UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Análisis de una Modificación del Coeficiente Bicuadrático

Edwin Mauricio Tocora Rubio

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá, Colombia
Año 2017

Análisis de una Modificación del Coeficiente Bicuadrático

Edwin Mauricio Tocora Rubio

Tesis o trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Maestría en Ciencias, en el Área de Estadística.

Director:
Ph.D. Carlos Eduardo Alonso Malaver

Línea de Investigación:
Estadística Robusta
Grupo de Investigación:
Geoestadística

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá, Colombia
Año 2017

Título en español

Análisis de una Modificación del Coeficiente Bicuadrático.

Title in English

Analysis of Modified Biweight Correlation Coeficient.

Resumen: Uno de los pilares de todo modelo en estadística clásica, es el conjunto de supuestos, ya que a partir de éstos se desarrollan la bondades del mismo; supuestos que pueden ser una fortaleza y una debilidad, porque su incumplimiento hace que las propiedades adecuadas para los modelos no se tengan; y así, no sean deseables o en muchos casos no sean válidos para analizar ciertos conjuntos de datos. A partir de lo anterior se ha desarrollado un conjunto de herramientas bajo la categoría o área conocida como "*Estadística Robusta*", cuyo objetivo principal puede resumirse como construir o proponer herramientas estadísticas cuya sensibilidad sea baja ante incumplimientos de los supuestos asumidos en las herramientas planteadas desde la estadística clásica. En ésta área se encamina el presente trabajo, que a partir del estudio del estimador del Coeficiente de Correlación de Pearson, se analiza una modificación del Coeficiente de Correlación Bicuadrático, ϱ estimador, el cual presenta un excelente comportamiento ante la presencia de datos atípicos. El análisis presentado se hace a partir de la forma funcional, esto es, evaluando el comportamiento de ϱ asuminedo que se observa $\mathbf{X} = (X, Y)$ vector aleatorio con distribución normal truncada, con vector de medias igual a cero, varianzas igual a uno y ρ desconocido.

Abstract: One of the main pillar of the whole statistic classic model is the set of assumptions, because based of the assumptions the qualities are developed from the same, the assumptions are a strength and a weakness because its breach make that the good properties of these models is not to be taken and they are undesirable or in many cases don't be valid for analyzing some set of data. Based on the above, a set of tools has been developed under the category or area known as "Robust Statistic" whose main purpose to build or propose statistics tools whose sensitivity be low before breach of the assumptions allowed on the tools put forward in the classic statistic. This study is focused in that area, in which a modification on the Biweight Correlation Coeficient is analyzed, estimator which has been studied before like estimator of Correlation Coefficient Person's and presents and excellent behavior in front of outliers data. The analysis is made from a functional perspective, this is, we evaluate the behavior of ϱ assuming that the observed random vector $\mathbf{X} = (X, Y)$ has a truncated normal distribution, with zero mean vector, variance equal to one and unknown ρ.

Palabras clave: Función Generatriz de Momentos, Estimación Robusta, Estimador-M, Distribución Truncada, Coordenadas Polares.

Keywords: Moment Generator Function, Robust Estimation, M-Estimator, Truncated Distribution, Polar Coordinates.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobado

Jurado

Jurado

Director
Carlos Eduardo Alonso-Malaver

1 de Diciembre de 2017

Dedicado a

Dedico esta tesis a mis padres Floresmiro y Eloisa, quienes siempre han creido en mí y me han motivado a superarme cada día.

A mi hermano Cesar quien ha sido un pilar espiritual y academico a lo largo de mi carrera alentándome cuando he encontrado tropiezos en el camino.

A mi novia y amigos quienes me brindaron una palabra de apoyo y apostaron a que no me rindiera en medio del camino creyendo siempre que lo lograría.

A todos ellos les dedico esta tesis.

Agradecimientos

"Si un hombre no está agradecido por lo que tiene, es probable que no sea agradecido por lo que tendrá."
Frank A. Clark.

Quiero agradecer sinceramente a aquellas personas que compartieron su conocimiento conmigo para hacer posible la conclusión de esta tesis, especialmente a mi tutor y amigo Carlos Eduardo Alonso-Malaver, por sus consejos y estar siempre dispuesto con su asesoría.

A mis compañeros y amigos Cesar Tocora, Diego González, David Arcila, Oscar Rodriguez, Javier Sierra, Willie Hernández, Veronica Velandia, Yovani Villanueva y Oscar Sierra, por su gran ayuda cuando me enfrentaba con algunos de los problemas que surgían en el camino.

A mis padres por su infinita paciencia.

Índice

Índice **I**

Índice de cuadros **III**

Índice de figuras **IV**

Introducción **V**

1. Marco Teórico **1**

1.1. Función Generatriz de Momentos 1

1.2. Proceso Estocástico Estacionario 2

1.3. Estimadores-M 3

1.3.1. Formas Funcionales 3

1.3.2. Estimadores-M 4

1.3.3. Las ψ-funciones 5

2. Desarrollo Histórico del coeficiente de correlación Bicuadrático **7**

2.1. Estimador de escala de Lax 7

2.2. Generalización de la Covarianza 8

2.3. Estimadores de Correlación 9

2.4. Estimador de la Función de Autocorrelación 10

2.4.1. Estimador Bicuadrático de la Función de Autocovarianza 10

2.4.2. Estimador Bicuadrático de la Función de Autocorrelación 10

2.5. Antecedentes Covarianza Bicuadrática 11

2.5.1. Normales Truncadas 11

2.5.2. Estimación del coeficiente de correlacíon 12

2.6. Estimador inicial - Estimador Alonso-Martínez 12
2.7. Modificación propuesta 13

3. Resultados **16**
3.1. Varianza Bicuadrática 16
3.1.1. Función bicuadrática 16
3.1.2. Función de densidad de M_1 17
3.1.3. Varianza en función de los valores esperados de M_1 18
3.2. Covarianza Bicuadrática 19
3.2.1. Función de covarianza Bicuadrática 19
3.2.2. Función de densidad de $\mathbf{M}$ 20
3.2.3. Covarianza en función de los valores esperados de $\mathbf{M}$ 20
3.3. Función generatriz de momentos de M_1 y $\mathbf{M}$ 20
3.3.1. Función generatriz de M_1 y $\mathbf{M}$ 21
3.3.2. Momentos de M_1 y M 21
3.3.3. Derivadas de la Función Generatriz de M_1 y $\mathbf{M}$ 22
3.4. Derivadas de la Función Generatriz de Momentos 24
3.4.1. Derivadas con respecto a t_1 25
3.4.2. Derivadas con respecto a t_2 26
3.4.3. Derivadas conjuntas con respecto a t_1 y t_2 27
3.5. Valor de la Varianza y covarianza bicuadrática 28
3.5.1. Métodología del cálculo de los valores c_2, $I^{(h)}$ y $I^{(h,s)}$ 28
3.5.2. Valores de c_2 29
3.5.3. Cálculo de los valores esperados 29
3.5.4. Varianza y Covarianza Bicuadrática para variables aleatorias dependientes 30
3.6. Valores de $\varrho_{\psi_{XY}}$ 30

Conclusiones y Trabajo futuro **34**

Bibliografía **36**

Anexos **39**
.1. Anexo A 39
.2. Anexo B 39
.3. Anexo C 49
.4. Anexo D 50

Índice de cuadros

3.1. Valores de c_2 de acuerdo a los valores de ρ y k 29
3.2. Valores de ϱ de acuerdo a los valores de ρ y k 31

Índice de figuras

2.1. Detección de Datos atípcos 13

3.1. Distribución Normal Marginal Truncada para distintos valores de ρ con respecto a la Distribución Normal Estándar. 19

3.2. Valores de c_2 para $k = 3$ 29

3.3. Valores de c_2 para $k = 6$ 30

3.4. Valores de c_2 para $k = 9$ 30

3.5. Valores de ρ para $k = 3$ 32

3.6. Valores de ρ para $k = 6$ 33

3.7. Valores de ρ para $k = 9$ 33

Introducción

Los modelos estadísticos dependen explícita o implícitamente de una serie de supuestos. Sin embargo, ante variaciones de éstos se pueden presentar fallas o incumplimientos en las propiedades estadístico-matemáticas llevando a errores en las interpretaciones de dichos modelos. De ésta observación se desprende la importancia de estudiar el desempeño del modelo asumiendo violaciones de los supuestos, i.e. incumplimientos que son frecuentemente observados en el procesamiento de datos con el objetivo de encontrar situaciones en las cuales no sea recomendable usar dichos modelos y al mismo tiempo plantear herramientas alternas que no se vean afectadas por la falla en los supuestos, tarea que es propia de la Estadística Robusta. Partiendo de lo anterior en este trabajo se analiza una modificación del Coeficiente de Correlación Bicuadrático, herramienta que ésta en proceso de consrucción y que se plantea como estimador alterno del Coeficiente de Correlación.

A largo plazo se espera que el presente trabajo contribuya a plantear un estimador robusto del coeficiente de autocorrelación ρ_h, para un proceso estocástico estacionario, estimación que se ha venido realizando a partir de

$$\hat{\rho}_h = r_h = \frac{\hat{\gamma}_h}{\hat{\gamma}_0} \qquad \text{con} \qquad \hat{\gamma}_h = \frac{\sum_{t=1}^{n-|h|}(x_t - \bar{x})(x_{t+|h|} - \bar{x})}{n}, \tag{1}$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ es la serie observada y n es el numero de observaciones. El estadístico r_h como estimador del estimador clásico ρ_h es una herramienta altamente sensible ante la presencia de valores atípicos; a la vez es fundamental en el proceso de estimación de los parámetros y de análisis de series de tiempo (los residuales). A partir de ésta estimación se: identifica el modelo, construye estimadores de los parámetros, se calculan los errores estándar asociados y se verifican los supuestos del modelo.[1]

A partir de lo anterior, se inicia una investigación que aporte al planteamiento de estimadores robustos alternos o complementarios al coeficiente en (1). Con base en el trabajo efectuado por **Varcarcel** (2007) donde se plantea el coeficiente de autocorrelación a partir de la función bicuadrática ($\hat{\varrho}_h$, denominada función de autocorrelación bicuadrática) se tiene que: el estadístico clásico r_h tiene alta sensibilidad a valores atípicos, resultado ya planteado por **Chernick** (1982) mediante el intervalo de influencia en donde muestra que el estimador es altamente sensible ante la presencia de datos atípicos. En **Tunjano** (2006) se evidencia que $\hat{\varrho}_h$ es altamente robusto, situandolo como una mejor herramienta en el análisis de la estructura de correlación de series de tiempo. Sin importar el tamaño de la

[1] **Wey** (2006), **Valcarcel** (2007).

muestra, el valor medio de $\hat{\varrho}_h$ siempre subestima el valor del parámetro de interés ρ_h, y al aumentar el tamaño de la muestra, ρ_h y $\hat{\varrho}_h$ se acercan pero nunca llegan a ser iguales.

Se encuentra entre las conclusiones del trabajo de **Alonso** (2009), que los resultados obtenidos empíricamente por **Varcárlcel** (2007), **Ricaurte** (2007) y **Tunjano** (2006), son correctos sobre el estimador $\hat{\varrho}_h$, y advierte sobre el sesgo del mismo; a partir del cual propone alternativas de ajuste con las que espera corregirlo manteniendo la robustez, esto a través de funcionales equivalentes a los estimadores planteados para la varianza, la covarianza y la correlación bicuadráticas, hallando el valor para una distribución normal bivariada. Adicionalmente, estudia las características del nuevo coeficiente cuando la correlación es igual a cero, con el fin de verificar la hipótesis de no correlación y construir a través de éste estadísticas robustas insesgadas. Y, finalmente propone modificaciones sobre el dominio de la función, base del coeficiente de correlación, con el objeto de disminuir su sesgo. Con base en lo anterior en el presente trabajo, se estudia una de las modificaciones del dominio de la función bicuadrática de **Beaton** y **Tukey** propuestas por **Alonso** (2009), para lo cual se establecen dos regiones del espacio, disminuyendo la región de análisis del estimador.

Después de esta introducción, el documento se encuentra organizado en tres partes. En la primera, se presentan algunos elementos de probabilidad, procesos estocásticos y estadística robusta, con el propósito de ofrecer herramientas básicas para la comprensión de lo presentado en éste trabajo y el contexto en el que se hace. En segundo lugar se presenta una revisión del desarrollo histórico del estimador estudiado, a partir del cual se llega al planteamiento del coeficiente de autocorrelación bicuadrático. En tercer lugar se muestran los resultados de la modificación propuesta, los cuales están organizados en cuatro secciones: planteamiento de estimador de autocorrelación bicuadrático -modificación-, definiciones de la covarianza y correlación bicuadrática, desarrollo de la función generatriz de momentos y obtención de los momentos alrededor de cero, para distribuciones normales truncadas[2]; que son los insumos principales para el cálculo de $\hat{\varrho}_h$. Algunas de las demostraciones se han incluido entre los anexos para hacer más ágil la lectura del documento; no obstante, se pueden consultar tales anexos para ampliar en la comprobación de los resultados obtenidos, si así el lector lo prefiere.

[2]Este tipo de procedimiento se propone siguiendo a **Alonso** (2009)

CAPÍTULO 1

Marco Teórico

En este capítulo se presentan los temas básicos que sustentan los desarrollos presentados en este texto. En primer lugar, se exponen los elementos teóricos de la función generatriz de momentos, posteriormente se da la definición de procesos estocásticos estacionarios y, por último se muestran los estimadores-M. El primer tema resulta fundamental dado que es la herramienta central en el desarrollo de este trabajo, el segundo tema es importante debido a que la función de autocorrelación bicuadrática ϱ_h se plantea como una herramienta alterna para la estimación de la función de correlación de un proceso estocástico estacionario. En cuanto al tercer tema, este es relevante porque las primeras raíces de ϱ_h aparecen en los trabajos de estimadores-M[1] y en este campo teórico se plantean los estimadores y parámetros poblacionales, como formas funcionales de la función de distribución acumulada.

1.1. Función Generatriz de Momentos

***Definición* 1.1.** *(Función Generatriz de Momentos)*[2]*: Sea* $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ *un vector aleatorio n dimensional. Si existe* $M > 0$*, tal que* $E(e^{\boldsymbol{t}^T \boldsymbol{X}})$ *es finito para todo* $\boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_n)^T \in R^n$ *con:*

$$\| \boldsymbol{t} \| = \sqrt{t_1^2 + ... + t_1^2} < M$$

entonces se define la función generadora de momentos $G_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{t})$ *de* $\mathbf{X}$ *(f.g.m.) como:*

$$G_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{t}) = E(e^{\boldsymbol{t}^T \boldsymbol{X}}) \text{ para } \| \boldsymbol{t} \| < M \tag{1.1}$$

[1] Al respecto véanse trabajos como los de **Andrews** (2015), **Beaton-Tukey** (1974), y **Tukey** (1977)
[2] Tomado de **Blanco** Et. Al. (2010, pág. 231).

Si se denotan los momentos conjuntos de orden $r_1, ..., r_n$ del vector aleatorio $\mathbf{X}$, alrededor del origen, como:

$$\mu_{r_1,...,r_n} = E\left(\prod_{j=1}^{n} X_j^{r_j}\right)$$

se tiene,

$$\mu_{r_1,...,r_n} = \frac{\partial^{r_1+...+r_n}}{\partial t_1^{r_1}...t_n^{r_n}} G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t}) \mid_{\mathbf{t}=(0,...,0)} \tag{1.2}$$

1.2. Proceso Estocástico Estacionario

***Definición* 1.2.** *(Proceso Estocástico): Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{X_t, t \in L\}$, definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, donde L es el conjunto de subíndices.*

***Definición* 1.3.** *(Funciones de Autocovarianza y Autocorrelación)*[3]*: Si $\{X_t, t \in L\}$ es un proceso tal que $Var(X_t) < \infty$ para todo $t \in L$, las funciones de autocovarianza $\gamma_x(\cdot,\cdot)$ y de autocorrelación $\rho_x(\cdot,\cdot)$ de $\{X_t\}$ se definen como:*

$$\gamma_x(r,s) = Cov(X_r, X_s) = E[(X_r - EX_r)(X_s - EX_s)] \quad r,s \in L$$

y

$$\rho_x(r,s) = Corr(X_r, X_s) = \frac{\gamma_x(r,s)}{[\gamma_x(r,r)\gamma_x(s,s)]^{1/2}} \quad r,s \in L$$

***Definición* 1.4.** *(Estacionariedad en sentido débil): El proceso estocástico $\{X_t, t \in L\}$, con L subconjunto de los enteros, se que dice es un proceso estacionario (en sentido débil), si y solo si,*

i. $E|X_t| < \infty$.

ii. $E(X_t) = \mu$, *no depende del tiempo* t.

iii. $\gamma_x(r,s) = \gamma_x(r+v, s+v) = \gamma_x(s-r)$ *(Solo depende de* $s-r$*).*

De lo anterior y dadas las definiciones, se tiene que dado $\{X_t\}$ un proceso estocástico estacionario se cumple $\gamma_x(s-r) = \gamma_h$ y $\rho_x(r,s) = \dfrac{\gamma_h}{\gamma_0} = \rho_h$, donde $h = s - r$.

[3]Tomado **Brockwell-Davis** Et. Al. (2013, pág 11).

1.3. Estimadores-M

En ésta sección se presentan los conceptos iniciales de los estimadores-M, los cuales han desempeñado un papel importante en las estimaciones robustas ya que ofrecen una mayor flexibilidad y robustez frente a los estimadores clásicos, caracteríisticas que se dan al ser ésto estimadores soluciones a sistemas más generales que la suma de las desviaciones al cuadrado y la suma de desviaciones absolutas y minimizan las distancia de las funciones y las observaciones de la estimación.[4].

Un camino para entender los estimadores-M es pensar en ellos como una generalización de la estimación de máxima verosimilitud de los parámetros de localización y de escala. A continuación se presenta parte de ésta generalización con el fin de mostrar cómo un estimador y un parámetro poblacional, pueden verse como funcionales de las funciones de distribución muestral y poblacional, respectivamente.

