



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# **LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCION DE SEMEJANZA**

**LADY JOHANA JULIO BARRERA**

**Universidad Nacional de Colombia**

**Facultad de ciencias**

**Bogotá D.C, Colombia**

**Enero 25 de 2014**

# **LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCION DE SEMEJANZA**

**LADY JOHANA JULIO BARRERA**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

**MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**

Director:

**PROFESOR, JOSÉ REINALDO MONTAÑEZ PUENTES**

**Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de ciencias  
Bogotá D.C, Colombia  
2014**

## DEDICATORIA

*A Dios,*

*A Mi esposo Daniel, mi hijo Nicolás David y  
mi Ángel Juan Esteban,*

*A mis padres.*

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a mi esposo y familia por su apoyo incondicional para culminar con este hermoso trabajo.

Un agradecimiento especial a mi estimado Profesor José Reinaldo Montañez Puentes, quien me brindó su constante colaboración con su paciencia, sabiduría y sencillez que tanto lo caracterizan. El Señor, lo colme de muchas bendiciones, gracias querido Profesor.

## RESUMEN

Se establecen relaciones entre las transformaciones geométricas en el plano y la noción de semejanza. Haciendo uso de estos resultados y de la tecnología se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de la noción de semejanza a través de las transformaciones geométricas dirigida a estudiantes de grado séptimo.

**Palabras clave:** Transformaciones en el plano, congruencia, semejanza, Geogebra.

## ABSTRACT

Relationships between geometric transformations in the plane and the notion of similarity are established. Using these results and technology a didactic teaching of the notion of similarity through geometric transformations aimed at seventh level is presented.

**Keywords:** Geometric transformations in the plane, similarity, congruence, Geogebra.

## TABLA DE CONTENIDO

<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>8</b>
<b>2. ANTECEDENTES HISTÓRICOS .....</b>	<b>11</b>
2.1 Las Transformaciones en el plano.....	11
2.2 La Semejanza.....	16
<b>3. ASPECTOS DISCIPLINARES.....</b>	<b>19</b>
3.1 Transformaciones en el plano y congruencia.....	20
3.1.1 Congruencia de triángulos .....	20
3.1.2 Transformaciones geométricas en el plano.....	22
3.1.3 Isometrías en el plano.....	23
Traslaciones, Rotaciones y Simetrías .....	25
Traslaciones.....	25
Rotaciones.....	30
Simetría .....	33
3.1.4 Teorema fundamental de las transformaciones y la congruencia .....	39
3.2 Transformaciones en el plano y semejanza .....	40
3.2.1 Semejanza de triángulos .....	41
3.2.2 Homotecias .....	42
3.2.3 Teorema fundamental de las transformaciones y la semejanza.....	46
<b>4. ASPECTOS DIDÁCTICOS .....</b>	<b>48</b>
4.1 Las transformaciones en el plano y semejanza según los lineamientos y estándares curriculares.....	48
4.2 La semejanza como objeto de enseñanza.....	50
4.3 Posibles errores y dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las transformaciones en el plano y la semejanza .....	51
4.4 Tecnología en el aula.....	53
4.5 Concepción constructivista del aprendizaje .....	56
4.6 El modelo Van Hiele.....	56
4.7 Diseño de la propuesta de enseñanza.....	58
Actividad 1.Traslaciones.....	59
Actividad 2: Rotaciones.....	64

**LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA**

Actividad 3: Simetrías.....	68
Actividad 4: Isometrías y Congruencia usando Geogebra .....	74
Actividad 5: Homotecias .....	77
Actividad 6: Homotecias usando Geogebra.....	79
Actividad 7: Transformaciones en el Plano y Semejanza usando Geogebra .....	81
Actividad 8: Semejanza .....	83
<b>5. CONCLUSIONES .....</b>	<b>86</b>
<b>6. BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>87</b>

## 1. INTRODUCCIÓN

La naturaleza siempre ha sido fuente de inspiración y estudio en la actividad humana. Diversos fenómenos naturales han generado el desarrollo de conocimientos geométricos que permiten su descripción y estudio. Entre ellos cabe resaltar las situaciones problemáticas sobre la forma, el tamaño, la producción de sombras, el crecimiento de los seres vivos, la reproducción de paisajes, etc. Teniendo en cuenta este último, el arte motivó el desarrollo de las geometrías Descriptiva y Proyectiva al plantear el problema de pintar en un lienzo bidimensional una realidad tridimensional.

El análisis de estos fenómenos desde un punto de vista geométrico, además de tener una importancia de tipo cultural tiene un gran componente pedagógico porque genera motivación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría.

Las situaciones planteadas anteriormente tienen algo en común: “los puntos del espacio se mueven de un sitio a otro”, se transforman. En algunos casos se mantiene la forma del objeto original, en otros se modifica alguna de sus propiedades. En este sentido el hombre intenta interpretar los cambios de tamaños y formas que se producen a partir de esas transformaciones.

Klein (1849-1925) define geometría como el estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes con respecto a un grupo específico de transformaciones, organizando así las diferentes geometrías<sup>1</sup> elaboradas durante el siglo XIX.

Por otro lado, en el ámbito escolar las transformaciones en el plano, constituyen en gran medida uno de los temas de mayor importancia en la construcción de la geometría escolar, ya que es mediante los movimientos en el plano que es posible establecer algunas relaciones entre objetos geométricos, tales como su forma, tamaño y posición, así como el estudio de las propiedades que permanecen invariantes frente a un movimiento aplicado sobre éstas.

Sin embargo, los estudiantes de grado séptimo del colegio José Antonio Galán IED presentan dificultades para comprender las distintas transformaciones en el plano. Esto debido a que los contenidos propios de la geometría en básica primaria han sido abordados con poca profundidad, siendo generalmente programados al finalizar el plan de estudios. Los contenidos son presentados de forma aislada, es decir no hay relación entre ellos, razón por la cual el estudiante no hace uso de los conceptos previos necesarios que le permiten comprender nuevas temáticas.

---

<sup>1</sup> Transformaciones: Afín (afinidad), Isométrica (rotación), Proyectiva (proyectividad), Conforme ( semejanza), Alométrica (alometría) y topológica (homeomorfismo).

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

En particular, el hecho anterior se evidencia cuando se presentan las definiciones de semejanza y congruencia. Por ejemplo, dados dos triángulos semejantes, se les dificulta determinar ángulos correspondientes y que estos son congruentes, así como reconocer lados correspondientes y la relación de proporcionalidad que guardan entre sí. En general, presentan dificultad en comprender estos conceptos y más aún, no hallan relación alguna entre estos y las transformaciones en el plano.

Los estándares curriculares para matemáticas (MEN, 1996) en grado séptimo, proponen que el estudiante debe “Predecir y comparar los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte”, así como “Resolver y formular problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales”. De esta manera, es necesario replantear la manera como son presentadas las distintas transformaciones en el plano y las nociones de semejanza y congruencia, de tal forma que el estudiante de grado séptimo se aproxime a la relación entre estos conceptos de una manera más natural y significativa, pues son los movimientos de las figuras los que permiten evidenciar esta relación.

Para abordar el problema anterior se plantea una propuesta didáctica basada en algunos referentes teóricos consolidados formalmente que tiene como propósito que los estudiantes de grado séptimo reconozcan figuras semejantes a partir de las transformaciones geométricas en el plano y de esta manera se aproximen al concepto de semejanza.

Ahora bien, con el fin de observar la evolución de estos conceptos, se presenta una breve reseña histórica de las transformaciones en el plano y la semejanza. Al respecto, consideramos tres etapas en la evolución del concepto de semejanza, con el fin de relacionarlas con la forma como éste es presentado en la escuela.

Relacionaremos los conceptos de congruencia con isometrías en el plano a través de un teorema que hemos denominado “Teorema fundamental de las transformaciones y la congruencia”, el cual establece que **“Dos polígonos son congruentes, si y solamente si, existe una isometría que envía uno en el otro”**. De igual forma se relacionan los conceptos de semejanza y homotecias en el plano a través del que hemos denominado “Teorema fundamental de las transformaciones y la semejanza” que establece que **“Dos polígonos son semejantes, si y solamente si, existe una transformación que envía uno en el otro, en este caso la transformación puede ser una homotecia o la composición de una homotecia con una isometría”**. Estos teoremas hacen ver la estrecha relación entre transformaciones y semejanza. Resaltamos que la presentación de estos resultados tiene un carácter didáctico y que los teoremas principales destacados anteriormente no los hemos encontrado presentados de esta forma y de manera explícita. Ahora bien, es de anotar que en el marco disciplinar los temas relacionados con congruencia y semejanza siguen la referencia Moise E. (1986) y los relacionados con

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

transformaciones toman como base los encontrados en Lima E. (2001), Guerrero B. (2006) y Alfonso H. (1993).

Es importante tener una visión amplia de los conceptos que se van a abordar con los estudiantes. Por tal razón, se presenta un estudio detallado sobre las transformaciones, en particular de las isometrías y las homotecias. Dentro de las isometrías, se estudia la estructura algebraica de las traslaciones, rotaciones y simetrías; de forma similar se estudia la estructura algebraica de las homotecias. Resaltamos que dentro del marco disciplinar se presenta la definición de traslación de una manera no tradicional, es decir no se hace uso del vector traslación, con la cual se demuestran los teoremas que establecen su estructura de grupo abeliano. Sin embargo para la elaboración de la propuesta didáctica utilizaremos el vector traslación puesto que la noción de orientación como se presenta en el marco disciplinar no es apropiada para ser presentada a los estudiantes en este nivel de escolaridad.

Las actividades propuestas tienen los componentes didácticos necesarios para que el estudiante logre por sí mismo aproximarse a las nociones de congruencia y semejanza y sea para él un aprendizaje significativo. Las actividades se basan en los niveles de Van Hiele para la enseñanza de la geometría (reconocimiento, análisis, abstracción, deducción) apoyados con el software de geometría dinámica "Geogebra". Además para el diseño de las mismas se hizo un estudio de los posibles errores y dificultades que pueden presentar los estudiantes al momento de abordar estos conceptos.

Teniendo en cuenta los estándares y el PEI del colegio "Construyendo empresa desde de la cultura y la comunicación", algunas de las actividades están diseñadas con un componente artístico, mostrando así una relación con los antecedentes históricos.

## 2. ANTECEDENTES HISTÓRICOS

En este capítulo presentaremos algunos aspectos acerca del desarrollo histórico de los conceptos relevantes para este trabajo.

### 2.1 Las Transformaciones en el plano.

El libro *Elementos* de Euclides ha sido la obra que ha fundamentado el estudio de la geometría desde antigüedad hasta la geometría de Hilbert a finales del siglo XIX.

El libro I de los *Elementos* contiene 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes, donde la noción común 4 expresa: “*Cosas que coinciden entre si son iguales entre sí*”, en sus demostraciones él utiliza el principio de superposición.

El uso del principio de superposición de figuras, da lugar a pensar en la noción de movimiento que al respecto el profesor Campos A. (1994) afirma:

*“La superposición de Euclides, arraiga en la intuición como un movimiento hasta el punto de conservar tal nombre en la geometría rigurosamente redactada, pone a los matemáticos en un camino lentamente recorrido hasta llegar a las clases de equivalencia, definida en el siglo XX gracias a meras correspondencias biyectivas. Es la evolución de una idea geométrica desde Euclides hasta Bourbaki”* (p.445).

Por otra parte, desde la antigüedad, algunos de los elementos artísticos más utilizados en la decoración son los frisos, los mosaicos y las teselaciones que se obtienen a partir de movimientos rígidos en el plano aplicado a figuras geométricas.

En el período paleolítico, se evidencia en la escultura de ciertas estatuas la manera en que se representaba la simetría de la figura humana, además de la simetría en la elaboración de objetos como flechas y hachas. En ese momento se tenía conciencia de la simetría, pero no se hacía un uso consciente de ella, posiblemente, por experiencia, el hombre prehistórico encontró que un objeto era más útil si sus bordes eran simétricos.

En la transición del período paleolítico al neolítico, surge la fabricación de cerámicas. Las traslaciones se convirtieron en una herramienta artística importante, porque dependiendo de las figuras geométricas que allí se esculpían se podía distinguir la cultura que la elaboraba (Holderlin, 2000).

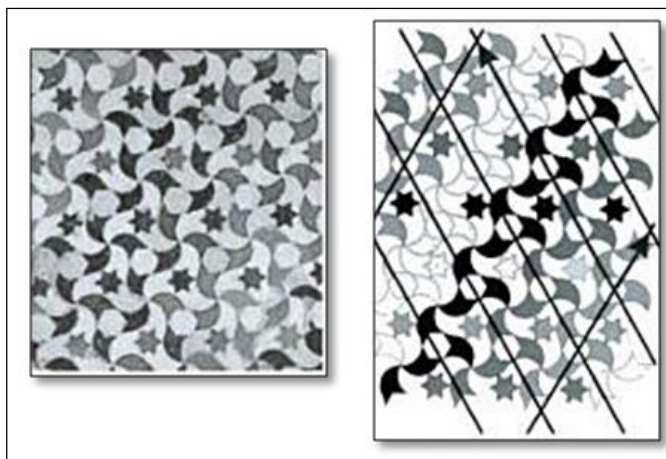
El arte griego entre los años de 1100 a. C. y 650 a. C. se denominó período geométrico pues realizaban sus decoraciones con bandas de motivos geométricos.

Durante el período Heian en Japón (794 a 1185), el origami se convirtió en una parte fundamental de las ceremonias tradicionales de la nobleza, esto fue porque el papel era

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

un artículo de lujo que no todos los habitantes podían conseguir. La técnica del origami puede considerarse como un arte, según Gombáu (2007) “*Los pliegues, no son más que transformaciones geométricas (simetrías, giros, translaciones), a veces bastante complejas que pueden ser estudiadas en términos geométricos*”.

Los árabes llegaron a ser importantes exponentes del arte geométrico, llegando a su esplendor en la época en que la dinastía Nazarí era importante en el sur de España, en el llamado Reino de Granada, aproximadamente en los siglos XIII y XIV. De esta época podemos destacar la Alhambra por su despliegue de decoración de sus paredes y techos con motivos caligráficos y mosaicos geométricos. Todos los mosaicos de la Alhambra tienen en común que se puede hallar una región poligonal, llamada región fundamental y mediante traslaciones, giros y simetrías se puede reproducir por completo el mosaico como lo muestra la siguiente imagen<sup>2</sup> (Hidalgo, 2007).



Una de las preocupaciones para los pintores y artistas del Renacimiento fue la representación de los objetos del espacio y los problemas relacionados con la sombra. La pintura tenía como objetivo la descripción del mundo real, los artistas empezaron a estudiar la naturaleza para representarla y se encontraron con el problema matemático de representar un mundo tridimensional en un lienzo bidimensional.

Los pioneros en estudiar y utilizar las matemáticas para hacer una representación exacta de la naturaleza fueron el artista Filippo Brunelleschi (1377-1446), Leonardo Da Vinci (1452- 1519) quien escribió la obra "*Tratatto della pintura*"(1651) sobre la perspectiva y Durero (1491-1528) quien escribió "*Instrucción en la medida con regla y compás*", ellos se preocuparon por dar una representación exacta de la naturaleza.

<sup>2</sup> Hidalgo, L (2007). *Mosaicos*. Recuperado de: [http://books.google.com.co/books?id=Mcn9EPC4nG4C&pg=PP4&lpg=PP4&dq=HIDALGO+Laura.+\(2007\).](http://books.google.com.co/books?id=Mcn9EPC4nG4C&pg=PP4&lpg=PP4&dq=HIDALGO+Laura.+(2007).)

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Según Klein (1994) *“De todos los artistas del Renacimiento, el mejor matemático fue el alemán Albert Durero quién escribió un libro sobre geometría: Instrucción en la medida con regla y compás (1525), para ayudar a los artistas a comprender la perspectiva”* (p.314). Es así como la perspectiva se transformó en instrumento de estudio de la geometría.

Uno de los precursores de la idea de transformación geométrica y la utilización de propiedades invariantes, fue el francés Gerard Desargues (1591-1661). Sus investigaciones se basan particularmente en la teoría de las cónicas, interpretadas como secciones planas de un cono de revolución con un plano que lo interseca, y después gracias a la perspectiva fueron consideradas como proyecciones perspectivas de un círculo sobre un plano no paralelo al plano que contiene al círculo. Entonces, una cónica es una proyección del círculo que sirve de base al cono a partir del vértice del cono sobre un plano secante (Moriena, 2006).

Pascal (1623- 1662) retoma los métodos proyectivos hechos por Desargues y redacta su tratado de cónicas.

Jahn (1998) por su parte plantea:

*“En este período histórico las transformaciones geométricas aparecen como instrumentos implícitos de transferencia de propiedades. Las únicas transformaciones utilizadas son las proyecciones, pero quedan en el contexto de las cónicas, y no son consideradas como objetos de estudio en sí mismas, sino como simples relaciones entre dos figuras donde prima la noción de invariante”* (p.36).

En el siglo XVII, la idea de geometría analítica o “método de las coordenadas” presentado paralelamente por los matemáticos Fermat (1601-1665) y por Descartes (1596-1650) ha sido introducida como un método general para solucionar problemas geométricos y en particular para estudiar curvas y superficies. Considerando al plano como un conjunto de puntos, organizados en parejas ordenadas, y a las curvas como ecuaciones.

Al respecto, Klein (1994) afirma: *“Es está una de las vetas más ricas y fructíferas del pensamiento matemático que jamás se hayan encontrado”* (p. 401).

En su libro *“La Géométrie”* Descartes (citado por Moriena, 2006) *“Expresa que en Geometría Analítica, el estudio de las propiedades de las curvas se realiza sobre el estudio de las propiedades algebraicas de las ecuaciones correspondientes, permitiendo la interpretación de los problemas geométricos a través del álgebra”* (p.5).

Fermat por su parte, expone la idea fundamental de ecuación de una curva, el método se basa en la correspondencia biyectiva entre los puntos del plano y sus coordenadas y asocia las ecuaciones a las curvas.

Esto significa que la Geometría Analítica según Moriena (2006) *“Reemplaza las leyes geométricas (o sus propiedades) de las figuras por leyes algebraicas sobre las coordenadas de sus puntos. Es precisamente esta relación analítica entre puntos y coordenadas que nos permite reconocer a la figura como conjunto de puntos”* (p.6).

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Según Jahn (1998) en el libro "*Psicogénesis e historia de las ciencias*" escrito por Piaget & García (1983) concluyen "*La noción de transformación tiene su origen innegable en la Geometría Analítica*" (p.45).

Por otra parte, Campos (1994) afirma: "*En el siglo XVIII, Euler se dio cuenta de un hecho importante que enunció así: Un desplazamiento plano es una rotación, o una traslación, o una traslación seguida de una simetría*" (p.246).

Durante la segunda mitad del siglo XIX los matemáticos se dedicaron con gran motivación al estudio de diversas transformaciones. Dentro de ellas están el grupo de transformaciones que precisa la geometría proyectiva, claro está que Desargues y Pascal con sus obras ya habían dado algunos aportes pero aún no existía un desarrollo sistemático, fue gracias a Poncelet (1788-1867) que se logró este desarrollo (Boyer, 1996 p.61).

La obra de Poncelet desarrolla y transmite el método de las transformaciones e inspira nuevas investigaciones, por ejemplo, el alemán Jacob Steiner (1796-1863) fue el primero en adoptar ideas de las escuelas francesas, especialmente de Poncelet, y mejoró el desarrollo sintético de la geometría proyectiva. El trabajo de Poncelet inspiró los trabajos de Möbius, Steiner, Plücker, Gergonne y Chasles. La investigación de Chasles trata en gran parte a la teoría de las transformaciones (Moriena, 2006).

En 1840 Olinde Rodríguez publica un trabajo en el que prueba que cualquier movimiento rígido es el resultado de una rotación y una traslación a lo largo del eje de rotación, en éste mismo año, el matemático alemán Moebius (1790 - 1868) presenta el concepto de simetría y sus generalizaciones, diciendo que una figura se llama simétrica si puede ser transformada de más de una forma en otra figura igual a ésta.

A finales del siglo XIX la geometría tiene la necesidad de buscar la clasificación de las propiedades invariantes y de familias de transformaciones asociadas a esas propiedades. En esta búsqueda aparece la noción de grupo, referenciada como el estudio de las sustituciones de las raíces de una ecuación algebraica, desarrollada por Galois (1811-1832) (Moriena, 2006).

Camille Jordan (1832-1922) realizó el primer estudio importante sobre grupos infinitos en su "*Memoria sobre los grupos de movimientos*" (1868-1869) este trabajo originó el estudio de las transformaciones geométricas mediante el concepto de grupo.

Klein (1849- 1925) dedicó gran parte de su vida al estudio del concepto de grupo, en una de sus visitas a París, donde ya se estaban desarrollando las ideas expuestas por Lagrange (1736- 1813) sobre la teoría de grupos, quedo impresionado por la posibilidad de unificación que se derivaba de este concepto.

La relación entre la geometría y la teoría de grupos llevaría a Klein a presentar el Programa de Erlangen (1872) donde propone un estudio metódico de esas relaciones y describe a la geometría como el estudio de aquellas propiedades de las figuras que

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

permanecen invariantes con respecto a un grupo específico de transformaciones. Si se denomina al conjunto de todas estas transformaciones grupo principal de las transformaciones del espacio; entonces las propiedades geométricas no son alteradas por la aplicación de las transformaciones del grupo principal, por lo tanto la clasificación de los grupos de transformaciones se convierte en una clasificación de geometrías (Moriena, 2006).

Jahn (1998) afirma: *“El Programa Erlangen libera el pensamiento geométrico de toda intuición, enriquece la geometría abstracta”* (p. 48).

Citando a Moriena (2006) *“Una geometría es el estudio de las propiedades invariantes por un grupo operado sobre un espacio y ese grupo determina la estructura de la geometría. Así, para Klein, las transformaciones actúan sobre un espacio y no solamente sobre las figuras”* (p.7). Jahn (1998) afirma: *“Considerar al espacio como objeto de estudio geométrico es el otro punto importante que se desprende del análisis del Programa de Erlangen”* (p. 49).

*Whitehead en 1939 propuso que el concepto de geometría como estudio de la invariancia bajo un grupo de transformaciones, debe ser reemplazado por la idea de estudiar un espacio con una estructura intrínseca que consta de un conjunto de relaciones, las cuales pueden estar eventualmente definidas con la ayuda de un grupo de transformaciones* (Alsina, 1989, p. 15)

Por otra parte, el artista holandés Maurits Escher (1898-1972), realiza sus obras basándose en el concepto de "arte matemático". Parte fundamental de ellas, es la división regular del plano, realizando movimientos rígidos. Este artista menciona que se ha sentido más cercano a los matemáticos que a los artistas. Un ejemplo claro del “arte matemático” de Maurits Escher se ve representado en la figura *Peces y Barcos*<sup>3</sup>.



---

<sup>3</sup> Recuperado de [http://recursos.educarex.es/escuela2.0/Humanidades/Etica\\_Filosofia\\_Ciudadania/investigando\\_precepcion/fondo\\_figura4.htm](http://recursos.educarex.es/escuela2.0/Humanidades/Etica_Filosofia_Ciudadania/investigando_precepcion/fondo_figura4.htm)

## 2.2 La Semejanza.

Uno de los conceptos que nos interesan para el desarrollo de nuestro trabajo es el de semejanza por eso haremos algunos apuntes sobre su historia basándonos en el trabajo realizado por Boyer (1996).

El concepto de semejanza fue utilizado inicialmente de manera intuitiva para resolver algunos problemas de la vida cotidiana, con el tiempo se evidenció que este concepto estaba sumergido en muchas situaciones y surgió la necesidad de profundizar en el estudio de éste.

Está en duda si los babilonios conocían el concepto de semejanza, aunque es muy probable que estuviesen familiarizados con el concepto. En Mesopotamia parece que se tenía la noción de semejanza en las circunferencias, como lo fue también en Egipto. Parece ser que muchos de los problemas que involucraban medidas de los triángulos, que aparecen en las tablillas cuneiformes, tienen un acercamiento a la noción de semejanza.

Durante el siglo VI a.C. en la época de la escuela pitagórica, Pitágoras, por medio de un experimento, estableció una relación entre la música, la proporcionalidad numérica y geométrica. Más tarde Platón consiguió calcular las proporciones que producían los sonidos naturales.

Aproximadamente en el año 585 a. C. nace Thales de Mileto, a quien se le atribuye muchos teoremas importantes para la geometría pero no existe ningún documento que de evidencia de sus aportes. Entre los teoremas más relevantes para nuestro objeto de estudio están: “Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente congruentes a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes” y “Si dos rectas secantes son cortadas por una serie de rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra recta”. Fuentes escritas por Diógenes (412 a.C. - 323 a.C.), Plinio (23 d.C. – 79 d.C.) y Plutarco (45 d.C. - 120 d.C.) describen que Thales midió las alturas de las pirámides de Egipto tomando la medida de la longitud de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo era igual a su altura. Además, aplicando la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes Thales encontró la distancia de un barco a la playa.

Años después, posteriormente de la muerte de Pericles (495 a.C.- 429 d.C.), destacamos a Anaxágoras que falleció en el 428 a.C. aproximadamente. La historia cuenta que Pericles murió de peste, por eso la ciudad le preguntó al Oráculo de Apolo que podían hacer para que la peste se acabara. Así nació el conocido problema de la duplicación del cubo o problema de Delos: “Dada la arista de un cubo, construir únicamente con regla y compás la arista de otro cubo que tenga volumen doble que el primero”.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Euclides en su gran obra *Elementos* que consta de 13 libros trata de temas de geometría, aritmética y álgebra. Esta obra se constituye en un ejemplo clásico por excelencia que muestra cómo funciona un sistema axiomático. El libro I de los *Elementos* de Euclides, consta de 48 proposiciones, de la 1 a la 26 trata de las propiedades de los triángulos y específicamente las proposiciones I-4, I-8, y I-26 son los criterios de congruencia de triángulos (LAL, LLL, ALA respectivamente) cada uno demostrado paso a paso utilizando las definiciones, postulados y nociones comunes. En el libro II, la proposición 11 muestra una figura usada actualmente para ilustrar una propiedad iterativa que tiene la sección áurea. Los griegos tendían a evitar el trabajo con proporciones y Euclides también, él sustituía entonces mediante una relación entre longitudes que tendría que ser de la forma  $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$  por  $xc = ab$ . A pesar de ello aparecen en el libro V, incluso aparece la noción de razón aunque es bastante vaga, una vez establecida la teoría de proporciones en el libro V, la utiliza en el libro VI para demostrar teoremas relativos a razones y proporciones que se muestran al estudiar triángulos, paralelogramos y polígonos semejantes.

