Erhard Scholz

CARL F. GAUSS, EL "GRAN TRIÁNGULO" Y LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA I

Número 12

CIENCIA AL VIENTO

Carl F. Gauss, el "gran triángulo" y los fundamentos de la geometría. I

Erhard Scholz

Número 12

Mayo, 2015

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia

Últimos títulos publicados

4. Eduardo Laso, *La concepción heredada y los métodos de validación científicos. I* (mayo, 2013).

5. Eduardo Laso, *La concepción heredada y los métodos de validación científicos. II* (agosto, 2013).

6. Charles Darwin, Alfred Russel Wallace, *Selección natural: tres fragmentos para la historia* (noviembre, 2013).

7. Jesús Mosterín, *La estructura de los conceptos científicos. I* (febrero, 2014).

8. Jesús Mosterín, *La estructura de los conceptos científicos. II* (mayo, 2014).

9. Roger A. Hegstrom y Dilip K. Kondepudi, *La quiralidad del universo* (agosto, 2014).

10. Esther Díaz, *Investigación básica, tecnología y sociedad. Kuhn y Foucault* (noviembre, 2014).

11. Terence Tao, *La escala cósmica de distancias* (febrero, 2015).

Presentación

El concepto matemático de espacio curvo se remonta a los inicios del siglo XIX y demoró casi un siglo en hacer su aparición en la física y la astronomía. En 1816 Gauss llegó a la conclusión de que la geometría plana o euclidiana no era necesariamente la única geometría válida desde un punto de vista matemático. En cuanto a si era una geometría válida desde un punto de vista físico, la situación queda resumida en un carta de 1817 a Olbers, en la cual Gauss escribía:

> "Quizá en otra vida obtendremos una comprensión de la esencia del espacio que por ahora está más allá de nuestro alcance. Hasta ese entonces deberíamos clasificar la geometría no junto con la aritmética, que *a priori* se sustenta por sí sola, si no que, digamos, junto con la mecánica".

Durante los años 1820, como parte de su tarea de cartógrafo, Gauss realizó la triangulación de

las montañas Hohenhagen, Inselsberg y Brocken. La suma de los ángulos internos de este triángulo no sumaba 180°, como esperaríamos de nuestro curso de geometría elemental.

Durante el mismo periodo, Gauss (casi contemporáneamente con Bolyai y Lobachevsky) desarrolló la geometría no–euclidiana, en la cual la suma de los ángulos internos de un triángulo no es 180°.

En torno a estos dos episodios han surgido dos interpretaciones: ¿fue la geometría no–euclidiana la que motivó a Gauss a buscar una manifestación de la no–euclidianidad de la geometría en la triangulación de las montañas Hohenhagen, Inselsberg y Brocken?, o ¿fue el resultado de la triangulación de las montañas Hohenhagen, Inselsberg y Brocken el que inspiró e hizo necesario el desarrollo de la geometría no–euclidiana?

Los orígenes de estas interpretaciones no son claros y ambas han estado presente en la historia de la geometría. La importancia de estas interpretaciones es que permitio que tanto físicos como astrónomos estuvieran familiarizados con el concepto de espacio curvo y preparados para recibir la Relatividad General, en la cual el concepto de

espacio curvo es fundamental.

No obstante, estudios recientes muestran que, lo más probable, es que ninguna de las interpretaciones anteriores sea cierta: que la triangulación de las montañas Hohenhagen, Inselsberg y Brocken no inspiró el desarrollo de la geometría no–euclidiana, que el desarrollo de la geometía no–euclidiana no inspiró la búsqueda de una manifestación física de la no–euclidianidad de la geometría, sino que ambos son episodios históricos sin ninguna relación entre sí.

Este episodio de la historia de la ciencia es un ejemplo más de un mito que se transforma en una verdad aceptada sólo a fuerza de repetición.

En este número reproducimos el artículo *Carl F. Gauss, el "gran triángulo" y los fundamentos de la geometría* de Erhard Scholz. Este artículo fue publicado originalmente como *C. F. Gauss Präzisionsmessungen terrestrischer Dreiecke und seine Überlegungen zur empirischen Fundierung der Geometrie in den* 1820*er Jahren*, en *Form, Zahl, Ordnung. Studien zur Wissenschaftsgeschichte. Festschrift für Ivo Schneider zum 65. Geburtstag*, editado por R. Seising, M. Folkerts y U. Hashagen (Steiner, Stuttgart, 2004), páginas

355–380. Este artículo fue publicado posteriormente en la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), volumen **8.3**, páginas 683–712 en 2005, en traducción del profesor José Ferreirós, y es la versión que aquí reproducimos.

Agradecemos al Profesor Erhard Scholz por su entusiasmo al aceptar nuestra invitación, al profesor José Ferreirós Domínguez por permitirnos usar su traducción y al profesor Adolfo Quirós, Director de la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), por permitirnos reproducir este artículo.

Disfruten la lectura.

