



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA CONSTRUIR TESELADOS CON ESTUDIANTES DE 6 Y
7 USANDO EL TEOREMA DE NAPOLEÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS DE
TRANSFORMACIONES

YOLANDA RODRIGUEZ RIOS

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Ciencias Básicas
Bogotá, Colombia
2011

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA CONSTRUIR TESELADOS CON ESTUDIANTES DE 6 Y
7 USANDO EL TEOREMA DE NAPOLEÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS DE
TRANSFORMACIONES
YOLANDA RODRIGUEZ RIOS

Proyecto de Profundización presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las ciencias Exactas y Naturales

Director

Ph.D. Humberto Sarria Zapata

Codirectora:

Ph.D. Myriam Margarita Caicedo

Línea de Investigación:

Enseñanza de la Geometría

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Ciencias Básicas

Bogotá, Colombia

2011

A mis hijos y a mi madre, por su comprensión.
A la Universidad Nacional, por permitirme ser estudiante de la institución.

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento especial al profesor **Humerto Sarria Zapata** y a la profesora **Myriam Margarita Acevedo**, quienes me brindaron su apoyo incondicional, su conocimiento tanto en la especialidad como en pedagogía y su gran calidad humana.

Índice general

Introducción	ix
1. Reseña Histórica	1
1.1. Introducción	1
1.2. Napoleón Bonaparte y la Ciencia	1
1.3. Surgimiento y evolución de la geometría	3
2. El teorema de Napoleón	11
2.1. Introducción	11
2.2. Primera Demostración: Utilizando circunferencias circunscritas	12
2.3. Segunda Demostración: usando propiedades de los triángulos	16
2.4. Tercera Demostración: Usando el Teorema del Coseno	18
2.5. Cuarta Demostración: Usando Rotaciones	23
2.6. Quinta Demostración: usando el Algebra Lineal	25
2.6.1. Cálculo de las distancias	28
3. Referentes en los Estándares y Modelos Pedagógicos.	31
3.1. Introducción	31
3.2. Referentes en los Estándares Básicos e Investigaciones	32
3.2.1. Descripción del contexto y Marco referencial	35
3.2.2. Aprendizaje Significativo	36
3.2.3. La Didáctica de la Geometría y los Niveles de Van Hiele	37
3.2.4. Modificabilidad Estructural Cognitiva	41
4. Propuesta Didáctica	43
4.1. Introducción	43
4.2. La propuesta de trabajo.	43
4.2.1. Objetivo	43
4.2.2. Estructura de los Talleres	44
4.2.3. Metodología	44

4.2.4. Trabajo del docente	45
4.2.5. Resultados	45
5. Anexos	47
5.1. Introducción	47
5.2. Taller N°1	47
5.3. Taller N°2	50
5.4. Taller N° 3	53
5.5. Taller N° 4	55
5.6. Taller N° 5	58
5.7. Taller N° 6	61
5.8. Taller N° 7	63
5.9. Taller N° 8	65

Introducción

Este trabajo, es una propuesta pedagógica que pretende acercar a los estudiantes a los conceptos involucrados en los movimientos rígidos del plano: traslaciones, rotaciones y reflexiones.

La propuesta pretende ser un aporte, que busca disminuir la problemática presentada actualmente en las instituciones del país, siendo esta situación, un reflejo de lo que sucede en muchos otros. El olvido de la geometría en los currículos de matemáticas[11]. Las consecuencias de este olvido, se observan cuando los estudiantes deben realizar reconocimientos básicos en el área. Carecen de conceptos claros, falta rigurosidad en sus explicaciones y no manejan el vocabulario adecuado. Aspectos que se evidencian en los análisis de las pruebas tanto nacionales como internacionales, en las que ellos participan.

Ahora bien, refiriéndose a las temáticas específicas del área de geometría, es importante reconocer que estas no se pueden reducir solamente al estudio de algunas figuras planas y volumétricas. Existen otros conceptos que van a servir de andamiaje para los futuros conocimientos que deben construir los estudiantes, en las diferentes ramas de la matemática. Dentro de estas temáticas, se encuentra "Los movimientos rígidos del plano", propuesta desde los Estándares Básicos para el Área de Matemáticas[9], para que sean estudiados por los estudiantes de los grados sexto y séptimo, Ciclo Tres, en la Educación de Adultos, ellos, ofrecen la posibilidad de brindar estrategias a los estudiantes para llevarlos a desarrollar el pensamiento espacial en busca de una mejor comprensión de las situaciones que hacen parte del mundo en el cual se desenvuelven. Esto lleva al problema planteado: **¿Cómo llevar al estudiante de grado sexto y séptimo a inferir el resultado de aplicar una serie de movimientos rígidos (rotación, traslación, reflexión) a una figura**

geométrica? y como una posible respuesta se desarrolla una propuesta didáctica, para estudiar los movimientos de traslación, rotación y reflexión, desde lo cotidiano, para luego acercarlos a un primer nivel de conocimientos geométricos.

Este proyecto está desarrollado en cinco capítulos. El primer capítulo, está dividido en dos partes. La primera parte, hace un recorrido rápido en la vida de Napoleón Bonaparte, las diferentes posiciones que tienen los historiadores, en relación con su actividad y los aportes que el estratega hizo a la ciencia. La segunda parte es un resumen histórico de la geometría; se revisan los aportes hechos por diferentes pensadores y estudiosos de la geometría: el proceso de estructuración, la aparición de nuevas geometrías, la clasificación de casi todas las geometrías conocidas hasta el siglo XIX, mediante la Teoría de Grupos, las nuevas propuestas que muestran la posibilidad de desarrollar geometrías de n dimensiones y la aplicación de estos conocimientos a las actividades de esta época, conocida como la era del conocimiento.

En el segundo capítulo, se realizan cinco demostraciones del Teorema de Napoleón. En las pruebas, se utiliza como apoyo la semejanza de triángulos, las circunferencias circunscritas, el Algebra Lineal, la Trigonometría y los Movimientos rígidos del plano. Se presentan gráficas para dar claridad a los pasos realizados en cada demostración.

El tercer capítulo, se conforma de cinco partes, en la primera se revisan los parámetros existentes en el país, en relación con la estructura que tiene el área de matemáticas. Para ello, se han tenido en cuenta pruebas e investigaciones nacionales e internacionales, que muestran las dificultades encontradas en el proceso de enseñanza y el aprendizaje de la matemática y las propuestas de grupos interinstitucionales especializados en el tema.

Con base en lo anterior, el Ministerio de Educación Nacional[9] ha organizado, por intermedio de un grupo interdisciplinario, el aprendizaje de la matemática en cinco pensamientos, buscando un desarrollo gradual y lógico. Este grupo propone estrategias pedagógicas para tratar de superar la práctica tradicional en su enseñanza.

La segunda parte, presenta una descripción social, económica y cultural de la población a la cual va dirigida la propuesta didáctica planeada en este proyecto.

La tercera sección, habla acerca de la Teoría del Aprendizaje Significativo, constructo pedagógico que fundamenta gran parte del trabajo que hoy en día se desarrolla en las aulas, en la mayoría de las instituciones educativas, así como en el colegio La Estancia San Isidro Labrador, Jornada Nocturna. Aquí, se destacan los elementos que favorecen un aprendizaje significativo, dentro de los cuales se encuentran los materiales educativos, que deben estar pensados y elaborados rigurosamente para tal fin.

Un cuarto apartado, habla de la Teoría de Van Hiele[21], en donde se propone un método de aprendizaje de la Geometría, por niveles, para lograr un proceso adecuado en esta área, organizados en grados de complejidad, etapas en donde se deben adquirir unas bases conceptuales, un vocabulario y unas habilidades de manera progresiva. Bajo estos parámetros se diseñaron una serie de talleres que se encuentran en <http://tmp.colegiocundinamarca.edu.co>, para los estudiantes, que se enmarcan bajo esta propuesta.

Finalmente, se encuentra una teoría fundamentada en el cognitivismo y que proviene de la psicología clínica, la cual, brinda algunos elementos para trabajar en pedagogía con personas que tienen dificultades de aprendizaje, no necesariamente por disminución cognitiva, sino surgidas como consecuencia de experiencias negativas en sus historias de vida, generando bloqueos mentales. La Modificabilidad Estructural Cognitiva, no tiene como eje principal los conocimientos, sino la superación de este tipo de bloqueos, mediante un trabajo dirigido por parte del docente (mediación), que se debe planear con la intención en lo posible, de llegar a la raíz del trauma y dotar de herramientas al estudiante para que trate de superarlos.

El cuarto capítulo, aborda la propuesta didáctica. Se estructura en ocho talleres. El primer taller, está planteado para revisar conocimientos básicos en el estudiante. De ahí en adelante, los talleres dos tres y cuatro, pretenden brindar estrategias conceptuales, paso a paso, recorriendo inicialmente y por separado, cada uno de los movimientos rígidos del plano propuestos en la pregunta orientadora del proyecto: traslación, rotación y reflexión. Los talleres cinco, seis y siete, son una combinación de dos de los movimientos estudiados y por último, el taller número ocho, que aborda los tres movimientos estudiados, como práctica que permita interiorizar el acercamiento a los conceptos trabajados.

En el quinto capítulo se anexan ocho talleres, base fundamental de la propuesta didáctica.

Resumen

El proyecto de profundización se desarrollará a partir del Teorema de Napoleón. Plantea una propuesta didáctica para estudiar los movimientos rígidos del plano: traslación, rotación y reflexión, con estudiantes del Ciclo Tres (grado sexto y séptimo) de la Educación de Adultos.

La propuesta consta de ocho talleres, uno de diagnóstico, tres de conceptualización, otros tres, son una combinación de dos de los movimientos estudiados y el último combina los tres movimientos.

Palabras Clave

Teorema de Napoleón, Movimientos rígidos del plano, traslación, rotación, reflexión, propuesta didáctica.

Abstract

This project is developed from the Napoleon's theorem. It plans a didactic work for studying rigid motions of the plane: translation, rotation, reflection, addressed to students of cycle 3 (grade 6° and 7°) of adult education.

The plan is conformed by eight workshops. The first one is for diagnosis, three of them are of conceptualization, three are a mixture of two rigid motions studied and the last one is mixture of the three rigid movements study in the project.

Keywords

Napoleon's theorem, rigid motions of the plane, translation, rotation, reflection, didactic proposal

Capítulo 1

Reseña Histórica

1.1. Introducción

El hombre a través de la historia, ha conocido y estudiado el mundo en el cual se encuentra inmerso. La necesidad de solucionar sus problemas ha sido la clave para producir conocimiento. Las herramientas que utilizó en un principio (entre ellas la geometría) han ido evolucionando de forma continua, gracias a culturas como la Egipcia y la Babilónica que desarrollaron la geometría desde un enfoque puramente práctico y a grandes matemáticos como Thales de Mileto, Pitágoras, Euclides, Arquímedes, Pappus, Descartes, Riemann, Lobachevski, Bolyai, Klein, entre otros, que han hecho nuevos planteamientos en relación con los grandes interrogantes del hombre, acercándose cada vez a respuestas mejor soportadas desde el punto de vista científico.

Teorías que evolucionan, que cambian, que dan giros sorprendentes en relación con las concepciones y las miradas hechas hasta el momento, propician el surgimiento de otras ramas del saber, con diferentes direcciones, pero con la misma base.

Es así como a partir de la geometría y de la evolución y profundización de estos conocimientos, se proponen otras formas de ver, estudiar y entender el mundo.

1.2. Napoleón Bonaparte y la Ciencia

Napoleón Bonaparte, fue hijo de Charles Bonaparte y María Letizia Ramolino. Nació en Ajaccio (Córcega, isla de la República de Francia) y murió el 5 de

Mayo de 1821, en la isla de Santa Elena, a los 51 años de edad.

Considerado como un genio militar por los logros alcanzados en sus incursiones y como dictador tiránico por las guerras que causaron la muerte de millones de personas. Napoleón Bonaparte también llega a ser el emperador de los franceses. Además de sus incursiones en la guerra y en la política, los historiadores coinciden en afirmar que se relacionó con la ciencia. Sin embargo, la forma como se vincula a ella, los divide en dos grupos de pensamiento opuesto.

El primero sostiene que la relación entre Napoleón y la ciencia se observa desde que comienza la actividad escolar, donde se distingue por las habilidades que desarrolla en el estudio y comprensión de la matemática y la historia; desde ese entonces muestra el gusto por la geometría, adquiere destrezas que aplica en su vida profesional y lo llevan a tener éxito como militar. En lo relacionado con sus aportes a la ciencia, este grupo de historiadores, sustentan que en los pocos momentos libres como estratega, Napoleón estudiaba y proponía situaciones geométricas, que luego analizaba en compañía de estudiosos matemáticos. También afirman que impulsó el desarrollo de la ciencia en su país para estar en el mismo nivel de los italianos y que fue el primero en pensar en la posibilidad de construir un canal que uniera el Mar Rojo con el Mediterráneo, hoy conocido como el Canal de Suez.

Es considerado el padre de la Egiptología, porque en la incursión a ése país, llevaba además de las tropas, una comisión de ciencias y artes, con el objetivo de realizar un estudio de la civilización que se había desarrollado allí. Divididos en dos equipos de especialistas, uno se encargaría de trazar la topografía del valle del río Nilo y el otro, de estudiar las inscripciones murales. Se cita que dentro de los hallazgos hechos por los investigadores, está la piedra Roseta, importante por las inscripciones que se encontraron en su superficie y que condujeron a los científicos a interpretar los jeroglíficos egipcios.

El segundo grupo de investigadores, afirma que Napoleón nunca fue aceptado en los círculos académicos inclusive de Francia y que esta unión con la ciencia se debía a intereses creados entre los estudiosos de la matemática, la astronomía y la geometría, quienes ofrecían dedicatorias a Napoleón en los diferentes libros que publicaban. Manifiestan que todo se relacionaba con los estímulos y honores que recibían del también Emperador de Francia, como Laplace (matemático y astrónomo francés), a

quien, Napoleón le otorgó el título de Marqués y Lagrange (matemático francés de origen italiano), que fue nombrado Senador y Contador, luego elevado al rango de Conde por Bonaparte.

Sea cual fuere la realidad sobre su conexión con las ciencias, en ambas posturas se alcanza a ver de una u otra forma el apoyo que Napoleón brindó a la ciencia y a su avance, dejando para la posteridad entre varias propuestas, un Teorema que lleva su nombre y que hoy, después de más de dos siglos, los docentes pueden aprovechar para utilizarlo como un medio y como un fin en el aprendizaje de algunos conceptos geométricos.

1.3. Surgimiento y evolución de la geometría

Según el diccionario de la Real Academia de la Lengua, la palabra geometría viene del latín *geometria* y este del griego *γεωμετρία*, *geo* tierra y *metría* medida, está relacionada con el estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio.

La geometría aparece con la humanidad, con una serie de planteamientos que responden a las necesidades que presentaban las antiguas civilizaciones, relacionadas con la medición de tierras, el cobro de impuestos, la elaboración de cerámicas, entre otras actividades. Se desarrolla casi al mismo tiempo en las diferentes civilizaciones y no es independiente de la matemática.