Por otro lado, en el libro "*Fundamentos de la Geometría*", David Hilbert inicia con los términos no definidos de punto, recta y plano, además de las relaciones indefinidas estar en, estar entre, ser congruente, ser paralelo y ser continuo. Propone 21 axiomas donde quedan definidos implícitamente estos términos y relaciones. Dentro de estos axiomas 5 se refieren a la congruencia estableciendo las condiciones de igualdad entre segmentos, ángulos, triángulos, circunferencias, polígonos, igualdad entre figuras geométricas. Hilbert introduce la congruencia como concepto básico.

### AXIOMAS DE CONGRUENCIA DE HILBERT

**III-1** Si  $A$  y  $B$  son dos puntos de una recta  $a$ , y además es  $A'$  otro punto de la misma o distinta recta  $a'$ , puede encontrarse siempre sobre uno de los lados de  $a'$ , determinados por  $A'$ , un solo punto  $B'$  tal, que los segmentos  $AB$  y  $A'B'$  sean congruentes o iguales.

**III-2** Si los dos segmentos  $A'B'$  y  $A''B''$  son congruentes con el mismo segmento  $AB$ , también el segmento  $A'B'$  es congruente con el  $A''B''$ . Dicho brevemente: si dos segmentos son congruentes con un tercero, son congruentes entre sí.

**III-3** Sean  $AB$  y  $BC$  dos segmentos de la recta  $a$  sin puntos comunes y, por otra parte,  $A'B'$  y  $B'C'$  dos segmentos sobre la misma recta  $a$  o sobre otra distinta  $a'$ , pero en todo caso, sin puntos comunes: si entonces  $AB \cong A'B'$  y  $BC \cong B'C'$  siempre se verifica  $AC \cong A'C'$ .

**III-4** Dados un ángulo  $\sphericalangle(h, k)$  en un plano  $\alpha$ , una recta  $a'$  en un plano  $\alpha'$  y una de las regiones de  $\alpha'$  determinadas por  $a'$ ; representemos por  $a'$  un semirrayo de  $a'$  que parte de  $O'$ . Existe, entonces en el plano  $\alpha'$  uno y solo un semirrayo  $k'$  tal, que el  $\sphericalangle(h, k)$  es congruente o igual al  $\sphericalangle(h', k')$  y, a la vez, todos los puntos interiores del ángulo  $\sphericalangle(h', k')$  están situados en la región dada con respecto a  $a'$ . Simbólicamente  $\sphericalangle(h, k) \cong \sphericalangle(h', k')$ .

Todo ángulo es congruente consigo mismo  $\sphericalangle(h, k) \cong \sphericalangle(h, k)$ .

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Todo ángulo puede ser transportado a un plano dado, en una región dada con un semirrayo dado de manera unívocamente determinada.

**III-5** Si dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  verifican las congruencias:  $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$ ,  $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$ . También queda satisfecha la congruencia  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ . Cambiando la notación resulta que con las mismas hipótesis del axioma las dos congruencias  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$  y  $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B'$  quedan satisfechas (Hilbert, 1996, p.13).

En el capítulo III, Hilbert expone la teoría de las proporciones y dentro de éste plantea un apartado sobre las proporciones y los teoremas de semejanza. Define dos triángulos semejantes como “*Dos triángulos se llaman semejantes cuando cada uno de los ángulos de uno de ellos es congruente con otro ángulo de los del segundo*” (p.51).

Por otra parte, Lemonidis (1990,1991) citado por (Escudero, 2005) ha realizado un estudio de la evolución histórica de los conceptos de semejanza y homotecia, “*el cual relaciona con la situación correspondiente en la enseñanza<sup>4</sup>, que le ha permitido identificar una progresión en dicha evolución y determinados obstáculos epistemológicos con ella relacionados*” (p. 380).

Lemonidis (1990) distingue tres períodos:

1. El griego: Donde aparece la demostración del teorema de Thales con algunos teoremas que se encuentran en los *Elementos* de Euclides relacionados con figuras semejantes. Es de anotar que en este período y durante el período de la influencia de la geometría de Euclides, que las transformaciones en el plano no existen.
2. Del siglo XVI al XVIII: En el Renacimiento surgen los problemas de representación en el espacio, los cuales dan origen al estudio de las transformaciones. Durante este período se va desarrollando el concepto lentamente, sin que su utilización sea consciente y exista una formalización de las mismas.
3. Del siglo XIX al XX: Este período se caracteriza por la organización y algebrización de la geometría. Los conceptos de homotecia y semejanza son tratados como objetos matemáticos debido al gran avance que tiene la geometría en el siglo XIX.

Por otra parte, entre los trabajos de Geometría significativos sobre semejanza, después de los *Elementos* de Euclides están los trabajos hechos por Legendre (1794) “*Eléments de Géométrie*”<sup>5</sup> y de Hadamard (1898) “*Lecons de Géométrie Élémentaire*”. Legendre define de la misma manera que Euclides la semejanza, mientras que Hadamard define figuras semejantes como aquellas que son congruentes con figuras homotéticas (Lima, 2001).

<sup>4</sup> Relación que es presentada en la sección 3.2.

<sup>5</sup> Estos fueron traducidos al español en Colombia, de la décima Edición de Paris por Luis María Lleras (1842-1885), *Elementos de Jeometría* (Bogotá, Imprenta de Gaitán, 1866), el cual sirvió de libro de texto por varios años. (Albis V. & Clara H. Sánchez).

### 3. ASPECTOS DISCIPLINARES

En este capítulo se plantean los aspectos disciplinares necesarios que sustentan la propuesta de enseñanza. El propósito de la propuesta es que los estudiantes de grado séptimo reconozcan figuras semejantes a partir de las transformaciones geométricas en el plano y de esta manera se aproximen al concepto de semejanza. Aunque la congruencia es un caso particular de la semejanza, en la primera parte de este capítulo, dada su importancia, se le dará un tratamiento especial a este concepto. Resaltamos que en grado séptimo generalmente no se trabajan las nociones de congruencia y semejanza de esta manera y los textos escolares no las consideran.

Este capítulo se ha dividido en dos partes: la primera, *Transformaciones geométricas en el plano y Congruencia*, en la que se expone la definición tradicional de congruencia de triángulos, la definición de transformación y como un caso particular de estas la de isometría; dentro de las isometrías se estudia la estructura algebraica de las traslaciones, las rotaciones y las simetrías. En particular, el concepto de traslación, fue definido de una forma no tradicional, es decir no se utiliza el concepto de vector de traslación, sin embargo las dos definiciones son equivalentes. Finalmente, en esta parte se presenta el que denominamos “Teorema Fundamental de las Transformaciones y la Congruencia”, donde relacionamos las isometrías con congruencia, en el que se afirma que “Dos polígonos son congruentes, si y solamente si, existe una isometría que transforma uno en el otro”. En la segunda parte, *Transformaciones geométricas en el plano y Semejanza*, se exponen las definiciones tradicionales de semejanza de triángulos, de homotecia; mostrando de estas últimas su estructura algebraica. De forma similar a la primera parte, se presenta el que denominamos “Teorema Fundamental de las Transformaciones y la Semejanza”, en donde se relacionan las homotecias con la semejanza; estableciendo que “Dos polígonos son semejantes, si y solamente si, existe una transformación que envía uno en el otro”, en este caso la transformación puede ser una homotecia o la composición de una homotecia con una isometría.

Recalamos que en esta parte del trabajo, en particular los conceptos relacionados con congruencia y semejanza toman como base Moise (1989) y los relacionados con transformaciones geométricas toman como base Lima (2001), Guerrero B. (2006) y Alfonso H. (1993).

### 3.1 Transformaciones en el plano y congruencia.

Intuitivamente se dice que dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño. Como se verá al final de la sección las isometrías nos permiten precisar esta definición. En particular las figuras con las que trabajaremos serán los triángulos, y finalmente los resultados obtenidos se generalizan fácilmente a polígonos.

#### 3.1.1 Congruencia de triángulos

A continuación se presentan algunas definiciones y teoremas<sup>6</sup> que toman como referencia a Moise (1989).

##### **Definición (1)**

*Para dos puntos cualesquiera  $A$  y  $B$ , el **segmento**  $\overline{AB}$  es el conjunto de los puntos  $A$  y  $B$ , y de todos los puntos que están entre  $A$  y  $B$ . Los puntos  $A$  y  $B$  se llaman los extremos de  $\overline{AB}$ .*

El símbolo  $\overline{AB}$  lo utilizamos para representar el segmento, la figura geométrica, es decir un conjunto de puntos, mientras que  $AB$  lo utilizaremos para expresar un número que da la medida de la distancia entre los extremos.

*Se dice que dos segmentos  $AB$  y  $CD$  son congruentes, lo cual se escribe  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ , si y solamente si, tienen la misma medida, esto es si  $AB = CD$ .*

##### **Definición (2)**

*Sean  $A$  y  $B$  dos puntos de una recta  $l$ . El **rayo**  $\overrightarrow{AB}$  es el conjunto de puntos que es la reunión de (1) el segmento  $\overline{AB}$  y (2) el conjunto de todos los puntos  $C$  para los cuales es cierto que  $B$  está entre  $A$  y  $C$ . El punto  $A$  se llama el extremo de  $\overrightarrow{AB}$ .*

##### **Definición (3)**

*Si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su reunión es un **ángulo**. Los dos rayos se llaman los lados del ángulo y el extremo común se llama el vértice. Si los rayos son  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ , entonces el ángulo se indica con  $\sphericalangle BAC$  o con  $\sphericalangle CAB$ .*

*Se dice que dos ángulos  $ABC$  y  $DEF$  son congruentes, lo cual se escribe  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$ , si y solamente si, tienen la misma medida.*

---

<sup>6</sup> La demostración de estos resultados se encuentran en Moise (1989) Capítulos 5 y 6.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### Definición (4)

Si  $A, B, C$  son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$  se llama **triángulo**, y se indica con  $\Delta ABC$ <sup>7</sup>. Los puntos  $A, B, C$  se llaman **vértices**, y los segmentos  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$  se llaman **lados**.

### Definición (5)

Sean  $P_1, P_2, \dots, P_n$  una sucesión de  $n$  puntos distintos de un plano con  $n \geq 3$ . Supongamos que los  $n$  segmentos  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$  tienen las siguientes propiedades:

- (1) Ningún par de segmentos se intersecan, salvo en sus puntos extremos.
- (2) Ningún par de segmentos con un extremo común son colineales.

Entonces la reunión de los  $n$  segmentos de llama **polígono**.

### Definición (6)

Dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son congruentes, lo cual se simboliza  $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$  si sus lados correspondientes son congruentes y sus ángulos correspondientes también lo son, es decir si cumplen las siguientes congruencias:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}; \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}; \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'; \quad \sphericalangle BCA \cong \sphericalangle B'C'A'; \quad \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle C'A'B'$$
<sup>8</sup>

Los lados congruentes de triángulos congruentes se llaman lados homólogos y los ángulos congruentes de triángulos congruentes se llaman ángulos homólogos.

Para determinar si dos triángulos son congruentes no es necesario comprobar las 6 congruencias. En efecto, se puede establecer la congruencia con menos información, determinándose de esta manera unos criterios de congruencia de triángulos que se mencionan a continuación. Al primer criterio Moise (1989) lo establece como postulado y los otros dos criterios como teoremas.

### Postulado (1) LAL

Dos triángulos  $\Delta ABC$  y  $\Delta A'B'C'$  son congruentes si  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ;  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$  y  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ .

<sup>7</sup> El  $\Delta ABC$  puede notarse como  $\Delta BCA, \Delta CAB, \Delta ACB, \Delta CBA, \Delta BAC$ .

<sup>8</sup> Puesto que un triángulo se puede nombrar de 6 formas diferentes, hay 36 formas en que los triángulos dados son congruentes, sin embargo se adoptará la notación  $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$  la que según lo anotado arriba genera las partes congruentes señaladas solamente de dicha manera.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### Teorema (1) ALA

Dos triángulos son congruentes si  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ;  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ ;  $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$ .

### Teorema (2) LLL

Dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son congruentes si  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ ,  $\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$ .

Un triángulo es isósceles si tiene al menos dos lados congruentes. Un triángulo es equilátero si sus tres lados son congruentes, si tiene todos sus ángulos congruentes se llama equiángulo.

### Teorema (3)

Si en un triángulo se tienen dos ángulos congruentes entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

### Teorema (4)

Si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

### Corolario (1)

Un triángulo es equiángulo si y solamente si es equilátero.

### Definición (7)

*Dos polígonos son congruentes si sus lados y ángulos correspondientes son congruentes.*

## 3.1.2 Transformaciones geométricas en el plano

### Definición (8)

*Una transformación en un plano  $\Pi$  es una función biyectiva<sup>9</sup>  $f: \Pi \rightarrow \Pi$  del plano en sí mismo. Notaremos la imagen de un punto  $X$ ,  $f(X)$  por  $X'$ .*

---

<sup>9</sup> Una función  $f: X \rightarrow Y$  es biyectiva si al mismo tiempo es inyectiva y sobreyectiva, es decir, para dos elementos  $x$  y  $y$  del dominio de  $f$  se cumple que  $x_1 \neq x_2$  entonces  $f(x_1) \neq f(x_2)$  y si para todo elemento  $y$  de  $Y$  existe un  $x$  en  $X$  talque  $f(x) = y$ .

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### **Definición (9)**

*Dada una transformación  $f$ , un punto  $X$  del plano se llama fijo si su imagen  $f(X)$  es el mismo punto  $X$ . Esto es  $f(X) = X$ .*

Puesto que la función identidad es una transformación, definiendo en el conjunto de las transformaciones en el plano la operación de composición como la composición usual de funciones, se tiene que el conjunto de transformaciones en el plano junto con la operación de composición tiene estructura de monoide.

### **3.1.3 Isometrías en el plano**

Las isometrías, llamadas también movimientos rígidos en el plano, son transformaciones geométricas que conservan la forma y la medida. Estas tienen muchas aplicaciones en la geometría, en nuestro caso las utilizamos para precisar la noción de congruencia.

### **Definición (10)**

*Una isometría es una transformación en un plano que conserva distancias.*

Sea  $d(X, Y)$  la distancia entre dos puntos  $X$  y  $Y$ . Una transformación  $f$  definida en un plano  $\Pi$  es una isometría si se cumple que  $d(X, Y) = d(f(X), f(Y))$  para todo par de puntos  $X$  y  $Y$  pertenecientes a  $\Pi$ .

En este punto es necesario advertir que dado un segmento que une los puntos  $X$  y  $Y$ , al segmento lo notaremos  $\overline{XY}$  y a su medida la notaremos  $XY$ , que corresponde también a  $d(X, Y)$ .

### **Teorema (5)**

La composición de dos isometrías es una isometría.

### **Demostración**

Sean  $f$  y  $g$  dos isometrías definidas en un plano  $\Pi$ . Sean  $X$  y  $Y \in \Pi$ . De la isometría  $f$  tenemos que para todo par de puntos  $X$  y  $Y$  se tiene que  $d(X, Y) = d(f(X), f(Y))$ . Aplicando la isometría  $g$  a los puntos  $f(X)$  y  $f(Y)$  obtenemos  $d(g(f(X)), g(f(Y))) = d(f(X), f(Y))$ . Finalmente, por transitividad tenemos  $d(X, Y) = d(g(f(X)), g(f(Y)))$ .

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Sea un plano  $\Pi$ , la función identidad  $I: \Pi \rightarrow \Pi$  definida por  $I(X) = X$ , para todo  $X \in \Pi$  es una isometría. Dado que toda isometría  $f$  es una función biyectiva existe su inversa  $f^{-1}$  que también es una isometría. Una isometría  $f$  se llama involutiva si  $f \circ f = I$ .

### Teorema (6)

Un ángulo  $XYZ$  y su imagen  $X'Y'Z'$  son congruentes al aplicar una isometría  $f$ , esto es  $f(\sphericalangle XYZ) = \sphericalangle X'Y'Z'$  y  $\sphericalangle XYZ \cong \sphericalangle X'Y'Z'$ .

#### **Demostración**

Sean  $\sphericalangle XOY$  un ángulo y  $f$  una isometría. Se demostrará que  $\sphericalangle XOY \cong \sphericalangle X'O'Y'$ .

Al aplicar  $f$  sobre los puntos  $X, O, Y$  obtenemos los puntos  $X', O', Y'$ , tales que  $\overline{OX} \cong \overline{O'X'}$ ,  $\overline{OY} \cong \overline{O'Y'}$ ,  $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$ , luego los triángulos  $XOY$  y  $X'O'Y'$  son congruentes por (LLL), finalmente por partes correspondientes de triángulos congruentes se tiene  $\sphericalangle XOY \cong \sphericalangle X'O'Y'$ .

### Teorema (7)

Un triángulo  $XYZ$  y su imagen  $X'Y'Z'$  son congruentes al aplicar una isometría  $f$ , esto es

$f(\Delta XYZ) = \Delta X'Y'Z'$ , donde  $\Delta XYZ \cong \Delta X'Y'Z'$ .

#### **Demostración**

Sean  $\Delta XYZ$  un triángulo y  $f$  una isometría. Se demostrará que  $\Delta XYZ \cong \Delta X'Y'Z'$ . Al aplicar  $f$  a los puntos  $X, Y, Z$  obtenemos los puntos  $X', Y', Z'$ , tales que  $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$ ;  $\overline{XZ} = \overline{X'Z'}$ ;  $\overline{YZ} = \overline{Y'Z'}$  y por el criterio (LLL) podemos concluir que  $\Delta XYZ \cong \Delta X'Y'Z'$ .

El siguiente resultado es consecuencia de los teoremas anteriores:

### Corolario (2)

Un polígono  $P$  y su imagen  $P'$  son congruentes al aplicar una isometría  $f$ , esto es  $f(P) = P'$ , donde  $P \cong P'$ .

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### Teorema (8)

Una circunferencia  $C$  y su imagen  $C'$  son congruentes al aplicar una isometría  $f$ , esto es  $f(C) = C'$ , donde  $C \cong C'$ .

### Demostración

Dados  $C$  una circunferencia y  $f$  una isometría del plano  $\Pi$ . Sea el punto  $O$  centro de la circunferencia  $C$ . Al aplicar la isometría  $f$  al punto  $O$  obtenemos su imagen  $O'$ . Si tomamos un punto  $P$  sobre la circunferencia  $C$  y aplicamos isometría  $f$  obtenemos su imagen  $P'$ . Como la isometría mantiene la congruencia entre segmentos tenemos que  $\overline{OP} \cong \overline{O'P'}$ . Si aplicamos la isometría  $f$  a otros puntos de la circunferencia  $C$ , digamos a  $Q$  y  $R$ , obtenemos que  $\overline{OP} \cong \overline{O'P'}$ ;  $\overline{OQ} \cong \overline{O'Q'}$ ;  $\overline{OR} \cong \overline{O'R'}$ . Por tanto los puntos  $P', Q'$  y  $R'$  determinan una circunferencia  $C'$  de centro  $O'$  congruente con  $C$ .

### Traslaciones, Rotaciones y Simetrías

Existen tres isometrías del plano básicas: las traslaciones, las rotaciones y las simetrías. A continuación se presenta la estructura algebraica de cada una de ellas.

### Traslaciones

Generalmente en Educación Básica las traslaciones en el plano se definen haciendo uso de vectores, los cuales están asociados a la noción de dirección. Sin embargo, esta última noción no se aborda formalmente en el aula.

La definición de traslación dada aquí no hace uso de vectores. Se trata de una forma no tradicional. Es de anotar que con la definición dada aquí se llega a la noción de traslación que hace uso de vectores, resaltando que la presentación inicial es diferente.<sup>10</sup>

Para tal fin, consideraremos algunas definiciones previas que toman como base el libro *Geometría Moderna* de Moise (1986).

Un subconjunto  $A$  del espacio se llama **convexo**, si para cada dos puntos  $P$  y  $Q$  del conjunto  $A$ , el segmento  $\overline{PQ}$  está en  $A$ .

---

<sup>10</sup> Sin embargo hacemos ver que para efectos didácticos en las actividades se utilizará la noción de vector.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Por ejemplo, un plano es un conjunto convexo, el interior de una circunferencia es un conjunto convexo, una recta es un conjunto convexo. El interior de un triángulo es un conjunto convexo, sin embargo el mismo triángulo no lo es.

Una recta de un plano divide al plano en dos conjuntos, cada uno de los cuales es convexo, estos dos conjuntos se llaman semiplanos de la recta. La recta no hace parte de ninguno de los semiplanos. Los semiplanos son convexos porque si dos puntos están al mismo lado de la recta, el segmento que los une nunca corta la recta. Realmente lo anotado aquí corresponde a un postulado, el cual enunciamos a continuación.

El **postulado de separación del plano** nos dice que dada una recta y un plano que la contiene, los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos tales que:

- i) Cada uno de los conjuntos es convexo, y
- ii) Si  $P$  está en uno de los conjuntos y  $Q$  en el otro, entonces el segmento  $\overline{PQ}$  interseca a la recta.

Cada uno de los conjuntos determinados en i) se llama un semiplano. Si  $P$  está en uno de los semiplanos y  $Q$  está en el otro, entonces decimos que  $P$  y  $Q$  están a lados opuestos de  $l$ . Si  $P$  y  $Q$  están en el mismo semiplano, decimos que  $P$  y  $Q$  están al mismo lado de  $l$ .

### Definición (11)

Sea  $l$  una recta y  $d$  un número real positivo. Sean  $P$  y  $Q$  puntos de  $l$  tales que  $PQ = d$ . Se define la traslación  $T_{PQ}: \Pi \rightarrow \Pi$  de la siguiente manera:

1. Si  $X$  es un punto que no está en  $l$  entonces  $T_{PQ}(X) = X'$ , donde  $XX' = d$ , la recta  $\overleftrightarrow{XX'}$  es paralela a  $l$  y  $X'$  y  $Q$  están en el mismo semiplano que determina la recta  $\overleftrightarrow{XP}$ .
2. Si  $X$  está en  $l$ , entonces  $T_{PQ}(X) = X'$  siempre que se verifiquen las siguientes condiciones:
  - i) Si  $X$  está entre  $P$  y  $Q$  entonces  $Q$  está entre  $X$  y  $X'$ .
  - ii) Si  $P$  está entre  $X$  y  $Q$ , y  $XP < d$  entonces  $P$  está entre  $X$  y  $X'$ .
  - iii) Si  $P$  está entre  $X$  y  $Q$ , y  $XP = d$  entonces  $X' = P$ .
  - iv) Si  $P$  está entre  $X$  y  $Q$ , y  $XP > d$  entonces  $X'$  está entre  $X$  y  $P$ .
  - v) Si  $Q$  está entre  $P$  y  $X$  entonces  $X$  está entre  $Q$  y  $X'$ .
  - vi) Si  $X$  es  $P$  o  $Q$ ,  $T_{PQ}(P) = Q$  y  $T_{PQ}(Q) = P$  donde  $PQ = d$ ,  $P$  está en  $l$  y  $Q$  está entre  $P$  y  $P'$ .

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

En este caso diremos que la traslación tiene una orientación  $PQ$ <sup>11</sup>. Nótese que la traslación  $T_{PQ}$  no tiene puntos fijos.

Análogamente, dada la recta  $l$  y los puntos  $P$  y  $Q$  en  $l$ , se determina una traslación con orientación  $QP$ .

Definidas las traslaciones  $T_{PQ}$  y  $T_{QP}$ , diremos que estas tienen orientaciones opuestas.<sup>12</sup>

Dado un plano  $\Pi$ , la función identidad es una traslación que notamos  $T_o$ , en tal caso  $d = 0$ , los puntos  $P$  y  $Q$  coinciden y todos los puntos del plano son fijos.

Decimos que las traslaciones  $T_{PQ}$  y  $T_{RS}$ , tienen la misma orientación si  $Q$  y  $S$  están en el mismo semiplano de la recta  $\overleftrightarrow{PR}$  y que  $T_{PQ}$  y  $T_{RS}$  tienen orientaciones opuestas si  $Q$  y  $S$  están en distintos semiplanos de la recta  $\overleftrightarrow{PR}$ .

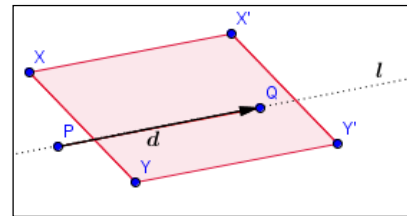
Una traslación es una función biyectiva y por tanto tiene inversa. La inversa de una traslación es una traslación denotado por  $T^{-1}_{PQ} = T_{QP}$ .

### Teorema (9)

Toda traslación es una isometría.

#### **Demostración**

Sea  $l$  una recta del plano  $\Pi$  y  $d$  un número real positivo. Sean  $P, Q \in l$  tales que  $d = PQ$ , y la traslación  $T_{PQ}$  definida sobre  $\Pi$ . Demostraremos que para dos puntos distintos  $X, Y \in \Pi$  al aplicar la traslación  $T_{PQ}$  sobre  $X, Y$  se cumple  $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$ .



La traslación  $T_{PQ}$  transforma a  $X$ , en la orientación  $PQ$ , en un punto  $X'$  donde  $XX' = d$ . Análogamente  $T_{PQ}$  transforma a  $Y$  en la orientación  $PQ$  en un punto  $Y'$  donde  $YY' = d$ . Luego  $T_{PQ}$  envía a un segmento  $\overline{XY}$  en  $\overline{X'Y'}$ . Se cumple entonces que  $XX' = d$ ,  $YY' = d$ ,  $\overline{XX'} \parallel l$ ,  $\overline{YY'} \parallel l$ . Entonces el cuadrilátero  $XX'Y'Y$  es un paralelogramo, por tener dos lados opuestos paralelos y congruentes, por lo tanto  $\overline{XY} \parallel \overline{X'Y'}$  y  $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$ . De donde, la traslación  $T_{PQ}$  es una isometría.

Como consecuencia del teorema anterior y de los resultados mencionados de las isometrías se tienen los siguientes corolarios.

<sup>11</sup> De otro modo la traslación tiene a  $\overrightarrow{PQ}$  como vector de dirección y distancia  $PQ$ .

<sup>12</sup> Las traslaciones  $T_{PQ}$  y  $T_{QP}$  se definen con la misma distancia y utilizando el lenguaje de vectores se diría que las traslaciones tienen diferente sentido.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### Corolario (3)

Un ángulo  $XYZ$  y su imagen  $X'Y'Z'$  son congruentes al aplicar una traslación  $T_{PQ}$ , esto es  $T_{PQ}(\sphericalangle XYZ) = \sphericalangle X'Y'Z'$ , donde  $\sphericalangle XYZ \cong \sphericalangle X'Y'Z'$ .

### Corolario (4)

Un polígono  $P$  y su imagen  $P'$  son congruentes al aplicar una traslación  $T_{PQ}$ , esto es  $T_{PQ}(P) = P'$ , donde  $P \cong P'$ .