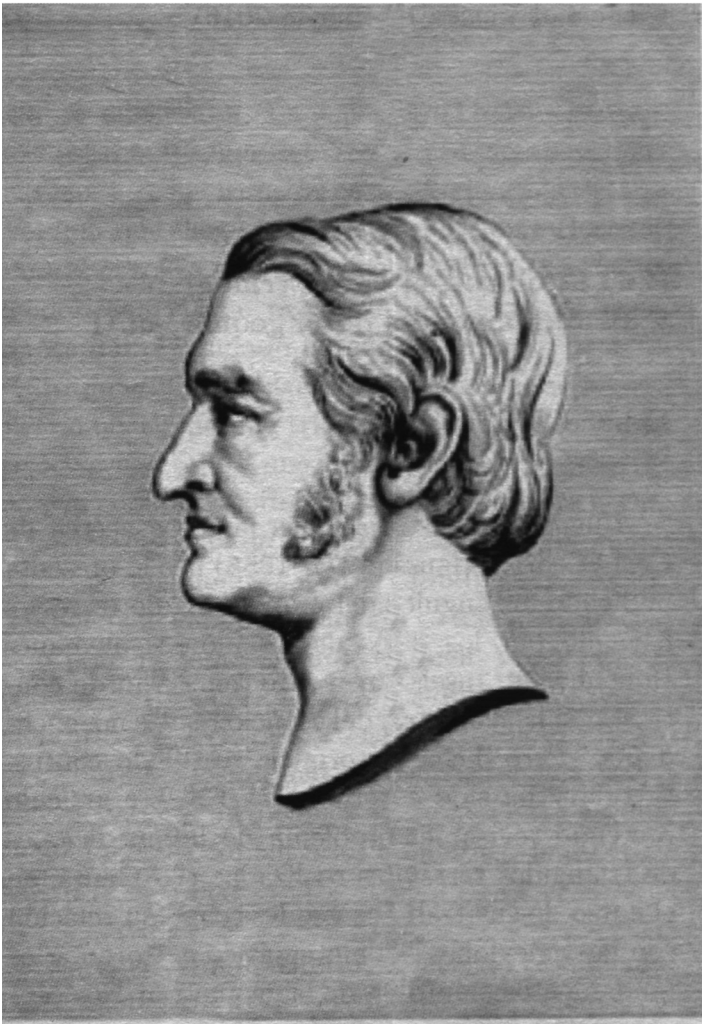
Victor Tapia

Carl F. Gauss, el "gran triángulo" y los fundamentos de la geometría. I

Erhard Scholz[1]

Una de las historias más famosas acerca de Carl Friedrich Gauss (1777–1855) nos lo presenta midiendo los ángulos del gran triángulo terrestre formado por los picos de los montes alemanes Hohenhagen, Inselsberg y Brocken, a fin de contrastar si la geometría del espacio real es no–euclidiana. Pero dicha historia ha resultado controvertida y ha sido cuestionada. En este artículo pretendo revisar el problema de las mediciones de triángulos terrestres realizadas por Gauss, en el curso de sus trabajos geodésicos, y su relación con las reflexiones del matemático en torno a los fundamentos empíricos de la geometría. Nos cen-

[1] Mathematik, Universität Wuppertal, D–42097 Wuppertal, Alemania, scholz@math.uni-wuppertal.de



CARL FRIEDRICH GAUSS

traremos de manera especial en la situación durante los años 1820, si bien habrá ocasión de indicar algunos desarrollos y repercusiones posteriores. Esto nos llevará a una discusión crítica de trabajos de diversos historiadores, y pondrá de relieve la multiplicidad de recursos a los cuales ha de acudir el historiador a fin de alcanzar la elusiva verdad.

1. Sobre la situación en la discusión historiográfica

Hasta comienzos de los años 1970, existía una comprensión bien aceptada de las implicaciones para los fundamentos (de la geometría) de dichas mediciones geodésicas. Esta visión queda bien reflejada en un artículo de H. Gericke contenido en el volumen colectivo que se editó con motivo del 200° centenario del nacimiento de Gauss (Schneider, 1981).

Gericke exponía las reflexiones de Gauss sobre el papel de la "constante característica" $C > 0$ de la geometría no–euclidiana, la cual puede caracterizarse, en el lenguaje de la geometría diferencial, por medio de la curvatura: $\kappa = -1/C^2$. La

suma de los ángulos de un triángulo se desvía del valor euclidiano en una cantidad ϵ que depende del área F, de modo que para C dada:

$$\epsilon = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = \frac{1}{C^2} F\,.$$

En este contexto, Gericke citaba una carta de Gauss a Taurinus del 8 de noviembre de 1824:

> Si la geometría no–euclidiana fuera la verdadera, y si aquella constante estuviera ligada de algún modo a las cantidades que caen en el dominio de nuestras mediciones sobre la Tierra o en el cielo, sería posible determinarla *a posteriori*. (Gauss, *Werke*, VIII, 186–188)

Gericke comentaba:

> Se podría, por ejemplo, medir la suma de los ángulos en un triángulo. Dado que el defecto [designado arriba por ε] es proporcional al área, se debe elegir un triángulo lo más grande posible. Es bien sabido que Gauss eligió el triángulo Brocken — Inselsberg — Hohenhagen, cuyo lado mayor tiene

> una longitud de aproximadamente 105 km, y el resultado fue que la diferencia de la suma angular respecto a 180° era en todo caso inferior al error de medición. Por tanto: o bien la geometría euclidiana es verdadera, o el triángulo era aún demasiado pequeño. La naturaleza, preguntada a fin de que tomara una decisión, se había negado a responder. (Gericke, 1981, 129)

