$12000-4(1000))$	$11000+1000(4)$	$[12000-4(1000)]\,[11000+1000(4)]$
$12000-m(1000)$	$11000+1000m$	$[12000-m(1000)]\,[11000+1000m]$

Si $x=12000-1000m$ entonces
$I(x)=I(12000-1000m)=[12000-1000m]\,[11000+1000m]$

Como $x=12000-1000m$ entonces $m=\dfrac{12000-x}{1000}$, se concluye que
$I(x)=x\left[11000+1000\left(\dfrac{12000-x}{1000}\right)\right]$

Ya tenemos nuestro modelo que representa los ingresos con respecto al valor del boleto, el modelo es:

$$I(x)=x[11000+12000-x]$$

Teniendo el modelo podemos hallar el precio del boleto con el cual el ingreso será máximo.

$$I(x)=-x^2+23000x$$

Esta es una función cuadrática con $a=-1$ y $b=23000$ por lo que el valor máximo ocurre cuando

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{23000}{2(-1)}=11500$$

$$I(11500)=-(11500)^2+23000(11500)=132250000$$

Esto muestra que el ingreso máximo se obtiene cuando el boleto vale $11500 y es de $132’250000.

4. **MIRAR HACIA ATRÁS**

Verifiquemos que el modelo cumple con los valores de la tabla 3-9

$$I(11000)=-(11000)^2+23000(11000)=132000000$$

$$I(8000)=-(8000)^2+23000(8000)=120000000$$

Cumple porque cuando el boleto vale $11000 se tiene un ingreso de $132’000000 y cuando vale $8000 se tiene un ingreso de $120’000000.

3.3.6 Problemas de modelación de funciones.

En los siguientes problemas, realiza el modelo que represente cada enunciado realizando el mismo proceso elaborado en los ejemplos.

1. Pedro trabaja como vendedor de celulares y mensualmente gana $350000 más una comisión de $1000 por cada celular que venda. Determina un modelo que represente el sueldo de Pedro. Si en marzo Pedro vendió 48 celulares, ¿Cuál fue el salario que recibió ese mes? ¿Cuántos celulares por lo menos debería vender Pedro en el próximo mes para ganar más de $700000?

2. El precio de un computador nuevo es $1250000 y su valor decrecerá $185000 cada año. ¿Cuál es la función que representa el costo (c) del computador a cabo de t años? ¿Cuál será el precio del computador transcurridos 1, 2 o 3 años?

3. Una fábrica de arepas produce 150 unidades a un costo total de $7500 y 200 unidades a un costo total de $10000. Suponiendo que la función de costo es lineal, encuentra:

a. La función que modela el costo $C(x)$ de la fabricación de arepas, donde x es el número de arepas producidas.

b. El costo de producir 300 arepas.

4. Un museo tiene como política admitir grupos grandes de 30 hasta 80 personas con la siguiente política de rebajas. Para grupos menores o iguales a 30, la tarifa es de $16000 por persona, pero por cada persona adicional la tarifa se reduce en $200 para cada persona (incluyendo los primeros 30). Exprese un modelo que represente el ingreso para el museo cuando recibe grupos con más de 30 personas.

5. Un comerciante vende 100 unidades de un artículo a la semana si el precio (en miles de pesos) es de $55. Él plantea aumentar los precios y estima que por cada $5000 de aumento en el precio la demanda bajará en 4 unidades.

a. Exprese la demanda en función del precio.
b. Exprese el ingreso en función del precio.

6. En ciertos terrenos se estima que si se plantan 600 naranjos por hectárea, se obtendrá una producción promedio de 300 naranjas por mata y por cada árbol que se siembre de más hará que la producción promedio por árbol en todo el terreno disminuya en 3 unidades. Exprese la producción promedio por árbol en función del número de árboles adicionales sembrados.

7. Una heladería le vende a una escuela 50 helados a $300. La junta directiva de la escuela ha decidido que por cada dos pesos menos en el costo actual de los helados, ellos comprarán 10 helados más. Halla una función f(x) que represente los ingresos de la heladería por vender sus helados a $x cada uno ¿Cuál es el dominio de la función?

3.4 Actividad de modelación de funciones por tramos.

Esta es la última actividad que se trabajó para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, primero se realizó una lectura sobre la importancia de modelar funciones, el propósito era motivar al estudiante sobre la temática trabajada, también se trabajaron conceptos previos de funciones por tramos, se realizaron ejemplos de modelación de funciones por tramos y por último se proponen problemas para que los estudiantes los realicen.

En esta actividad los estudiantes van a ver dos videos, uno sobre cómo realizar gráficas de funciones por tramos en Geogebra y otro sobre como modelar una función por tramos.

3.4.1 Lectura motivacional sobre la modelación de funciones por tramos.

LECTURA "El crecimiento de tumores se puede modelizar mediante funciones matemáticas"[22]

El doctor e investigador Braulio Méndez G, del barrio Laguito de la ciudad de Cartagena, comenta que durante años ha indagado acerca de la posible curación del cáncer de hígado. Al parecer esta se ha logrado mediante una terapia de fortalecimiento del sistema inmunológico que consiste en estimular la médula ósea (lograr una inflamación peritumoral) para desencadenar la lucha del cuerpo del propio enfermo contra su tumor a base de neutrófilos, que son uno de los cinco tipos de leucocitos que posee el organismo.

Esta terapia se ha desarrollado a raíz de una investigación en la que se determinó la modelización de los tumores cancerosos a través de modelos matemáticos, a fin de impedir su crecimiento y eventualmente, curarlo. Para modelizar el crecimiento tumoral se realiza la medición de los índices de duplicación según el modelo de crecimiento logístico (que es acotado y además viene a ser exponencial en las primeras etapas, ralentizándose luego).

---

[22] ALFONSO, Luz Stella y otros. Proyecto sé matemáticas, redes de aprendizaje para la vida. Bogotá. Editorial SM. 2012. p. 121

- Consulta sobre que otros beneficios trae una modelación de funciones a la sociedad y determina en qué áreas o campos de acción se puede implementar.

3.4.2 Conceptos previos de funciones definidas por tramos.

En nuestra vida cotidiana nos encontramos con muchas situaciones donde nos colocan condiciones, a la hora de salir a una fiesta, de ir a un lugar, de realizar un trabajo, en el descuento o incremento económico de algún producto etc. Eso mismo pasa en algunos problemas de matemáticas, en algunas ocasiones hace falta más de una fórmula para poder definir una función. El siguiente ejemplo ilustra una función definida por tramos.

$$f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si} \quad -5\le x<1 \\ x^2+5 & \text{si} \quad 1\le x<6 \\ 4 & \text{si} \quad 6\le x\le 10 \end{cases}$$

En esta función a la variable independiente x le colocan la condición de qué valores debe tomar, se puede observar que si f no está en ninguno de estos conjuntos de x la función no está definida. En este ejemplo, el dominio de f es el intervalo $[-5,10]$. Si queremos evaluar la función debemos determinar en qué región está el valor a evaluar para usar la fórmula correspondiente; este tipo de función, efectivamente, define una regla. La regla en este ejemplo es:

Si x está en el intervalo $[-5,1)$ usamos la fórmula $3x-2$ para evaluar la función en x.

Si x está en el intervalo $[1,6)$ usamos la fórmula x^2+5 para evaluar la función en x.

Si x está en el intervalo $[6,10]$ usamos la fórmula $f(x)=4$ para evaluar la función en x.

A continuación debes realizar las siguientes actividades propuestas:

- Para las siguientes funciones determina el dominio, los valores $f(-5)$, $f(-2)$, $f(0)$ y $f(6)$, gráfica la función y determina su rango.

- $$f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si} \quad -5 \le x < 1 \\ x^2+5 & \text{si} \quad 1 \le x < 6 \\ 4 & \text{si} \quad 6 \le x \le 10 \end{cases}$$

- $$f(x)=\begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad -7 \le x < -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 \le x < 2 \\ 5 & \text{si} \quad 2 \le x \le 8 \end{cases}$$

- $$f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < -2 \\ 2-x & \text{si} \quad -2 \le x < 3 \\ x^2 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

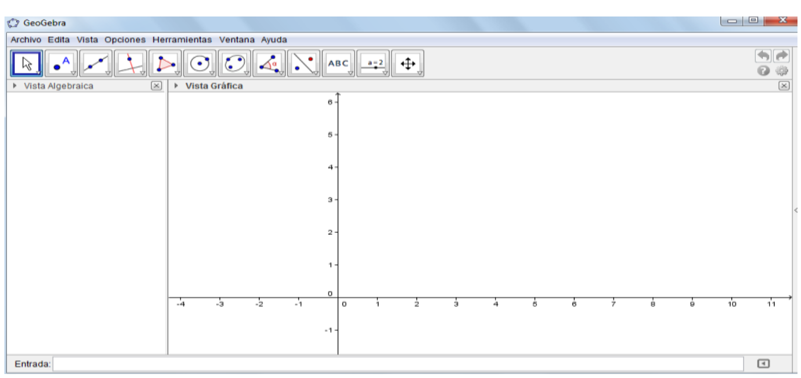
- $$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si} \quad -5 \le x \le -2 \\ 2x & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad 0 \le x \le 10 \end{cases}$$

3.4.3 Gráficas de funciones definidas por tramos en Geogebra.

A continuación se mostrará cómo realizar gráficas de funciones por tramos en el programa Geogebra.

1. Abrir el programa de Geogebra.

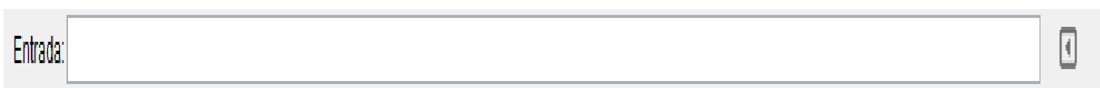
Figura 3-6: Imagen que representa el primer paso de cómo realizar una gráfica de funciones por tramos con el programa Geogebra.



2. En la barra de entrada se ingresa la expresión analítica de la función, en este ejemplo vamos a representar la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si} \quad x<-2 \\ 2x^2+1 & \text{si} \quad -2\leq x<3 \\ 4-x & \text{si} \quad x\geq 3 \end{cases}$$

Figura 3-7: Imagen que representa el segundo paso de cómo realizar una gráfica de funciones por tramos con el programa Geogebra.

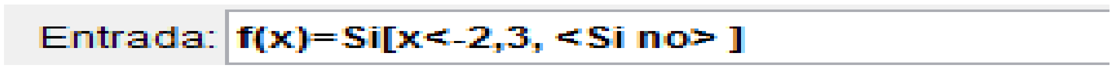


3. Para ingresar la expresión analítica en la entrada vamos a utilizar el condicional si, y seleccionamos la opción "si [<condición>, <entonces>, <si no>]".

Figura 3-8: Imagen que representa el tercer paso de cómo realizar una gráfica de funciones por tramos con el programa Geogebra.

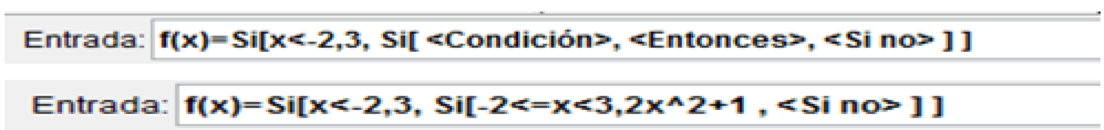
4. En la opción de <condición> ingresamos la desigualdad del primer tramo y en la opción <entonces> ingresamos la función, en este caso la función constante $f(x)=3$.

Figura 3-9: Imagen que representa el cuarto paso de cómo realizar una gráfica de funciones por tramos con el programa Geogebra.



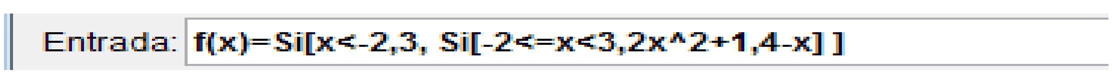
5. Para ingresar un segundo tramo, en este caso $2x^2+1$ si $-2 \le x < 3$, lo realizamos en la opción <si no> ingresando otro "si" con la misma situación "si [<condición>, <entonces>, <si no>]" y escribimos primero la desigualdad y luego la función.

Figura 3-10: Imagen que representa el quinto paso de cómo realizar una gráfica de funciones por tramos con el programa Geogebra.



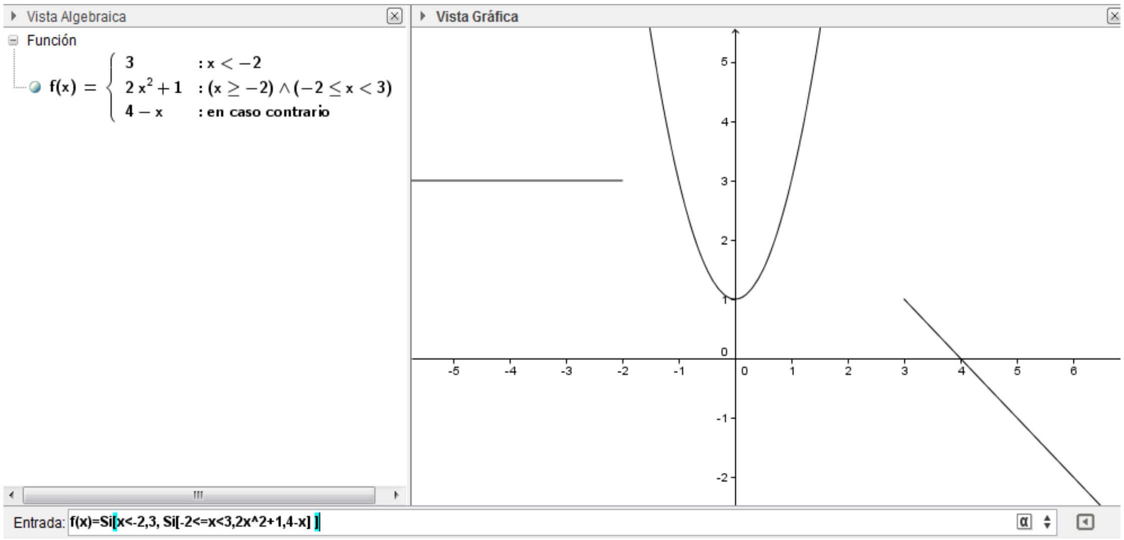
6. Para ingresar el último tramo, en este caso $4-x$ si $x \ge 3$ se escribe la función en la opción <si no>.

Figura 3-11: Imagen que representa el sexto paso de cómo realizar una gráfica de funciones por tramos con el programa Geogebra.



7. Al ingresar toda la función, presione la tecla enter y verifique que en la ventana algebraica aparezca la expresión de la función que se desea representar y que en la ventana gráfica se represente la función.

Figura 3-12: Imagen que representa el séptimo paso de cómo realizar una gráfica de funciones por tramos con el programa Geogebra.



- Con el programa de Geogebra grafica las siguientes funciones. El siguiente video te puede ayudar para realizar las gráficas.

  http://www.youtube.com/watch?v=-vwVs9M-Mw0

- $$f(x)=\begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x-1 & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ 3x & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$$

- $$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x < -2 \\ -x & \text{si} \quad -2 \le x < 6 \\ 2 & \text{si} \quad x \ge 6 \end{cases}$$

- $$f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

- $$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3x+7 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

3.4.4 Situación problema que implica modelación de funciones por tramos.

En 1979 se puso en funcionamiento en Tokio (Japón) la primera red de telefonía móvil celular. La telefonía celular en Colombia aparece en 1994, bajo la administración de seis empresas y en tres zonas del país. En el año 2002 el número de líneas celulares supero el número de líneas de telefonía fija. Actualmente Colombia cuenta con tres redes de alta tecnología y está entre los países de la región con más alto índice de crecimiento, con un nivel de penetración del 92% en el mercado.

Las tarifas en Colombia están entre las más bajas de Latinoamérica y en promedio un minuto tiene un valor de $250 a cualquier destino.

Ana está interesada en adquirir un nuevo plan para su celular. Al preguntar en uno de los operadores celulares le ofrecen las siguientes opciones.

PLAN A: por $39000 mensuales recibe 400 minutos a todos los operadores y cada minuto adicional al plan tiene un costo de $200 a cualquier operador.

PLAN B: por $45000 mensuales recibe 550 minutos a todos los operadores y cada minuto adicional al plan tiene un costo de $220 a cualquier operador.

PLAN C: por $60000 mensuales recibe 800 minutos a todos los operadores, por cada minuto adicional hasta 100 minutos paga $150 y por cada minuto adicional después de 100 minutos paga $250[23].

