LA PROPORCIONALIDAD Y EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

LINA MARÍA JARAMILLO VÉLEZ

Tesis de Maestría presentada como requisito parcial para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director
CARLOS JULIO ECHAVARRÍA HINCAPIÉ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Medellín - Colombia
2012

DEDICATORIA

A mi hijo Gabriel Correa Jaramillo con todo mi amor.

TABLA DE CONTENIDO

TÍTULO 3
RESUMEN 3
SUMMARY 5
INTRODUCCIÓN 7
MARCO TEÓRICO 10
OBJETIVOS 28
METODOLOGÍA 29
DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA DE AULA 31
PRUEBA DE DIAGNÓSTICO 31
INTERVENCIÓN 36
RESULTADOS 48
CONCLUSIONES 49
ANEXO 1 51
ANEXO 2 58
BIBLIOGRAFÍA 66

TÍTULO

LA PROPORCIONALIDAD Y
EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

RESUMEN

En las siguientes páginas se presenta el trabajo final para optar por el título de magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, es una práctica docente en la que se desarrollo una experiencia de aula centrada en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de proporcionalidad por parte de un grupo de alumnas de la educación media.

La experiencia de aula se llevo a cabo en un grupo del grado undécimo de la Institución educativa Centro Formativo de Antioquia. CEFA de Medellín; con el objetivo de proponer y realizar actividades usando distintas estrategias metodológicas, es decir, el dialogo, la investigación, el trabajo en grupo y/o el trabajo individual que permitan consolidar el significado del concepto de proporcionalidad importante para el aprendizaje de las matemáticas y de otras áreas como la química y la física, áreas relevantes para su éxito en el ingreso en la educación superior.

El pilar de esta experiencia de aula fue la metodología de Aula Taller caracterizada por el uso y diseño de guías de trabajo conjuntamente con material concreto y didáctico para la exploración de situaciones de la vida diaria, que conlleve al desarrollo de un pensamiento matemático y científico, que sirva para la formación de personas del siglo XXI.

La documentación de la experiencia de aula se divide en tres etapas, una prueba de entrada o diagnóstico, una etapa de intervención y por último una evaluación de las actividades realizadas, con la cual culminará la experiencia y de la cual se podrán sacar las conclusiones y recomendaciones pertinentes.

PALABRAS CLAVES

Proporcionalidad, proporción, razón, pensamiento matemático.

TITLE

PROPORTIONALITY AND DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL THINKING

SUMMARY

The following pages present the final work to qualify for the master's degree in Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, is a teaching practice that developed in a classroom experience focused on processes of teaching and learning of the concept of proportionality part of a group of middle school students.

The classroom experience was carried out in eleventh grade a group of Educational Institution Centro Formativo de Antioquia. CEFA of Medellin, with the aim to propose and carry out activities using different methodological strategies that is, dialogue, research, group work and / or individual work to consolidate the meaning of the concept of proportionality important for learning mathematics and other areas such as chemistry and physics areas relevant to their success in admission to higher education.

The cornerstone of this classroom experience was characterized Aula Taller methodology for the design and use of guides work almost always accompanied by concrete material and didactic for the exploration of daily life situations that lead to the development of mathematical thinking and scientific, that is for the training of people in the XXI century.

Documentation of the classroom experience is divided into three stages, an entrance test or diagnosis, intervention stage and finally an evaluation of activities, which culminate with the experience and which may draw conclusions and recommendations.

KEYWORDS

Proportionality, ratio, reason, mathematical thinking.

INTRODUCCIÓN

"El Universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola de sus palabras. Sin ese lenguaje, navegamos en un oscuro laberinto". Galileo.

Las matemáticas son una forma de pensar, de ver y de describir el mundo, lo que nos rodea, las mil situaciones que a diario vivimos, por ello los temas y las actividades de matemáticas que se desarrollen en el aula de clase deben contribuir a la par de las demás asignaturas al desarrollo de las distintas formas de pensar y en especial de los diferentes tipos de pensamiento matemático de cada uno de los individuos de un grupo de estudiantes; las matemáticas aportan a esas formas de pensar entre otros con el desarrollo del sentido de la proporcionalidad que posibilita numerosas relaciones entre distintas ideas y conceptos matemáticos estudiados en la escuela en todos los niveles y/o grados.

Uno de los propósitos fundamentales de la escuela actual es desarrollar el significado de la proporcionalidad en los estudiantes, para que dimensionen el mundo que los rodea, lo comprendan y tengan una buena calidad de vida, mantenida o conseguida a través de las decisiones que les corresponda tomar tanto en el ámbito académico y laboral como en el personal y familiar.

La formación matemática en la escuela hoy, prioriza el desarrollo de los contenidos y le da unas secuencias rígidas, que apuntan inclusive a memorizar algunos datos y en ocasiones carece de claridad sobre cuáles son los temas fundamentales en los que en cada grado se deben ir afinando los detalles. El concepto de proporcionalidad sobresale por varias razones entre ellas por ser un eje importante en la educación básica y media y por su especial relación con el

desarrollo de la inteligencia de los individuos que lo aprenden de forma significativa; y por consiguiente cabe destacar la relevancia de la continuidad de la enseñanza de este tema en el paso por la escuela.

Es por todo lo anterior que se identifica y escoge la apropiación del concepto de proporcionalidad por parte de los alumnos de la educación básica y media como problema de enseñanza-aprendizaje sobre el cual se adelantó y documentó una experiencia de aula para buscar algunas soluciones al mismo.

Se optó por una experiencia de aula como consecuencia de mi experiencia personal en la enseñanza y la orientación de estudiantes y docentes de la educación básica y media donde las dificultades en el uso del concepto de proporcionalidad, como una relación entre magnitudes medibles en la resolución de problemas y las dudas en su uso en situaciones cotidianas se manifiestan continuamente; y a pesar de que su uso es frecuente sus ideas están dirigidas de manera mecánica al uso de la regla de tres, y ésta en muchas ocasiones es mal interpretada.

Además dado que la relación de proporcionalidad entre magnitudes y los conceptos de razón y fracción hacen parte del contenido del currículo de la educación básica y media en Colombia, es importante indagar los conocimientos previos con los que los estudiantes de la educación media (décimo grado) llegan a undécimo grado especialmente por su importancia en el aprendizaje de conceptos básicos de otras áreas de las matemáticas como la trigonometría y el cálculo y en otras disciplinas que se esperan queden aprendidas en este último grado para que su ingreso a la educación universitaria no tenga mayores tropiezos. Reiterándose así la importancia de desarrollar el significado de la proporcionalidad en la educación básica donde se agrupan varios temas que deben ser estudiados en la escuela desde los proceso de medición, las fracciones, las ideas geométricas (semejanza y congruencia entre otras), las transformaciones geométricas, la estadística, la trigonometría, el cálculo, etc.

Esta experiencia de aula se centró en las habilidades, dificultades y estrategias que se manifiestan en los estudiantes cuando en la solución de problemas propuestos en un ambiente de taller se deben usar los conceptos de razón, el razonamiento proporcional y los procesos de medición entre otros y servirá para revisar los planes de estudio en matemáticas del grado 11º y proponer algunas estrategias para mejorar el nivel de aprendizaje del tema tratado.

MARCO TEÓRICO

“Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura”. Bertrand Russell.

Desde la antigüedad el concepto de proporcionalidad está presente en la vida cotidiana y se encuentra en muchas áreas del arte como en la arquitectura, la escultura y la música entre otras. Algunas tablas sumerias muestran estudios sobre la sección aurea o divina proporción y luego los griegos en busca de la perfección la buscaron, la descubrieron y estudiaron y vieron que esta relación se encontraba en las conchas de los caracoles, el crecimiento de algunas hojas y en muchísimas manifestaciones de la naturaleza; la usaron en sus manifestaciones artísticas y aún se encuentra en el arte moderno y contemporáneo.