### Corolario (5)

Una circunferencia  $C$  y su imagen  $C'$  son congruentes al aplicar una traslación  $T_{PQ}$ , esto es  $T_{PQ}(C) = C'$ , donde  $C \cong C'$ .

### Teorema (10)

La compuesta de dos traslaciones es una traslación.

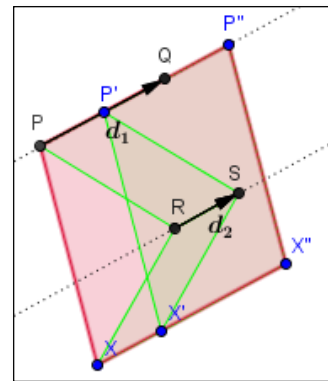
#### Demostración

La prueba se hace en dos casos, el primero considerando que las dos rectas que definen las traslaciones son paralelas y el segundo caso cuando las dos rectas son secantes.

Caso 1: Las dos rectas son paralelas.

Sean  $l$  y  $m$  rectas paralelas,  $d_1$  y  $d_2$  números reales positivos. Sean  $P, Q \in l$  y  $R, S \in m$  tales que  $PQ = d_1$  y  $RS = d_2$ . Consideramos dos casos, cuando las traslaciones tengan la misma orientación y orientación opuesta.

- i) Si  $T_{PQ}$  y  $T_{RS}$  tienen la misma orientación entonces se demostrará que la compuesta de las traslaciones  $T_{PQ} \circ T_{RS} = T_{PP''}$ , donde  $T_{RS}(P) = P'$ ,  $T_{PQ}(P') = P''$  y  $PP'' = d_1 + d_2$ . Nótese que  $P$  y  $P''$  están en  $l$ .



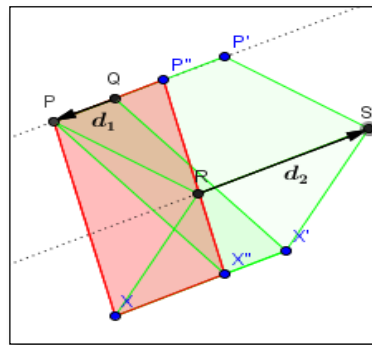
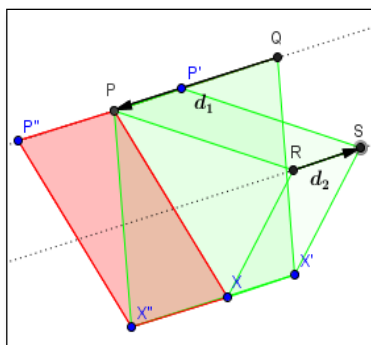
Al aplicar a un punto  $X$  la traslación  $T_{RS}$  obtenemos  $X'$ , tal que  $\overline{XX'} \cong \overline{RS}$ ,  $\overline{XX'} \parallel \overline{RS}$ ,  $XX' = d_2$ . Aplicando a  $X'$  la traslación  $T_{PQ}$  obtenemos  $X''$ , tal que  $\overline{X'X''} \cong \overline{PQ}$ ,  $\overline{X'X''} \parallel \overline{PQ}$ ,  $X'X'' = d_1$ . Por otro lado aplicando  $T_{RS}$  al punto  $P$  obtenemos  $P'$  tal que  $\overline{PP'} \cong \overline{RS}$ ,  $\overline{PP'} \parallel \overline{RS}$ ,  $PP' = d_2$ . Ahora aplicamos  $T_{PQ}$  al punto  $P'$  obteniendo  $P''$  tal que  $\overline{P'P''} \cong \overline{PQ}$ ,  $P'P'' = d_1$ .

Entonces  $\overline{XX'} \cong \overline{RS} \cong \overline{PP'}$  y  $\overline{XX'} \parallel \overline{RS} \parallel \overline{PP'}$  además  $\overline{X'X''} \cong \overline{PQ} \cong \overline{P'P''}$  y  $\overline{X'X''} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{P'P''}$  por transitividad  $\overline{XX'} \cong \overline{PP'}$ ,  $\overline{XX'} \parallel \overline{PP'}$ ,  $\overline{X'X''} \cong \overline{P'P''}$  y  $\overline{X'X''} \parallel \overline{P'P''}$ . Luego los cuadriláteros  $PXX'P'$  y  $P'X'X''P''$  son paralelogramos, por tener lados

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

opuestos congruentes y paralelos, de donde  $\overline{PX} \cong \overline{P'X'}$ ,  $\overline{PX} \parallel \overline{P'X'}$ ,  $\overline{P'X'} \cong \overline{P''X''}$ ,  $\overline{P'X'} \parallel \overline{P''X''}$ . De la misma forma se tiene que el cuadrilátero  $PXX''P''$  es un paralelogramo, luego  $\overline{XX''} \cong \overline{PP''}$ ,  $\overline{XX''} \parallel \overline{PP''}$ . Ahora  $PP'' = PP' + P'P'' = d_2 + d_1$ . Esto significa que existe una traslación  $T_{PP''}$  que transforma el punto  $X$  en  $X''$ , donde  $d = d_1 + d_2$ .

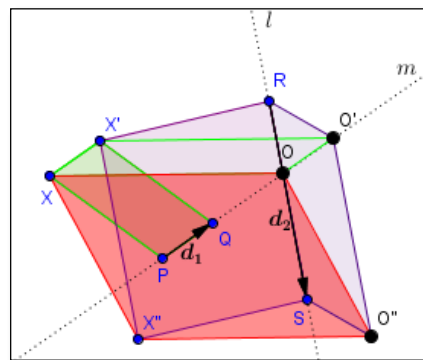
- ii) Similarmente se demuestra que si  $T_{QP}$  y  $T_{RS}$  tienen orientación opuesta y  $d_1 > d_2$ , entonces  $T_{QP} \circ T_{RS} = T_{PP''}$  donde  $PP'' = d_1 - d_2$ , y  $PP''$  esta en la misma orientación que  $QP$ . En el caso en que  $d_1 < d_2$  entonces  $T_{RS} \circ T_{QP} = T_{PP''}$ , donde  $PP'' = d_2 - d_1$ , y  $PP''$  esta en la misma orientación que  $RS$ .



Caso 2: Las dos rectas son secantes.

Sean  $l$  y  $m$  rectas que se intersecan en el punto  $O$ ,  $d_1$  y  $d_2$  números reales positivos. Sean  $P$  y  $Q$  puntos de  $l$  tales que  $PQ = d_1$  y  $RS = d_2$ . Se demostrará que la compuesta de las traslaciones  $T_{RS} \circ T_{PQ}$  es la traslación  $T_{OO''}$ , donde  $d = OO''$  y  $T_{RS} \circ T_{PQ}(O) = O''$ .

Al aplicar a un punto  $X$  la  $T_{PQ}$  se obtiene  $X'$  tal que  $\overline{XX'} \cong \overline{PQ}$  y  $\overline{XX'} \parallel \overline{PQ}$  entonces el cuadrilátero  $XPQX'$  es un paralelogramo, por tener lados opuestos paralelos y congruentes.



Análogamente al aplicar a  $X'$  la traslación  $T_{RS}$  se obtiene el punto  $X''$  donde el cuadrilátero  $X'X''SR$  es un paralelogramo y se cumple que  $\overline{XX''} \cong \overline{RS}$ ,  $\overline{XX''} \parallel \overline{RS}$ . Por otra parte al aplicar la traslación  $T_{PQ}$  al punto  $O$  obtenemos el punto  $O'$  que esta sobre la recta  $m$  tal que  $O$  esta entre  $Q$  y  $O'$  donde  $\overline{OO'} \cong \overline{PQ}$  y además el cuadrilátero  $XX'O'O$  es un paralelogramo donde  $\overline{X'O'} \cong \overline{XO}$ ,  $\overline{X'O'} \parallel \overline{XO}$ . Finalmente, aplicamos  $T_{RS}$  al punto  $O'$  obteniendo  $O''$  donde  $O'O''SR$  es un paralelogramo y se cumple  $\overline{O'O''} \cong \overline{RS}$ ,  $\overline{O'O''} \parallel \overline{RS}$ .

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Tenemos por transitividad  $\overline{X'X''} \cong \overline{O'O''}$ , luego el cuadrilátero  $X'X''O''O'$  es un paralelogramo donde  $\overline{X'O'} \cong \overline{X''O''}$ ,  $\overline{X'O'} \parallel \overline{X''O''}$ . Nuevamente por transitividad se tiene  $\overline{XO} \cong \overline{X''O''}$ ,  $\overline{XO} \parallel \overline{X''O''}$ , luego el cuadrilátero  $XX''O''O$  es un paralelogramo donde  $\overline{XX''} \cong \overline{OO''}$  y  $\overline{XX''} \parallel \overline{OO''}$ , lo que significa que existe una traslación  $T_{OO''}$  que transforma el punto  $X$  en  $X''$ , donde  $d = OO''$  y  $T_{RS} \circ T_{PQ}(O) = O''$ .

Finalmente, puede observarse que  $T_{PQ} \circ T_{QP} = T_{OO''}$ .

### Teorema (11)

En un plano, el conjunto de las traslaciones junto con la composición es un grupo abeliano.

#### **Demostración**

Sea  $\mu$  el conjunto de todas las traslaciones del plano. Por el teorema anterior se tiene que  $\mu$  es cerrado con la operación de composición de traslaciones. Ahora bien, es claro que la composición de traslaciones es conmutativa y asociativa, la función identidad es una traslación y corresponde a la identidad de las traslaciones, cada traslación tiene inversa. Por lo tanto, el conjunto de las traslaciones junto con la operación de composición  $(\mu, \circ)$  es un grupo abeliano.

### Rotaciones

Una rotación es una transformación donde todos los puntos del plano se desplazan en arcos de circunferencia.

#### **Definición (12)**

*Sean  $\Pi$  un plano,  $O$  un punto de  $\Pi$  y  $\alpha$  un ángulo en el plano donde  $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ . Si  $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ , se define una función  $R_{(O,\alpha)}: \Pi \rightarrow \Pi$  así:  $R(O) = O$ . si  $X$  es un punto diferente de  $O$ ,  $R(X) = X'$  si y solo si la medida del ángulo  $\alpha$  es igual a la medida del  $\sphericalangle XOX'$ ,  $OX = OX'$  y el sentido de la rotación es opuesto a como giran las manecillas del reloj. Una función como está la llamaremos una rotación de centro  $O$  y ángulo  $\alpha$ .*

Si la rotación se da en el sentido en que giran las manecillas del reloj a dicha función la notaremos  $R_{(O,-\alpha)}: \Pi \rightarrow \Pi$ .

Nótese que  $O$  es un punto fijo de la rotación.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

La función identidad es una rotación, en tal caso  $\alpha = 0^\circ$ , de esta manera se ha determinado la rotación que notaremos  $R_{(O,0^\circ)}: \Pi \rightarrow \Pi$  con centro en  $O$  y ángulo  $0^\circ$  definida por  $R_{(O,0^\circ)}(X) = X$ . En este caso todos los puntos del plano son fijos.

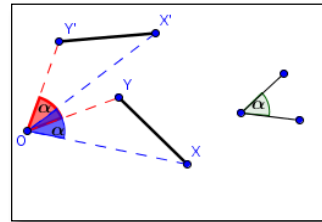
### Teorema (12)

Toda rotación es una isometría.

#### Demostración

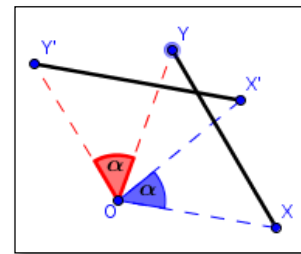
Sean  $R_{(O,\alpha)}$  una rotación y  $X, Y$  dos puntos distintos pertenecientes al plano  $\Pi$ . Demostraremos que al aplicar  $R_{(O,\alpha)}$  sobre  $X$  y  $Y$  se cumple  $XY = X'Y'$ .

Sean  $X'$  y  $Y'$  las imágenes de  $X$  y  $Y$  respectivamente al aplicar  $R_{(O,\alpha)}$ , por definición tenemos:  $OX = OX'$ ,  $\sphericalangle XOX' = \alpha$ ,  $OY = OY'$ ,  $\sphericalangle YOY' = \alpha$  donde  $\sphericalangle XOY = \alpha - \sphericalangle X'OY$ ,  $\sphericalangle X'OY' = \alpha - \sphericalangle X'OY$  por transitividad  $\sphericalangle XOY = \sphericalangle X'OY'$ .



Esta relación entre ángulos es independiente de la ubicación de los puntos porque  $\sphericalangle XOY = \alpha + \sphericalangle X'OY = \alpha - \sphericalangle X'OY'$ . Como se muestra en la figura.

Por (LAL) tenemos que  $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$  y por partes correspondientes de triángulos congruentes se tiene que  $XY = X'Y'$ . Luego la  $R_{(O,\alpha)}$  es una isometría.



Los siguientes corolarios son consecuencia de un teorema general de isometrías

### Corolario (6)

Un ángulo  $XYZ$  y su imagen  $X'Y'Z'$  son congruentes al aplicar una rotación  $R_{(O,\alpha)}$ , esto es  $R_{(O,\alpha)}(\sphericalangle XYZ) = \sphericalangle X'Y'Z'$ , donde  $\sphericalangle XYZ \cong \sphericalangle X'Y'Z'$ .

### Corolario (7)

Un polígono  $P$  y su imagen  $P'$  son congruentes al aplicar una rotación  $R_{(O,\alpha)}$ , esto es  $R_{(O,\alpha)}(P) = P'$ , donde  $P \cong P'$ .

### Corolario (8)

Una circunferencia  $C$  y su imagen  $C'$  son congruentes al aplicar una rotación  $R_{(O,\alpha)}$ , esto es  $R_{(O,\alpha)}(C) = C'$ , donde  $C \cong C'$ .

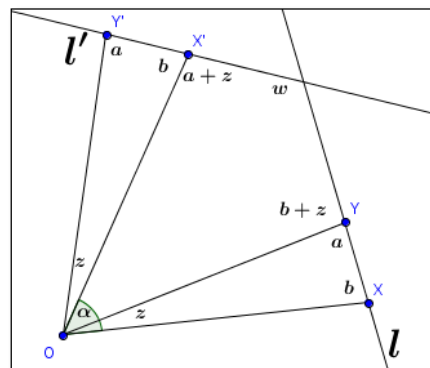
## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### Teorema (13)

La imagen de una recta al aplicar una rotación es otra recta. El ángulo que se forma entre ellas dos es igual al ángulo de rotación.

#### Demostración

La primera parte de este teorema es consecuencia de que una rotación es una isometría. En efecto, sean  $X$  y  $Y$  dos puntos del plano y sus imágenes  $X'$  y  $Y'$  por una rotación de centro  $O$  y ángulo  $\alpha$ . Sea  $Z$  un punto entre  $X$  y  $Y$ , y su imagen  $Z'$ . Puesto que  $XY = X'Y'$ ,  $XZ = X'Z'$  y  $YZ = Y'Z'$ , de donde  $X'Z' + Y'Z' = X'Y'$ , lo cual significa que  $Z'$  está entre  $X'$  y  $Y'$ . En forma similar se demuestra que si  $Y$  está entre  $X$  y  $Z$ , entonces  $Y'$  está entre  $X'$  y  $Z'$ .



Veamos ahora que el ángulo que forman una recta y su imagen por medio de una rotación es igual al ángulo de rotación. Sea  $l$  una recta y  $l'$  su imagen. Sean  $X$  y  $Y$  dos puntos de  $l$  y  $X'$  y  $Y'$  sus imágenes por una rotación de centro  $O$  y ángulo  $\alpha$ .

En la figura, de acuerdo a los ángulos señalados se tiene que  $(a + z) + (\alpha - z) + (b + z) + w = 360^\circ$ , de donde  $w = 180 - \alpha$ , por lo tanto el ángulo que forman las rectas  $l$  y  $l'$  es  $\alpha$ .

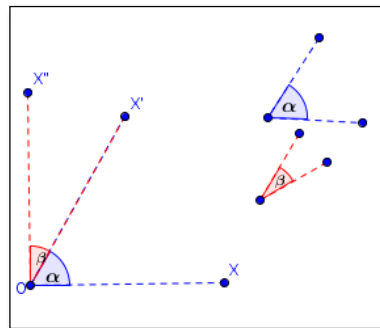
### Teorema (14)

La composición de dos rotaciones con centro común es una rotación con el mismo centro y la medida de su ángulo será la suma de sus ángulos.

#### Demostración:

Sean las rotaciones  $R_{(O,\alpha)}$ ,  $R_{(O,\beta)}$  y los puntos  $X$ ,  $Y$  distintos del plano  $\Pi$ . Se demostrará que  $R_{(O,\alpha)} \circ R_{(O,\beta)} = R_{(O,\alpha+\beta)}$ .

Sea  $X'$  la imagen de  $X$  al aplicar la rotación  $R_{(O,\alpha)}$ . Por definición  $OX = OX'$ ,  $\sphericalangle XOX' = \alpha$ . Ahora aplicamos la rotación  $R_{(O,\beta)}$  al punto  $X'$  obteniendo  $X''$ . Por definición:  $OX' = OX''$ ,  $\sphericalangle X'OX'' = \beta$ . Ahora por transitividad  $OX = OX''$ ,  $\sphericalangle XOX'' = \sphericalangle XOX' + \sphericalangle X'OX'' = \alpha + \beta$ . Entonces  $R_{(O,\alpha)} \circ R_{(O,\beta)} = R_{(O,\alpha+\beta)}$ .



## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Nótese que en esta demostración las rotaciones las consideraremos en un mismo sentido, para el caso en que no lo sean, la prueba sigue los mismos lineamientos.

Es fácil ver que la composición de rotaciones con el mismo centro no varía por el orden de aplicación, es decir la composición de rotaciones con el mismo centro es conmutativa.

Una rotación es una función biyectiva y por lo tanto tiene inversa. En tal caso La inversa de una rotación es una rotación denotada por  $R^{-1}_{(O,\alpha)} = R_{(O,-\alpha)}$ .

### **Teorema (15)**

En un plano el conjunto de las rotaciones con el mismo centro, junto con la composición es un grupo abeliano.

### ***Demostración***

Sea  $\mu$  el conjunto de todas las rotaciones con el mismo centro. Por los teoremas anteriores se tiene que  $\mu$  es cerrado con la operación de composición de rotaciones. Puesto que la composición de funciones es asociativa, la composición de rotaciones también lo es, además la función identidad es una rotación y cada rotación tiene inversa. Por lo tanto, el conjunto de las rotaciones con el mismo centro junto con la operación de composición es un grupo abeliano.

### ***Simetría***

La simetría también llamada reflexión es un principio universal de la organización y la forma. La simetría se presenta en muchos fenómenos de la naturaleza. Las diversas culturas, hasta las más primitivas, han desarrollado una comprensión intuitiva de los componentes básicos de la simetría, todas estas concepciones demostradas por medio de expresiones artísticas: decoraciones de cerámicas, paredes de templos, armas, instrumentos musicales, etc., (Godino & Ruiz,2002).

En nuestro caso definiremos la simetría central y la simetría axial.

### ***Definición (13)***

*Sean  $\Pi$  un plano,  $O$  un punto de  $\Pi$ . Se define una función  $S_o: \Pi \rightarrow \Pi$  talque  $S_o(O) = O$ , y si  $X$  es un punto diferente de  $O$ ,  $S_o(X) = X'$  si y solo si  $O$  es el punto medio del segmento  $\overline{XX'}$ . Esta función la llamaremos simetría central respecto al punto  $O$ , o simplemente simetría cuando no haya lugar a confusión.*

*El punto  $O$  es llamado centro de la simetría y el punto  $X'$  el simétrico de  $X$  respecto a  $O$ . Nótese que  $O$  es el único punto fijo de la simetría central.*

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

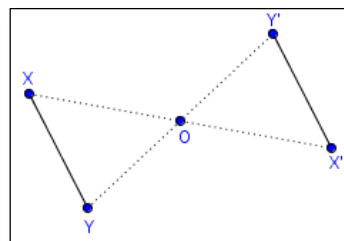
### Teorema (16)

Una simetría es una isometría.

#### **Demostración**

Sean  $S_O$  una simetría,  $X, Y$  dos puntos del plano  $\Pi$  demostraremos  $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$ .

Por definición se tiene que  $S_O(XY) = X'Y'$  talque  $\overline{OX} \cong \overline{OX'}$ ,  $\overline{OY} \cong \overline{OY'}$ , los puntos  $(X, O, X')$  y  $(Y, O, Y')$  son colineales. Por ángulos opuestos por el vértice se tiene que  $\sphericalangle XOY \cong \sphericalangle X'OY'$ , por lo tanto los triángulos  $XOY$  y  $X'OY'$  son congruentes por el teorema (LAL), luego  $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$ .



Nótese que intuitivamente un segmento y su imagen tienen dirección opuesta.

### Corolario (9)

La imagen de un segmento por una simetría central  $S_O$  es un segmento paralelo al segmento dado e intuitivamente en este contexto de dirección opuesta.

#### **Demostración:**

En la prueba anterior, considerando que la recta  $\overline{X'X'}$  forma al intersectar a las rectas  $\overline{XY}$  y  $\overline{X'Y'}$  ángulos alternos internos congruentes porque  $\sphericalangle YXO \cong \sphericalangle Y'OX'$ , entonces se cumple que las rectas  $\overline{XY} \parallel \overline{X'Y'}$ <sup>13</sup>.

Los siguientes corolarios son consecuencia de un teorema general de isometrías.

### Corolario (10)

Un ángulo  $XYZ$  y su imagen  $X'Y'Z'$  son congruentes al aplicar una simetría central  $S_O$ , esto es  $S_O(\sphericalangle XYZ) = \sphericalangle X'Y'Z'$ , donde  $\sphericalangle XYZ \cong \sphericalangle X'Y'Z'$ .

### Corolario (11)

Un polígono  $P$  y su imagen  $P'$  son congruentes al aplicar una simetría central  $S_O$ , esto es  $S_O(P) = P'$ , donde  $P \cong P'$ .

### Corolario (12)

Una circunferencia  $C$  y su imagen  $C'$  son congruentes al aplicar una simetría central  $S_O$ , esto es  $S_O(C) = C'$ , donde  $C \cong C'$ .

<sup>13</sup> Recordemos: Si las rectas  $l, m, n$  están en el mismo plano y la recta  $n$  interseca las rectas  $l$  y  $m$  formando ángulos alternos internos congruentes, entonces las rectas  $l$  y  $m$  son paralelas.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### Definición (14)

Un Semigiro es una rotación de centro en  $O$  un ángulo de  $180^\circ$ , es decir  $R_{(O,180^\circ)}$ . Esto significa que si tenemos un punto  $X$  entonces  $R_{(O,180^\circ)}(X) = X'$ , donde  $\overline{OX} \cong \overline{OX'}$ ,  $\sphericalangle XOX' = 180^\circ$  y  $X'$  pertenece a la recta  $\overleftrightarrow{OX}$  luego  $X, O, X'$  son colineales.

Por lo anterior podemos decir que un semigiro es una simetría central donde el centro de rotación es el centro de la simetría.

### Definición (15)

Un giro es una rotación de centro en un punto  $O$  un ángulo de  $360^\circ$ ,  $R_{(O,360^\circ)}$ , es decir que un punto del plano se mueve una circunferencia completa. Entonces el producto de dos semigiros con el mismo centro de rotación es un giro. Nótese que un giro es la isometría identidad.

Como un semigiro es una simetría central podemos decir que la composición de dos simetrías centrales con el mismo centro es un giro.

### Teorema (17)

La composición de dos simetrías centrales con distinto centro es una traslación.

#### Demostración

Sean dos simetrías centrales  $S_O$ ,  $S_C$  y  $X$  un punto del plano. Al aplicar la simetría  $S_O$  al punto  $X$  se tiene  $S_O(X) = X'$  seguidamente aplicamos la simetría  $S_C$  al punto  $X'$  obteniendo  $S_C(X') = X''$ . Teniendo en cuenta el triángulo  $XX'X''$  se tiene que  $O$  es el punto medio del segmento  $\overline{XX'}$  y  $C$  es el punto medio del segmento  $\overline{X'X''}$ , entonces la recta que pasa por los puntos  $O$  y  $C$  es paralela al  $\overline{XX''}$ <sup>14</sup>, es decir  $\overline{OC} \parallel \overline{XX''}$ . Ahora como en un triángulo se cumple que la longitud del segmento que une los puntos medios de dos lados es igual a  $\frac{1}{2}$  del tercer lado se tiene que  $OC = \frac{1}{2}XX''$  por lo tanto  $2OC = XX''$ .

Teniendo en cuenta lo anterior, si consideramos la traslación  $T_{OD}$ , con  $OD = 2OC$ , siendo  $D$  un punto de la recta  $\overleftrightarrow{OC}$  y estando  $C$  entre  $O$  y  $D$ , nótese que  $T_{OD}(X) = X''$  y que finalmente  $S_C \circ S_O = T_{OD}$ .

Luego la composición de dos simetrías centrales con distinto centro es una traslación.

Por lo anterior podemos concluir que el conjunto de simetrías centrales no es cerrado para la composición.

<sup>14</sup> La recta que contiene los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### Definición (16)

Dada una recta  $l$ , se define una función  $S_l$  en el plano así: Si  $X$  no pertenece a  $l$   $S_l(X) = X'$  si y solo si  $l$  es la mediatriz de  $\overline{XX'}$ , en caso contrario  $S_l(X) = X$ . La función  $S_l$  se le llama simetría axial con respecto a  $l$ , o simplemente simetría axial cuando no haya lugar a ambigüedad.

La recta  $l$  se llama eje de simetría y el punto  $S_l(X) = X'$  se llama el simétrico de  $X$  por  $S_l$ .

Nótese que los puntos del eje de simetría  $l$  son los únicos fijos de  $S_l$ . Además  $S_l$  es involutiva es decir  $S_l \circ S_l = I$

### Teorema (18)

Una simetría axial es una isometría.

#### Demostración

Esta demostración tiene diferentes casos: Sea  $S_l$  una simetría axial.

- i) Si  $X, Y$  están en  $l$ , por ser puntos fijos de  $S_l$ , se tiene que  $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$ .
- ii) Si  $X$  está en  $l$  y  $Y$  no está en  $l$ , sea  $A$  el punto de intersección de  $l$  con  $\overline{YY'}$ , entonces se tiene que  $\Delta YXA \cong \Delta Y'XA$  y por lo tanto  $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$ .
- iii) Si  $X$  y  $Y$  no están en  $l$ , sean  $A$  y  $B$  los puntos de intersección de  $\overline{XX'}$  con  $l$  y  $\overline{YY'}$  con  $l$  respectivamente. Entonces por (LAL) se tiene  $\Delta XAB \cong \Delta X'AB$ , de donde  $\sphericalangle XBA \cong \sphericalangle X'BA$  y por ser complementos de ángulos congruentes  $\sphericalangle YBX \cong \sphericalangle Y'BX'$ . Teniendo en cuenta que  $\overline{YB} \cong \overline{Y'B}$ , se tiene que  $\Delta XYB \cong \Delta X'Y'B'$ , por (LAL), de donde  $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$ .