EXPLICA

¿De qué depende el valor pagado por Ana en cualquiera de los planes?

---

[23] Lectura tomada del libro Norma para pensar grado once, pagina 54 y 55

INFIERE

Si denotas por m al número de minutos que consume Ana al mes, ¿Qué expresiones podrías utilizar para representar el valor pagado en cada plan?

A continuación se realizará la expresión para el plan A, ustedes deben representar el valor que pagaría Ana por los planes B y C de telefonía celular.

SOLUCIÓN AL PLAN A

1. **COMPRENDER EL PROBLEMA**

Si Ana no consume minutos adicionales, ella debe pagar un valor constante de $39000 independientemente de los minutos hablados, se debe tener en cuenta que no puede excederse de 400 minutos, si ella habla más de la cantidad establecida en el plan, comenzará a incrementar su valor a pagar en la factura por cada minuto adicional consumido.

Se pide determinar el valor que debe pagar Ana. Para una mayor facilidad llamaremos x al número de minutos que consume Ana y $f(x)$ al valor que tiene que pagar por los minutos consumidos.

2. **PIENSE UN PLAN**

Vamos a representar en la tabla 3-11 el valor $f(x)$ que debe pagar Ana si habla x minutos entre 0 y 400 y si habla más de 400 minutos.

Tabla 3-11: Tablas que representan valor a pagar en la situación problema que implica modelación de funciones por tramos.

$0 < x \leq 400$	$f(x)$
0	39000
1	39000
2	39000
3	39000
….	……
399	39000
400	39000

$x > 400$	$f(x)$
401	39200
402	39400
403	39600
404	39800
….	……
576	74200
577	74400

Tenemos claro el valor que se debe pagar, el problema es que no estamos llegando a un patrón para realizar nuestro modelo, por esta razón se debe buscar siempre un patrón que generalice una ecuación para encontrar el valor que tiene que pagar Ana si habla x minutos.

3. EJECUTE EL PLAN

Tabla 3-12: Tablas que representa el patrón del valor a pagar en la situación problema que implica modelación de funciones por tramos.

$0 < x \leq 400$	$f(x)$
0	39000
1	39000
2	39000
3	39000
….	……
399	39000
400	39000

$x > 400$	$f(x)$	$f(x)$
401	39000+200(1)	39200
402	39000+200(2)	39400
403	39000+200(3)	39600
404	39000+200(4)	39800
….	……	……
576	39000+200(176)	74200
577	39000+200(177)	74400

En la tabla tenemos un valor constante si el número de minutos no supera los 400, por lo tanto su representación será la función constante $f(x) = 39000$ si $0 < x \leq 400$.

En la tabla, para $x > 400$, por el momento no es claro el modelo, ya que en los minutos no se ha establecido un patrón, por esta razón se debe hacer la siguiente interpretación.

Tabla 3-13: Tabla que representa el patrón del valor a pagar en la situación problema que implica modelación de funciones por tramos.

x	$f(x)$	$f(x)$
$400+1$	$39000+200(1)$	39200
$400+2$	$39000+200(2)$	39400
$400+3$	$39000+200(3)$	39600
$400+4$	$39000+200(4)$	39800
….	……	……
$400+176$	$39000+200(176)$	74200
$400+177$	$39000+200(177)$	74400
………	………	………
$400+m$	$39000+200m$	

Para encontrar el modelo se debe tener en cuenta que si $x=400+m$ entonces $f(x)=f(400+m)=39000+200m$

.

Como $x=400+m$, entonces $m=x-400$, por lo tanto $f(x)=39000+200(x-400)$.

Para terminar nuestro modelo de función por tramos, reunimos las dos ecuaciones que nos representan el valor a pagar según la condición, de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases}39000 & \text{si} \quad 0\le x\le 400\\ 39000+200(x-400) & \text{si} \quad x>400\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}39000 & \text{si} \quad 0\le x\le 400\\ 200x-41000 & \text{si} \quad x>400\end{cases}$$

4. MIRAR HACIA ATRÁS

Vamos a verificar si el modelo satisface las condiciones. Si Ana habla 13 minutos, el tramo que contiene este valor es el primero, por lo que tendría que pagar $39000. Si Ana habla 576 minutos, el tramo que contiene este valor es el segundo, entonces debe pagar $200(576)-41000=74200$.

Luego, queda verificado que el modelo cumple.

INTERPRETA

Si tú o tus papas tienen planes de telefonía celular, expresa mediante funciones el valor que pagan cada mes como función del número de minutos que consumen.

3.4.5 Aplicación de funciones definidas por tramos.

En el siguiente video se presenta un ejemplo de la vida real en que se tiene que modelar usando una función definida por partes, en las tarifas de muchos servicios se tienen que usar más de una fórmula.

http://www.youtube.com/watch?v=VQge5hGpO2c

Observa el video y realiza los siguientes ejercicios propuestos.

1. Revisa la forma como se factura los servicios públicos en tu casa (agua, luz, gas) ¿Es posible representar el valor de la factura mediante una función definida por partes?

2. Consulta con tu empresa de telefonía fija los diferentes planes que ofrecen a los clientes, y realiza un modelo que represente el valor a pagar según sean los minutos consumidos de cada plan.

3.4.6 Conceptos previos de función parte entera.

Continuando con nuestro estudio de las funciones definidas por tramos, consideramos ahora la función parte entera de x . En muchas situaciones cotidianas es común utilizar estas funciones, por ejemplo en un parqueadero que cobra $3000 hora o fracción de hora; al pagar a una persona que vende minutos a celular que cobra $200 minuto o fracción de minuto, etc.

Esta función se utiliza mucho en matemáticas para ilustrar algunas características importantes de las funciones, y se define de la siguiente manera.

Si x es un número real, la parte entera de x, simbolizada por $[\![x]\!]$ es igual al entero n, tal que $n \le x < n+1$

EJEMPLO: hallar la parte entera de 2.35; 3.99; -4.67 y 4.

SOLUCIÓN

- El número 2.35 se ubica entre los enteros 2 y 3, es decir $2 \leq 2.35 < 2+1$, por tanto $[\![2.35]\!] = 2$
- El número 3.99 se ubica entre los enteros 3 y 4, es decir $3 \leq 3.99 < 3+1$, por tanto $[\![3.99]\!] = 3$
- El número -4.67 se ubica entre los enteros -5 y -4, es decir $-5 \leq -4.67 < -5+1$, por tanto $[\![-4.67]\!] = -5$
- La parte entera de un número entero es el mismo número, entonces $[\![4]\!] = 4$

Para fortalecer la temática, debes realizar los siguientes ejercicios:

1. Realiza las gráficas de las siguientes funciones:

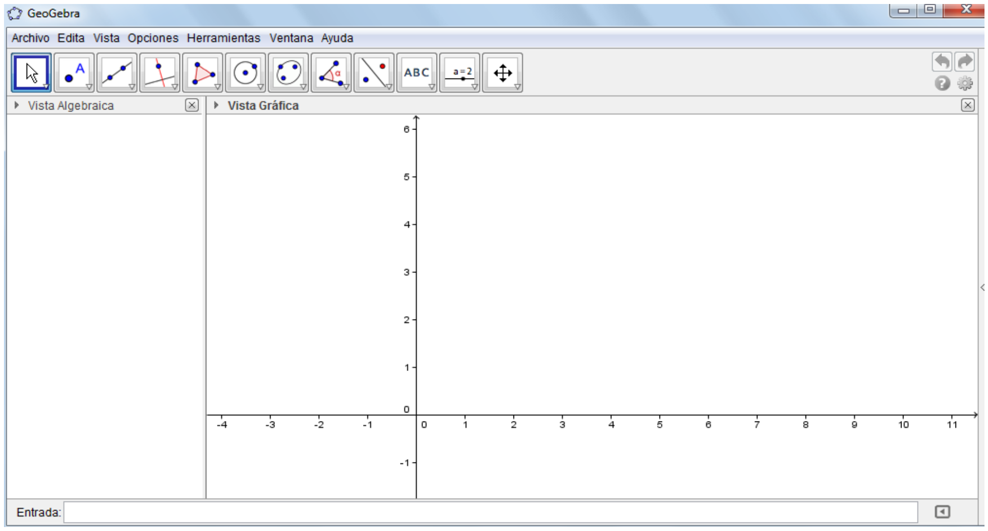
A. $f(x) = [\![x]\!]$
B. $f(x) = [\![x+2]\!]$
C. $f(x) = [\![x-3]\!]$
D. $f(x) = 2[\![x]\!]$

3.4.7 Gráficas de funciones parte entera en Geogebra.

A continuación se mostrará cómo realizar gráficas de funciones parte entera en el programa Geogebra.

1. Abrir el programa de Geogebra.

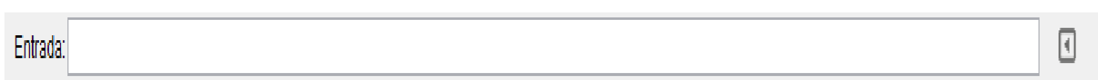
Figura 3-13: Imagen que representa el primer paso de cómo realizar una gráfica de función parte entera con el programa Geogebra.



2. En la barra de entrada se ingresa la expresión analítica de la función, en este ejemplo vamos a representar la siguiente función:

$$f(x) = [\![x - 2]\!]$$

Figura 3-14: Imagen que representa el segundo paso de cómo realizar una gráfica de función parte entera con el programa Geogebra.

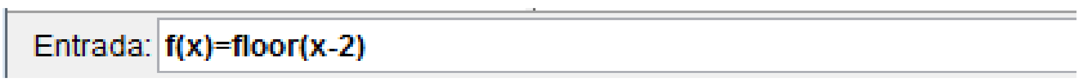


3. Para ingresar la función en la entrada vamos a utilizar el comando $f(x) = \text{floor}$.

Figura 3-15: Imagen que representa el tercer paso de cómo realizar una gráfica de función parte entera con el programa Geogebra.

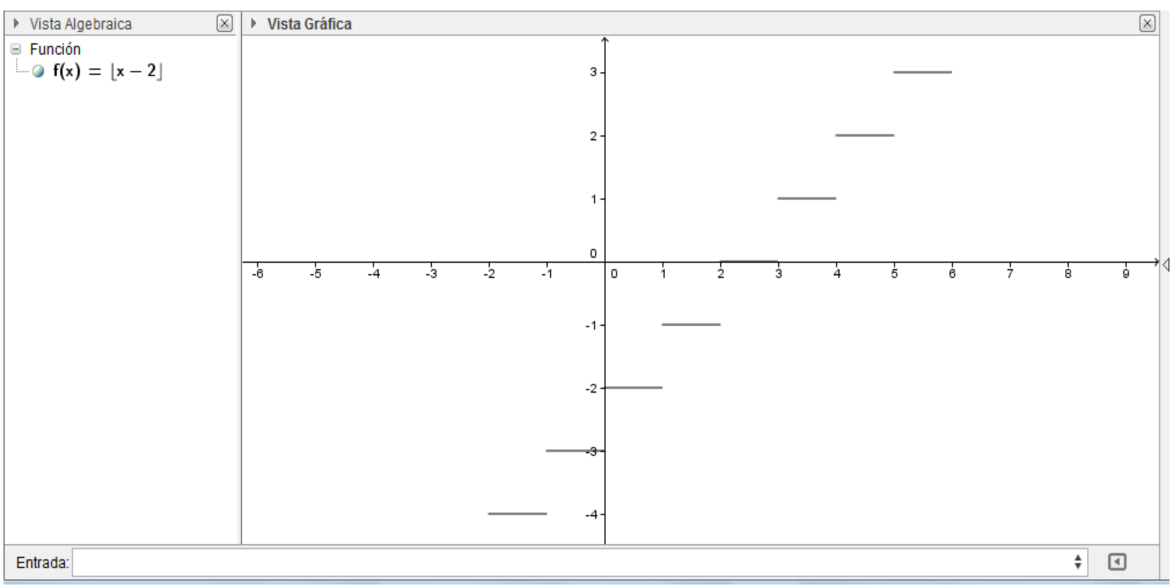
4. Después de ingresar el comando floor, abrimos un paréntesis y en éste escribimos el término que debe estar en parte entera, en este caso $x-2$.

Figura 3-16: Imagen que representa el cuarto paso de cómo realizar una gráfica de función parte entera con el programa Geogebra.



5. Al ingresar toda la función, presione la tecla enter y verifique que en la ventana algebraica aparezca la expresión de la función que se desea representar y que en la ventana gráfica se represente la función.

Figura 3-17: Imagen que representa el quinto paso de cómo realizar una gráfica de función parte entera con el programa Geogebra.



- Realiza las gráficas de las siguientes funciones con el programa de Geogebra usando el comando $f(x) = \text{floor}\ (x)$.

  A. $f(x) = [\![x]\!] + 2$
  B. $f(x) = 2[\![x - 1]\!]$
  C. $f(x) = [\![x]\!] - 1$
  D. $f(x) = [\![x + 4]\!]$

3.4.8 Situación problema de modelación de funciones por tramos que implica función parte entera.

La tarifa de un taxi en Bogotá está determinada por unidades y el valor de una unidad es $70, la carrera carrera mínima (corresponde aproximadamente a 2 Km) tiene una tarifa de $3500 que corresponde a 50 unidades, la cual por cada 100 metros después de la carrera mínima, aumenta una unidad. Determina una función que represente el valor de una carrera que recorre x metros.

1. **COMPRENDER EL PROBLEMA**

Como están pidiendo el modelo para una carrera que recorre x metros, debemos interpretar que la carrera mínima es de 2000 metros y tendría un valor de $3500, también nos dicen que por cada 100 metros adicionales después de la carrera mínima, esta aumentará en una unidad la cual corresponde a $70, lo que quiere decir que si el taxi recorre 2099 metros tendrá el mismo valor de una carrera mínima ya que no ha recorrido los 100 metros adicionales.

Se pide determinar el valor que debe pagar un usuario de taxi en Bogotá. Para una mayor facilidad llamaremos x al número de metros que recorre el taxi y $C(x)$ al valor a pagar de cada usuario.

2. **PIENSE UN PLAN**

Vamos a representar en una tabla el valor $C(x)$ que debe pagar el usuario si la carrera tiene un recorrido de x metros.

Tabla 3-14: Tablas del valor que debe pagar el usuario del ejemplo de la situación problema de modelación de funciones por tramos que implican función parte entera.

$0 < x < 2100$	$C(x)$
100	3500
256	3500
897	3500
965	3500
….	……
1999	3500
2000	3500
2099	3500

$x \geq 2100$	$C(x)$
2100	3570
2200	3640
2300	3710
2350	3710
….	……
2399	3710
2401	3780

Tenemos claro el valor que se debe pagar, el problema es que no estamos llegando a un patrón para realizar nuestro modelo por esta razón se debe buscar siempre un patrón que generalice una ecuación para encontrar el valor a pagar si el taxi recorre x metros.

3. EJECUTE EL PLAN

Tabla 3-15: Tablas que representan el patrón del valor que debe pagar el usuario del ejemplo de la situación problema de modelación de funciones por tramos que implican función parte entera.

$0 < x < 2100$	$C(x)$
100	3500
256	3500
897	3500
965	3500
….	……
1999	3500
2000	3500

$x \geq 2100$	$C(x)$	$C(x)$
$2000 + 1(100)$	$3500 + 70(1)$	3570
$2000 + 2(100)$	$3500 + 70(2)$	3640
$2000 + 3(100)$	$3500 + 70(3)$	3710
$2000 + 4(100)$	$3500 + 70(4)$	3780
….	……	……
$2000 + m(100)$	$3500 + 70m$	

En la tabla 3-15 tenemos un valor constante, por lo tanto su representación será la función constante $C(x) = 3500$ si $0 < x < 2100$, que corresponde a los primeros 2000 metros (carrera mínima) incluyendo cualquier fracción de los primeros 100 metros.

En la tabla 3-15 para $x \geq 2100$ por el momento no se ve claramente el modelo, la razón es que un usuario puede confundir su valor a pagar si el taxi recorre 2199, 2299,….., metros. Por esta razón se debe hacer la siguiente interpretación.

Tabla 3-16: Tabla que representa el patrón del valor que debe pagar el usuario del ejemplo de la situación problema de modelación de funciones por tramos que implican función parte entera.