Egipto es la más grande de las civilizaciones antiguas, floreció alrededor del río Nilo, entre el 3150 a.c. y el 31 a.c. Se conoce por documentos hallados, que emplearon la geometría para recalcular las dimensiones de los terrenos que eran anegados por el río, de igual forma para conocer el pago de los impuestos que, al parecer, se hacía de forma proporcional al terreno no afectado, también para cálculo de áreas de triángulos, cuadrados, trapezoides; desarrollaron algunos mecanismos a manera de fórmula para calcular el área del círculo, así como para realizar cálculos de triángulos pitagóricos, además calculaban volúmenes de pirámides, cubos y otras figuras. Se considera que fueron menos adelantados que los babilónicos, sin embargo esta afirmación se debe a la falta de evidencias históricas, solo se necesita conocer la precisión bajo la cual se construyeron las pirámides para dudar de ella.

Para los babilonios (1900- 1600 a.c), el estudio de la geometría no era independiente de otros conocimientos. Conocían la forma de calcular las áreas de rectángulos, triángulos rectángulos, isósceles y de los trapecios, de igual forma se observa que los cálculos están referidos a la solución de problemas cotidianos. Las pruebas que realizaban era por ensayo y error, basados en la experiencia. No hay evidencia que existiera una estructura lógica, no existían las demostraciones ni las justificaciones.

Al igual que los egipcios, los babilonios desarrollaron fórmulas empíricas, para la realización de los cálculos, éstas eran consideradas más como recetas, pues difieren en la estructura con relación a las fórmulas usadas actualmente. En lo que toca con el uso de las ternas pitagóricas, estas civilizaciones las usaron mil años antes del nacimiento de Pitágoras.

En la India, durante el periodo Védico (1000 a.c.) la religión y la cultura se fortalece en textos sagrados, se conocen tres versiones de estos textos, y en dos de ellos se encuentra citado de diferentes formas el teorema de Pitágoras. El más antiguo (800 al 600 a.c.) se conoce como *Baudhayana*, en él está escrito: “La cuerda que se estira a través de la diagonal de un cuadrado produce un área que dobla la del cuadrado original” [5] . El otro libro se conoce como *Katyayana* y en relación con el teorema dice: “la cuerda de la diagonal de un rectángulo representa un área como la que los lados vertical y horizontal representan juntos” [5]

En China se conoce el texto Zhoubi Suanjin identificado como el más antiguo libro de matemática chino, escrito entre el 500 y el 200 a.c., cuyo original parece que fue escrito cerca al año 1000 a.C. El documento presenta un diálogo entre un duque y un noble. Allí los dos personajes tiene una serie de discusiones sobre las propiedades de los triángulos rectángulos, también mencionan el teorema de Pitágoras, conocido por esta cultura como *Gougu*, para ellos este teorema fue fundamental, porque a partir de él, establecieron cálculos para hallar la raíz cuadrada y algunas soluciones para las ecuaciones de segundo grado.

Los griegos establecidos entre el mar Jónico y el Egeo, demostraron siempre un gran deseo de adquirir el conocimiento de las civilizaciones cercanas para apropiarlo e impulsar su desarrollo. Actualmente Grecia es considerada la cuna del conocimiento occidental.

Thales de Mileto, matemático griego (624 – 548 a.C), es reconocido en la historia por realizar las primeras demostraciones geométricas..

Pitágoras de Samos (582-507 a.c.), filósofo y matemático griego, reconocido en la historia por su pensamiento soportado en que: los números naturales son la fuente del conocimiento, funda una secta basándose en esta filosofía. De allí surgen gracias a maestros y estudiantes grandes avances en esta ciencia, que son atribuidos a él.

En Atenas capital de Grecia, Platón (ca. 428 a. C./427 a. C. – 347 a. C.) funda la Academia y Aristóteles (384 a. C. – 322 a. C.), el Liceo, tomando el liderazgo en la enseñanza y la investigación matemática, es por esto que en el siglo IV, el centro del mundo intelectual mediterráneo es esta ciudad.

Euclides (330 a.C. - 275 a.C.) aparece en la historia, como el genio que se encarga de axiomatizar y estructurar, todo el conocimiento alcanzado hasta el momento en geometría.

Logra la organización de estos conocimientos, partiendo de postulados que no necesitan demostración, porque desde la intuición se perciben como claros. Reúne gran cantidad de conocimiento adquirido por la humanidad en relación con la geometría en un libro conocido como *Los Elementos*, allí “ofrece un tratamiento definitivo de la geometría de dos dimensiones (el plano) y tres dimensiones (el espacio)” [4]pág. 30, donde se aprecia el método axiomático –deductivo. En este libro, plantea los cinco postulados que soportan su trabajo. Sin embargo, el quinto muestra dificultades para ser entendido desde la intuición, genera grandes controversias y el continuo deseo de muchos matemáticos para poder demostrarlo o refutarlo, estos esfuerzos dan origen a otros tipos de Geometría.

Arquímedes (Siracusa, actual Italia, h. 287 a.C.-id., 212 a.C) hace también sus aportes al mundo del conocimiento geométrico, en su obra “Círculos, esferas y cilindros”, en donde realiza un cálculo aproximado del número π .

Apolonio (c. 262 - 190 a. C.), también llamado “*El gran geómetra*” es conocido por el trabajo realizado sobre cónicas. Le da el nombre a las figuras que actualmente conocemos como elipse, parábola e hipérbola. Apolonio recopila todo su trabajo en ocho libros, en donde estudia la cuadratura de sus áreas.

Menelao (c. 70 d.C. – 140 d.C.) se le atribuye la escritura del primer libro sobre

triángulos esféricos. Planteó el estudio de la trigonometría y la geometría esférica y es reconocido por un teorema que no tiene análogo en la geometría euclidiana y que dice: “Si dos triángulos tienen los mismos ángulos, entonces son congruentes: tienen el mismo tamaño y la misma forma (en el caso euclidiano los triángulos son semejantes; misma forma pero posiblemente diferentes tamaños)” [4]pág 80.

A partir de estos estudios la profundizando en trigonometría continúa, de allí surge la idea de manejar un concepto de tierra esférica, con una serie de correcciones que para la época son bien aceptadas, sobre todo por los navegantes. Conviene aclarar que el énfasis está hacia la trigonometría esférica y no hacia la esfera como un tipo de espacio. Cabe señalar, que no se consideraba como otro tipo de geometría teniendo en cuenta que la esfera hacia parte natural del espacio euclidiano tridimensional.

Pappus de Alejandría (c 290 -c 350) Es el último gran estudioso de la matemática de la escuela de Alejandría. Se destaca en el siglo IV, catalogado como el siglo del estancamiento en estudios matemáticos. Su obra *Colección Matemática*, presenta una reunión de todos los conocimientos habidos hasta el momento en Alejandría. Ocho libros ricos en aportes para introducir temas como el foco de una parábola o la directriz de una cónica. Fue brillante para la época a pesar de lo cual, no obtuvo el reconocimiento que se merecía.

Por un periodo de más o menos 1300 años, desde Pappus hasta el renacimiento la geometría no presenta avances.

Durante los siglos XII, XIII, XIV y principios del siglo XV, Europa Occidental se dedica a realizar las traducciones de libros variados, hasta su florecimiento en el siglo XVI, con el renacimiento italiano.

La geometría vuelve en la época del renacimiento, de la mano del arte en forma de geometría proyectiva. Los artistas de esta época hicieron grandes esfuerzos para realizar cuadros muy realistas, por tanto empezaron a pensar en una nueva forma de entender y aplicar la geometría, “Se trataba de cómo vemos el espacio, no del propio espacio” [4]pág 171. En otras palabras cómo representar un mundo tridimensional en un espacio bidimensional, aspecto que no tenía en cuenta la Geometría Euclidiana que "trata de características que permanecen invariables bajo movimientos rígidos: Longitudes y ángulos” [4]pág 173, y aunque esta nueva perspectiva del estudio de la

geometría sigue teniendo su base en la geometría euclidiana, trata sobre un nuevo tipo de transformación: las proyecciones. Esto permite a los matemáticos vislumbrar nuevas opciones para su estudio.

En esta nueva línea, la geometría proyectiva conserva el punto, la línea recta, la imagen de un punto sobre la línea y las relaciones de incidencia de punto y líneas. No se conserva la relación paralela, pero a cambio aparece el denominado “punto de fuga”. De este esfuerzo hecho por los artistas aparecen muchas soluciones a la geometría proyectiva, pero sin el fundamento lógico que tenía la geometría euclidiana. Solo hasta el siglo XVIII, Taylor y Heinrich la fundamentan y a partir del siglo XIX, es reconocida con este nombre. Es importante resaltar que en “el siglo XVII no se hacía distinción entre las geometrías Euclídea y Proyectiva” [6]

Sin duda, existieron otros estudiosos como Descartes y Fermat (1628), que con sus avances dan inicio a la geometría analítica, Saccheri (1733), Lambert (1766), Gauss (1799), Bolyai y Lobachevski (1826), realizan esfuerzos para probar o negar el quinto postulado, estudios que los llevan a establecer las bases de la geometría no euclidiana. Se fundamenta también la geometría elíptica (transformaciones de Möbius), la geometría diferencial y la hiperbólica, esta última definida como la geometría de los invariantes por Klein, en su programa de Erlangen; también se da inicio a la geometría Riemanniana (de n dimensiones).

Jordan (1838 - 1922), publica en 1870 un tratado bien desarrollado y fundamentado en trabajos anteriores de Galois, Ruffini y Lagrange sobre la teoría de grupos, luego en 1887 muestra “...el vínculo profundo con la geometría de una manera muy explícita, clasificando los tipos básicos de movimiento de un cuerpo rígido en el espacio euclidiano” [4]. Trabaja con grupos cerrados, aunque considera su estudio, difícil.

El trabajo de Jordan, permite la comprensión de los movimientos rígidos en la geometría euclidiana. Anteriormente había expresado que las simetrías en el plano son movimientos rígidos (definidos así porque las distancias no sufren cambios) de varios tipos. Las traslaciones: deslizamiento del plano en alguna dirección; las rotaciones: giro alrededor de algún punto; las reflexiones: movimiento respecto a una recta fija; y las reflexiones con deslizamiento: reflejan el plano y luego se traslada en una dirección paralela a la línea especular.

Klein (1849-1925, matemático Alemán), junto con Lie (1842-1899) matemático noruego inicia el estudio de la importancia de la teoría de grupos, basado en el libro de Jordán, *traité des substitutions*. En el año 1872 Klein, presenta el programa de Erlangen con valiosísimos aportes para la caracterización de la geometría, demostrando que la euclidiana y la no euclidiana están incluidas en la proyectiva, además apoyado en el concepto de grupo de transformaciones, elabora “una síntesis notable de estos importantes conceptos cuyo principio unificador es la idea de que una geometría es el estudio de los invariantes de un cierto grupo de transformaciones” [1], también afirma que cada geometría tiene sus propios invariantes. En este programa realizó la unificación de casi todas las geometrías existentes, mostró sus vínculos e hizo de la geometría una rama de la teoría de grupos.

Klein define grupo como un conjunto G , en el que hay definida una operación, “una aplicación $G * G \rightarrow G$ que a cada par de elementos del conjunto le asigna otro elemento del conjunto (que será el resultado de operar dichos dos elementos)”. Por otra parte define las características que debe poseer un conjunto en el que hay una operación, para que se comporte como grupo. Estas son:

1. La operación debe ser asociativa: esto quiere decir que si se toma cualesquiera tres elementos a, b y c del conjunto, el resultado de operar los dos primeros (a y b) y operar el resultado de ello con el tercero (c) debe de ser lo mismo que si primero se opera el segundo y el tercero (b y c) y el resultado se opera con el primero (a). Es decir, si la operación se denota por $*$ ha de ocurrir que $a * (b * c)$ debe de ser lo mismo que $(a * b) * c$.
2. Debe existir un elemento neutro: esto quiere decir que ha de haber un elemento e del conjunto de manera que si se toma cualquier otro elemento a del conjunto y se opera con él, entonces el resultado vuelve a ser el elemento a , es decir, es como si al elemento a no lo hubiera operado. Así, con esta notación, $e * a = a$ y $a * e = a$.
3. Por último, cada elemento debe tener un elemento simétrico: esto quiere decir que si se toma un elemento cualquiera a del conjunto, entonces se puede encontrar otro elemento \hat{a} del conjunto de tal manera que al operar ambos, el resultado que se obtiene es el elemento neutro: $a * \hat{a} = \hat{a} * a = e$.

Las investigaciones y los estudios han continuado, de modo que los avances en geometría se dan ahora en relación con la cuarta dimensión, sin embargo, este concepto inicialmente surgió desde el álgebra. Poco después se empieza a hablar de los espacios multidimensionales.

La geometría riemanniana es modificada y se adapta a la representación de Minkowski, geometría del espacio- tiempo plano, modelada por Einstein como curvatura. Ya en los albores del siglo XX, se habla con mucha familiaridad de la geometría de n dimensiones, teniendo en cuenta que el desarrollo de las matemáticas así lo exigen.

En 1950, la tendencia de plantear todo en n dimensiones era natural, sin embargo, esta geometría actualmente se percibe como la pérdida del contacto con la realidad de las matemáticas, con todo y eso, se sigue utilizando en varios campos del conocimiento y ha permitido la comprensión de forma más clara de muchos fenómenos.

Estos desarrollos dan origen a la geometría de Alta dimensión, la cual se usa actualmente en todos los objetos que maneja tecnología como la televisión por cable, la internet, los teléfonos móviles.

Continuando con los avances en este campo del conocimiento, los matemáticos ortodoxos toman otro camino, inician a finales del siglo XIX y comienzos del XX. Ellos empiezan a observar las irregularidades de la naturaleza, encontrando que no se ajustan a los estudios realizados por la geometría, hasta el momento conocida, además sacan a la luz las limitaciones que se observan en el análisis clásico para estudiar estas formas, que son bautizadas por ellos como *monstruos teóricos*.

Los matemáticos clásicos hacen algunas observaciones relacionadas con el tema, sin darle mayor importancia, sin embargo, poco a poco, la matemática ortodoxa gana terreno. En 1960, estos planteamientos son retomados por Mandelbrot (1924 Varsovia, Polonia), quien se da cuenta que se pueden organizar en una teoría general de las irregularidades de la naturaleza, porque estas no son tenidas en cuenta en las otras geometrías y en 1975 expone la teoría de los *fractales*, como un conjunto de formas generadas por procesos de repetición, con una dimensión superior a uno pero inferior a dos y que al representarlas se encuentran entre la recta (una dimensión) y el plano (dos dimensiones), también establece una serie de reglas con las cuales

se puede explorar la naturaleza, reconocidas por él mismo, como estrategias útiles para analizar fenómenos naturales.

Estas dos ideas, la de *los monstruos teóricos*, unida a la teoría de los *fractales* es conocida hoy como *Teoría del Caos*, en la que las investigaciones continúan.

Actualmente convivimos con todos estos conocimientos y el hombre los está integrando de manera que permiten el avance de la ciencia, tratando de acercarse a las grandes respuestas buscadas por la humanidad.

Capítulo 2

El teorema de Napoleón

2.1. Introducción

Se presentan a continuación, cinco pruebas del este resultado. Dos de ellas se apoyan en la geometría euclidiana. La primera, es soportada por las circunferencias circunscritas, la segunda, está basada en la semejanza de triángulos. La tercera, se fundamenta en la trigonometría[23], la cuarta, en los movimientos rígidos del plano. y la última esta cimentada en el Algebra Lineal, pruebas desarrolladas en el proceso de fundamentación matemática de la propuesta.