La falta de proporcionalidad o desproporcionalidad también ha estado presente desde la antigüedad, en Grecia El Coloso de Rodas era inmensamente desproporcionado y algunas construcciones como el Partenón fueron erigidos a gran escala con el objeto de hacerlos ver inmensos y al mismo tiempo hacer sentir pequeñas a las personas que los admiraban. En la actualidad hay también ejemplos de falta de proporcionalidad, muchos juguetes y dibujos animados no respetan las proporciones reales del cuerpo humano. [1]

[1] http://vimeo.com/12367599

Ilustración 1. Partenón Griego

El inicio de las matemáticas se dio para comprender el mundo que nos rodea y el universo en el que se encuentra este. Se sitúa este principio cuando los egipcios empezaron a identificar algunos patrones y por ejemplo usaron las inundaciones provocada por el rio Nilo como inicio del año y con sus registros se dieron los primeros calendarios.

Hacia el año 600 a de C El padre tradicional de la matemática griega Tales de Mileto propone el teorema que lleva su nombre, relativo a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas.

Teorema de Tales: Si dos rectas r y r' se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra.

Existe una leyenda que atribuye a Tales el uso de sus conocimientos de geometría para medir las dimensiones de las pirámides de Egipto y calcular la distancia a la costa de barcos en alta mar. Diógenes Laertes, junto con Plinio y Plutarco señalan que la medida de la altura de las pirámides se llevó a cabo a través de la

determinación de la longitud de la sombra que ellas producían cuando una vara clavada verticalmente en el suelo producía una sombra igual a su altura. Para medir la distancia de los barcos en alta mar a la costa, la leyenda dice que Tales fue el primero en emplear la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes. Hay dudas muy grandes con respecto a esto, ya que estas ideas se habían manejado con mucha anterioridad en Egipto y Mesopotamia, donde Tales invirtió una parte de su vida.

Los egipcios crearon también algunas medidas con sus cuerpos para calcular las áreas de sus tierras y saber cuánto debían pagar en impuestos y como obrar a la hora de repartirlas; Y en el uso de estos primeros procesos de medición aparecieron los números fraccionarios y las operaciones con los mismos como se comprueba en el papiro de Ahmes. No obstante, en el siglo VI d. C, fueron los hindúes quienes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones.

Las medidas con base en el cuerpo humano han ocupado un importante papel en la arquitectura y el arte en general y aunque el sistema métrico trato de imponerse también en este campo han sido varios creativos los que han propuesto otros sistemas de medida, entre ellos un arquitecto suizo llamado Charles Édouard Jeanneret-Gris, conocido como Le Corbusier, en la década de 1940 a 1950, él creía que las medidas se habían despersonalizado y creó un sistema de mediciones llamado “el modulor” con base en la escala humana; Usado hoy por los diseñadores industriales a quienes el sistema métrico decimal no les es tan útil como lo es en otro campos. Le Corbusier es referente de la arquitectura moderna, y “el modulor” muy usado hoy en este arte y en la ergonomía para el diseño de los puestos de trabajo entre otros.

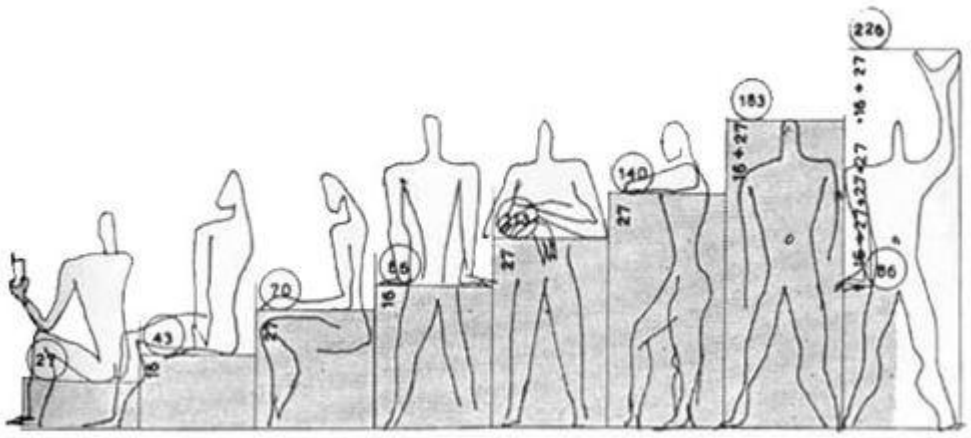


Ilustración 2. El Modulor

Existen otros campos del arte donde la proporción o la escala son fundamentales, como por ejemplo en el cine de acción donde el realismo de la escena depende del realismo de la escala de las maquetas. También en la industria y la agricultura la proporcionalidad juega un importante papel pues sirve por ejemplo para relacionar la producción y el consumo.

Desde la experiencia como docente uno de los temas más sugerentes en la enseñanza de las matemáticas es el de la proporcionalidad. Desde sus orígenes la proporcionalidad ha estado presente en el estudio del mundo que rodea al hombre. Así, por ejemplo, al no poder medir directamente distancias, el método ha sido buscar recursos para compararlas. Vemos aparecer la necesidad primero en la astronomía y después en las ciencias en general, tanto a nivel de definir nuevas magnitudes como para expresar relaciones numéricas, trabajar con índices, constantes o tasas. Así pues, la proporcionalidad es un concepto básico en las Matemáticas y es un tema de gran importancia en el currículo escolar (Fiol y Fortuny, 1990), ya que está relacionado con la mayoría de los contenidos de Matemáticas y con los de otras asignaturas como la física, la biología, la química,

etc. Pero no es un concepto sencillo, Rapetti (2003) señala que el aprendizaje de la noción de proporción no es simple y que requiere que los estudiantes se enfrenten a una gama de situaciones diferentes en complejidad numérica y en el tipo de magnitudes relacionados, puesto que la necesidad de considerar las cantidades en relación unas con otras, más allá de abordarlas de modo absoluto constituye un problema para parte de los estudiantes y se convierte en un obstáculo para la comprensión de contenidos que deben aprenderse y que guardan relación con la noción de proporcionalidad.[2]

Tal y como señalan Azcárate y Deulofeu (1990) para abordar la proporcionalidad como modelo de función, se hace necesario el estudio anterior de conceptos como razón y proporción, así como la resolución de problemas de proporcionalidad. Las proporciones tuvieron un papel preponderante para los pitagóricos y sin embargo, esto constituyó un serio obstáculo para el avance a lo largo de la historia hacia el concepto general de función. Cuando se trabaja con proporciones es difícil distinguir la relación existente entre dos magnitudes diferentes, puesto que lo que se compara es siempre de la misma naturaleza, de forma que las proporciones esconden la dependencia que existe entre magnitudes distintas. Pero los griegos establecían siempre de forma homogénea sus proporciones, es decir, por medio de razones cada una de las cuales estaba formada por dos magnitudes del mismo tipo. Parece ser que esto es debido al significado geométrico que tenían las magnitudes, así, se comparaban longitudes con longitudes o áreas con áreas, de forma que una razón entre magnitudes distintas carecía de significado.[3]

[2] Pozueta Mendia, E y González García, F. Evidencias de aprendizaje significativo en el tema de proporcionalidad de 2º de la E.S.O

[3] Pozueta Mendia, E y González García, F. Evidencias de aprendizaje significativo en el tema de proporcionalidad de 2º de la E.S.O

Así pues para poder comprender el concepto de proporcionalidad se debe primero estudiar y comprender otros conceptos como por ejemplo el razón, fracción y relación entre otros, empezando por este último se dice que una relación es la expresión que une dos o más objetos o conjuntos entre sí, también en un mismo conjunto se pueden establecer relaciones pudiéndose expresar en pares ordenados, entre otros. Cuando las relaciones son numéricas se puede definir la relación de proporcionalidad como la correspondencia entre todos o algunos elementos del conjunto con uno o más de otro conjunto. Y dependiendo de las circunstancias se podría hablar de distintos tipos de proporcionalidad

El concepto de razón aparece la hablar de las distintas interpretaciones de las fracciones, siendo la razón comprendida como la comparación entre dos partes, sin embargo se debe prestar atención al término razón, ya que no siempre es sinónimo de una fracción y allí empiezan algunas dificultades para los estudiantes. Hoffer[4] explica claramente estas distinciones. La idea clave es que las fracciones son "cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero"; mientras que una razón es "un par ordenado de cantidades de magnitudes". Cada una de esas cantidades viene expresada mediante un número real y una unidad de medida.

El hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica grandes diferencias con las fracciones, [5] entre ellas cabe destacar:

[4] Citado en: Godino, J., y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*.

[5] Godino, J., y Batanero, C. (2003). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat Maestros. Universidad de Granada. España.

- las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 4 panes por $10 000. Las fracciones en cambio, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como “tres de cinco partes”, lo que se indica con3/5.

- No todas las razones se representan con la notación fraccional; por ejemplo 2 gotas por litro, donde suele no usarse la notación de fracción.

- Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos que las fracciones. La razón 2 a 6 se puede escribir como 2:6, o 2 → 6.

- En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una caja de chocolates la razón de los chocolates rellenos a los chocolates que no lo son puede ser 6:3, pero también se puede decir que puede ser 6:0, cuando todos son rellenos (no se trata de hacer ninguna división por 0).

- Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, en el rectángulo áureo la razón de la longitud del lado mayor al lado menor es el número φ, que no es racional. Esta es una diferencia esencial entre “razón” y “fracción”, ya que las fracciones son siempre interpretable como cociente de enteros.

- Las operaciones con razones no se realizan, en general, de igual manera que con las fracciones. Por ejemplo, la suma, 1 acierto de 3 intentos (1:3), seguidos de 3 aciertos de 5 intentos (3:5) se combinan para producir 4 aciertos en un total de 8 intentos.

Series Proporcionales

Cuando se establecen relaciones entre las cantidades de dos magnitudes, de tal modo que las cantidades de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número las distintas cantidades de la otra. Por ejemplo, el precio pagado por las distintas cantidades de un artículo- supongamos que panes- se obtiene

multiplicando el número de panes que se compran por el precio unitario de dicho artículo, $ 1200, y así si compramos 4 panes debemos pagar 1200x4=4800 ($4800), si compramos 5 habrá que pagar $6000., etc. En estas situaciones tenemos dos series de números, como se indica en la tabla adjunta, que se dicen son proporcionales entre sí.

Número de panes	1	2	3	4	5
Precio pagado en pesos	1200	2400	3600	4800	6000

> En general, decimos que dos series de números, con el mismo número de elementos, son proporcionales entre sí, si existe un número real fijo *k*, llamado razón de proporcionalidad, que permite escribir cada valor de la segunda serie como producto *k* de los valores correspondientes de la primera serie. [6]

Proporciones

Cuando se compara dos pares de números que se corresponden se dice que se establece *una proporción*.

Por ejemplo a 16 le hacemos corresponder 6, y a 32 le hacemos corresponder 9; donde se puede ver que:

6=16. (3/8) y 9= 32. (3/8). Así que las dos series de números 16 ——— 6

32 ——— 9

forman una proporción. Y se escribe en la forma de igualdad de dos razones:

[6] Godino, J., y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Proyecto Edumat Maestros. Universidad de Granada. España.

$$\frac{6}{16} = \frac{9}{32}, o\ también, \frac{6}{9} = \frac{16}{32}$$

Una proporción aparece en general bajo la forma de igualdad entre dos fracciones. En consecuencia, el producto cruzado de los numeradores y denominadores serán iguales entre sí. Cualquier cambio de disposición entre los cuatro números de la proporción que no modifique los productos cruzados de los numeradores y denominadores entre sí dará lugar a una nueva proporción.

Magnitudes proporcionales

Dadas dos magnitudes A y B se dice que son proporcionales si están en correspondencia de tal manera que las medidas de las cantidades que se corresponden forman dos series de números proporcionales entre sí, es decir, si existe una aplicación lineal f: A → B. Por ejemplo cuando se habla del espacio recorrido por un móvil y el tiempo transcurrido cuando la velocidad es constante y el movimiento uniforme.

Proporcionalidad inversa

Se dice que dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales si los valores tomados por la magnitud A y los inversos de los valores tomados por la magnitud B forman dos series proporcionales. Esta situación se presenta cuando el producto de valores tomados por las magnitudes A y B es constante.

El razonamiento de la regla de tres

La regla de tres es un procedimiento aplicado a la resolución de problemas de proporcionalidad en los que se conocen tres de los cuatro datos de la proporción y se requiere calcular el cuarto; este procedimiento puede nublar a quien piensa que con él se puede resolver cualquier tipo de problema donde se tengan tres datos y

falte uno por ser encontrado pues no es tan sencillo, no sólo se trata de saber cómo es su secuencia sino porque, es decir, saber cuándo y cómo se puede usar la regla de tres.

De manera general, pues después será ampliada, se puede decir que la regla de tres se usa para calcular valores desconocidos de magnitudes proporcionales. Las operaciones con las que se resuelve son muy sencillas: la multiplicación y la división. Se llama supuesto a la parte del problema que conocemos e incógnita a la que debemos calcular.

Para poder plantear la relación de proporción es necesario que dos de los términos a y b pertenezcan a una misma magnitud y que los términos c y d pertenezcan a otra magnitud, pero relacionada con la anterior. Y se expresa como una proporción, así: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Los porcentajes

Es muy probable que cuando en una proporción uno de los términos toma el valor de 100 se esté hablando de porcentajes y para la expresión “x%” se use también la fracción $x/100$, donde el numerador indica que porción de 100 representa. Además se usa de manera absoluta e inclusive se usa para obtener series de números.

Es importante anotar que cuando se usan fracciones, porcentajes y decimales estos poseen una multitud de significados y esto puede conllevar algunas dificultades a la hora de interpretar el concepto de proporcionalidad. Así un número como 3/5 o 0,6 o 60% puede ser interpretado de forma concreta en muchas formas, todas las cuales se presentan en las aplicaciones y problemas de la vida cotidiana.

La resolución de problemas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Aprender matemáticas implica ver el mundo desde el punto de vista matemático y enseñarlas debe brindarle al estudiante un ambiente propicio donde tenga la oportunidad de manipular objetos, activar su capacidad mental propia, ejercitar su creatividad, divertirse con su propia actividad mental, reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento, hacer trasferencias, adquirir confianza en sí mismo al verse capaz de resolver problemas, (Guzmán, 1992) y comunicar de manera verbal y escrita los resultados encontrados, en un lenguaje común que se convierte progresivamente en lenguaje matemático. Para lograr lo anterior, Schoenfeld (1992) afirma que la formulación de conjeturas deberá ser una acción fundamental en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas y no únicamente limitar la acción matemática a hacer ejercicios. En este sentido, enseñar matemáticas es brindarle al estudiante la oportunidad de hacer matemáticas desde él, en su contexto real, y desde las situaciones que para él sean problemas.

Los problemas existen en el mundo de cada persona, entendiendo por mundo la concepción que dicha persona tiene de éste. De este modo, un problema nace en una situación que se presenta en el mundo de la persona para la cual aparece un reto intelectual, entendido éste como una acción que pone a prueba, mediante una pregunta específica, la capacidad de la persona para leer y comprender la situación (escrita o vivida), para determinar los factores influyentes en dichas situaciones, para representar y modelar las relaciones entre las variables de la situación y, finalmente, pone a prueba la capacidad crítica, reflexiva y argumentativa. Sin embargo, para que exista el problema es indispensable que la persona asuma un posicionamiento de la situación, es decir, acepte el reto y se dé a la tarea de buscar posibles soluciones. En concordancia con lo anterior y teniendo en cuenta que el pensamiento matemático se caracteriza por la actividad de resolución de problemas, resulta coherente enseñar

matemáticas apoyándonos en el conocimiento informal de los estudiantes y sus estrategias heurísticas para verificar la validez o no de sus conjeturas en situaciones reales y construir así desde situaciones reales concretas los conceptos matemáticos.[7]

"Es importante acercar el conocimiento a la vida cotidiana, comprender que los principios básicos de la ciencia nos rodean por doquier, integrar el conocimiento a la vida. Además de que estas "experiencias sensibles" ponen a los niños y jóvenes en contacto directo con la realidad y permiten desarrollar habilidades y destrezas manuales y experimentales desde temprana edad, condición necesaria para lograr un verdadero desarrollo tecnológico".[8]