$C(x)$	Restricción	$C(x)$
$3500+70(0)$	$0 < x < 2000+100$	3500
$3500+70(1)$	$2000+100(1) \leq x < 2000+100(2)$	3570
$3500+70(2)$	$2000+100(2) \leq x < 2000+100(3)$	3640
$3500+70(3)$	$2000+100(3) \leq x < 2000+100(4)$	3710
$3500+70(4)$	$2000+100(4) \leq x < 2000+100(5)$	3780
……		……
$3500+70m$	$2000+100m \leq x < 2000+100(m+1)$	

Como $C(x) = 3500+70m$ si $2000+100m \leq x < 2000+100(m+1)$ entonces si restamos 2000 a la restricción tenemos $100m \leq x-2000 < 100(m+1)$ y si dividimos por 100 nos queda $m \leq \frac{x-2000}{100} < m+1$, el cual por definición de parte entera resulta la expresión $\left[\!\left[\frac{x-2000}{100} \right]\!\right] = m$

Como $C(x) = 3500+70m$ podemos concluir que

$$C(x) = 3500+70\left[\!\left[\frac{x-2000}{100} \right]\!\right] \quad \text{si} \quad x \geq 2100$$

Para terminar nuestro modelo de función por tramos, el cual contiene parte entera, reunimos las dos ecuaciones que nos representan el valor a pagar según la condición, de la siguiente manera:

$$C(x) = \begin{cases} 3500 & \text{si} \quad 0 < x < 2100 \\ 3500 + 70\left[\!\left[\frac{x-2000}{100} \right]\!\right] & \text{si} \quad x \geq 2100 \end{cases}$$

4. MIRAR HACIA ATRÁS

Vamos a verificar si el modelo cumple. Si un usuario solo hace un recorrido de 1578 metros, es una carrera mínima, por lo cual debe pagar $3500; si el recorrido es de 2099 metros, no ha recorrido 100 metros de más, por lo cual no debe pagar una unidad adicional, pero si recorre 2401 debe pagar 4 unidades adicionales para un total de $3780.

$$C(2099) = 3500 + 70\left[\left\lfloor \frac{2099-2000}{100} \right\rfloor\right] = 3500$$

$$C(2401) = 3500 + 70\left[\left\lfloor \frac{2401-2000}{100} \right\rfloor\right] = 3780$$

Luego, queda verificado que el modelo se ajusta a la realidad.

- Consulta cuál es el costo de la carrera de un taxi en la ciudad de Medellín. Realiza una función que represente el valor que tiene que pagar un usuario al utilizar un taxi que hace un recorrido de x metros.

3.4.9 Situación problema de modelación de funciones por tramos que implica función cuadrática.

En algunas situaciones se necesita realizar un modelo con función cuadrática, ya que a un dato se le puede aplicar diferentes condiciones a la vez. Por ejemplo, se compra 10 productos a $25000 pesos, pero la vendedora nos dice que si llevamos al por mayor, nos hacen un descuento de $200 por cada unidad adicional a 10 y sobre todas las unidades compradas.

Sería entonces equivocado realizar el modelo como una función que contiene dos tramos lineales

$$C(x) = \begin{cases} 25000x & \text{si} \quad x \leq 10 \\ 24800x & \text{si} \quad x > 10 \end{cases}$$

En estas situaciones se debe modelar una función cuadrática como se muestra a continuación:

$$C(x)=\begin{cases}25000x & \text{si} \quad x\leq 10\\ x\left[25000-200(x-10)\right] & \text{si} \quad x>10\end{cases}$$

Vamos a mirar un ejemplo realizado con los 4 pasos de George Pólya para obtener un mayor entendimiento de como paso a paso se consigue un modelo de funciones por tramos que contiene función cuadrática.

EJEMPLO

En una huerta, cada árbol produce 500 frutas (en promedio) si se siembran hasta 25 árboles. Si se siembran más de 25 árboles, cada árbol “en toda la huerta”, deja de producir 5 frutas (en promedio) por cada árbol adicional que se siembre.

Hallar una función que represente el total de frutas que se produce en función o en términos del número de árboles sembrados en la huerta.

SOLUCIÓN

1. **COMPRENDER EL PROBLEMA**

Se pide determinar el total de frutas que produce los árboles sembrados. Para mayor facilidad vamos a utilizar la siguiente notación:

x = Número de árboles que se van a sembrar.

$N(x)$ = Número de frutas que se produce.

Se debe tener en cuenta que hasta el árbol 25, cada uno produce 500 frutas, pero que si se siembran en total 26 árboles, cada árbol comienza a producir 495 frutas y se sigue reduciendo 5 frutas por cada nuevo árbol plantado.

2. PIENSE UN PLAN

Vamos a representar en una tabla la cantidad $N(x)$ de frutos que produce la huerta sembrados x árboles.

Tabla 3-17: Tablas que representan la cantidad de frutos del ejemplo de la situación problema de la modelación de funciones por tramos que implica función cuadrática.

x	$N(x)$
1	500
2	1000
3	1500
….	…….
25	12500

x	$N(x)$
26	12870
27	13230
28	13580
….	…….
31	14570

Tenemos claro la cantidad de frutas que produce la huerta según sea el número de árboles sembrados, el problema es que no estamos llegando a un patrón para realizar nuestro modelo, por esta razón se debe buscar siempre un patrón que generalice una ecuación para encontrar el total de frutas si se han plantado x árboles.

3. EJECUTE EL PLAN

Tabla 3-18: Tablas que representan el patrón de la cantidad de frutos del ejemplo de la situación problema de la modelación de funciones por tramos que implica función cuadrática.

x	$N(x)$
1	500(1)
2	500(2)
3	500(3)
….	…….
25	500(25)
………	………
n	500(n)

x	Producción de cada árbol	$N(x)$
25 + 1	500 – 1(5)	(25+1)(500-1(5))
25 + 2	500 – 2(5)	(25+2)(500-2(5))
25 + 3	500 – 3(5)	(25+3)(500-3(5))
…….	………..	……………….
……..	…………	………………
25 + n	500 – n (5)	(25+n)(500-n (5))

En la tabla de la izquierda tenemos una función lineal, en la cual a medida que se siembran árboles (hasta 25), cada uno de estos produce 500 frutos, por lo tanto su representación será la función lineal $N(x)=500x$ para los primeros 25 árboles, es decir, para $1 \le x \le 25$.

En la tabla de la derecha por el momento tenemos que $N(x)=[25+n][500-n(5)]$ pero se debe recordar que $x=$ número de árboles, por lo tanto $x=25+n$.

Debemos despejar a n para que quede en términos del número de árboles x. Despejando a n tenemos que $n=x-25$ y sustituyendo en la ecuación $N(x)=[25+n][500-n(5)]$ tenemos $N(x)=[25+(x-25)][500-(x-25)5]$ quedando como resultado $N(x)=x[500-5(x-25)]$ si $x>25$.

Como $N(x)\ge 0$ y es $x \ge 0$ debe ser $500-5(x-25)\ge 0$, por lo tanto $x \le 125$.

Para terminar nuestro modelo de función por tramos, reunimos las dos ecuaciones que nos representan el total de frutos según la condición, de la siguiente manera:

$$N(x)=\begin{cases} 500x & \text{si} \quad 1 \le x \le 25 \\ x[500-5(x-25)] & \text{si} \quad 25 < x \le 125 \end{cases}$$

$$N(x)=\begin{cases} 500x & \text{si} \quad 1 \le x \le 25 \\ -5x^2+625x & \text{si} \quad 25 < x \le 125 \end{cases}$$

4. **MIRAR HACIA ATRÁS**

Vamos a verificar si el modelo cumple. Si se siembran 10 árboles, esta ingresa al primer tramo y da como resultado 5000 frutos; si se siembran 31 árboles, esta ingresa al segundo tramo $N(31)=-5(31)^2+625(31)=14570$.

Luego, queda verificado que el modelo cumple.

3.4.10 Problemas de modelación de funciones por tramos

En los siguientes problemas, realiza el modelo que represente cada enunciado realizando el mismo proceso elaborado en los ejemplos.

1. La terminal de transportes cuenta con un servicio de maletero, el cual cobra $2000 por menos de una hora de servicio, $3500 de una a dos horas y $5000 por más de dos horas.

- **a)** Determina una función C que relacione el precio y el tiempo que se guarda la maleta.
- **b)** Halla el dominio, el rango y traza la gráfica de la función C
- **c)** En un día se guardan 5 maletas por menos de una hora, 15 de una a dos horas y 17 por todo el día. Halla el total recolectado en ese día por el servicio de maletero.

2. Una empresa de transporte particular terrestre cobra una tarifa de viaje por kilómetro recorrido de la siguiente manera: si el viaje es de menos de 20 kilómetros entonces el costo es de $30000. Si el viaje es entre 20 y 30 kilómetros tiene un costo de $1000 el kilómetro. Si es de más de 30 kilómetros tiene un costo de 700 el kilómetro. Determina una expresión que represente el precio P(x) por los kilómetros recorridos.

3. Al elevarse el aire seco se expande y al hacerlo se enfría a una tasa de aproximadamente 1^0C por cada 100 metros de altura, hasta aproximadamente 8 Km. A más de 8 Km se enfría a una tasa de 2^0C por cada 100 metros de altura.

- **a)** Si la temperatura a nivel del suelo es de 20^0C, escriba un modelo que represente la temperatura a una altitud h.
- **b)** ¿Qué temperatura se espera si un aeroplano despega y alcanza una altura de 5 km? ¿Cuál sería la temperatura si alcanzara una altura de 8,5 Km?

4. A fin de regular el consumo de electricidad la alcaldía de una ciudad fijó las siguientes tarifas: Por los primeros 200 KWh se pagará a $300 el KWh, por los siguientes 400 KWh se pagará a $500 el KWh y cada KWh adicional costará $800. Exprese el valor de la factura como una función de la cantidad de KWh consumidos al mes.

5. En un teatro con capacidad para 800 personas se presenta cierta obra a determinado colegio, bajo las siguientes condiciones: cobra a cada estudiante $10.000 hasta llenar la cuarta parte de los cupos. Si la demanda es de más de la cuarta parte, por cada estudiante adicional, se hace una rebaja de $25 a todos y cada uno de los asistentes. Hallar la cantidad C de dinero que el teatro recauda en términos del número x de estudiantes asistentes de tal manera que no dé pérdidas.

6. Hay promoción de azúcar. El kilo vale 1000 pesos, pero por la compra entre 20 y 30 kilos, le hacen un descuento del 10% en el precio por kilo sobre cada kilo adicional. Si compra más de 30 de kilos, le hacen un descuento del 15% en el precio por kilo sobre cada kilo adicional. Determina un modelo que represente el precio que debe pagar un cliente por los kilos comprados.

7. Los naranjos que crecen en la Pintada producen 600 naranjas por año si no se plantan más de 20 árboles por hectárea. Por cada naranjo adicional por hectárea el rendimiento por árbol decrece en 15 naranjas. Expresar el número de naranjas N producidas en cada hectárea por año como una función del número de naranjos x plantados por hectárea.

En los siguientes ejercicios ayúdate de la función parte entera para formular el modelo que represente cada situación.

8. El costo de una llamada telefónica diurna a India es de $690 por minuto o fracción de minuto para los primeros 7 minutos y $530 por cada minuto o fracción de minuto adicional. Escribe una función que represente el costo de la llamada telefónica en función del tiempo en minutos que dura la llamada. Traza la gráfica del costo.

9. Un parqueadero público tiene una tarifa de $4000 la primera hora y $2500 por cada hora o fracción adicional. Representa la función que da el precio que debe pagarse durante las cuatro posibles horas que puede estar un carro en el parqueadero.

10. Un centro comercial cobra por el parqueadero $1000 por cada cuarto de hora o fracción. Determina un modelo que represente el costo que debe pagar un cliente en función del tiempo de permanencia en el parqueadero.

Calcula el costo de parqueadero para 5, 10, 15, 35 minutos; y 2 horas y 17 minutos.

¿Durante qué intervalo de tiempo puede permanecer un vehículo en el parqueadero para que el costo sea de exactamente $5000? ¿Exactamente $7000?

Traza la gráfica de la función para $t \geq 0$.

Propón una función para el cobro de un parqueadero, de modo que el costo de cada cuarto de hora o fracción sea de $1500.

3.5 Prueba final

Esta prueba final tiene las mismas condiciones que la prueba diagnóstico, en la cual se diseñó 8 problemas de funciones por tramos distribuidos de la siguiente manera: 4 problemas que contiene tramos de funciones lineales, 2 que contienen tramos de funciones cuadráticas y 2 que contiene tramos de funciones parte entera. Los estudiantes debían realizar el modelo que representara la situación problema, en donde ellos a partir de un patrón identificaran la expresión algebraica que ayudara a determinar el modelo.

Cada problema tenía un grado de dificultad diferente, algunos se realizaban con dos tramos, otros con tres, en algunos se tenía que tener en cuenta el máximo valor que adquiere el primer para tenerlo en cuenta al inicio del segundo tramo, en otros no era necesario, todo dependía de las condiciones que se presentaran en el problema.

El propósito de esta evaluación es determinar si los estudiantes adquirieron un aprendizaje significativo a partir de las actividades que fueron implementadas después de la prueba diagnóstico.

El formato de la prueba fue el siguiente:

UNIDAD EDUCATIVA SAN MARCOS

"Educando en valores a la luz del Evangelio"

PRUEBA MODELACIÓN DE FUNCIONES POR TRAMOS
GRADO ONCE

NOMBRE: **GRUPO:**

1. En un supermercado están ofreciendo las sandías a \$5000 cada kilo si compra menos de 10 kilos, a \$4000 el kilo si compra entre 10 y 50 kilos y las deja a \$3000 si compra más de 50 kilos.

- **a)** Determine una función que represente el precio total que tiene que pagar un cliente en función del número de kilos que compre.
- **b)** ¿Cuánto dinero ahorrará un cliente que lleve 10 kilos con respecto al que lleva 9 kilos?

2. El pago mensual para estar suscrito a un plan de llamadas de celulares es de \$ 10000 y contempla los primeros 50 minutos a una tarifa de \$150 y \$100 los minutos adicionales durante el mes. Escriba una función que represente el costo total del plan según sea los minutos hablados en el mes. Realiza la gráfica que representa este modelo.

3. A fin de regular el consumo de agua la alcaldía de Medellín fijó las siguientes tarifas: Por los primeros 20 m^3 se pagará a \$1000 el m^3, por los siguientes 40 m^3 se pagará a \$1100 el m^3 y cada m^3 adicional costará \$1200. Exprese el valor de la factura como una función de la cantidad de m^3 consumidos al mes.

4. Al elevarse el aire seco se expande y al hacerlo se enfría a una tasa de aproximadamente 1^0C por cada 100 metros de altura, hasta aproximadamente 8 Km. A más de 8 Km se enfría a una tasa de 2^0C por cada 100 metros de altura.

- **a)** Si la temperatura a nivel del suelo es de 20^0C, escriba un modelo que represente la temperatura a una altitud h.
- **b)** ¿Qué temperatura se espera si un aeroplano despega y alcanza una altura de 5 km? ¿Cuál sería la temperatura si alcanzara una altura de 8,5 Km?

5. Un viaje subsidiado por una escuela costará a cada estudiante 1500 pesos si viajan no más de 150 estudiantes; sin embargo el costo a pagar por estudiante se reduciría 50 pesos por cada uno más que se inscriba al grupo de los 150. Exprese los ingresos recibidos por la escuela en función del número de inscritos a dicho viaje.

6. Una finca está sembrada de mangos a razón de 80 plantas por hectárea. Cada planta produce un promedio de 960 mangos. Por cada planta adicional que se siembre, el promedio de producción por planta (en todas las hectáreas) se reduce en 10 mangos. Expresar la producción de mangos por hectárea como función del número de plantas sembradas.

En los siguientes ejercicios ayúdate de la función parte entera para formular el modelo que represente cada situación.

7. En un parqueadero, el cobro a los usuarios se realiza de la siguiente manera: $1500 de cobro básico aplicado a todos los vehículos, sin importar cuanto tiempo estén en el lugar y $800 por cada hora o fracción de hora que este el vehículo en el parqueadero. Determine una función que represente el costo que debe pagar un usuario del parqueadero.

8. El costo de una llamada de larga distancia desde Colombia a New York tiene un costo de $740 para el primer minuto y 580 para cada minuto adicional (o parte de minuto) hasta 60 minutos. Más de 60 minutos tiene un costo fijo de $36000 hasta 90 minutos, luego se corta la llamada. Determine una función que represente el costo de la llamada telefónica en función del tiempo y grafíquela.