Teorema 2.1.1 *Si en un triángulo ΔABC , se construyen triángulos equiláteros exteriores sobre sus lados, los centros de dichos triángulos determinan un triángulo equilátero (ΔIGH) conocido como triángulo de Napoleón exterior, ver fig. N° 1.*

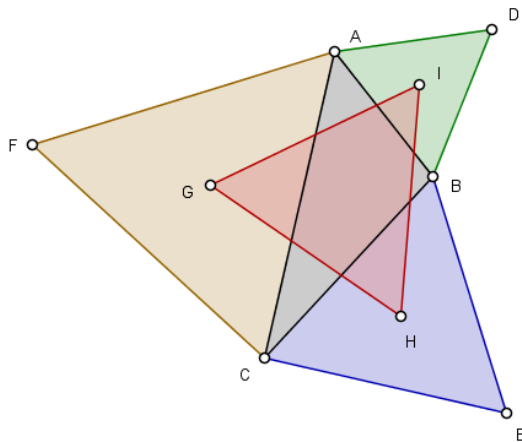


Figura N° 1

2.2. Primera Demostración: Utilizando circunferencias circunscritas

Para esta primera prueba, es necesario verificar algunos planteamientos iniciales. Refiérase a la figura N°2

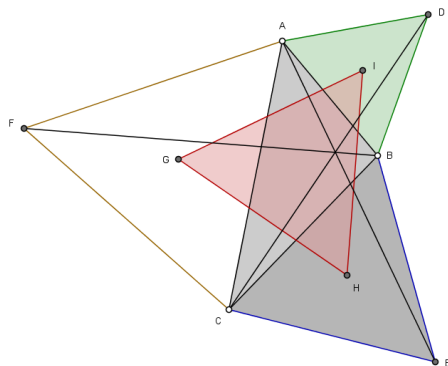


Figura N°2

Se demostrará inicialmente que:

$$\overline{AE} = \overline{FB} = \overline{CD}. \quad (1)$$

Por construcción los triángulos $\triangle CFA$, $\triangle ADB$ y $\triangle CEB$ son equiláteros, (ver Fig. N°1). Por tanto, las siguientes igualdades se satisfacen:

$$\overline{CE} = \overline{CB} = \overline{BE}.$$

$$\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{DB}.$$

$$\overline{AC} = \overline{CF} = \overline{FA}.$$

$$\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC ,$$

$$\angle BAF = \angle FAC + \angle CAB \text{ y}$$

$$\angle DAB = \angle FAC = 60^\circ .$$

Por tanto

$$\angle DAC = \angle BAF.$$

2.2. PRIMERA DEMOSTRACIÓN: UTILIZANDO CIRCUNFERENCIAS CIRCUNSCRITAS13

Obsérvense los triángulos ΔFAB y ΔDAC , nótese que:

$$\overline{DA} = \overline{AB} \quad y \quad \overline{CA} = \overline{FA},$$

luego por Lado Ángulo Lado (LAL) se concluye que:

$$\overline{FB} = \overline{CD}.$$

La igualdad anterior, demuestra que los triángulos ΔFAB y ΔDAC son congruentes. Un argumento similar prueba que los triángulos ΔDBC y ΔABE son congruentes. En consecuencia

$$\overline{FB} = \overline{CD} = \overline{AE}.$$

Quedando plenamente demostrada la igualdad (1).

Trazando circunferencias circunscritas a los triángulos equiláteros ΔACF , ΔBDA y ΔBCE , se probará que se cortan en un único punto denominado J . (Ver fig. N°3). Éste conforma con los puntos A, D y B un cuadrilátero, al igual que, C, E, B , y A, F, C , conforman figuras similares con el punto en mención.

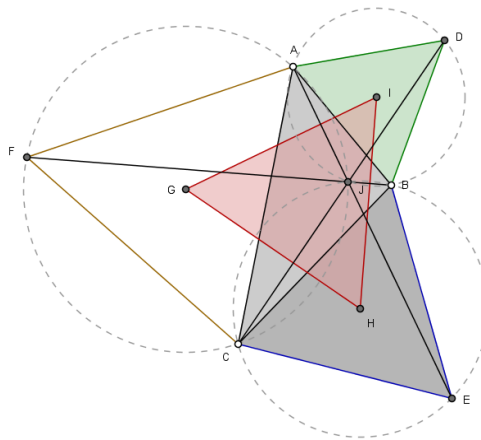


Figura N°3

Por hipótesis

$$m\angle CEB = 60^\circ.$$

Dado que los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios, se tiene que:

$$m\angle BJC = 120^\circ.$$

De forma análoga para el triángulo $\triangle BAD$,

$$m\angle BDA = 60^\circ \text{ entonces } m\angle BJA = 120^\circ.$$

Por tanto se deduce que:

$$m\angle CJA = 120^\circ.$$

Con base en lo anterior, se puede afirmar que el cuadrilátero $AFCJ$ está inscrito en la circunferencia con centro G (ver fig. °4), luego el punto $J \in CFA$. Las rectas \overline{FB} , \overline{CD} , \overline{AE} son congruentes en J y forman entre ellas ángulos de $m\angle 60^\circ$

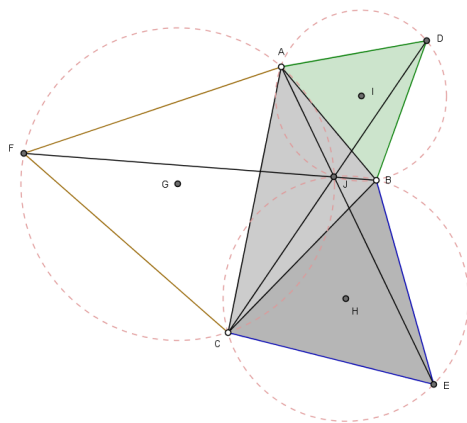


Figura N°4

Se procede ahora a realizar la demostración.

2.2. PRIMERA DEMOSTRACIÓN: UTILIZANDO CIRCUNFERENCIAS CIRCUNSCRITAS 15

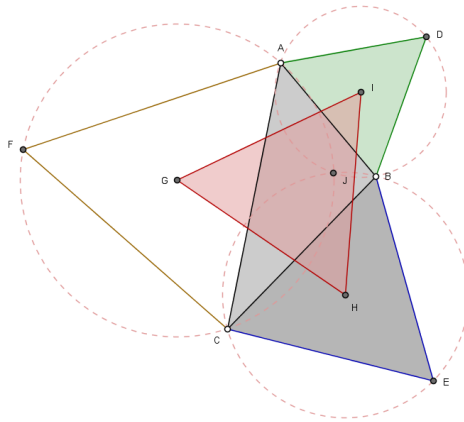


Figura N°5

Los puntos G, H e I , son los centros de los triángulos equiláteros construidos con base en el triángulo $\triangle ABC$. (Ver fig. N°5). Se cumple que:

a. \overline{GH} es la mediatriz de \overline{CJ} , obsérvese que:

$$m\angle CGJ = m\angle CGH + m\angle HGJ.$$

Además, como \overline{GH} también es mediatriz de \overline{CB} , entonces:

$$\angle CGH = \angle HGJ.$$

b \overline{GI} es la mediatriz de \overline{JA} , luego:

$$m\angle JGA = m\angle JGI + m\angle IGA.$$

Por ello, se deduce que:

$$\angle JGI = \angle IGA.$$

Ahora:

$$m\angle CGA = 120^\circ \text{ y } m\angle CGA = 2\angle HGI.$$

En consecuencia:

$$\angle HGI = 60^\circ.$$

Esta revisión permite concluir que:

$$m\angle CGA = 2 * \angle HGI \text{ entonces } \angle HGI = 60^\circ.$$

Para los lados \overline{HI} y \overline{GI} , se procede de igual forma. Obteniendo:

$$m\angle IHG = 60^\circ \text{ y } m\angle HIG = 60^\circ.$$

Por tanto, el triángulo $\triangle GHI$ es un triángulo equilátero.

2.3. Segunda Demostración: usando propiedades de los triángulos

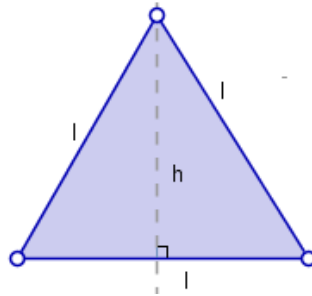


Figura N°6

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{2}AD \quad \text{y} \quad \overline{AI} = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}AD$$

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AD}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

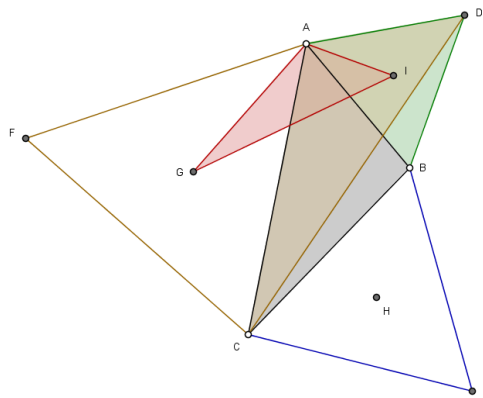


Figura N°7

Al observar el ΔAGI , y compararlo con ΔDAC , (ver fig. N°7), se puede afirmar que:

$$\angle IAG \cong \angle CAD.$$

Porque los puntos I y G , son las intersecciones de las bisectrices de los ángulos de $\angle DAB$ y $\angle CAF$ respectivamente. Luego:

$$\angle IAG = \angle CAB + 60 = \angle CAD.$$

Además, puesto que :

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AD}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

entonces los triángulos ΔAGI y ΔDAC , son semejantes, por tanto se establecen las siguientes igualdades:

$$\frac{\overline{GI}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (1)$$

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{AE}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (2)$$

$$\frac{\overline{HI}}{\overline{BF}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (3)$$

Usando un argumento similar al anterior sobre los triángulos ΔBFC y ΔGCH , (ver fig. N°8), se verifica que:

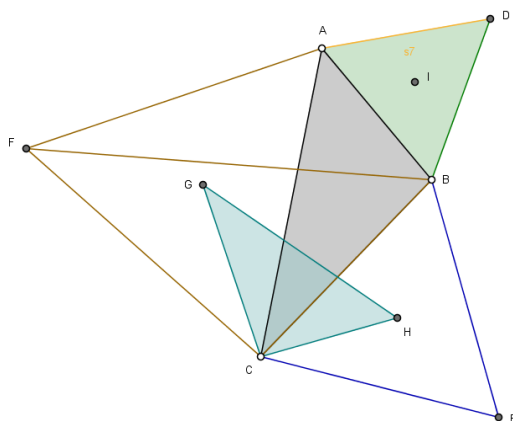


Figura N°8

$$\frac{\overline{GI}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{FB}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Para los triángulos ΔDBC y ΔIBH , (ver fig. N°9), se comprueba igualmente que:

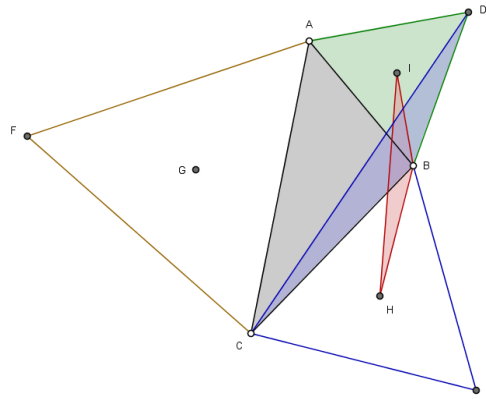


Figura N°9

$$\frac{\overline{IG}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por las demostraciones preliminares:

$$\overline{CD} = \overline{AE} = \overline{FB}.$$

De aquí y por (1), (2), y (3) se tiene que:

$$\overline{IG} = \overline{GH} = \overline{HI}.$$

Con esto se demuestra que $\triangle IGH$, es un triángulo equilátero.

2.4. Tercera Demostración: Usando el Teorema del Coseno

Mediante la aplicación del teorema del coseno que dice: "*En todo triángulo el cuadrado de la longitud, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos, menos el doble producto de ellas, por el coseno del ángulo que forman dichos lados.*", se realizará una nueva demostración. Aplicándolo al triángulo $\triangle ABC$, (ver fig. N°10) se tiene:

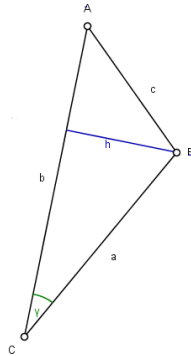


Figura N° 10

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma).$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (1)$$

Reconociendo que h es la altura del triángulo ΔABC , correspondiente al vértice B , se plantea:

$$\sin(\gamma) = \frac{h}{a} \text{ entonces } h = a \sin(\gamma).$$

luego, llamando S , al área del triángulo ΔABC , se establece:

$$S = \frac{bh}{2} \text{ entonces } S = \frac{b * a * \sin(\gamma)}{2},$$

despejando se obtiene:

$$\sin(\gamma) = \frac{2S}{ab}. \quad (2)$$

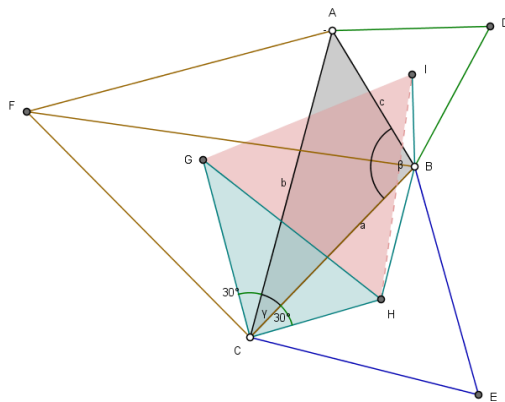


Figura N° 11

La medida de:

$$\overline{CG} = b \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad (3)$$

para el otro lado se tiene que:

$$\overline{CH} = a \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (4)$$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo ΔGHC :

$$\overline{GH}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{CH}^2 - 2(\overline{CG})(\overline{CH}) \cos(\gamma + 60^\circ).$$

Reemplazando en la expresión anterior, con las expresiones (3) y (4), se llega a:

$$\begin{aligned} \overline{GH}^2 &= \left(b \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(a \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\left(b \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(a \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cos(\gamma + 60^\circ), \\ \overline{GH}^2 &= b^2 \frac{3}{9} + a^2 \frac{3}{9} - 2(b)(a) \frac{3}{9} \cos(\gamma + 60^\circ), \\ \overline{GH}^2 &= \frac{b^2 + a^2 - 2ab \cos(\gamma + 60^\circ)}{3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora se recuerda que:

$$\cos(\gamma + 60^\circ) = \cos(\gamma)\cos(60^\circ) - \sin(\gamma)\sin(60^\circ).$$

A continuación, despejando la expresión del coseno y usando las igualdades obtenidas en (1) y (2) se llega a:

$$\cos(\gamma + 60^\circ) = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2S}{ab}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (6)$$

Haciendo sustitución de (6) en (5), con las respectivas simplificaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{GH}^2 &= \frac{b^2 + a^2 - 2ab \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} * \frac{1}{2} - \frac{2S}{ab} * \frac{\sqrt{3}}{2}}{3}, \\ \overline{GH}^2 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Finalmente, para los otros dos lados se repite el mismo procedimiento, por tanto se tiene que para el lado GI :

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha), \\ \cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab}. \end{aligned} \quad (1)$$

para el seno:

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{c} \quad \text{entonces} \quad h = c \sin(\alpha),$$