"Y no solo eso. Al realizar las experiencias e intentar su interpretación, los niños y jóvenes ponen en acción sus conceptos, tejen su propia red de relaciones conceptuales y se inician en la discusión. Este elemento es crucial en el desarrollo del pensamiento y en la formación de la personalidad. Expresar con claridad las propias ideas, escuchar las ideas expresadas por otros, estar de acuerdo o disentir, confrontar las ideas con el experimento, son habilidades esenciales para lograr un desarrollo no sólo científico sino social: son la base de la democracia. Es cada vez más urgente educar hombres con pensamiento independiente y capacidad crítica, hombres capaces de pensar por sí mismos y de disentir respetuosa y constructivamente. La discusión racional es una de las condiciones

[7] Martínez, N. González, J. (2008) *Construcción y uso significativo del concepto de proporcionalidad, diseño e implementación de actividades desde la experiencia de investigación acción.*

[8] Monsalve M, (2002). *Las matemáticas y la física: ciencias…naturales*. La Universidad y la Escuela aprenden enseñando. Medellín. Colombia.

básicas para la construcción de conocimiento y para la construcción de sociedades justas y democráticas". [9]

Precisamente por la importancia de tener un buen manejo del concepto de la proporcionalidad en la vida cotidiana este ha sido objeto de varias investigaciones en la Educación Matemática, desde diferentes perspectivas, y desde la escuela primaria pasando por la educación media hasta llegar a la educación universitaria y la gran mayoría han aportado información substancial.

Winch[10] estudia la habilidad de los estudiantes de la escuela elemental para resolver correctamente problemas de proporción y en su reporte da cuenta de tres métodos de solución que ellos emplean:

- La búsqueda del valor unitario, que consiste en encontrar el valor correspondiente a la unidad, en ella subyace la pregunta ¿cuántos para uno?, accediendo a éste por medio de una división.
- El razonamiento aditivo, el cual se basa en comparaciones por medio de diferencias.
- El razonamiento cualitativo que se basa en comparaciones como "mayor que", "más que" o "igual que" sin llegar a una cuantificación de las mismas.

El primer método de la búsqueda del valor unitario se reconoce como el usado con mayor frecuencia, y es de donde parte su investigación.

Piaget[10], en relación con el pensamiento proporcional centra su atención en las características cuantitativas y cualitativas de los acercamientos de los niños y

[9] Monsalve M, (2002). *Las matemáticas y la física: ciencias…naturales*. La Universidad y la Escuela aprenden enseñando. Medellín. Colombia.

[10] Wich y Piaget, citados en Rodríguez, A., y Pérez, J. (2003). *La noción de proporcionalidad*.

adolescentes para resolver tareas que requieren del razonamiento proporcional, el cual es caracterizado de acuerdo a varios momentos:

- Primeras etapas en las cuales el pensamiento hace uso de correspondencias y seriaciones cualitativas.
- Etapas intermedias de compensaciones aditivas o el uso de razones 2:1.
- Etapas avanzadas en las cuales se aplica el razonamiento proporcional sin importar los valores numéricos de los datos y las razones.

Piaget[11], también afirma que "el razonamiento proporcional, junto con la habilidad de formular hipótesis y trabajar con un cierto número de variables en un problema, resultaban especialmente indicativos de la habilidad para razonar formalmente".

Hart, identifica y caracteriza una estrategia denominada "Pre–proporcional" que se caracteriza por un razonamiento correcto que no se basa en el planteamiento de una proporción mediante la comparación de dos razones; sino en una combinación de duplicar, triplicar, tomar medios, o procesos de ese tipo y sumar las contribuciones correspondientes.

Lesh y Cramer al estudiar el razonamiento proporcional, lo ubican como un cimiento del álgebra y como una síntesis de la aritmética. Investigan las dificultades por las que atraviesan los estudiantes al resolver tareas de proporcionalidad y por el tipo de estrategias que utilizan. Dos son los aspectos que destacan estos autores:

- El reconocimiento del uso y la importancia de los métodos intuitivos.

[11] Piaget, Hart, Lesh y Cramer citados en Rodríguez, A., y Pérez, J. (2003). *La noción de proporcionalidad*.

- La reconsideración de las situaciones de tipo cualitativo como favorecedoras del empleo del razonamiento proporcional a diferencia de quienes han planteado que las respuestas de tipo cualitativo identifican a los sujetos que no aplican el razonamiento proporcional.

Rodríguez y Pérez (2003) Concluyeron entre otras que:

- Existe una dificultad en los estudiantes para coordinar la atención en situaciones en las que se presenta una variación simultánea de dos cantidades.
- La no utilización, en general, de la estrategia del valor unitario.
- Falta de construcción de un significado del porcentaje, como una aplicación específica del concepto de proporción.

Aunque estas conclusiones surgen de un estudio cualitativo basado en un número reducido de estudiantes, permite identificar comportamientos típicos que sugieren para la escuela primaria:

•Diseñar actividades que refuercen las nociones precursoras: a) identificar diferentes patrones de cambio (cuantitativo) en situaciones de variación simple; b) identificar patrones de cambio (cualitativo) en situaciones de variación múltiple.

• Diseñar actividades que desarrollen la atención sobre la variación cuantitativa de dos cantidades, ya sea aditiva o multiplicativa.

• Emplear diferentes representaciones para ejemplificar situaciones de variación proporcional y no proporcional.

(…)

Chemello, G y otros. (2007). Con el cuaderno de trabajo para docentes del proyecto “Apoyo al último año de secundaria para la articulación con el nivel superior” buscan favorecer la articulación de los conocimientos adquiridos durante toda la escuela para interactuar con textos cuya comprensión requiere la interpretación de información. En el libro del alumno se plantean actividades en el orden de las ideas desarrolladas donde lo que interesa es que los alumnos tomen decisiones respecto de la resolución de problemas; Este trabajo resalta las

siguientes ideas de ERMEL (Equipo de investigación sobre la enseñanza de la Matemática, perteneciente al Instituto Nacional de Investigación Pedagógica de Francia) respecto a la resolución de problemas y las capacidades a desarrollar:

"- saber qué es lo que se busca, ser capaz de representarse y apropiarse la situación;

- ser capaz de concentrarse el tiempo suficiente y también de descentrarse, cambiar su punto de vista;

- ser capaz de movilizar en el buen momento los saberes y los saber-hacer anteriores;

- ser capaz de guardar la traza de sus ensayos, de organizarse, de planificar, de gestionar la información que se dispone, ya sea dada o que sea necesario buscarla o construirla;

- atreverse a actuar, a arriesgarse, a equivocarse; etc

Para que un alumno se apropie de una situación es necesario que pueda: comprender cuál es la situación que se le plantea, comprender qué es lo que se busca e iniciar procedimientos de resolución cuyos resultados puedan ser evaluados".

Respecto de la gestión y organización de la clase plantean que: "Hacer matemática es también discutir las soluciones aportadas por sus pares, ponerse de acuerdo sobre esas soluciones y para eso es necesario probar, argumentar, discutir, verificar y hacer verificar, tratar de convencer, involucrarse en la búsqueda de la verdad de las afirmaciones que se realicen, no aceptar las de otros a priori, etc.

Y todo lo anterior plantea una relación diferente de los alumnos con el conocimiento, roles diferentes a los tradicionales de alumnos y docente, tanto en la clase como en la gestión de la verdad, las actitudes, etc.

Es necesario que los alumnos tengan en cuenta los siguientes pasos para una mejor organización en su quehacer matemático:

1. *Lectura del problema y primeros intentos de resolverlo en forma individual.*
2. *Resolución en grupo. Presentar el o los resultados o las ideas del grupo y una explicación para convencer a los otros de la validez de sus resultados.*
3. *Debate colectivo sobre los resultados.*
4. *Síntesis sobre las reglas del debate y/o sobre la insuficiencia de ciertas pruebas que han sido puestas en evidencia en el debate.*

La búsqueda individual permite que cada alumno se apropie de la situación e inicie un procedimiento de resolución. Cuando se organiza el trabajo en grupo tienen la posibilidad de discutir sus propuestas, pero, la necesidad de socializar los resultados del grupo los obliga a comprender las eventuales divergencias, buscar las coincidencias y a formular por escrito sus soluciones.