4. Resultados

En este apartado se presentarán los resultados que se obtuvieron de la propuesta, es importante mencionar que estos se obtuvieron de la prueba diagnóstica y la prueba final, realizando un análisis comparativo entre los resultados de cada prueba, ya que estos se analizaron estadísticamente para permitir evidenciar la pertinencia de las actividades que se implementaron en la UEPS.

La propuesta se aplicó a 129 estudiantes del grado once de la Unidad Educativa San Marcos del municipio de Envigado. Estos estudiantes están distribuidos en 4 grupos de la siguiente manera:

- Once A: Grupo femenino de 31 estudiantes.
- Once B: Grupo mixto de 35 estudiantes.
- Once C: Grupo masculino de 29 estudiantes.
- Once D: Grupo masculino de 34 estudiantes.

Las actividades que se realizaron en la UEPS fueron trabajadas en grupo de 3 estudiantes, algunos quedaron de 4. Estas actividades se iban desarrollando en el proceso de clase y algunas se debían realizar en casa.

PRUEBA DIAGNOSTICA

La prueba diagnóstica fue diseñada con 8 problemas de modelación de funciones por tramos, de los cuales 4 consistían en modelar con funciones lineales, 2 con función cuadrática y 2 con parte entera; esta prueba se diseñó con el propósito de determinar fortalezas o dificultades que tiene el estudiante para realizar un modelo de una función por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto.

Al realizar la prueba diagnóstica se observaba que muchos estudiantes no se sentían muy seguros mientras la estaban trabajando, otros no sabían cómo iniciar con algunos ejercicios, por esta razón se les informo a los estudiantes que afrontaran la prueba con los conocimientos que tenían y que de esta forma se podría determinar cuáles son las dificultades presentadas, ya que conociendo los vacíos se pueden diseñar actividades que ayuden a fortalecer la temática y lograr obtener buenos resultados en la prueba final.

A continuación se presenta una tabla y un análisis correspondiente de cada prueba diagnóstica, donde se indica grupo, número de problemas aprobados y su porcentaje.

Tabla 4-1: Tabla de resultados sobre los modelos por tramos que contienen función lineal, función cuadrática y función parte entera de la prueba diagnóstico.

	Modelo por tramos que contiene función lineal.			**Modelo por tramos que contiene función cuadrática.**			**Modelo por tramos que contiene función parte entera.**		
	A	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**
ONCE A	124	19	15,3%	62	0	0%	62	2	3,2%
ONCE B	140	21	15%	70	0	0%	70	10	14,2%
ONCE C	116	22	19%	58	2	3,4%	58	13	22,4%
ONCE D	136	33	24,2%	68	5	7,3%	68	30	44,1%
TOTAL	516	95	18,4%	258	7	2,7%	258	55	21,31%

A: Cantidad de problemas propuestos al grupo.

B: Cantidad de problemas aprobados en el grupo.

C: Porcentaje de problemas aprobados en el grupo.

PRUEBA FINAL

La prueba final fue aplicada después de realizar las actividades de la UEPS, esta fue diseñada con 8 problemas de modelación de funciones por tramos, de los cuales 4 consistían en modelar con funciones lineales, 2 con función cuadrática y 2 con parte entera; esta prueba se diseñó con el propósito de determinar si los estudiantes mejoraron a la hora de realizar el modelo de una función por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto.

Al realizar la prueba final se observaba que los estudiantes se sentían más seguros de lo que estaban trabajando, realizaban todos los ejercicios, aunque una cantidad mínima de estudiantes se encontraban igual que en la prueba diagnóstica. Se observó cualitativamente un buen desempeño durante el desarrollo de esta prueba.

A continuación se presenta una tabla y un análisis correspondiente de prueba final, donde se indica grupo, número de problemas aprobados y su porcentaje.

Tabla 4-2: Tabla de resultados sobre los modelos por tramos que contienen función lineal, función cuadrática y función parte entera de la prueba final.

	Modelo por tramos que contiene función lineal.			**Modelo por tramos que contiene función cuadrática.**			**Modelo por tramos que contiene función parte entera.**		
	A	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**	**A**	**B**	**C**
ONCE A	124	67	54%	62	32	51,6%	62	22	35,4%
ONCE B	140	79	56,4%	70	28	40%	70	23	32,8%
ONCE C	116	72	62%	58	31	53,4%	58	37	63,7%
ONCE D	136	88	64,7%	68	32	47%	68	34	50%
TOTAL	516	306	59,3%	258	123	47,6%	258	116	44,96%

A: Cantidad de problemas propuestos al grupo.

B: Cantidad de problemas aprobados en el grupo.

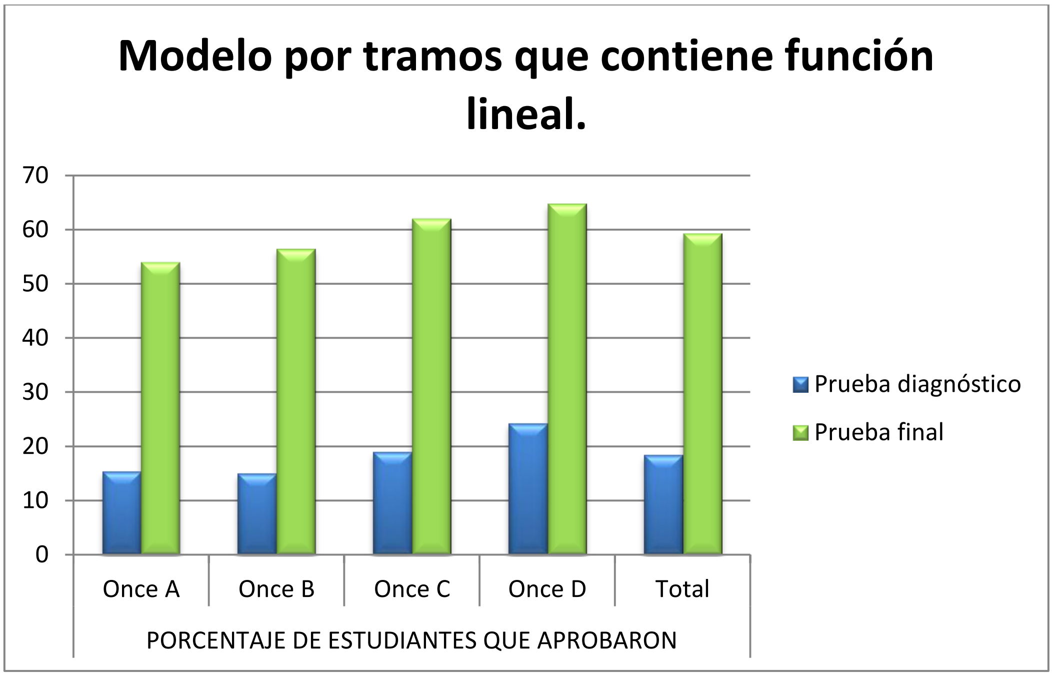
C: Porcentaje de problemas aprobados en el grupo.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para realizar el análisis de los resultados se presentan los siguientes gráficos estadísticos basados en las tablas de la prueba diagnóstica y final en donde se determinara la diferencia porcentual entre el modelo de una función por tramos que contiene función lineal, cuadrática y parte entera, porcentajes que se obtuvieron en la prueba diagnóstica con respecto a la prueba final. También se realizara una tabla y gráfico donde se determine el porcentaje del resultado general de la prueba diagnóstica y la prueba final.

GRÁFICO DE BARRAS PARA MODELO POR TRAMOS QUE CONTIENE FUNCIÓN LINEAL.

Figura 4-1: Gráfico de barras que representa el modelo por tramos que contiene función lineal.



Se puede observar en el gráfico que el porcentaje de aprobación mejoró en la prueba final con respecto a la prueba diagnóstico. Las diferencias porcentuales en el modelo de funciones que contienen función lineal son las siguientes:

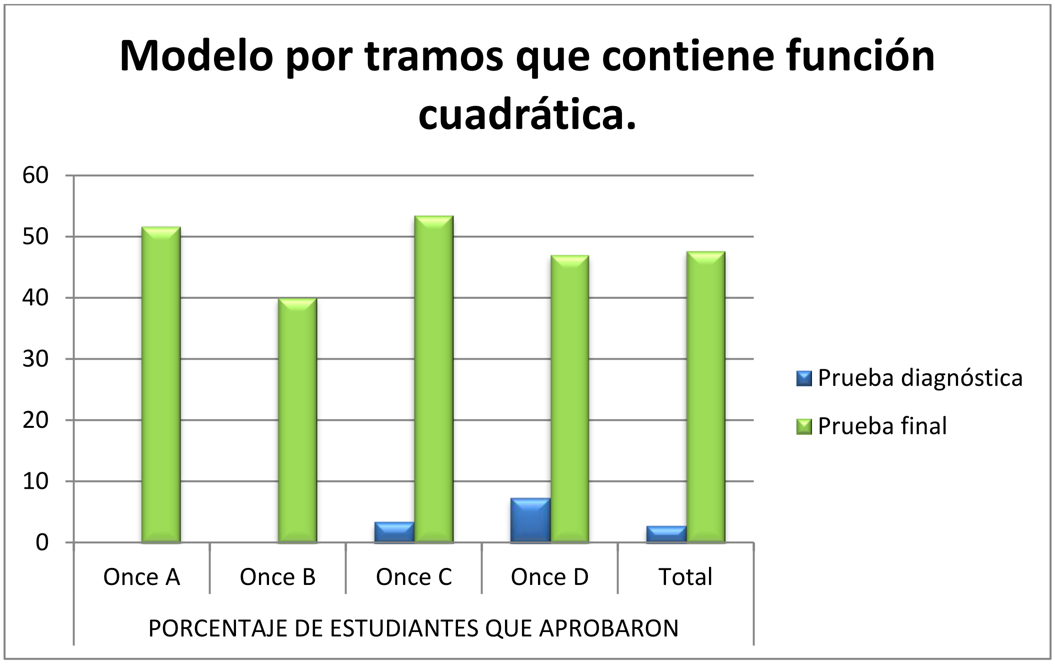
- La aprobación para el grupo once A aumentó en un 38,7%.
- La aprobación para el grupo once B aumentó en un 41,4%.
- La aprobación para el grupo once C aumentó en un 43%.
- La aprobación para el grupo once D aumentó en un 40,5%

- La aprobación para el grado once aumentó en un 40,9%.

.

GRÁFICO DE BARRAS PARA MODELO POR TRAMOS QUE CONTIENE FUNCIÓN CUADRÁTICA.

Figura 4-2: Gráfico de barras que representa el modelo por tramos que contiene función cuadrática.



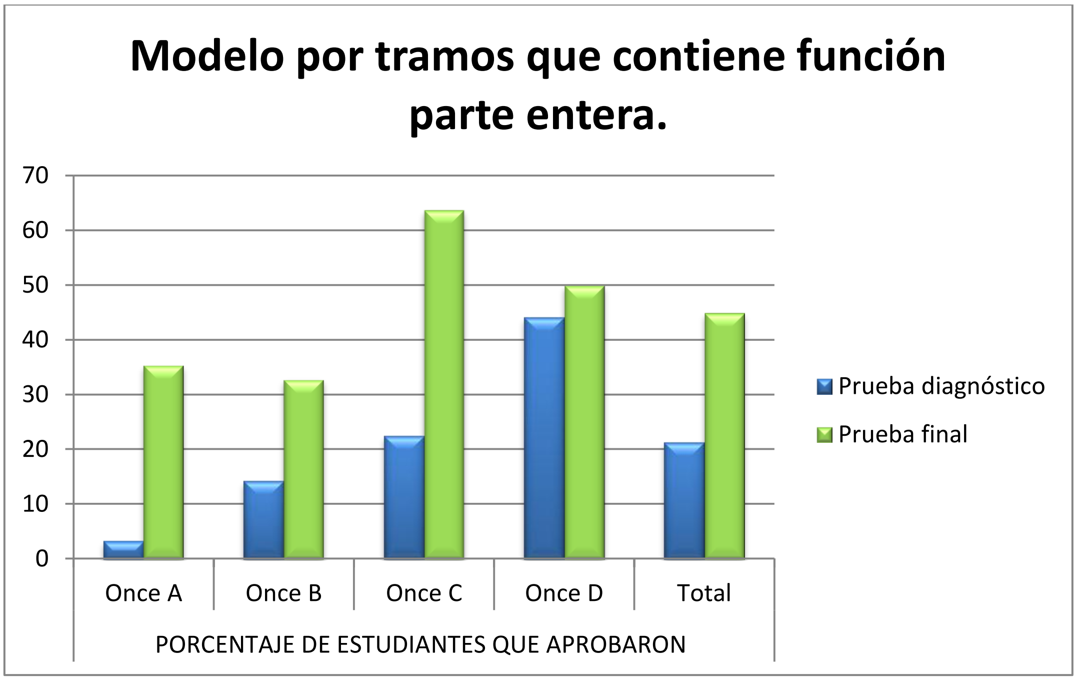
Se puede observar en el gráfico que el porcentaje de aprobación mejoró en la prueba final con respecto a la prueba diagnóstico. Las diferencias porcentuales en el modelo de funciones que contienen función cuadrática son las siguientes:

- La aprobación para el grupo once A aumentó en un 51,6%.
- La aprobación para el grupo once B aumentó en un 40%.
- La aprobación para el grupo once C aumentó en un 50%.
- La aprobación para el grupo once D aumentó en un 39,7%

- La aprobación para el grado once aumentó en un 44,9%.

GRÁFICO DE BARRAS PARA MODELO POR TRAMOS QUE CONTIENE FUNCIÓN PARTE ENTERA.

Figura 4-3: Gráfico de barras que representa el modelo por tramos que contiene función parte entera.



Se puede observar en el gráfico que el porcentaje de aprobación mejoró en la prueba final con respecto a la prueba diagnóstico. Las diferencias porcentuales en el modelo de funciones que contienen función parte entera son las siguientes:

- La aprobación para el grupo once A aumentó en un 32,2%.
- La aprobación para el grupo once B aumentó en un 18,6%.
- La aprobación para el grupo once C aumentó en un 41,3%.
- La aprobación para el grupo once D aumentó en un 5,9%

- La aprobación para el grado once aumentó en un 23,65%.

A continuación se presentan las tablas y gráfico de la prueba diagnóstico y la prueba final de modelación de funciones por tramos en donde se hace un análisis general de las pruebas en cada grupo y en el grado, en donde se puede determinar si la UEPS fue acertada para mejorar el porcentaje de aprobación en problemas de modelación de funciones por tramos.

TABLA DE RESULTADOS EN LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

Tabla 4-3: Tabla de resultados de la prueba diagnóstico de modelación de funciones por tramos.

	Cantidad de preguntas en la prueba diagnóstica.	**Cantidad de preguntas aprobadas en la prueba diagnóstica.**	**Porcentaje de cantidad de preguntas aprobadas en la prueba diagnóstica.**
ONCE A	248	21	8,4%
ONCE B	280	31	11%
ONCE C	232	37	16%
ONCE D	272	68	25%
TOTAL	1032	157	15,2%

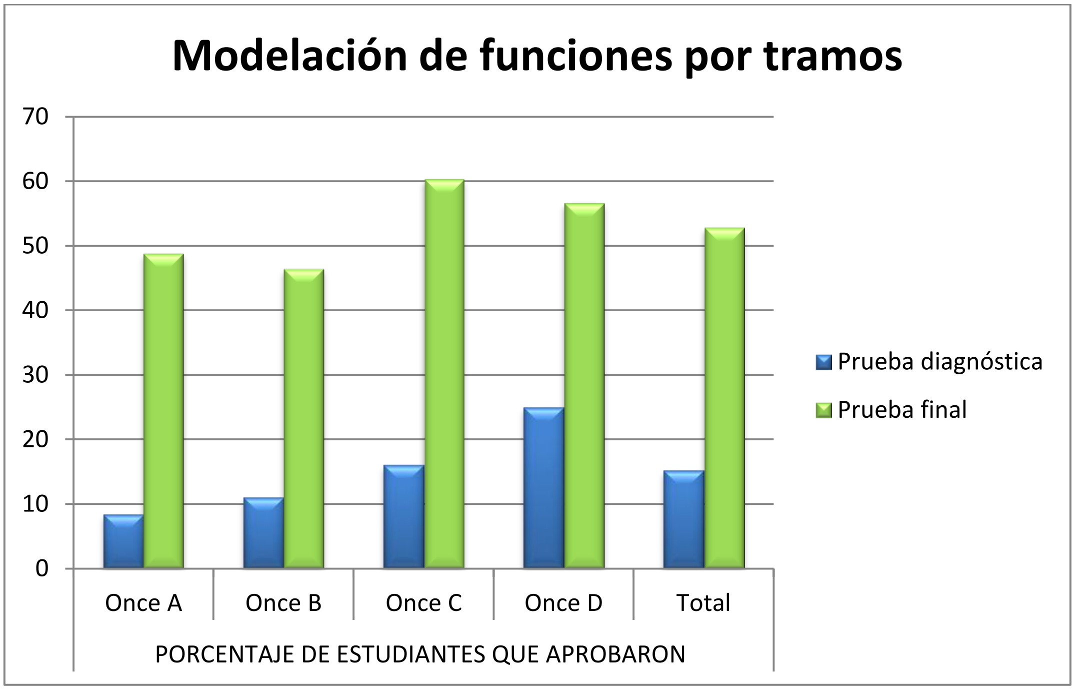
TABLA DE RESULTADOS EN LA PRUEBA FINAL

Tabla 4-4: Tabla de resultados de la prueba final de modelación de funciones por tramos.