1.3.1. Formas Funcionales

Dados $x_1, x_2, ..., x_n$ valores observados de una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$, de una población con distribución normal, el método de máxima verosimilitud para hallar estimadores de la media y la varianza, conduce a resolver las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - T_n}{S_n} \right) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{x_i - T_n}{S_n} \right)^2 - 1 \right] = 0, \tag{1.3}$$

donde T_n y S_n son los estimadores de los parámetros de localización y escala respectivamente. Si definimos $\psi(x) = x$ y $\chi(x) = \psi(x)x - 1$, se tiene que las ecuaciones en (1.3), se pueden escribir como[5]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi \left(\frac{x - T_n}{S_n} \right) dF_n(x) = 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \chi \left(\frac{x - T_n}{S_n} \right) dF_n(x) = 0, \tag{1.4}$$

donde F_n es la función de distribución acumulada muestral. Si T_n y S_n son estimadores consistentes de los parámetros $T(F)$ y $S(F)$ respectivamente, y dado que la función de distribución muestral acumulada $F_n(\cdot)$ es un estimador consistente de la función de distribución poblacional $F(\cdot)$[6], se tiene que $T(F)$ y $S(F)$ se pueden definir como las soluciones al sistema de ecuaciones,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi \left(\frac{x - T(F)}{S(F)} \right) dF(x) = 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \chi \left(\frac{x - T(F)}{S(F)} \right) dF(x) = 0, \tag{1.5}$$

donde F es la función de distribución acumulada poblacional. A ésta forma de plantear los estimadores $T(F_n)$ y $S(F_n)$, y los parámetros $T(F)$ y $S(F)$, se le conoce como forma funcional. Así $T(F_n)$ y $S(F_n)$ se nombran como estimadores, y $T(F)$ y $S(F)$ como las

[4] Parafraseando a **Hoaglin** (2000).
[5] **Hoaglin** Et. Al. (2000, pág 346).
[6] **Bickel-Docksum** (1977, pág 378).

formas funcionales asociadas a estos estimadores -o equivalentes asintóticos-.

Otro camino para comprender éste planteamiento es observar que el par de estimadores, que sirven como solución a las ecuaciones en (1.3) son;

$$T(F_n) = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_t$$

y

$$S(F_n) = s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - T(F_n)]^2 dF_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_t - \bar{x})^2.$$

Los parámetros asociados a éstos estimadores, que se denominan como formas funcionales asociadas a la ecuación (1.5), vienen dados por:

$$T(F) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \quad \text{y} \quad S(F) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - T(F)]^2 dF(x). \tag{1.6}$$

1.3.2. Estimadores-M

El problema para la estimación simultánea de los parámetros de localización y escala es familiar desde la teoría clásica, donde una familia localización-escala consiste en el conjunto de densidades $(1/\sigma)f[(x-\theta/\sigma)]$ con θ y σ parámetros de localización y de escala respectivamente ($\theta \in \mathbf{R}, \sigma \in \mathbf{R}^+$). La función de densidad (o masa de probabilidad) conjunta de la muestra aleatoria $x_1, x_2, ..., x_n$ es de la forma $L(\theta, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} (1/\sigma) f[(x_i - \theta)/\sigma]$. Las estimaciones de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ y $\hat{\sigma}$ de θ y σ son valores en $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ tal que $L(\theta, \sigma)$ es máxima o de forma equivalente, su logaritmo. Si diferenciamos $L(\theta, \sigma)$ con respecto a θ y σ, se obtienen las ecuaciones de estimación para $\hat{\theta}$ y $\hat{\sigma}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{x_i - \hat{\theta}}{\hat{\sigma}}\right) = 0, \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{x_i - \hat{\theta}}{\hat{\sigma}}\right) \psi\left(\frac{x_i - \hat{\theta}}{\hat{\sigma}}\right) - 1\right] = 0. \tag{1.8}$$

Para enfatizar el paralelo con estimadores-M de localización, ψ en estas ecuaciones ésta dada por

$$\psi(u) = -\frac{d}{du} \ln f(u) = -\frac{1}{f(u)} \frac{df(u)}{du}.$$

Para estimadores-M de localización y de escala, simplemente generalizamos este par de ecuaciones obteniendo

$$\sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{x_i - T_n}{S_n}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} \chi\left(\frac{x_i - T_n}{S_n}\right) = 0. \tag{1.9}$$

Elegimos ψ y χ para dar a T_n y S_n las propiedades deseadas. En general lo deseable es que las funciones ψ y χ sean funciones impar y par respectivamente, continuas y acotadas, esto de acuerdo con **Hoaglin** (2000, pág 347).

Si se supone que la población de la cual proviene la muestra tiene función de densidad de la forma, $(1/\sigma)f_0[(x-\theta)/\sigma]$ los estimadores de máxima verosimilitud -equivalentes asintóticos-, de localización y escala, pueden ser definidos por los funcionales $T(F)$ y $S(F)$ definidos en (1.6), que satisfacen las ecuaciones[7]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{x - T(F)}{S(F)}\right) dF(x) = 0, \tag{1.10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi\left(\frac{x - T(F)}{S(F)}\right) dF(x) = 0, \tag{1.11}$$

con $\psi(x) = -\dfrac{\partial ln f_0(x)}{\partial x}$ y $\chi(x) = \psi(x)x - 1$. Los estimadores definidos en (1.10) y (1.11), donde ψ y χ no necesitan derivarse de una densidad f_0, son llamados los Estimadores-M.

1.3.3. Las ψ-funciones

Historicamente, la *Función de Hubert* fue la primera ψ-función[8]. Este tipo de función es la base para la construcción de los estimadores-M

- Huber plantea una familia de estimaciones caracterizadas por la función ψ de la forma

$$\psi_k(x) = \begin{cases} x, & \text{si } |x| \leqslant k, \\ \text{sign}(x)k, & \text{si } |x| > k, \end{cases} \tag{1.12}$$

  La ecuación (1.12) se resuelve iterativamente comenzando con la media y el rango intercuartílico 1.35 como valores inciales para T y S.

- Hampel propone una familia de estimadores-M con 3 parametros involucrando ψ-funciones cuyos gráficos son segmentos de líneas.

[7] **Andrews** Et. Al. (2015, pág 39).
[8] **Huber** (1964. Pág 73-101).

$$\psi_{abc}(x) = \operatorname{sign}(x) \begin{cases} |x|, & \text{si } 0 \leqslant |x| < a, \\ a, & \text{si } a \leqslant |x| < b, \\ \dfrac{c-|x|}{c-b}a, & \text{si } b \leqslant |x| < c, \\ 0, & \text{si } |x| \geqslant c. \end{cases} \tag{1.13}$$

La estimación T_n se encuentra resolviendo

$$\sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{x_i - T_n}{S_n}\right) = 0,$$

donde S_n es la mediana de desviaciones absolutas (MAD). La ecuación es resuelta iterativamente iniciando las iteraciones en T_n igual a la mediana.

- Otro ejemplo de una función ψ, utilizada en la construcción de Estimadores-M, es la función bicuadrática planteada por **Beaton** y **Tukey** (1974, pág 151.) y que está dada por la ecuación:

$$\psi(z) = \begin{cases} z(1-z^2)^2, & \text{si } |z| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |z| \geqslant 1, \end{cases} \tag{1.14}$$

Ésta última es de interés en éste trabajo porque a partir de ella se define los estimadores robustos de la varianza, la covarianza y el coeficiente de correlación bicuadráticos.

CAPÍTULO 2

Desarrollo Histórico del coeficiente de correlación Bicuadrático

Un caso particular de los estimadores-M para el parámetro de variabilidad son los estimadores de escala propuestos por **Lax** (1975). Con estos se buscan estimadores robustos para la varianza ante cambios en la distribución, como sucede cuando se tienen distribuciones de colas pesadas, distribuciones asimétricas u observaciones atípicas.

2.1. Estimador de escala de Lax

El desarrollo de la varianza asintótica[1] $AV(\cdot)$, para el Estimador-M de localización $T(F)$ para (1.10) y (1.11) propuesto por **Lax** (1975, pág 10) es:

$$AV(F) = \frac{S^2(F)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{x - T(F)}{S(F)}\right) dF(x)}{\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi'\left(\frac{x - T(F)}{S(F)}\right) dF(x)\right]^2}. \tag{2.1}$$

Donde las funciones ψ y ψ' son, la función presentada en la eciación (1.14) y su derivada[2] respectivamente.

A partir de ésta ecuación se plantea una familia de estimadores de escala[3], denominados ASYMPTV[4] (asymptotic variance). Ésta familia se puede escribir de la forma

[1] **Hoaglin** Et. Al. (2000, pág 416).

[2]

$$\psi'(z) = \begin{cases} (1 - z^2)(1 - 5z^2), & \text{si } |z| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |z| \geqslant 1, \end{cases}$$

[3] **Lax** (1975, pág 17).

[4] Posteriormente, son denominados A-estimadores, **Lax** (1985, pág 739).

$$\delta_{xx}^2 = nk^2 w_n^2 \frac{\sum_{t=1}^n \psi^2(z_t)}{(\sum_{t=1}^n \psi'(z_t))^2}, \tag{2.2}$$

k es una constante positiva de estandarización y

$$z_t = \frac{x_t - Med}{kw_n}, \quad Med = \text{mediana}\{x_1, x_2, ..., x_n\},$$

$$w_n = MAD = \text{mediana} \mid x_t - Med \mid.$$

La propuesta de Lax es $k = 9$, valor planteado desde las propiedades de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde $MAD \approx \frac{2}{3}\sigma$, así $kMAD = 9MAD \approx 6\sigma$, es decir al construir el estimador robusto no se tiene el cuenta las observaciones a más de 6 desviaciones estandar de la media. Pero si se cambia ésta regla y se desea dejar por fuera las observaciones a más de 4 desviaciones estandar se debe tomar $k = 6$, **Hoaglin** Et. Al. (2000, pág 417).

Las propiedades de este estimador fueron estudiadas por **Lax** (1975), **Tukey** (1977), **Martínez** (1981) y **Lax** (1985), usando simulación de MonteCarlo. Los resultados de estos trabajos permiten afirmar que δ_{xx}^2, como estimador de la varianza estandarizada, presenta un excelente comportamiento entre una amplia gama de estimadores de escala, en el sentido de ser menos sensible ante variaciones en la distribución, como es tener distribuciones asimétricas. Para un análisis más detallado de éstos resultados véase **Alonso** (2009, pág 13).

2.2. Generalización de la Covarianza

Uno de los soportes del trabajo propuesto es la generalización del concepto de covarianza planteada en **Alonso-Martínez** (2010). Dada la importancia de dicho resultado para este trabajo, a continuación se presentan algunos detalles del mismo.

Dadas dos variables aleatorias X e Y, con función de distribución conjunta y segundos momentos univariados finitos ($E(X)^2 < \infty$ y $E(Y)^2 < \infty$), la covarianza se define como

$$\gamma_{\psi_{XY}} = E[(X - EX)(Y - EY)], \tag{2.3}$$

donde $\gamma_{\psi_{XY}}$ es la definición de covarianza clásica. Ésta ecuación es generalizada a partir de las ideas de **Lax** (1975) por **Alonso** (2009, pág.17), así:

$$\gamma_{\psi_{XY}} = \frac{E[\psi(z_x)\psi(z_y)]}{E[\psi'(z_x)]E[\psi'(z_y)]}. \tag{2.4}$$

La definición clásica de covarianza ecuación (2.3) es un caso particular de esta definición, y se obtiene haciendo $\psi(x) = x$ y $\psi'(x) = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = 1$, $Z_x = X - EX$ y $Z_y = Y - EY$.

***Definición* 2.1.** *(ψ-Covarianza): Dadas dos variables aleatorias X e Y, con función de distribución conjunta y segundos ψ-momentos finitos, i.e. $E[\psi^2(X)] < \infty$ y $E[\psi^2(Y) < \infty$*[5] *la ψ-covarianza entre X e Y es*

$$\gamma_{\psi_{XY}} = \frac{E[\psi(z_x)\psi(z_y)]}{E[\psi'(z_x)]E[\psi'(z_y)]}. \tag{2.5}$$

En el caso, donde $\psi(\cdot)$ es la función bicuadrática, se hablará de la covarianza bicuadrática, y en el mismo sentido si $X = Y$, $\gamma_{\psi_{XX}}$ se denomina varianza bicuadrática.

Análogo a lo hecho en estadística clásica, una vez se define la covarianza, la definición del coeficiente de correlación es directo.

***Definición* 2.2.** *(ψ-Correlación): Dadas dos variables aleatorias X e Y, con $\gamma_{\psi_{XX}} < \infty$ y $\gamma_{\psi_{YY}} < \infty$, la ψ-correlación entre X e Y se define como*

$$\varrho_{\psi_{XY}} = \frac{\gamma_{\psi_{XY}}}{(\gamma_{\psi_{XX}}\gamma_{\psi_{YY}})^{1/2}}. \tag{2.6}$$

2.3. Estimadores de Correlación

La ecuación (2.2) se puede reescribir como

$$\delta^2_{xx} = n[kMAD_x][kMAD_x]\frac{\sum_{t=1}^n \psi(z_{x_t})\psi(z_{x_t})}{(\sum_{t=1}^n \psi'(z_{x_t}))(\sum_{t=1}^n \psi'(z_{x_t}))}, \tag{2.7}$$

y dado que que $Var(X) = Cov(X, X)$, se plantea un estimador robusto del coeficiente de correlación, dado por:

$$\hat{\varrho}_{xy} = \frac{\delta_{xy}}{\delta_{xx}\delta_{yy}}, \tag{2.8}$$

donde δ^2_{xx} y δ^2_{yy} están dados por la ecuación (2.2), y δ_{xy} es una generalización de (2.7), i.e.

$$\delta_{xy} = n[kMAD_x][kMAD_y]\frac{\sum_{t=1}^n \psi(z_{x_t})\psi(z_{y_t})}{(\sum_{t=1}^n \psi'(z_{x_t}))(\sum_{t=1}^n \psi'(z_{y_t}))}. \tag{2.9}$$

donde;

$$z_{x_t} = \frac{x_t - \bar{x}}{kMAD_x} \quad \text{y} \quad z_{y_t} = \frac{y_t - \bar{y}}{kMAD_y}.$$

Ante la presencia de datos atípicos **Tunjano** (2006) encuentra que $\hat{\varrho}_{xy}$ es un estimador sesgado y su sesgo depende del tamaño de la muestra. Además es un estimador robusto en presencia de datos atípicos como estimador del coeficiente de correlación.

[5] Esto se plantea inicialmente para polinomios

2.4. Estimador de la Función de Autocorrelación

En ésta sección se plantea el coeficiente de autocorrrelación bicuadrático, como candidato a ser un estimador robusto de ρ_h. Estos desarrollos fueron planteados en **Alonso** (2009) como una mejora de lo expuesto en **Varcárcel** (2007). La pretensión con esta exposición es dar un paso adelante en la construcción de un estimador robusto o complementario a r_h.

2.4.1. Estimador Bicuadrático de la Función de Autocovarianza

Los desarrollos que se presentan a continuación se hacen a partir de las ecuaciones (2.7) a (2.9); para facilitar su comprensión se opta por cambiar la notación de los estimadores para evitar ambigüedades.

En lo que sigue, se trabaja asumiendo que el proceso de interés $\{Y_t, t \in T\}$, es un proceso estocástico estacionario con T un subconjunto de los enteros, de donde se tiene

$$\gamma_Y(t, t+h) = \gamma_h \quad \text{y} \quad \rho_Y(t, t+h) = \rho_h \quad \text{para todo} \quad t, t+h \in T.$$

Si se nota la serie observada por $y_1, y_2, ..., y_n$, a partir de la ecuación (2.9) se tiene que el estimador bicuadrático de la función de covarianza está dado por

$$\hat{\gamma}_h = \varphi_h = n[kMAD_y][kMAD_y]\frac{\sum_{t=1}^{n-|h|} \psi(z_{y_t})\psi(z_{y_{t+|h|}})}{(\sum_{t=1}^{n} \psi'(z_{y_t}))(\sum_{t=1}^{n-|h|} \psi'(z_{y_{t+|h|}}))}. \tag{2.10}$$

El valor absoluto sobre h, se plantea para que el estimador φ_h, sea una función par en términos de h, propiedad que cumple la función a estimar, $\gamma(h)$.

2.4.2. Estimador Bicuadrático de la Función de Autocorrelación

A partir de la ecuación (2.10), y dado que al nivel del proceso $\{Y_t\}$, la función de autocorrelación está dada por:

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0},$$

el estimador natural de la función de autocorrelación está dado por:

$$\hat{\varrho}_h = \hat{\rho}_h = \frac{\hat{\gamma}_h}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\varphi_h}{\varphi_0}. \tag{2.11}$$

Con base en las ecuaciónes (2.10) y (2.11) se obtiene

$$\hat{\varrho}_h = \frac{\dfrac{\sum_{t=1}^{n-|h|} \psi(z_{y_t})\psi(z_{y_{t+|h|}})}{(\sum_{t=1}^{n} \psi'(z_{y_t})(\sum_{t=1}^{n-|h|} \psi'(z_{y_{t+|h|}}))}}{\dfrac{\sum_{t=1}^{n} \psi^2(z_{y_t})}{(\sum_{t=1}^{n} \psi'(z_{y_t}))^2}} = \frac{\dfrac{\sum_{t=1}^{n-|h|} \psi(z_{y_t})\psi(z_{y_{t+|h|}})}{\sum_{t=1}^{n-|h|} \psi'(z_{y_{t+|h|}}))}}{\dfrac{\sum_{t=1}^{n} \psi^2(z_{y_t})}{\sum_{t=1}^{n} \psi'(z_{y_t})}} \tag{2.12}$$

donde,

$$z_{y_t} = \frac{y_t - Med_y}{kMAD_y} \quad \text{y} \quad z_{y_{t+|h|}} = \frac{y_{t+|h|} - Med_y}{kMAD_y}$$

2.5. Antecedentes Covarianza Bicuadrática

2.5.1. Normales Truncadas

Las distribuciones normales truncadas han venido siendo trabajadas por diferentes autores que han ido mejorando los estimadores; algunos de esos resultados se indican a continuación. En un comienzo Pearson utilizó el método de momentos en el caso univariado y uso tablas para la solución de un problema particular dado en "*Tables for Statisticians and Biometricians*" (1930), con base en el cual **Rosenbaum** (1961) desarrolló los momentos para una normal bivariada truncada a una sola cola en busca de estimar los parámetros de media y varianza, donde las variables pueden ser correlacionadas. Entre tanto **Cohen** (1955) encontró una solución al estimador máximo verosímil para el caso bivariado donde el truncamiento es con respecto a una única variable; varias décadas después **Cohen**, **Dalal** y **Tukey** (1993) bajo el modelo de regresión lineal simple consideran dos violaciones de los supuestos estándar, las varianzas heterogéneas y los errores en las distribuciones de cola larga y proponen un nuevo método de estimación que supone únicamente que la heterogeneidad es una función localmente uniforme en la variable regresora, excepto por valores atípicos, llegando a que es sustancialmente más eficiente que los métodos de regresión robustos usuales en presencia de heterogeneidad y solo ligeramente peor cuando las varianzas son exactamente iguales. **Singh** (1960), plantea la estimación de máxima verosimilitud de la media y la varianza de una normal k-variada donde s de las variables ($s \leqslant k$) son doblemente truncadas o censuradas, bajo el supuesto de independencia.