El debate constituye un momento fuerte del proceso, ya que se trata de confrontar las respuestas elaboradas por los distintos equipos, discutir y decidir sobre la validez de las afirmaciones, tratando de validar o rechazar los argumentos presentados por los otros equipos.

Finalmente, en el momento de síntesis, se pone en evidencia ciertas reglas del debate matemático y la insuficiencia de ciertas pruebas pragmáticas dadas por los alumnos cuya finalidad consiste en: pensar en la solución que cada uno de ellos daría finalmente al problema planteado y redactarla, opinando sobre la primera explicación dada por su grupo.

El trabajo en equipo los obliga a hablar, explicitar sus ideas de resolución, pero también a tratar de comprender las de sus compañeros.[12]

[12] Chemello, G y otros. (2007). *Colección Apoyo al último año de secundaria para la articulación con el nivel superior.*

En Colombia, Martínez, N. González, J. (2008) realizaron una investigación en la que diseñaron actividades de aprendizaje para propiciar la construcción y el uso significativo del concepto de proporcionalidad con base en un pilar principal: las estrategias de los estudiantes para resolver situaciones y problemas de proporcionalidad usando entre otras estrategias el juego que propicio una dinámica de construcción de saberes que tuvo en cuenta la metodología de resolución de problemas que permitió el uso de conocimientos previos de los estudiantes y generó una responsabilidad compartida en el grupo; Debido al éxito de esta investigación las actividades se implementaron aún después de terminada la investigación.

Todo lo anterior se espera sirva de marco para formular unos objetivos reales de acuerdo al momento histórico actual para que sirvan de referencia a esta práctica docente.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Proponer y realizar algunas actividades usando estrategias metodológicas que permitan consolidar el significado del concepto de proporcionalidad en un grupo de 40 estudiantes del grado 11° del CEFA (Institución educativa Centro Formativo de Antioquia).

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Diseñar e implementar actividades de diagnostico que permitan identificar los conocimientos previos en los que deben fundamentar el concepto de proporcionalidad.
- Determinar el nivel de comprensión del sentido de la proporcionalidad de algunos estudiantes del grado 11°.
- Diseñar e implementar actividades de profundización partiendo de los conceptos previos que el estudiante ya tiene, para que pueda formar una base sólida sobre la que edificará el concepto de proporcionalidad.
- Diseñar e implementar la evaluación adecuada de los estudiantes con base en la metodología de Aula Taller.
- Diseñar, implementar y analizar los indicadores e instrumentos adecuados que permiten evaluar la eficiencia y eficacia de la metodología aplicada.

METODOLOGÍA

Una experiencia de aula está definida como una práctica concreta de actividades que nace en un ámbito educativo atendiendo una necesidad del contexto previamente identificada con el fin de desarrollar un aprendizaje significativo a través del fomento de las competencias, se retroalimenta permanentemente por medio de la autorreflexión crítica y posibilita el mejoramiento continuo de la Institución Educativa en el todas sus áreas (académica, directiva, etc) generando un impacto conveniente en la calidad de vida de la comunidad de la Institución Educativa. La metodología central de la experiencia de aula presentada fue la realización de actividades en ambiente de taller, y dentro de este marco se proponen algunas actividades y estrategias metodológicas.

En la metodología de Aula Taller el conocimiento se adquiere por descubrimiento y asimilación propios, despertando curiosidad en torno al tema o problema planteado, es decir de “aprender-haciendo”. En el taller los estudiantes tienen la oportunidad de construir estrategias de pensamiento y construir y reconstruir conocimiento de forma colectiva y participativa.

Esta metodología permite el trabajo interdisciplinario y en grupo, y se caracterizada por la utilización de material didáctico para la exploración de situaciones concretas, que conlleve al desarrollo de un pensamiento matemático y científico, y el uso y diseño de guías de trabajo que plantean situaciones problema que se caracterizan por la integración de los diferentes pensamientos matemáticos.

Al término de un taller se debe hacer una socialización donde cada persona tiene la oportunidad de compartir sus dificultades generándose así un ambiente donde los errores también son fuente de discusión y de nuevos aprendizajes.

Esta propuesta de trabajo final se puede desglosar en nueve etapas o actividades que se presentaron en el cronograma dado a conocer en la propuesta y que aquí se describen de manera general así:

Según los objetivos ya mencionados se diseñan actividades para conocer el estado en el que se encuentran las estudiantes que participarán de la experiencia de aula y determinar cuál es el nivel de comprensión del concepto de proporcionalidad, es decir a partir de cuales preconceptos se debe intervenir con mayor cuidado; pasando muy probablemente por los siguientes conceptos o temas razón y proporción, proporcionalidad numérica y geométrica, semejanza de figuras, escala, vector, razones irracionales, Teorema de Tales, ecuaciones lineales, matrices y determinantes, Teorema de Pitágoras y las ternas pitagóricas, operaciones con números figurados y demostración. Este diagnóstico se aplico, se sistematizó y se evaluó de forma cualitativa.

Con el resultado del diagnóstico se planean las actividades a desarrollar con el fin de consolidar el significado de la proporcionalidad en las estudiantes. Estas actividades se llevan a cabo con la asesoría del director de la practica pedagógica y con el objetivo de la práctica docente presente se evalúan las mismas para recoger la evidencia “in situ” y así poder hacer el análisis y la interpretación de los resultados; Luego ya en la elaboración del informe final con base en toda la experiencia se plasmaran los aspectos relevantes que dan origen a las conclusiones y recomendaciones pertinentes.

Esta experiencia de aula contará con el seguimiento a su ejecución por parte del director, el matemático Carlos Julio Echavarría Hincapié, la participación de un grupo de 40 estudiantes del grado 11º del CEFA (Institución educativa Centro Formativo de Antioquia) y se espera pueda servir de referencia para el quehacer metodológico de los docentes que en algún momento tengan acceso al informe final que ha de presentarse al termino de la práctica.

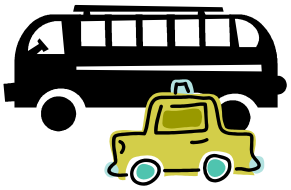
DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA DE AULA

PRUEBA DE DIAGNÓSTICO

La prueba de diagnóstico se aplico a un grupo de 40 estudiantes de 11º empezando el año escolar, así que se esperaba resolvieran la prueba con las competencias con las que debieron terminar el curso de 10º, con el objetivo de identificar los conocimientos previos en los que fundamentan el concepto de proporcionalidad. Además se sabe que desde los últimos grados de la educación primaria los estudiantes deben formular y resolver coherentemente ejercicios matemáticos y problemas de la cotidianidad haciendo uso de los conceptos de razón y proporción. Ya en décimo grado la proporcionalidad está asociada a la pendiente y a las razones trigonométricas.

La prueba se muestra a continuación:

RAZON, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD



Ideas iniciales

Supongamos que en una reunión contamos 24 muchachas y 12 muchachos y queremos comparar estos dos números. Podremos hacerlo de dos modos distintos. En efecto: si procedemos restando 12 de 24, diremos: hay 12 muchachas más que muchachos, y será una comparación por diferencia; en cambio, si para comparar los expresados números dividimos 24 por 12, diremos: hay el doble de muchachas que de muchachos, con lo que habremos hecho una comparación por cociente. Este cociente indicado se llama razón de una de estas cantidades a la otra. Y una proporción es la igualdad de dos razones.

1. Para los siguientes casos, comparemos las cantidades por diferencia y por cociente:

- En la estación de gasolina hay 12 buses y 36 taxis.

- En la caja de cuerpos geométricos hay 7 prismas y 21 pirámides.

Comparación por diferencia: _____

_____

Comparación por cociente: _____

_____

2. Ahora escoge de las siguientes razones cuales formarían una proporción con la razón en la que están el número de buses y de taxis del numeral 1:

a. $\frac{3}{8}$

b. $\frac{7}{21}$

c. $\frac{16}{4}$

d. $\frac{24}{6}$

3. Calcula el término desconocido de las siguientes proporciones:

a. $\frac{4}{10} = \frac{x}{60}$

b. $\frac{3}{9} = \frac{9}{x}$

c. $\frac{4}{16} = \frac{1}{x}$

d. $\frac{3}{x} = \frac{x}{18}$

4. A continuación se muestra una secuencia de 3 triángulos semejantes. Todos los triángulos pequeños son congruentes.

Figura 1.