Pero si esta era la situación a comienzos de la década de 1970, por la misma época algunos historiadores de la ciencia pusieron en duda la fiabilidad de las ideas recibidas. En los escritos de que disponemos, Gauss nunca se expresó de manera definitiva acerca de este asunto particular de la valoración de sus mediciones geodésicas para la estructura del espacio. La visión que hemos expuesto se basaba —aparte alguna extrapolación histórica simple a partir de otras fuentes, como la correspondencia citada— en los comentarios de un testigo directo, el amigo de Gauss, Sartorius von Waltershausen[2], que poco después de

[2] Profesor de geología y mineralogía en Göttingen, el Barón Wolfgang Sartorius von Waltershausen (1809–

su muerte refirió lo siguiente en el volumen *Gauss zum Gedächtnis* [*En memoria de Gauss*]:

> Gauss sólo consideraba la geometría [euclidiana] como un edificio consistente una vez que se concediera y pusiera en la cúspide la teoría de las paralelas como axioma: pero había llegado a la convicción de que esa proposición no puede ser demostrada, si bien conocemos por la experiencia, por ejemplo por los ángulos del triángulo Brocken, Hohenhagen, Inselsberg, que es aproximadamente correcta. Si, en cambio, no se quiere conceder el axioma mencionado, de ahí se deduce otra geometría totalmente independiente, que Gauss desarrolló ocasionalmente y que designó por el nombre de geometría antieuclidiana. (Sartorius, 1856, 81)

En otro lugar, Sartorius precisaba la vaga ex-

1876) se dio a conocer con sus trabajos sobre el Etna, sobre Islandia y sobre el período glaciar. Colaboró en los trabajos geomagnéticos que ocuparon a Gauss y Humboldt, y al año siguiente de morir Gauss publicó una interesante biografía del "primero entre los matemáticos" (*princeps mathematicorum*), que es el libro citado por Scholz. [NT]

presión "aproximadamente correcta", que tomada de forma aislada no es particularmente instructiva, comentando en relación al heliotropo, instrumento de precisión geodésico que Gauss inventó:

> El heliotropo encontró enseguida una aplicación plena en la triangulación de Hannover, y el gran triángulo que se midió, quizá el mayor que haya sido determinado, a saber, entre el monte Brocken, el Inselsberg y el Hohenhagen, fue medido con su ayuda con tal precisión, que la suma de los tres ángulos sólo se alejaba de dos ángulos rectos en aproximadamente dos décimas de segundo. (Sartorius, 1856, 53)

Esta acotación de que eran aproximadamente "dos décimas de segundo" constituye una clara referencia a una estimación precisa comunicada por Gauss en discusiones orales. Sería muy extraño suponer que el informante hubiera inventado un dato así para añadirlo a su relato. Queda sin embargo clarificar de qué tipo de estimación de errores podía tratarse en el comentario citado por Sartorius. Volveremos a ello.

En 1972, el joven historiador de la física A. I. Miller cuestionó esa exposición, hasta entonces no polémica, en un artículo publicado en la reputada revista de historia de la ciencia *Isis* (Miller, 1972). Este trabajo tuvo una repercusión contundente. En el mismo volumen donde H. Gericke había referido la "bien sabida" historia, otro trabajo de Karin Reich decía sobre la primera de las dos citas de Sartorius que hemos dado, en tono crítico:

> En la literatura secundaria se encuentran a menudo comentarios indicando que Gauss habría querido comprobar empíricamente cuál es la verdadera estructura del espacio, euclidiana o no–euclidiana. Puesto que Gauss mismo no estableció expresamente esta conexión, hace unos años esa interpretación fue puesta en entredicho, reafirmada, y de nuevo cuestionada. (Reich, 1981, 104*ss*)

Con ello estaba contradiciendo abiertamente, aunque de manera reservada, la exposición de Gericke. Sin adoptar una posición propia ante el problema, remitía en nota a la literatura que

entonces estaba disponible[3]. Como se ve, la discusión entre historiadores de la ciencia continuó, pero aparentemente con un resultado abierto. El análisis más detallado, basado en un conocimiento experto, se encuentra hoy en (Breitenberger, 1984), si bien se limita a establecer qué es "lo que Gauss hizo realmente y lo que se le puede atribuir sin discusión"[4]. Con ello se establece una imagen histórica de conjunto que podemos calificar de escéptica, y que en mi opinión es exagerada[5].

---

[3] Reich daba las siguientes referencias: (Miller, 1972) ("cuestionando"), (Goe, 1974; van der Waerden, 1974) ("reafirmando") y (Miller, 1974) ("de nuevo cuestionando"). En otra ocasión ya he aclarado brevemente por qué no comparto las dudas contra la exposición de Sartorius, o sea, en la terminología de Karin Reich, por qué considero la historia mencionada como "reafirmada de nuevo" (Scholz, 1992, 643).

[4] Comunicación personal de E. Breitenberger al autor (18 de febrero de 2003).

[5] Agradezco a Jeremy Gray el haberme hecho advertir la "situación abierta" y que con ello me haya estimulado a publicar estas consideraciones. En una serie de discusiones me aclaró por qué tenemos mejores razones para dudar que las planteadas por A. Miller en el artículo original. En una de esas conversaciones (Tel Aviv, mayo de 2001) estaba presente Ivo Schneider y se mostró tan interesado en el asunto, que el tema me pareció adecuado para un

La situación en este momento puede pues resumirse como sigue: entre los historiadores de la ciencia se tiende más bien a dudar que a aceptar la idea de que Gauss pudiera haber valorado sus mediciones de la manera que hemos indicado (Miller), o incluso a dudar la posibilidad misma de que lo hubiera hecho (Breitenberger y otros). Entre matemáticos y especialistas en ciencias naturales (sobre todo de geodesia y física) se tiende más bien a afirmarlo que a dudarlo, pero esa confianza se debe más bien a un desconocimiento de las razones aducidas para dudar.