Siendo S , el área del ΔABC , se establece:

$$S = \frac{bh}{2} \quad \text{entonces} \quad S = \frac{b * c * \sin(\alpha)}{2},$$

despejando el seno se obtiene:

$$\sin(\alpha) = \frac{2S}{bc}. \quad (2)$$

Entonces:

$$\overline{GA} = b \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (3)$$

De igual modo se obtiene:

$$\overline{AI} = c \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad (4)$$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo ΔGAI :

$$\overline{GI}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{AI}^2 - 2(\overline{GA})(\overline{AI}) \cos(\alpha + 60^\circ),$$

reemplazando en la expresión anterior con las expresiones (3) y (4), se llega a:

$$\begin{aligned} \overline{GI}^2 &= \left(b \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(c \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\left(b \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(c \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cos(\alpha + 60^\circ), \\ \overline{GI}^2 &= b^2 \frac{3}{9} + c^2 \frac{3}{9} - 2(b)(c) \frac{3}{9} \cos(\alpha + 60^\circ), \\ \overline{GI}^2 &= \frac{\overline{b^2 + c^2 - 2ac \cos(\alpha + 60^\circ)}}{3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Y como:

$$\cos(\alpha + 60^\circ) = \cos(\alpha)\cos(60^\circ) - \sin(\alpha)\sin(60^\circ).$$

A continuación, despejando la expresión del coseno y usando las igualdades obtenidas en (1) y (2) se llega a:

$$\cos(\alpha + 60^\circ) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} * \frac{1}{2} - \frac{2S}{bc} * \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (6)$$

Haciendo sustitución de (6) en (5), con las respectivas simplificaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{GI}^2 &= \frac{b^2 + c^2 - 2bc \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} * \frac{1}{2} - \frac{2S}{bc} * \frac{\sqrt{3}}{2}}{3}, \\ \overline{GI}^2 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

para el lado IH :

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \cos(\beta), \\ \cos(\beta) &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}, \quad (1) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\sin(\beta) = \frac{h}{c} \text{ entonces } h = c \sin(\beta),$$

Llamando S , el área del triángulo ΔABC , se establece que:

$$S = \frac{ah}{2} \text{ entonces } S = \frac{a * c * \sin(\beta)}{2},$$

y despejando el seno:

$$\sin(\alpha) = \frac{2S}{ac}. \quad (2)$$

La medida de:

$$\overline{BI} = c \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (3)$$

para el otro lado se tiene que:

$$\overline{BH} = a \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (4)$$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo ΔBIH :

$$\overline{HI}^2 = \overline{BI}^2 + \overline{BH}^2 - 2(\overline{BI})(\overline{BH}) \cos(\beta + 60^\circ),$$

reemplazando en la expresión anterior, con las expresiones (3) y (4), se llega a:

$$\begin{aligned} \overline{HI}^2 &= \left(c \frac{\sqrt[2]{3}}{3}\right)^2 + \left(a \frac{\sqrt[2]{3}}{3}\right)^2 - 2\left(c \frac{\sqrt[2]{3}}{3}\right)\left(a \frac{\sqrt[2]{3}}{3}\right) \cos(\beta + 60^\circ) \\ \overline{HI}^2 &= c^2 \frac{3}{9} + a^2 \frac{3}{9} - 2(c)(a) \frac{3}{9} \cos(\beta + 60^\circ) \\ \overline{HI}^2 &= \frac{c^2 + a^2 - 2ac \cos(\beta + 60^\circ)}{3} \quad (5) \end{aligned}$$

y:

$$\cos(\beta + 60^\circ) = \cos(\beta)(\cos(60^\circ)) - \sin(\beta)(\sin(60^\circ))$$

A continuación despejando la expresión del coseno y usando las igualdades obtenidas en (1) y (2) se llega a:

$$\cos(\beta + 60^\circ) = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} * \frac{1}{2} - \frac{2S}{ac} * \frac{\sqrt[2]{3}}{2} \quad (6)$$

Haciendo sustitución de (6) en (5), con las respectivas simplificaciones se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{HI}^2 &= \frac{b^2 + c^2 - 2bc \frac{b^2+c^2-a^2}{2ac} * \frac{1}{2} - \frac{2S}{ac} * \frac{\sqrt[2]{3}}{2}}{3} \\ \overline{HI}^2 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt[2]{3}}{6} \end{aligned}$$

De forma tal que queda demostrado que $GH = HI = GI$, por tanto el triángulo ΔGIH es equilátero.

2.5. Cuarta Demostración: Usando Rotaciones

Retomando la figura inicial del Teorema de Napoleón, (ver fig. N°12), se realizará el siguiente procedimiento:

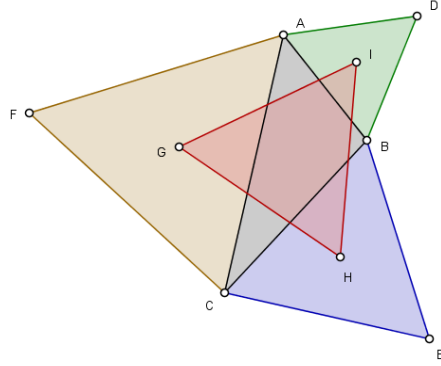


Figura N°12

Se inicia rotando la Figura N°12, un ángulo de 120° , en sentido horario al rededor del punto I , tal como se muestra en la figura N°13.

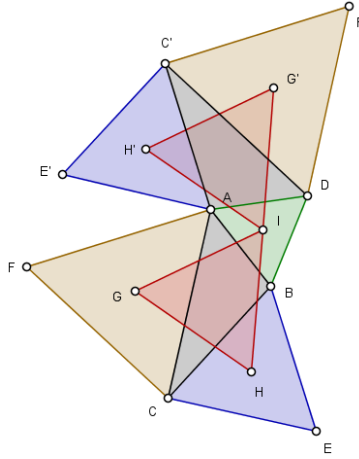


Figura N°13

Se completa el segmento GH' y se prueba que $\triangle IGH'$ es congruente con $\triangle IGH$. A continuación se prueba que $\triangle IGH$, $\triangle IGH'$ y $\triangle IG'H'$ (ver figura N°14), son congruentes. Por construcción:

$$\angle E'AF = \angle ACB.$$

Luego $\triangle E'AF$ es congruente con $\triangle ABC$. Así el polígono $AC'E'FCA$ es congruente con el polígono $AFCEBA$. Se concluye que:

$$GH' = GH.$$

Se sigue que $\triangle IG'H'$ es congruente con $\triangle IGH$. Así, por construcción los triángulos $\triangle IGH$, $\triangle IG'H'$ y $\triangle IG''H''$ son congruentes. (Ver fig. N°14).

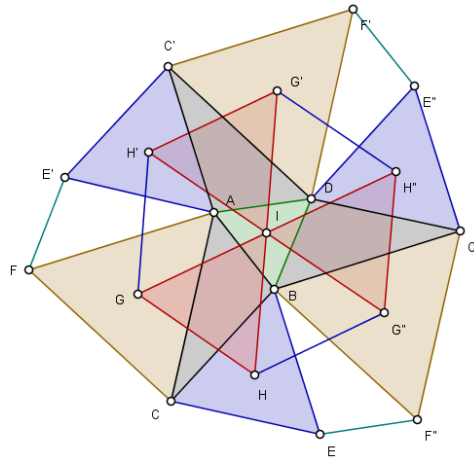


Figura N°14

Usando el mismo procedimiento empleado en el numeral 2, se puede probar que los seis triángulos con vértice en I, son congruentes. Se sigue de aquí que:

$$m\angle GIH = 60^\circ.$$

De manera similar se prueba que:

$$m\angle GIH = 60^\circ = m\angle IHG.$$

Esto permite afirmar que el triángulo $\triangle IGH$ es equilátero como se quería demostrar.

2.6. Quinta Demostración: usando el Algebra Lineal

Utilizando vectores, ver figura N°15.

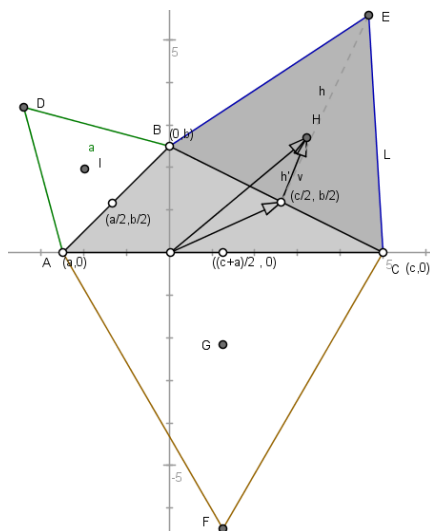


Figura N°15

Del gráfico se obtiene que:

$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{1\sqrt{3}}{2}L,$$

conociendo que las alturas se cortan a $\frac{1}{3}$ de la base, el valor de h' es:

$$h' = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \sqrt{3}L \quad \text{entonces} \quad h' = L \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

También se recuerda que un vector queda determinado con el módulo y la orientación, luego:

$$v = (\theta, \|v\|),$$

para definir el ángulo θ , se calcula inicialmente la pendiente de la recta BC :

$$BC = -\frac{b}{c},$$

el vector v es perpendicular a esta recta, por tanto se cumple que:

$$m * m' = -1 \quad \text{entonces} \quad m' = \frac{c}{b}.$$

Para el cálculo del módulo, se recurre al vector unitario v' . Sabiendo que:

$$\|v'\| = 1 \quad \text{y} \quad v = v' * h' \quad (1)$$

se establecen las siguientes semejanzas:

$$\frac{v'}{v} = \frac{b'}{b} \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{\sqrt{c^2 + b^2}} = \frac{b'}{b} \quad (2) \quad \text{y} \quad \frac{c'}{b'} = \frac{c}{b} \quad (3)$$

Despejando b' en (2) y reemplazando en (3):

$$b' = \frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}} \quad \text{entonces} \quad c' = \frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2}}$$

Las coordenadas de v' son:

$$v' = \left(\frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}}, \frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2}} \right)$$

para el cálculo de v , reemplazamos v' y h' en (1):

$$v = \left(\frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}}, \frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2}} \right) \left(\frac{L}{2\sqrt{3}} \right) \quad \text{y} \quad L = \sqrt{c^2 + b^2}$$

$$v = (b, c) \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

De aquí se obtienen las coordenadas de H :

$$H = \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2} \right) + (b, c) \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

$$H = \left(\frac{3c + \sqrt{3}b}{6}, \frac{3b + \sqrt{3}c}{6} \right)$$

Para las coordenadas del punto I , se establecen las siguientes relaciones, según la figura N°16

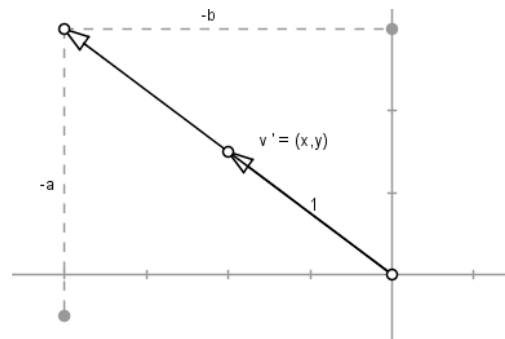


Figura N°16

$$\frac{x}{-b} = \frac{y}{-a} \quad y \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{x}{-b} \quad \text{entonces} \quad x = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1)$$

$$y = \frac{ax}{b} \quad (2) \quad \text{entonces} \quad y = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$v = v' * h', \quad L = \sqrt{a^2 + b^2} \quad y \quad h' = \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

$$v = \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \left(\frac{L}{2\sqrt{3}} \right)$$

$$v = \left(\frac{-b\sqrt{3}}{6}, \frac{-a\sqrt{3}}{6} \right)$$

Luego las coordenadas del punto I , son:

$$I = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) + (-b, -a) \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

$$I = \left(\frac{3a - \sqrt{3}b}{6}, \frac{3b - \sqrt{3}a}{6} \right)$$

Para el punto G :

$$G = \left(\frac{c+a}{2}, \frac{b}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}c}{6} \right)$$

2.6.1. Cálculo de las distancias

Distancia I, H

$$d(I, H) = \sqrt{\left(\frac{3c + \sqrt{3}b}{6} - \frac{3a - \sqrt{3}b}{6} \right)^2 + \left(\frac{3b + \sqrt{3}c}{6} - \frac{3b - \sqrt{3}a}{6} \right)^2}$$

$$d(I, H) = \frac{1}{2 * 3} \sqrt{\left(3c + \sqrt{3}b - 3c + \sqrt{3}b \right)^2 + \left(3b + \sqrt{3}c - 3b + \sqrt{3}a \right)^2}$$

$$d(I, H) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ac - \sqrt{3}b(a - c)}$$

Distancia I, G

$$d(I, G) = \sqrt{\left(\frac{3a - \sqrt{3}b}{6} - \frac{c+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3b + \sqrt{3}a}{6} - \frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}c}{6}\right)^2}$$

$$d(I, G) = \frac{1}{2 * 3} \sqrt{(3a - \sqrt{3}b - 3c + 3a)^2 + (3b - \sqrt{3}a - \sqrt{3}a + \sqrt{3}c)^2}$$

$$d(I, G) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ac - \sqrt{3}b(a - c)}$$

Distancia H, G

$$d(H, G) = \sqrt{\left(\frac{3c + \sqrt{3}b}{6} - \frac{c+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3b + \sqrt{3}c}{6} - \frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}c}{6}\right)^2}$$

$$d(H, G) = \frac{1}{2 * 3} \sqrt{(\sqrt{3}b - 3a)^2 + (3b + 2\sqrt{3}c - \sqrt{3}a)^2}$$

$$d(H, G) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ac - \sqrt{3}b(a - c)}$$

Por tanto:

$$\overline{IH} = \overline{IG} = \overline{HG}$$

De esta manera demostramos que el triángulo $\triangle IGH$, es equilátero.

Capítulo 3

Referentes en los Estándares y Modelos Pedagógicos.

3.1. Introducción

El conocimiento de la humanidad ha avanzado tanto, que para las nuevas generaciones es todo un reto reconocerlo y reconstruirlo, sin embargo, esta responsabilidad es compartida entre el Estado, representado por los funcionarios del MEN y la familia.

Respondiendo a ese compromiso el MEN, plantea por medio de un grupo de expertos en educación, una propuesta de estructura para el área de matemáticas, de manera que a medida que avanza en su desarrollo, el estudiante, va profundizando en el conocimiento, lo que lo lleva a promoverse en el sistema educativo.

Además de lo anterior, es responsabilidad de las instituciones y de los docentes organizar un Proyecto Educativo Institucional (PEI) que apunte a superar las dificultades que se encuentran en la comunidad educativa. Para esto se apoya en modelos y teorías educativas que orientan la labor pedagógica.

De otra parte, se encuentra la familia cuya responsabilidad consiste en brindar: estabilidad alimentaria, salud mental y física y propender por dar continuidad a lo estudiado en la escuela para lograr un aprendizaje acorde a las necesidades actuales.