Figura 2.

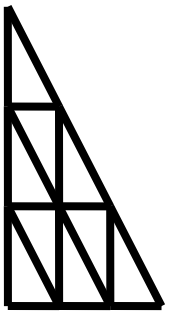


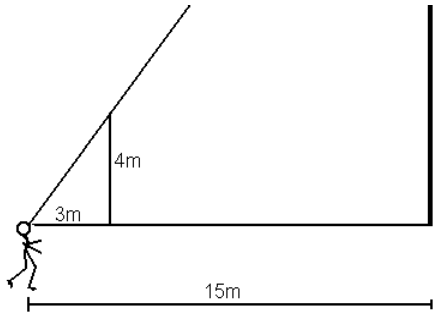
Figura 3.

a. Completa la siguiente tabla encontrando de cuántos triángulos pequeños se compone cada figura.

Figura	Número de triángulos pequeños
1	1
2	
3	

b. La secuencia de triángulos similares se extiende hasta la octava figura. ¿Cuántos triángulos pequeños se necesitarían para la figura 8 (o en la octava posición)?_____

5. Un príncipe está tratando de ver a su prometida, pero un muro de 4m de altura se interpone entre él y la torre de 15 metros de altura donde aquélla, también ansiosa, espera verlo. El príncipe se sitúa a una distancia de 3 metros del muro y a una distancia de 15 metros de la base de la torre, en lo más alto de la cual se encuentra su prometida, como se ilustra en la figura. ¿Será posible que en estas condiciones el príncipe pueda ver a su prometida? Completa la figura a escala en papel cuadriculado.



6. De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?_____

- Evaluación de la prueba de diagnóstico:

✓ En el numeral 1 el 95% de las estudiantes hicieron acertadamente las comparaciones por diferencia y por cociente.

✓ En el numeral 2 el 90% de las estudiantes encontraron correctamente la razón que forma proporción con la razón que relaciona el número de buses y de taxis($12/36$)

✓ En el numeral 3 disminuye a 80% el porcentaje de acierto. Pues en promedio el 80% encontró todas las incógnitas.

✓ En el numeral 4 el 80% de las estudiantes lleno de manera correcta la tabla y encontró el número de triángulos de la formación en la octava posición.

✓ En el numeral 5 el 90% de las estudiantes respondieron adecuadamente a la pregunta de ¿Será posible que en estas condiciones el príncipe pueda ver a su prometida?, el 35% se apoyo en la gráfica para su respuesta y el 55% restante lo hizo despejando la incógnita de la proporción que se deduce de la comparación de triángulos semejantes.

✓ En el numeral 6 el 88% de las estudiantes contestaron acertadamente, es decir, manejaron de forma adecuada la equivalencia que existe entre la razón que compara el número de alumnos que han ido de viaje con el total de los alumnos de un colegio y el porcentaje que lo representa.

De acuerdo a los resultados anteriores se planearon tres talleres con los cuales se busca profundizar en los conceptos previos en los cuales se deben fundamentar el concepto de proporcionalidad para conseguir una base sólida para su construcción y uso.

INTERVENCIÓN

Con base en el resultado que se obtuvo de la prueba de diagnóstico se planean tres sesiones para el desarrollo de la intervención. El plan de talleres es el siguiente:

1. Relación entre porcentaje, número decimal y fracción.
2. Proporcionalidad directa y Proporcionalidad inversa
3. Crecimiento aritmético y geométrico

1. Relación entre porcentaje, número decimal y fracción.

Como actividad de motivación se propone jugar con un dominó de fracciones que es un juego de matemáticas que adapta el popular juego de dominó al aprendizaje de fracciones.

El dominó de fracciones es un juego para 2 o más jugadores. Está formado por 28 fichas con 7 resultados diferentes (aunque existen otras propuestas de dominó con 36 fichas o más). Cada resultado aparece en 7 fichas: en una doble y en otras seis fichas con los otros 6 resultados. Las fracciones son representadas de ocho maneras diferentes. Cuatro en forma gráfica: tortas, polígonos, barras, y bloques. Y cuatro en forma numérica: fracción, fracción equivalente, porcentaje, decimal periódico.

Aquí se proponen dos modalidades para su juego, por supuesto estas pueden ser modificadas de acuerdo a las condiciones y a las necesidades del momento.

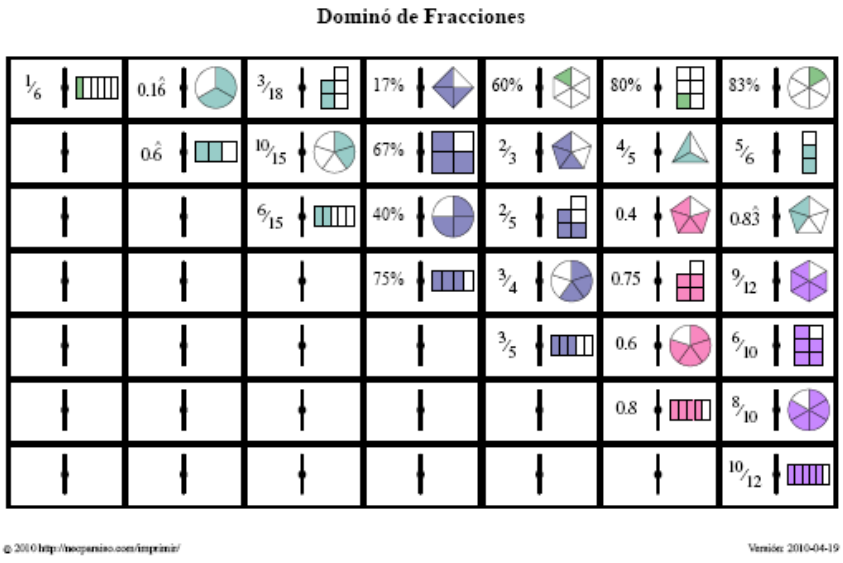
Modalidad cooperativa:

- ✓ Se reparten las 28 fichas y las colocan boca arriba.
- ✓ Se forman grupos de 4 alumnos y juegan los 4 juntos.
- ✓ Se trata de que los alumnos descubran juntos los 7 números que aparecen en el dominó y los ordenen de menor a mayor.

- ✓ Terminarán la actividad formando un dominó todos juntos.

Modalidad competitiva:

- ✓ Se juega en parejas, formando dos equipos o de forma individual.
- ✓ Se reparten 7 fichas por jugador y las colocan boca arriba.
- ✓ Empieza el jugador que primero encuentre una ficha doble. Continúa el jugador que está a su derecha. Si no puede colocar una ficha, pierde el turno.
- ✓ Sigue el jugador de su derecha colocando su ficha en uno de los extremos de la cadena. Siempre se debe poner una ficha al lado de otra que tenga un valor equivalente. Si no puede colocar una ficha, pierde el turno.
- ✓ Al equipo del jugador que coloca una ficha equivocada se le penaliza con un punto y se rectifica la jugada.
- ✓ Gana la partida el equipo en el que uno de sus jugadores consigue colocar todas sus fichas.
- ✓ Aquí se muestra una versión de dominó de fracciones.



2. Proporcionalidad directa y Proporcionalidad inversa,

Este taller comienza con una introducción donde se ponen en común y se aclaran el concepto de razón y proporción, tanto numérica como geométrica y se realiza luego esta actividad sobre la **proporción numérica**:

Proporcionalidad directa, inversa y compuesta

Ideas iniciales:

Para comprender el concepto de proporcionalidad, directa o inversa, debemos comenzar por comprender el concepto de razón.

Razón entre dos números: Siempre que hablemos de razón entre dos números nos estaremos refiriendo al cociente (el resultado de dividirlos) entre ellos.