Esto parece justificar que volvamos sobre la cuestión. Comenzaré indicando y "valorando críticamente" los argumentos originales de A. Miller, lo que en este caso significa ante todo mostrar cómo tienen poco que ver con la verdadera situación histórica (parte 2). Luego presentaré los problemas metodológicos planteados por E. Breitenberger, problemas que surgen al intentar comprobar empíricamente la euclidianidad del espacio físico mediante mediciones geodésicas, y que deben tenerse en cuenta (parte 3). Finalmente me gustaría explicar por qué en mi opinión to-

volumen en su honor.

dos los puntos problemáticos pueden considerarse como suficientemente aclarados en el marco de los métodos que Gauss tenía a su disposición, si bien ha de reconocerse que aquél no disponía de todos los prerrequisitos teóricos en forma bien desarrollada (parte 4). Mostraré que Gauss, dentro del marco de sus estimaciones de error, estaba perfectamente en posición de decidir empíricamente cuestiones sobre la estructura espacial (parte 5). Por tanto no alcanzo a ver ninguna razón convincente para dudar la fiabilidad del testimonio ofrecido por Sartorius von Waltershausen (parte 6).

2. El establecimiento de un mito

Desde una visión retrospectiva, la crítica que A. I. Miller ofreció de la historia recibida, bajo el título *The myth of Gauss' experiment on the Euclidean nature of physical space*, resulta sorprendente por lo escaso de los argumentos empleados en comparación con la considerable repercusión del artículo. La tesis central de Miller era simple:

> The famous experiment is in fact a mere le-

> gend that stems from a misunderstanding of his important paper of 1827 *Disquisitiones generales circa superficies curvas.* This work constituted the first systematic study of quadratic differential forms (of two variables) and was generalized by Riemann, in 1854, to n variables. (Miller, 1972, 346)

Miller se estaba refiriendo al párrafo 28 de (Gauss, 1828), en el que Gauss emplea el teorema de Legendre de la geometría esférica, precisado y generalizado por él, para comprobar si la no esfericidad de la figura terrestre puede tener efectos cuantitativos ya en el orden de magnitudes de los triángulos medidos por él[6] efectos cuantitativos próximos a la precisión de las mediciones y que por tanto deberían ser tenidos ya en cuenta a la hora de valorar los datos de un único triángulo geodésico.

[6] El teorema de Legendre en geometría esférica dice que un triángulo esférico de lados pequeños y por tanto exceso esférico pequeño tiene aproximadamente la misma área que el triángulo plano con lados de idéntica longitud. Gauss precisó el área dando una aproximación, y generalizó el teorema al caso de un triángulo "pequeño" sobre una superficie curva cualquiera. Véase (Dambrowski, 1978) o bien (Scholz, 1992, 639ss)

Para ello Gauss comparaba las correcciones de los ángulos que deben realizarse, para un triángulo $\triangle$ sobre la superficie de la Tierra, supuesta esférica o elipsoidal, a fin de transformarlo en un triángulo plano (euclidiano) $\triangle^*$ de lados iguales. En el caso esférico, el exceso angular del triángulo $\triangle$ sobre 180° se debe distribuir uniformemente entre los tres ángulos, en el caso no esférico se debe distribuir de manera no uniforme, dependiendo de la curvatura de la superficie (la figura terrestre) en cada vértice. Gauss establecía que en el caso de prueba, el triángulo Brocken — Hohenhagen — Inselsberg (que en lo sucesivo llamaremos por abreviar el gran triángulo o triángulo $\triangle BHI$), el exceso que él mismo había determinado de 14,85348" debía distribuirse en las porciones 4,95104", 4,95113", y 4,95131" en los vértices B, H, I, de manera que se desvía de la distribución uniforme sólo en el cuarto decimal tras la coma de un segundo angular. Por tanto, la diferencia estaba muy por debajo de la precisión en la medición, correspondiente al primer decimal tras la coma en las mejores mediciones[7].

[7] El error medio —en el sentido de la desviación estándar empírica— era $3,5''/\sqrt{n}$, para n mediciones de

Miller ofrecía una exposición adecuada de esta situación, que por lo demás nunca había sido objeto de polémicas:

> That Gauss concluded nothing about the non–Euclidean nature of physical space [en Gauss, 1828, § 28] is not surprising, because the mathematical theory which he developed in this paper was not at all concerned with non–Euclidean geometry. What Gauss was seeking was a generalization of Legendre's result to a doubly curved surface in order to determine whether the Earth's double curvature had any effect on his geodetic data. (Miller, 1972, 348)

Y proseguía:

> Thus, Gauss did not have to use his geodetic data to determine whether the space of our experience is curved. He was studying a curved surface of known curvature — the Earth. Additional proof that a misunderstanding of Gauss' 1827 paper led to the legend of his "experiment" is that of

la misma dirección (Breitenberger, 1984, 273, 279ss, 281).