	Cantidad de preguntas en la prueba final	**Cantidad de preguntas aprobadas en la prueba final**	**Porcentaje de cantidad de preguntas aprobadas en la prueba final**
ONCE A	248	121	48,8%
ONCE B	280	130	46,4%
ONCE C	232	140	60,3%
ONCE D	272	154	56,6%
TOTAL	1032	545	52,8%

GRÁFICO DE RESULTADOS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA CON RESPECTO A LA PRUEBA FINAL

Figura 4-4: Gráfico de barras que representa la modelación de funciones por tramos.



Se puede observar en el gráfico que el porcentaje de aprobación mejoró en la prueba final con respecto a la prueba diagnóstico. Las diferencias porcentuales en la modelación de funciones por tramos son las siguientes:

- La aprobación para el grupo once A aumentó en un 40,4%.
- La aprobación para el grupo once B aumentó en un 35,3%.
- La aprobación para el grupo once C aumentó en un 44,36%.
- La aprobación para el grupo once D aumentó en un 31,6%

- La aprobación para el grado once aumentó en un 37,6%.

Observando los resultados en las tablas y gráficos se puede evidenciar un avance significativo en la modelación de funciones por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto. Se observa cómo los estudiantes mejoraron en toda clase de problemas de modelación de funciones por tramos bien sea que contengan funciones lineales, cuadráticas o parte entera.

A pesar de que se obtuvo un mejor resultado en el modelo de funciones por tramos a partir de la lineal, se logró una mayor mejoría en los modelos por tramos a partir de funciones cuadráticas.

También se logró evidenciar en la prueba final que la mayoría de los estudiantes trabajaron todos los ejercicios, desafortunadamente no todos los tenían buenos, pero a comparación con las pruebas diagnóstico (en donde muchos ejercicios se quedaron en blanco) se observaba un mejor trabajo y concepto de modelación de funciones por tramos por parte de los estudiantes.

5. Conclusiones y recomendaciones

Con base en los resultados obtenidos y los procesos desarrollados durante el proceso de clase se plantean las siguientes conclusiones y recomendaciones.

5.1 Conclusiones

En la implementación de esta propuesta de enseñanza en el aula en el grado once de la Unidad Educativa San Marcos se puede concluir que:

- Las UEPS, su diseño e implementación, permitió comprender que el desarrollo de actividades ajustadas a la realidad personal, social y cultural de los estudiantes despierta en ellos una participación activa que favorece y motiva el entusiasmo por el aprendizaje, valorar el saber matemático y sus logros personales.

- Las actividades que se desarrollaron a la hora de implementar la UEPS ayudaron a conseguir mejores resultados en la prueba final con respecto a la prueba diagnóstica, debido que se consiguió un porcentaje de aprobación de 52,8%, incrementando en un 37,6% con respecto a la prueba diagnóstico en donde se obtuvo un 15,2% de aprobación.

- La propuesta nos ofrece a los docentes posibilidades para encontrar una metodología donde los estudiantes son partícipes en sus procesos de aprendizaje y formación, en donde a partir de un trabajo colaborativo no solo se consigue logros académicos, sino que también se ayuda a cultivar valores de convivencia, propiciar la generación de ideas, su libre expresión y el respeto a las diferencias de los demás.

- La evaluación de la propuesta fue un proceso continuo desde la prueba diagnóstico, pasando por todas las actividades implementadas en la UEPS y terminando con la prueba final. En estas actividades se tuvo en cuenta el proceso procedimental, cognitivo y actitudinal para obtener un resultado no solo cuantitativo sino también cualitativo teniendo en cuenta las capacidades de los estudiantes en todas sus dimensiones.

- A pesar de que el resultado cuantitativo no fue muy alto, cualitativamente se alcanzaron grandes logros como fue el perder el miedo a los problemas en matemáticas, el trabajar completamente una evaluación y el realizar un trabajo colaborativo entre un grupo de personas.

- La propuesta permitió que los estudiantes durante todas las actividades se encontraran motivados, ya que no era una enseñanza tradicional. Si nosotros los docentes colocamos a prueba la curiosidad de nuestros estudiantes planteándoles problemas y preguntas cercanas a su cotidianidad, podemos despertarles el gusto por el pensamiento independiente proporcionándoles elementos para enfrentar la vida y tomar decisiones.

- Es importante aclarar que la experiencia durante la implementación de la propuesta no sólo fue para adquirir un conocimiento en los estudiantes, también fue para uno como docente de matemáticas. Todos aprendimos, ellos desde su gusto por aprender y yo desde cualificar mi práctica pedagógica afirmando la necesidad de implementar procesos de planeación y regulación en el aula.

5.2 Recomendaciones

Se recomienda para futuros trabajos relacionados con la modelación de funciones por tramos que después de trabajar la propuesta, trabajen la temática de composición de funciones. Teniendo estos conocimientos se puede realizar modelación de funciones por tramos en funciones compuestas. Un ejemplo que se recomienda es el siguiente:

- Suponga que un vehículo hace un recorrido inicialmente con una velocidad promedio de 70 Km/h en las primeras tres horas. Luego la velocidad promedio es de 40 Km/h en las dos horas siguientes. Suponga además que el consumo de gasolina es de $\frac{1}{35}$ de galón por cada Km en los primeros 175 Km de recorrido y luego es de $\frac{1}{25}$ de galón por cada Km recorrido. Denote con h la cantidad de horas, k el número de Km, g el número de galones, R el recorrido y c el consumo de gasolina. Describir $k = R(h)$, $g = c(k)$ y el consumo de gasolina como una función del número de horas empleadas en el recorrido.

A. Anexo: Prueba diagnóstico y final

A continuación se presentará la prueba diagnóstico realizada por una estudiante del grupo 11 B donde se puede evidenciar las dificultades que tenían por lo general los estudiantes, como no tener presente el valor máximo que se alcanzaba con el primer tramo para poder iniciar el segundo, al igual que no tenían presente colocar a restar el mayor valor del intervalo del primer tramo a la variable independiente cuando el termino iba a multiplicar la constante. También se puede evidenciar la dificultad que tenían con la modelación que implica funciones cuadráticas y parte entera. Algunos estudiantes dejaron muchos ejercicios en blanco.

También se presenta la prueba final de un estudiante del grupo 11 C. En la prueba final la mayoría de los estudiantes trabajaron toda la prueba, desafortunadamente tenían algunos errores que no permitían que el modelo cumpliera con el enunciado. La prueba que se presenta es de uno de los estudiante que demostró un aprendizaje significativo sobre la modelación de funciones por tramos.

Figura Anexo-1: Prueba diagnóstico resuelta por un estudiante.

UNIDAD EDUCATIVA SAN MARCOS
"Educando en valores a la luz del Evangelio"
PRUEBA DIAGNÓSTICA MODELACIÓN DE FUNCIONES POR TRAMOS
GRADO ONCE

NOMBRE: **GRUPO:** 11B. $\frac{2}{8}$.

1. Un museo cobra la entrada a grupos de acuerdo a las siguientes condiciones: los grupos con menos de 50 personas pagan $3500 por persona. Mientras que los grupos de 50 personas o más pagan una tarifa reducida de $3000 por persona.

a) Exprese el valor a pagar de un grupo como una función de la cantidad de personas que componen el grupo.

b) ¿Cuánto dinero ahorrara un grupo de 49 personas si incluyen una persona adicional?

A $F(x)\begin{cases} x \cdot 3500 & \text{si } x<50 \\ x \cdot 3000 & \text{si } x\geq 50 \end{cases}$

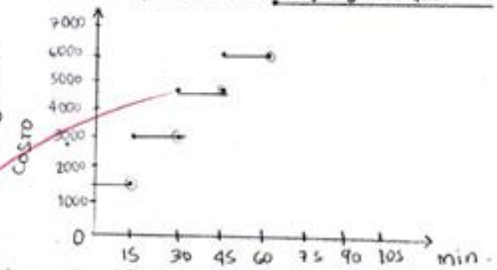
$3500 \cdot 49 = 171500$; $3000 \cdot 50 = 150000$; $171500 - 150000 = 21500$

R/ B Ahorrara $21500

2. Un nuevo plan de telefonía celular cobra $1500 por cada 15 minutos o fracción en la duración de la llamada y si la llamada dura más de una hora el costo será únicamente de $7500. Representa el modelo y la gráfica que establezca el cobro de la llamada.

z = cobro.

$$F(x)=\begin{cases} z=1500 & \text{si } x\leq 15 \\ z=3000 & \text{si } x\leq 30 \\ z=4500 & \text{si } x\leq 45 \\ z=6000 & \text{si } x<60 \\ z=7500 & \text{si } x\geq 60 \end{cases}$$



3. A fin de regular el consumo de electricidad la alcaldía de una ciudad fijo las siguientes tarifas. Los primeros 200 KWh se pagara $300 el KWh, para los siguientes 400 KWh pagara $500 el KWh y $800 de allí en adelante. Exprese el valor de la factura como una función de la cantidad KWh consumidos al mes.

x = Kwh.

$$f(x)\begin{cases} 300(x) & \text{si } x\leq 200 \\ 500(x) & \text{si } 600\geq x>200 \\ 800(x) & \text{si } x>600 \end{cases}$$

4. En un parqueadero, el cobro de los usuarios por un automóvil se realiza de la siguiente manera: $3000 de cobro por la primera hora y por cada hora adicional hasta tres horas se rebaja $500, más de tres horas tiene un costo fijo de $9000 hasta que cumpla el día en el parqueadero. Realiza un modelo de la función que represente el costo que debe pagar un usuario en función del número del tiempo t que utiliza el servicio.

t = Tiempo

$$f(t)\begin{cases} 3000 & \text{si } t\leq 1h \\ 2500 & \text{si } 3h\geq t>1h \\ 9000 & \text{si } 24h\geq t>3h \end{cases}$$

Figura Anexo-2: Prueba diagnóstico resuelta por un estudiante.

5. Al elevarse el aire seco se expande y al hacerlo se enfría a una tasa de aproximadamente $1^{o}C$ por cada 100 metros de altura, hasta aproximadamente 8 Km. Más de 8 Km se enfría a una tasa de $2^{o}C$.

a) Si la temperatura a nivel del suelo es de $20^{o}C$, escriba un modelo que represente la temperatura a una altitud h.

b) ¿Qué temperatura se espera si un aeroplano despega y alcanza una altura de 5 km? ¿Cuál sería la temperatura si alcanza una altura de 8,5 Km?

(A) h = altitud en m

tienes la idea

$$f(h) = 20 + \begin{cases} \frac{h}{100}(1) & \text{si } 800m > h \geq 100\,m \\ \frac{h}{100}(2) & \text{si } h \geq 800m \end{cases}$$

(B) $\star\ 20 + \frac{800}{100}(1) + \frac{50}{100}(2) = 29°C$

R/ Si alcanza 8,5 km su T° es de 29°C

$\star\ 20 + \frac{500}{100}(1) = 25°C$

R/ Si alcanza una altura de (B) 5km tiene una T° de 25°C

6. En un teatro con capacidad para 800 personas se presenta cierta obra a determinado colegio, bajo las siguientes condiciones: cobra a cada estudiante \$10.000 hasta llenar la cuarta parte de los cupos. Si la demanda es de más de la cuarta parte, por cada estudiante adicional, se hace una rebaja de \$25 a todos y cada uno de los asistentes. Entonces:

Hallar la cantidad C de dinero que el teatro recauda en términos del número x de estudiantes asistentes de tal manera que no dé pérdidas.

x = # estudiantes

$$f(x) \begin{cases} x(10000) & \text{si } 200 \geq x > 0 \\ x(9975) & \text{si } x > 200 \end{cases}$$

Suposición x = 200 y x = 201

200 (10000) = 2000000 \$

201 (9975) = 2004975 \$

C sin pérdidas se daria a partir de 200 estudiantes que ingresen al Teatro.

7. Supongamos que en una huerta, cada árbol produce 500 frutas, si se siembran hasta 25 árboles. Si se siembran más de 25 árboles, cada árbol "en toda la huerta", deja de producir 5 frutas por cada árbol adicional que se siembre.

Hallar el total de frutas que se produce en función o en términos del número de árboles sembrados en la huerta.

X = árboles sembrados

$$f(x) \begin{cases} x(500) & \text{si } 25 \geq x > 0 \\ x(495) & \text{si } x > 25 \end{cases}$$

Suposición x = 25 y x = 26.

25 (500) = 12500 frutos

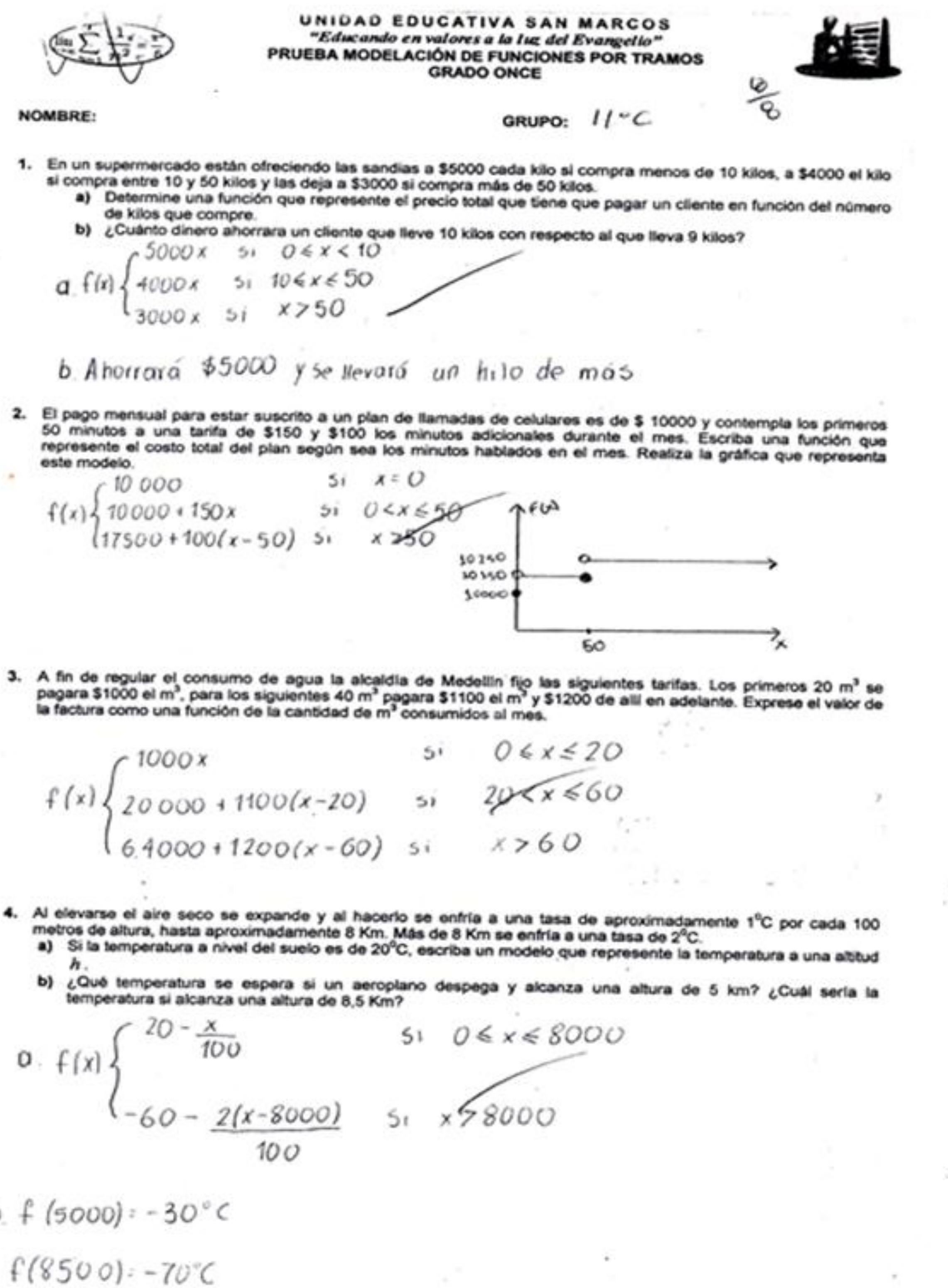
26 (495) = 12870 frutos

Conclusión ~ la ganancia de frutos seria mayor si se siembran más de 25 árboles en la huerta

8. El costo de una llamada de larga distancia desde Colombia a New York tiene un costo de \$740 para el primer minuto y 580 para cada minuto adicional (o parte de minuto) hasta 60 minutos. Más de 60 minutos tiene un costo fijo de \$36000 hasta 90 minutos, luego se corta la llamada. Determine una función y gráfica que represente el costo de la llamada telefónica en función del tiempo.

$$f(x) \begin{cases} z = 740 + x(580) & \text{si } x \leq 60\,min \\ z = 36000 & \text{si } 90 \geq x > 60 \end{cases}$$

Figura Anexo-3: Prueba final resuelta por un estudiante.