Entonces…

Razón entre dos números **a** y **b** es el cociente entre a/b

Por ejemplo, la razón entre 10 y 2 es 5, ya que $\frac{10}{2} = 5$

Ahora, cuando se nos presentan dos razones para ser comparadas entre sí, para ver cómo se comportan entre ellas, estaremos hablando de **una proporción numérica.**

Entonces:

Los números **a, b, c** y **d** forman una **proporción** si la razón entre **a** y **b** es la misma que entre **c** y **d**. Es decir: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Se lee "**a** es a **b** como **c** es a **d**"

a y **d** se llaman **extremos**, **c** y **b** se llaman **medios.**

Por ejemplo los números 2, 5 y 8, 20 forman una proporción, ya que la razón entre 2 y 5 es la misma que la razón entre 8 y 20. $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$

La propiedad fundamental de las proporciones es: **en toda proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios.**

En general $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$

La relación de proporcionalidad puede darse en dos sentidos:

Las dos magnitudes pueden aumentar o disminuir o también se puede dar que si una de las magnitudes aumenta la otra disminuye y viceversa.

Si ocurre, como en el primer caso, que las dos magnitudes que se comparan o relacionan pueden subir o bajar en igual cantidad, hablaremos de **Magnitudes directamente proporcionales.**

Si ocurre como en el segundo caso, en que si una magnitud sube la otra baja en la misma cantidad, hablaremos de **Magnitudes inversamente proporcionales.**

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Si dos magnitudes son tales que a **doble, triple...** cantidad de la primera corresponde **doble, triple...** cantidad de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son **directamente proporcionales**.

Actividad 1:

Un bulto de naranjas pesa 40 kg. ¿Cuánto pesan 2 bultos?

Una carga de naranjas pesa 880 kg ¿Cuántos bultos de 40 kg se podrán hacer?

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Si dos magnitudes son tales que a **doble, triple...** cantidad de la primera corresponde la **mitad**, la **tercera parte**... de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son **inversamente proporcionales.**

Ejemplo

Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?

En este caso a doble número de trabajadores, el trabajo durará la mitad; a triple número de trabajadores, el trabajo durará la tercera parte, etc. Por tanto, las **magnitudes** son **inversamente proporcionales.**

Formamos la tabla:

Hombres	3	6	9	...	18
Días	24	12	8	...	?

Vemos que los productos 3 por 24 = 6 por 12 = 9 por 8 = 72

Por tanto 18 por x = 72

O sea que los 18 hombres tardarán 4 días en hacer el trabajo

Nótese que aquí la constante de proporcionalidad, que es 72, se obtiene multiplicando las magnitudes y que su producto será siempre igual.

Importante:

Como regla general, la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes inversamente proporcionales se obtiene multiplicando las magnitudes entre sí, y el resultado se mantendrá constante.

Actividad 2

Un ganadero tiene forraje suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de forraje a 450 vacas?

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA DE MAGNITUDES

Ejemplo:

Si 12 perros comen 36 kg de alimento en 6 días. ¿Cuántos kg comen 15 perros en 8 días?.

Respuesta:

Este problema corresponde a un ejercicio de **Proporcionalidad Compuesta,** pues intervienen **tres** o **más** variables.

En el ejercicio aparecen tres variables: **perros**, **kilos de comida**, **días.** Para resolverlo, cada variable se relaciona por separado con la incógnita. El valor encontrado en la primera relación se aplica en la segunda y así sucesivamente.

1) Se hace una tabla con los datos

Perros	Kg alimento	Días
12	36	6
15	x	8

Si se relacionan los **perros** con los **Kg de comida** (para el mismo número de días: 6). Se puede deducir que mientras más perros más comida necesitan para el mismo número de días; o al revés, mientras menos perros menos Kg de comida necesitan, por lo tanto, esta relación es una proporción directa.

La proporción se escribe tal cual:

$$\frac{12\ \textbf{perros}}{15\ \textbf{perros}} = \frac{36\ \textbf{Kg}}{\textbf{x}}$$

$$\textbf{x} = \frac{15 \cdot 36}{12}$$

$$\textbf{x} = 45$$

Ahora se reemplaza este valor en lugar de 36 (sabemos ahora que 15 perros necesitan 45 kg para 6 días) y se plantea la nueva proporción:

$$\frac{45\ \textbf{Kg}}{\textbf{x}} = \frac{6\ \textbf{días}}{8\ \textbf{días}}$$

$$\textbf{x} = \frac{45 \cdot 8}{6}$$

$$\textbf{x} = 60$$

La relación Kg de alimento es directamente proporcional con los días (para el mismo número de perros: 15), pues mientras más alimento, para más días alcanza.

Respuesta: Si hay 15 perros y la comida debe alcanzar para 8 días, entonces se necesitarán 60 Kg.

Actividad 3

Cuatro chicos durante 10 días de campamento han gastado en comer 25.000 pesos. En las mismas condiciones ¿cuánto gastarán en comer 6 chicos durante 15 días de campamento?

Luego durante otra sesión de clase se desarrolla una actividad de aplicación de la **proporcionalidad geométrica**, desarrollando la guía de trabajo “Problemas de proporcionalidad geométrica” (ver anexo1) esta guía es del grupo Ábaco de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.

3. Crecimiento aritmético y geométrico

Para esta segunda sesión se uso la guía de trabajo “Los logaritmos” (ver anexo 2), esta guía es del grupo Ábaco de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.

- **Evaluación de la intervención**

Como se mencionó antes esta intervención que se realizó en tres sesiones tuvo los siguientes resultados:

Dificultades:

Del taller 1. Relación entre porcentaje, número decimal y fracción.

- ✓ Les tomo más del tiempo programado (10 minutos) establecer de manera colectiva la forma de cómo hacer la sistematización de las diferentes formas de representar un número y sus equivalencias.

Del taller 2. Proporcionalidad directa y Proporcionalidad inversa.

- ✓ **Proporcionalidad numérica.** La compresión de la proporcionalidad inversa tomo más del tiempo planeado pues se hizo necesario mostrar más ejemplos de los que aparecen en la guía.
- ✓ **Proporcionalidad geométrica.** En este taller donde el objetivo principal es aplicar las proporciones geométricas haciendo uso de la semejanza de

triángulos y la trigonometría a una experiencia práctica las dificultades resultaron al momento de hacer las mediciones, es decir, en el uso de los instrumentos de medida.

Del taller 3. Crecimiento aritmético y geométrico.

- ✓ Las estudiantes reconocieron

Avances:

De taller 1. Relación entre porcentaje, número decimal y fracción.

- ✓ Lograron construir una tabla de forma colectiva en la que consignaron de manera ordenada la mayor parte de la información de las equivalencias que aparecen en el juego del dominó.
- ✓ Disfrutaron de la actividad por la libertad que brinda el juego y por que por el interés de ganar se concentraron en buscar los distintos valores y las equivalencias de estos.

Del taller 2. Proporcionalidad directa y Proporcionalidad inversa.

- ✓ **Proporcionalidad numérica**. Debido a que al empezar este taller se hizo una exposición de lo consignado en las ideas iniciales de la guía, como son los conceptos básicos de razón y proporción, las alumnas pudieron desarrollar de manera satisfactoria la actividad sobre proporción directa.
- ✓ **Proporcionalidad numérica**. Las estudiantes identificaron la relación que tiene la proporcionalidad directa con la regla de tres simple directa.
- ✓ **Proporcionalidad geométrica.** Las estudiantes construyeron y usaron correctamente las proporciones para hallar las longitudes solicitadas.

Del taller 3. Crecimiento aritmético y geométrico.

- ✓ Las estudiantes reconocieron la regla de Arquímedes como un buen instrumento para encontrar la multiplicación, división, potenciación y radicación de una manera diferente y creativa.

- **Prueba de salida**

  Esta prueba de salida se diseño teniendo como base los resultados de la intervención y con numerales relacionados con la prueba de entrada para poder concluir de forma cualitativa sobre el impacto de la práctica pedagógica.

  Aquí se muestra la prueba de salida:

Guerdemos las proporciones

Prueba de salida: esta prueba se realiza para comparar sus resultados con los del taller de “Razón, proporción y proporcionalidad” que se efectuó en la primera sesión.

1. Completa las siguientes tablas para dos magnitudes:
   - Directamente proporcionales:

4	5		8	10	
20		30			65

   - Inversamente proporcionales:

2		5			20
90	60		30	15	

2. Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o no guardan relación.

a. La velocidad y el tiempo que tarda un coche en recorrer un espacio determinado._____

b. El radio de una circunferencia y su longitud._____

_____

c. El número de obreros y el tiempo que tardan en realizar una tarea.