> the many triangles that he surveyed and reported on, the previously mentioned triangle is the only one taken into account in the aforementioned paper. It therefore appears that what up to now has often been presented as Gauss' experiments on the nature of the space in which we live is simply a myth. (*ibid.*)

Sorprendentemente, Miller refutaba aquí un malentendido ("misunderstanding of Gauss' 1827 paper") que no había desempeñado ningún papel en la literatura informada sobre historia de la matemática antes de él. Ni Sartorius von Waltershausen, ni ninguno de los autores informados que hacían referencia a él, había establecido una conexión entre el párrafo 28 de las *Disquisitiones generales* de Gauss y sus pruebas de no–euclidianidad. Considerada con detenimiento, la medida precisa mencionada por Sartorius ("se alejaba de dos ángulos rectos en aproximadamente dos décimas de segundo") contradice dicha interpretación del párrafo 28 en casi todos los puntos: la desviación cuantitativa relevante estaba en el orden de 10^{-4} de segundo de arco en lugar de 10^{-1}, y no se hablaba aquí de una desviación

respecto a dos ángulos rectos, sino más bien de "recalcular" un triángulo plano $\triangle^*$ de suma dos ángulos rectos[8].

El argumento principal de Miller se dirigía pues únicamente contra *un malentendido introducido por él mismo en la historiografía de la matemática.* La referencia al "gran" triángulo de la que habla Miller en su "additional proof" no tiene en cuenta en absoluto la consideración obvia de que Gauss probablemente empleara dicho triángulo para consideraciones de control de diversos tipos; por algo había puesto especial cuidado en obtener una medición del gran triángulo lo más precisa posible, y lo más independiente posible del resto de su retículo (Gerardy, 1955).

Aparentemente, cuando redactó su artículo del "mito", Miller no conocía en absoluto el informe del testigo Sartorius von Waltershausen. De otro modo sería difícil entender cómo es que Sartorius no aparece mencionado ni una sola vez en todo el trabajo (Miller, 1972), y deberíamos pensar que se está confundiendo al lector intencionadamente, ya que aquél resulta ser una refe-

[8] Este argumento fue planteado ya por van der Waerden (1974) en su crítica.

rencia central y "enemigo secreto" de la refutación de Miller[9]. En lugar de tener un punto de referencia, Miller sólo disponía de un hueco interpretativo que intentó rellenar con una atrevida hipótesis sobre el origen de la historia que había elevado a "mito":

> In conclusion, a reasonable conjecture as to the origin of this myth is as follows. The question of whether the physical space is curved or not took on new meaning after Einstein's general theory of relativity (1916), which utilized Riemannian geometry. Consequently, the myth may have arisen as a result of extrapolating back from Einstein's work to Riemann's 1854 work to Gauss' 1827 paper (without reading it, of course), keeping in mind that Gauss's theorems were applied to the largest triangle in his geodetic survey. (Miller, 1972, 348)

Era un intento peculiar y más que volunta-

[9] En respuesta a sus críticos, Miller se defendía intentando devaluar a Sartorius como informante con el empleo de argumentos secundarios, y en mi opinión gastados, del tipo de que tampoco Ernst Mach se había tomado en serio a Sartorius, etc. (Miller, 1974).

rioso de reconstruir la historia de la tradición, ya que ignoraba todo el debate pre–relativista sobre la "naturaleza" del espacio a finales del siglo XIX y principios del XX. Estaría fuera de lugar tratar de "refutar" aquí esta hipótesis carente de sentido; su autor la iría abandonando en el debate subsiguiente, una vez que (¿o debería decir "en caso de que"?) hubiera sabido de la discusión pre–relativista sobre los referentes empíricos de la geometría no–euclidiana. Pero el pasaje puede ser interesante en otro sentido bien distinto, como indicador de cuál era el trasfondo sobre el que se escribió el artículo y pudo alcanzar su repercusión. Lo primero que resulta misterioso es cómo pudo suceder que un artículo tan mal informado y pobremente investigado sirviera de referencia estándar, incluso para la discusión posterior y mucho mejor fundada del asunto de Gauss y el "gran triángulo".

Resumiendo: la historia de la comprobación gaussiana de la euclidianidad del espacio físico, que tenía una base concreta en el relato de Sartorius von Waltershausen ya que este era testigo directo (y por más que no incluyera referencias a fuentes), fue transformada en un "mito" por

el artículo de A. Miller en 1972, sin discutir el informe del testigo más importante y con argumentos dudosos, añadiéndole una hipótesis obviamente falsa acerca de la génesis del "mito". Sería interesante considerar qué conjunción de factores fue la causa de que este ataque obtuviera una resonancia tan grande en la historia de la ciencia, pero este no es nuestro objetivo. Antes bien, quisiera dedicar el siguiente apartado a presentar brevemente las cuestiones metodológicas e históricas interesantes que surgieron una vez iniciado el debate y que ponían en duda la fiabilidad del informe de Sartorius. No pretendo seguir el desarrollo del debate en toda su extensión, sino que me centraré en discutir el artículo publicado por E. Breitenberger en el *Archive for History of Exact Sciences* (Breitenberger, 1984). Para abreviar, en lo sucesivo me referiré a la tesis de que Gauss nunca realizó una comprobación de la euclidianidad del espacio sobre la base de sus mediciones geodésicas de precisión, como el *mito de Miller*.