Por lo tanto  $S_l$  es una isometría.

Los siguientes corolarios son consecuencia de un teorema general de isometrías.

### Corolario (13)

Un ángulo  $XYZ$  y su imagen  $X'Y'Z'$  son congruentes al aplicar una simetría axial  $S_l$ , esto es  $S_l(\sphericalangle XYZ) = \sphericalangle X'Y'Z'$ , donde  $\sphericalangle XYZ \cong \sphericalangle X'Y'Z'$ .

### Corolario (14)

Un polígono  $P$  y su imagen  $P'$  son congruentes al aplicar una simetría axial  $S_l$ , esto es  $S_l(P) = P'$ , donde  $P \cong P'$ .

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### Corolario (15)

Una circunferencia  $C$  y su imagen  $C'$  son congruentes al aplicar una simetría axial  $S_l$ , esto es  $S_l(C) = C'$ , donde  $C \cong C'$ .

### Teorema (19)

Dadas dos simetrías  $S_l$  y  $S_m$ , y  $O$  el punto de intersección de las rectas  $l$  y  $m$ , entonces  $S_l \circ S_m = R_{(O, 2\alpha)}$ , en sentido horario.

#### **Demostración**

Sea  $X$  un punto del plano. Sean  $S_l(X) = X'$  y  $S_m(X') = X''$ . Puesto que  $S_l$  y  $S_m$  son isometrías se tiene que  $OX = OX'$  y  $OX' = OX''$ , de donde  $OX = OX''$ . Nótese que  $\angle X''OX = 2\alpha$ . Por lo tanto se ha determinado la rotación  $R_{(O, 2\alpha)}$  y que  $R_{(O, 2\alpha)}(X) = X''$ . Por lo tanto  $S_l \circ S_m = R_{(O, 2\alpha)}$ .

Teniendo en cuenta lo anterior:

1. La composición de dos simetrías axiales con ejes secantes, es una rotación cuyo centro queda determinado por la intersección de los dos ejes y con un ángulo igual a 2 veces el ángulo que forman entre ellos.
2. Toda rotación se puede descomponer en dos simetrías axiales donde el centro de rotación es la intersección de los dos ejes de simetría, y el ángulo entre ellos es la mitad del ángulo de rotación.
3. Si los dos ejes de simetría son perpendiculares obtenemos una rotación con un ángulo igual a  $180^\circ$ , esta composición es una simetría central de centro  $O$ . El centro es el punto de intersección de las rectas.

### Teorema (20)

Si los dos ejes de simetría axiales son paralelos es equivalente a una traslación donde la recta de traslación es perpendicular a los dos ejes de simetría y su medida es dos veces la distancia entre los ejes.

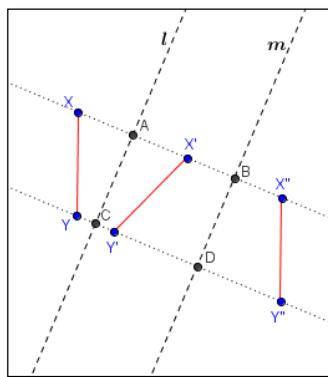
#### **Demostración**

Sean  $l$  y  $m$  ejes paralelos entonces  $S_l \circ S_m = S_{\overline{YY'}}$  donde  $\overline{YY'}$  es una recta perpendicular a  $l$  y  $YY' = 2d$ ,  $d$  es la distancia entre  $l$  y  $m$ .

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Sean  $X, Y$  dos puntos,  $l$  y  $m$  dos rectas paralelas y  $d$  la distancia entre ellas. Al aplicar la simetría  $S_l$  a  $\overline{XY}$  obtenemos su imagen  $\overline{X'Y'}$ , aplicando la simetría  $S_m$  a  $\overline{X'Y'}$  obtenemos su imagen  $\overline{X''Y''}$ . Llamemos a  $A, B$  a los puntos de intersección de la recta  $\overline{XX''}$  con las rectas  $l$  y  $m$  respectivamente y  $C, D$  a los puntos de intersección de la recta  $\overline{YY''}$  con las rectas  $l$  y  $m$  respectivamente.

Por definición de simetría tenemos  $\overline{XX'} \perp l$ ,  $\overline{Y'Y'} \perp l$ ,  $\overline{X'X''} \perp m$ ,  $\overline{Y'Y''} \perp m$  y una recta que es perpendicular a una de dos paralelas es perpendicular a la otra entonces  $\overline{XX''} \perp l$ ,  $\overline{YY''} \perp m$ ,  $\overline{XX''} \perp m$ ,  $\overline{YY''} \perp l$ . Por otro lado se tiene  $XA = AX'$ ,  $X'B = BX''$ , luego  $YC = CY'$ ,  $Y'D = DY''$ ,  $XX'' = XA + AX' + X'B + BX'' = 2AX' + 2X'B = 2AB = 2d$ . De la misma forma  $YY'' = YC + CY' + Y'D + DY'' = 2CY' + 2Y'D = 2CD = 2d$ . Entonces  $\overline{XX''} \cong \overline{YY''}$  y  $\overline{XX''} \parallel \overline{YY''}$ .



Sea  $n$  la recta que pasa por los puntos  $Y, Y''$  luego existe la traslación  $T_{YY''}$  donde  $T_{YY''}(X) = X''$ ,  $YY'' = 2d$  y  $X'', Y''$  están en el mismo semiplano que determina la recta  $\overline{XY}$ .

Todos los segmentos correspondientes tienen la misma orientación y longitud  $2d$ .

Nótese que el producto de dos simetrías axiales no es cerrado con la composición. Ahora bien, teniendo en cuenta el teorema anterior, toda traslación se puede descomponer en infinitas composiciones de dos simetrías axiales con ejes paralelos y la recta de traslación perpendicular a los ejes y cuya distancia es la mitad de la longitud del segmento

### Observación

En relación con el estudio de las isometrías, para el caso que nos ocupa, creemos suficiente el marco teórico desarrollado. Sin embargo, es de anotar que un resultado que consideramos interesante acerca de la clasificación de las isometrías es “si  $f$  es una isometría en el plano  $\Pi$  entonces puede ser: una reflexión axial ortogonal, una rotación, una traslación o una transreflexión” se encuentra entre otros en el libro *Lecciones De Geometría Euclidiana* del Profesor Hernando Alfonso Castillo (1993, p.316).

### 3.1.4 Teorema fundamental de las transformaciones y la congruencia

A continuación se presenta un teorema que relaciona congruencia con isometrías. En particular trabajaremos la congruencia de triángulos.

#### **Teorema (21) Teorema Fundamental de las transformaciones y la congruencia.**

Dos triángulos son congruentes, si y solo si, uno es la imagen del otro al aplicar una isometría.

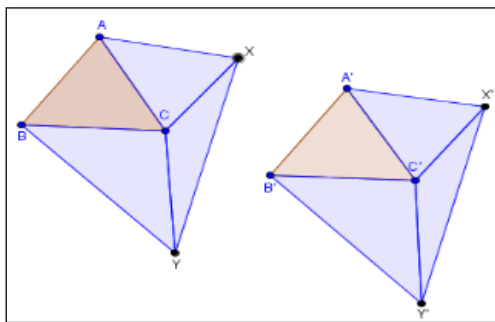
#### **Demostración:**

- i) Si los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son congruentes, veamos que existe una isometría que transforma uno en el otro.

#### **Demostración**

La isometría  $f: \Pi \rightarrow \Pi$  se define por  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$ ,  $f(C) = C'$  y para otro punto  $X$  del plano  $\Pi$ , se define  $f(X) = X'$ , donde  $X'$  es el punto de intersección de las circunferencias  $C_1, C_2$  y  $C_3$ , donde  $C_1$  es la circunferencia de centro  $A'$  y radio  $d(A, X)$ ,  $C_2$  es la circunferencia de centro  $B'$  y radio  $d(B, X)$ ,  $C_3$  es la circunferencia de centro  $C'$  y radio  $d(C, X)$ . Tomemos un punto  $Y$  del plano  $\Pi$  talque  $f(Y) = Y'$ , donde  $Y'$  es el punto de intersección de las circunferencias  $C'_1, C'_2$  y  $C'_3$ , donde  $C'_1$  es la circunferencia de centro  $A'$  y radio  $d(A, Y)$ ,  $C'_2$  es la circunferencia de centro  $B'$  y radio  $d(B, Y)$ ,  $C'_3$  es la circunferencia de centro  $C'$  y radio  $d(C, Y)$ . Ahora demostraremos que  $XY = X'Y'$ .

Por (LLL) se tiene que  $\triangle ACX \cong \triangle A'C'X'$  y por partes correspondientes se cumple  $\sphericalangle ACX = \sphericalangle A'C'X'$ . Por definición  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ , entonces  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$ . Nuevamente por (LLL) se tiene que  $\triangle BCY \cong \triangle B'C'Y'$  y por partes correspondientes se cumple que  $\sphericalangle BCY = \sphericalangle B'C'Y'$ .



## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Consideramos a  $C$  como el centro de una circunferencia  $S$  de radio  $r$ , entonces  $C'$  es el centro de la circunferencia  $S'$  tal que  $S$  es congruente con  $S'$ . Como la suma de los ángulos centrales de una circunferencia es  $360^\circ$  tenemos que  $\sphericalangle ACX + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCY + \sphericalangle XCY = \sphericalangle A'C'X' + \sphericalangle A'C'B' + \sphericalangle B'C'Y' + \sphericalangle X'C'Y'$ , entonces  $\sphericalangle XCY = \sphericalangle X'C'Y'$ . Por (LAL) tenemos que  $\triangle XCY \cong \triangle X'C'Y'$  y por partes correspondientes de triángulos congruentes se tiene que  $XY = X'Y'$ .

En el caso en que  $X$  este ubicado en el interior del triángulo  $ABC$  entonces por construcción se cumple  $\triangle XCB \cong \triangle X'C'B'$ ,  $\triangle BCY \cong \triangle B'C'Y'$ , por partes correspondientes de triángulos congruentes  $\sphericalangle XCB = \sphericalangle X'C'B'$ ;  $\sphericalangle CBY = \sphericalangle C'B'Y'$ . Ahora  $\sphericalangle XCY = \sphericalangle XCB + \sphericalangle BCY$  y  $\sphericalangle X'C'Y' = \sphericalangle X'C'B' + \sphericalangle B'C'Y'$  por lo tanto  $\sphericalangle XCY = \sphericalangle X'C'Y'$ . Por (LAL) tenemos que  $\triangle XCY \cong \triangle X'C'Y'$  y por partes correspondientes de triángulos congruentes se cumple que  $XY = X'Y'$ .

- ii) Recíprocamente, si una isometría  $f: \Pi \rightarrow \Pi$  envía un triángulo  $\triangle ABC$  en un triángulo  $\triangle A'B'C'$  donde  $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$  entonces claramente por el criterio (LLL), se tiene que  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  y por partes correspondientes se tiene  $XY = X'Y'$ .

De forma más general, se tiene el siguiente teorema el cual se demuestra de una manera similar al anterior.

### **Teorema (22)**

Dos polígonos son congruentes si y solo si uno es la imagen del otro al aplicar una isometría.

## **3.2 Transformaciones en el plano y semejanza**

Intuitivamente dos polígonos son semejantes si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. De otro modo se relacionan con “cambio de escala”, esto es, uno es ampliación o reducción del otro, de esta manera se modifica su tamaño y se conservan las proporciones de sus lados correspondientes.

En esta sección se utilizan los conceptos de isometría y homotecia como una forma de abordar la noción de polígonos semejantes. Se prueba que dos polígonos son semejantes, si y solamente si, existe una transformación que envía uno en el otro, en este caso la transformación puede ser una homotecia o la composición entre una homotecia y una isometría.

### 3.2.1 Semejanza de triángulos<sup>15</sup>

#### Definición (17)

Se dice que dos triángulos  $XYZ$  y  $X'Y'Z'$  son semejantes, lo cual se escribe  $\triangle XYZ \sim \triangle X'Y'Z'$  si tienen sus ángulos homólogos congruentes y sus lados homólogos proporcionales, esto es,  $\sphericalangle X = \sphericalangle X'$ ,  $\sphericalangle Y = \sphericalangle Y'$ ,  $\sphericalangle Z = \sphericalangle Z'$  y  $\frac{XY}{X'Y'} = \frac{XZ}{X'Z'} = \frac{YZ}{Y'Z'}$ .

#### Teorema (23)

Si una paralela a un lado de un triángulo interseca en puntos distintos a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos que son proporcionales a dichos lados. De otro modo, Sean el triángulo  $ABC$  y  $D$  y  $E$  puntos sobre los lados  $\overline{CA}$  y  $\overline{CB}$  respectivamente, entonces  $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$

#### Teorema (24)

Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y determina sobre dichos lados segmentos proporcionales a ellos, entonces es paralela al tercer lado. De otro modo, Sean el triángulo  $ABC$  y  $D$  y  $E$  puntos sobre los lados  $\overline{CA}$  y  $\overline{CB}$  respectivamente, si  $\overline{DE}$  es paralelo a  $\overline{AB}$ , entonces  $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$ .

Para determinar si dos triángulos son semejantes no es necesario comprobar las seis relaciones mencionadas en la definición. Se puede establecer la semejanza con menos información, usando al menos uno de los siguientes criterios de semejanza de triángulos.

#### Teorema (25) AA

Dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son semejantes, si y solo si,  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$  y  $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$ .

#### Teorema (26) LAL

Dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son semejantes si  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$  y  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$

#### Teorema (27) LLL

Dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son semejantes  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$ .

<sup>15</sup> Estos conceptos toman como referencia a Moise (1986, p.330). *Geometría Moderna*.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### Teorema (28)

Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados en puntos distintos, entonces determina un triángulo semejante al triángulo dado.

### Definición (18)

*Dos polígonos son semejantes siempre que las medidas de sus lados homólogos estén en la misma proporción y sus ángulos correspondientes sean congruentes*

### 3.2.2 Homotecias

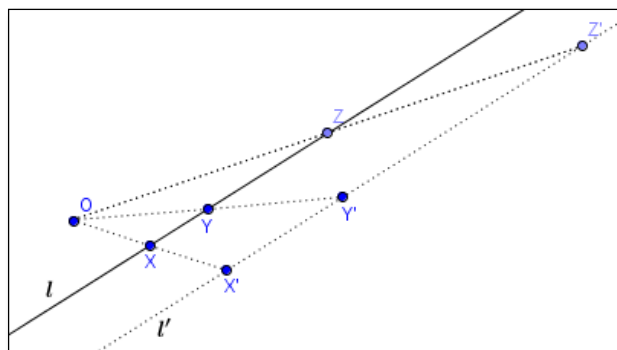
Una homotecia es una transformación en el plano, que al aplicarla sobre una figura, en particular sobre un polígono, se obtiene otro polígono que aunque no conserva la longitud de sus lados correspondientes, si conserva la medida de sus ángulos. Sin embargo se establece una relación de proporcionalidad entre sus lados homólogos, conocida como razón de la homotecia.

### Definición (19)

Sea un punto fijo  $O$  del plano  $\Pi$  y  $k$  un número real. Llamaremos homotecia de centro en  $O$  y razón  $k$  a la función  $H_{(O,k)}$  del plano en sí mismo, de tal manera que

1. si  $k \neq 0$  la función asigna a cada punto  $X$  el punto  $H_{(O,k)}X = X'$ , donde  $O, X$  y  $X'$  son colineales,  $OX' = |k|(OX)$  y (i) si  $k$  es positivo  $X$  está entre  $O$  y  $X'$ , (ii) si  $k$  es negativo  $O$  está entre  $X'$  y  $O$ .
2. si  $k = 0$  la función  $H_{(O,k)}$  es la función constante de valor  $O$ .

En todos los casos, al punto  $X'$  lo llamaremos el homólogo de  $X$  y a la imagen  $P'$  de un polígono  $P$  lo llamaremos su homólogo y en tal caso diremos también que los polígonos  $P$  y  $P'$  son homotéticos.



Como consecuencia del teorema 28, puede observarse que una homotecia transforma

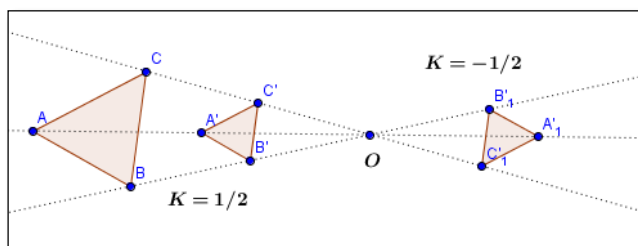
## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

cada recta del plano en una recta paralela a ella. Nótese que si la recta inicial pasa por  $O$ , su imagen es la misma recta<sup>16</sup>.

Observación:

- 1) Si  $k = 1$  entonces la homotecia es la función identidad, esto es  $H_{(O,1)} = I$ .
- 2) Si  $k \neq 1$  solamente el centro  $O$  permanece invariante, es decir solamente el punto  $O$  es fijo.
- 3) Si  $k = -1$ , la homotecia coincide con una simetría central, con más precisión  $H_{(O,k)} = S_O$ .
- 4) Si  $|k| > 1$ , podemos decir que la homotecia amplía el tamaño de las figuras y se dice que ésta es una dilatación.
- 5) Si  $|k| < 1$ , podemos decir que la homotecia reduce el tamaño de las figuras y se dice que ésta es una contracción.

Nótese que dada una homotecia, en el caso de un polígono y su homólogo, el centro de la homotecia es la intersección de las rectas determinadas por los vértices del polígono dado y sus homólogos, que se cortan en un único punto.



La razón de la homotecia no nula se puede hallar calculando la razón entre  $\frac{OX}{OX'}$

Toda homotecia no nula es una biyección del plano en el plano, por lo tanto tiene inversa. Dado un punto  $X'$  del plano existe un punto  $X$  talque  $H_{(O,k)}(X) = X'$ , siempre que se dé la relación  $OX = \frac{1}{k} OX'$ , que es la función inversa  $H^{-1}_{(O,\frac{1}{k})}(X') = X$ .

### Teorema (29)

Sean  $H_{(O,k)}$  una homotecia no nula y los segmentos homólogos  $\overline{XY}$  y  $\overline{X'Y'}$ ,  $\overline{WZ}$  y  $\overline{W'Z'}$  entonces se cumple  $\frac{XY}{X'Y'} = \frac{WZ}{W'Z'}$

### Demostración

Por definición tenemos que  $X'Y' = |k|(XY)$  y  $W'Z' = |k|(WZ)$  luego  $\frac{XY}{X'Y'} = \frac{WZ}{W'Z'}$ .

<sup>16</sup> Teniendo en cuenta que dos rectas son paralelas si están en el mismo plano y no se intersectan o son la misma recta.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### Teorema (30)

Dada una homotecia  $H_{(O,k)}$  no nula. Si  $\triangle X'Y'Z'$  es la imagen de  $\triangle XYZ$ , entonces  $\triangle XYZ \cong \triangle X'Y'Z'$ .

#### Demostración

Al aplicar la homotecia  $H_{(O,k)}$  no nula a los puntos  $X, Y, Z$  obtenemos respectivamente  $X', Y', Z'$  y por definición de homotecia tenemos  $\overrightarrow{XY} \parallel \overrightarrow{X'Y'}$  y  $\overrightarrow{YZ} \parallel \overrightarrow{Y'Z'}$ . Luego los ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos entonces  $\angle XYZ = \angle X'Y'Z'$ .

Teniendo en cuenta los resultados de los teoremas anteriores se tiene:

### Corolario (16)

Un polígono  $P$  y su imagen  $P'$  son congruentes al aplicar una homotecia  $H_{(O,k)}$ , esto es  $H_{(O,k)}(P) = P'$ , donde  $P \cong P'$ .

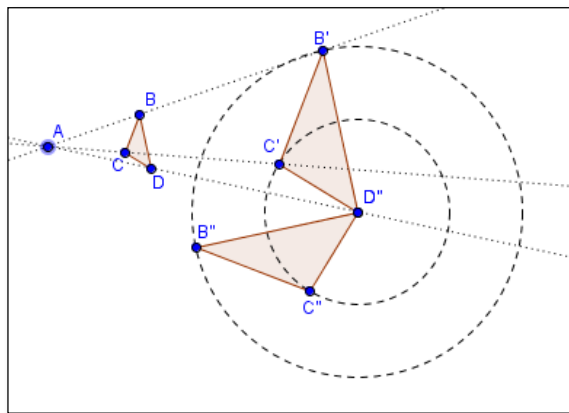
### Teorema (31)

Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes paralelos son semejantes.

#### Demostración

Si los triángulos son congruentes, claramente son semejantes. Consideremos ahora el caso en que los triángulos no son congruentes. Sean los triángulos  $XYZ$  y  $X'Y'Z'$  donde  $\overrightarrow{XY} \parallel \overrightarrow{X'Y'}$ ,  $\overrightarrow{XZ} \parallel \overrightarrow{X'Z'}$ ,  $\overrightarrow{YZ} \parallel \overrightarrow{Y'Z'}$ . Las rectas que contienen los puntos  $X, X'$  y  $Y, Y'$  se cortan en un punto  $O$ . Entonces existe la homotecia  $H$  de centro en  $O$  y razón  $k = \frac{OX'}{OX}$  que transforma el punto  $Y$  en  $Y'$  y el punto  $Z$  en  $Z'$ . Luego los triángulos son semejantes.

Nótese que dos triángulos semejantes que no tengan lados homólogos paralelos no pueden ser homotéticos.



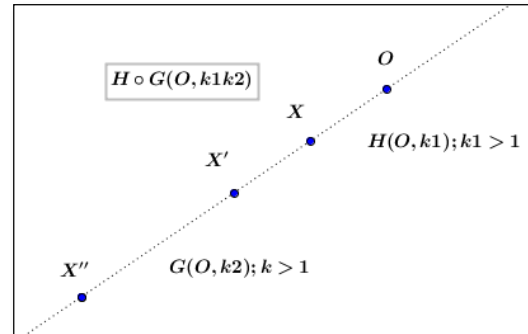
## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### Teorema (32)

Sean dos homotecias con el mismo centro  $H_{(O,k_1)}, G_{(O,k_2)}$  y razones  $k_1, k_2$ . Su compuesta es otra homotecia  $T_{(O,k_1k_2)}$  con el mismo centro y razón  $k_1k_2$ , es decir  $G_{(O',k_2)} \circ H_{(O,k_1)} = T_{(O,k_1k_2)}$ .

#### Demostración

Sean  $X$  un punto del plano y la  $H_{(O,k_1)}(X) = X'$ , talque  $\frac{OX'}{OX} = k_1$  (i). Sea  $G_{(O,k_2)}(X') = X''$  talque  $\frac{OX''}{OX'} = k_2$  (ii), entonces despejando  $OX'$  en (i) y reemplazando en (ii) obtenemos  $\frac{OX''}{k_1 OX} = k_2$  de donde  $\frac{OX''}{OX} = k_1 k_2$ .



Se ha determinado la homotecia  $T_{(O,k_1k_2)}$  que verifica  $G_{(O',k_2)} \circ H_{(O,k_1)} = T_{(O,k_1k_2)}$ .

Finalmente, de acuerdo a las discusiones anteriores, se establece en el siguiente teorema.

### Teorema (33)

En un plano el conjunto de las homotecias con el mismo centro, junto con la composición es un grupo abeliano.

### Teorema (34)

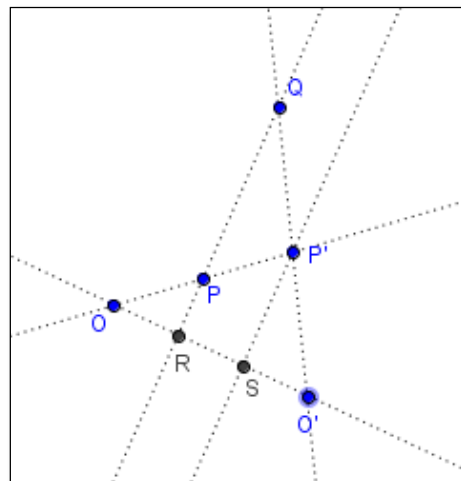
La composición de dos homotecias con distinto centro es una homotecia.

#### Demostración

Sean dos homotecias con distinto centro  $H_{(O,k_1)}, G_{(O',k_2)}$  y razones  $k_1, k_2$  respectivamente.

Sea  $P$  un punto del plano no perteneciente a la recta que pasa por  $O$  y  $O'$ ; Sea  $P'$  su homólogo por medio de  $H_{(O,k_1)}$ , entonces  $\frac{OP'}{OP} = k_1$ ; sea  $Q$  el homólogo de  $P'$  por  $G_{(O',k_2)}$ , entonces  $\frac{O'Q}{O'P'} = k_2$ .

Como la recta  $\overleftrightarrow{OO'}$  es invariante en las homotecias también lo es en su composición.



## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Supongamos que la recta que pasa por  $Q$  y  $P$  corta a la recta que pasa por  $\overrightarrow{OO'}$  en el punto  $R$ . Como  $(H \circ G)$  es una homotecia, la recta que pasa por  $\overrightarrow{QP}$  es invariante en dicha homotecia y por lo tanto el punto  $R$ , entonces el punto  $R$  es el centro de la homotecia  $(H \circ G)$ .

Construimos la recta que es paralela a la recta que pasa por  $\overrightarrow{QP}$  y pasa por el punto  $P'$ , y sea  $S$  el punto de intersección entre las rectas  $\overrightarrow{P'S}$  y  $\overrightarrow{QP}$ , luego  $H_{(O,k_1)}R = S$  y  $H_{(O,k_1)}RP = SP'$  entonces  $\frac{SP'}{RP} = k_1$ . Por otro lado en la homotecia  $G$  la recta  $\overrightarrow{RQ}$  es la imagen de la recta  $\overrightarrow{SP'}$ , luego  $G_{(O',k_2)}S = R$  y  $G_{(O',k_2)}SP' = RQ$  entonces  $\frac{RQ}{SP'} = K_2$ , podemos concluir que  $k = \frac{QR}{PR} = \frac{\frac{QR}{SP'}}{\frac{SP'}{PR}} = \frac{K_2}{\frac{1}{K_1}} = k_1 k_2$ . Es de anotar que la homotecia  $T_{(R,k_1 k_2)}$  verifica que  $(G_{(O',k_2)} \circ H_{(O,k_1)})(P) = T_{(R,k_1 k_2)}(P)$ .