UNIDAD EDUCATIVA SAN MARCOS
"Educando en valores a la luz del Evangelio"
PRUEBA MODELACIÓN DE FUNCIONES POR TRAMOS
GRADO ONCE

6/8

NOMBRE: GRUPO: 11°C

1. En un supermercado están ofreciendo las sandías a \$5000 cada kilo si compra menos de 10 kilos, a \$4000 el kilo si compra entre 10 y 50 kilos y las deja a \$3000 si compra más de 50 kilos.

a) Determine una función que represente el precio total que tiene que pagar un cliente en función del número de kilos que compre.

b) ¿Cuánto dinero ahorrara un cliente que lleve 10 kilos con respecto al que lleva 9 kilos?

a. $f(x)\begin{cases} 5000x & \text{si } 0 \leq x < 10 \\ 4000x & \text{si } 10 \leq x \leq 50 \\ 3000x & \text{si } x > 50 \end{cases}$

b. Ahorrará \$5000 y se llevará un kilo de más

2. El pago mensual para estar suscrito a un plan de llamadas de celulares es de \$ 10000 y contempla los primeros 50 minutos a una tarifa de \$150 y \$100 los minutos adicionales durante el mes. Escriba una función que represente el costo total del plan según sea los minutos hablados en el mes. Realiza la gráfica que representa este modelo.

$f(x)\begin{cases} 10\,000 & \text{si } x = 0 \\ 10000 + 150x & \text{si } 0 < x \leq 50 \\ 17500 + 100(x-50) & \text{si } x > 50 \end{cases}$

3. A fin de regular el consumo de agua la alcaldía de Medellín fijo las siguientes tarifas. Los primeros 20 m^3 se pagara \$1000 el m^3, para los siguientes 40 m^3 pagara \$1100 el m^3 y \$1200 de allí en adelante. Exprese el valor de la factura como una función de la cantidad de m^3 consumidos al mes.

$f(x)\begin{cases} 1000x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 20\,000 + 1100(x-20) & \text{si } 20 < x \leq 60 \\ 64000 + 1200(x-60) & \text{si } x > 60 \end{cases}$

4. Al elevarse el aire seco se expande y al hacerlo se enfría a una tasa de aproximadamente 1°C por cada 100 metros de altura, hasta aproximadamente 8 Km. Más de 8 Km se enfría a una tasa de 2°C.

a) Si la temperatura a nivel del suelo es de 20°C, escriba un modelo que represente la temperatura a una altitud *h*.

b) ¿Qué temperatura se espera si un aeroplano despega y alcanza una altura de 5 km? ¿Cuál sería la temperatura si alcanza una altura de 8,5 Km?

a. $f(x)\begin{cases} 20 - \dfrac{x}{100} & \text{si } 0 \leq x \leq 8000 \\ -60 - \dfrac{2(x-8000)}{100} & \text{si } x > 8000 \end{cases}$

b. $f(5000) = -30°C$

$f(8500) = -70°C$

Figura Anexo-4: Prueba final resuelta por un estudiante.

5. Un viaje subsidiado por una escuela costará a cada estudiante 1500 pesos si viajan no más de 150 estudiantes; sin embargo el costo a pagar por estudiante se reduciría 50 pesos por cada uno más que se inscriba al grupo de los 150. Exprese los ingresos recibidos por la escuela en función del número de inscritos a dicho viaje.

$$f(x)\begin{cases} 1500x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 150 \\ [1500-50(x-150)]x & \text{si} \quad x>150 \end{cases}$$

6. Una finca está sembrada de mangos a razón de 80 plantas por hectárea. Cada planta produce un promedio de 960 mangos. Por cada planta adicional que se siembre, el promedio de producción por planta (en todas las hectáreas) se reduce en 10 mangos. Expresar la producción de mangos por hectárea como función del número de plantas sembradas.

$$f(x)\begin{cases} 960x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 80 \\ [960-10(x-80)]x & \text{si} \quad x>80 \end{cases}$$

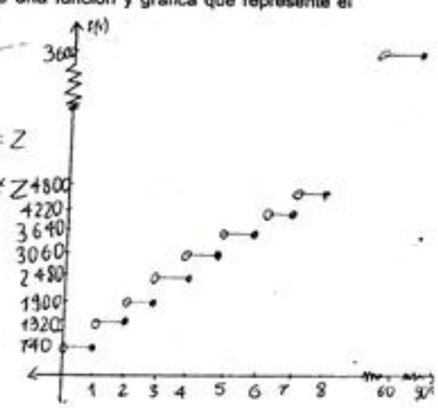
En los siguientes ejercicios ayúdate de la función parte entera para formular el modelo que represente cada situación.

7. En un parqueadero, el cobro a los usuarios se realiza de la siguiente manera: $1500 de cobro básico aplicado a todos los vehículos, sin importar cuanto tiempo estén en el lugar y $800 por cada hora o fracción de hora que este el vehículo en el parqueadero. Determine una función que represente el costo que debe pagar un usuario del parqueadero.

$$f(x)\begin{cases} 1500+800x & \text{si} \quad x \in Z \\ 1500+800[\![x+1]\!] & \text{si} \quad x \notin Z \end{cases}$$

8. El costo de una llamada de larga distancia desde Colombia a New York tiene un costo de $740 para el primer minuto y 580 para cada minuto adicional (o parte de minuto) hasta 60 minutos. Más de 60 minutos tiene un costo fijo de $36000 hasta 90 minutos, luego se corta la llamada. Determine una función y gráfica que represente el costo de la llamada telefónica en función del tiempo.

$$f(x)\begin{cases} 740 & \text{si} \quad 0<x\leq 1 \\ 740+580(x-1) & \text{si} \quad 1<x\leq 60 \quad \text{si } x\in Z \\ 740+580[\![x]\!] & \text{si} \quad 1<x\leq 60 \quad \text{si } x\notin Z \\ 3600 & \text{si} \quad 60<x\leq 90 \end{cases}$$



B. Anexo: Actividades que se realizaron en la UEPS

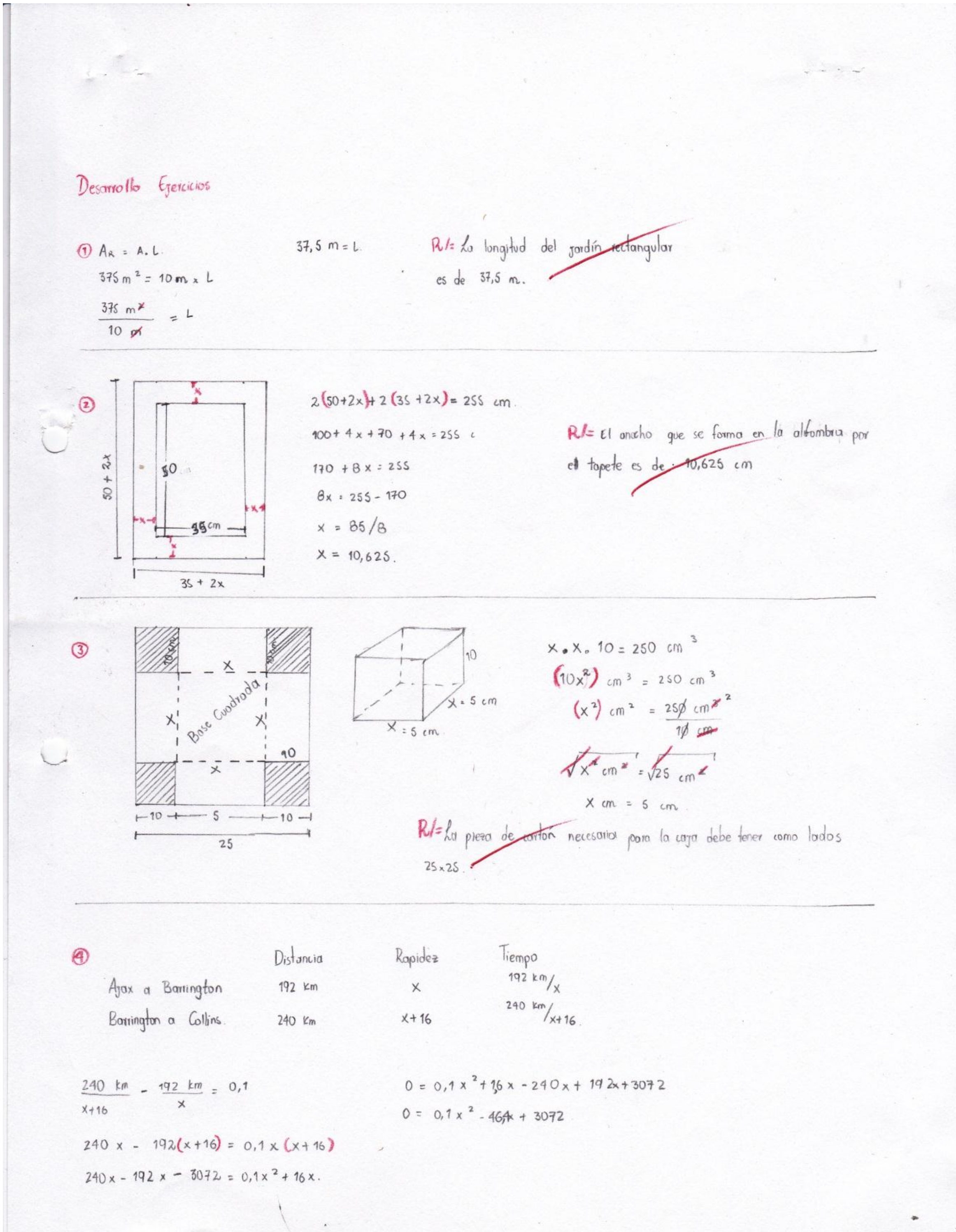
A continuación se presentarán las actividades que realizaron los estudiantes, las cuales se pueden dividir en tres momentos:

1. Actividad introductoria para resolver problemas en matemáticas.
2. Actividad de saberes previos “modelación de funciones”.
3. Actividad de modelación de funciones por tramos.

Para realizar las actividades se conformaron grupos de tres estudiantes donde a partir de un trabajo colaborativo iban realizando las actividades planteadas en los procesos de clase, algunas actividades eran de exploración y la información que necesitaban la tenían en sus casas o la debían consultar, por esta razón también se realizaban actividades en casa.

Sólo se mostrará la realización de algunas actividades ya que fue un trabajo de todo un período y el evidenciarlas todas requiere de muchas páginas.

Figura Anexo-5: Actividad introductoria para resolver problemas en matemáticas realizada por los estudiantes.



Desarrollo Ejercicios

① $A_R = A \cdot L$

$375\,m^2 = 10\,m \times L$

$\frac{375\,m^{\cancel{2}}}{10\,\cancel{m}} = L$

$37,5\,m = L$

R/: La longitud del jardín rectangular es de 37,5 m.

② $2(50+2x) + 2(35+2x) = 255\,cm$

$100 + 4x + 70 + 4x = 255$ c

$170 + 8x = 255$

$8x = 255 - 170$

$x = 85/8$

$x = 10,625$

R/: El ancho que se forma en la alfombra por el tapete es de 10,625 cm

③ $x \cdot x \cdot 10 = 250\,cm^3$

$(10x^2)\,cm^3 = 250\,cm^3$

$(x^2)\,cm^2 = \frac{25\cancel{0}\,cm^{\cancel{3}\,2}}{1\cancel{0}\,\cancel{cm}}$

$\sqrt{x^2\,cm^2} = \sqrt{25\,cm^2}$

$x\,cm = 5\,cm$

R/: La pieza de cartón necesaria para la caja debe tener como lados 25 x 25.

④

	Distancia	Rapidez	Tiempo
Ajax a Barrington	192 km	x	192 km/x
Barrington a Collins	240 km	x+16	240 km/x+16

$\frac{240\,km}{x+16} - \frac{192\,km}{x} = 0,1$

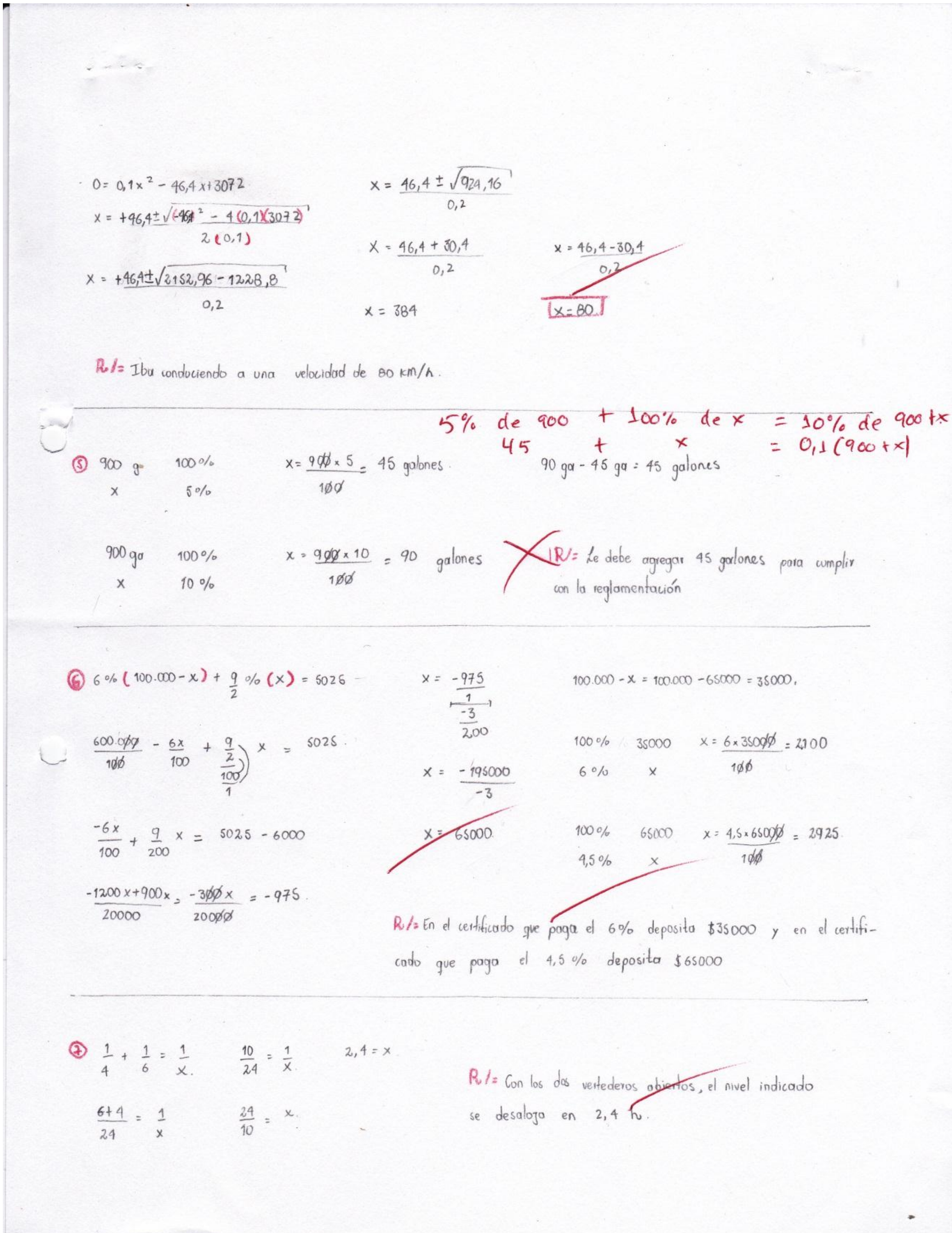
$240x - 192(x+16) = 0,1x(x+16)$

$240x - 192x - 3072 = 0,1x^2 + 16x$

$0 = 0,1x^2 + 1,6x - 240x + 192x + 3072$

$0 = 0,1x^2 - 46,4x + 3072$

Figura Anexo-6: Actividad introductoria para resolver problemas en matemáticas realizada por los estudiantes.