Tallis (1961), obtiene la función generatriz de momentos (f.g.m) de la distribución normal n-dimensional; y en 1963 introduce el concepto de truncamiento elíptico en poblaciones normales y deriva la f.g.m para las distribuciones resultantes; así mismo, discute la combinación del truncamiento elíptico y radial de los problemas en dos dimensiones. **Finney** (1962), de acuerdo a **Alonso** (2009), utilizó cumulantes. En una dirección similar, **Khatri** y **Jaiswal** (1963), obtuvieron las estimaciones de los parámetros de una distribución normal bivariada simple truncadalos a través de las varianzas y covarianzas asintóticas de los estimadores, las cuales fueron directamente obtenidas usando ocho o nueve momentos y comparados con los estimadores máximo verosímiles.

2.5.2. Estimación del coeficiente de correlacíon

Sobre la estimación del coeficiente de correlación **Bebbington** (1978) propone que los datos bivariados pueden ser ajustados, de tal forma que los puntos definen la envolvente convexa, para una estimación robusta del "momento-producto" del coeficiente de correlación. **Abdullah** (1990), examina la solidez de algunos coeficientes de correlación bien conocidos, a saber, Pearson, Spearman y Kendall y muestra que estos coeficientes de correlación son suficientemente robustos frente a un número sustancial de datos atípicos, es decir, no tienen puntos de ruptura altos y propone un coeficiente de correlación basado en la menor mediana de cuadrados, mostrando que este coeficiente de correlación tiene un punto de ruptura más alto que los coeficientes de correlación conocidos.

Duncan y **Layard** (1973) aplican la simulación Monte-Carlo para comparar el rendimiento de muestras pequeñas de los procedimientos teóricos normales habituales para la inferencia sobre los coeficientes de correlación contra dos procedimientos asintóticamente robustos, uno de los cuales se basa en una agrupación de las observaciones y el otro en la técnica "jackknife". Los resultados respaldan la conclusión basada en la teoría asintótica que la prueba normal no es robusta y que el procedimiento "jackknife" funciona bien para la mayoría de las distribuciones muestreadas.

Estos diferentes resultados constituyen un precedente importante para el presente trabajo; sin embargo, como se indicó antes, se retomarán particularmente los desarrollos de **Alonso-Martínez** (2010), los cuales se abordarán en la siguiente sección.

2.6. Estimador inicial - Estimador Alonso-Martínez

En la versión del estimador estudiada por **Alonso-Martínez** (2010) se obtiene como una de sus conclusiones que el área de detección de los datos atípicos no es adecuada en el mundo bivariado dado que la misma es la aplicación independiente de criterios univariados, hecho que demuestra la importancia a la versión que se presenta en éste documento.

De vuelta sobre el trabajo de **Alonso-Martínez** (2010) se halla el valor de $\varrho_{\psi_{XY}}$ para el caso en el cual la función $\psi(\cdot)$ es la función bicuadrática dada en (1.14). Como resultado del buen desempeño de $\varrho_{\psi_{XY}}$, en especial para $k = 3, 6$ y 9, se propone la modificación sobre el dominio de la función $\psi(\cdot)$ definida en (2.5) sobre la cual se basa el coeficiente de correlación, con el objeto de disminuir su sesgo.

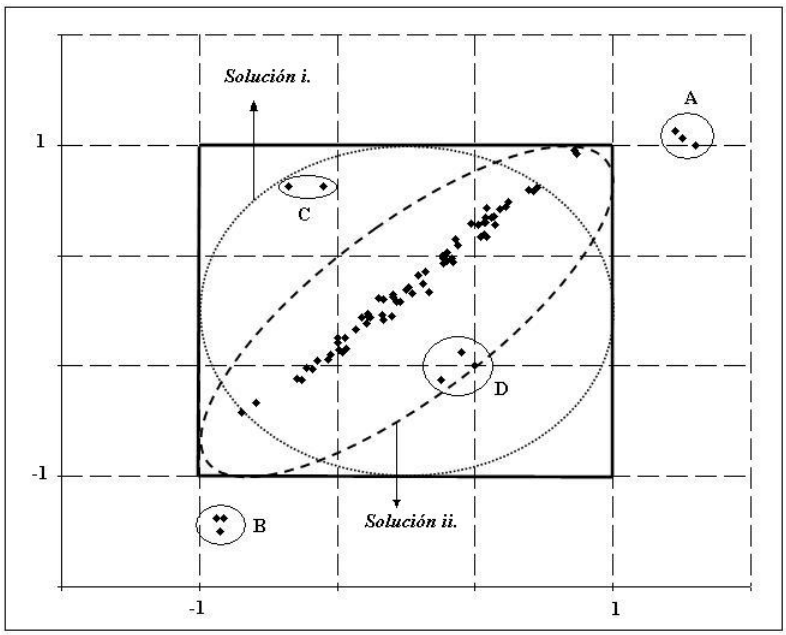

FIGURA 2.1. Detección de Datos atípcos

Dada una muestra bivariada $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$, la covarianza bicuadrática se define como en las ecuaciones (2.7) y (2.9) [ver **Alonso-Martínez** (2010]. De acuerdo con ese resultado la ecuación (1.14) se aplica para X e Y por separado de donde se tiene que un valor será considerado extremo si está por fuera del cuadrado $(-1, 1) \times (-1, 1)$, ver Figura 2.1, es decir las únicas observaciones atípicas están en los óvalos **A** y **B**. Ahora desde la perspectiva bivariada las observaciones en los óvalos **C** y **D** son observaciones atípicas, pero la forma de uso de la función bicuadrática no las detecta como tales. Se proponen entonces modificaciones de la función $\psi(\cdot)$, que buscan detectar datos atípicos en el cuadrante $(-1, 1) \times (-1, 1)$ y así disminuir la distancia entre ϱ y ρ. El trabajo se centró en la *solución i* (indicada en el gráfico); sin embargo conviene señalar que la *solución ii* se ajusta mejor al cálculo debido a que las curvas de nivel de la distribución normal bivariada son elipses. En efecto este trabajo serviría como base para desarrollar la *solución ii* en futuros desarrollos.

2.7. Modificación propuesta

La propuesta es modificar la función $\psi(\cdot)$, y trabajar sobre una forma más cercana a la ideal (Figura 2.1, *solución ii*) en la que los valores queden dentro de un conjunto de detección sea mínimo haciendo una modificación en el dominio de la función, definiendola para cada variable aleatoria, es decir:

$$\psi_1(z_x, z_y) = \begin{cases} z_x(1 - z_x^2)^2, & \text{para } z_x^2 + z_y^2 < 1, \\ 0, & \text{en otro caso .} \end{cases} \tag{2.13}$$

y

$$\psi_2(z_x, z_y) = \begin{cases} z_y(1 - z_y^2)^2, & \text{para } z_x^2 + z_y^2 < 1, \\ 0, & \text{en otro caso }, \end{cases} \tag{2.14}$$

Con estas funciones el objetivo es lograr reducir el área de detección de posibles valores atípicos, ya que genera el circulo contenido al interior del cuadrante $(-1;1) \times (-1;1)$ [ver Figura 2.1] ésta es una solución obtenida suponiendo $\rho = 0$ de acuerdo con un resultado encontrado previamente en **Alonso** (2009).

En pos de hacer la escritura más corta se introduce la siguiente notación de tal manera que la notación sea análoga a la usada en las definiciones previas

$$\psi_1(z_x, z_y) = \psi(z_x) \qquad \text{y} \qquad \psi_2(z_x, z_y) = \psi(z_y).$$

Estandarización de las variables aleatorias

El orden de presentación de los resultados, a partir de las definiciones presentadas en la sección 2.2 es el siguiente: primero se introducen los desarrollos asociados a la varianza bicuadrática (i.e. $X = Y$)[6] y posteriormente la covarianza bicuadrática ($X \neq Y$). Para variables aleatorias X y Y con distribución normal bivariada de parametros $N(0, 0, 1, 1, \rho)$ supuesto a partir del cual se procede, X y Y tienen distribución normal $N(0, 1)$.

Con este supuesto no se pierde generalidad porque si se desea trabajar con variables aleatorias de medias distintas de cero y varianzas distintas de uno basta realizar la transformación $L_1 = \mu_1 + \sigma_1 X$ y $L_2 = \mu_2 + \sigma_2 Y$ (ver **DeGroot** 2012, pág 307) y dada L, variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza σ^2 se tiene que

$$Z_L = \frac{(L - Med_L)}{9 * MAD_L} = \eta(9 * 0,67448975)^{-1}$$

con $\eta \sim N(0, 1)$. La notación se emplea de la siguiente manera: dadas dos variables aleatorias X y Y, con distribución normal bivariada con vector de medias $\mu = (\mu_1, \mu_2)^\intercal$ y matriz de varianza y covarianza dada por;

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Se dice que X y Y tienen distribución normal bivariada $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. Además para la distribución normal estándar bivariada se tiene que

$$Med_X = Med_Y = 0 \quad y \quad MAD_X = MAD_Y = 0,67448975$$

de donde las variables estandarizadas están dadas por:

[6] En el caso univariado los resultados fuerón desarrollado previavente en **Alonso** (2009), sección 4.2.3, pág 18.

$$Z_x = \frac{X - Med_X}{kMAD_X} = \frac{X}{l} \quad y \quad Z_y = \frac{Y - Med_Y}{kMAD_Y} = \frac{Y}{l} \tag{2.16}$$

con $l = k \times 0,67448975$, con k constante de estandarización definida en la ecuación (2.2) y que en el trabajo toma los valores 3, 6 y 9 según lo plantea **Lax** (1975).

CAPÍTULO 3

Resultados

El objetivo de este trabajo consiste en hallar el coeficiente de correlación bicuadrático a través de la varianza y covarianza bicuadrática. Inicialmente se planteó mediante coordenadas rectangulares -siguiendo a **Alonso** (2009, pág. 26)- de forma semejante a lo propuestos por estudios que previamente se ocuparon de la misma temática y serán tomados como base[1] No obstante, se observa que llevar las integrales a coordenadas polares, hace mas sencillos los cálculos realizados con coordenadas rectangulares se presentan en este trabajo en el **Anexo B**, de tal manera que puedan ser solucionados en trabajos futuros.

La estrategia tomada consistió en realizar una correspondencia entre coordenadas rectangulares y polares; luego usando la función generatriz de momentos, se hallan los valores esperados, que son presentados en las siguientes secciones.

3.1. Varianza Bicuadrática

3.1.1. Función bicuadrática

Si se define la variable aleatoria $\mathbf{M} = (M_1, M_2)^T$, para M_1 tenemos que

$$M_1 = \begin{cases} Z_x, & \text{para } Z_x^2 + Z_y^2 < 1, \\ 0, & \text{en otro caso }, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde Z_x es la estandarización definida en (2.16) para la variable aleatoria X con distribución $N(0,1)$. Análogamente se tiene para M_2 que

$$M_2 = \begin{cases} Z_y, & \text{para } Z_x^2 + Z_y^2 < 1 \\ 0, & \text{en otro caso }, \end{cases} \tag{3.2}$$

[1] Sección **3.5.1. Antecedentes Covarianza Bicuadrática**

donde Z_y también es la estanadrización definida en (2.16) para una variable aleatoria Y con distribución $N(0,1)$. Al escribir la función bicuadrática y su derivada en términos de la variable aleatoria M_1, se obtiene

$$\psi(Z_x) = M_1 \left[1 - (M_1)^2\right]^2, \tag{3.3}$$

$$\psi'(Z_x) = \left[1 - (M_1)^2\right] \left[1 - 5\,(M_1)^2\right], \tag{3.4}$$

respectivamente. De manera similar se obtienen las correspondientes función bicuadrática y su derivada para la variable aleatoria M_2

$$\psi(Z_y) = M_2 \left[1 - (M_2)^2\right]^2, \tag{3.5}$$

$$\psi'(Z_y) = \left[1 - (M_2)^2\right] \left[1 - 5\,(M_2)^2\right]. \tag{3.6}$$

Como puede observarse, los procedimientos para hallar la función de densidad y la varianza de las variables aleatorias M_1 y M_2 son identicos por lo que a continuación se presentan los cálculos de la función de densidad solo para M_1, entendiendo que los de la función de densidad para M_2 son semejantes y por ello no son explicitados.

3.1.2. Función de densidad de M_1

Inicialmente se presenta el caso para el cual $\rho = 0$, caso que es de interés dado que a futuro un objetivo es llegar a construir los elementos de un contraste de hipótesis, para verificar la no correlación entre dos variables. Para el caso $\rho \neq 0$, se introducen varios resultados los cuales se pueden omitir sin que se pierda el hilo de la demostración.

La función de densidad de $\mathbf{M}$ esta dada por

$$f_{\mathbf{M}}(m_1, m_2) = \begin{cases} \dfrac{\phi(m_1, m_2)}{c_2}, & \text{si } m_1^2 + m_2^2 < 1, \\ 0, & \text{en otro caso }, \end{cases} \tag{3.7}$$

donde $\phi(\cdot,\cdot)$ es la función de densidad conjunta truncada de una distribución $N(0,0,1,1,\rho)$ en el circulo de radio 1, y c_2 es la constante de corrección que hace a la función $f_{\mathbf{M}}(\cdot,\cdot)$ una función de densidad conjunta[2]. El valor c_2 esta dado por

$$c_2 = \int_{-l}^{l} \int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} f(m_1, m_2)\, dm_2\, dm_1 \tag{3.8}$$

[2]En lo sucesivo, la constante de corrección será notada como c_2 para diferenciarla de la constante c_1, empleada por **Alonso** (2009) en la función de densidad para la varianza bicuadrática en el caso univariado y así mantener la misma notación.

Caso 1. Si se supone $\rho = 0$, de la definición del vector $\mathbf{M} = (M_1, M_2)$, ecuación (3.7), se sigue que la distribución marginal de M_1 definida sobre la región Q, que corresponde al círculo indicado en la Figura 2.1, i.e. $Q = \{(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2 : m_1^2 + m_2^2 \leq 1\}$ (ver sección 2.6), es

$$\begin{aligned} f_{M_1}(m_1) &= \int_{\mathbf{Q}} f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) dm_2 \\ &= \int_{\mathbf{Q}} \frac{1}{2\pi c_2} e^{-\frac{(m_1^2+m_2^2)}{2}} dm_2 \\ &= \frac{1}{2\pi c_2} e^{-\frac{m_1^2}{2}} \int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} e^{-\frac{m_2^2}{2}} dm_2 \\ &= \frac{\phi(m_1)}{c_2} \left[\Phi(\sqrt{l^2 - m_1^2}) - \Phi(-\sqrt{l^2 - m_1^2}) \right] \quad \text{con} \quad m_1 \in (-1, 1) \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde ϕ y Φ son las funciones de densidad y distribución acumulada de la distribución normal estándar.

Caso 2. A continuación se presenta la distribución marginal de M_1 cuando $\rho \neq 0$

$$\begin{aligned} f_{M_1}(m_1) &= \int_{\mathbf{Q}} f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) dm_2 \\ &= \int_{\mathbf{Q}} \frac{1}{2\pi c_2 (1-\rho^2)^{1/2}} e^{-\left[\frac{m_1^2 - 2\rho m_1 m_2 + m_2^2}{2(1-\rho^2)}\right]} dm_2 \\ &= \frac{1}{2\pi c_2} e^{-\frac{m_1^2}{2}} \int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} e^{-\frac{(m_2-\rho m_1)^2}{2(1-\rho^2)}} dm_2 \\ &= \frac{\phi(m_1)}{c_2} \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{l^2 - m_1^2} - \rho m_1}{(1-\rho^2)^{1/2}} \right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{l^2 - m_1^2} - \rho m_1}{(1-\rho^2)^{1/2}} \right) \right] \end{aligned} \tag{3.10}$$

con $m_1 \in (-1, 1)$ y $\rho \in (-1, 1)$.[3]

En la Figura 3.1 se muestra la diferencia entre la distribución marginal truncada para los distintos valores de c_2 contra la distribución normal estándar. Se hace visible que la distancia entre ambas es cercana para valores distintos de ρ, la diferencia se hace visible para valores extremos superiores a 0.99. Con base en los resultados obtenidos en (3.9) y (3.10), en la siguiente sección se obtiene la varianza bicuadrática para M_1.

3.1.3. Varianza en función de los valores esperados de M_1

Ésta forma de plantear la función bicuadrática en términos de M_1 permite escribir la varianza bicuadrática definida en la ecuación (2.5), como

[3] La ecuación (3.9) es un caso especial de la ecuación (3.10) cuando $\rho = 0$

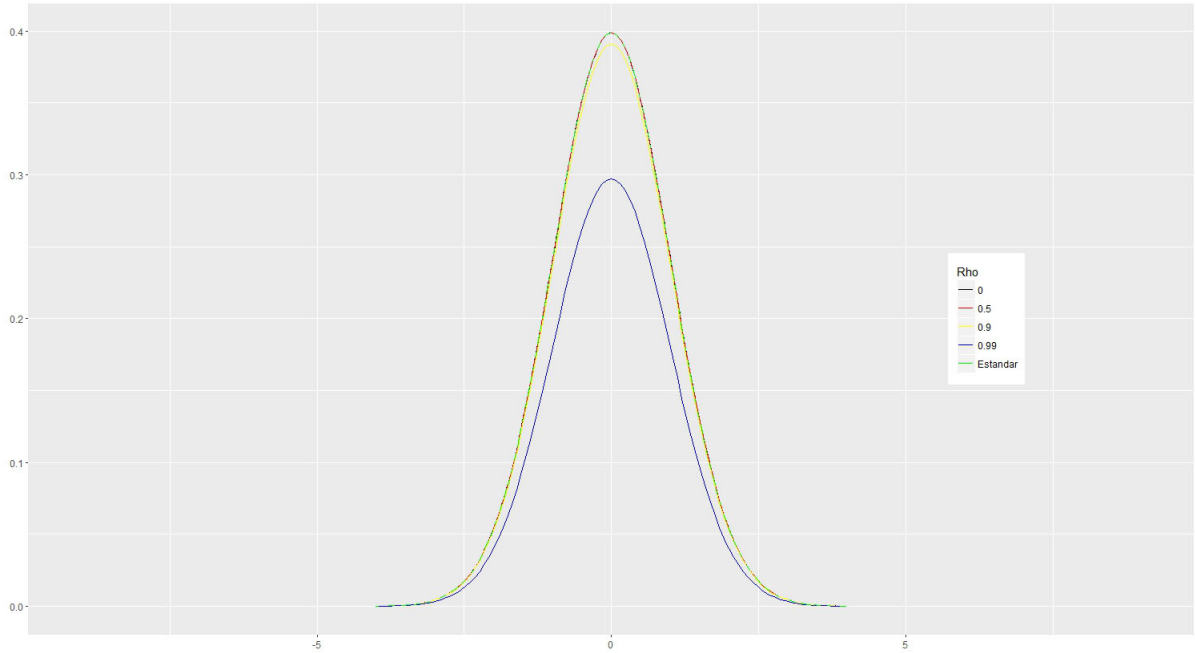

FIGURA 3.1. Distribución Normal Marginal Truncada para distintos valores de ρ con respecto a la Distribución Normal Estándar.

$$\gamma_{\psi_{XX}} = \frac{E\left(\left[M_1\left[1-(M_1)^2\right]^2\right]^2\right)}{\left(E\left(\left[1-(M_1)^2\right]\left[1-5\,(M_1)^2\right]\right)\right)^2} \tag{3.11}$$

Como muestran **Alonso-Martínez** (2010), se tiene que la varianza bicuadrática en términos de los valores esperados de la variable aleatoria M_1 está dada por:

$$\gamma_{\psi_{XX}} = \frac{E_2 - 4E_4 + 6E_6 - 4E_8 + E_{10}}{(1 - 6E_2 + 5E_4)^2} \tag{3.12}$$

donde[4] $E_h = E(M^h)$.