### 3.2.3 Teorema fundamental de las transformaciones y la semejanza.

Teniendo en cuenta el desarrollo teórico planteado establecemos por medio de un teorema una relación entre la semejanza, homotecias e isometrías.

#### **Teorema (35) Teorema Fundamental de las transformaciones y la semejanza.**

Dos triángulos son semejantes, si y solamente si, existe una transformación que envía uno en el otro, en este caso la transformación puede ser una homotecia o la composición de una homotecia con una isometría.

#### **Demostración**

i) Sean  $ABC$  y  $A'B'C'$  triángulos semejantes. Supongamos que  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ , y sin pérdida de generalidad supongamos que  $k > 1$ .

Sean  $D$  un punto en  $\overline{AC}$  talque  $CD = C'A'$  y  $E$  un punto de  $\overline{CB}$  talque  $CE = C'B'$  entonces  $\triangle DEC \cong \triangle A'B'C'$  y  $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ . Se define una homotecia  $H_{(C,k)}$  de centro  $C$  y razón  $k$ . Nótese que la imagen del triángulo  $DEC$  por la homotecia  $H_{(C,k)}$  es el triángulo  $ABC$ . Ahora bien, por el Primer Teorema Fundamental de isometrías existe una isometría  $f$  que transforma el triángulo  $A'B'C'$  en el triángulo  $DEC$ . Por lo tanto, la transformación  $H_{(C,k)} \circ f$  transforma el triángulo  $A'B'C'$  en el triángulo  $ABC$ .

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

En el caso en que  $\Delta A'B'C'$  sea el mismo  $\Delta DEC$ ,  $f$  es la función identidad y en tal caso lo que se ha encontrado es una homotecia que transforma el  $\Delta A'B'C'$  en el  $\Delta ABC$ .

ii) Recíprocamente, sean la homotecia  $H_{(c,k)}$  y la isometría  $f$ . Dado un  $\Delta ABC$  al aplicarle la isometría  $f$  obtenemos su imagen  $\Delta A'B'C'$ , tal que  $AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$  <sup>(1)</sup>. Sea  $\Delta A''B''C''$  la imagen del  $\Delta A'B'C'$  al aplicarle la homotecia  $H_{(c,k)}$ . Dado que una homotecia transforma triángulos en triángulos semejantes se tiene la relación  $\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{A''C''}{A'C'} = \frac{B''C''}{B'C'} = k$ . Por <sup>(1)</sup> se tiene que  $\frac{A''B''}{AB} = \frac{A''C''}{AC} = \frac{B''C''}{BC} = k$ , lo que comprueba que  $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$ .

De forma más general, se tiene el siguiente teorema.

### Teorema (36)

Dos polígonos son semejantes si y solo si existe una transformación que envía uno en el otro, en este caso la transformación puede ser una homotecia o la composición entre una homotecia y una isometría.

## 4. ASPECTOS DIDÁCTICOS

Una vez planteado un marco disciplinar que dé cuenta de los conceptos matemáticos que se utilizarán, se establece una serie de aspectos didácticos alrededor de los cuales se fundamenta la elaboración de las actividades. Las actividades están orientadas con los lineamientos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional y permiten a los estudiantes de grado séptimo aproximarse al concepto de semejanza utilizando las transformaciones en el plano.

Los aspectos que consideramos necesarios para el diseño de la propuesta son:

- Los lineamientos y estándares curriculares propuestos por el MEN, porque exponen la vinculación de los conceptos de transformaciones y semejanza en el currículo de matemáticas y el tipo de pensamiento que estos desarrollan.
- La tecnología en el aula porque actualmente el MEN propone que las actividades que se planteen en matemáticas, especialmente en geometría, incorporen la tecnología, asimismo existen software de geometría dinámica que contribuyen a optimizar el aprendizaje de la geometría.
- El modelo constructivista del aprendizaje porque es una propuesta que responde al cambio de rol del docente de aula esencialmente expositivo al rol de orientador y guía.
- El modelo de aprendizaje de la geometría expuesto por Van Hiele porque orienta el diseño de las actividades.
- Los errores y dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de transformaciones en el plano y la semejanza.

A continuación desarrollaremos cada uno de estos aspectos y al finalizar cada uno de ellos se presenta la relación que ellos tienen con nuestra propuesta de enseñanza.

### 4.1 Las transformaciones en el plano y semejanza según los lineamientos y estándares curriculares.

Los lineamientos curriculares proponen que mediante el aprendizaje de la matemática, el estudiante de sentido al mundo que le rodea, desarrolle sus capacidades de pensamiento y reflexión, que le permiten explorar la realidad y al mismo tiempo actuar en y para ella.

Para organizar el currículo en matemáticas, los lineamientos proponen la relación entre tres grandes ejes: procesos, conocimientos básicos y contexto. Dentro de los conocimientos básicos se relacionan los procesos específicos para desarrollar el

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

pensamiento matemático, éste a su vez está compuesto por 5 pensamientos: numérico, variacional, espacial, métrico y aleatorio.

En particular, el pensamiento espacial, es considerado en MEN<sup>17</sup> (1998) como “*el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales*” (p.61).

Nuestra propuesta se ajusta al desarrollo de este pensamiento, aunque también favorece la relación entre los pensamientos numérico y métrico, potenciando en los estudiantes de grado séptimo su pensamiento matemático a través de la resolución de problemas, el razonamiento, comunicación, manipulación, comparación y ejercitación de procedimientos geométricos.

El MEN propone como complemento a los lineamientos curriculares los estándares para matemáticas (1998). Los estándares, son un referente acerca de lo que deben aprender los estudiantes y lo que deben saber hacer con lo que aprenden.

Dentro de los estándares propuestos por el MEN, se plantea el estudio de las transformaciones geométricas como parte del pensamiento espacial, desde grado tercero hasta grado séptimo.

<b>GRADO</b>	<b>ESTÁNDARES SOBRE TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS</b>
<b>TERCERO</b>	Reconocer y aplicar traslaciones y giros de una figura en el plano.
<b>QUINTO</b>	Hacer conjeturas y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.
<b>SEPTIMO</b>	Predecir y comparar los resultados de aplicar transformaciones (traslaciones, rotaciones, reflexiones y homotecias) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

Dentro de los estándares propuestos por el MEN, se plantea el estudio de la semejanza como parte del pensamiento espacial, desde grado tercero hasta grado noveno.

<sup>17</sup> MEN: Ministerio de Educación Nacional.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

GRADO	ESTÁNDARES SOBRE CONGRUENCIA Y SEMEJANZA
TERCERO	Reconocer congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir).
QUINTO	Identificar y justificar relaciones de congruencia y semejanza entre figuras
SÉPTIMO	Resolver y formular problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
NOVENO	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.</li> <li>- Aplicar y justificar criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.</li> </ul>

La propuesta está dirigida a estudiantes de grado séptimo, considerando que en esta etapa ellos deben aprender a predecir y comparar los resultados de aplicar transformaciones en el plano. Dentro de este contexto nos aproximaremos al concepto de semejanza reconociendo sus propiedades al aplicar transformaciones en el plano, además como un caso particular, involucraremos la noción de congruencia al aplicar las isometrías.

## 4.2 La semejanza como objeto de enseñanza<sup>18</sup>

Tenemos una relación entre los aportes dados desde el punto de vista histórico presentados en este trabajo sobre el concepto de transformación y semejanza, además de los aportes hechos por Lemonidis (1990,1991) que permiten dar una relación entre la evolución histórica y la forma como sea abordado el concepto desde la enseñanza.

Teniendo en cuenta esos tres períodos históricos<sup>19</sup>, Lemonidis (1990,1991) distingue tres momentos distintos en el concepto de semejanza, los cuales a su vez pueden determinar tres aproximaciones al concepto.

1. **Relación intrafigural:** se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.

<sup>18</sup> Este apartado está basado en el trabajo de investigación “Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX” hecha por Escudero Isabel, (2005). Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla.

<sup>19</sup> Los tres períodos históricos explicados en la sección 1.2.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

2. **Transformación geométrica vista como útil:** se resalta la correspondencia entre los elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.
3. **Transformación geométrica como objeto matemático:** caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones (Escudero, 2005, p. 380).

Teniendo en cuenta la clasificación que hace Lemonidis de las posibles formas de enseñar el concepto de semejanza, nuestra propuesta esta enmarcada en la transformación geométrica como objeto matemático. Generalmente, en grado séptimo el concepto de semejanza no se aborda, es más en los libros de texto poco aparece la semejanza como un concepto a tratar en este grado, se presenta inicialmente en grado octavo y se profundiza en noveno. En grado séptimo se trabajan las transformaciones en el plano, el predecir y comparar resultados que en nuestro caso favorecen la aproximación al concepto de congruencia y semejanza.

### 4.3 Posibles errores y dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las transformaciones en el plano y la semejanza.

Dentro de cualquier proceso de enseñanza aprendizaje las limitaciones, los errores y dificultades son parte imprescindible del proceso.

Existen distintas investigaciones que permiten evidenciar la comprensión que tienen los estudiantes de diferentes edades al momento de estudiar las propiedades que permanecen invariantes al ser aplicada una transformación en el plano. Entre estas investigaciones se destacan las realizadas por Jaime y Gutierrez (1996) quienes en su tesis Doctoral mencionan investigaciones realizadas sobre algunas dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las isometrías en el plano como Schut(1978), Moyer(1977), Kuchemann(1981). Paralelamente, en el trabajo “Aprendamos Traslaciones” Morales, H y & Poveda. O (2006, p.49) también se destacan los estudios por Thomas Kidder, Perhan, Schultz (1978) y Kuchemann (1981) sobre dificultades que los estudiantes presentan al momento de realizar transformaciones.

Una de las principales dificultades que tienen los estudiantes al momento de aplicar las transformaciones y que generan errores, radica en la misma naturaleza de las transformaciones geométricas, pues están relacionadas con movimientos físicos de objetos, que a diario se hacen al transcurrir un tiempo determinado, y las transformaciones son conceptos matemáticos que no necesitan de tiempo alguno para ser aplicados

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Puig (1997) expresa al respecto:

*“Ahora bien, también hay una relación compleja y conflictiva entre las características o propiedades geométricas de las transformaciones geométricas y las propiedades espaciales de los movimientos. Freudenthal lo expresa mostrando dos diferencias básicas:*

- *El movimiento es de un objeto, se realiza dentro del espacio y sucede en el tiempo a lo largo de un recorrido.*
- *Mientras que la transformación es del espacio se realiza sobre el espacio y sucede de golpe sin recorrido intermedio”* (p. 61- 94).

Citando la investigación de Jaime & Gutiérrez (1996), con respecto a las isometrías tenemos las siguientes dificultades de los estudiantes al momento de aplicar isometrías:

En las Traslaciones:

- No reconocen la distancia entre el objeto y su imagen.
- No reconocen la dirección del movimiento (vertical, horizontal, inclinado).
- Tienen dificultad para utilizar el lenguaje gráfico y simbólico y en consecuencia imposibilidad para aplicarlo a una situación problema.

En las Rotaciones:

- No se respeta el ángulo de la rotación.
- No se conservan las medidas entre la figura y su imagen.
- No se respeta la equidistancia al centro.

En las Simetrías:

- No se conserva la equidistancia al eje de cada punto y su imagen.
- No se reconoce la perpendicularidad del segmento que une un punto y su imagen con respecto del eje de simetría.
- Dibujar la imagen paralela a la figura original aunque ésta no sea paralela al eje de simetría.
- Desplazar en forma horizontal o vertical la figura aunque el eje de simetría esté inclinado.

Por otra parte tomando en cuenta las investigaciones hechas por Hart (citados por Gualdrón, 2006) sobre las posibles dificultades y tipos de errores que fueron detectados cuando los estudiantes resuelven tareas que involucran las nociones de razón y proporción, temas que están relacionados con nuestra propuesta, destacamos los siguientes:

1. Doble y mitad (Doubling and halving):

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

2. Construcción progresiva (Build up): los estudiantes no multiplican por un racional, sino que hacen construcciones progresivas.
3. Estrategia multiplicativa: establecen relaciones de semejanza a partir de la utilización del múltiplo, pero cuando los lados de la figura no son medidas enteras causa confusión en los estudiantes aplicando mal el concepto.
4. Métodos ingenuos (Naive): cuando se les pide a los estudiantes ampliar una figura, con una razón determinada, ellos no tienen en cuenta la razón y dibujan una figura parecida de mayor tamaño “Así al pedirle a un estudiante que amplié un rectángulo, él dibuja cualquier rectángulo o amplía el largo pero no el ancho. La idea de que la nueva figura debería ser semejante a la original les extraña” (Hart et al, 1984, p. 93).
5. Estrategia aditiva o de la diferencia constante: es utilizada por los estudiantes en tareas que involucran ampliación, ellos se concentran en la relación  $a - b$  en vez de  $a/b$ .
6. Omisión de algunos datos del problema.
7. Estrategia del valor unitario: esta consiste en hallar el valor unitario y utilizarlo para calcular el valor desconocido.

Para superar estas dificultades y estrategias erróneas Freudenthal (2001) propone algunos pasos que según él pueden tenerse en cuenta para lograr aproximarse al objeto mental de semejanza:

1. *Reconocer la conservación o no conservación de la razón bajo aplicaciones.*
2. *Construir aplicaciones que conservan la razón.*
3. *Resolver conflictos en la construcción de aplicaciones que conservan la razón.*
4. *Manejar operativamente, formular, relacionar unos con otros: criterios para la conservación de la razón, tales como: conservación de la igualdad de longitudes, Conservación de las razones internas, Constancia de la razón externa, conservación de los ángulos, y decidir acerca de la necesidad y suficiencia de tales criterios (Freudenthal, 2001; p. 121-122).*

Nuestra propuesta está diseñada para que los estudiantes de grado séptimo se aproximen al concepto de semejanza utilizando las transformaciones en el plano, este tipo de proceso permite que los errores y estrategias erróneas sean menos porque siguen los pasos anteriormente expuestos.

### 4.4 Tecnología en el aula.

La tecnología en el aula de clase, se ha vinculado en las instituciones educativas como herramienta que le brinda al estudiante una ayuda o complemento a las actividades que éste desarrolla manualmente, como guía en la construcción de conocimiento a partir de su manipulación o como instrumento que permite desarrollar ciertas actividades en más corto tiempo, entre otras más.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

El contenido general de una estrategia que emplee la tecnología y el computador como herramientas para la enseñanza de las matemáticas y geometría, fija la atención en la disciplina de la matemática como medio de modelación de situaciones y fenómenos del entorno, enfatizando la importancia del desarrollo de habilidades en la resolución de problemas.

Según Castiblanco et al. (2004) *“en la base de cualquier uso de la geometría dinámica deben estar dos principios fundamentales: dudar de lo que se ve y ver más de lo que se ve.”* (p.25) La primera de ellas, dudar de lo que se ve, hace referencia a no tomar como cierto lo que se aprecia en la imagen estática, ésta se debe modificar para certificar sus propiedades. La segunda, ver más de lo que se ve, pretende que el estudiante analice cada uno de los componentes matemáticos que conforman la figura estática. Esto se puede hacer por medio de construcciones auxiliares y demás trabajo de experimentación.

La problematización de construcciones geométricas es parte esencial de la geometría dinámica, ya que se convierte en el objeto sobre el cual se experimenta. Esto favorece según Castiblanco et al. (2004) a superar uno de las dificultades principales del aprendizaje de la geometría *“ la superación de las tensiones entre los procesos de visualización y su potencial heurístico en la resolución de problemas y los procesos de justificación y su potencial pedagógico para dar sentido a la organización deductiva del conocimiento matemático.”*

La forma de optimizar este potencial es tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes y escoger apropiadamente un software que permita dar una buena solución a cada situación problemática. En nuestra propuesta utilizaremos el software de geometría dinámica llamado Geogebra<sup>20</sup>, es gratuito y los estudiantes pueden descargarlo en sus computadores sin ningún problema. Este permite el estudio de los componentes de las figuras geométricas, las relaciones entre estas y sus propiedades.

Además brinda la posibilidad de modificar las construcciones por medio de la función “elige y mueve”, ubicada en la barra de construcción, de tal forma que cada figura construida se convierte en realidad en una colección de las mismas.

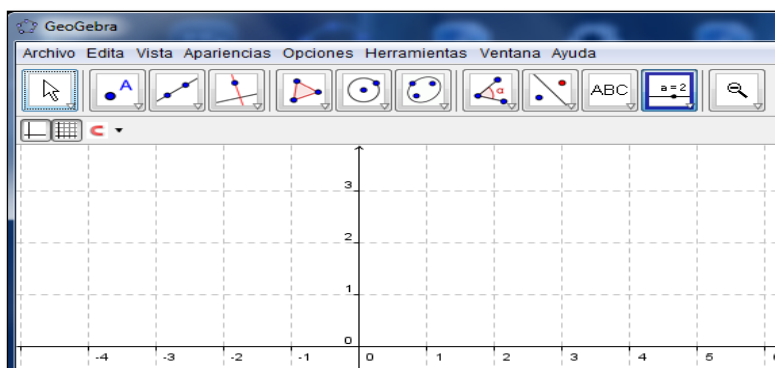


Geogebra se caracteriza por tener tres representaciones del mismo objeto matemático sobre su interfaz: una vista algebraica, una vista gráfica y una vista en hoja de cálculo. Dentro de la vista grafica nos permite trabajar con el plano cartesiano.

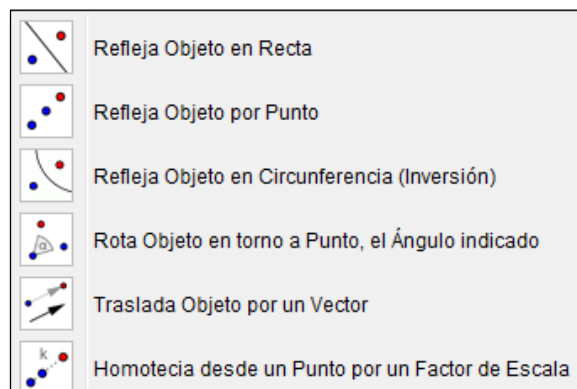
---

<sup>20</sup> Geogebra es un software interactivo de matemáticas que relaciona geometría, calculo y algebra. Fue creado por Markus Hohewanter junto con un equipo internacional de desarrolladores de software, cuyo fin es aportar a la enseñanza de matemática en la escuela (Hohewanter, 2009).

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA



Para nuestro tema de estudio, Geogebra tiene en su Barra de Herramientas una herramienta especial llamada Herramientas de Transformación al hacer click sobre ella se despliegan las siguientes opciones de construcción:



Un seguimiento de los cambios que se producen en la transformación de los objetos geométricos, puede conducir a la búsqueda de patrones y a la construcción de conjeturas. Marrades & Gutiérrez (2000, p. 95), citado en Mojica, D (2007) señalan “Los software de geometría dinámica ayudan a crear un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes pueden experimentar, observar la permanencia de las propiedades matemáticas, y verificar las conjeturas mucho más fácilmente que en otros ambientes computacionales y que en el entorno de lápiz y papel.”

Por las características que se han expuesto anteriormente, a Geogebra lo utilizaremos para desarrollar las actividades que responden al nivel Van Hiele “Deducción”.

## 4.5 Concepción constructivista del aprendizaje

Consideramos que el aprendizaje implica la construcción de conocimiento. En el marco escolar, el proceso de aprendizaje de los estudiantes debe basarse en su propia actividad creadora, en sus propios descubrimientos, en sus motivaciones, donde el rol del profesor es de orientador, guía.

Creemos que el proceso de aprendizaje está ligado al descubrir, inventar, crear. Según Martínez et al (1989) *“Entendemos que sólo hay aprendizaje, realmente, cuando el alumno llega a integrar en su estructura lógica y cognoscitiva los datos procedentes de la realidad exterior, en un proceso estrictamente personal, lleno de tanteos, de avances y retrocesos, que el profesor puede orientar, eligiendo las situaciones didácticas más apropiadas”*(p. 17). Estas situaciones deben estar diseñadas teniendo en cuenta su edad, las posibilidades intelectuales y cognoscitivas que tienen los estudiantes, además estar cercanas a sus intereses y contexto.

Citando a Martínez et al (1989) *“Sólo los conocimientos que son construidos por los propios niños son conocimientos realmente operativos, generalizables a contextos diferentes de los de aprendizaje”*, (p. 18).

Este modelo pedagógico alternativo tiene en cuenta las necesidades de los niños, las características del pensamiento infantil, es un modelo que reflexiona en la libre actividad investigadora, creativa de los niños.

Por estas razones el diseño de las actividades, que componen la propuesta, está enmarcado dentro del modelo constructivista. Las actividades les proponen a los estudiantes descubrir la relación entre las isometrías y la congruencia, así como la relación entre las homotecias y la semejanza.

## 4.6 El modelo Van Hiele.

El modelo de Van Hiele tiene su origen en los trabajos de los profesores holandeses de matemáticas de enseñanza secundaria Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, quienes en sus tesis doctorales presentaron, respectivamente, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría y un ejemplo concreto de aplicación de ese modelo en unos cursos de geometría.

Van Hiele (citados por Fouz & Berritzegune, 2004) afirman que *“alcanzar un nivel superior de pensamiento significa que, con un nuevo orden de pensamiento, una persona es capaz, respecto a determinadas operaciones, de aplicarlas a nuevos objetos”* (p. 68). Además afirman: *“no hay un método panacea para alcanzar un nivel nuevo pero, mediante unas actividades y enseñanza adecuadas se puede predisponer a los estudiantes a su adquisición”* (p. 68).

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

Siguiendo a Crowley. (1987), los niveles propuestos por Van Hiele, son cinco:

- **NIVEL 1: Visualización o reconocimiento**
- **NIVEL 2: Análisis**
- **NIVEL 3: Ordenación o clasificación**
- **NIVEL 4: Deducción formal**
- **NIVEL 5: Rigor**

El primero de ellos es de simple reconocimiento de las figuras, que son reconocidas por su forma global, por su aspecto físico y no por un análisis de sus propiedades. El segundo, es un nivel de análisis, donde el estudiante reconoce las propiedades, las componentes de las figuras, empieza a determinar relaciones entre figuras, pero de una forma intuitiva, experimental. El tercero es un nivel de lógica, en el cual se relacionan las propiedades de las figuras de una manera lógica, mediante razonamientos sencillos lógicos. En el cuarto nivel adquieren sentido los axiomas, las definiciones, los teoremas pero no hay razonamientos abstractos, ni se entiende suficientemente el significado del rigor en las demostraciones. En el quinto nivel el razonamiento es rigurosamente deductivo, cuando se es capaz de razonar sin ayuda de la intuición (Martínez et al, 1989).

La siguiente tabla muestra los elementos explícitos e implícitos en cada nivel, (Fouz & Berritzegune, 2004, p.71):

	<b>ELEMENTOS EXPLICITOS</b>	<b>ELEMENTOS IMPLICITOS</b>
<b>NIVEL 1</b>	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
<b>NIVEL 2</b>	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
<b>NIVEL 3</b>	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
<b>NIVEL 4</b>	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)

Existen unos objetivos generales que todo individuo debería lograr tras su formación básica: tener una cultura geométrica desde el punto de vista histórico e interdisciplinar, aplicar conocimientos geométricos para resolver problemas reales, usar los distintos lenguajes y representaciones, etc. Sin embargo, en la enseñanza de la geometría parece adecuado el plantear finalidades y objetivos que correspondan a las diferentes etapas de desarrollo de los estudiantes (Alsina, 1993). En nuestro caso nos interesa la etapa entre los 11 y 13 años, en los niños de estas edades según Alsina (1993) "Los objetivos

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

*terminales<sup>21</sup> son mucho más borrosos, forman necesariamente un conjunto en evolución: no existe un discurso deductivo, ni tienen sentido ciertas abstracciones, ni se resuelven problemas en un sentido formal, etc.” (p.19).*

Por estas razones, en el desarrollo de la propuesta de enseñanza, nos centraremos en los primeros cuatro niveles de Van Hiele. La propuesta pretende que los estudiantes se aproximen al concepto de semejanza a través de las transformaciones en el plano.

Por lo general los libros de texto de grado séptimo no presentan la noción de congruencia y semejanza, lo pocos que lo hacen lo trabajan desde la relación intrafigural, no teniendo en cuenta el estudio que hasta el momento se ha hecho de las transformaciones en el plano.

### 4.7 Diseño de la propuesta de enseñanza.

Teniendo en cuenta la importancia de los aspectos anteriormente mencionados, y su justificación dentro de esta propuesta, a continuación presentaremos las actividades que permiten a los estudiantes de grado séptimo aproximarse, desde un punto de vista constructivista, al concepto de semejanza, utilizando las transformaciones en el plano, y como caso particular trataremos la noción de congruencia a partir del uso de las isometrías. Se pretende que las actividades estén basadas en los niveles de Van Hiele y que a través de la manipulación del software de geometría dinámica Geogebra los estudiantes alcancen el nivel 4: Deducción, a partir de la construcción y verificación de resultados. Además mediante el uso de las transformaciones en el plano y la relación con la semejanza se haga énfasis en el pensamiento espacial.

La secuencia de contenidos que se proponen para la creación de las actividades, siguen el mismo orden de presentación de los conceptos trabajados en el capítulo 2, es decir: isometrías y su relación con la congruencia y homotecias y su relación con la semejanza.

Es importante que previo a las actividades, el docente brinde las explicaciones correspondientes, en este caso, triángulos, polígonos, proporcionalidad, y otros que se consideren pertinentes.

Los estudiantes harán uso de regla, compas, transportador, plano cartesiano, Geogebra. Algunas de las actividades toman como referencia la historia y el arte.

Cada actividad termina con un apartado llamado conclusiones con el fin de que el **maestro** tomando como referencia las respuestas dadas por los estudiantes, formalice los conceptos y propiedades trabajados hasta ese momento.

---

<sup>21</sup> El autor denomina objetivos terminales.

# LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

## Actividad 1. Traslaciones

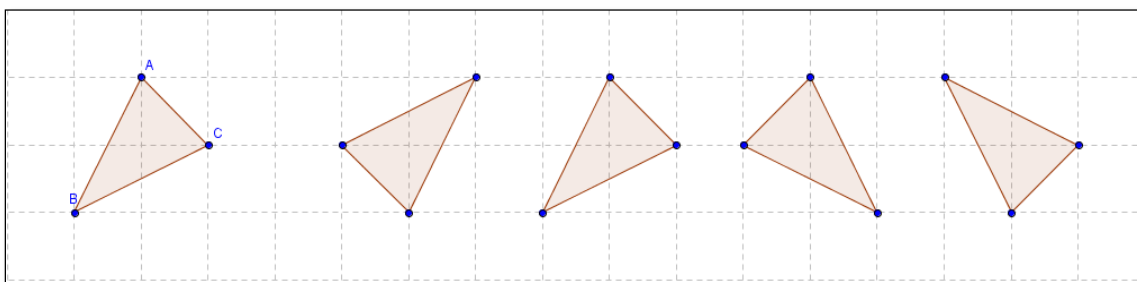
### OBJETIVOS:

- Reconocer e identificar la imagen resultante al aplicar una traslación.
- Analizar los elementos necesarios para realizar una traslación.
- Realizar traslaciones con regla y compás.
- Localizar e indicar las coordenadas resultantes luego de aplicar una traslación.
- Predecir los posibles resultados al aplicar una traslación a figuras en el plano cartesiano.
- Reconocer e identificar las partes correspondientes de figuras congruentes luego de aplicar una simetría.
- Utilizar las traslaciones para establecer la congruencia entre figuras.

MATERIALES: lápiz, regla y compás.

En esta hoja escribe las respuestas a las preguntas y ejercicios planteados

1. Encierra en un círculo las figuras que consideras son una traslación del  $\triangle ABC$ .



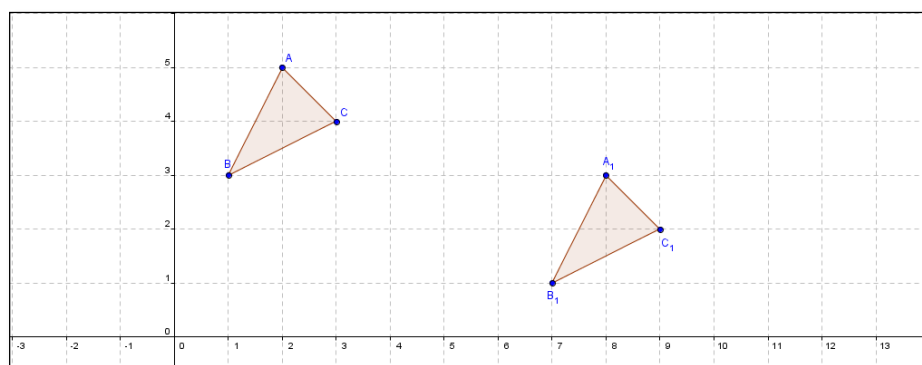
¿Por qué escogiste esta(s) opción(es)? Explica

---



---

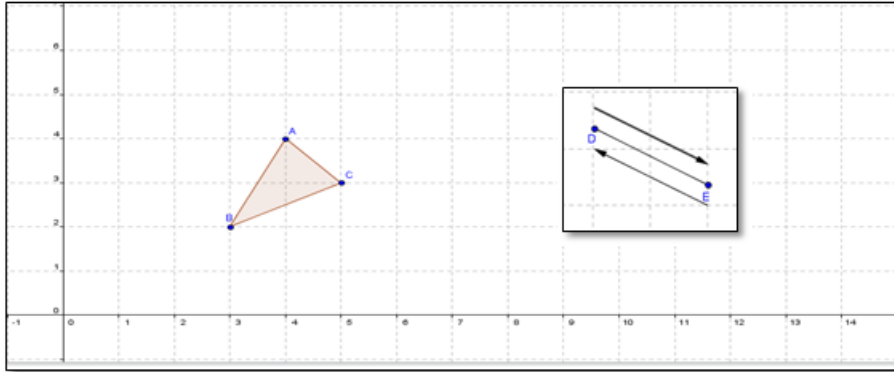
2. Dada la figura, traza el recorrido mas corto que ha hecho cada uno de los vértices A, B, C para ser  $A_1, B_1, C_1$ .



- 2.1 Con una regla determina la longitud de los segmentos que trazaste en el numeral 3. ¿Qué característica tienen los segmentos dibujados?
- 2.2 Horizontalmente ¿Cuántas unidades se ha desplazado el punto A para ser  $A_1$ ?
- 2.3 Verticalmente ¿Cuántas unidades se ha desplazado el punto A para ser  $A_1$ ?
- 2.4 Realiza el mismo proceso para los vértices B y C.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

3. Traslada los vértices del  $\triangle ABC$ , en la dirección de D a E y luego de E a D.



Compara la respuesta con tus compañeros. Anoten las coordenadas de los vértices de la imagen del triángulo al hacer las traslaciones.

Compara la forma de los dos triángulos. ¿Cómo son?

Compara la medida de los lados correspondientes. ¿Cómo son?

Conclusión: \_\_\_\_\_

4. ¿Qué condiciones consideras necesarias para trasladar un triángulo? Socializar al final las respuestas.

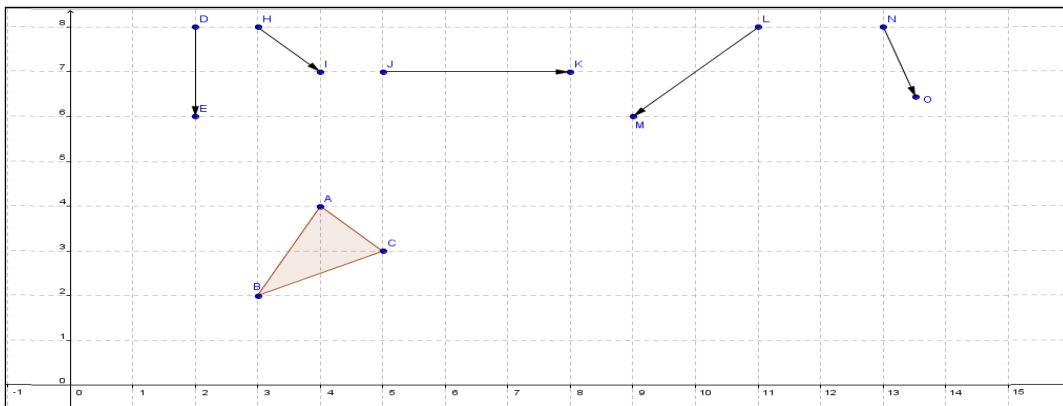
Condición: \_\_\_\_\_

Condición: \_\_\_\_\_

Condición: \_\_\_\_\_

Llamaremos VECTOR a la figura geométrica que reúne estas condiciones.

5. Determina las traslaciones del  $\triangle ABC$  por medio de los vectores (direcciones sugeridas) que se presentan en la figura.



## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

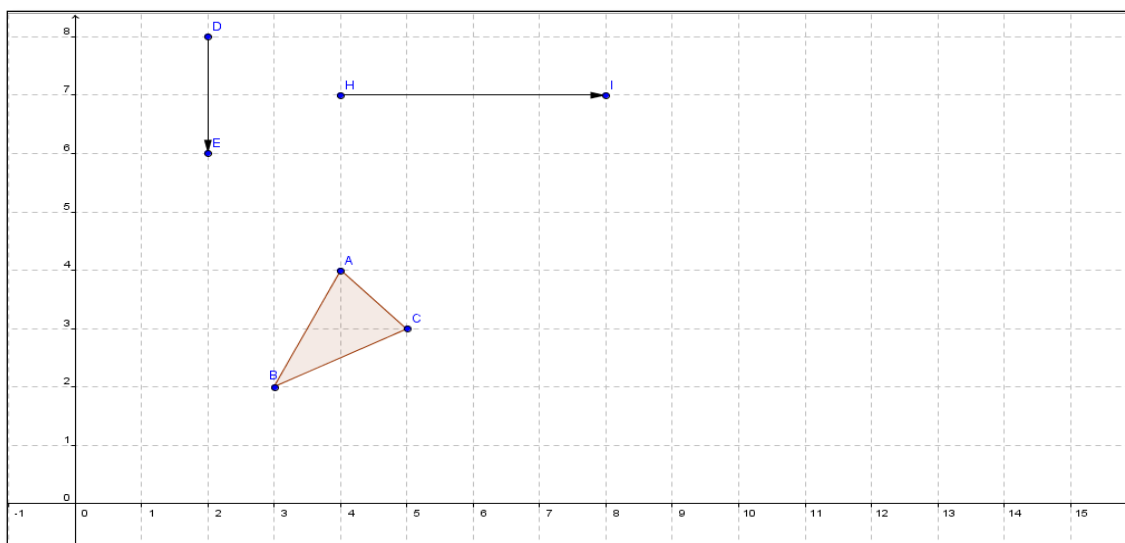
6. Ahora vamos a realizar la traslación con regla y compás.

6.1 Dibuja un segmento  $\overline{XY}$  en el plano y un vector  $v$ .

6.2 Traza rectas paralelas al vector  $v$  por los puntos  $X, Y$ .

6.3 Con el compás tomamos la magnitud del vector y con centro en  $X$  trazamos la circunferencia, ahora con el mismo radio y centro en  $Y$  trazamos la circunferencia, marcamos los puntos de intersección de las dos circunferencias con  $X'$  y  $Y'$  respectivamente. Finalmente unimos estos puntos.

7. Aplica la traslación  $T_{DE}$  al triángulo  $ABC$ , nombra los vértices del nuevo triángulo  $A_1, B_1, C_1$ . Ahora al triángulo  $A_1, B_1, C_1$  aplica la traslación  $T_{HI}$  y nómbralo  $\Delta A_2 B_2 C_2$  respectivamente.



7.1 Completa la siguiente tabla:

	Coordenadas vértice A y sus imágenes	Coordenadas vértice B y sus imágenes	Coordenadas vértice C y sus imágenes
$\Delta ABC$			
$\Delta A_1 B_1 C_1$			
$\Delta A_2 B_2 C_2$			

7.2 Completa las siguientes tablas, describiendo el movimiento en unidades tanto horizontalmente como verticalmente de cada uno de los vértices:

	Traslación del vértice A en $A_1$	Traslación del vértice B en $B_1$	Traslación del vértice C en $C_1$
Horizontalmente			
Verticalmente			

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

	Traslación del vértice $A_1$ en $A_2$	Traslación del vértice $B_1$ en $B_2$	Traslación del vértice $C_1$ en $C_2$
Horizontalmente			
Verticalmente			

7.3 Existe alguna forma de llevar el  $\Delta ABC$  en un solo movimiento a  $\Delta A_2B_2C_2$ . Si es así, ¿cuál sería el vector de traslación? Representalo gráficamente. ¿Cómo sería el desplazamiento de cada uno de los vértices del  $\Delta ABC$  para trasladarse hasta el  $\Delta A_2B_2C_2$ ? Completa la siguiente tabla.

	Traslación de A en $A_2$	Traslación de B en $B_2$	Traslación C en $C_2$
Horizontalmente			
Verticalmente			

7.4 ¿Encuentras alguna relación entre los cuadros del punto 7.2 y 7.3? ¿Cuál? Socialízala con tus compañeros.

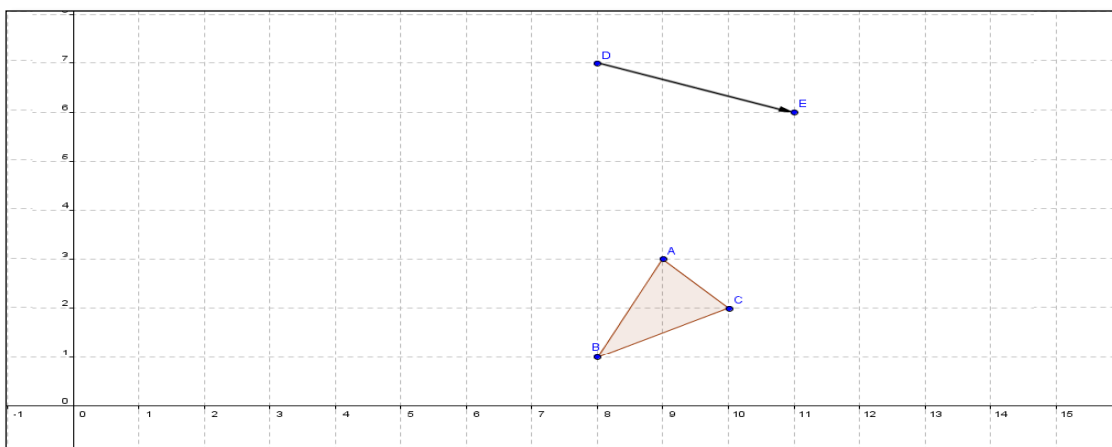
7.5 Realiza los pasos de los puntos 7.1, 7.2, 7.3 aplicando primero la traslación  $T_{HI}$  al  $\Delta ABC$  y luego a este nuevo triángulo le apliquemos la traslación  $T_{DE}$ .

7.6 ¿Qué relación encuentra entre los resultados de los dos ejercicios?

8. Reúnete con dos compañeros, dibujen en un mismo plano un  $\Delta ABC$ , y cada uno dibuje un vector de traslación distinto, llámenlos 1, 2 y 3. Ahora se dividen el siguiente trabajo: uno aplica las traslaciones del  $\Delta ABC$  en el orden  $T_1, T_3, T_2$ . Otro aplica el orden  $T_3, T_1, T_2$  y finalmente  $T_3, T_2, T_1$ .

a) Socialicen los resultados. ¿Qué conclusión pueden tener?

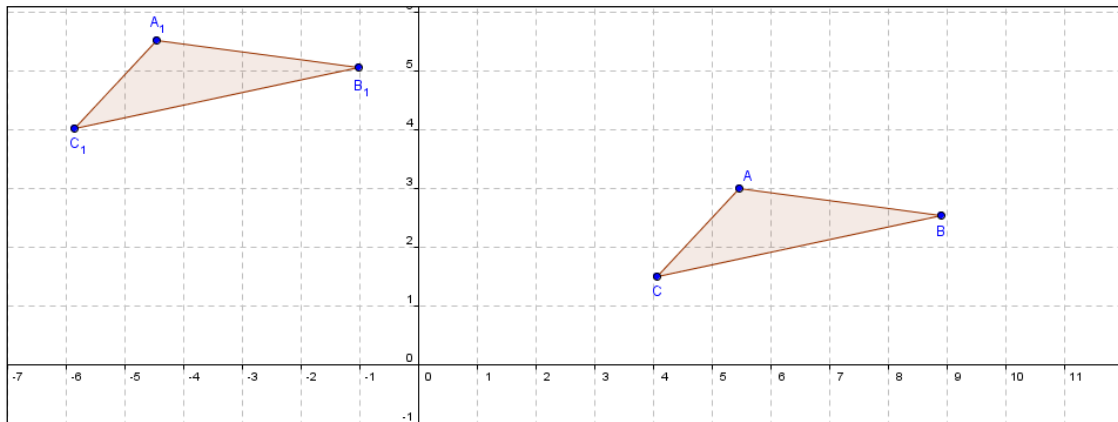
9. Dibuja un triángulo XYZ de tal manera que el triángulo ABC sea su imagen por medio de la traslación  $T_{DE}$ , es decir, en la dirección de D a E.



Describe el procedimiento que utilizaste.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

10. En la siguiente imagen los vértices del triángulo  $ABC$  se han trasladado hasta el triángulo  $A_1B_1C_1$ .



¿Puedes determinar el vector (dirección, magnitud y sentido) de traslación que transformo cada uno de los vértices? Explica tu procedimiento.

**CONCLUSIONES:**

# LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

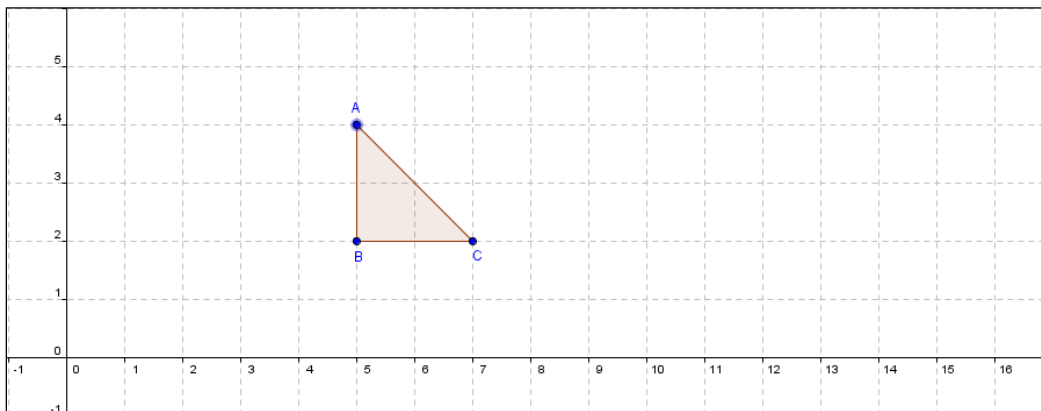
## Actividad 2: Rotaciones

### OBJETIVOS:

- Reconocer e identificar la imagen resultante al aplicar una rotación.
- Analizar los elementos necesarios para realizar una rotación.
- Realizar rotaciones con regla y compás.
- Predecir los posibles resultados al aplicar rotaciones de múltiplos de  $90^\circ$  con respecto al origen en el plano cartesiano.
- Reconocer e identificar las partes correspondientes de figuras congruentes luego de aplicar una rotación.
- Utilizar la rotación para establecer la congruencia entre figuras.

MATERIALES: lápiz, regla y compás.

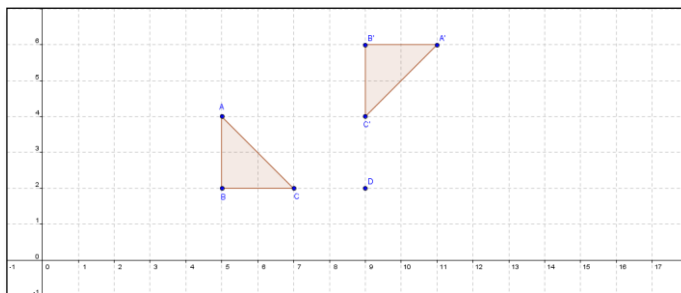
1. Toma una hoja de papel transparente, calca el triángulo que está en la figura luego recórtalo. Ahora superpone uno sobre el otro y con el compás sujeta uno de los vértices del triángulo recortado, hazlo girar y mientras lo haces dibuja sobre el papel los triángulos que se van formando mientras haces el movimiento.



- 1.1 Repite el ejercicio anterior teniendo en cuenta los otros dos vértices.

2. En otro plano ubica la figura recortada, y dibuja un punto  $O$  que no pertenezca a ella. Intenta (con ayuda del compás o el lápiz) girar la figura alrededor el punto  $O$ . Luego suspende el movimiento dibujando el triángulo resultante al parar el giro. Repite tres veces esta instrucción.

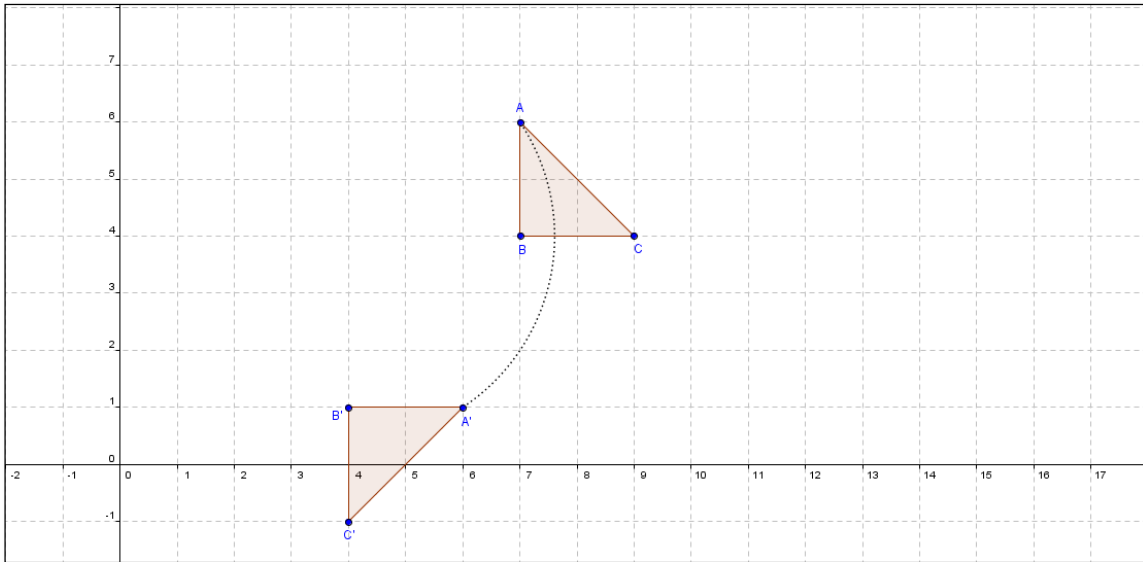
3. En la siguiente figura se ha girado el triángulo  $ABC$  con respecto al punto  $D$ . Determina, con ayuda del compás, los arcos de circunferencia que mueven cada uno de los vértices en sus correspondientes imágenes.



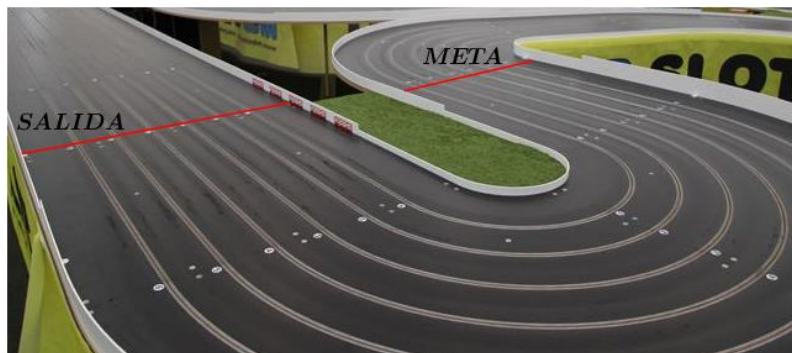
- 3.1 Con ayuda del transportador mide los  $\angle AOA'$ ,  $\angle BOB'$ ,  $\angle COC'$ . Compáralos.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

4. ¿Qué elementos consideras necesarios para aplicar una rotación? Socializa con un compañero y luego con el profesor.
5. En la siguiente imagen los vértices del triángulo  $ABC$  se han girado hasta estar en la posición de los vértices del triángulo  $A'B'C'$ . Utiliza el compás para desarrollar las preguntas.



- 5.1 Dibuja la circunferencia sobre la que se ha movido el vértice  $A$  para llegar a la posición  $A'$
- 5.2 Dibuja las circunferencias sobre las cuales se movieron los otros dos vértices.
- 5.3 ¿Tienen algo en común estas tres circunferencias?
- 5.4 Explica el procedimiento que utilizaste para encontrar éstas circunferencias.
6. Esta es la fotografía<sup>22</sup> de la gran pista de MB Slot, que fue el escenario de las grandes carreras celebradas en Slotlandia. Si tú fueras uno de los atletas que participan en esta carrera:



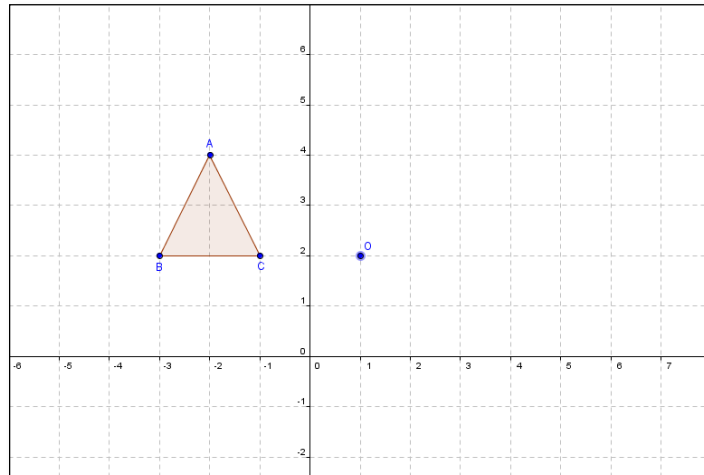
Responde:

- 6.1 ¿Cuál carril escogerías para ganar la carrera? ¿Por qué?

<sup>22</sup> Fotografía recuperada de <http://www.slotcar-today.com/es/notices/2012/10/estrenada-la-black-queen-995.php>.  
Modificada por autor

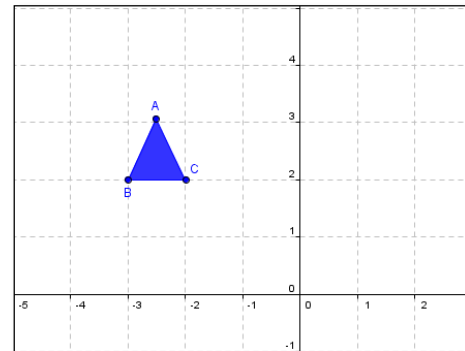
## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

- 6.2 Al momento de llegar a la curva los atletas hacen un giro. ¿Es el mismo giro para todos? Justifica tu respuesta.
7. Con ayuda del transportador, realiza la rotación de los vértices del triángulo  $ABC$  teniendo en cuenta el punto  $O$  un ángulo de  $90^\circ$ .



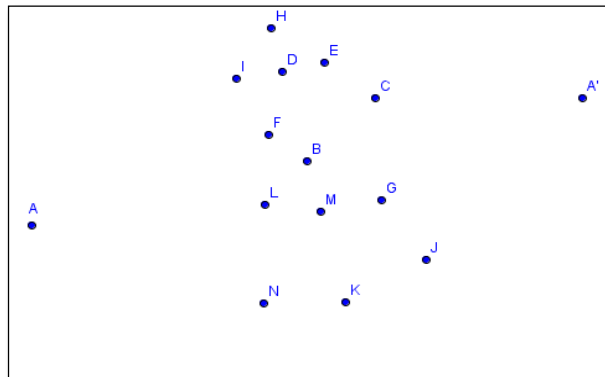
- 7.1 Nombra los vértices correspondientes con  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . ¿Cuáles son las coordenadas del triángulo  $A'B'C'$ ?
- 7.2 Reúnete con cuatro compañeros y comparen sus respuestas.
- 7.3 ¿Es posible encontrar más de una respuesta? ¿Por qué?

8. Realiza las siguientes rotaciones de centro en  $C$  a la figura y ángulos  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ . ¿Qué figura obtienes?



- 8.1 Inventa un diseño utilizando las rotaciones.
- 8.2 En un plano distinto dibuja un triángulo  $\Delta ABC$  y un punto  $D$  que no pertenezca al triángulo. Realiza una rotación con centro en  $D$  y un ángulo de  $180^\circ$ . Ahora realiza la rotación con centro en  $C$  y un ángulo de  $180^\circ$ . ¿Qué puedes concluir de estas dos rotaciones?