Se procede por tanto, a realizar un recorrido por los estándares planteados para el área de matemáticas, en lo que toca específicamente con el desarrollo del

pensamiento espacial y los sistemas geométricos correspondientes al grado 6 y 7, reconociendo aspectos necesarios en estos desarrollos, que soportados en el aprendizaje significativo, el modelo de Van Hiele y la Modificabilidad Estructural Cognitiva, permiten plantear un trabajo pensado para unas edades específicas y en un contexto determinado, como es la educación de Adultos, en la localidad diecinueve, Ciudad Bolívar, que por sus características hacen de los estudiantes una población especial y que permite, de algún modo responder al problema planteado: **¿Cómo llevar al estudiante de grado sexto y séptimo a inferir el resultado de aplicar una serie de movimientos rígidos (rotación, traslación, reflexión) a una figura geométrica?**

3.2. Referentes en los Estándares Básicos e Investigaciones

Los estándares Básicos de competencias propuestos por el MEN, constituyen un referente curricular que orienta, permite diseñar y construir el currículo de acuerdo al carácter y los proyectos institucionales. Hacen referencia a las competencias básicas que deberían desarrollar los niños, jóvenes y adultos de todo el país, a lo largo del proceso educativo.

Ellos abren la posibilidad de construir: los planes de estudio, los materiales, las ayudas educativas y el proceso de evaluación de los estudiantes, también permiten a los planteles evaluar de manera más cercana a la realidad, las necesidades de formación de los docentes. Todos estos aportes tienen como finalidad mejorar los niveles de apropiación y avance del conocimiento escolar y superar la práctica tradicional de la enseñanza, para enfocarla como un proceso construible por parte del estudiante, con significado; de tal forma que el niño, joven o adulto sea un partícipe activo de su propio aprendizaje.

Los estándares de matemáticas, organizan los dominios del área en cinco tipos de pensamiento: el numérico, el métrico, el espacial, el aleatorio y el variacional; proponen además enfatizar en cinco procesos fundamentales y transversales a los pensamientos: Formular y resolver problemas, modelar, comunicar, razonar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Hacen también referencia a algunas estrategias pensadas para potenciar el desarrollo del pensamiento.

En particular, en lo que tiene que ver con el pensamiento espacial, que es entendido como “el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales” [8], se afirman que este pensamiento brinda a través de la geometría la posibilidad de desarrollar “...la abstracción, la generalización, la definición, la axiomatización...” [9], por lo que es importante el “estudio de distintas relaciones espaciales de los cuerpos” [9]. Giros, rotaciones, traslaciones, estiramientos, acortamientos, movimientos en el eje coordenado, comparaciones de características en figuras similares, etc., son aspectos que permiten desarrollar el pensamiento espacial y aplicar el conocimiento geométrico en diferentes contextos.

De otra parte, se menciona en el documento que “El trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras. Así, la geometría activa se presenta como una alternativa para refinar el pensamiento espacial, en tanto se constituye en herramienta privilegiada de exploración y de representación del espacio. El trabajo con la geometría activa puede complementarse con distintos programas de computación que permiten representaciones y manipulaciones que eran imposibles con el dibujo tradicional” [9]. En el mismo sentido se pronuncia el documento sobre el marco referencial de la prueba PISA que afirma: “Es importante no restringir el concepto de forma al de unas entidades estáticas. La forma, como entidad, puede transformarse, del mismo modo que las formas se modifican. En ocasiones, este tipo de cambios pueden visualizarse con gran elegancia mediante tecnologías informáticas” [10].

De los anteriores aportes, se desprende que es fundamental retomar la enseñanza de la geometría, implementando nuevas formas de trabajar, en particular para desarrollar los tópicos que permiten implementar una geometría dinámica. Por tanto, todos los esfuerzos encaminados a traer nuevamente la geometría y su enseñanza a los currículos, son aportes que se pueden hacer con el objetivo de lograr el conocimiento y aprendizaje de esta, a la vez que desarrollar el pensamiento espacial en los niños, jóvenes y adultos.

Específicamente en el documento de los estándares se propone para el primer

grupo de grados, los siguientes aspectos relacionados con la geometría de transformaciones: diferenciar atributos y propiedades de objetos tridimensionales; dibujar y describir cuerpos o figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños; representar el espacio circundante para establecer relaciones espaciales; reconocer congruencias y semejanzas entre figuras (ampliación y reducción). Realizar construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales; finalmente debe poseer la habilidad para relacionar dirección, distancia y posición en el espacio.

Para el segundo: comparar y clasificar figuras tridimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos y vértices) y características; Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas; utilizar el sistema de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales; Identificar y justificar relaciones de congruencia y semejanza entre figuras; conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.

Y para el tercero: Predecir y comparar resultados de transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte; Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.

De otra parte, investigaciones recientes, relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza de la geometría coinciden en mencionar que existe un “olvido” de ése dominio en la práctica escolar, debido a la gran importancia que se le ha dado a lo numérico, situación que ha llevado a presentar en los estudiantes una serie de carencias, que afectan el adecuado desarrollo o potenciación del pensamiento espacial, así como la fundamentación geométrica que le brinda al estudiante el andamiaje necesario para el aprendizaje durante toda la vida.

En el estudio realizado por Matilde Ma. Guerra Rodríguez [11], relacionado con la didáctica de la geometría se reseñan algunas dificultades debidas al abandono en el currículo de la geometría, en los diferentes niveles educativos. Dificultades relacionadas con la generalización, en los métodos de razonamiento propios de la geometría, predominio casi total de la geometría métrica, olvido de otros tipos de geometría, inexistencia de los procesos clasificatorios, aritmetización de la geometría

y generación de un lenguaje pseudo-científico.

Aparte de lo anterior, en las pruebas internacionales de matemáticas, la geometría ha estado limitada a una serie de preguntas que se reducen al conocimiento de figuras planas, ayudando de manera no intencionada a que su estudio sea relegado a un segundo plano, con las consecuencias ya mencionadas.

Colombia no se escapa al olvido mencionado y los estudiantes muestran las mismas dificultades encontradas en el estudio anteriormente mencionado, razón por la cual un grupo de docentes, investigadores y asociaciones educativas con el auspicio del MEN, realizan algunos esfuerzos para que esta situación cambie haciendo énfasis en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, con propuestas de estrategias novedosas, variadas y algunas de ellas soportadas en la geometría dinámica.

Corresponde finalmente a las instituciones implementar su estudio, planteando los conocimientos derivados de la geometría en el currículo y buscando la manera de integrar adecuadamente los cinco pensamientos, para que su estudio se organice de la misma forma como han surgido a través de la historia.

3.2.1. Descripción del contexto y Marco referencial

EL contexto para el cual está pensado el proyecto tiene características específicas: los estudiantes se encuentran en edades que oscilan entre los 10 y los 60 años. El sistema colombiano diurno no los integra a la educación por estar en extra-edad. Un alto porcentaje de ellos tienen dificultades en el campo social, familiar, emocional, sentimental o psicológico y se vinculan a la jornada nocturna como una de las pocas opciones que tienen para alfabetizarse o continuar sus estudios y buscar de ese modo, algún tipo de movilidad dentro de la sociedad colombiana.

Los estudiantes provienen de diferentes zonas del país: por desplazamiento, por migraciones voluntarias y por procesos de desarme; otros son nativos de Bogotá, todos ellos en condiciones de mucha pobreza. Han sido estigmatizados por pertenecer a la localidad de Ciudad Bolívar; considerados como violentos, pandilleros, pertenecientes a milicias urbanas entre otras, se ven avocados a defender sus derechos y su espacio de diversas formas. Además de lo anterior, su bajo nivel alimentario y las difíciles relaciones familiares, los hace una población muy especial.

Teniendo en cuenta la complejidad del contexto descrito, la propuesta didáctica estará enmarcada en teorías que brindan elementos adecuados para afrontar la situación, éstas son la Teoría de la Modificabilidad Estructural Cognitiva, el modelo de Van Hiele y la del aprendizaje significativo.

3.2.2. Aprendizaje Significativo

Definir aprendizaje, es complejo, se tienen acepciones enmarcadas en modelos y teorías que dentro del proceso de evolución pueden reafirmarse o cambiar, surgiendo nuevos significados, sin embargo en la actualidad se observa una constante en todas las definiciones que se puede resumir así: el aprendizaje se puede evidenciar en el cambio que muestra el ser humano frente a las situaciones que debe enfrentar y la manera cómo lo hace. Estas acepciones marcan el camino hacia lo que se conoce como aprendizaje significativo. Vigotsky afirmaba que “ El cambio cognoscitivo es el resultado de utilizar los instrumentos culturales en las interrelaciones sociales y de internalizarlas y transformarlas mentalmente”[12] , lo que significa que el aprendizaje no es solamente individual, se construye conocimiento con y en el colectivo al cual se pertenece, dándose un aprendizaje de acuerdo a un contexto, que posee características definidas por una cultura, la que de manera explícita o tácita prioriza aquello que es importante aprender y por último el sujeto elabora su propia estructura mental en relación con lo aprendido, demostrando así su subjetividad.

Lo importante del aprendizaje significativo radica en que “las ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario sino substancial con lo que el alumno ya sabe” [13] , para lograrlo se deben tener en cuenta elementos que resultan de vital importancia en el proceso del aprendizaje como son: la disposición o interés que presente el estudiante a aprender, relacionada con lo motivacional, emocional y actitudinal; el apoyo que ofrecen materiales educativos pensados, planeados y presentados acorde a la etapa del desarrollo del estudiante y finalmente relacionados con los conocimientos que posea. En definitiva el sujeto aprende aquello que tiene sentido para él, añadiendo que será más fácil de incorporar a sus estructuras mentales sí el conocimiento es mediado con elementos orientados para tal fin. A partir de ahí, se obtienen otros logros por parte del estudiante en lo que tiene que ver con los ritmos de aprendizaje, el reconocimiento de la tarea, las estrategias a desarrollar y

los avances alcanzados a través de su propio esfuerzo.

Según David Paul Ausubel (1918-2008) un material didáctico es potencialmente significativo si involucra dos dimensiones: la lógica y la psicológica. Respecto a la primera referida a los materiales educativos, afirma que esta debe tener coherencia en la estructura interna, secuencia lógica en los procesos y consecuencia en las relaciones entre sus elementos.

Desde estos planteamientos el rol del docente adquiere una connotación diferente, pues los apoyos didácticos que planea deben ser idiosincráticos, experienciales, históricos y subjetivos, para que impacten en los estudiantes.

Ahora bien si nos referimos específicamente a la didáctica de la geometría y al desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, es importante dirigir la mirada hacia modelos o propuestas que buscan mejorar la enseñanza de esta área. Iniciativas que tengan en cuenta algunos de los factores asociados que inciden directamente en la efectividad de los aprendizajes, como pueden ser los ritmos de aprendizaje, los conocimientos previos, las habilidades desarrolladas y la estructura del área, su secuencia y coherencia.

Un modelo que no es reciente para la enseñanza de la geometría, pero que se ha desarrollado, se conserva vigente y se ajusta en gran medida a lo descrito en el párrafo anterior, es el Modelo de Van Hiele (Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele, 1957).

En la actualidad se reportan numerosas investigaciones que muestran cómo esta teoría, al caracterizar los niveles de aprendizaje que deben alcanzar los estudiantes, al proponer los desarrollos que se pueden lograr en relación al pensamiento geométrico y dar pautas para implementar aprendizaje por procesos, ha sido tomada en cuenta para la reorganización de muchos currículos que pretenden elevar el nivel de razonamiento geométrico

3.2.3. La Didáctica de la Geometría y los Niveles de Van Hiele

Los creadores de este modelo (esposos holandeses), en tesis doctoral proponen que: para el aprendizaje de la geometría es necesario superar una serie de niveles de pensamiento y de conocimiento, los cuales no están relacionados con la edad.

Hicieron evidente la importancia de la secuencia, la jerarquización y el desarrollo de un lenguaje adecuado que se adquiere progresivamente para lograr el avance de un nivel a otro, con conocimientos básicos que van a ser requeridos en el siguiente. La teoría describe cinco niveles y cinco fases que se deben evidenciar en el trabajo de cada nivel.

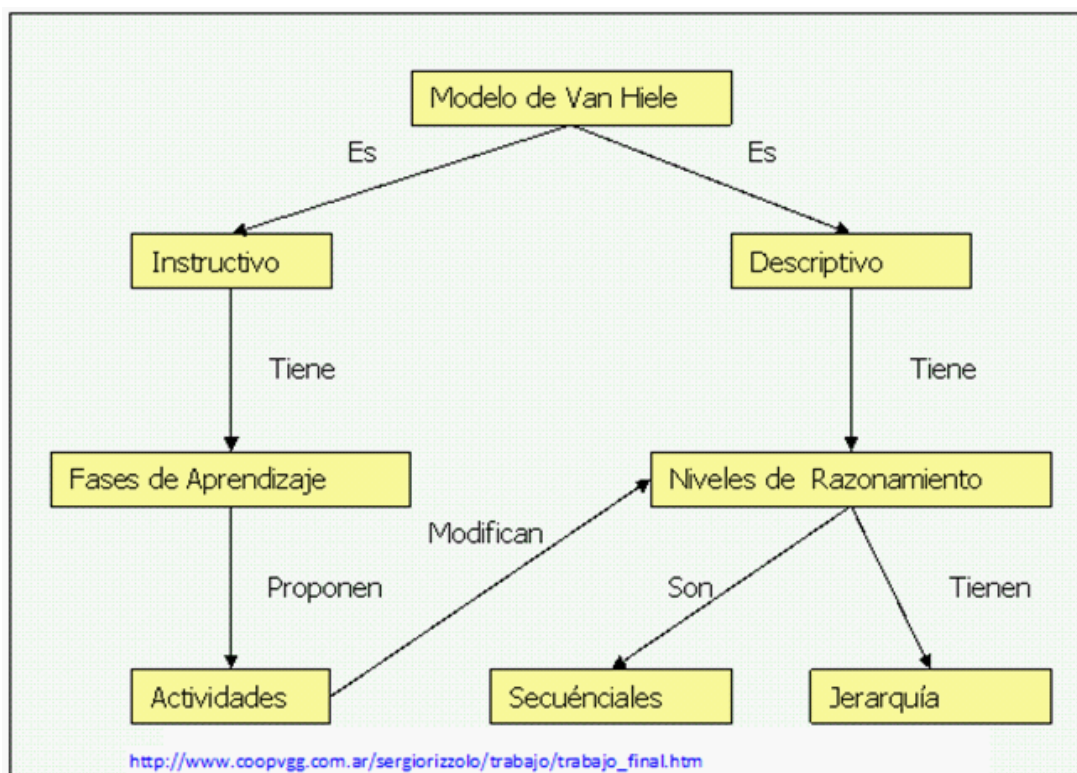


Figura N°21

Los niveles están planteados así:

Visualización y reconocimiento: En este nivel, los estudiantes reconocen el espacio como aquello que los rodea, las figuras geométricas las diferencian por su forma, pero no tienen claro que está en relación al número de lados y de ángulos por ejemplo. Utilizan un lenguaje adecuado pero no especializado, se observa muy poca habilidad para diferenciar las figuras por sus propiedades.

Análisis: Superado el nivel anterior, los conocimientos adquiridos se hacen evidentes para el trabajo a realizar en este, la percepción de las propiedades y componentes de las figuras es más específica, empieza a reconocer dentro de un universo de figuras por ejemplo los triángulos, reconoce que la suma de los ángulos interiores

de un triángulo es igual a 180° , sin embargo aún no puede establecer relaciones entre familias de figuras; se inician los procesos clasificatorios elementales y procesos de razonamiento matemático. Empieza la adquisición de nuevo vocabulario.

Los profesores Van Hiele sostienen que el siguiente nivel es posiblemente al que llegarán los estudiantes universitarios.

Ordenación y clasificación: En este nivel los estudiantes están en capacidad de describir una figura y relacionarla con otras, identifican condiciones mínimas y necesarias para establecer clases de figuras; empiezan a tener algún significado las definiciones; se les dificulta comprender las demostraciones formales.

