cotidiano. Un ejemplo perfecto que ilustra este punto es el argumento que engañó a Zenón, como también a muchos otros grandes pensadores. Se ha afirmado repetidamente: el todo es mayor que una de sus partes. A las palabras todo, partes, mayor, se les atribuye aquí, en un contexto general, su significado intuitivo. Por ejemplo, el hecho de que el total de todos los océanos del mundo contiene más agua que el lago Titicaca, pareciera corroborar este principio general. Pero, si nos preguntáramos si el conjunto de los números naturales 1,2,3,4, etc., es mayor que el conjunto de los números pares, estaríamos tentados a contestar afirmativamente como resultado de una simple extrapolación de nuestras experiencias. Pero, ¿qué significa en este contexto particular, ser más grande que? Galileo ya había descubierto, con anterioridad a Cantor, un argumento que parecía violar este principio absoluto. A cada número natural le podemos asociar su doble sin que sobren elementos en el conjunto de naturales o en el de pares, y sin asociar el mismo elemento a un mismo número:

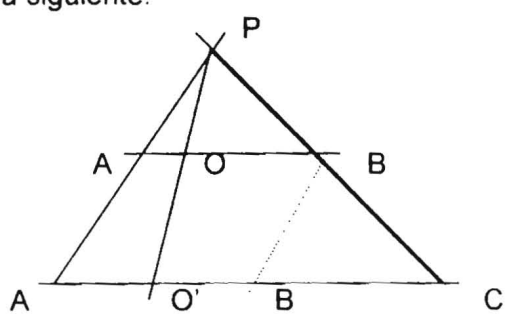
1->2
2->4
3->6
4->8 etc.,

Una correspondencia de esta naturaleza, entre conjuntos con un número finito de elementos, sólo es realizable si ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos. Si, por ejemplo, en una fiesta todos los invitados bailan en parejas (suponemos que cada pareja consiste de un hombre y una mujer), y si en un determinado momento todos los hombres y mujeres se encuentran bailando, entonces podemos concluir que hay igual número de hombres que de mujeres en la reunión. Este descubrimiento pudo haber llevado a Galileo al esclarecimiento de las propiedades del infinito, sin

embargo, lo rechazó como repugnante a la intuición, y hasta mediados del siglo IXX se consideró que el concepto de infinito debía evitarse si no se quería entrar en contradicciones.

Si los elementos de dos conjuntos A y B pueden ponerse en correspondencia biunívoca, es decir, si a cada elemento de A le corresponde uno y sólo un elemento de B, sin que sobren elementos en ninguno de los conjuntos, entonces diremos que A y B tienen el mismo tamaño, o que son equipotentes. Esta definición es la piedra angular que permitió a Cantor penetrar en los problemas del infinito. Cantor comienza por definir el primer infinito, el cual denota con la primera letra del alfabeto hebreo, aleph cero, $\aleph_0$. Un conjunto tendrá este tamaño si puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales. Se sigue entonces que todo subconjunto infinito de los naturales es equipotente al conjunto total y que el principio que afirma que el todo es mayor que una de sus partes es siempre falso en este caso. Más aún, un argumento elemental demuestra que un segmento AB, que forme parte de otro segmento AC,

son equipotentes. La proyección desde un punto P permite establecer una correspondencia biunívoca entre todos los puntos de AB y los puntos de AC, como se ilustra en la figura siguiente:



Esto muestra que la contradicción que Zenón cree encontrar no es más que una conclusión contraintuitiva, que no viola en absoluto la lógica, y que por tanto no pasa de ser un prejuicio que nace de la extrapolación que hacemos de ciertas propiedades que observamos en el mundo y trasladamos gratuitamente a un mundo abstracto.

La naturaleza del infinito se revela aún más misteriosa cuando Cantor descubre que el conjunto de todos los puntos de un segmento de recta posee un cardinal mayor que aleph cero. Es decir, este conjunto no se puede poner en correspondencia biuinivoca con los naturales, y por tanto los naturales constituyen una parte propia de menor tamaño o cardinal que el tamaño o cardinal del conjunto total. Con esto, Cantor ha construido otro infinito aún más grande, que denota con la letra c, y lo llama el cardinal del continuo. Uno puede preguntarse en este punto, ¿a qué estamos llamando el continuo? O cuando hablamos de todos los puntos de un segmento de recta, ¿a cuál objeto nos estamos refiriendo? Uno, por ejemplo, podría imaginar un segmento de recta constituido por todos los puntos del espacio vacío que llenan el lugar que ocupaba un hilo tenso infinitamente delgado. Pero caemos nuevamente en el mismo error de confundir un objeto del "mundo real", un objeto de nuestra percepción, con una abstracción formal que hacemos del mismo. No estoy seguro si la pregunta, qué es en realidad un segmento del mundo exterior, tenga algún sentido. Lo que sí resulta razonable es pedir al menos que se precise la noción de segmento ideal, y es aquí donde el método formal ha aportado lo que en mi opinión es el único conocimiento sólido que poseemos hasta el momento del infinito y el continuo. Para explicar la posición adoptada por los lógicos y matemáticos modernos en lo concerniente a estas nociones, comencemos por la concepción Cantoriana del continuo, en particular, comencemos por discutir qué entendía Cantor por número real.

Para Cantor, cada punto x de un intervalo de longitud unidad está representado por un número decimal, su coordenada, el cual podemos pensar que representa la distancia entre un punto origen, y el punto x. Escrito en forma decimal, esta distancia viene representada por un número que, en general, tendrá infinitas cifras decimales. Por ejemplo, el punto x = 0.11111... (con infinitas cifras decimales) representa el punto situado a una décima más una centésima más una milésima , etc., del origen. El punto medio estará situado en la coordenada 0.500000... Aunque en esta descripción de número real todavía aparece el fantasma del infinito, cuando se habla de infinitas cifras decimales, Cantor fue capaz de dar una definición precisa de número real, definición que hoy día se adopta en matemáticas. En lenguaje técnico, Cantor construye un número real como una clase de equivalencia de sucesiones Cauchy de números racionales, cuya escritura decimal sólo involucra finitos decimales, y de esta forma logra dar por primera vez una definición del continuo.

La demostración de que el continuo tiene un cardinal mayor que aleph cero es quizá el argumento más famoso de Cantor, conocido como argumento de la diagonal. Cantor razona por el absurdo, y supone que existe una correspondencia biyectiva entre todo el continuo, que denotaremos por R, y los números naturales, que denotaremos por N. Denotemos por

$$n \leftrightarrow a_n , b_{n1}\, b_{n2}\, b_{n3} \ldots \text{etc.},$$

el hecho de que el entero n se corresponda con el número real, cuya escritura decimal comienza por a_n seguido de las cifras decimales $b_{n1}\, b_{n2}\, b_{n3}$ . . etc. Cantor construye ahora un número real $0 , B_1\, B_2\, B_3 \ldots$ escogiendo la cifra decimal n-ésima, B_n , distinta a b_n Por ejemplo, supongamos que el número uno se corresponde con el real 3,8765430000..., que el dos se corresponde con 123,7613456..., el tres se corresponde con 678,000011123555...,etc. En esta caso el número