3.2. Covarianza Bicuadrática

3.2.1. Función de covarianza Bicuadrática

Análogo a lo presentado por **Alonso** y **Martínez** en (2010) es importante verificar el valor del coeficiente para el caso $\rho = 0$, como avance presentado en **Alonso** (2009) al igual que lo expuesto anteriormente. La solución para el caso bivariado es una generalización de lo presentado en el caso de la varianza bicuadrática.

[4]Dado que X e Y tienen la misma distribución al hacer la construcción para la distribución Y se muestra que $\gamma_{\psi_{XX}} = \gamma_{\psi_{YY}}$, por lo tanto de ahora en adelante los resultados se presentarán para M_1 y serán análogos para M_2.

Si se define el vector aleatorio $\mathbf{M} = (M_1, M_2)^T$ como el vector aleatorio para las variables aleatorias definidas en (3.1) y (3.2) con distribución $N(0, 0, 1, 1, \rho)$, se puede escribir la función bicuadrática y su derivada en términos de la variable aleatoria M_1 para la región como

$$\psi(Z_x, Z_y) = M_1 \left[1 - (M_1)^2\right]^2 \tag{3.13}$$

$$\psi'(Z_x, Z_y) = \left[1 - (M_1)^2\right] \left[1 - 5\,(M_1)^2\right]. \tag{3.14}$$

Como se indicó antes, para el caso univariado los cálculos para obtener los resultados para M_2 son análogos a los de M_1, por lo tanto no son exhibidos.

3.2.2. Función de densidad de M

Análogo a lo realizado para el caso de la varianza bicuadrática, el vector aleatorio $\mathbf{M}$, es el resultado de truncar un vector con distribución normal bivariada en un círculo, definido en la función de densidad de $\mathbf{M}$ (Ver ecuación 3.7).

3.2.3. Covarianza en función de los valores esperados de M

Esta forma de plantear la función bicuadrática en términos de $\mathbf{M} = (M_1, M_2)^T$ permite escribir la covarianza bicuadrática (2.5), como:

$$\gamma_{\psi_{XX}} = \frac{E\left(\left[M_1\left(1-(M_1)^2\right)^2\right]\left[M_2\left(1-(M_2)^2\right)^2\right]\right)}{E\left(\left[1-(M_1)^2\right]\left[1-5\,(M_1)^2\right]\right)E\left(\left[1-(M_2)^2\right]\left[1-5\,(M_2)^2\right]\right)} \tag{3.15}$$

$$\gamma_{\psi_{XY}} = \frac{E_{1,1} - 2E_{3,1} + E_{5,1} - 2E_{1,3} + 4E_{3,3} - 2E_{5,3} + E_{1,5} - 2E_{3,5} + E_{5,5}}{\left[1 - 6E_{M_{1,2}} + 5E_{M_{1,4}}\right]\left[1 - 6E_{M_{2,2}} + 5E_{M_{2,4}}\right]} \tag{3.16}$$

con $E_{h,s} = E(M_1^h M_2^s)$, $E_{M_{1,h}} = E(M_1^h)$ y $E_{M_{2,h}} = E(M_2^h)$, para h y s enteros. A partir de este resultado, el siguiente paso es hallar el valor para distribuciones normales acotadas, trabajo que se realiza en las siguientes secciones.

3.3. Función generatriz de momentos de M_1 y M

El trabajo previo al cálculo de $\gamma_{\psi_{XX}}$ y $\gamma_{\psi_{XY}}$, consiste en hallar los valores esperados para una variable con distribución normal bivariada truncada sobre un circulo. Para llegar a estos valores esperados el camino planteado es mediante la función de generatriz de momentos de M_1 y $\mathbf{M}$.

3.3.1. Función generatriz de M_1 y M

Dada la función de distribución marginal M_1 definida en 3.10 y la función de distribución conjunta **M** definida en 3.7, se obtiene la función generatriz de las variables para el caso en el que $\rho \neq 0$. Entonces

$$G_{M_1}(t_1) = E(e^{t_1 M_1}) = \frac{1}{c_2}\int_{-l}^{l}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{[m_1^2-2\rho m_1 m_2+m_2^2]}{2(1-\rho^2)}+t_1 m_1} dm_2 dm_1, \quad (3.17)$$

con $m_1 \in [-1,1]$ y $\rho \in (-1,1)$. Una expresión similar se obtiene para el caso contrario, cuando $\rho = 0$[5]. En cuanto a la función generatriz para los momentos conjuntos, se obtiene

$$G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{c_2}\int_{-l}^{l}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{m}^T\Sigma^{-1}\mathbf{m}-2\mathbf{t}^T\mathbf{m}]} dm_1 dm_2, \quad (3.19)$$

donde $|\cdot|$ indica determinante, Σ es la matriz de varianza y covarianza de una distribución normal bivariada $N(0,0,1,1,\rho)$ y c_2 es la constante de corrección. Haciendo algunas operaciones algebraicas la expresión anterior se puede escribir como

$$G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t}) = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c_2}\int_{-l}^{l}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{m}-\Sigma\mathbf{t})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{m}-\Sigma\mathbf{t})]} dm_1 dm_2 \quad (3.20)$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c_2} P(-\sqrt{l^2-m_2^2} < \eta_1 < \sqrt{l^2-m_2^2}; -l < \eta_2 < l) \quad (3.21)$$

donde $\eta = (\eta_1, \eta_1)^T$, es un vector aleatorio con distribución normal bivariada $N \sim (\Sigma\mathbf{t}, \Sigma)$ y donde Σ es una matriz de varianza y covarianza de una distribución normal bivariada $N(0,0,1,1,\rho)$[6].

3.3.2. Momentos de M_1 y M

Dado que los momentos al rededor de t_1 y **t** se encuentran derivando secuencialemnte la función genertatriz de momentos al rededor de cero se llega a distribuciones normales que dependen de límites variables (ver **Anexo B**) haciendo complicada su solución, por lo tanto

[5]Cuando $\rho = 0$ la ecuación

$$G_{M_1}(t_1) = E(e^{t_1 M_1}) = \frac{1}{c_2}\int_{-l}^{l}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{[m_1^2+m_2^2]}{2}+t_1 m_1} dm_2 dm_1 \quad (3.18)$$

es un caso especial de la ecuación (3.17)

[6]**Tallis** (1961, pág 225) llega a una ecuación analoga a la presentada en (3.21) para una distribución acotada a una sola cola inferior y en **Alonso-Martínez** (2010, pág 26) para dos colas donde los límites de la distribución normal bivariada para cada una son $-l$ y l

al hacer una trasformación se hacen más ágiles los cálculos que definen los momentos de M_1 y $\mathbf{M}$. Si se define $(m_1, m_2)^T = [r\cos(\theta), r\sin(\theta)]^T$ entonces la constante de corrección definida en (3.8) así como la función generatriz de momentos definidas en (3.17) y (3.19) se reescriben como se presenta a continuación.

Constante de corrección, c_2,

$$c_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{l} \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[\frac{r^2}{2(1-\rho^2)}(\rho\sin(2\theta)-1)\right]} dr d\theta \tag{3.22}$$

Las f.g.m. tanto para M_1 y como para $\mathbf{M}$ están dadas por

$$G_{M_1}(t_1) = \frac{1}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} r e^{-r^2\left[\frac{1-\rho\sin(2\theta)}{2(1-\rho^2)}\right]+rt_1\cos(\theta)} dr d\theta, \tag{3.23}$$

y

$$G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} r e^{-r^2\left[\frac{1-\rho\sin(2\theta)}{2(1-\rho^2)}\right]+r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}} dr d\theta, \tag{3.24}$$

respectivamente[7]. Las ecuaciones son equivalentes a la función generatriz de momentos de la distribución normal bivariada $N(0,0,1,1,\rho)$ construida en coordenadas euclideanas, Ecuaciones (3.23) y (3.24) (ver **Anexo C**).

Una vez obtenida la función generatriz de momentos para M_1 y para $\mathbf{M}$, en la siguiente sección se procede a calcular sus derivadas para hallar los momentos.

3.3.3. Derivadas de la Función Generatriz de M_1 y $\mathbf{M}$

Los momentos univariados y conjuntos de M_1 y $\mathbf{M}$ con respecto al origen, para h, s de una variable en términos de la función generatriz de momentos (Sección 1.1.) está dado por:

$$\mu_h = E(M_1^h) = \frac{d^h}{dt^h} G_{M_1}(t_1) =: D^{(h)}(t_1) \tag{3.26}$$

Cuando $t_1 = 0$. La notación usada será $D^{(h)}(t_1) = D^{(h)}$. Para el caso bivariado

[7]Para el caso de la distribución marginal cuando $\rho = 0$ (3.17) se tiene como caso especial

$$G_{M_1}(t_1) = \frac{1}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} r e^{\frac{-r^2}{2}+rt_1\cos(\theta)} dr d\theta \tag{3.25}$$

.

$$\mu_{h,s} = E(M_1^h M_2^s) = \frac{\partial^{s+h}}{\partial t_2^s \partial t_1^h} G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})|_{\mathbf{t}=0} \tag{3.27}$$

Donde $\mathbf{t} = (t_1, t_2)^T$. La notación usada será $D^{(h,s)}(\mathbf{t}) = D^{(h,s)}$ y en pos de hacer más corta la escritura. Diremos que

$$D^{(h,s)}(\mathbf{t}) = \frac{\partial^{s+h}}{\partial t_2^s \partial t_1^h} G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})$$

A partir de ésta notación se tiene

$$\mu_{h,s} = \frac{\partial^{s+h}}{\partial t_2^s \partial t_1^h} G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})|_{t_1=0,t_2=0} = D^{(h,s)}|_{t_1=0,t_2=0}, \tag{3.28}$$

de igual forma se debe observar que $E(M_1^h M_2^0) = E(M_1^h) = E(M_2^h)$ y $E(M_1^0 M_2^s) = E(M_2^s) = E(M_1^s)$ valores que se pueden calcular a partir de la ecuación (3.17).

Siguiendo la lógica detrás de esta notación se define $D^{(0,0)} = G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})$ donde La función de densidad conjunta del vector $\mathbf{M}$, ecuación (3.7), ahora es tal que dado $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$, $f_{\mathbf{M}}(\mathbf{m}) = f_{\mathbf{M}}(\mathbf{-m})$. Ésta característica conlleva a que dados h y s con $h + s = 2p + 1$, con p número entero positivo[8], se tiene:

$$E(M_1^h M_2^s) = 0.$$

Dado que la variable aleatoria es acotada, entonces el valor esperado en la ecuación (3.28) debe ser finito para todos los valores de $\mathbf{t}$, por lo tanto la Función Generatriz de Momentos ahora existe. Entonces es continuamente diferenciable en una vecindad del origen (ver **DeGroot** 2012, pág 236). Además, debe tenerse en cuenta que al ser diferenciable la función en una vecindad del origen, entonces las derivadas mixtas son iguales (**Marsden-Tromba** 2004, pág 177), es decir, la derivada $D^{(s,h)}$ es equivalente a $D^{(h,s)}$.

Utilizando lo anterior como soporte a continuacón se desarrollan las derivadas $D^{(h,s)}$ de la función generatriz de momentos con $h + s$ par, $h \in \mathbf{Z}^+$ y $s \in \mathbf{Z}^+$. Los resulados muestran que $D^{(h,s)}$ es función de las derivadas de la forma $D^{(h,0)}$, $D^{(0,s)}$ y $D^{(h-k,s-j)}$, dado que los valores de estas últimas son conocidos y así poder definir de esta manera la covarianza bicuadrática; insumo necesario en la construcción del estimador de correlación bicuadrático.

† *Interludio*

Uno de los resultados del trabajo es la generalización recursiva de la función generatriz de momentos, por ende el siguiente interludio adquiere importancia en la construcción de los valores esperados tanto univariados como bivariados.

[8]Resultado presentado en el **Anexo A**.

Las integrales $I^{(h)}$, $I^{(h,s)}$ se definen como sigue para simplificar la notación que sigue

$$I^{(h)} := \frac{\zeta}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} r^{h+1}\cos^h(\theta)e^{-r^2k_1}e^{rt_1\cos(\theta)}drd\theta \tag{3.29}$$

$$I^{(h,s)} = \frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} r^{(h+s)+1}\cos^h(\theta)\sin^s(\theta)e^{-r^2k_1}e^{r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta \tag{3.30}$$

Siendo $k_1 = \left[\frac{1-\rho\sin(2\theta)}{2(1-\rho^2)}\right]$; $\zeta = \dfrac{1}{(2\pi)^{1/2}}$ y $\xi = \dfrac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}$. Si $h = 0$ y $s = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
I^{(0)} &= \frac{\zeta}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} r^{0+1}\cos^0(\theta)e^{-r^2k_1}e^{rt_1\cos(\theta)}drd\theta \\
&= \frac{\zeta}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} re^{-r^2k_1}e^{rt_1\cos(\theta)}drd\theta \\
&= G_{M_1}(t_1) \\
I^{(0,0)} &= \frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} r^{(0+0)+1}\cos^0(\theta)\sin^0(\theta)e^{-r^2k_1}e^{r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta \\
&= \frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} re^{-r^2k_1}e^{r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta \\
&= \frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} re^{-r^2k_1+r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta \\
&= G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})
\end{aligned}$$

Dado que las anteriores integrales, para el caso en que $h = 0$ y $s = 0$; son iguales a las Función Generatriz de Momentos; los momentos se calcularán derivando iterativamente las integrales, que definen los valores esperados conjuntos y univariados, es de aquí en adelante éste el proceso mediante el cual se desarrollará el trabajo.

† ***Fin Interludio***

3.4. Derivadas de la Función Generatriz de Momentos

Para calcular los valores esperados se utiliza la Función Generatriz de Momentos (f.g.m) para $\mathbf{t} = (t_1, t_2)^T$ alrededor de cero, definida por (3.17) y (3.19). Dichos valores esperados se hallan derivando iterativamente la f.g.m. De esta manera es de interés hallar los momentos univariados y bivariados definidos en (3.23) y (3.24). Se empezó realizando el cálculo de momentos univariados y conjuntos con respecto a t_1; luego se procedió a hacer lo mismo respecto a a t_2; posteriormente se hizo el cálculo de momentos bivariados conjuntos t_1 y t_2. Todos estos procedimientos llevan a establecer cinco funciones generales que se presentan a continuación en esta misma sección.

3.4.1. Derivadas con respecto a t_1

Al derivar las ecuaciones (3.23) y (3.24) con respecto a t_1 se obtiene para $h \geq 0$ lo siguiente.

Cálculo de $D^{(1)}$ y $D^{(1,0)}$

Si $k_1 = \left[\frac{1-\rho\sin(2\theta)}{2(1-\rho^2)}\right]$; $\zeta = \dfrac{1}{(2\pi)^{1/2}}$ y $\xi = \dfrac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}$ [9], entonces:

$$D^{(1)} = \frac{\partial G_{M_1}(t_1)}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\zeta}{c_1}\int_0^{2\pi}\int_0^l re^{-r^2k_1}e^{rt_1\cos(\theta)}drd\theta\right) \tag{3.31}$$

$$= \frac{\zeta}{c_1}\int_0^{2\pi}\int_0^l\left(\frac{\partial}{\partial t_1}re^{-r^2k_1}e^{rt_1\cos(\theta)}drd\theta\right) \tag{3.32}$$

$$= \frac{\zeta}{c_1}\int_0^{2\pi}\int_0^l r^2\cos(\theta)e^{-r^2k_1}e^{rt_1\cos(\theta)}drd\theta \tag{3.33}$$

$$= I^{(1)} \tag{3.34}$$

Por un razonamiento análogo para $D^{(1,0)}$ se tiene

$$D^{(1,0)} = \frac{\partial G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^l re^{-r^2k_1}e^{r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta\right) \tag{3.35}$$

$$= \frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^l\frac{\partial}{\partial t_1}\left(re^{-r^2k_1}e^{r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta\right) \tag{3.36}$$

$$= \frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^l r^2\cos(\theta)e^{-r^2k_1}e^{r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta$$

$$= I^{(1,0)} \tag{3.37}$$

El paso de (3.31) a (3.32) (análogo para ir de (3.35) a (3.36)), es posible porque la distribución normal cumple con las condiciones de regularidad con respecto a $\mathbf{t}$ [ver **Bickel-Docksum** (2015, pág. 179-180)]. Es de notar que se ha logrado definir el resultado como la integral definida. El resultado en (3.37) hace más sencillo el cálculo de las derivadas de ordenes superiores que permiten el cálculo de los diferentes momentos.