3. Dudas histórico–metodológicas avanzadas

En una contribución de 1984, muy detallada y profunda, E. Breitenberger expuso en un marco más amplio la nueva crítica al "mito" de las pruebas de euclidianidad por Gauss. Hacía también referencia a los intentos anteriores en ese sentido del astrónomo Hugo von Seeliger y el alumno de Listing[10], Edmund Hoppe (Hoppe, 1925; Kienle, 1925, 614). Lo que no mencionó es que Seeliger tenía sin duda razones propias para querer liberar a Gauss de la "mácula" de haberse ocupado concretamente (buscando las mejores determinaciones cuantitativas de error posibles) de las condiciones de validez empírica de la hipótesis euclidiana. Y es que, en el debate de finales del siglo XIX sobre la geometría no–euclidiana, See-

[10] Johann B. Listing (1808–1882) fue un discípulo de Gauss —y también amigo íntimo de Sartorius— que tras su tesis sobre superficies de segundo orden se convirtió en profesor de física. Es conocido por sus contribuciones geométricas, y fue él quien acuño el término "topología" en 1847 (la terminología científica se le daba bien: según Breitenberger, a él se deben otros términos como "fenómeno entrópico", "punto nodal", "luz homocéntrica", "geoide" o "micra"). [NT]

liger adoptó la posición de que ésta no era siquiera utilizable como teoría geométrica de base para la astronomía. Así que Seeliger tenía en cuenta sus propias convicciones al interpretar a Gauss[11]. En cuanto a Hoppe, era de la opinión de que Gauss intentó determinar los límites de validez empírica de la geometría euclidiana, no a partir de mediciones geodésicas, sino astronómicas —y citaba información ofrecida por Listing en los años 1870—. Volveré a esto en el último apartado.

En su artículo, Breitenberger sigue los meandros del discurrir de la literatura previa sobre el tema, con todas sus contradicciones. Su contribución apoya a los críticos, desde Seeliger hasta Miller, con argumentos que él considera como evidencia interna de que, por razones metodológicas, Gauss no hubiera podido desarrollar una contras-

[11] Breitenberger cita el rechazo de la "mácula" por Seeliger en (1984, 274), pero no lo pone en contexto. Una de las tesis que tuvo que defender K. Schwarzschild en su habilitación (Munich, 1899, bajo la dirección de Seeliger) es precisamente la idea de que la geometría no–euclidiana carece de significado para la astronomía. En su artículo (Schwarzschild, 1900) esto le dio pie a una discusión sumamente matizada del problema; *cf.* (Schlemmel, 2002).

tación empírica de la estructura euclidiana del espacio basada en sus mediciones geodésicas. Pero Breitenberger conoce demasiado bien los testimonios originales como para ignorarlos, al estilo de la variante más simple del mito de Miller, o para devaluar el testimonio de Sartorius como indigno de crédito al carecer de conocimientos matemáticos. Así alcanza la siguiente conclusión, apoyada por buena evidencia:

> $\cdots$ it is safe to conclude that Gauss was sufficiently irked by the axiom of parallels, to bring it up in conversations repeatedly, and in different forms, sometimes quoting BHI [el gran triángulo] sometimes not.
>
> Thus the myth of the BHI triangle as a deliberate test of Euclidean geometry appears as a fanciful embroidery upon indubitable facts, encouraged possibly by reports of remarks made by Gauss in his inner circle. (Breitenberger, 1984, 289)

Breitenberger llega pues a la sorprendente conclusión de que Gauss habló en su círculo de allegados acerca de contrastaciones empíricas de la validez de la geometría euclidiana que él mismo

no podría haber llevado a cabo. Pero combina este análisis con una defensa del informe de Sartorius, incluyendo los datos cuantitativos que allí se ofrecen:

> It also stands to reason that Sartorius could hardly have misunderstood the sense of Gauss' remarks, for although he was no mathematician, he was thoroughly familiar with surveying and had produced detailed maps of the Etna volcano, among others. What he recalls [un margen de precisión de "dos décimas de segundo" para la suma angular en el gran triángulo] is indeed quite consistent with the evidence above. (Breitenberger, 1984, 289)

La "evidence above" consistía en los datos de Gauss, sobre la base de los cuales —como ya había sugerido van der Waerden (1974)— Breitenberger calculó una desviación de la suma angular del triángulo $\triangle BHI$, traducida a un triángulo plano, de 0,642" (*op. cit.*, 284*ss*). Las mediciones gaussianas conducían a una suma angular "medida" para el gran triángulo de 180°0'14,211" sobre la esfera. El valor indicado antes se obtiene recalculando esa cantidad para un triángulo

plano de lados idénticos, por "eliminación del exceso esférico". Breitenberger lo comentaba así:

> The spherical excess of BHI is stated by Gauss himself to have been 14.85348"; hence the closure error was -0.642". He might have called this fine result vortrefflich [excelente] and it astonishes us a little that he did not make more of it. (Breitenberger, 1984, 285)

El valor calculado de 0,6" coincide en orden de magnitud con el valor dado por Sartorius; ninguno de los autores que hemos mencionado ve en la ligera discrepancia de "dos" en vez de seis décimas un motivo para desautorizar a esa fuente, y el propio Breitenberger habla de que ambos valores son "quite consistent". Gauss mismo mencionó el valor de 0,6" en su correspondencia con Olbers, carta del 28 de diciembre de 1823 (Gauss–Olbers, **II**, 266)[12].