Los investigadores mencionados, afirman que son pocas las personas que llegan al nivel siguiente, dado que ya se debe poseer una visión globalizada de la matemática.

Deducción formal: Se inicia el proceso de deducción y construcción de demostraciones a partir de teoremas y axiomas, se reconoce la validez y aplicabilidad de un axioma como parte necesaria en las demostraciones lógicas, se reconocen diferentes vías para llegar a un mismo resultado; se comprenden las relaciones establecidas entre las diferentes propiedades de las figuras.

Rigor: En este nivel se conocen y manejan los diferentes tipos de geometrías desarrolladas. Es el punto inicial para la realización de propuestas novedosas a nivel científico por el nivel de abstracción desarrollado hacia la geometría, a él llegan los matemáticos puros.

Ahora bien, para desarrollar en los estudiantes las capacidades y los conocimientos necesarias en cada nivel, los Van Hiele proponen que en cada uno de estos se deben implementar unas fases específicas para verificar el paso de uno a otro de forma adecuada. Estas fases son:

Diagnóstico. El docente realiza preguntas (provoca un dialogo con el estudiante) que brinda información en relación con la claridad de los conceptos que tiene este último, el vocabulario que posee y la forma como lo utiliza. Soporte que lleva al maestro a definir el punto de partida de la actividad académica.

Orientación dirigida: aspecto en el que se puede observar la habilidad del docente para planear y organizar de forma progresiva el trabajo a realizar, la concreción de las actividades (deben ser cortas y orientadas a obtener respuestas puntuales), los materiales deben permitir el uso de variedad de recursos didácticos (armado de

figuras de forma manual, uso geoplano, uso de la geometría dinámica) y la claridad de los propósitos que se pretende alcanzar (se debe evitar la memorización,). Las actividades deben llevar de forma gradual al estudiante a la consecución de las metas del nivel

Explicación: En esta fase el estudiante tiene la oportunidad de socializar lo aprendido entre sus pares y también con el maestro, siendo importante el apoyo del docente para afinar los conceptos nuevos así como para orientar el uso adecuado del vocabulario. Esta actividad permite al estudiante aclarar ideas, organizarlas e integrarlas a sus estructuras.

Orientación libre: Momento dedicado a la actividad individual del estudiante donde aborda tareas más complejas, pero enmarcadas dentro de los aprendizajes, de modo que le permitan desarrollar la creatividad, la investigación, encontrar nuevas dudas y posibles respuestas, estableciendo relaciones diferentes a las aprendidas, entre lo estudiado y lo propuesto.

Integración: Luego de haber realizado las fases anteriores el estudiante finalmente realiza una actividad que le permita con el apoyo docente, resumir lo aprendido, mirarlo de forma global, reconocer las relaciones nuevas e integrar a sus estructuras conceptuales el nuevo conocimiento, mejorando su nivel de comprensión y dejándolo en el punto de partida del siguiente nivel, en donde iniciará nuevamente cada una de las fases mencionadas.

La teoría permite un trabajo secuencial y progresivo, aspecto importante para el desarrollo de un aprendizaje por procesos en los estudiantes, de otra parte reconoce la evaluación y retroalimentación como una actividad permanente.

En conclusión, se puede observar que en lo relacionado con el estudiante, este puede desarrollar una actividad académica enfocada al aprendizaje de los conceptos geométricos de manera gradual y acorde al desarrollo de su pensamiento espacial; y en relación con el docente le permite a través de las actividades programadas identificar las dificultades o debilidades que se observen en el proceso de los niños, jóvenes o adultos garantizando altos niveles de aprendizaje y bajos porcentajes de reprobación, situación que actualmente está afectando la movilidad de los estudiantes dentro del sistema educativo colombiano.

3.2.4. Modificabilidad Estructural Cognitiva

La Modificabilidad Estructural Cognitiva (MEC)[24], tiene su origen en los estudios realizados por Reuven Feuerstein (1921), quien desde muy joven se interesó en la enseñanza. Observó como estudiantes con bajo potencial y con una gran dificultad de aprendizaje podían transformar sus debilidades, a través de una intervención pedagógica específica, para alcanzar los requerimientos básicos exigidos por una determinada comunidad. La propuesta aún no obtiene un reconocimiento universal, pero se ha experimentado en España, Brasil, Israel y en algunas zonas de Colombia, obteniendo resultados satisfactorios.

Feuerstein, víctima del holocausto tuvo que huir de su país de origen, fue estudiante de Jean Piaget, en la universidad de Ginebra entre 1950 y 1955, las ciencias en las que más ha profundizado son la psicología del desarrollo, la clínica y la cognoscitiva. En Jerusalén fue maestro de escuela de niños que provenían de los campos de concentración Nazi.

El autor de esta teoría, considera que la inteligencia se desarrolla de manera conjunta con el proceso de vida del individuo, de suerte que si los hábitos de crianza y su calidad de formación no es la adecuada para alcanzar su propia identidad y su máximo nivel en todas las dimensiones, esta persona debe realizar actividades encaminadas a fortalecer la inteligencia y el pensamiento, para llegar a desarrollarse de igual manera que aquellos que se han formado dentro de condiciones sociales, políticas, económicas y familiares óptimas o ideales.

Según Feuerstein, la inteligencia se compone de una serie de funciones cognitivas que apoyadas en funciones innatas, aspectos culturales, estrategias y actitudes orientadas a la formación, se desarrollan de manera eficiente. Luego de alcanzar un primer estadio en el desarrollo humano, se buscan otros avances más profundos, llegando a potenciar las operaciones mentales que son procesos superiores del desarrollo del potencial de aprendizaje.

Estas funciones cognitivas fueron identificadas a través del trabajo con niños provenientes de situaciones muy difíciles en lo social o/y en lo cognitivo. La percepción de estos estudiantes estaba dada en relación interna con los estímulos que habían interiorizado, por tanto, pudo verificar que cada individuo percibe y construye un

mundo acorde a su experiencia y al concepto que tenga de sí mismo. Feuerstein no comparte el concepto de medir la inteligencia con test psicométricos; considera que estos se preocupan únicamente de los resultados, dejando de lado los procesos que necesariamente realizan para llegar a la respuesta de una situación específica, advirtiendo que los mencionados Test de Inteligencia, no tienen en cuenta todos los factores asociados que existen como son: los ambientes sociales, culturales, las relaciones familiares y la estabilidad emocional, que afectan el potencial de aprendizaje de las personas.

Feuerstein habla de este potencial de aprendizaje desde dos puntos diferentes. El primero lo refiere a la capacidad que poseen muchos individuos para pensar y desarrollar una conducta más inteligente que la observada a través de sus manifestaciones, lo que implica que los seres humanos desarrollan una serie de habilidades que en un momento determinado no utilizan de la mejor manera, por falta de conocimiento de las mismas o por subutilizarlas.

El segundo, trata del fenómeno de la Modificabilidad humana, que se consigue a través de una situación de aprendizaje estructurado, y es aquí donde el docente puede realizar un gran aporte, apoyando a los estudiantes para que adquieran una serie de estrategias que les permitan afrontar el aprendizaje con una mirada diferente, mirada de optimismo frente a que puede desarrollar sus capacidades, para superar las dificultades que encuentra en este proceso.

El aporte del docente se referencia en esta teoría como mediación docente, término que significa servir de puente entre el conocimiento y el estudiante. Por tanto, el maestro requiere conocer una serie de criterios que debe tener en cuenta mientras realiza esta mediación, para lograr, primero, interesar al estudiante, y segundo, llevarlo a encontrar sus habilidades y debilidades, para seguir progresando en las primeras y superar las últimas.

Capítulo 4

Propuesta Didáctica

4.1. Introducción

El trabajo que se plantea para los estudiantes, pretende dar respuesta al interrogante: **¿Cómo llevar al estudiante de grado sexto y séptimo a inferir el resultado de aplicar una serie de movimientos rígidos (rotación, traslación, reflexión) a una figura geométrica?** y está organizado progresivamente de forma tal que a partir de actividades reales se llegue a situaciones académicas, y alrededor de ellas, el joven o el adulto, adquiera nociones de la temática que se está desarrollando, teniendo presente el aprendizaje significativo, el primer nivel de Van Hiele y la Modificabilidad Estructural Cognitiva. Se utilizan videos, animaciones y prácticas orientadas a brindar herramientas para lograr conceptualizaciones, que se evidencia en la siguiente parte del taller. Estas últimas, se presentan sin mucha rigurosidad teniendo en cuenta el nivel académico de la población a la cual va dirigida la propuesta.

4.2. La propuesta de trabajo.

4.2.1. Objetivo

Desarrollar, con apoyo de la tecnología y a partir de situaciones reales, ambientes propicios para inducir los conceptos de traslación, rotación y reflexión, en los estudiantes del ciclo tres (grado sexto y séptimo) de la jornada nocturna, en el colegio La Estancia San Isidro Labrador, de la localidad 19, Ciudad Bolívar.

4.2.2. Estructura de los Talleres

Los talleres están disponibles en la página <http://tmp.colegiocundinamarca.edu.co>, y su estructura es la siguiente:

1. Objetivo
2. Recursos
3. Videos
4. Animaciones
5. Conceptualizaciones
6. Ejercicios de aplicación.

4.2.3. Metodología

1. Se accede a los talleres en la dirección <http://tmp.colegiocundinamarca.edu.co/>, apareciendo estos en forma secuencial.
2. Conforme a las fases de aprendizaje planteadas por el método Van Hiele, se hace el primer taller como diagnóstico.
3. Desde el segundo taller, se encuentra que cada uno, tiene un video que se relaciona con la temática a trabajar; se desarrolla la segunda fase del método.
4. Paso seguido, se insertan en la página, dos animaciones, relacionadas con la temática, con un enfoque más pedagógico y académico. Se trabaja de esta forma la tercera fase del método, que corresponde a la explicación.
5. Se muestra luego en negrilla la conceptualización, se hace con el objetivo de resaltar lo que se quiere inducir. Reforzando de esta manera, la explicación.
6. Para finalizar los talleres, se plantean algunos ejercicios en Cabri II y en otros programas. Esta última actividad, está orientada hacia el trabajo con diferentes formas geométricas, buscando ampliar el espectro de conocimiento de las figuras. En estas actividades se trabajan la explicación, la orientación libre y la integración.

4.2.4. Trabajo del docente

El docente deber ser parte activa en el proceso de realización de los talleres, orientando el trabajo desde la particularidad de los grupos.

Los talleres deben ser mediados de forma tal que:

1. Se pueda llevar al estudiante, desde actividades reales (como las mostradas en los videos) a situaciones geométricas que brinden la posibilidad de hacerlo significativo, mostrando las oportunidades que el conocimiento brinda al hombre tanto en la tecnología como en el arte.
2. Se adquiera por parte del estudiante, el vocabulario necesario para tratar los diferentes movimientos, facilitando la comprensión de los mismos en situaciones de aprendizaje futuras que posibiliten la profundización.
3. Se propicie en el estudiante seguridad y confianza, para enfrentar el manejo de la tecnología y la adquisición de conocimientos a partir de una interacción directa y activa.
4. Para lograr la cuarta fase de la propuesta de Van Hiele, el profesor debe generar espacios para realizar plenarias y establecer conclusiones de lo desarrollado en cada taller.

4.2.5. Resultados

Se espera que el estudiante desarrolle un concepto intuitivo de los movimientos rígidos del plano como son: la traslación, la rotación y la reflexión, así como la posibilidad de aplicarlos en los momentos que lo necesita o lo requiera su proceso de formación.

La evidencia del trabajo se puede verificar mediante la implementación de actividades que conlleven la aplicación de los movimientos mencionados anteriormente, con objetivos claros, como es la conformación de diferentes tipos de teselados.

Capítulo 5

Anexos

5.1. Introducción

Se presentan a continuación, ocho talleres, cuya estructura está fundamentada de acuerdo a la propuesta de desarrollo de las fases establecidas en el método Van Hiele, para avanzar por los diferentes niveles. En estos talleres se trabaja el primer nivel, llamado de Visualización y Reconocimiento.

5.2. Taller N°1

PRUEBA DE ENTRADA

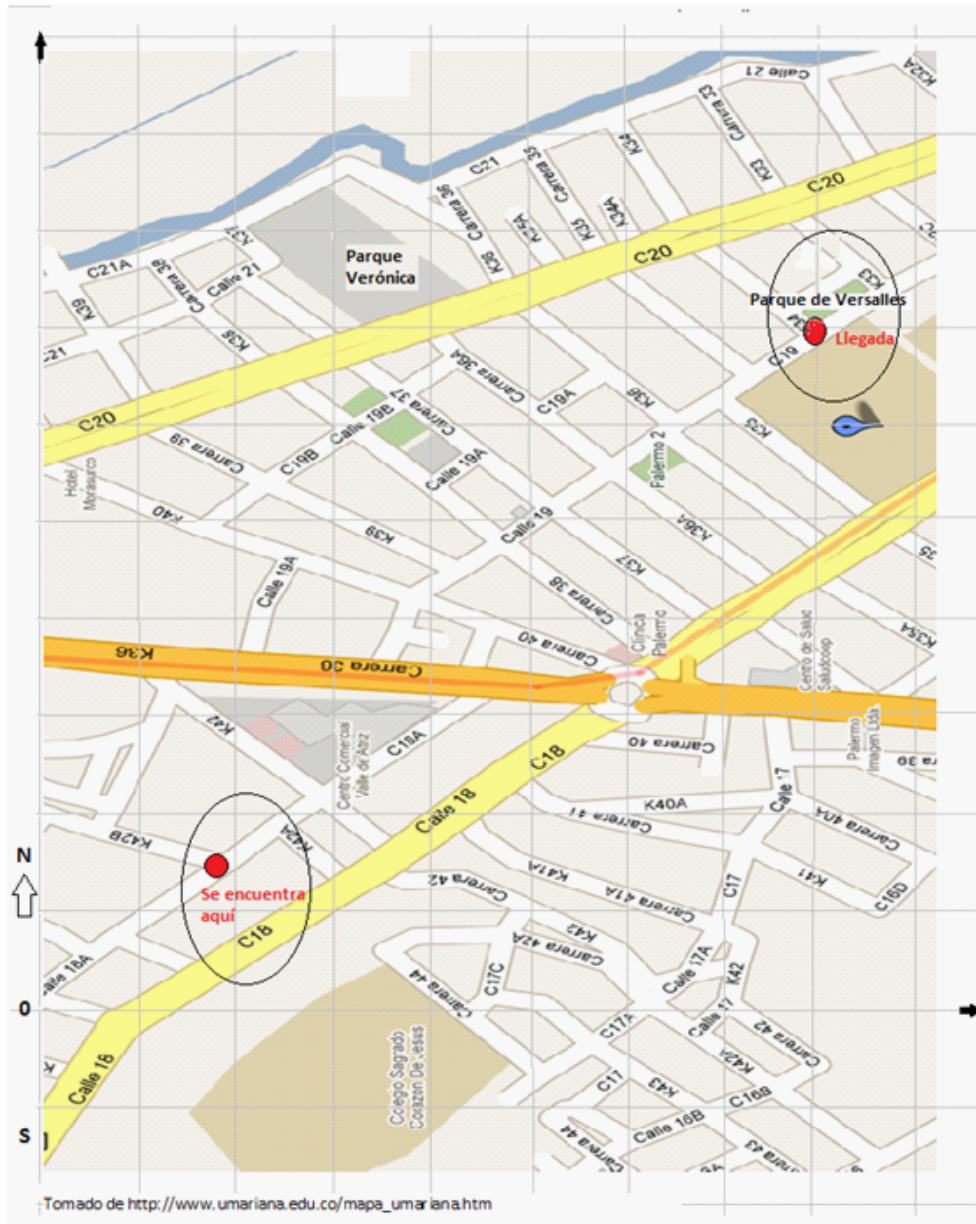
OBJETIVOS:

Reconocer y aplicar traslaciones y giros en una situación específica.