[9] Definidos en el ***Interludio***

Cálculo de D^h y $D^{(h,0)}$

A partir de los resultados anteriores derivando de forma recurrente la ecuación (3.37) con respecto a t_1 (como en el caso anterior), y recordando que

$$\frac{\partial^h}{\partial t_1^h}(G_M(t_1)) = \frac{\partial^h}{\partial t_1}\left(\frac{\partial^{h-1}G_M(t_1)}{\partial t_1^{h-1}}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^h}{\partial t_1^h}(G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})) = \frac{\partial^h}{\partial t_1}\left(\frac{\partial^{h-1}G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^{h-1}}\right)$$

se tiene para $h \geq 1$

$$D^{(h)} = \frac{\zeta}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^l r^{h+1}\cos^h(\theta)e^{-r^2k_1}e^{rt_1\cos(\theta)}drd\theta \tag{3.38}$$

$$D^{(h)} = I^{(h)} \tag{3.39}$$

Por un razonamiento similar, para el caso bivariado se tiene que

$$D^{(h,0)} = \frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^l r^{h+1}\cos^h(\theta)e^{-r^2k_1}e^{r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta \tag{3.40}$$

$$D^{(h,0)} = I^{(h,0)} \tag{3.41}$$

3.4.2. Derivadas con respecto a t_2

De forma análoga a lo hecho para el cálculo de $D^{(h,0)}$, derivando las ecuaciones (3.23) y (3.24) con respecto a t_2, para $s \geq 2$, se tiene lo siguiente

$$D^{(1)} = \frac{\zeta}{c_1}\int_0^{2\pi}\int_0^l r^2\sin(\theta)e^{-r^2k_1}e^{rt_2\sin(\theta)}drd\theta \tag{3.42}$$

$$= I^{(1)} \tag{3.43}$$

y

$$D^{(0,1)} = \frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^l r^2\sin(\theta)e^{-r^2k_1}e^{r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta \tag{3.44}$$

$$= I^{(0,1)} \tag{3.45}$$

Del mismo modo en que ocurrípara el caso de t_1, al derivar de forma recurrente las ecuaciones (3.43) y (3.45) con respecto a t_2 (como en el caso anterior), no es complicado colegir que para $s \geq 1$

$$D^{(s)} = \frac{\partial^s}{\partial t_1^s}(G_M(t_2)) = \frac{\zeta}{c_1}\int_0^{2\pi}\int_0^l r^s + 1\sin^s(\theta)e^{-r^2k_1}e^{rt_2\sin(\theta)}drd\theta \tag{3.46}$$

$$= I^{(s)} \tag{3.47}$$

y

$$D^{(0,s)} = \frac{\partial^s G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_2^s} = \frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^l r^{s+1}\sin^s(\theta)e^{-r^2k_1}e^{r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta \tag{3.48}$$

$$= I^{(0,s)} \tag{3.49}$$

En estas ecuaciones se observa un comportamiento sistemático, las derivadas de orden h y s, se escribe en términos de las derivadas de menor orden. Este comportamiento se puede generalizar dada la forma de la derivada de primer orden de la función generatriz, ecuaciones (3.23) y (3.24). La derivada de orden j y k de la función generatriz se puede calcular de forma recursiva mediante las ecuaciones $D^{(j)} = I^{(j)}$, $D^{(k)} = I^{(k)}$, $D^{(j,0)} = I^{(j,0)}$ y $D^{(0,k)} = I^{(0,k)}$.

3.4.3. Derivadas conjuntas con respecto a t_1 y t_2

Ahora bien, si se deriva la ecuación (3.41) con respecto a t_2 se tiene que

$$D^{(h,1)} = \frac{\partial^{h+1}G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_2\partial t_1^h} = \frac{\partial}{\partial t_2}(D^{(h,0)}) = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^l r^{h+1}\cos^h(\theta)e^{-r^2k_1}e^{r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta\right)$$

$$= \frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^l \left(r^{h+1+1}\cos^h(\theta)\sin(\theta)e^{-r^2k_1}e^{r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta\right)$$

$$= I^{(h,1)} \tag{3.50}$$

En la misma vía y utilizando los resultados presentados en el cálculo con respecto a t_2 de manera recurrente se tiene

$$D^{(h,s)} = \frac{\partial^{h+s}G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_2^s\partial t_1^h} = \frac{\partial^s}{\partial t_2}\left(\frac{\partial^h G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^h}\right)$$

$$= \frac{\xi}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^l r^{h+s+1}\cos^h(\theta)\sin^s(\theta)e^{-r^2k_1}e^{r\{t_1\cos(\theta)+t_2\sin(\theta)\}}drd\theta$$

$$= I^{(h,s)} \tag{3.51}$$

Con un razonamiento análogo derivando la ecuación (3.49) con respecto a t_1 se tiene que:

$$D^{(h,s)} = I^{(h,s)} \tag{3.52}$$

Las ecuaciones (3.51) y (3.52) pueden ser utilizadas para obtener los valores de los momentos conjuntos y de acuerdo con las propiedades de f.g.m están dadas por.

$$\frac{\partial^{h+s} G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^h \partial t_2^s} = \frac{\partial^{h+s} G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_2^s \partial t_1^h} \tag{3.53}$$

Además, dado que se trata de una función continua, se deduce que las derivadas mixtas son iguales sin importar el orden de derivación. Esto significa que para los momentos bivariados

$$E(M_1^h M_2^s) = D^{(h,s)}|_{\mathbf{t}=0} = I^{(h,s)}|_{\mathbf{t}=0} \tag{3.54}$$

De manera semejante, para el caso de los momentos univariados se tiene que

$$E(M_1^h) = D^{(h)}|_{t_1=0} = I^{(h)}|_{t_1=0} \tag{3.55}$$

Los resultados obtenidos en esta sección son importantes porque es a partir de estos que se harán los cálculos de los valores de la constante de corrección, de los valores esperados y de la varianza y covarianza bicuadrática. Tales cálculos serán presentados en la siguiente sección.

3.5. Valor de la Varianza y covarianza bicuadrática

3.5.1. Métodología del cálculo de los valores c_2, $I^{(h)}$ y $I^{(h,s)}$

Dado que las integrales definidas tanto para c_2 como para $I^{(h)}$ y $I^{(h,s)}$ no pueden resolverse de forma analítica se solucionaron mediante análisis numérico. En primer lugar se uso el método "*Cuadratura de Gauss*" [ver **Burden-Faires** (2012)], como una aproximación númerica de las integrales tomando 6 nodos y sus respectivos pesos[10]; el algoritmo es mejorado mediante un método adaptativo "*Cuadratura de Gauss-Kronrod*" [ver **Kronrod** (1965)] como variante de la Cuadratura de Gauss ya que en éste los puntos de evaluación se eligen para que se pueda calcular una aproximación más precisa reutilizando la información producida por el cálculo de la cuadratura anterior.

Tanto la Cuadratura de Gauss como Gauss-Kronrod fueron programadas en el software estadistico `R`. En el **Anexo D** se encuentra el código del primer algoritmo que da solución a los valores buscados y la implementación del paquete *Pracma*, el cual implementa funciones de `R` más avanzadas en análisis numérico; con una vista especial sobre las rutinas de optimización y series de tiempo[11].

[10] **Nota histórica**: El árticulo original de Gauss sobre el método de cuadratura se puede ver en sus obras completas, i.e. Gauss, C.F., *Methodus nova integralium valores per aprox. inveniendi*, en Werke, Vol. 3, pp. 163.

[11] Adaptado en 2017 para `R` por Hans W. Borchers, basado en el artículo *Matlab program for quadrature in 2D* **Shampine** (2008).

3.5.2. Valores de c_2

El cálculo de los valores de la constante de estandarización se realizó a partir de la ecuación (3.22), a través del software estadístico `R` usando el paquete *Pracma* (**Anexo D**), producto de ello en la Tabla 3.1 se muestra el valor de c_2 según cambia el parámetro k.

ρ	k		
	3	6	9
-0.99	1.000	1.000	1.000
-0.90	0.855	1.000	1.000
-0.80	0.857	1.000	1.000
-0.70	0.862	0.998	1.000
-0.60	0.865	0.998	1.000
-0.50	0.868	0.998	1.000
-0.40	0.869	0.999	1.000
-0.30	0.870	0.999	1.000
-0.20	0.870	0.999	1.000
-0.10	0.870	0.999	0.999
0.00	0.870	0.999	0.999
0.10	0.870	0.999	0.999
0.20	0.870	0.999	1.000
0.30	0.870	0.999	1.000
0.40	0.869	0.999	1.000
0.50	0.868	0.998	1.000
0.60	0.865	0.998	1.000
0.70	0.862	0.998	1.000
0.80	0.857	0.999	1.000
0.90	0.855	1.000	1.000
0.99	1.000	1.000	1.000

TABLA 3.1. Valores de c_2 de acuerdo a los valores de ρ y k

En las Figuras 3.2 a 3.4 se presenta c_2, para los distintos valores de ρ y $k = 3, 6$ y 9.

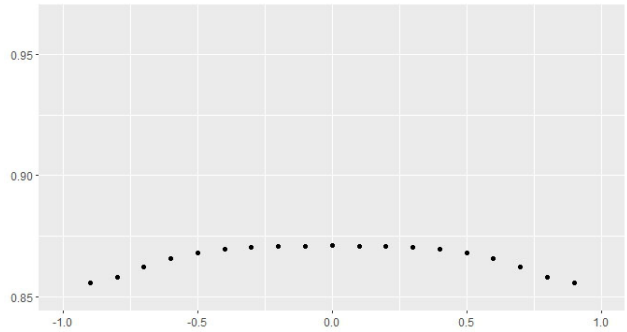

FIGURA 3.2. Valores de c_2 para $k = 3$

La constante c_2 es un valor aproximado por el método numérico que depende de la correlación ρ y del nivel de acotamiento planteado por $k = 3, 6, 9$.

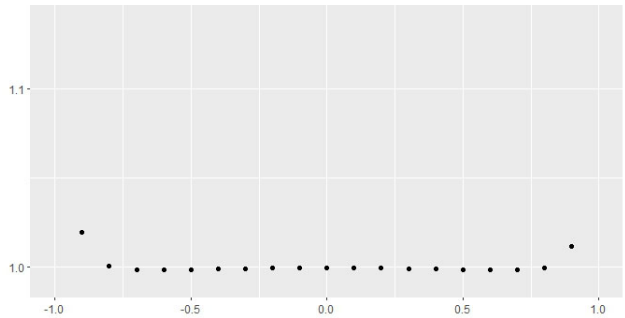

FIGURA 3.3. Valores de c_2 para $k = 6$

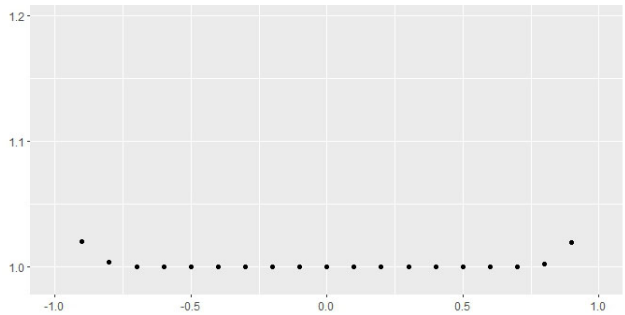

FIGURA 3.4. Valores de c_2 para $k = 9$

3.5.3. Cálculo de los valores esperados

Las ecuaciones (3.39), (3.47) y (3.51) fueron utilizadas para hallar los valores esperados univariados y conjuntos. Usando estas derivadas se hallaron los valores de los momentos conjuntos, insumos para hallar $\gamma_{\psi_{XY}}$ y posteriormente $\varrho_{\psi_{XY}}$.

3.5.4. Varianza y Covarianza Bicuadrática para variables aleatorias dependientes

En ambos casos tanto para la varianza como el valor de la covarianza bicuadrática son distintos de cero, por lo tanto las variables aleatorias M_1 y M_2 no son independientes. Al evaluar esta expresión se debe tener en cuenta que $E(M_1^r) = E(M_2^r)$, los denominadores son distintos de cero, y en el numerador sólo se tienen momentos de orden impar. Dado que la función de densidad de M_1 es simétrica alrededor de cero y los valores esperados en los numeradores son distintos de cero, lo que lleva a que la covarianza bicuadrática sea distinta a cero. Es decir

$$\gamma_{\psi_{XY|\rho=0}} \neq 0 \tag{3.56}$$

De acuerdo con lo indicado por **Alonso** (2009, pág. 25), este resultado será importante luego al emplear el estimador de correlación bicuadrático o el de estimador de autocorrelación bicuadrático, ello con el fin de contrastar la hipótesis de no correlación.

3.6. Valores de $\varrho_{\psi_{XY}}$

En **Alonso** (2009) se llega a $\varrho_{\varphi_{XY}}$como un polinomio de la forma $P(\rho) = \sum a_i \rho^i$ donde los coeficientes a_i son constantes o funciones en términos de ρ y los coeficientes a_i dependen del valor de ρ, lo que es coherente con lo hallado por **Ricaurte** (2007). Por lo anterior y unido al hecho de que el polinomio es demasiado extenso, se optó por calcular los insumos básicos para dar inicio a las recurrencias que nos permiten llegar a los valores esperados conjuntos y a su vez al valor de ρ. En la Tabla 3.2 se muestran los valores de $\varrho_{\psi_{XY}}$.

Una vez conocidos los valores de c_2 y de $I^{(h)}$ $I^{(h,s)}$ se pueden hallar los valores de las derivadas de orden 1 al 5, a partir de las ecuaciones (3.39), (3.47) y (3.51).

La función $\gamma_{\psi_{XY}}$ ha jugado un papel central en el desarrollo de este trabajo, pero el objetivo central del estudio son los $\varrho_{\psi_{XY}}$, que se calculan a partir de la ecuación (2.6), es decir,

$$\varrho_{\psi_{XY}} = \frac{\gamma_{\psi_{XY}}}{(\gamma_{\psi_{XX}}\gamma_{\psi_{YY}})^{1/2}} = \frac{\gamma_{\psi_{XY}}}{\gamma_{\psi_{XX}}} \tag{3.57}$$

El valor de la varianza bicuadrática $\gamma_{\psi_{XX}}$, se había obtenido en (3.12) -de modo semejante a lo que aparece en **Alonso** (2009, pág 19)- teniendo en cuenta que $\gamma_{\psi_{XX}} = \gamma_{\psi_{YY}}$, porque las dos variables tiene la misma distribución.

El ideal sería $\varrho_{\psi_{XY}}(\rho) = \rho$, o $\varrho_{\psi_{XY}} = \frac{\rho-\alpha}{\delta}$ con α y δ constantes con respecto a ρ. Estos escenarios no se dan, tanto en trabajos previos como en este, ver Tabla 3.2 y las Figuras 3.5 a 3.7, lo que concuerda con los resultados establecidos en **Alonso** (2009), **Varcárcel** (2007), **Ricaurte** (2007) y **Tunjano** (2006).

Los resultados correspondientes a los valores de $\varrho_\psi(\rho)$ muestran que el estimador tiende a ρ cuando k crece; es decir, se observa en la gráfica que el valor $\varrho \approx \rho$ (Figura 3.5).

Para $k = 6$ y $k = 9$ (Figura 3.6 y Figura 3.7) muestran una mejor aproximación, pero los resultados encontrados en **Alonso-Martínez** (2010) para los valores del estimador de correlación bicuadrático son mejores que los encotrados en el presente trabajo, lo que sugiere que la modificación planteada sobre el dominio de la función no representa una mejoría con respecto al estimador.

ρ	k		
	3	6	9
-0.90	-0.7534	-0.8074	-0.8183
-0.80	-0.3950	-0.5204	-0.5283
-0.70	-0.2669	-0.3647	-0.3903
-0.60	-0.1872	-0.2793	-0.2942
-0.50	-0.1335	-0.2143	-0.2266
-0.40	-0.0949	-0.1614	-0.1712
-0.30	-0.0653	-0.1153	-0.1232
-0.20	-0.0410	-0.0746	-0.0799
-0.10	-0.0197	-0.0366	-0.0393
0.00	-0.0001	-0.0000	0.0000
0.10	0.0197	0.0366	0.0393
0.20	0.0409	0.0746	0.0799
0.30	0.0652	0.1152	0.1232
0.40	0.0948	0.1611	0.1712
0.50	0.1336	0.2130	0.2261
0.60	0.1879	0.2762	0.2937
0.70	0.2599	0.3624	0.3878
0.80	0.3776	0.5205	0.5202
0.90	0.6987	0.8052	0.8170