[12] Sería natural suponer que, al recordar el asunto, Sartorius confundió la desviación de la suma angular para el triángulo completo (0,6") con la desviación para un solo ángulo (0,2"). Desde el punto de vista de Gauss, calcular el error para un único ángulo tenía sentido: véase la nota

Sin embargo, Breitenberger no ve en esto ningún apoyo para Sartorius en tanto exposición del contenido conceptual de los comentarios de Gauss. Pues él interpreta los datos precisos de Gauss sólo en el sentido meramente pragmático de establecer un error de cierre en la medición de un triángulo geodésico, calculado dentro del marco de la geometría de Euclides. En apoyo de esta interpretación remite a la práctica usual de los especialistas en geodesia (antes, después, y en tiempos de Gauss), en la que era habitual asegurarse de la calidad de las mediciones por medio de sumas angulares que se comparaban con la suma esperada (de $180° = \pi$ en el caso plano, $\pi + F/R^2$ en el caso esférico para superficie del triángulo F y radio terrestre R). Más aun, su artículo niega de raíz la misma posibilidad de que Gauss hubiera podido considerar los datos también como una medida precisa para la validez empírica de la geometría de Euclides. Así es como Breitenberger nos ofrece una variante del mito de Miller refinada mediante consideraciones matemático–

[14] de la segunda parte [Ciencia al Viento **13** (agosto, 2015)]. Agradezco a Breitenberger la referencia a la carta del 28 de diciembre de 1823 a Olbers.

metodológicas, y se conforma con sorprenderse de que Gauss "no hubiera hecho más" de sus datos precisos. Y es que la precisión de dichas mediciones no se superó de manera considerable hasta los años 1960 con la introducción de los métodos de medición láser[13].

Breitenberger apoya su argumentación en la "evidencia interna" de que Gauss siempre presuponía la geometría euclidiana del espacio marco en todos sus trabajos de geodesia, e incluso en sus investigaciones publicadas sobre geometría diferencial (donde estudió la geometría diferencial de superficies como "fundamento del fundamento" de la geodesia). Como es natural, esto plantea-

[13] Para una comparativa de los datos de Gauss con la precisión obtenida posteriormente empleando teodolitos, hasta 1960, véanse las indicaciones de Breitenberger (1984, notas 35, 36, 42, 50, 52). Resulta interesante el comentario citado en esa última nota, de un manual de geodesia a principios de la década de 1970: "$\cdots$ angles measured by $\cdots$ theodolites between 1800 and 1950 are not necessarily inferior to those measured by modern instruments $\cdots$ the long time required to complete observations $\cdots$ probably resulted in better elimination of refraction errors than modern observers have time for" (G. Bomford, *Geodesy*, 3a edición, Oxford, 1971, 18; citado en (Breitenberger, 1984, 280)).

ba problemas fundamentales para cualquier intento de contrastación empírica de la validez de la geometría de Euclides, o incluso para una estimación de los márgenes de error. De hecho, sólo Riemann creó, en su lección de 1854, el marco conceptual para una geometría generalizada que permitiera clarificar sistemáticamente tales cuestiones (Breitenberger, 1984, 285). Ahora bien, sabemos que esto no le impidió a Gauss investigar relaciones fundamentales de la geometría no–euclidiana, sin haber clarificado previamente todo el marco teórico necesario[14].

El elemento metódico central para Gauss era la relación entre la constante característica C, la curvatura κ de una superficie gaussiana (definida extrínsicamente, determinable intrínsecamente), y la suma angular del triángulo en el caso de curvatura constante:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \kappa F \,, \tag{1}$$

así como que $\kappa = -1/C^2$ en el caso de la geome-

[14] Sobre las contribuciones de Gauss en relación con la geometría no–euclidiana, consúltese especialmente (Reichardt, 1976) o (Stäckel, 1918): en castellano puede verse (Gray, 1992) y la introducción a (Riemann, 2000, xcii–ci).

tría no–euclidiana. La ecuación (1) era —y es— una especialización del *Teorema elegantissimum* de Gauss, es decir, de la parte originaria suya del teorema que luego se llamaría de Gauss–Bonnet, para el caso de curvatura constante y triángulos geodésicos. Tiene poco sentido suponer que Gauss habría dudado en considerar válidas *heurísticamente* estas relaciones también para la geometría no–euclidiana tridimensional, por más que no haya elaborado una fundamentación sistemática, la cual debía ofrecer las dificultades ya conocidas en ausencia de la generalización riemanniana. Sus reflexiones sobre los fundamentos de la geometría le habían conducido ya a la misma relación para la suma angular (si bien, claro, con la famosa "constante" C). En este sentido, el comentario en la carta a Taurinus citada al principio, sobre la posibilidad de contrastar la geometría mediante "mediciones sobre la Tierra o en el cielo" (y otros comentarios similares), hablan un lenguaje bien claro.

En mi opinión, Breitenberger no tiene en cuenta suficientemente esta constelación heurística cuando, de la consideración correcta (y bien conocida) de que sólo Riemann introdujo en for-

ma desarrollada la noción de un espacio curvo tridimensional (p. 285), deduce la afirmación apodíctica:

> Gauss was not alluding to a test of (three–dimensional) geometry; as stressed above, he did not and he indeed could not, envisage one. He wrote in ignorance of any tangible application of hyperbolic trigonometry to some surface or object. Not only did he not possess a model in the modern sense from which he might have deduced self–consistency; he did not even possess any realization which would have made the subject accessible to geometric intuition. (Breitenberger, 1984, 287)

Por supuesto que Gauss no conocía ninguna "geometría hiperbólica" en la década de 1820, etc. Y sin embargo afirmo que, con sus conceptos de línea geodésica, de superficie determinada intrínsecamente mediante métrica y curvatura, y de la suma angular en el caso de curvatura constante, Gauss estaba en posesión de elementos conceptuales y metodológicos decisivos. Estos elementos hacían posible que considerara bien fundadas heurísticamente las mediciones precisas

"sobre la Tierra o en el cielo" para valorar la naturaleza del espacio físico. Esto incluía la posibilidad de establecer márgenes de error precisos para la geometría de Euclides. No es pues ninguna exageración interpretar un tal margen de error como la versión informal de la evaluación de un límite superior para el valor de la curvatura del espacio, compatible con los resultados medidos. En este sentido, considero falso el decir que "ni siquiera poseía un modelo concreto [realization] que hubiera podido hacer el asunto accesible a la intuición"[15].