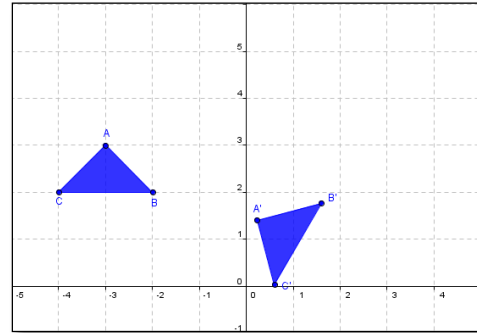
9. En la siguiente figura el punto  $A'$  es la imagen de  $A$  por medio una rotación. Observa detenidamente los puntos que allí se presentan e intenta determinar cuál de ellos puede ser el centro de rotación. Puedes ayudarte con el compás.



## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

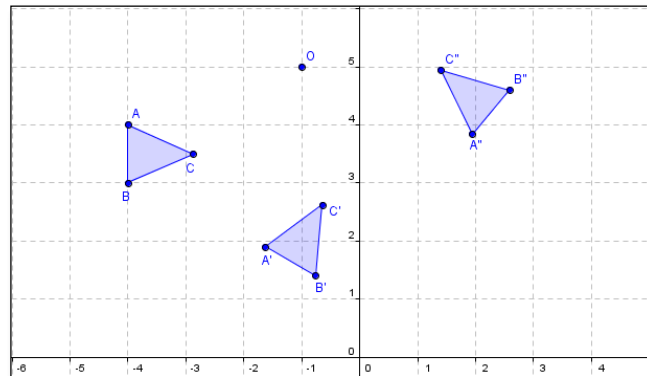
- 9.1 ¿Qué figura obtienes al unir los posibles centros de giro?
- 9.2 ¿A qué se debe este resultado?
- 9.3 Con ayuda del transportador mide la amplitud ángulo tomando como referencia 3 puntos de los encontrados en el punto 9.

10. En la siguiente figura se han rotado los vértices del triángulo  $ABC$  y se han transformado en los vértices del triángulo  $A'B'C'$ . Puedes determinar el centro de la rotación. (Puedes ayudarte con los resultados del procedimiento anterior)



- 10.1 Con el transportador calcula el valor de la amplitud del ángulo de rotación.
- 10.2 Escribe el procedimiento que hiciste para hallar el centro de rotación.

11. En la siguiente figura a los vértices del triángulo  $ABC$  se le ha aplicado una rotación con centro en  $O$ . Con ayuda del transportador determina la medida del ángulo de rotación para que el triángulo  $ABC$  este en la posición de  $A'B'C'$ . Al triángulo  $A'B'C'$  se le ha aplicado una rotación con centro en  $O$ , determina con el transportador la medida de la amplitud del ángulo de rotación para que este tome la posición del triángulo  $A''B''C''$ . Existe alguna rotación con centro en  $O$  que envíe el triángulo  $ABC$  en  $A''B''C''$ .



**Conclusiones:**

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

### Actividad 3: Simetrías

#### OBJETIVOS:

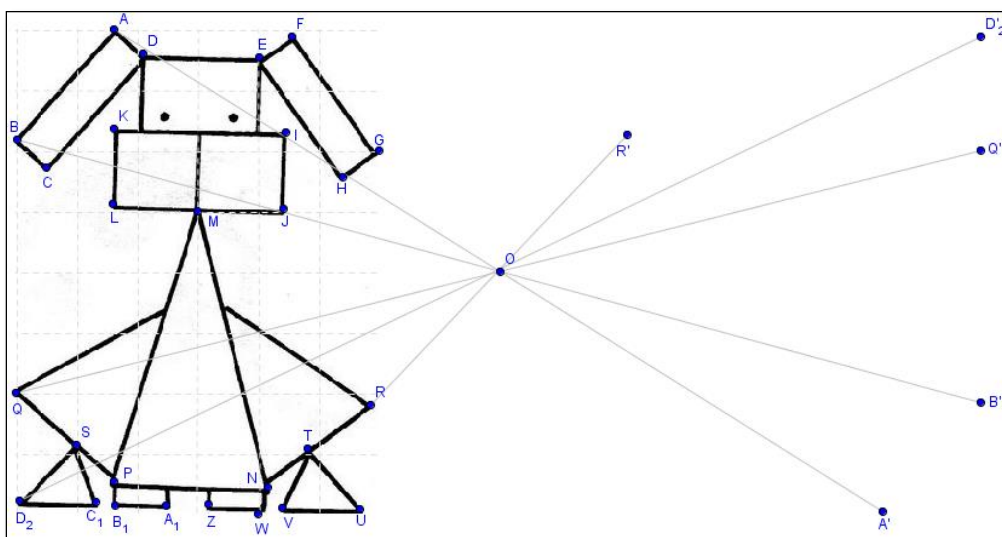
- Reconocer e identificar la imagen resultante al aplicar una simetría.
- Analizar los elementos necesarios para realizar una simetría.
- Realizar simetrías con regla y compás.
- Identifica figuras simétricas y traza sus ejes de simetría.
- Predecir los posibles resultados al aplicar simetrías a figuras en el plano cartesiano.
- Reconocer e identificar las partes correspondientes de figuras congruentes luego de aplicar una simetría.
- Utilizar las simetrías para establecer la congruencia entre figuras.

MATERIALES: lápiz, regla y compás.

1. Dibuja un segmento  $\overline{AB}$  y un punto exterior a él, llamémoslo  $O$ . Tracemos las rectas  $\overline{AO}$  y  $\overline{BO}$ . Ahora con el compás tracemos la circunferencia con centro en  $O$  y radio  $AO$ . Llamemos  $A'$  al punto de intersección entre esta circunferencia y la recta  $\overline{AO}$ . Realizamos el mismo procedimiento para el punto  $B$ , con centro en  $O$  y radio  $OB$  tracemos la circunferencia, la intersección entre la circunferencia y la recta  $\overline{BO}$  será el punto  $B'$ .
  - 1.1 Compara la longitud de los segmentos  $\overline{BO}$  y  $\overline{OB'}$ ,  $\overline{AO}$  y  $\overline{OA'}$ .
  - 1.2 Describe el movimiento que hizo el punto  $A$  para llegar a la posición  $A'$ , y el punto  $B$  para llegar a la posición  $B'$ .
  - 1.3 Teniendo en cuenta la construcción y el análisis anterior, escribe la condición necesaria para completar la expresión “El segmento  $\overline{A'B'}$  es simétrico del segmento  $\overline{AB}$ , por medio de una simetría central de centro en  $O$ , si \_\_\_\_\_”. Compárala con la respuesta de un compañero.

#### Conclusión:

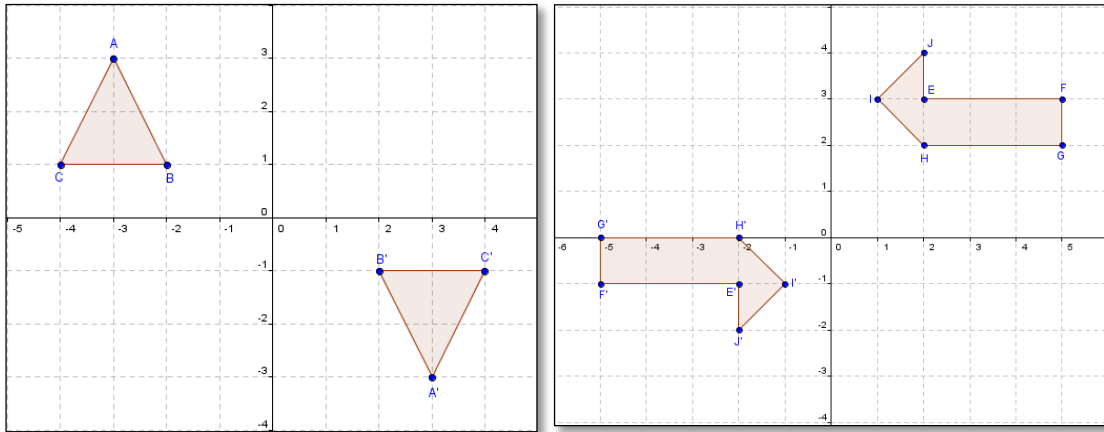
2. Completa la imagen<sup>23</sup> aplicando a cada uno de los puntos la simetría con centro en el punto  $O$ . Decóralo.



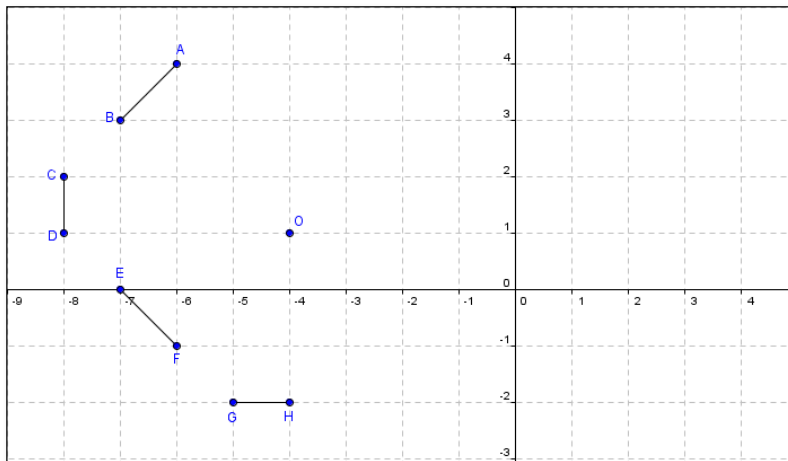
<sup>23</sup> Imagen recuperada de <http://www.imagui.com/a/animales-con-figuras-geometricas-TyEa7y7ka>.  
Modificada por el autor.

# LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

3. Determina las coordenadas del centro de simetría para los dos casos



4. Calcula mentalmente las coordenadas de los puntos simétricos con respecto al centro  $O$ . Anótalas en la tabla.



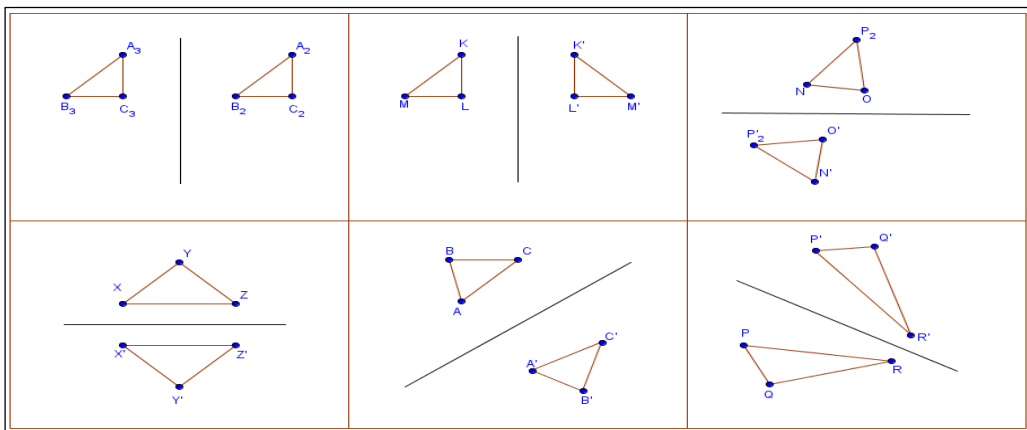
Punto	Coordenada
$A'$	
$B'$	
$C'$	
$D'$	
$E'$	
$F'$	
$G'$	
$H'$	

- 4.1 Compara con un compañero tu tabla.
- 4.2 Ubica los puntos sobre el plano. Une los puntos simétricos por parejas como está señalado.
- 4.3 Decora la figura.
5. ¿Qué relación existe entre una simetría axial y una rotación de  $180^\circ$ ?



## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

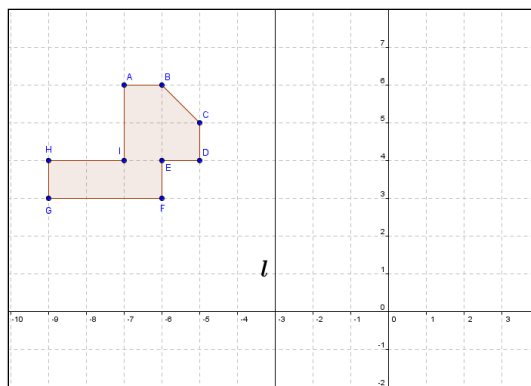
10. Identifica cuales de los siguientes movimientos corresponden a una simetría y cuáles no. Justifica en cada caso.



11. Realizaremos una simetría axial utilizando regla y compás.
- 11.1 Dibuja sobre el plano una recta  $l$  y dos puntos fuera de  $l$ , traza el segmento  $\overline{AB}$ .
  - 11.2 Tracemos sobre la recta  $l$  la perpendicular  $m$  desde el punto  $A$ , llamemos a la intersección de las dos rectas  $C$ .
  - 11.3 Tracemos sobre la recta  $l$  la perpendicular  $n$  desde el punto  $B$ , llamemos a la intersección de las dos rectas  $D$ .
  - 11.4 Con el compás hacemos centro en  $C$  y con abertura  $CA$  trazamos una circunferencia. Llamemos  $A'$  al punto de intersección de la circunferencia y la recta  $m$ .
  - 11.5 Con el compás hacemos centro en  $D$  y con abertura  $DB$  trazamos una circunferencia. Llamemos  $B'$  al punto de intersección de la circunferencia y la recta  $n$ .
  - 11.6 Tracemos el segmento  $\overline{A'B'}$ .
  - 11.7 Teniendo en cuenta la construcción, se puede concluir que " $\overline{A'B'}$  es es simétrico del segmento  $\overline{AB}$  si los segmentos  $\overline{AA'}$  \_\_\_\_\_".

Conclusión:

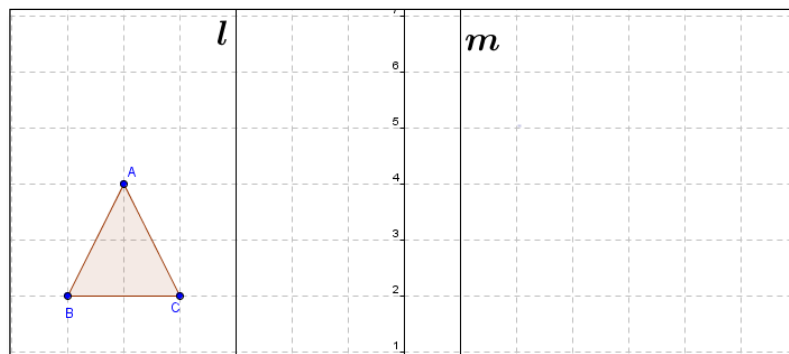
12. Determina las coordenadas de la figura simétrica por medio de la recta  $l$ , ubícalas sobre el plano cartesiano y traza la figura correspondiente.



## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

13. Dadas las siguientes figuras:

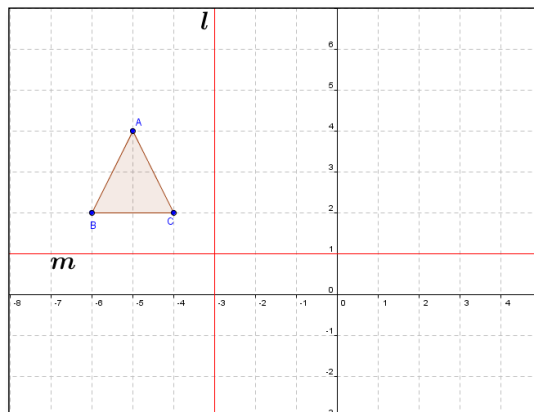
13.1 Determina la simetría por medio de la recta  $l$  del triángulo  $ABC$ , llama a la figura obtenida  $\Delta A'B'C'$ . Luego al triángulo  $A'B'C'$  aplica la simetría por medio de la recta  $m$ . Llama a la figura obtenida  $\Delta A''B''C''$ .



Reúnete con dos compañeros discutan la siguiente proposición: Con dos movimientos el triángulo  $ABC$  toma la posición del triángulo  $A''B''C''$ , ¿es posible hacerlo con un solo movimiento? ¿Cuál?

Conclusión:

13.2 Determina la simetría por medio de la recta  $l$  del triángulo  $ABC$ , llama a la figura obtenida  $\Delta A'B'C'$ . Luego al triángulo  $A'B'C'$  aplica la simetría por medio de la recta  $m$ . Llama a la figura obtenida  $\Delta A''B''C''$ .

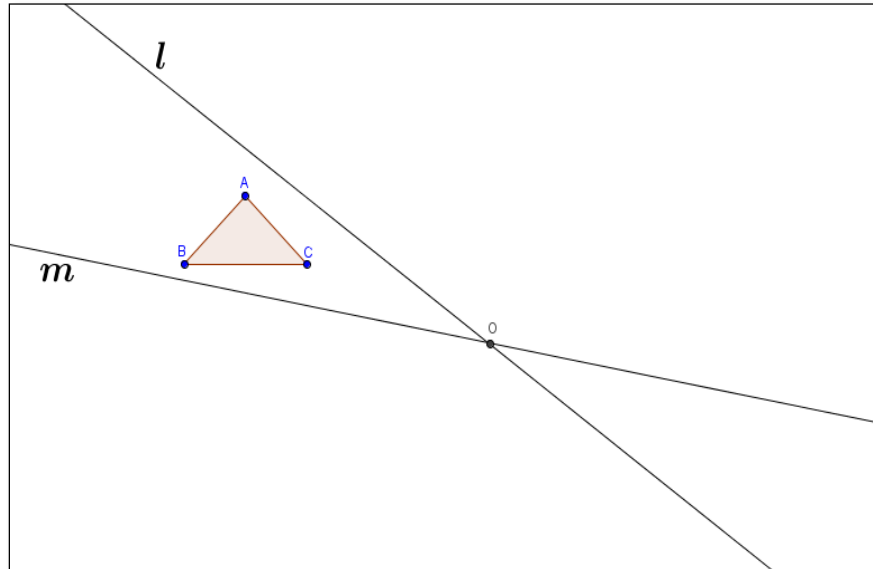


Reúnete con dos compañeros discutan la siguiente proposición: Existe algún movimiento que permita que el triángulo  $ABC$  tome la posición del triángulo  $A''B''C''$ . ¿Cuál?

Conclusión:

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

13.3 Determina la simetría por medio de la recta  $l$  del triángulo  $ABC$ , llama a la figura obtenida  $\Delta A'B'C'$ . Luego al triángulo  $A'B'C'$  aplica la simetría por medio de la recta  $m$ . Llama a la figura obtenida  $\Delta A''B''C''$ .



Reúnete con dos compañeros discutan la siguiente proposición: Existe algún movimiento que permita que el triángulo  $ABC$  tome la posición del triángulo  $A''B''C''$ . ¿Cuál? (sugerencia: toma como referencia el punto  $O$ ).

Con ayuda del transportador mide la amplitud del ángulo que forman las dos rectas. Ahora mide la amplitud del ángulo  $\angle AOA''$ . ¿Qué relación tienen esos ángulos?

### Conclusiones

# LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

## Actividad 4: Isometrías y Congruencia usando Geogebra

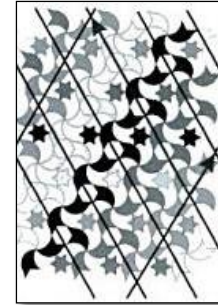
### OBJETIVOS:

- Reconocer las partes correspondientes de figuras congruentes luego de aplicar una isometría.
- Deducir la relación entre isometrías y congruencia utilizando el software Geogebra.

Desde la antigüedad, unos de los elementos artísticos más utilizados en la decoración son los frisos, los mosaicos y las teselaciones que se obtienen a partir de movimientos rígidos (isometrías) en el plano aplicado a figuras geométricas. Los árabes llegaron a ser importantes exponentes del arte geométrico, llegando a su esplendor en la época

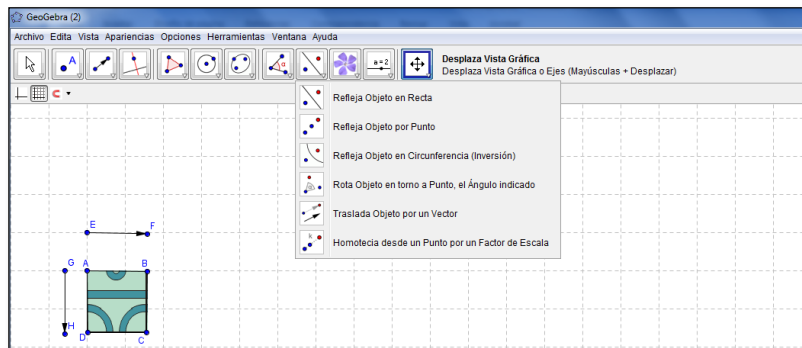


en que la dinastía Nazarí era importante en el sur de España, en el llamado Reino de Granada, aproximadamente en los siglos XIII y XIV. De esta época podemos destacar la Alhambra por su despliegue de decoración de sus paredes y techos con motivos caligráficos y mosaicos geométricos. Todos los mosaicos de la Alhambra tienen en común que se puede hallar una región poligonal, llamada

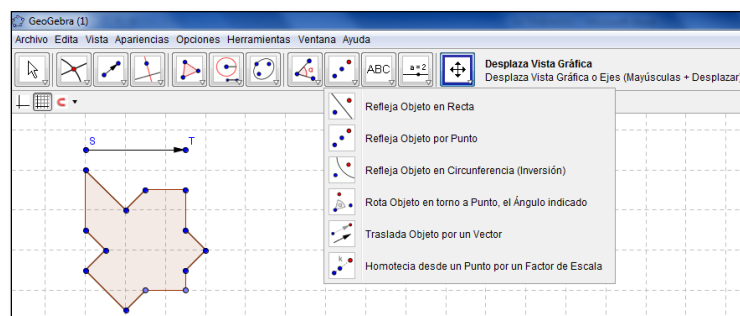


región fundamental y mediante traslaciones, giros y simetrías se puede reproducir por completo el mosaico (Hidalgo, 2007).

1. Teniendo en cuenta las siguientes figuras crea tu propio mosaico aplicando los movimientos en el plano trabajados hasta el momento. Utiliza el programa Geogebra que permite aplicar estos movimientos a través de la barra de herramientas.

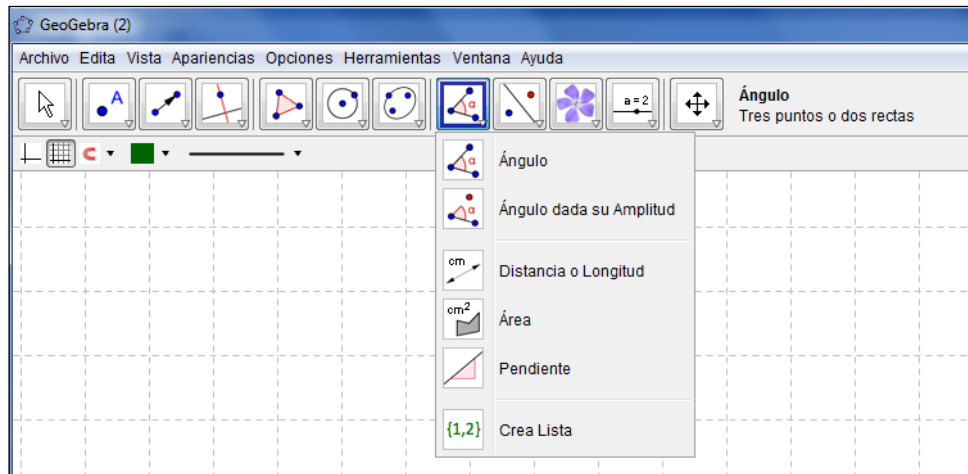


2. Teniendo en cuenta la figura geométrica en el programa Geogebra, realiza un friso. Colorea de diferentes colores. Usando una herramienta del computador, toma una foto e imprímela.



## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

- Utilizando el programa Geogebra, crea una figura geométrica y diseña tu propio friso, puedes colorearlo como desees.
- Con ayuda de las herramientas de medición en el programa Geogebra realiza las actividades 4.1 a 4.5:



- Dibuja un triángulo  $ABC$  y una recta. Refleja el triángulo  $ABC$  por ella. Comparando los dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  completa la siguiente tabla marcando con una X si alguna de las propiedades mencionadas se modificaron o no al momento de realizar la simetría axial.

PROPIEDAD	SE MODIFICÓ	NO SE MODIFICÓ
Tamaño		
Forma		
Medida de la amplitud de sus ángulos correspondientes.		
Medida de los lados correspondientes		

Teniendo en cuenta los resultados registrados en la tabla, podemos decir que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son \_\_\_\_\_.

- Dibuja un triángulo  $ABC$  y un punto  $O$ . Refleja el triángulo  $ABC$  por el punto  $O$ . Comparando los dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  completa la siguiente tabla.

PROPIEDAD	SE MODIFICÓ	NO SE MODIFICÓ
Tamaño		
Forma		
Medida de la amplitud de sus ángulos correspondientes.		
Medida de los lados correspondientes		

Teniendo en cuenta los resultados registrados en la tabla, se puede decir que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son: \_\_\_\_\_.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

- 4.3 Dibuja un triángulo  $ABC$  y un vector. Traslada el triángulo  $ABC$  por el vector. Comparando los dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  completa la tabla.

PROPIEDAD	SE MODIFICÓ	NO SE MODIFICÓ
Tamaño		
Forma		
Medida de la amplitud de sus ángulos correspondientes.		
Medida de los lados correspondientes		

Teniendo en cuenta los resultados registrados en la tabla, se puede decir que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son: \_\_\_\_\_.

- 4.4 Dibuja un triángulo  $ABC$ , un punto  $O$  que no pertenezca a él y determina un ángulo  $\alpha$ . Rota el triángulo  $ABC$  por  $O$  un ángulo  $\alpha$ . Comparando los dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  completa la tabla.

PROPIEDAD	SE MODIFICÓ	NO SE MODIFICÓ
Tamaño		
Forma		
Medida de la amplitud de sus ángulos correspondientes.		
Medida de los lados correspondientes		

Teniendo en cuenta los resultados registrados en la tabla, se puede decir que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son: \_\_\_\_\_.

5. Teniendo en cuenta los resultados anteriores que se puede concluir con respecto a las isometrías y las figuras que se transforman por medio de ellas:  
\_\_\_\_\_.

6. Reúnete con dos compañeros y completen las siguientes frases: “Dos triángulos son \_\_\_\_\_ si existe una \_\_\_\_\_ que transforma uno en el otro”.

7. “Las condiciones para que dos triángulos sean congruentes son:  
\_\_\_\_\_.”