$0 = 0{,}1x^2 - 46{,}4x + 3072$

$x = \frac{+46{,}4 \pm \sqrt{(46{,}4)^2 - 4(0{,}1)(3072)}}{2(0{,}1)}$

$x = \frac{+46{,}4 \pm \sqrt{2152{,}96 - 1228{,}8}}{0{,}2}$

$x = \frac{46{,}4 \pm \sqrt{924{,}16}}{0{,}2}$

$x = \frac{46{,}4 + 30{,}4}{0{,}2}$ $\quad x = \frac{46{,}4 - 30{,}4}{0{,}2}$

$x = 384$ $\quad \boxed{x = 80}$

R/= Iba conduciendo a una velocidad de 80 km/h.

5% de 900 + 100% de x = 10% de 900 + x

45 + x = 0,1 (900 + x)

⑤ 900 ga 100 % / x 5 % $\quad x = \frac{9\cancel{00} \times 5}{1\cancel{00}} = 45$ galones $\quad$ 90 ga − 45 ga = 45 galones

900 ga 100 % / x 10 % $\quad x = \frac{9\cancel{00} \times 10}{1\cancel{00}} = 90$ galones

R/= Le debe agregar 45 galones para cumplir con la reglamentación

⑥ $6\%(100.000 - x) + \frac{9}{2}\%(x) = 5025$

$\frac{600.0\cancel{00}}{1\cancel{00}} - \frac{6x}{100} + \frac{\frac{9}{2}}{\frac{100}{1}} x = 5025$

$\frac{-6x}{100} + \frac{9}{200} x = 5025 - 6000$

$\frac{-1200x + 900x}{20000} = \frac{-3\cancel{00}x}{200\cancel{00}} = -975$

$x = \frac{-975}{\frac{-3}{200}}$

$x = \frac{-195000}{-3}$

$x = 65000$

100.000 − x = 100.000 − 65000 = 35000.

100 % 35000 / 6 % x $\quad x = \frac{6 \times 350\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 2100$

100 % 65000 / 4,5 % x $\quad x = \frac{4{,}5 \times 650\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 2925$

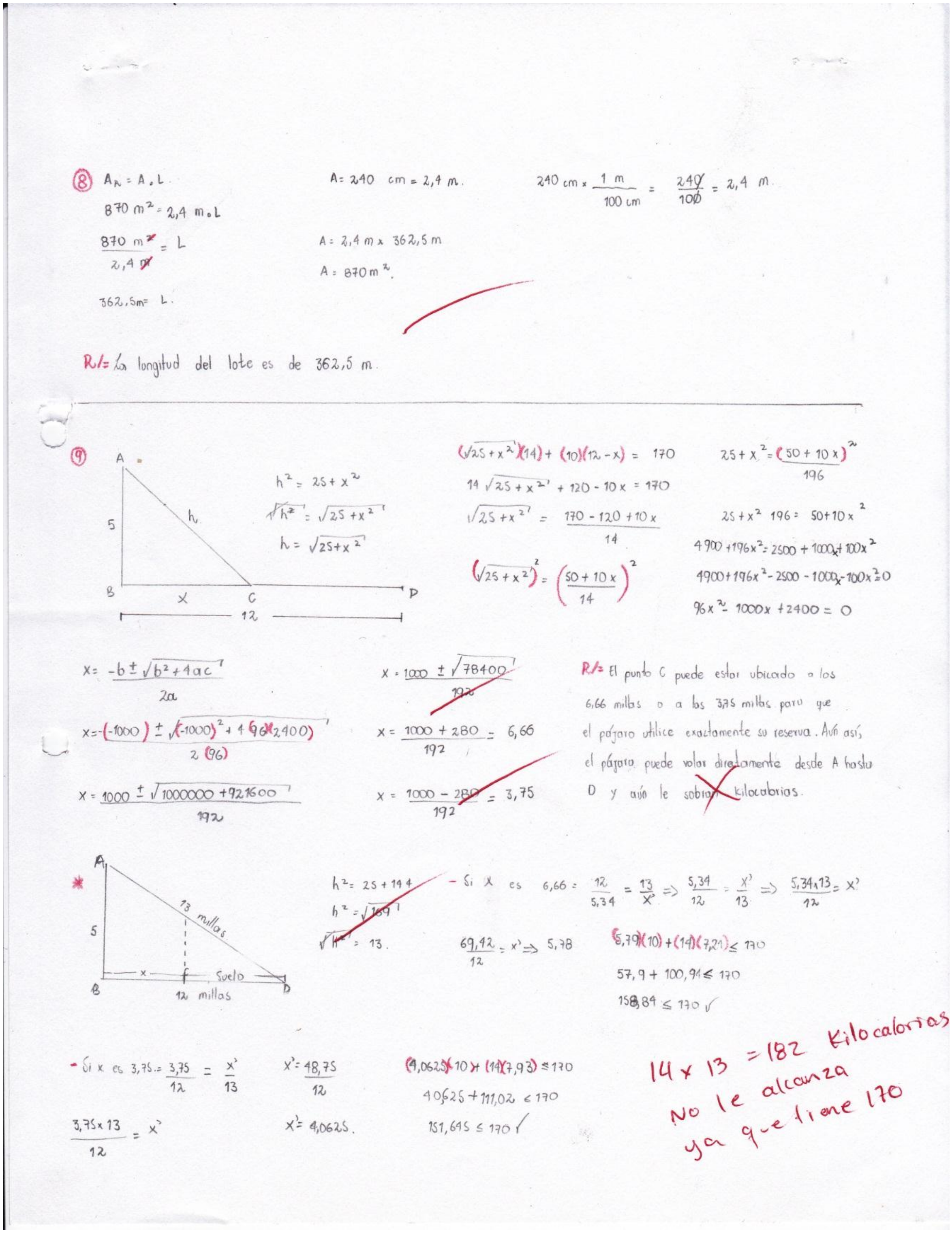
R/= En el certificado que paga el 6% deposita $35000 y en el certificado que paga el 4,5 % deposita $65000

⑦ $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$ $\quad \frac{10}{24} = \frac{1}{x}$ $\quad 2{,}4 = x$

$\frac{6+4}{24} = \frac{1}{x}$ $\quad \frac{24}{10} = x$

R/= Con los dos vertederos abiertos, el nivel indicado se desaloja en 2,4 h.

Figura Anexo-7: Actividad introductoria para resolver problemas en matemáticas realizada por los estudiantes.



(8) $A_R = A \cdot L$

$870\ m^2 = 2{,}4\ m \cdot L$

$\frac{870\ m^{\cancel{2}}}{2{,}4\ \cancel{m}} = L$

$362{,}5\ m = L$

$A = 240\ cm = 2{,}4\ m$

$A = 2{,}4\ m \times 362{,}5\ m$

$A = 870\ m^2$

$240\ cm \times \frac{1\ m}{100\ cm} = \frac{24\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 2{,}4\ m$

R/= La longitud del lote es de 362,5 m.

(9) $h^2 = 25 + x^2$

$\sqrt{h^2} = \sqrt{25+x^2}$

$h = \sqrt{25+x^2}$

A, B, C, D, 5, h, x, 12

$(\sqrt{25+x^2})(14) + (10)(12-x) = 170$

$14\sqrt{25+x^2} + 120 - 10x = 170$

$\sqrt{25+x^2} = \frac{170-120+10x}{14}$

$(\sqrt{25+x^2})^2 = \left(\frac{50+10x}{14}\right)^2$

$25 + x^2 = \frac{(50+10x)^2}{196}$

$25+x^2\ 196 = 50+10x^2$

$4900 + 196x^2 = 2500 + 1000x + 100x^2$

$4900 + 196x^2 - 2500 - 1000x - 100x^2 = 0$

$96x^2 - 1000x + 2400 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-1000) \pm \sqrt{(-1000)^2 + 4(96)(2400)}}{2(96)}$

$x = \frac{1000 \pm \sqrt{1000000 + 921600}}{192}$

$x = \frac{1000 \pm \sqrt{78400}}{192}$

$x = \frac{1000+280}{192} = 6{,}66$

$x = \frac{1000-280}{192} = 3{,}75$

R/= El punto C puede estar ubicado a los 6,66 millas o a las 3,75 millas para que el pájaro utilice exactamente su reserva. Aún así, el pájaro puede volar directamente desde A hasta D y aún le sobran kilocalorías.

* A, B, D, 5, 13 millas, x, f, Suelo, 12 millas

$h^2 = 25 + 144$

$h^2 = \sqrt{169}$

$\sqrt{h^2} = 13.$

- Si x es 6,66: $\frac{12}{5{,}34} = \frac{13}{x'} \Rightarrow \frac{5{,}34}{12} = \frac{x'}{13} \Rightarrow \frac{5{,}34 \times 13}{12} = x'$

$\frac{69{,}42}{12} = x' \Rightarrow 5{,}78$

$(5{,}79)(10) + (14)(7{,}21) \leq 170$

$57{,}9 + 100{,}94 \leq 170$

$158{,}84 \leq 170$ ✓

- Si x es 3,75: $\frac{3{,}75}{12} = \frac{x'}{13}$

$\frac{3{,}75 \times 13}{12} = x'$

$x' = \frac{48{,}75}{12}$

$x' = 4{,}0625.$

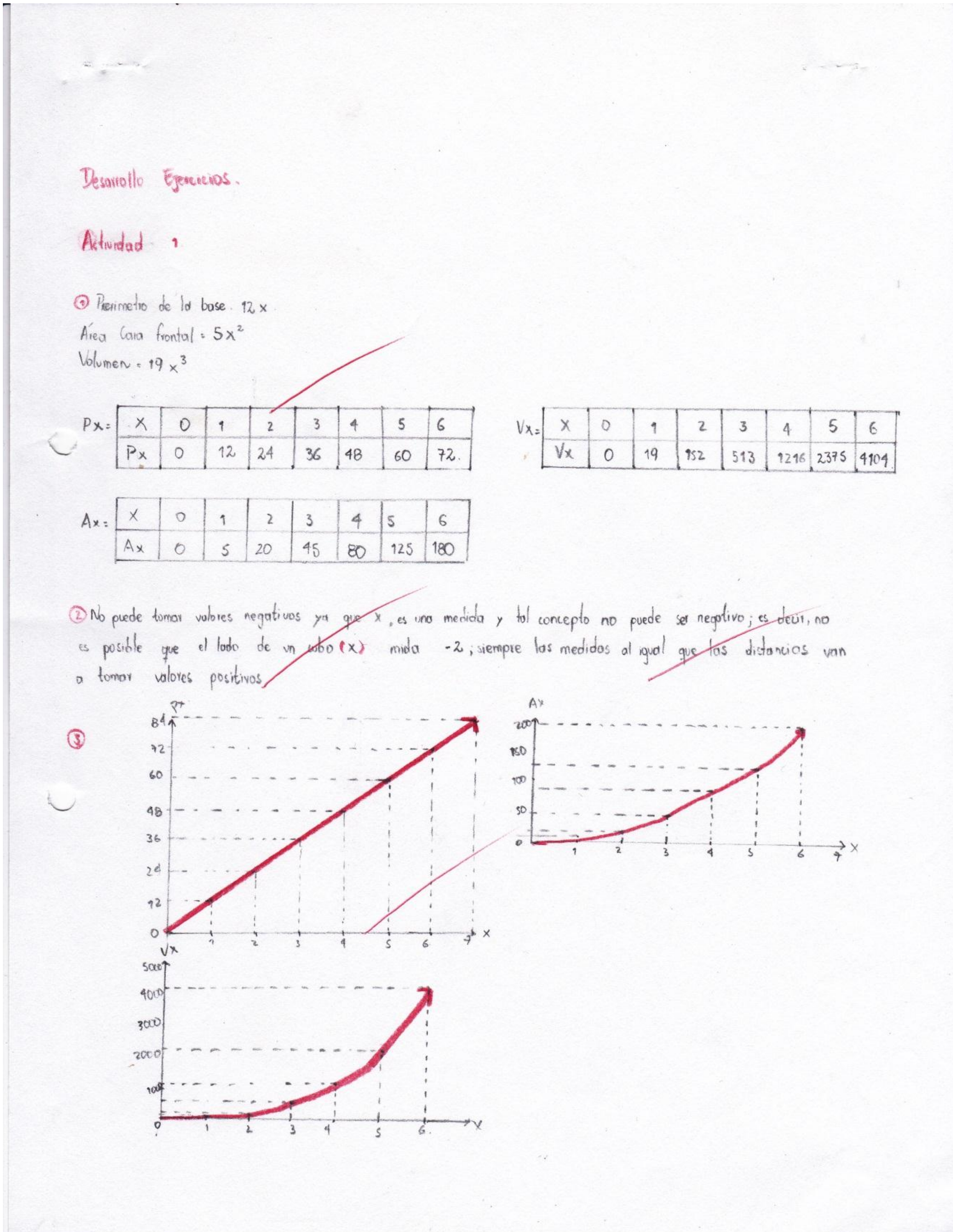
$(4{,}0625)(10) + (14)(7{,}93) \leq 170$

$40{,}625 + 111{,}02 \leq 170$

$151{,}645 \leq 170$ ✓

14 x 13 = 182 Kilocalorías
No le alcanza ya que tiene 170

Figura Anexo-8: Actividad de saberes previos “modelación de funciones” realizada por los estudiantes.



Desarrollo Ejercicios.

Actividad 1

① Perimetro de la base. $12x$

Área Cara frontal = $5x^2$

Volumen = $19x^3$

Px =

X	0	1	2	3	4	5	6
Px	0	12	24	36	48	60	72.

Vx =

X	0	1	2	3	4	5	6
Vx	0	19	152	513	1216	2375	4104

Ax =

X	0	1	2	3	4	5	6
Ax	0	5	20	45	80	125	180

② No puede tomar valores negativos ya que x, es una medida y tal concepto no puede ser negativo; es decir, no es posible que el lado de un cubo (x) mida -2, siempre las medidas al igual que las distancias van a tomar valores positivos.

③

Figura Anexo-9: Actividad de saberes previos “modelación de funciones” realizada por los estudiantes.

c) De acuerdo con el consumo, el costo del m^3 de agua varía; lo que vendría a concluir que la ecuación o función que tiene el costo de m^3 es por tramos; es decir, se le asigna un valor diferente respecto a lo que se haya consumido en total en el mes

Actividad 5

1. Comprender el problema: Determinar un modelo para el sueldo de Pedro y así responder a las demás preguntas.

X = El numero de celulares que venda
fx = Sueldo

2. Piense en un plan: Se debe tener en cuenta que mensualmente gana SIEMPRE $35000, lo que varía son las comisiones por celular.

x	fx	fx.
0	35000 + 0	35000
1	35000 + 1000	36000
2	35000 + 2000	37000
3	35000 + 3000	38000
4	35000 + 4000	39000
⋮	⋮	⋮

3. Ejecute el plan: Debemos llegar a un plan: o patrón

x	fx	fx
0	35000 + 1000 0	35000
1	35000 + 1000 1	36000
2	35000 + 1000 2	37000
3	35000 + 1000 3	38000
4	35000 + 1000 4	39000
⋮	⋮	⋮

Patrón = 35000 + 1000 (x)

Figura Anexo-10: Actividad de saberes previos "modelación de funciones" realizada por los estudiantes

(7) 1. En primer lugar, hay que determinar la función respectiva y encontrarle su dominio.