Reconocer y valorar simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño.

1. SITUACIÓN

Leonardo vive en la ciudad de Pasto, trabaja en el sitio que se señala en el mapa, debe desplazarse al parque Versalles. (Ver gráfico).



Actividades a desarrollar.

- Identifique y describa al menos dos rutas que pueda utilizar Leonardo.
- ¿Cómo orientaría a Leonardo a seguir una de las rutas?

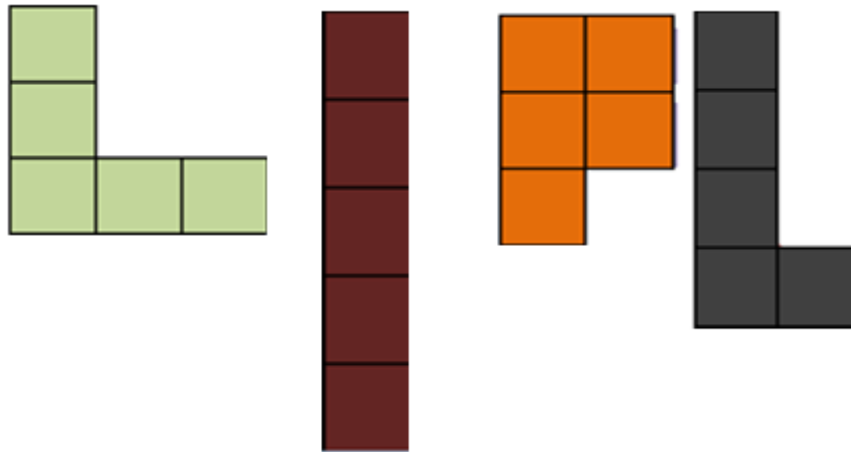
Realice en el mapa anterior, la siguiente ruta:

Camine por la carrera 42 B hasta la esquina, gire a la derecha y avance

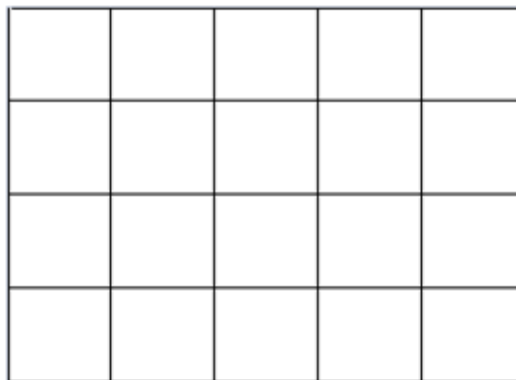
hasta la carrera 42, gire ahora a la izquierda, llegue hasta la carrera 36, gire a la derecha y vaya hasta la calle 19 A, al llegar a la esquina gire a la derecha y busque sobre la carrera 40, la calle 19, gire a la izquierda y por la calle 19, avance cuatro cuadras, gire nuevamente a la izquierda y avance hasta la calle 20, cruce la calle y llegue al parque.

- c) ¿Usted considera que la ruta realizada, le permite llegar al parque Versalles?
SI __ ¿Por qué? NO __ ¿Por qué?

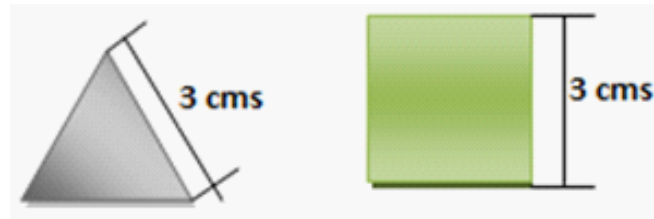
Con las siguientes piezas se pueden armar varios rompecabezas infantiles



2. Utilizando todas las piezas, arme un rectángulo similar al de la figura



A continuación se presenta un triángulo equilátero y un cuadrado, con las medidas dadas en cada una de las figuras.



3. Dibuje en diferentes colores y recorte tantos triángulos equiláteros y cuadrados como sean necesarios, para cubrir completamente la superficie de una hoja blanca, con ellas.

5.3. Taller N°2

TRASLACIÓN

OBJETIVO:

Construir de manera intuitiva el concepto de traslación de un cuerpo u objeto, utilizando la tecnología y la Web.

Recursos

- a. Tecnológicos.
- b. Cuadernos.
- c. Lápices o esferos.

1. ACTIVIDAD

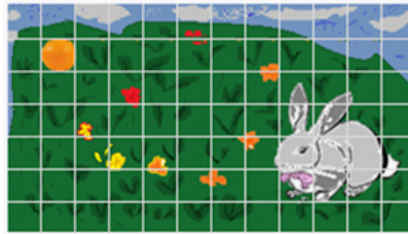
- a. Observe atentamente el video¹ y exprese que acciones realizan las personas.

<http://www.dalealplay.com/informaciondecontenido.php?con=177055>

- b. Observe la primera animación², para ello haga clic en el botón iniciar. Explique con sus palabras que sucede en ella.

¹En el video se observan varias personas en una capacitación de primer respondiente. Allí las personas muestran desplazamientos en el sentido horizontal y vertical. Tiene una duración de 29 segundos

²En la animación se observa la pelota rodando hacia el conejo, este tiene un leve movimiento y mira la pelota.



c. Haga clic en el botón iniciar y observe la siguiente animación³. Describa lo visto.



La acción realizada por la pelota y las personas, se identifica en geometría como traslación.

En pocas palabras trasladar es deslizar, mover o cambiar de ubicación un cuerpo una determinada distancia, en cualquier dirección.

Propiedades de la traslación.

En una traslación:

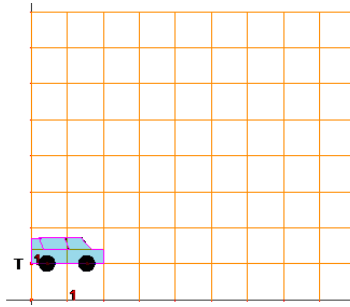
- a. La forma del objeto (figura o cuerpo), no cambia.
- b. El tamaño del objeto sigue siendo el mismo (las longitudes no cambian).

2. PRACTIQUE

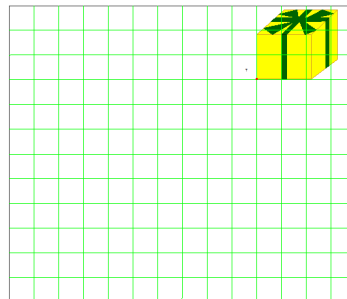
Usted encuentra abajo una serie de objetos ubicados dentro de una cuadrícula, para cada uno de ellos, se indica un punto “T”, que permitirá mover los objetos. Coja con el puntero el punto y mueva la figura de acuerdo a lo solicitado.

³La animación, muestra una persona que inicialmente está trotando en un punto fijo, cerca del carro, luego comienza un recorrido hasta la esquina. Aquí se observa un sistema de referencia para que el estudiante pueda verificar el movimiento.

- a. Traslade⁴ dentro del cuadro la camioneta, de modo que la parte trasera quede ubicada tres cuadros hacia arriba y dos hacia adelante, en relación con la posición inicial. Verifique que la nueva posición corresponda a lo solicitado.



- b. Traslade el regalo dentro del recuadro, cinco cuadros hacia la izquierda y cuatro hacia abajo. Verifique nuevamente la posición final.



- c. Observe el movimiento⁵ aplicado al árbol. ¿Qué pasó? Describa el movimiento



⁴Este ejercicio, es un applet realizado en cabri II. El estudiante toma el punto rojo marcado con la letra T y desplazar la camioneta. Lo mismo se hace con el siguiente applet.

⁵Esta animación muestra como el árbol es arrastrado por el tractor. También aquí, se deja de fondo una cuadrícula para referenciar el movimiento.

5.4. Taller N° 3

REFLEXIÓN

OBJETIVO:

Llevar intuitivamente a los estudiantes al concepto de reflexión, apoyándose en los recursos ofrecidos por la tecnología y la Web 2.0.

Recursos

- a. Tecnológicos.
- b. Cuadernos.
- c. Lápices o esferos.
- d. Un espejo.

1. ACTIVIDAD

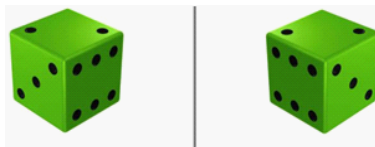
- a. Observe el video⁶ Describa cuidadosamente lo que sucede allí, además explique lo que observa.

<http://www.youtube.com/watch?v=Jsdn1GVYBIo>

- b. Observe la animación y describa



- c. Haga clic en el botón iniciar y observe la siguiente animación⁷. Describa lo visto.



⁶En el video se observan fotografías y dibujos de personas, paisajes y elementos que se reflejan en diferentes espejos. Está acompañado de una pista musical. Tiene una duración de un minuto ocho segundos.

⁷La animación muestra el dado de la izquierda deslizándose frente a un espejo. A medida que el dado baja la imagen va apareciendo. Finalmente, se observa cómo una regla toma la distancia del punto inferior izquierdo de la imagen reflejada y la compara con el del punto inferior derecho del objeto

En geometría el **Eje de reflexión**, es una recta que va a representar al espejo.

La reflexión en geometría es una transformación que permite visualizar la imagen de un punto o de un objeto a través de un espejo plano.

Propiedades de la reflexión.

En una reflexión:

- a. La forma del objeto (figura o cuerpo), no cambia.
- b. La distancia que hay de cualquier punto del objeto al eje de reflexión, es igual a la que hay del eje de reflexión al mismo punto de la imagen reflejada.

2 PRACTIQUE

Teniendo la idea de lo que quiere decir reflexión en geometría, realice las siguientes actividades.

- a. Coloque el lápiz sobre una mesa, frente a él ubique el espejo y observe la imagen que refleja. Luego coloque una hoja de papel blanca en la parte de atrás del espejo y trate de representar lo que ve en el espejo, en la hoja blanca.
- b. Observe la figura. Identifique el eje de reflexión que se encuentra en la figura y pinte la figura reflejada.



- c. Usted observa en la parte inferior un pentágono regular (figura geométrica de cinco lados iguales) y su imagen reflejada. ¿Dónde colocaría el eje de reflexión para lograr el reflejo que se muestra?



Usted encuentra en la parte inferior un triángulo rectángulo. Se desea reflejar este triángulo, con la condición que la región gris, en el triángulo reflejado, quede hacia abajo y separado del triángulo inicial.

Coloque el eje de reflexión de forma que se cumpla la condición y dibuje el reflejo



5.5. Taller N° 4

ROTACIÓN

OBJETIVO:

Llevar de manera intuitiva a los estudiantes al concepto de rotación.

Recursos

- a. Tecnológicos.
- b. Cuadernos.
- c. Lápices o esferos.
- d. Compás y transportador.

1. ACTIVIDAD

- a. Observe el video⁸ ¿Qué tipo de movimiento realiza el molino? Describalo. ¿Qué nombre le daría al movimiento y por qué?

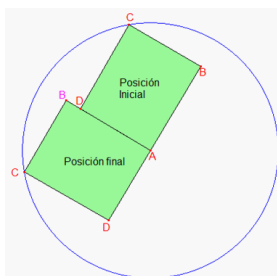
<http://www.youtube.com/watch?v=mcz-UdYUFO4&feature=related>

- b. Observe la siguiente animación⁹



Describa el movimiento que vio. ¿En qué se diferencia con el movimiento de traslación? Mire el punto rojo que tiene el minutero. Si ese punto deja una huella, imagine que forma tendría la marca. ¿Cuál es el nombre de esa forma geométrica?

- c. Observe la animación¹⁰.



- ¿Qué sucede con el rectángulo inicial?
- ¿Se movieron todos los vértices? Si __no__ ____, ¿Cuál o cuáles no se movieron?

Los movimientos que se le aplicaron a las figuras anteriores, reciben el nombre de rotación o giro. Una rotación se puede hacer en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, en geometría este

⁸En el video se observan varios molinos de viento girando. Tiene una duración de 28 segundos.

⁹La animación muestra el movimiento del minutero del reloj. Este da más de una vuelta.

¹⁰La animación, muestra el movimiento de rotación del cuadrado que está inscrito en la circunferencia. Este movimiento es de 90 grados. No se observan los dos cuadrados al tiempo.

sentido se identifica con el signo (+) y cuando el movimiento se hace en el mismo sentido de las manecillas del reloj se identifica con el signo (-). Observe la gráfica



En geometría rotar una figura es moverla alrededor de un punto. Este movimiento se puede hacer en sentido positivo o negativo.

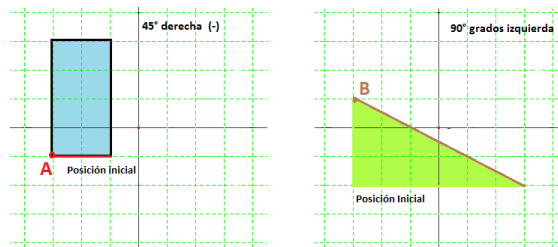
Propiedades de la rotación.

En una rotación:

- La forma del objeto (figura o cuerpo), no cambia.
- El tamaño del objeto sigue siendo el mismo.

2. PRACTIQUE

- La figura de la izquierda es un rectángulo y la de la derecha es un triángulo rectángulo. Rótelas alrededor del punto marcado, el ángulo indicado en la parte superior de cada figura.

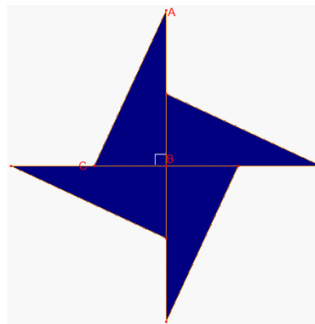


Responda:

- ¿Después de la rotación la figura sigue siendo un rectángulo?
 - ¿En qué se diferencia del rectángulo inicial?
 - ¿El triángulo rectángulo que resulta de la rotación, es también un triángulo rectángulo? Si No ¿por qué cambió?
- El triángulo ABC, tiene sus vértices en los puntos A, B y C.



Fue utilizado para realizar la composición que se muestra en la parte inferior.



- Ubique los puntos A, B y C del triángulo original, en todos los triángulos de la composición
- ¿Cuántas rotaciones o giros se necesitaron para realizar esta composición? ¿De cuántos grados fue cada giro? Para esta respuesta ayúdese con el transportador
- ¿Todos los giros se hicieron en el mismo sentido? Explique
- ¿Cambió la figura inicial? Explique

5.6. Taller N° 5

COMBINANDO MOVIMIENTOS ROTACIÓN Y TRASLACIÓN

OBJETIVO:

Desarrollar ejercicios combinando dos movimientos estudiados y aplicándolos a figuras geométricas, para tratar de que sean interiorizados los acercamientos conceptuales.

Recursos

- a. Tecnológicos.
- b. Cuadernos.
- c. Lápices o esferos.
- d. Figuras geométricas.