TABLA 3.2. Valores de ϱ de acuerdo a los valores de ρ y k

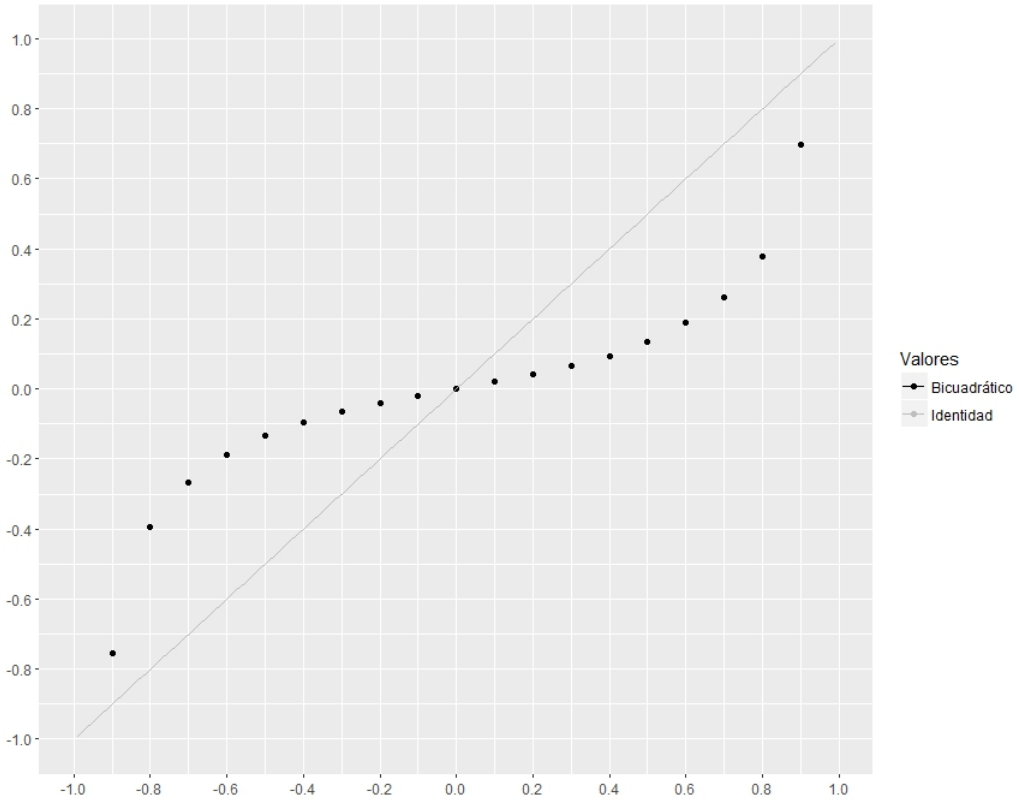

FIGURA 3.5. Valores de ρ para $k = 3$

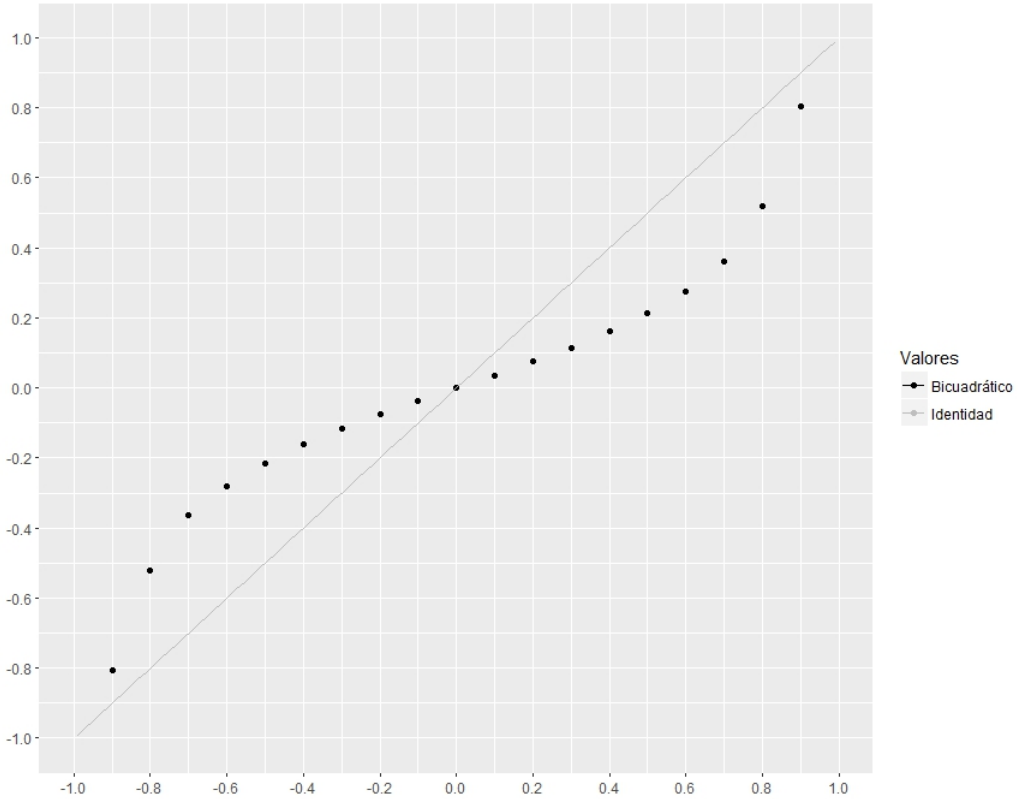

FIGURA 3.6. Valores de ρ para $k = 6$

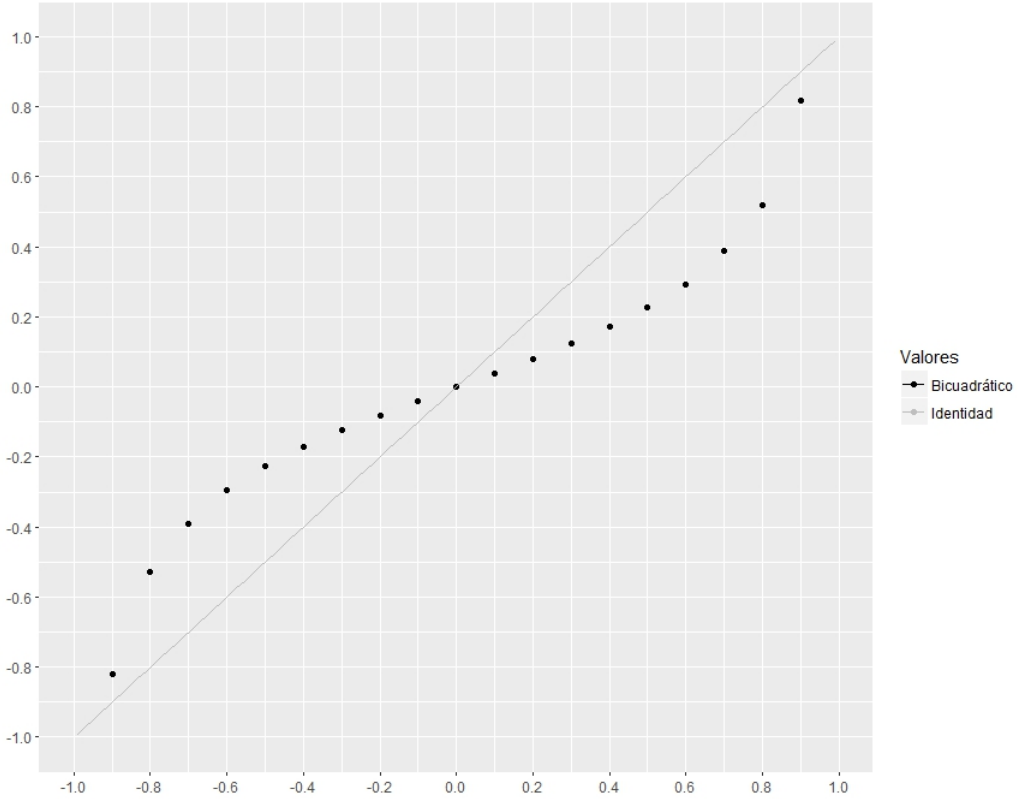

FIGURA 3.7. Valores de ρ para $k = 9$

Conclusiones y Trabajo futuro

Conforme a lo observado en capítulos anteriores, se pueden obtener las siguientes conclusiones y se hacen las siguientes propuestas a futuro.

- La modificación propuesta sobre el dominio de la función $\psi(\cdot)$, satisface los requisitos definidos empíricamente por **Tunjano** (2006), **Ricaurte** (2007) y **Varcárcel** (2007), sin contradecir las conclusiones de **Alonso** (2009), preservando un ajuste robusto.
- La propuesta de modificación al dominio de la función $\psi(z_x, z_y)$, base del coeficiente de correlación bicuadrático, no inside en la disminucion del sesgo del estimador, por lo que ésta no es la modificaciíon adecuada de dicha función.
- En el trabajo se estudia además las caracteristicas del estimador cuando la correlación es distinta de cero, determinando que las distribuciones no son independientes, hecho que se concluye cuando se definen las distribuciones marginales sobre la región. Sumado con lo encontrado por **Alonso** (2009) se dan las bases para construir en el futuro estadísticas robustas para verificar la hipótesis de no correlación cuando se defina un sesgo menor del estimador.
- Al comparar los resultados obtenidos en el presente trabajo con los valores hallados en **Alonso** (2009), indican que el estimador aquí analizado presenta mayores sesgos. Es decir para $\rho < 0$ sobrestima y para $\rho > 1$ subestima el verdadero valor de ρ.

Formas de Corrección

Dado que las distribuciones son dependientes y como la modificación planteada sobre el dominio no produjo un estimador menos sesgado la propuesta se hace sobre la extensión de dimensión de la función bicuadrática $\psi(\cdot)$; Por lo tanto se plantean las siguientes formas de corrección:

- La primer propuesta es usar la función $\psi(\cdot)$ de la forma

$$\psi(\| \mathbf{z} \|) = \begin{cases} \| \mathbf{z} \| (1 - \| \mathbf{z} \|^2)^2, & \text{para } \| \mathbf{z} \| < 1, \\ 0, & \text{en otro caso .} \end{cases} \tag{.58}$$

donde $\| \mathbf{z} \| = \sqrt{z_x^2 + z_y^2}$.

Con esta función se logra mantener la reducción del área de detección de posibles valores atípicos ya que genera el circulo contenido en el interior del cuadrante $(-1,1)\times(-1,1)$ usando el hecho que las dos funciónes no son independientes, es decir $\rho = 0$, generando valores distintos de la covarianza bicuadrática y por ende del estimador de correlación bicuadrático.

– La segunda propuesta es trabajar la función bicuadática manteniendo la suposición de $\rho \neq 0$ en el dominio de la función asumiendo $\psi(\cdot)$ como en la primer propuesta, es decir,

$$\psi(\| \mathbf{z} \|) = \begin{cases} \| \mathbf{z} \| \, (1 - \| \mathbf{z} \|^2)^2, & \text{para } \sqrt{z_x^2 + \rho z_x z_y + z_y^2} < 1, \\ 0, & \text{en otro caso .} \end{cases} \tag{.59}$$

con $\| \mathbf{z} \| = \sqrt{z_x^2 + z_y^2}$.

Por la escogencia del dominio de esa manera se genera una elipse que se hace más delgada cuando ρ tiende a 1 dejando afuera los valores atípicos que son detectados en la primer propuesta. Dado que el ρ es desconocido una posible solución es suponer distintos valores y comprobar empíricamente si el estimador cumple propiedades de robustez.

Bibliografía

[1] M. Abdullah, *On a robust correlation coefficient*, Blackwell Publishing for the Royal Statistical Society (1990), no. 4, 455–460.

[2] C.E. Alonso, *Funciones de varianza, covarianza y correlación bicuadrática para distribuciones normales*, Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Estadística, 1 2009, Sede Bogotá.

[3] C.E. Alonso and J. Martínez, *Funciones de varianza y correlación bicuadrática para distribuciones normales*, Revista Colombiana De Estadística **2** (2010), no. 33, 295–305, Universidad Nacional De Colombia Bogotá.

[4] D.F. Andrews and F.R. Hampel, *Robust estimates of location: Survey and advances*, Princeton Legacy Library, Princeton University Press, 2015.

[5] A. Beaton and J. Tukey, *The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data*, Technometrics **16** (1993), no. 2, 147–185.

[6] A. Bebbington, *A method of bivariate trimming for robust estimation of the correlation coefficient*, Blackwell Publishing for the Royal Statistical Society (1978), no. 3, 221–226.

[7] P.J. Bickel and K.A. Doksum, *Mathematical statistics: Basic ideas and selected topics, volume i, second edition*, Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science, CRC Press, 2015.

[8] L. Blanco, *Probabilidad*, Colección Texto, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, 2010.

[9] P.J. Brockwell and R.A. Davis, *Time series: Theory and methods*, Springer Series in Statistics, Springer New York, 2013.

[10] R.L. Burden and J.D. Faires, *Análisis numérico*, International Thomson Editores, 2002.

[11] M.R Chernick, *The influence function and its application to data validation*, American Journal of Mathematical and Management Sciences **2** (1982), no. 4, 263–288.

[12] C. Cohen, *Restriction and selection in samples from bivariate normal distributions*, JASA **50** (1955), no. 271, 884–893.

[13] S. Cohen, M. Dalal and J Tukey, *Robust, smoothly heterogeneous variance regression*, Blackwell Publishing for the Royal Statistical Society (1993), no. 2, 339–353.

[14] M.H. DeGroot and M.J. Schervish, *Probability and statistics*, Addison-Wesley, 2012.

[15] G.T. Duncanh and M.J.W. Layard, *A monte-carlo study of asymptotically robust tests for correlation coefficients*, Biometrika Trust (1973), no. 3, 551–558.

[16] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, V. 19 GSM/19, American Mathematical Society, 1998.

[17] D. Finney, *Cumulants of truncated multi-normal distributions*, Journal of the Royal Statistical Society (1962), no. 2, 535–536.

[18] D.C. Hoaglin, F. Mosteller, and J.W. Tukey, *Understanding robust and exploratory data analysis*, Wiley Classics Library Editions, Wiley, 2000.

[19] R.V. Hogg, J.W. McKean, and A.T. Craig, *Introduction to mathematical statistics*, Pearson education international, Pearson Education, 2005.

[20] P.J. Huber and E.M. Ronchetti, *Robust statistics*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, 2011.

[21] J. Jacod and P. Protter, *Probability essentials*, Universitext, Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[22] C. Khatri and M. Jaiswal, *Estimation of parameters of a truncated bivariate normal distribution*, JASA **58** (1963), no. 302, 519–526.

[23] A.S. Kronrod, *Nodes and weights of quadrature formulas: sixteen-place tables*, Consultants Bureau, 1965.

[24] D. Lax, *An interim report of a monte carlo study of robust estimators of widthers*, Tech. Report 93, Princenton University, Department of Statistics, 8 1975, Series 2.

[25] ———, *Robust estimators of scale: Finite sample performance in log-tailed symmetric distributions*, JASA **80** (1985), no. 391, 736–741.

[26] R.A. Maronna, D.R. Martin, and V.J. Yohai, *Robust statistics: Theory and methods*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, 2006.

[27] J. Martínez, *Some applications of robust scale estimators*, Ph.D. thesis, Disertation, Departament of Statistics, 3 1981, Templre University.

[28] N. Ricuaurte and J. Martínez, *Estimacion de la funcion de probabilidad del coeficiente de correlacion basado en la funcion bicuadrática*, Literatura Gris, Departamento de Estadística, 2007.

[29] S. Rosembaum, *Moments of a truncated bivariate normal distribution*, Journal of the Royal Statistical Society (1961), no. 2, 405–408.

[30] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3d ed ed., International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, 1976.

[31] L.F. Shampine, *Matlab program for quadrature in 2d.*, Applied Mathematics and Computation **202** (2008), no. 1, 266–274.

[32] D. Shaozhong, *Quadrature formulas in two dimensions*, Math 5172 - Finite Element Method (2010), no. 001.

[33] G.L. Shevlyakov and H. Oja, *Robust correlation: Theory and applications*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, 2016.

[34] N. Singh, *Estimation of parameters of a multivariate normal population from truncated and censured samples*, Journal of the Royal Statistical Society (1960), no. 2, 307–311.

[35] R.G. Staudte and S.J. Sheather, *Robust estimation and testing*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, 2011.

[36] G. Tallis, *The moment generating function of the truncated multinormal distribution*, Journal of the Royal Statistical Society (1961), no. 1, 223–229.

[37] H. Tukey, J. Braun and M. Schwarzschild, *Further progress on robust-resistant widthers*, Tech. Report 129, Princenton University, Department of Statistics, 8 1977, Series 2.

[38] W Tunjano, *Propuesta de un estimador de covariablidad basado en la función bicuadrática*, Trabajo de Grado, Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, 2006.

[39] H Varcárcel, *Propuesta de una función de autocorrelación con base en la función bicuadrática*, Trabajo de Grado, Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, 2007.

APÉNDICE

Anexos

.1. Anexo A

Definiendo $h+s=2p+1$, con p número entero y dado que $f(-x,-y)=f(x,y)$, entonces

$$\begin{aligned} E(X^hY^s) &= \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} x^h y^s f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{0} x^h y^s f(x,y)dxdy + \int_{-a}^{a}\int_{0}^{b} x^h y^s f(x,y)dxdy \end{aligned} \tag{60}$$

Haciendo el cambio de variable $\mathbf{u}=(u,v)$, con $u=-x$ y $v=-y$, reemplazando en la segunda integral en (60) se tiene

$$\begin{aligned} E(X^hY^s) &= \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{0} x^h y^s f(x,y)dxdy + \int_{-a}^{a}\int_{0}^{-b} (-u)^h(-v)^s f(-u,-v)dudv \\ &= \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{0} x^h y^s f(x,y)dxdy + (-1)^{h+s}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{0} u^h v^s f(u,v)dudv \\ &= \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{0} x^h y^s f(x,y)dxdy - \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{0} x^h y^s f(x,y)dxdy \\ &= 0 \end{aligned}$$

.2. Anexo B

Coordenadas Cartesianas

Dada la función de densidad de $\mathbf{M}$, se tiene que la Función Generatriz de Momentos (f.g.m) de ésta variable está dada por:

$$G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t}) = E(e^{\mathbf{t}^T\mathbf{M}}) = \int_{-l}^{l}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} e^{\mathbf{t}^T\mathbf{m}}\frac{\phi(m_1,m_2)}{c}dm_1dm_2$$

$$= \frac{1}{c}\int_{-l}^{l}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{m}^T\Sigma^{-1}\mathbf{m}-2\mathbf{t}^T\mathbf{m}]}dm_1dm_2 \tag{61}$$

Donde $|\cdot|$ indica determinante y c es la constante de estandarización[12]. Haciendo algunas operaciones algebraicas, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t}) = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-l}^{l}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{m}-\Sigma\mathbf{t})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{m}-\Sigma\mathbf{t})]}dm_1dm_2 \tag{62}$$

† ***Interludio***

Si se define a U como

$$U = U(m_1,m_2,t_1,t_2) = -\tfrac{1}{2}[(\mathbf{m}-\Sigma\mathbf{t})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{m}-\Sigma\mathbf{t})]$$

se tiene,

1. $\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t} + U = -\left[\frac{m_1^2-2\rho m_1m_2+m_2^2-2(1-\rho^2)t_1m_1-2(1-\rho^2)t_2m_2}{2(1-\rho^2)}\right]$
2. $\dfrac{\partial U}{\partial t_1} = -\dfrac{\partial U}{\partial m_1} - \rho\dfrac{\partial U}{\partial m_2}$
3. $\dfrac{\partial U}{\partial t_2} = -\dfrac{\partial U}{\partial m_2} - \rho\dfrac{\partial U}{\partial m_1}$

† ***Fin Interludio***

‡ ***Derivada con respecto a*** t_1

$$D^{(1,0)} = \frac{\partial G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_1}$$

$$= G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(t_1+\rho t_2)+\frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\int_{-l}^{l}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{m}-\Sigma\mathbf{t})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{m}-\Sigma\mathbf{t})]}\right)dm_1dm_2$$

$$= G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(t_1+\rho t_2) + \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-l}^{l}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^{u}\frac{\partial u}{\partial t_1}dm_1dm_2$$ [13]

De acuerdo a las propiedades de la f.g.m, el siguiente paso es derivar $G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})$ y evaluar en $\mathbf{t} = (0,0)$. Pero ésta tarea presenta grandes dificultades; la primera, los limites de la integral interior dependen de m_2, la segunda, el factor $e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}$ hace que las derivadas de $G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})$ sean en extenso complicadas para ordenes superiores a 2.

[12] **Tallis** (1961) llega a una ecuación análoga para una distribución acotada en una sola cola inferior.
[13] Al respecto puede verse **Alonso** (2009, pág 27).