2.

x	fx	fx
300	300 50	$ 15000
298	298 60	$ 17880
296	296 70	$ 20720
294	294 80	$ 23520
292	292 90	$ 26280
290	290 100	$ 29000

3. Se necesita diseñar un modelo o patrón.

x	fx	fx
300	300[(300-300)5+50]	$ 15000
298	298[(300-298)5 +50]	$ 17880
296	296[(300-296)5 +50]	$ 20720
294	294[(300-294)5 + 50]	$ 23520
292	292[(300-292)5 + 50]	$ 26280
290	290[(300-290) 5+50]	$ 29000

$f(x) = x \cdot [(300-x)5+50]$

4. Verifiquemos el modelo

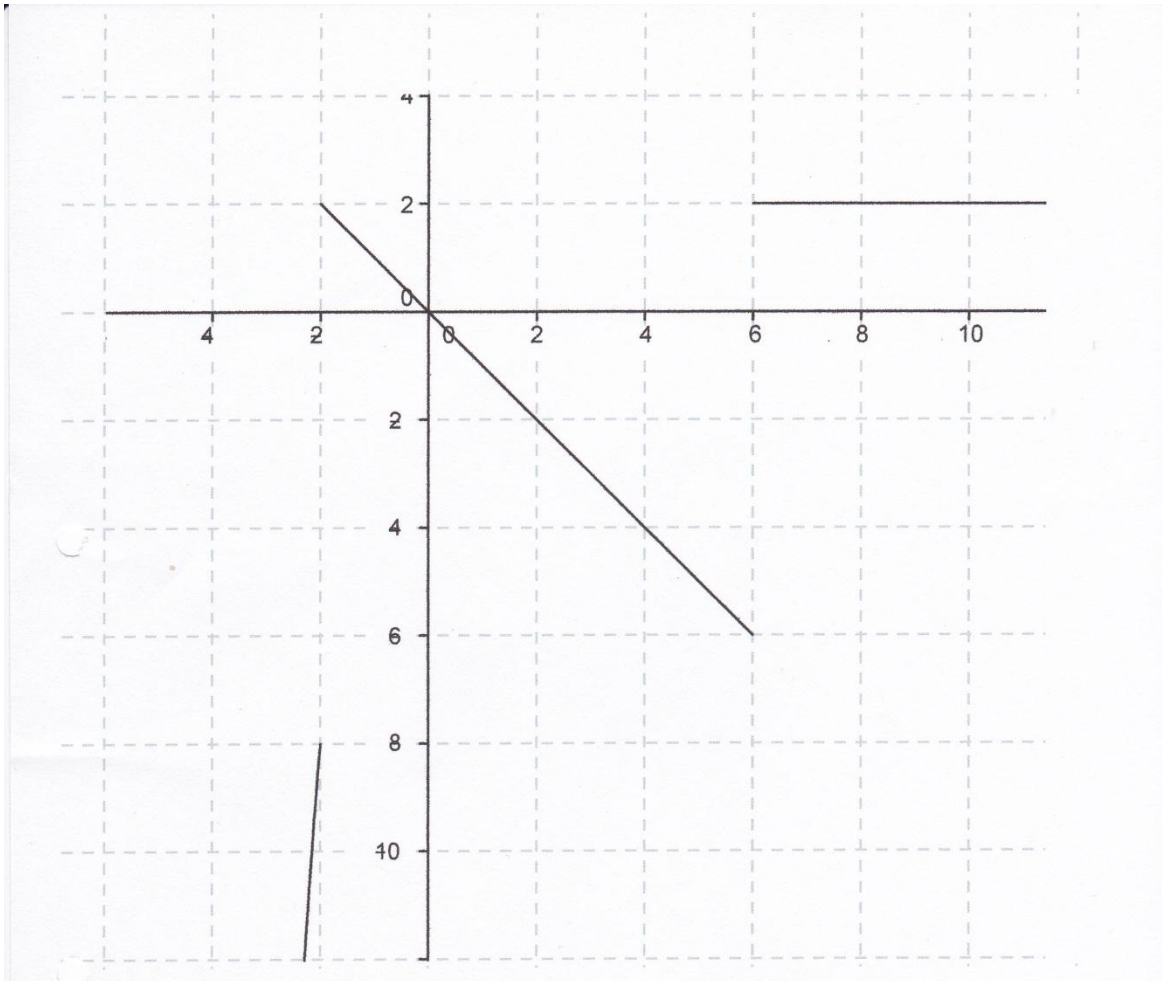
$$f(290) = 290[(300-290)5+50]$$
$$= 290[(10)5+50]$$
$$= 290[50+50]$$
$$= 290[100]$$
$$= 29000$$

$$f(296) = 296[(300-296)5+50]$$
$$= 296[(4)5+50]$$
$$= 296[20+50]$$
$$= 296[70]$$
$$= 20720$$

$$x[(300-x)5+50]$$
$$x[1500-5x+50]$$
$$x[1550-5x]$$
$$1550x-5x^2$$

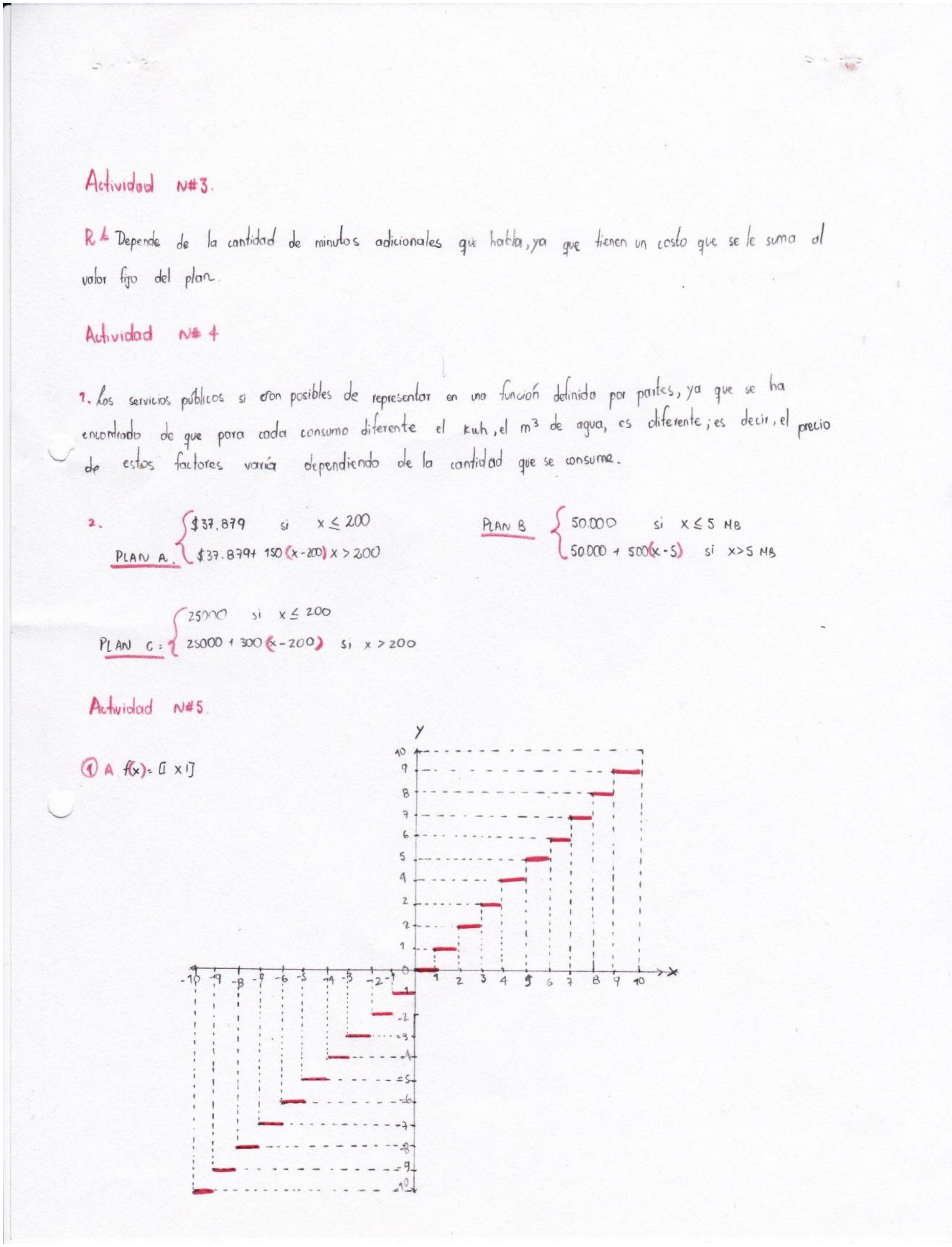
Dominio: $\mathbb{R}^+$

Figura Anexo-11: Actividad de modelación de funciones por tramos realizada por los estudiantes



$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x < -2 \\ -x & \text{si} \quad -2 \leq x < 6 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

Figura Anexo-12: Actividad de modelación de funciones por tramos realizada por los estudiantes



Actividad N#3.

R/ Depende de la cantidad de minutos adicionales que habla, ya que tienen un costo que se le suma al valor fijo del plan.

Actividad N# 4

1. Los servicios públicos si eran posibles de representar en una función definida por partes, ya que se ha encontrado de que para cada consumo diferente el kwh, el m^3 de agua, es diferente; es decir, el precio de estos factores varía dependiendo de la cantidad que se consume.

2. PLAN A. $\begin{cases} \$37.879 & \text{si } x \leq 200 \\ \$37.879 + 150(x-200) & x > 200 \end{cases}$

PLAN B $\begin{cases} 50.000 & \text{si } x \leq 5 \text{ MB} \\ 50.000 + 500(x-5) & \text{si } x > 5 \text{ MB} \end{cases}$

PLAN C = $\begin{cases} 25000 & \text{si } x \leq 200 \\ 25000 + 300(x-200) & \text{si } x > 200 \end{cases}$

Actividad N#5.

① A. $f(x) = [\![x]\!]$

Figura Anexo-13: Actividad de modelación de funciones por tramos realizada por los estudiantes

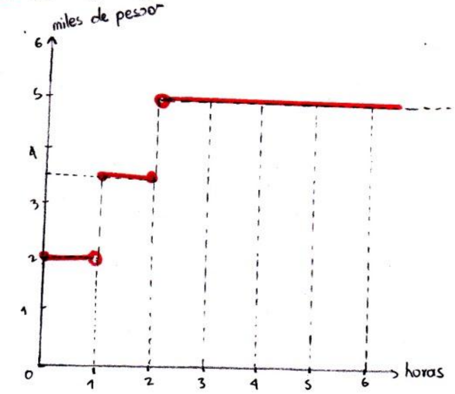
a) La función es:

$$f(x) = \begin{cases} 2000 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3500 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 5000 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

b)

Dominio= [0,∞)

Rango= [2] ∪ [3] ∪ [5]



c) • 2000 × 5 = 10000

• 3500 × 15 = 52500

• 5000 × 17 = 85000

10000 + 52500 + 8500 = 107.500

R/= El total recolectado es de $ 107.500

② 1. P(x) = Precio del recorrido

x = kilometros.

2.

x	P(x)
5	$ 30000
15	$ 30.000
17	$ 30.000
20	$ 30000

x	P(x)
21	31000
25	35000
27	37000
30	40000

x	P(x)
31	37750
35	40500
38	42600
40	44000.

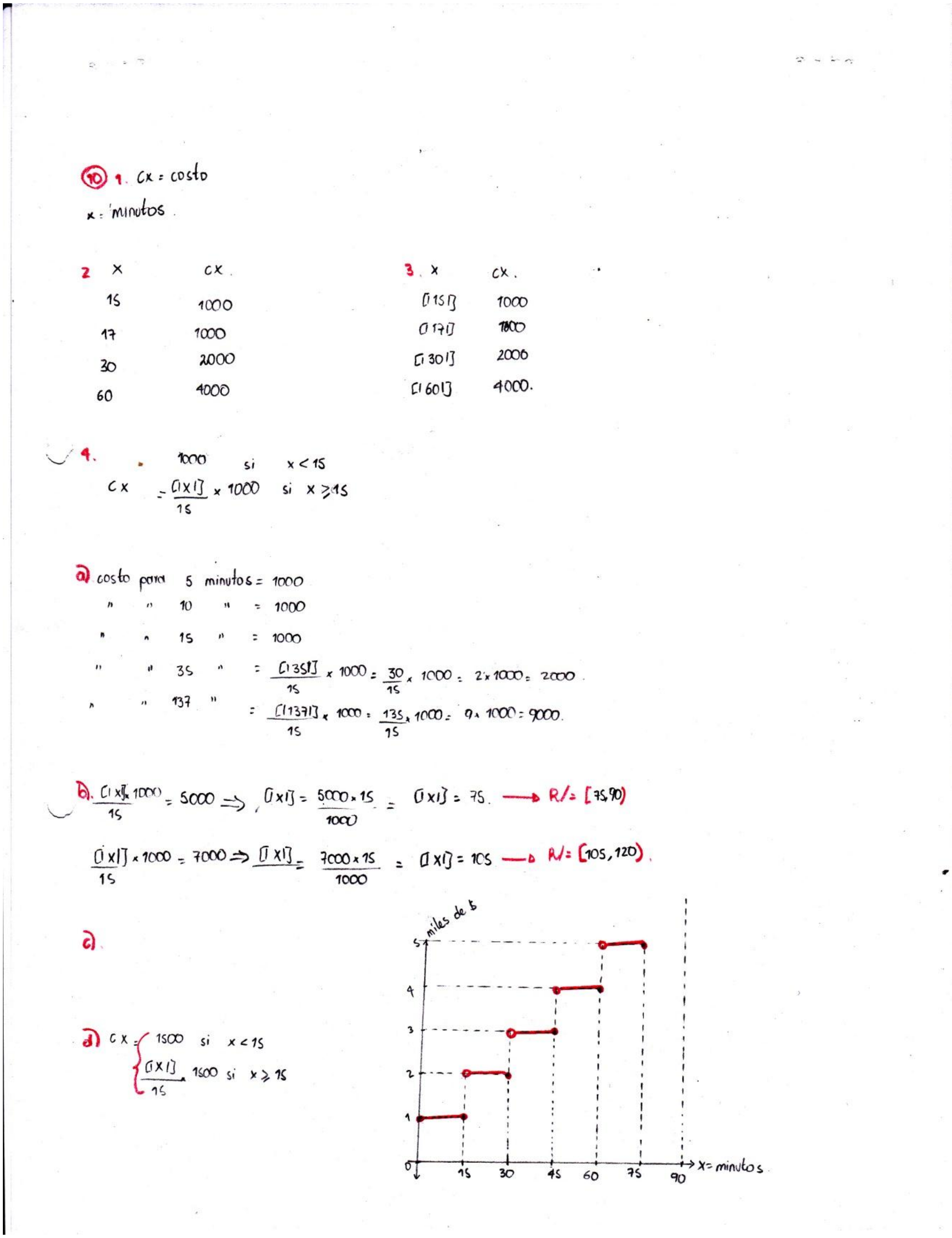
3.

x	P(x)
5	30000
15	30000
16	30000
17	30000
20	3000

x	P(x)
21	30.000 + 1000
25	30000 + 5000
27	30000 + 7000
29	30000 + 9000
30	30000 + 10.000

x	P(x)
31	30000 + 7750
35	30000 + 10500
37	30000 + 11900
39	30000 + 13300
40	30000 + 28000

Figura Anexo-14: Actividad de modelación de funciones por tramos realizada por los estudiantes



Bibliografía

ALFONSO, Luz Stella y otros. Proyecto sé matemáticas, redes de aprendizaje para la vida. Bogotá. Editorial SM. 2012. 392 p.

BRUNING, Roger. GREGORY, Schraw. ROYCE, Ronning. Psicología cognitiva e instrucción. Madrid. Editorial Alianza editorial, 2002. 549 p.

MOREIRA, Marco Antonio. Aprendizaje significativo: teoría y práctica. Madrid: Editorial Aprendizaje Visor, 2000. 100 p.

MOREIRA, Marco Antonio. Unidades de enseñanza potencialmente significativas-UEPS [en línea]. < http://www.if.ufrgs.br/~moreira/UEPSesp.pdf > [citado en mayo 28 de 2013]. 22 p.

MORENO, John. ROLDAN, Diego. ROMERO, Francisco. Norma matemáticas para pensar 11^{0}. Bogotá. Editorial Norma. 2011. 336 p.

POLYA, George. Como plantear y resolver problemas. México: Editorial Trillas, 1984. 215 p.

RENDON, Paula Andrea. Módulo matemáticas 2012, olimpiadas del conocimiento [en línea]. <http://www.seduca.gov.co/index.php/.../2700-modulo-matematicaspdf.htm> [citado septiembre 17 de 2013]. 68 p.

STEWART, James. Cálculo, Conceptos y Contextos. México. Editorial International Thomson editores, 1999. 991 p.

STEWART, James. Precálculo. México. Editorial International Thomson editores. 2001. 859 p.