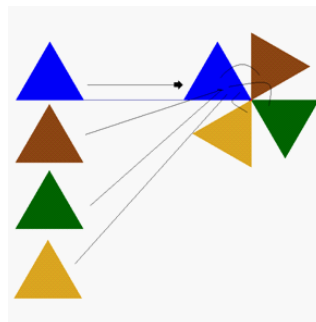
1. ACTIVIDAD

- a. Observe el video¹¹

<http://www.youtube.com/watch?v=NFu0Vq4dpp0>

- ¿Qué tipos de movimientos de los estudiados se encuentran en el video?
- ¿En qué situaciones diferentes a la presentada se encuentran estos movimientos?

- b. Observe la siguiente animación¹²



A cada uno de los triángulos se les aplicaron varios movimientos.

Escriba:

- ¿Todos los triángulos son iguales? Si No ¿Por qué?
- ¿Cuáles fueron los movimientos que se le aplicaron a cada uno de los triángulos?
- ¿El triángulo verde fue rotado? ¿En qué sentido? ¿Y al amarillo?

¹¹En el video muestra una pareja de bailarines, presentando el Pasodoble. Allí se observan movimientos de rotación y traslación. Tiene una duración de un minuto veintitrés segundos.

¹²En la animación se observa el cuadrado de color azul, desplazándose hacia la derecha y se ubica en un punto. El triángulo de color café llega al mismo punto del azul y gira, se desplaza para ir a ubicarse, al lado derecho del azul. El de color verde hace lo mismo y el de color amarillo se ubica en la posición del azul pero gira en sentido contrario.

- ¿Después de aplicados los movimientos, las figuras movidas cambiaron?
- ¿A cuál o cuáles figuras se les aplicó el mismo movimiento que al triángulo verde?

c. Observe la animación¹³.



- ¿Quién y qué es lo que se mueve en la animación?
- ¿Cuántos tipos de movimientos se pueden observar en la animación?
- Describa los distintos movimientos observados.

2. PRACTIQUE

a. Observe el techo de la casa.



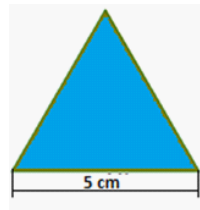
Responda:

- ¿Qué figuras observa en el techo?
- ¿Son todas iguales?
- ¿Están todas en la misma posición?

Se necesita continuar el techo de la casa con el mismo triángulo. Obsérvelo detalladamente.

¹³En la animación se observa un chico montando bicicleta.

- ¿Qué hay que hacer para terminarlo? Explique.
- b. La siguiente figura es un triángulo equilátero (todos sus lados son iguales). Dibuje varios de ellos, todos del mismo tamaño, coloréelos y recórtelos. Realice una composición libre y creativa con ellos, utilice los movimientos practicados en este taller .



5.7. Taller N° 6

COMBINANDO MOVIMIENTOS TRASLACIÓN – REFLEXIÓN

OBJETIVO:

Aplicar las ideas intuitivas de traslación y rotación al diseño de actividades creativas, en busca del desarrollo artístico y geométrico.

Recursos

- a. Tecnológicos.
- b. Hojas blancas.
- c. Instrumentos de geometría.
- d. Colores

1. ACTIVIDAD

- a. Observe el video¹⁴

<http://www.youtube.com/watch?v=0-25015r36c>

Describa con palabras lo observado en el video y especifique los movimientos realizados por las figuras.

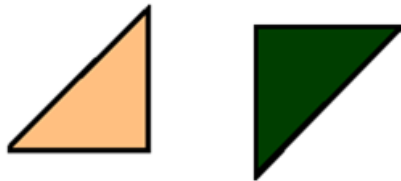
¹⁴El video muestra una composición en Cabri II, en donde se utiliza el hexágono y el triángulo:

A estas figuras se les aplica la traslación y la reflexión y se organizan de manera agradable a la vista. Se cambian algunos colores y se deja ver un resultado final. Tiene una duración de un minuto treinta y siete segundos.

- b. Observe la siguiente animación¹⁵.



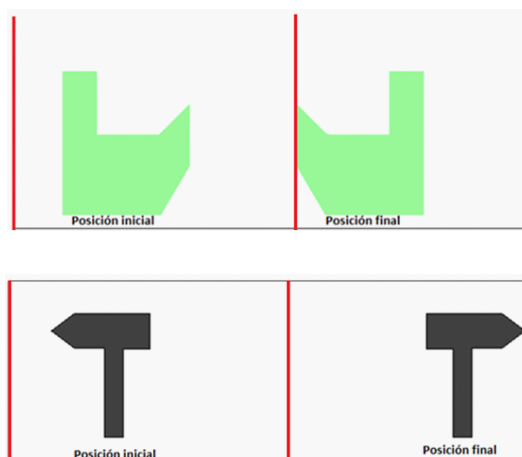
- c. Observe cuidadosamente la siguiente animación.¹⁶



2. PRACTIQUE

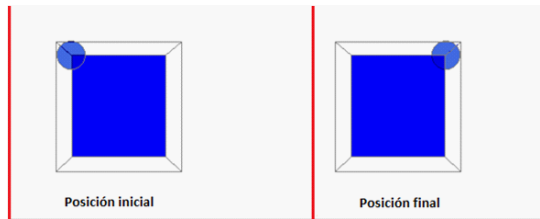
- a. A continuación observe las tres figuras que se encuentran a la izquierda, luego observe las que encuentra a la derecha. A estas figuras se les han aplicado algunos movimientos.

Tome como referencia la recta pintada de rojo y para cada caso explique cuál o cuáles movimientos se les ha aplicado a las figuras.

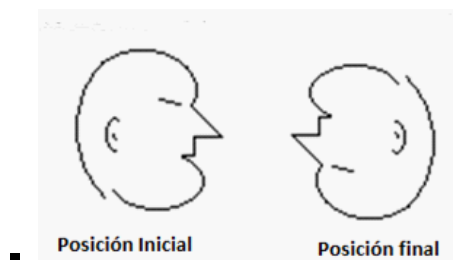


¹⁵En la animación se muestra la letra E, se le aplica un movimiento de traslación y luego se refleja.

¹⁶Aquí se muestran inicialmente, dos triángulos equiláteros de diferente color. El triángulo de color claro se le aplica la traslación y luego la reflexión, al igual que al de color oscuro. Con estos movimientos se conforma una nueva figura, un cuadrado. A este, se le aplica la reflexión y se conforma un rectángulo. A la nueva figura, también se le aplica la reflexión y se conforma nuevamente un cuadrado más grande.



- ¿Qué diferencias encuentra entre la figura en la posición inicial y en la posición final.
 - ¿Cómo es el tamaño de las figuras en la posición final en relación con la figura inicial?
 - ¿Cambia la forma de la figura en la posición final con relación a la figura en la posición inicial? Explique.
- b. Observe la cara de la posición inicial y la de la posición final. Describa los movimientos que hay que hacer para que de la posición inicial se obtenga la final.



5.8. Taller N° 7

COMBINANDO MOVIMIENTOS REFLEXIÓN - ROTACIÓN

OBJETIVO:

Realizar actividades para afianzar en los estudiantes, la idea de rotación y reflexión.

Recursos

- a. Tecnológicos.

- b. Cuadernos.
- c. Instrumentos de geometría.
- d. Colores

1. ACTIVIDAD

- a. Observe el video¹⁷

http://www.youtube.com/watch?v=_cTIGopTUpk&feature=related

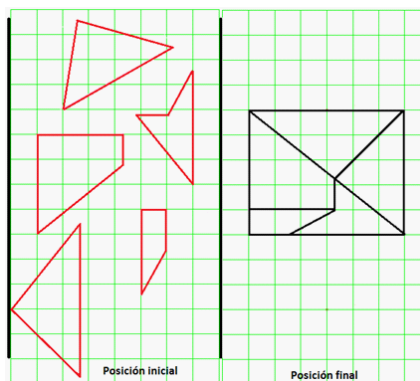
Describa con sus palabras lo observado en el video y especifique los movimientos aplicados a las figuras.

Conteste:

- ¿Qué imagen es la que se quiere mostrar?
 - ¿Cuáles figuras geométricas la conforman?
 - ¿Qué otras figuras alcanza a reconocer? ¿Cómo las arman?

2. PRACTIQUE

- a. La composición de la derecha se hizo con las figuras que se encuentran a la izquierda en la posición indicada.



Observe cuidadosamente la posición inicial de cada una de las figuras en relación con la recta pintada de negro y la cuadrícula en la cual están ubicadas.

¹⁷En el video se observa la conformación de varias figuras, de manera muy rápida, utilizando el tangram, conformado por cinco triángulos, un paralelogramo y un cuadrado. Inicia con una imagen que quiere mostrar una vela (la llama la hacen con movimiento del paralelogramo) y finaliza con la misma imagen. La duración del video es de 31 segundos.

Responda:

- ¿Cuántos triángulos hay y cuántos cuadriláteros hay en la posición inicial?
 - Escriba que movimientos se le aplicaron a cada figura para llegar a formar la composición que se observa a la derecha.
 - Describa el movimiento de cada figura.
 - Trate de armar con las fichas del ejercicio anterior una figura creativa.
- b.** Con las siguientes figuras arme una composición. Tenga en cuenta las siguientes orientaciones:



- Dibuje al menos 15 veces cada una de las figuras anteriores
 - El cuadrado debe tener seis cm. de lado.
 - El triángulo y el hexágono deben tener tres cm. de lado.
 - Todos los triángulos píntelos de un mismo color, cambie el color para los hexágonos y escoja un tercer color para los cuadrados.
- c.** Recórtelas y cubra con ellas una hoja de papel, sin olvidar que entre ellas no deben quedar espacios vacíos.

5.9. Taller N° 8

COMBINANDO MOVIMIENTOS TRASLACIÓN - REFLEXIÓN - ROTACIÓN

OBJETIVO:

Realizar actividades para incentivar la creatividad de los estudiantes, mediante la realización de composiciones geométricas con la aplicación de movimientos de rotación, reflexión y traslación, a figuras geométricas.

Recursos

- a. Tecnológicos.
- b. Cuadernos.
- c. Instrumentos de geometría.
- d. Lápices de colores

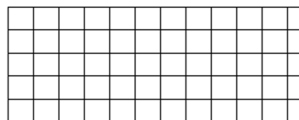
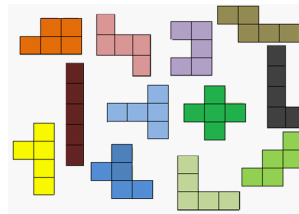
1. ACTIVIDAD

- a. Observe el video¹⁸

<http://www.youtube.com/watch?v=RY5-5zpOMxc&NR=1>

Describe lo observado.

- b. Esté atento a la siguiente animación¹⁹



Conteste:

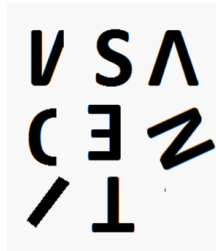
- En la animación, ¿qué movimientos observó que se le aplicaran a las figuras, con las que se armó el rectángulo de la parte inferior?

2. PRACTIQUE

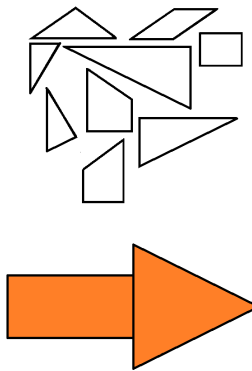
- a. Con las siguientes figuras y aplicándoles los movimientos estudiados (traslación, rotación y reflexión), que considere adecuados, arme la palabra "MOVIMIENTOS"

¹⁸El video muestra como a partir de una figura base, se va conformando por reflexión, un teselado. Tiene una duración de 35 segundos.

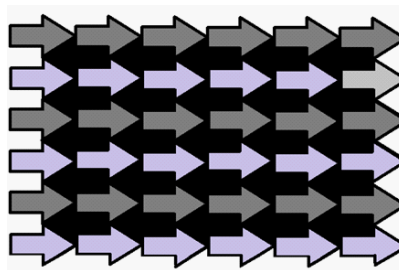
¹⁹En la animación se conforma un rectángulo, como la figura rectangular cuadrículada mostrada, a partir de una serie de movimientos aplicados a cada uno de los pentaminós, figuras que aparecen en el taller en colores.



- b. Con las figuras geométricas que encuentra en la parte inferior, arme la flecha que aparece en color anaranjado. Utilice todos los movimientos conocidos (traslación, reflexión y rotación)



- c. Busque figuras que permitan elaborar una composición como la que se muestra a continuación. Analícelas, dibújelas y realice una composición en lo posible diferente a la encontrada en su consulta.



Bibliografía

- [1] J.P., Collette. "Historia de la matemática". Volumen 2. Siglo XXI de España Editores, 1993. Pág. 485.
- [2] A. Ruiz Zuñiga. "Historia y filosofía de las matemáticas". Euned
- [3] A. Ruiz Zuñiga. "Geometrías no euclidianas". Editorial de la UCR. 1999
- [4] I.Stewart. "La historia de las matemáticas, los últimos 10000 años". Crítica, Barcelona ,2008. Pág. 30
- [5] R. Mankiewicz. "Historia de las matemáticas: del cálculo al caos". Editorial Paidós, pág. 34.
- [6] K. Morris. ".^{E1} pensmiento matemático desde la antigüedad a nuestros días". Tomo 1 pág.384.Editorial Alianza, 1994.
- [7] http://www.antroposmoderno.com/antro-articulo.php?id_articulo=152
- [8] T. Fernández B., y otros. "Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial". Universidad Santiago de Compostela y Universidad de Granada.
- [9] Ministerio de Educación Nacional. ".Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas". 2006
- [10] PISA 2006. "Marco de la Evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura". Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos. Organización para la cooperación y el desarrollo económico (OCDE).

- [11] M.Guerra. "La Geometría y su Didáctica". Revista Digital Innovación y experiencias educativas N° 31. Junio, 2010. http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_32/MATILDE_GUERRA_2.pdf
- [12] <http://www.monografias.com/trabajos14/vigotsky/vigotsky.shtml>.
- [13] S. Gimeno y otro. "Comprender y Transformar la enseñanza". Última edición. Ediciones Morata, 2002. pag 46
- [14] W. Bruger y M. Shaugnessy. "Caracterización de los Niveles de Van Hiele de Desarrollo de la Geometría". 1986
- [15] I. Wirth. "Las ciencias bajo Napoleón". <http://inmf.org/isisciencias.htm>.
- [16] "Napoleón y las ciencias". <http://www.historiasdelaciencia.com/?p=200>.
- [17] M. Dalcin. "El teorema de Napoleón". Instituto de profesores Artigas. <http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesV7n12006/Napoleon/index.html>.
- [18] "Napoleon's Theorem". <http://www.mathpages.com/home/kmath270/kmath270.html>
- [19] F. Díaz y otros. "Estrategias docentes para un aprendizaje significativo". Segunda edición. Editorial McGraw Hill. 2002
- [20] A. Casillas. "Modificabilidad Estructural Cognitiva, una propuesta dignificante. Primer Congreso Nacional Pedagogía por la dignidad". Medellín (Colombia). Septiembre 2008.
- [21] F. Fouz. "Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría". Ataritzar Bidea, 1620013. Donostia.
- [22] S. Rizzolo. "Diseño de actividades geométricas interactivas en el marco conceptual Modelo de Van Hiele". <http://www.coopvvg.com.ar/sergiorizzolo/>.
- [23] <http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesV7n12006/Napoleon/index.html>.
- [24] <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/investigadores/1609/article-74538.html>.