Derivada con respecto a t_1

Parte I:

$$D^{(1,0)} = \frac{\partial G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_1} = G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(t_1 + \rho t_2) + \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-l}^{l}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \frac{\partial u}{\partial t_1} dm_1 dm_2$$

Dado que la integral doble sobre el rectángulo se puede se puede reducir a integrales simples iteradas aplicamos el teorema de Fubini cambiando el orden de integración como en **Marsden-Tromba** (2004, pág 325), y reescribimos la ecuación como[14]

$$D^{(1,0)} = \frac{\partial G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_1} = G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(t_1 + \rho t_2) + \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\int_{-l}^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \frac{\partial u}{\partial t_1} dm_1 dm_2$$

$$= G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(t_1+\rho t_2)+\frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\int_{-l}^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \left(-\frac{\partial u}{\partial m_1} - \rho\frac{\partial u}{\partial m_2}\right) dm_1 dm_2$$

Desarrollando los diferenciales dentro de la integral e integrando se tiene:

$$D^{(1,0)} = \frac{\partial G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_1} = G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(t_1+\rho t_2)-\frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\int_{-l}^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \left(\frac{\partial u}{\partial m_1} + \rho\frac{\partial u}{\partial m_2}\right) dm_1 dm_2$$

$$= G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(t_1 + \rho t_2) - \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\int_{-l}^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \frac{\partial u}{\partial m_1} dm_1 dm_2\right]$$

$$-\frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\int_{-l}^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \rho\frac{\partial u}{\partial m_2} dm_1 dm_2\right]$$

Redefiniendo los valores dentro de la segunda integral tenemos que

$$D^{(1,0)} = \frac{\partial G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_1} = G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(t_1 + \rho t_2) - \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\int_{-l}^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \frac{\partial u}{\partial m_1} dm_1 dm_2\right]$$

$$-\frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\rho\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}}\int_{-l}^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \frac{\partial u}{\partial m_2} dm_2 dm_1\right]$$

En las dos integrales interiores tenemos que

$$D^{(1,0)} = \frac{\partial G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_1} = G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(t_1 + \rho t_2) - \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} \{e^u|_{-l}^{l}\} dm_2\right]$$

$$-\frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\rho\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} \{e^u|_{-l}^{l}\} dm_1\right]$$

[14] Para el caso anterior en la **Parte IV** se define usando resultados análogos

Veamos el caso particular para una sola integral, es decir:

$$\beta_* = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}\{e^u|_{-l}^{l}\}dm_2\right]$$

y

$$\beta^* = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\rho\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}\{e^u|_{-l}^{l}\}dm_1\right]$$

Evaluando los los valores en la función exponencial para β_* tenemos que

$$\beta_* = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^{u(l,m_{2,t_1,t_2})}dm_2 - \int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^{u(-l,m_{2,t_1,t_2})}dm_2\right]$$

Definimos β_1 así:

$$\beta_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^{u(l,m_{2,t_1,t_2})}dm_2 = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi c)}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}+\mathbf{u}}dm_2$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi c)}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} e^{-\left[\frac{l^2-2\rho l m_2+m_2^2-2(1-\rho^2)t_1 l-2(1-\rho^2)t_2 m_2}{2(1-\rho^2)}\right]}dm_2 \\
&= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(1-\rho)^2}+lt_1}}{(2\pi c)\,|\Sigma|^{1/2}}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} e^{-\left[\frac{-2\rho l m_2+m_2^2-2(1-\rho^2)t_2 m_2}{2(1-\rho^2)}\right]}dm_2 \\
&= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(1-\rho)^2}+lt_1}}{(2\pi c)\,|\Sigma|^{1/2}}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} e^{-\left[\frac{m_2^2-2\rho l m_2-2(1-\rho^2)t_2 m_2}{2(1-\rho^2)}\right]}dm_2 \\
&= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(1-\rho)^2}+lt_1}}{(2\pi c)\,|\Sigma|^{1/2}}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} e^{-\left[\frac{m_2^2-2m_2\{\rho l+2(1-\rho^2)t_2\}}{2(1-\rho^2)}\right]}dm_2
\end{aligned}$$

Completando el cuadrado y restando lo mismo en el exponencial dentro de la integral (termino que sale constante de la integral) tenemos

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(1-\rho)^2}+lt_1+\frac{\{\rho l+(1-\rho^2)t_2\}^2}{2(1-\rho^2)}}}{(2\pi c)\,|\Sigma|^{1/2}}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} e^{-\left[\frac{m_2^2-2m_2\{\rho l+2(1-\rho^2)t_2\}+\{\rho l+(1-\rho^2)t_2\}^2}{2(1-\rho^2)}\right]}dm_2 \\
&= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(1-\rho)^2}+lt_1+\frac{\{\rho l+(1-\rho^2)t_2\}^2}{2(1-\rho^2)}}}{(2\pi c)\,|\Sigma|^{1/2}}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}} e^{-\frac{\left[m_2-\{\rho l+(1-\rho^2)t_2\}\right]^2}{2(1-\rho^2)}}dm_2
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(1-\rho)^2}+lt_1+\frac{\{\rho l+(1-\rho^2)t_2\}^2}{2(1-\rho^2)}}}{(2\pi)^{1/2}c}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)^{1/2}}e^{-\frac{\left[m_2-\{\rho l+(1-\rho^2)t_2\}\right]^2}{2(1-\rho^2)}}dm_2$$

Así definimos β_1 como el **interludio No. 1** en **Alonso (2009)-pág 28**

$$\beta_{1*} = \int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)^{1/2}}e^{-\frac{\left[m_2-\{\rho l+(1-\rho^2)t_2\}\right]^2}{2(1-\rho^2)}}dm_2$$

Luego β_1 es

$$\beta_1 = \frac{\beta_{1*}(l,t_1,t_2)}{c(2\pi)^{1/2}}$$

entonces $\beta_{1*} = P(-\sqrt{l^2-m_1^2} < \eta_1 < \sqrt{l^2-m_1^2})$, donde η_1 es una distribución normal definida como:

$$\eta_1 \sim N(\{\rho l + (1-\rho^2)t_2\}; 1-\rho^2)$$

Analogamente definimos β_{2*} como:

$$\beta_{2*} = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^{u(-l,m_{2,t_1,t_2})}dm_2 = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi c)}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}+\mathbf{u}}dm_2$$

y haciendo un analizis similar como β_1 en β_2 el **interludio No. 1** en **Alonso (2009)-pág 28** tenemos que

$$\beta_2 = \frac{\beta_{2*}(-l,t_1,t_2)}{c(2\pi)^{1/2}}$$

con $\beta_{2*} = P(-\sqrt{l^2-m_1^2} < \eta_2 < \sqrt{l^2-m_1^2})$, donde η_2 es una distribución normal definida como:

$$\eta_2 \sim N(\{-\rho l + (1-\rho^2)t_2\}; 1-\rho^2)$$

Parte II:

Similarmente si evaluamos los valores en la función exponencial para β^* (el otro caso de la integral en una sola variable) tenemos que

$$\beta^* = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\rho\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}\{e^u|_{-l}^{l}\}dm_1\right]$$

si definimos $\beta^{**} = \dfrac{\beta^*}{\rho}$, entonces

$$\beta^{**} = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}\{e^u|_{-l}^{l}\}dm_1\right]$$

Evaluando los los valores en la función exponencial para β^{**} (similar al caso anterior) tenemos que

$$\beta^{**} = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^{u(m_1,l,t_1,t_2)}dm_1 - \int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^{u(m_1,-l_{2,t_1,t_2})}dm_1\right]$$

Y definiendo β_3 así:

$$\beta_3 = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^{u(m_1,l,t_1,t_2)}dm_1 = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi c)}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}+\mathbf{u}}dm_1$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi c)}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} e^{-\left[\frac{m_1^2-2\rho l m_1+l^2-2(1-\rho^2)t_1m_1-2(1-\rho^2)lt_2}{2(1-\rho^2)}\right]}dm_1 \\
&= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(1-\rho)^2}+lt_2}}{(2\pi c)\,|\Sigma|^{1/2}}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} e^{-\left[\frac{m_1^2-2\rho l m_1-2(1-\rho^2)m_1t_1}{2(1-\rho^2)}\right]}dm_1 \\
&= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(1-\rho)^2}+lt_2}}{(2\pi c)\,|\Sigma|^{1/2}}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} e^{-\left[\frac{m_1^2-2m_1\{\rho l+2(1-\rho^2)t_1\}}{2(1-\rho^2)}\right]}dm_1
\end{aligned}$$

Así mismo, como en el caso de β_1 se completa el cuadrado y restando lo mismo en el exponencial dentro de la integral (termino que sale constante de la integral) tenemos

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(1-\rho)^2}+lt_2+\frac{\{\rho l+(1-\rho^2)t_1\}^2}{2(1-\rho^2)}}}{(2\pi c)\,|\Sigma|^{1/2}}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} e^{-\left[\frac{m_1^2-2m_1\{\rho l+2(1-\rho^2)t_1\}+\{\rho l+(1-\rho^2)t_1\}^2}{2(1-\rho^2)}\right]}dm_1 \\
&= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(1-\rho)^2}+lt_2+\frac{\{\rho l+(1-\rho^2)t_1\}^2}{2(1-\rho^2)}}}{(2\pi c)\,|\Sigma|^{1/2}}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} e^{-\frac{\left[m_1-\{\rho l+(1-\rho^2)t_1\}\right]^2}{2(1-\rho^2)}}dm_1 \\
&= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(1-\rho)^2}+lt_2+\frac{\{\rho l+(1-\rho^2)t_1\}^2}{2(1-\rho^2)}}}{(2\pi)^{1/2}c}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)^{1/2}}e^{-\frac{\left[m_1-\{\rho l+(1-\rho^2)t_1\}\right]^2}{2(1-\rho^2)}}dm_1
\end{aligned}$$

Y también como en β_{1*} y β_{2*} definimos β_{3*} como el **interludio No. 1** en **Alonso (2009)-pág 28** como:

$$\beta_3 = \frac{\beta_{3*}(l,t_2,t_1)}{c(2\pi)^{1/2}}$$

entonces $\beta_{3*} = P(-\sqrt{l^2-m_2^2} < \eta_3 < \sqrt{l^2-m_2^2})$, donde η_3 es una distribución normal definida como:

$$\eta_3 \sim N(\{\rho l + (1-\rho^2)t_1\}; 1-\rho^2)$$

Analogamente definimos β_{4*} como:

$$\beta_{4*} = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^{u(m_1,-l,t_1,t_2)} dm_1 = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi c)}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}} e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}+\mathbf{u}} dm_1$$

y haciendo un analizis similar como β_1, β_2 y β_3 el **interludio No. 1** en **Alonso (2009)-pág 28** tenemos que

$$\beta_4 = \frac{\beta_{4*}(-l, t_2, t_1)}{c(2\pi)^{1/2}}$$

con $\beta_{4*} = P(-\sqrt{l^2-m_2^2} < \eta_4 < \sqrt{l^2-m_2^2})$, donde η_4 es una distribución normal definida como:

$$\eta_4 \sim N(\{-\rho l + (1-\rho^2)t_1\}; 1-\rho^2)$$

Por lo tanto, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ y β_4 son 4 distribuciones normales con medias y varianzas similares, las cuales se redefinen cambiando l y $-l$ y también t_1 y t_2

Derivada con respecto a t_2

Parte III:

$$D^{(0,1)} = \frac{\partial G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_2} = G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(\rho t_1 + t_2) + \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\int_{-l}^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \frac{\partial u}{\partial t_1} dm_1 dm_2$$

$$= G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(\rho t_1 + t_2) + \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\int_{-l}^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \left(-\rho\frac{\partial u}{\partial m_1} - \frac{\partial u}{\partial m_2}\right) dm_1 dm_2$$

Análogo al razonamiento anterior desarrollando los diferenciales dentro de la integral e integrando se tiene:

$$D^{(0,1)} = \frac{\partial G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_2} = G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(\rho t_1 + t_2) - \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\int_{-l}^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \left(\rho\frac{\partial u}{\partial m_1} + \frac{\partial u}{\partial m_2}\right) dm_1 dm_2$$

$$= G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(\rho t_1 + t_2) - \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\int_{-l}^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \rho\frac{\partial u}{\partial m_1} dm_1 dm_2\right]$$

$$-\frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\int_{-l}^{l} \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)} e^u \frac{\partial u}{\partial m_2} dm_1 dm_2\right]$$

Repitiendo el analisis de la **Parte I** redefinimos los valores dentro de la integral para la segunda integral, es decir:

$$D^{(0,1)} = \frac{\partial G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_2} = G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(\rho t_1 + t_2) - \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\int_{-l}^{l}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^u\rho\frac{\partial u}{\partial m_1}dm_1dm_2\right]$$
$$-\frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}}\int_{-l}^{l}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^u\frac{\partial u}{\partial m_2}dm_2dm_1\right]$$

E integrando nuevamente en las dos integrales interiores tenemos que:

$$D^{(0,1)} = \frac{\partial G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_2} = G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(\rho t_1 + t_2) - \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}\rho\{e^u|_{-l}^{l}\}dm_2\right]$$
$$-\frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}\{e^u|_{-l}^{l}\}dm_1\right]$$

Viendo nuevamente el caso particular para una sola integral, es decir:

$$\beta_\star = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\rho\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_1^2}}^{\sqrt{l^2-m_1^2}}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}\{e^u|_{-l}^{l}\}dm_2\right]$$

y

$$\beta^\star = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}\{e^u|_{-l}^{l}\}dm_1\right]$$

Por lo tanto $\beta_* = \dfrac{\beta_\star}{\rho}$ y $\beta_\star = \rho\beta^*$ (salvo ρ), así el resultado sería el mismo encontrado en la **Parte I** y **Parte II**.

Parte IV

Retomando el problema inicial se define la primer derivada con respecto a t_1

$$D^{(1,0)} = \frac{\partial G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})}{\partial t_1} = G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(t_1 + \rho t_2) + \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-l}^{l}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^u\frac{\partial u}{\partial t_1}dm_1dm_2$$
$$= G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})(t_1+\rho t_2)+\frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\int_{-l}^{l}\int_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^u\left(-\frac{\partial u}{\partial m_1} - \rho\frac{\partial u}{\partial m_2}\right)dm_1dm_2$$

Usando el mismo argumento en el cual separamos las integrales en la **Parte I** y resolviendo las integrales internas sería el mismo caso pero evaluando los lḿites de las integrales $-\sqrt{l^2-m_2^2}$ y $\sqrt{l^2-m_2^2}$, es decir:

$$\beta_{*'} = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-l}^{l}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}\{e^u|_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}}\}dm_2\right]$$

y

$$\beta^{*'} = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\rho\left[\int_{-l}^{l}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}\{e^u|_{-\sqrt{l^2-m_2^2}}^{\sqrt{l^2-m_2^2}}\}dm_1\right]$$

Evaluando los los valores en la función exponencial para $\beta_{*'}$ tenemos que

$$\beta_{*'} = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}}}{c}\left[\int_{-l}^{l}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^{u(\sqrt{l^2-m_2^2},m_{2,t_1,t_2})}dm_2 - \int_{-l}^{l}\frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)}e^{u(-\sqrt{l^2-m_2^2},m_{2,t_1,t_2})}dm_2\right]$$

Por lo tanto si tomamos solo la primer integral tenemos que

$$\beta_1' = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi c)}\int_{-l}^{l} e^{-\left[\frac{\left(\sqrt{l^2-m_2^2}\right)^2-2\rho\left(\sqrt{l^2-m_2^2}\right)m_2+m_2^2-2(1-\rho^2)t_1\left(\sqrt{l^2-m_2^2}\right)-2(1-\rho^2)t_2m_2}{2(1-\rho^2)}\right]}dm_2$$

Resolviendo el termino que esta en el exponendial tenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma &= -\left[\frac{\left(\sqrt{l^2-m_2^2}\right)^2-2\rho\left(\sqrt{l^2-m_2^2}\right)m_2+m_2^2-2(1-\rho^2)t_1\left(\sqrt{l^2-m_2^2}\right)-2(1-\rho^2)t_2m_2}{2(1-\rho^2)}\right]\\
&= -\left[\frac{l^2-m_2^2-2\rho\left(\sqrt{l^2-m_2^2}\right)m_2+m_2^2-2(1-\rho^2)t_1\left(\sqrt{l^2-m_2^2}\right)-2(1-\rho^2)t_2m_2}{2(1-\rho^2)}\right]\\
&= -\left[\frac{(l^2-m_2^2)-2\sqrt{l^2-m_2^2}(\rho m_2+(1-\rho^2)t_1)-2(1-\rho^2)t_2m_2}{2(1-\rho^2)}\right]\\
&= -\left[\frac{\{(l^2-m_2^2)-2\sqrt{l^2-m_2^2}(\rho m_2+(1-\rho^2)t_1)+\rho^2m_2^2+2\rho m_2(1-\rho^2)t_1+(1-\rho^2)^2t_1^2\}}{2(1-\rho^2)}\right]\\
&\qquad+\left[\frac{\{-2(1-\rho^2)t_2m_2+m_2^2-\rho^2m_2^2-2\rho m_2(1-\rho^2)t_1-(1-\rho^2)^2t_1\}}{2(1-\rho^2)}\right]\\
&= -\frac{\left[\sqrt{l^2-m_2^2}-(\rho m_2+(1-\rho^2)t_1)\right]^2}{2(1-\rho^2)}+\frac{\left[-2(1-\rho^2)t_2m_2+m_2^2-\rho^2m_2^2-2\rho m_2(1-\rho^2)t_1-(1-\rho^2)^2t_1\right]}{2(1-\rho^2)}\\
&= -\frac{\left[\sqrt{l^2-m_2^2}-(\rho m_2+(1-\rho^2)t_1)\right]^2}{2(1-\rho^2)}+\frac{\left[m_2^2-2m_2(1-\rho^2)\{t_2+t_1\}-\rho^2m_2^2-(1-\rho^2)^2t_1\right]}{2(1-\rho^2)}\\
&= -\frac{\left[\sqrt{l^2-m_2^2}-(\rho m_2+(1-\rho^2)t_1)\right]^2}{2(1-\rho^2)}+\frac{\left[m_2^2(1-\rho^2)-2m_2(1-\rho^2)\{t_2+t_1\}-(1-\rho^2)^2t_1\right]}{2(1-\rho^2)}\\
&= -\frac{\left[\sqrt{l^2-m_2^2}-(\rho m_2+(1-\rho^2)t_1)\right]^2}{2(1-\rho^2)}+\frac{\left[m_2^2(1-\rho^2)(1-2m_2(\{t_2+t_1\})-(1-\rho^2)^2t_1\right]}{2(1-\rho^2)}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\left[\sqrt{l^2 - m_2^2} - (\rho m_2 + (1-\rho^2)t_1)\right]^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\left[(1-\rho^2)(m_2^2 - 2m_2(\{t_2+t_1\}) - (1-\rho^2)^2 t_1\right]}{2(1-\rho^2)}$$

$$= -\frac{\left[\sqrt{l^2 - m_2^2} - (\rho m_2 + (1-\rho^2)t_1)\right]^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{(1-\rho^2)\left[(m_2^2 - 2m_2(\{t_2+t_1\}) - (1-\rho^2)t_1\right]}{2(1-\rho^2)}$$

$$= -\frac{\left[\sqrt{l^2 - m_2^2} - (\rho m_2 + (1-\rho^2)t_1)\right]^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{(1-\rho^2)\left[(m_2^2 - 2m_2(\{t_2+t_1\}) + \{t_2+t_1\}^2 - (1-\rho^2)t_1 - \{t_2+t_1\}^2\right]}{2(1-\rho^2)}$$

$$= -\frac{\left[\sqrt{l^2 - m_2^2} - (\rho m_2 + (1-\rho^2)t_1)\right]^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{(1-\rho^2)\left[(m_2 - \{t_2+t_1\})^2\right]}{2(1-\rho^2)} + \frac{\left[-(1-\rho^2)t_1 - \{t_2+t_1\}^2\right]}{2(1-\rho^2)}$$