### Conclusiones

# LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

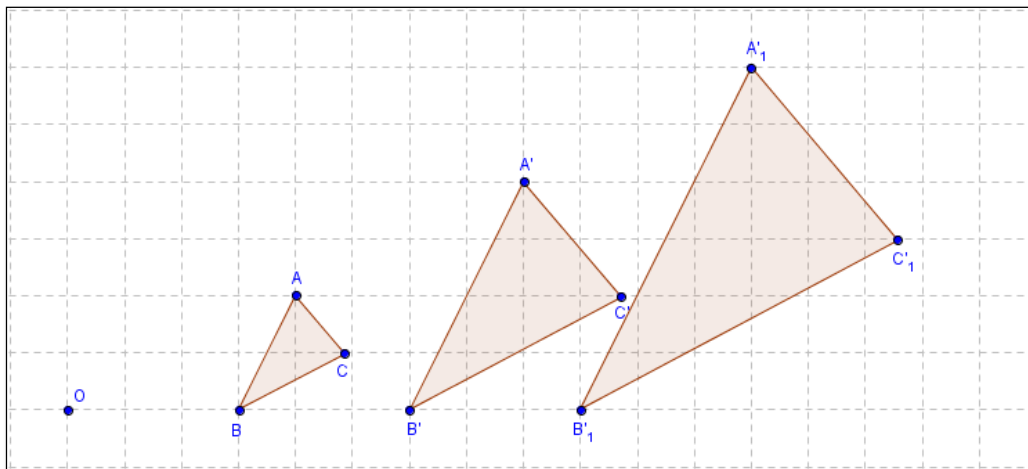
## Actividad 5: Homotecias

### OBJETIVOS:

- Reconocer e identificar la imagen resultante al aplicar una homotecia.
- Analizar los elementos necesarios para realizar una homotecia.

### Materiales: lápiz, papel, compás, transportador, regla.

1. Observa los tres triángulos e identifica características en común. Puedes ayudarte con el compás, el transportador y la regla.



- 1.1 Dadas las características que encontraste ¿Cómo llamarías a estos triángulos?
- 1.2 Traza las rectas que pasan por los puntos  $A, A'$ ;  $B, B'$ ;  $C, C'$ . ¿Qué ocurre con estas rectas?
- 1.3 Mide los segmentos  $\overline{OA}$  y  $\overline{OA'}$ ;  $\overline{OB}$  y  $\overline{OB'}$ ,  $\overline{OC}$  y  $\overline{OC'}$ . ¿Qué relación encuentras?
- 1.4 Mide los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{A'C'}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{B'C'}$ . ¿Qué relación encuentras? ¿cómo son estos segmentos?
- 1.5 ¿Calcula y compara las razones  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ ? ¿Qué podemos concluir con respecto a la medida de los lados correspondientes?
- 1.6 Con ayuda del transportador mide la medida de la amplitud de los ángulos correspondientes. Completa la tabla y compara los resultados.

	ÁNGULOS	MEDIDA DE LA AMPLITUD
1	$\sphericalangle ABC$	
	$\sphericalangle A'B'C'$	
2	$\sphericalangle BAC$	
	$\sphericalangle B'A'C'$	
3	$\sphericalangle ACB$	
	$\sphericalangle A'C'B'$	

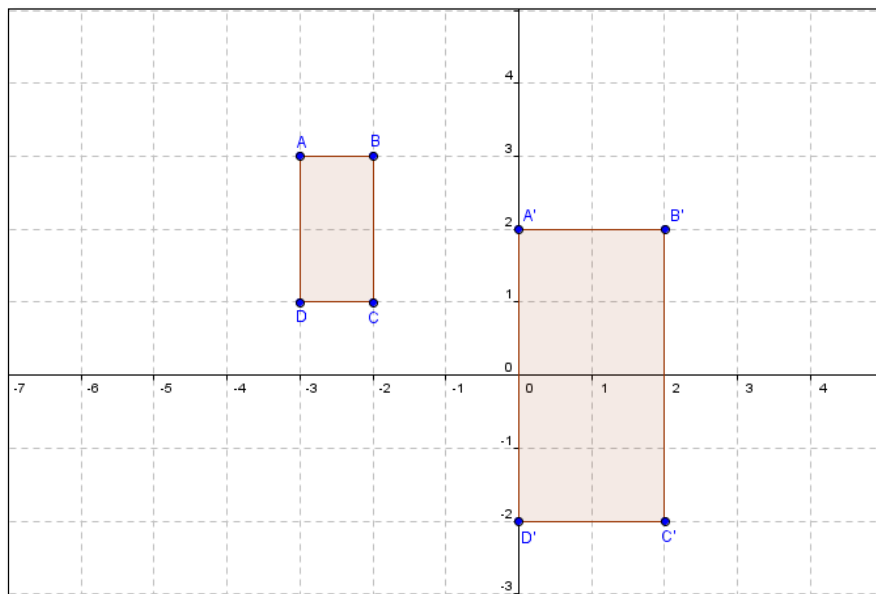
- 1.7 Repite los pasos 1.1 y 1.5 con los puntos  $A, B, C$  y  $A'_1, B'_1, C'_1$  y completa la tabla ¿Qué relación encuentras?

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

- 1.8 Teniendo en cuenta lo anterior, intenta describir el movimiento que deben hacer los vértices del triángulo  $\Delta ABC$  para llegar a las posiciones de los triángulos  $\Delta A'B'C'$  y  $\Delta A'_1B'_1C'_1$  respectivamente.

### Conclusiones:

2. Determina las coordenadas del centro de la homotecia y la razón K en la siguiente imagen.



3. Sean  $A = (0,1)$ ;  $B = (2,0)$  y  $C(1,3)$  tres puntos del plano. Halla las coordenadas del triángulo homólogo de  $\Delta ABC$  mediante la homotecia:
- 3.1 De centro  $(3,3)$  y razón 2,
  - 3.2 De centro  $(0,2)$  y razón  $\frac{1}{2}$
  - 3.3 De centro  $(0,2)$  y razón  $-\frac{1}{2}$
  - 3.4 De centro  $(3,3)$  y razón -2,

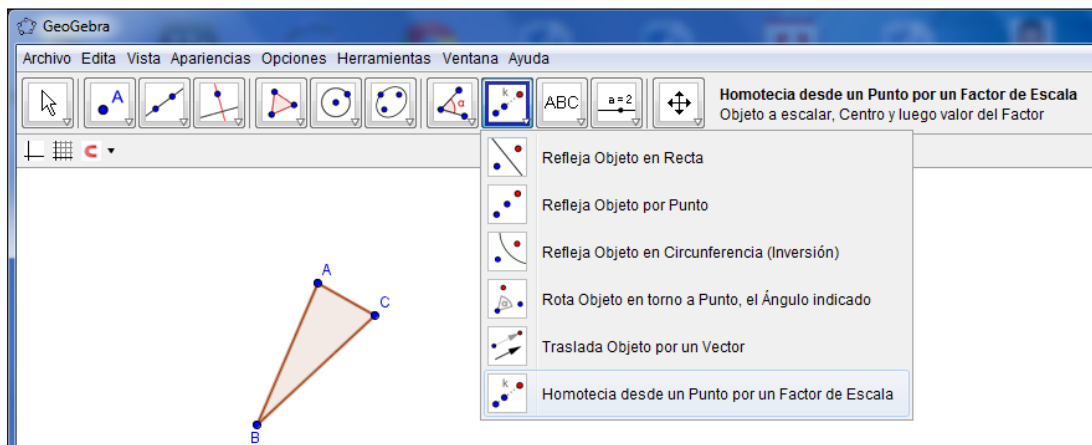
### Conclusiones

# LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

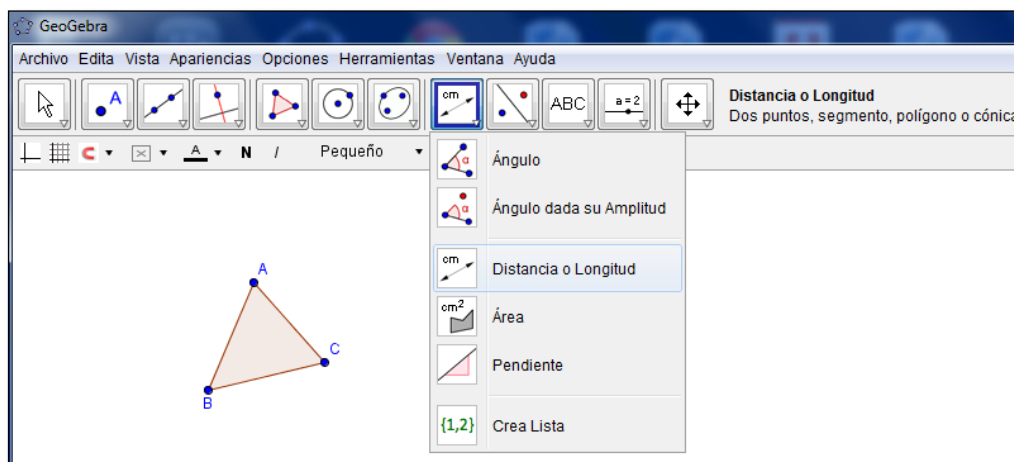
## Actividad 6: Homotecias usando Geogebra

### OBJETIVOS:

- Predecir los posibles resultados al aplicar una homotecia a figuras en el plano cartesiano.
  - Utiliza homotecias centradas en el origen para describir semejanzas.
1. Con ayuda del programa Geogebra dibuja un triángulo  $ABC$ . Dentro de la barra de herramientas existe la opción Homotecia desde un punto por un factor de escala. Seleccionas el triángulo  $ABC$ , un centro y luego aparece una ventana donde escribes la razón de homotecia a la cual quieres modificar el triángulo.



Con esta herramienta determina las siguientes homotecias y analiza qué relación hay entre el triángulo  $ABC$  y su imagen  $\Delta A'B'C'$ . Puedes ayudarte de las herramientas de medida de lados y medida de ángulos que se presentan a continuación.



1.2 Si  $k = 0$ . ¿Qué pasó con la figura?

1.3 Si  $k = 1$  ¿Qué pasó con la figura? ¿Existe alguna relación con las isometrías?

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

- 1.4 Si  $k = -1$ . ¿Qué relación existe con la simetría central?
- 1.5 Si  $k > 1$  ¿Qué pasó con el tamaño de la figura?
- 1.6 Si  $0 < k < 1$  ¿Qué pasó con el tamaño de la figura?
- 1.7 Si  $k < 0$
- 1.8 Junto con un compañero establezcan unas conclusiones teniendo en cuenta los puntos 1.2 al 1.7.

**Conclusiones:**

2. En Geogebra dibuja dos puntos  $O$ ,  $O'$  y un triángulo  $ABC$ . Aplica la homotecia de centro  $O$  y razón  $k = 2$  al triángulo  $ABC$  obteniendo su imagen  $\Delta A'B'C'$ , seguidamente aplica la homotecia de centro  $O'$  y razón  $k = 3$  al triángulo  $A'B'C'$  obteniendo el triángulo  $\Delta A''B''C''$ .
3. ¿Qué relación existe entre  $\Delta ABC$  y  $\Delta A''B''C''$ ?
4. Se puede determinar una homotecia que transforme el triángulo  $ABC$  en el  $\Delta A''B''C''$ . En ese caso ¿cuál sería su razón y cuál su centro? Puedes trabajar con Geogebra este punto.
5. Teniendo en cuenta los resultados anteriores que se puede concluir con respecto a las homotecias y las figuras que se transforman por medio de ellas:

---

**Conclusiones**

# LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

## Actividad 7: Transformaciones en el Plano y Semejanza usando Geogebra

### OBJETIVOS:

- Predecir los posibles resultados al aplicar una homotecia a figuras en el plano cartesiano.
- Deducir la relación entre las transformaciones en el plano y las nociones de congruencia y semejanza usando Geogebra.

1. En el programa Geogebra dibuja un triángulo  $ABC$ . Luego aplícale la homotecia de centro  $O$  y razón  $k = 2$ .

Obteniendo el triángulo  $A'B'C'$ . Luego aplícale al triángulo  $A'B'C'$  las siguientes transformaciones.

- 1.1 Dibuja un vector  $v$ , traslada el triángulo  $A'B'C'$  por medio del vector. Al nuevo triángulo llámalo  $A_1B_1C_1$ .
- 1.2 Dibuja una recta  $l$ , realiza una simetría al triángulo  $A'B'C'$  con respecto a esta recta. Al nuevo triángulo llámalo  $A_2B_2C_2$ .
- 1.3 Dibuja un punto  $O$ , rota el triángulo  $A'B'C'$   $90^\circ$  con respecto al punto  $O$ . Al nuevo triángulo llámalo  $A_3B_3C_3$ .
- 1.4 Con ayuda de las herramientas de medición completa las siguientes tablas.

Triángulos	Medida de los ángulos correspondientes al $\sphericalangle BAC$	Medida de los ángulos correspondientes al $\sphericalangle ACB$	Medida de los ángulos correspondientes al $\sphericalangle ABC$
$\triangle ABC$			
$\triangle A'B'C'$			
$\triangle A_1B_1C_1$			
$\triangle A_2B_2C_2$			
$\triangle A_3B_3C_3$			

Responde ¿Qué relación encuentras entre los ángulos?

Triángulos	Medida de los lados correspondientes a $\overline{AC}$	Medida de los lados correspondientes a $\overline{BC}$	Medida de los lados correspondientes a $\overline{AB}$
$\triangle ABC$			
$\triangle A'B'C'$			
$\triangle A_1B_1C_1$			
$\triangle A_2B_2C_2$			
$\triangle A_3B_3C_3$			

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

TRIÁNGULOS	RAZÓN	¿SON CONGRUENTES? JUSTIFICA TU RESPUESTA
$\triangle ABC$ $\triangle A'B'C'$	$\frac{A'B'}{AB} = \text{---} =$ $\frac{A'C'}{AC} = \text{---} =$ $\frac{B'C'}{BC} = \text{---} =$	
$\triangle ABC$ $\triangle A_1B_1C_1$	$\frac{A_1B_1}{AB} = \text{---} =$ $\frac{A_1C_1}{AC} = \text{---} =$ $\frac{B_1C_1}{BC} = \text{---} =$	
$\triangle ABC$ $\triangle A_2B_2C_2$	$\frac{A_2B_2}{AB} = \text{---} =$ $\frac{A_2C_2}{AC} = \text{---} =$ $\frac{B_2C_2}{BC} = \text{---} =$	
$\triangle ABC$ $\triangle A_3B_3C_3$	$\frac{A_3B_3}{AB} = \text{---} =$ $\frac{A_3C_3}{AC} = \text{---} =$ $\frac{B_3C_3}{BC} = \text{---} =$	

Responde:

1.5 Teniendo en cuenta los resultados anteriores ¿Qué relación encuentras entre el triángulo  $ABC$  y sus homólogos, al transformarlo por una homotecia y luego una isometría?

1.6 Qué se puede concluir con respecto a las homotecias e isometrías y las figuras que se transforman por medio de ellas: \_\_\_\_\_.

1.7 Reúnete con dos compañeros y completen las siguientes frases:

“Dos triángulos son \_\_\_\_\_ si existe una \_\_\_\_\_ que transforma uno en el otro”.

“Las condiciones para que dos triángulos sean semejantes son: \_\_\_\_\_.”

**Conclusiones:**

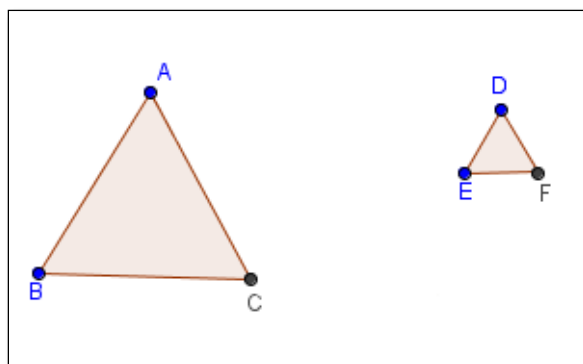
# LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

## Actividad 8: Semejanza

### OBJETIVOS

- Utilizar la semejanza para calcular las medidas de las partes correspondientes de figuras semejantes, y aplicar la semejanza en contextos de matemáticas y otras disciplinas.
- Construye una representación de una figura semejante a otra figura dada su razón de semejanza.

1. Los siguientes triángulos son equiláteros, ¿son semejantes? Justifica tu respuesta.



1.1 Calcula la amplitud de sus ángulos. ¿Qué observas?

1.2 Calcula la medida de sus lados y completa la siguiente tabla:

	$\Delta ABC$		$\Delta DEF$	
MEDIDA ÁNGULOS	$\sphericalangle ABC$		$\sphericalangle DEF$	
	$\sphericalangle BCA$		$\sphericalangle EFD$	
	$\sphericalangle BAC$		$\sphericalangle EDF$	
MEDIDA LADOS	AB		DE	
	BC		EF	
	AC		DF	

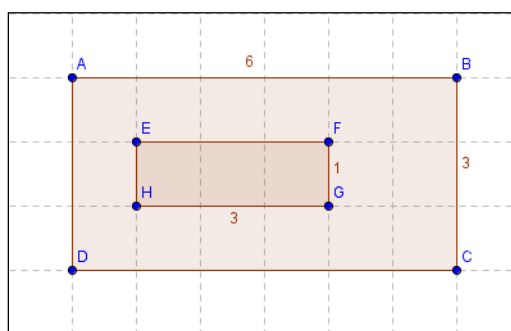
1.3 Calcula el cociente entre sus lados. ¿Qué relación encuentras?

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

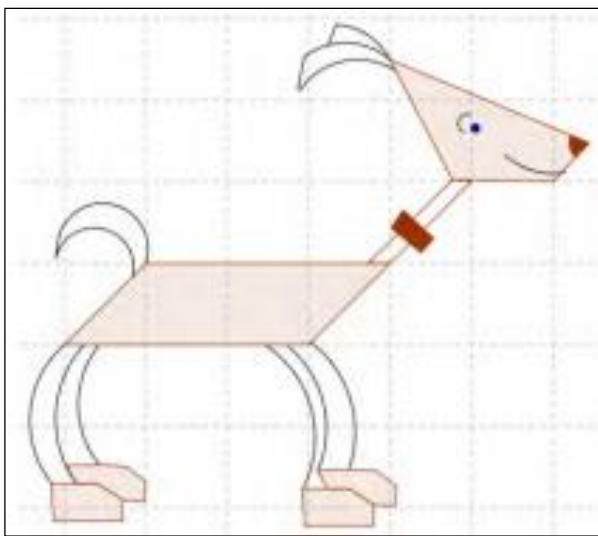
2. La película<sup>24</sup> los viajes de Gulliver estrenada en U.S.A en el año 2010, es basada en el libro *Viaje de Gulliver*, escrito por Jonathan Swift en 1984. En el primer viaje de Gulliver a Lilibut conoce a los Lilibutienses, que son personas de un tamaño mucho menor al de Gulliver. El libro menciona que la altura de Gulliver era doce veces la de los Lilibutienses, y la de ellos, de seis pulgadas. ¿Calcula la altura de Gulliver?



3. ¿Estos rectángulos son semejantes? Justifica tu respuesta.



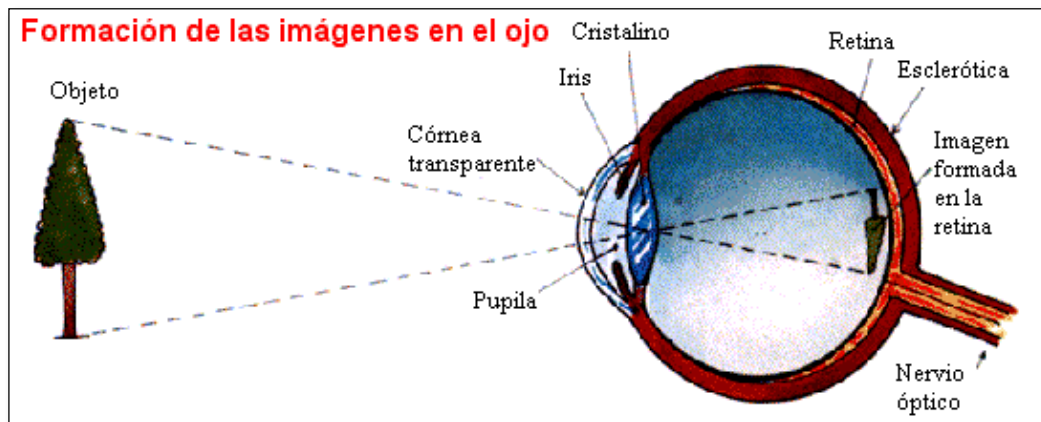
4. Dibuja una ampliación y una reducción del perro.



<sup>24</sup> Fotografía tomada de :<http://www.labutaca.net/peliculas/los-viajes-de-gulliver/>

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

5. La siguiente imagen<sup>25</sup> nos muestra cómo se forma la imagen de un objeto en nuestro ojo.



- 5.1 ¿Con cuál transformación en el plano relacionas la imagen? ¿Por qué?

- 5.2 ¿son semejantes los dos árboles? ¿Por qué?

### Conclusiones

<sup>25</sup> Fotografía tomada de: <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~29701428/salud/ojo.htm>

## 5. CONCLUSIONES

- La geometría y en particular los conceptos relacionados con las transformaciones geométricas han mostrado ser importantes en el arte, porque permiten generar expresiones artísticas como frisos, mosaicos, teselaciones, etc. Además contribuye a la pintura, escultura, la arquitectura, danzas en coreografía (simetría) y música.
- La enseñanza de la congruencia y la semejanza debe articularse con el estudio de las transformaciones geométricas porque estas permiten visualizar las propiedades de las figuras que permanecen invariantes al momento de ser aplicadas.
- En la enseñanza de la geometría y para el caso que nos ocupa, las transformaciones geométricas, es recomendable el uso de recursos tecnológicos como software de geometría dinámica, pues estos ayudan a visualizar, verificar y finalmente desarrollar la comprensión de los conceptos.
- En la enseñanza de las transformaciones geométricas consideramos importante tener en cuenta además de los ejercicios propuestos en el aula de clase, problemas relacionados con el arte y problemas de aplicaciones reales que pueden estar en el entorno.
- Consideramos que el aprendizaje implica la construcción de conocimiento. En el marco escolar, el proceso de aprendizaje de los estudiantes debe basarse en su propia actividad creadora, en sus propios descubrimientos, en sus motivaciones, donde el rol del profesor es de orientador.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- [1]. ALBIS V. & CLARA H. SÁNCHEZ. Iconografía. Grupo Proclo. Sistema de información de la producción matemáticas Colombiana. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Recuperado de <http://www.accefyn.org.co/proyecto/Galeria/luislleras.html>.
- [2]. ALFONSO, H. (1993). *Lecciones de Geometría Euclídiana*. Bogotá.
- [3]. ALSINA, C; PÉREZ, R. (1989). *Simetría dinámica*. España: Editorial Síntesis.
- [4]. GUERRERO, B (2006). *Geometría desarrollo Axiomático*. Bogotá, Colombia.
- [5]. ALFONSO, H. (1993). *Lecciones de Geometría Euclídiana*. Bogotá.
- [6]. ALSINA, C; PÉREZ, R. (1989). *Simetría dinámica*. España: Editorial Síntesis.
- [7]. GUERRERO, B (2006). *Geometría desarrollo Axiomático*. Bogotá, Colombia.
- [8]. BOYER, C. (1996). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad.
- [9]. CAMPOS, A. (1994). *Axiomática y Geometría, desde Euclides Hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá, Colombia.
- [10]. CASTIBLANCO, A; URQUINA, H; CAMARGO, L & ACOSTA, M. (2004). *Potencial didáctico de la geometría dinámica en el aprendizaje de la geometría*. Bogotá, Colombia: Serie documentos. Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Ministerio de Educación Nacional (MEN).
- [11]. CROWLEY, M. (1987). *El modelo Van Hiele en la enseñanza de la geometría*. U.S.A: NTCM: Learning and Teaching Geometry. Vol. 12. P.1-16.
- [12]. ESCUDERO, I. (2005). *Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX*. España: Departamento de didáctica de las matemáticas. Investigación didáctica. Universidad de Sevilla.
- [13]. FOUZ, F & BERRITZEGUNE, D. (2004). *Modelo de van hiele para la didáctica de la geometría*. España: DivulgaMAT, revista virtual.
- [14]. FREUDENTHAL, H. (2001). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (L. Puig, Trans.). México D.F, Departamento de Matemáticas Educativo, CINVESTAV.
- [15]. GODINO, J. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. España: Proyecto EDUMAT.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

- [16]. GOMBAU, C (2007). *Origami- Papiroflexia, un arte matemático*. España: El paraíso de las matemáticas. Revista virtual. Recuperado de: <http://www.matematicas.net/paraiso/origami.php?id=orimat>.
- [17]. GUALDRON, E. (2006) *Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza*. Colombia: Universidad de pamploña, SEIEM/06.
- [18]. HIDALGO, L. (2007). *Mosaicos*. México: Instituto de Matemáticas de la UNAM.
- [19]. HILBERT, D. (1996). *Fundamentos de la geometría*. España: CSIC.
- [20]. HOHENWARTER, M. (2009). *Documento de ayuda de Geogebra. Manual oficial de la versión 3.2*. Tomado de ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)).
- [21]. HOLDERLIN. *El descubrimiento de la belleza*. Recuperado de: <http://www.mty.itesm.mx/dhcs/deptos/ri/ri95-801/lecturas/lec194.html>
- [22]. JAHN, A. (1998). *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles*. Francia: Université Joseph Fourier.
- [23]. JAIME, A.; GUTIÉRREZ, A. (1996) *El grupo de las isometrías en el plano*. (Tesis Doctoral). Madrid: Editorial Síntesis.
- [24]. KANT, I. (1998). *Crítica de la razón pura*. España: Editorial Alfaguara Madrid.
- [25]. KLINE, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Tomos: 1, 2, 3.
- [26]. LEMONIDIS, C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. Tesis Doctoral. Université Louis Pasteur, Strasbourg.
- [27]. LEMONIDIS, C. (1991). *Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. Recherches en Didactique des Mathématiques, p. 295 – 324.
- [28]. LIMA, E. (2001). *Medida de la forma en geometría*. Traducción de Sergio Plaza. Serie la Enseñanza Matemática.
- [29]. MARTÍNEZ, A. (1989). *Una metodología activa y lúdica de enseñanza de la geometría elemental*. Madrid, España: Editorial síntesis S.A.
- [30]. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998.) *Lineamientos curriculares para matemáticas*. Colombia.
- [31]. MOISE, E. (1986). *Geometría Moderna*. México.

## LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y LA NOCIÓN DE SEMEJANZA

- [32]. MOJICA, D. (2007). *Planteamiento y resolución de problemas*. Recuperado de: <http://polya.dme.umich.mx/eventos/CXIVEP/prpasd.pdf>.
- [33]. MORIENA, S. (2006). *Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geométricas del plano*. Argentina: Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Prov. de Santa Fe.
- [34]. PUIG, Luis. (1997) *Análisis fenomenológico*. Barcelona: Universidad De Valencia. En L. Rico. La educación matemática en la enseñanza secundaria (págs. 61-94).