Lo que me gustaría hacer a continuación es dividir la duda expresada de manera tan apodíctica por Breitenberger en una serie de problemas, que se deben aclarar para decidir si las mediciones precisas del triángulo $\triangle BHI$ pueden ser consideradas heurísticamente (en el marco de la metodología gaussiana; exactamente en el marco de la ampliación riemanniana) como márgenes de pre-

[15] Por supuesto, esto depende de lo que se entienda por "intuición geométrica", etc., y se podrían establecer precisiones al respecto que cabe demostrar van más allá de lo que estaba a disposición de Gauss; históricamente, sin embargo, esto no resulta clarificador, por lo que considero inútil una discusión en este plano.

cisión para la validez empírica de la geometría de Euclides. Jeremy Gray, con sus tenaces preguntas, ha llamado mi atención hacia la mayoría de las cuestiones que se deben aclarar. Este trabajo debe mucho a mis discusiones con él, o mejor dicho, sin dichas discusiones no habría sido escrito[16].

Para facilitar la comprensión, en la parte 4 discutiré los problemas fundamentales que deben tenerse en cuenta a la hora de determinar la curvatura del espacio mediante mediciones "sobre la Tierra", sin someterme a la restricción de las teorías matemáticas que estaban a disposición de Gauss. En la sección siguiente (parte 5) pasaremos a discutir el asunto desde el punto de vista de Gauss en los años 1820. Pido a los lectores que, en lo relativo a la validez empírica de la geometría de Euclides, sólo tengan en cuenta lo que era conocimiento seguro a comienzos del siglo

[16] También debo dar gracias a P. Strantzalos y M. Lambrou, a quienes J. Gray y yo debemos la posibilidad de haber discutido con detalle nuestras visiones, entonces divergentes, en una atmósfera estimulante y amistosa, durante un Workshop sobre historia y didáctica de las matemáticas celebrado en la Universidad de Creta, Heraklion, en abril de 2002.

Arriba: La cima del monte Brocken, que es la más famosa de las montañas del Harz, tal como se veía a finales del siglo XIX. Y a la derecha: Vista de la Torre Gauss (Gaussturm) que se erigió en la cima del monte Hohenhagen, donde Gauss en persona realizó tareas de medición geodésica para el "gran triángulo". La torre de 35 m fue erigida en 1908, pero tuvo que ser demolida en 1963.

XIX. En aquel tiempo, las mediciones de paralaje se difuminaban todavía en la "suciedad" de los efectos de medición. Los triángulos geodésicos más grandes que se habían medido tenían lados del orden de varias decenas de km, las desviaciones estándar para las mediciones direccionales en la triangulación de los Países Bajos del Baron von Krayenhoff, que le servía de referencia a Gauss, eran de unos 2,7"[17]. El área en uno de los triángulos mayores de este retículo era de unos 300 km^2 con lo que el exceso angular esférico era de 1,5", y por tanto inferior al "error medio" (desviación estándar) para una medición direccional. Incluso el exceso esférico de un único triángulo (medido directamente) se hundía profundamente en el dominio de los errores de medición.

Desde el punto de vista de nuestra historia se puede describir adecuadamente la precisión que se había alcanzado diciendo lo siguiente. Si alguien antes de Gauss hubiera tenido la idea de evaluar

[17] Según cálculos de Gauss basados en los datos que conocía; *cf.* (Breitenberger, 1984, 281), donde se habla por error de la determinación de un grado en Dinamarca, la cual estaba en todo caso bajo la dirección de H. C. Schumacher.

una supuesta curvatura del espacio, esto habría requerido (al menos implícitamente) suponer que la curvatura espacial *supera notablemente* a la curvatura de la superficie terrestre (!); pues de otro modo, dada la precisión en las mediciones alcanzada hasta entonces, no se había podido observar ningún efecto en las mediciones de sumas angulares. Esto debe bastar para hacer bien claro de qué se trataba cuando —como fue el caso de Gauss— se pretendía llevar adelante un empirismo consecuente respecto a la estructura métrica del espacio, a principios del siglo XIX. Al hacerlo no se podía excluir[18] que la constante supuesta estuviera "ligada de algún modo a las cantidades que caen en el dominio de nuestras mediciones sobre la Tierra". Pero ¿de qué otra manera sino empíricamente se podía —sin presuponer la validez *a priori* de la geometría de Euclides— asegurar que al elevar la precisión de las mediciones no aparecerían, junto con los efectos de la curvatura terrestre, otras alteraciones que podrían tener su origen en la curvatura del espacio?

[18] Obviamente decir esto es bien distinto de suponer (en tono positivo) que se da el estado de cosas correspondiente.

colección

CIENCIA
AL VIENTO