Sea $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ donde

$$\gamma_1 = \frac{\left[\sqrt{l^2 - m_2^2} - (\rho m_2 + (1-\rho^2)t_1)\right]^2}{2(1-\rho^2)}$$
$$\gamma_2 = \frac{(1-\rho^2)\left[(m_2 - \{t_2+t_1\})^2\right]}{2(1-\rho^2)}$$
$$\gamma_3 = \frac{\left[-(1-\rho^2)t_1 - \{t_2+t_1\}^2\right]}{2(1-\rho^2)}$$

Por lo tanto

$$\beta_1' = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi c)} \int_{-l}^{l} e^{\gamma} dm_2 = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi c)} \int_{-l}^{l} e^{\gamma_1} e^{\gamma_2} e^{\gamma_3} dm_2$$

.3. Anexo C

Distribución Normal Bivariada en coordenadas polares

La distribución normal bivariada puede describirse por la siguiente función de densidad

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\{(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\left[\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}-\frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y}\right)\right]} \end{aligned} \tag{63}$$

Donde ρ es el coeficiente de correlación entre X y Y, en este caso

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x\sigma_y\rho \\ \sigma_x\sigma_y\rho & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \tag{64}$$

Si $N(0,0,1,1,\rho)$ entonces

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\left[\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2+y^2-2\rho_{xy}\right)\right]} \tag{65}$$

Usando la trasformación $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ tenemos que

$$\begin{aligned} f_{R,\Theta}(r,\theta) &= \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-2r^2\rho\cos\theta\sin\theta\right)\right]} \\ &= \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(r^2\{\cos^2\theta+\sin^2\theta\}-2r^2\rho\cos\theta\sin\theta\right)\right]} \\ &= \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(r^2-2r^2\rho\cos\theta\sin\theta\right)\right]} \\ &= \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[-\frac{r^2}{2(1-\rho^2)}(1-2\rho\cos\theta\sin\theta)\right]} \\ &= \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[-\frac{r^2}{2(1-\rho^2)}(1-2\rho\cos\theta\sin\theta)\right]} \\ &= \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[-\frac{r^2}{2(1-\rho^2)}(1-\rho\sin(2\theta))\right]} \\ &= \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[\frac{r^2}{2(1-\rho^2)}(\rho\sin(2\theta)-1)\right]} \end{aligned}$$

Función generatriz de momentos de M en coordenadas polares

Si notamos $\mathbf{x} = (x,y)^T$ y $\mathbf{t} = (t_1,t_2)^T$, por definición de la función generatriz de momentos se define como

$$G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t}) = E(e^{\mathbf{t}^T\mathbf{X}}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{(\mathbf{t}^T\mathbf{x})} f_{R,\Theta}(r,\theta)drd\theta \tag{66}$$

Además $\mathbf{t}^T\mathbf{X} = (t_1,t_2)^T(x,y) = t_1x + t_2y = t_1r\cos\theta + t_2r\sin\theta = r(t_1\cos\theta + t_2\sin\theta)$ entonces la función generatriz de momentos es

$$\begin{aligned}
G_{\mathbf{M}}(\mathbf{t}) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[\frac{r^2}{2(1-\rho^2)}(\rho\sin(2\theta)-1)\right]} e^{r(t_1\cos\theta+t_2\sin\theta)} drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[-\frac{r^2}{2(1-\rho^2)}(1-\rho\sin(2\theta))\right]} e^{r(t_1\cos\theta+t_2\sin\theta)} drd\theta \\
&= \frac{1}{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[-\frac{r^2}{2(1-\rho^2)}(1-\rho\sin(2\theta))\right]+r(t_1\cos\theta+t_2\sin\theta)} drd\theta
\end{aligned}$$

Ecuación que es equivalente a (3.24) donde c_2 es la constante de estandarización que hace la función una densidad conjunta[15]

$$c_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{l} \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[\frac{r^2}{2(1-\rho^2)}(\rho\sin(2\theta)-1)\right]} drd\theta \tag{67}$$

.4. Anexo D

```
##########Cuadratura de Gauss Integral Doble 6 puntos D(m,n)#########
cuadratura <- function(rho, k, m, n, t1, t2) {
  w<-c(0.1713245,0.3607616,0.4679139,0.4679138,0.3607616,0.1713245)
  z<-c(-0.932469514,-0.661209386,-0.238619186,0.238619186,0.661209386,0.932469514)

  dominio_r=c(0,k*0.67448975)
  dominio_theta=c(0,2*pi)
  #Densidad sin truncar
  fun <- function(r,theta) {
    k1 = (1-(2*rho*cos(theta)*sin(theta))) / (2*(1-(rho^2)))
    num = (r^(m+n+1))*(cos(theta)^m)*(sin(theta)^n)*exp(-(r^2)*k1)
              * exp(r*((t1*cos(theta)) + (t2*sin(theta)) ))
    den = 2*pi*sqrt(1-(rho^2))
    num/den
  }
  #Cuadratura sin truncar
  suma=0
  for (i in 1:6){
    for (j in 1:6){
      suma=suma+w[i]*w[j]*fun((dominio_r[2]-dominio_r[1])*z[i]/2+(dominio_r[2]
                +dominio_r[1])/2,(dominio_theta[2]-dominio_theta[1])*z[j]/2
```

[15] Transformando la ecuación (3.8) a coordenadas polares

```
                +(dominio_theta[2]
                +dominio_theta[1])/2)
      suma
    }
  }
  integral=suma*(dominio_r[2]-dominio_r[1])*(dominio_theta[2]-dominio_theta[1])/4

  #Densidad de c2

  fun_c <- function(r,theta) {
    k1 = (1-(2*rho*cos(theta)*sin(theta))) / (2*(1-rho^2))
    num = r*exp(-(r^2)*k1)
    den = 2*pi*sqrt(1-(rho^2))
    num/den
  }
  # Cuadratura del c2
  suma_c=0
  for (i in 1:6){
    for (j in 1:6){
      suma_c=suma_c+w[i]*w[j]*fun_c((dominio_r[2]-
                    dominio_r[1])*z[i]/2+(dominio_r[2]
                    +dominio_r[1])/2,(dominio_theta[2]-dominio_theta[1])*z[j]/2
                    +(dominio_theta[2]+dominio_theta[1])/2)
      suma_c
    }
  }

  integral_c=suma_c*(dominio_r[2]-dominio_r[1])*(dominio_theta[2]
                    -dominio_theta[1])/4

  #Resultado
  resultado = c( integral_c, integral*(1/integral_c) )

  resultado

}
MMM<-seq(from = -1, to = 1, by = 0.1)

# Para K=3
k = 3
# Con variacion de valores (m,n)=(1,1),(3,1),(5,1),(3,3),(5,3),(5,5)
#(m,n)=(1,1)
m = 1
n = 1
t1 = 0
t2 = 0
#
d<-0
rho_mn<-NULL
```

```
Matriz_mn311<-matrix(NA,length(MMM),2)
for( rho in MMM ) {
  d=d+1
  rho_mn[d]<-rho
  ###print(rho)
  Matriz_mn311[d,]<-cuadratura(rho, k, m, n, t1, t2)
  ###print(cuadratura(rho, k, m, n, t1, t2))

}

#(m,n)=(3,1)
m = 3
n = 1
t1 = 0
t2 = 0
#
d<-0
rho_mn<-NULL
Matriz_mn331<-matrix(NA,length(MMM) ,2)
for( rho in MMM ) {
  d=d+1
  rho_mn[d]<-rho
  ###print(rho)
  Matriz_mn331[d,]<-cuadratura(rho, k, m, n, t1, t2)
  ###print(cuadratura(rho, k, m, n, t1, t2))

}


##########Cuadratura de Gauss Integral Doble 6 puntos D(m)#########

cuadratura_m <- function(rho, k, m,n, t1, t2) {
  w<-c(0.1713245,0.3607616,0.4679139,0.4679138,0.3607616,0.1713245)
  z<-c(-0.932469514,-0.661209386,-0.238619186,0.238619186,0.661209386,0.932469514)

  dominio_r=c(0,k*0.67448975)
  dominio_theta=c(0,2*pi)
  #Densidad sin truncar m
  fun_m <- function(r,theta) {
    k1 = (1-(2*rho*cos(theta)*sin(theta))) / (2*(1-(rho^2)))
    num = (r^(m+1))*(cos(theta)^m)*(exp(-(r^2)*k1))
                *(exp(r*(t1*cos(theta))))
    den = sqrt(2*pi)
    num/den
  }
  #Cuadratura sin truncar
  suma=0
  for (i in 1:6){
    for (j in 1:6){
```

```
      suma=suma+w[i]*w[j]*fun_m((dominio_r[2]-dominio_r[1])
                 *z[i]/2+(dominio_r[2]+dominio_r[1])/2,(dominio_theta[2]-
                     dominio_theta[1])*z[j]/2+(dominio_theta[2]
                     +dominio_theta[1])/2)
      suma
    }
  }
  integral_m=suma*(dominio_r[2]-dominio_r[1])*(dominio_theta[2]-dominio_theta[1])/4

  #Densidad de c2

  fun_c <- function(r,theta) {
    k1 = (1-2*rho*cos(theta)*sin(theta)) / (2*(1-rho^2))
    num = r*exp(-r^2*k1)
    den = 2*pi*sqrt(1-(rho^2))
    num/den
  }


  # Cuadratura del c2
  suma_c=0
  for (i in 1:6){
    for (j in 1:6){
      suma_c=suma_c+w[i]*w[j]*fun_c((dominio_r[2]-dominio_r[1])*z[i]/2+
                      (dominio_r[2]+dominio_r[1])/2,(dominio_theta[2]
                      -dominio_theta[1])*z[j]/2+(dominio_theta[2]
                                                          +dominio_theta[1])/2)
      suma_c
    }
  }

  integral_c=suma_c*(dominio_r[2]-dominio_r[1])
                                      *(dominio_theta[2] -dominio_theta[1])/4

  #Resultado
  resultado = c( integral_c, integral_m*(1/integral_c) )

  resultado

}



### Para K=3
k=3
# Con variacion de valores m=2,4,6,8,10
#m=2
m = 2
t1 = 0
```

```
t2 = 0


d<-0
rho_m<-NULL
Matriz_m32<-matrix(NA,length(MMM),2)
for( rho in MMM ) {
  d=d+1
  rho_m[d]<-rho
  #print(rho)
  Matriz_m32[d,]<-cuadratura_m(rho, k, m, t1, t2)
  #print(cuadratura_m(rho, k, m, t1, t2))

}

####################Funciones gamma de fi###############
l<-c(3,6,9)*0.67448975


#para l=3
k=l[1]

GamXY<-matrix(NA,length(MMM),4)
GamXY[,1]<-rho_mn
num1=0
den1=0
num2=0
den2=0
for(i in 1:length(rho_mn)){
  #GamaXY
  num1=(Valores_3mn[i,3]/k^2)-(4*Valores_3mn[i,4]/k^4)
              +(2*Valores_3mn[i,5]/k^6)+(4*Valores_3mn[i,6]/k^6)
              -(4*Valores_3mn[i,7]/k^8)+(Valores_3mn[i,8]/k^10)
  den1=(1-(6*Valores_3m[i,3]/k^2)+(5*Valores_3m[i,4]/k^4))^2
  GamXY[i,3]=num1/den1
  #GamaXX
  num2=(Valores_3m[i,3]/k^2)-(4*Valores_3m[i,4]/k^4)
              +(6*Valores_3m[i,5]/k^6)-(4*Valores_3m[i,6]/k^8)
              +(Valores_3m[i,7]/k^10)
  den2=(1-(6*Valores_3m[i,3]/k^2)+(5*Valores_3m[i,4]/k^4))^2
  GamXY[i,4]=num2/den2
  #VarRho
  GamXY[i,2]=GamXY[i,3]/GamXY[i,4]
}
colnames(GamXY)<-c("rho","VarRho","GammaXY","GammaXX")
VarRho3<-GamXY;VarRho3<-data.frame(VarRho3);attach(VarRho3)

#para l=6
k=l[2]
```

```
GamXY<-matrix(NA,length(MMM),4)
GamXY[,1]<-rho_mn
num1=0
den1=0
num2=0
den2=0
for(i in 1:length(rho_mn)){
  #GamaXY
  num1=(Valores_6mn[i,3]/k^2)-(4*Valores_6mn[i,4]/k^4)
              +(2*Valores_6mn[i,5]/k^6)+(4*Valores_6mn[i,6]/k^6)
              -(4*Valores_6mn[i,7]/k^8)+(Valores_6mn[i,8]/k^10)
  den1=(1-(6*Valores_6m[i,3]/k^2)+(5*Valores_6m[i,4]/k^4))^2
  GamXY[i,3]=num1/den1
  #GamaXX
  num2=(Valores_6m[i,3]/k^2)-(4*Valores_6m[i,4]/k^4)
             +(6*Valores_6m[i,5]/k^6)-(4*Valores_6m[i,6]/k^8)
             +(Valores_6m[i,7]/k^10)
  den2=(1-(6*Valores_6m[i,3]/k^2)+(5*Valores_6m[i,4]/k^4))^2
  GamXY[i,4]=num2/den2
  #BarRho
  GamXY[i,2]=GamXY[i,3]/GamXY[i,4]
}
colnames(GamXY)<-c("rho","VarRho","GammaXY","GammaXX")
VarRho6<-GamXY;VarRho6<-data.frame(VarRho6);attach(VarRho6)


##############################################
#-------Cuadratura de Gauss-Kronrod--------#
################Librerias###################
library(pracma)
library(ggplot2)
library(grid)
library(gridExtra)
library(truncnorm)
library(xtable)

#### Parametros de las Funciones#######
MMM<-c(-0.99,seq(from = -.9, to = .9, by = 0.1),0.99)
MMM
k=c(3,6,9)
l=k*0.67448975
M =c(1,3,5,1,3,5,1,3,5)
N =c(1,1,1,3,3,3,5,5,5)
Mom1<-cbind(M,N)
Mom2<-c(2,4,6,8,10)
t1 = 0
t2 = 0
```

```
############Para k=3############
Matriz<-matrix(NA,length(MMM),22)
Rho<-NULL
d=0
for( rho in MMM ) {
  d=d+1
  Rho[d]<-rho
  #a=1
  Matriz[d,1]<-rho

  #Funcion C2

   C2<- function(r,theta) {
    k1 = (1-(2*Rho[d]*cos(theta)*sin(theta))) / (2*(1-(Rho[d]^2)))
    num = r*exp(-(r^2)*k1)
    den = 2*pi*sqrt(1-(Rho[d]^2))
    num/den
   }
   Matriz[d,3]<-integral2(C2,0,l[1],0,2*pi, reltol = 1e-10)$Q


    #Funcion Dmn


for(i in 1:length(Mom1[,1])){
 m=0
  n=0
  m=Mom1[i,1]
  n=Mom1[i,2]
  Dmn<-function(r1,theta1){
      k1 = (1-(2*Rho[d]*cos(theta1)*sin(theta1))) / (2*(1-(Rho[d]^2)))
      num = (r1^(m+n+1))*(cos(theta1)^m)*(sin(theta1)^n)
                  *exp(-(r1^2)*k1)
                   * exp(r1*((t1*cos(theta1)) + (t2*sin(theta1)) ))
      den = 2*pi*sqrt(1-(Rho[d]^2))
      num/den
    }
  Matriz[d,3+i]<-(integral2(Dmn,0,l[1],0,2*pi,reltol = 1e-10
                           ,singular = TRUE)$Q)/Matriz[d,3]

}

    #Funcion DmX
for(i in 1:length(Mom2)){
  m=0
  m=Mom2[i]
  DmX <- function(r2,theta2) {
    k1 = (1-(2*Rho[d]*cos(theta2)*sin(theta2))) / (2*(1-(Rho[d]^2)))
    num = (r2^(m+1))*(cos(theta2)^m)*(exp(-(r2^2)*k1))*(exp(r2*(t1*cos(theta2))))
```

```
    den = sqrt(2*pi)
    num/den
  }
  Matriz[d,12+i]<-(integral2(DmX,0,l[1],0,2*pi,reltol = 1e-10,
                              singular = TRUE)$Q)/Matriz[d,3]

}
   #Funcion DnY
   for(i in 1:length(Mom2)){
     n=0
     n=Mom2[i]
     DnY <- function(r3,theta3) {
       k1 = (1-(2*Rho[d]*cos(theta3)*sin(theta3))) / (2*(1-(Rho[d]^2)))
       num = (r3^(n+1))*(sin(theta3)^n)*(exp(-(r3^2)*k1))*(exp(r3*(t2*sin(theta3))))
       den = sqrt(2*pi)
       num/den
     }
     Matriz[d,17+i]<-(integral2(DnY,0,l[1],0,2*pi,reltol = 1e-10
                               ,singular = TRUE)$Q)/Matriz[d,3]

   }
     #Funcion VarRho
     GammaXY<-0
     GammaXX<-0
       GammaXY<-(Matriz[d,4]/(l[1]^2))-(2*(Matriz[d,5]/(l[1]^4)))
                             +((Matriz[d,6]/(l[1]^6)))-(2*(Matriz[d,7]/(l[1]^4)))
                             +(4*(Matriz[d,8]/(l[1]^6)))-(2*Matriz[d,9]/(l[1]^8))
                             +(Matriz[d,10]/(l[1]^6))-(2*Matriz[d,11]/(l[1]^8))
                             +(Matriz[d,12]/(l[1]^10))
       GammaXX<-sqrt( ((Matriz[d,13]/(l[1]^2))-(4*(Matriz[d,14]/(l[1]^4)))
                                 +(6*(Matriz[d,15]/(l[1]^6)))
                                  -(4*(Matriz[d,16]/(l[1]^8)))
                                         +(Matriz[d,17]/(l[1]^10)))
                                     *((Matriz[d,18]/(l[1]^2))
                                            -(4*(Matriz[d,19]/(l[1]^4)))
                                               +(6*(Matriz[d,20]/(l[1]^6)))
                                                    -(4*(Matriz[d,21]/(l[1]^8)))
                                                        +(Matriz[d,22]/(l[1]^10))))
  Matriz[d,2]<- GammaXY/GammaXX

}
```