_____

d. El número de lados de un polígono regular de 5 centímetros de lado y su perímetro._____

e. El número de camiones utilizados en transportar una determinada mercancía y el número de viajes que han de dar para ello._____

_____

f. La edad de una persona y su peso._____

3. La altura de una torre. En la ciudad donde usted vive hay, sin duda, algunos edificios y monumentos notables y entre ellos una torre o escultura cuya altura seguramente desconoce. Usted dispone de una postal con su fotografía ¿En qué forma puede esta foto ayudarle a averiguar la altura de la torre o escultura?

4. Inventar un ejercicio o problema donde la proporcionalidad directa, indirecta o compuesta sea un concepto necesario para su solución.

RESULTADOS

Los resultados de la prueba de salida fueron:

- ✓ En el numeral 1 el 100% de las estudiantes llenaron correctamente tanto la tabla de las magnitudes directamente proporcionales como la de las magnitudes inversamente proporcionales.
- ✓ En el numeral 2 el 95% de las estudiantes identificaron bien al menos 4 de las 6 relaciones por las que se les pregunta, las demás no responden a estas inquietudes.
- ✓ En el numeral 3 donde se requería creatividad por parte de las alumnas, se obtuvo resultados muy buenos, pues todos los grupos lograron ingeniar y describir métodos recursivos para hallar el tamaño real de una torre o escultura de la cual solo se cuenta en un momento dado con su fotografía. Pudiéndose concluir entonces que interiorizaron el concepto de proporcionalidad y el uso que de este pueden hacer. Pues en general proponen medir en la imagen la altura del objeto en cuestión y al menos una longitud más, esta última también debe poder medirse con facilidad que la altura del objeto (así que puede ser el ancho de su base o una persona que estuviese al pie del objeto. Para después formando una proporción directa encontrar la longitud incógnita.
- ✓ En el numeral 4 donde la solicitud es que se inventen las estudiantes las situaciones o problemas relacionados con la proporcionalidad el 80% de los grupos logro hacerlo con éxito, estos problemas fueron todos sobre proporcionalidad directa.

Comentarios adicionales relacionados a factores ambientales de clase:

1. Se pudo observar que las estudiantes dan mejores argumentos en las situaciones de variación que incluían situaciones cotidianas que en las de contextos geométricos.
2. Las estudiantes manifestaron entusiasmo y dedicación en las diferentes tareas que se les propusieron durante la experiencia.
3. Con la experiencia se mejoró la capacidad de participar, cuestionar e interpretar resultados de las estudiantes.
4. La información arrojada por la experiencia permitirá a los docentes tomar decisiones de cambio o fortalecimiento de lo que se estaba haciendo en la clase
5. Cabe resaltar que aunque en general las respuestas verbales de las estudiantes se acercaron bastante a las esperadas, fueron evidentes las dificultades en la redacción y en el uso de palabras adecuadas, y que a pesar de que en sus expresiones se percibe la idea que se trata, el lenguaje utilizado es muy intuitivo.

CONCLUSIONES

En general y con base en la observación, en el trabajo realizado y en el dialogo con las estudiantes durante los talleres y en las socializaciones finales de cada sesión.

- Las actividades que componen la experiencia permitieron la elaboración de conjeturas que apuntaban a los conceptos involucrados con la proporcionalidad, con la semejanza de triángulos, la solución de problemas de aplicación y la formulación de situaciones relacionadas. Se sugiere incluir como parte de la formación de las estudiantes el uso reflexivo y significativo de la geometría dinámica, a través de talleres donde se puedan realizar procesos de construcciones geométricas o acercamientos a

propiedades y relaciones geométricas, que permitan el descubrimiento de éstas, así como la formulación y validación de conjeturas.

- En términos generales, creo que el material concreto se debe vincular de manera más significativa al desarrollo de los talleres propuestos; en esta experiencia no hubo la suficiente utilización de dicho material como para que el estudiante se diera cuenta por ejemplo de los distintos tipos de variación; en otras palabras, se hizo más énfasis en la manipulación numérica que en la manipulación de material concreto como medio para que los estudiantes advirtieran y reconocieran ciertos hechos.

ANEXO 1

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MEDELLIN

PROYECTO DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA BÁSICAS EN ANTIOQUIA

Problemas de aplicación de la proporcionalidad geométrica

Materiales	Pitillo, hilo o cuerda, una masa (piedra pequeña, un tornillo o una tuerca), cartón, bisturí o tijeras, regla, lápiz o lapicero.

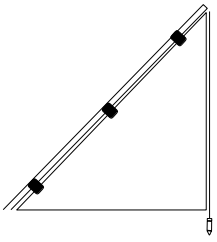
"Cuando los hombres se ven reunidos para algún fin, descubren que pueden alcanzar también otros fines cuya consecución depende de su mutua unión"

Thomas Carlyle.

Hace muchos años en Grecia, un país muy alejado del nuestro, un hombre a quien llamaban Tales, observó que todos los días el sol "aparecía" por el oriente y se "ocultaba" por el occidente. También observó que en un día soleado la luz que provenía del sol, cuando llegaba a su cuerpo producía una sombra de una longitud que dependía de la posición, en la cual estuviese ubicado el sol en ese momento.

Esta observación lo motivó muchísimo, fue así como valiéndose de ella y de unos principios matemáticos básicos llegó a calcular la altura de una pirámide, y la distancia a la que se encontraban objetos lejanos.

Sobre el cartón construye y recorta un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa sea de 20 cm. Sobre la hipotenusa y con cinta adhesiva, fija un pitillo (de los usados para tomar gaseosa), toma el trozo de hilo y en uno de los extremos amarra la masa



(recuerda que esta puede ser una piedra pequeña, un tornillo, una tuerca o cualquier cosa que se te ocurra). Perfora uno de los extremos de la hipotenusa, por esta perforación introduce el extremo libre del hilo y amárralo de modo que quede fijo. Observa la ilustración.

¿Cómo son los ángulos en el triángulo que acabas de construir? _____

El instrumento que acabas de construir (modelo sencillo de teodolito) te servirá para calcular con mucha aproximación la altura de árboles, montañas, edificios, astas de bandera, en fin cualquier objeto cuya altura desees calcular.

Existen muchos métodos para calcular la altura de objetos, en especial de árboles, todos ellos dan muestra de lo ingeniosas y sencillas que pueden ser las soluciones dadas a un problema, pero lo mejor, es que todos los métodos están basados en el mismo principio matemático.

Primer Método

En un día soleado, busca una estrategia para calcular (medir) la longitud de tu sombra (Ls). ¿Cómo lo harías?_____

_____.

¿Qué unidades utilizarías para medir tu altura (H) y la longitud de tu sombra (Ls)?

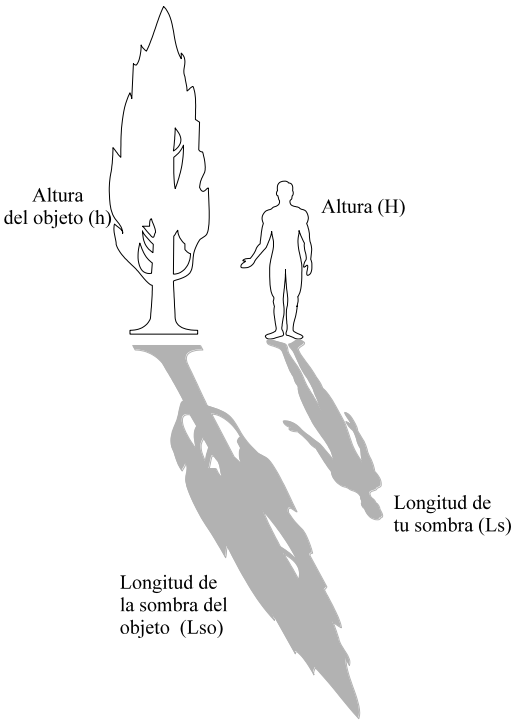
_____

_____

Calcula tu altura (H) y la longitud de tu sombra (Ls)_____

_____

Párate junto a un objeto (puede ser un árbol) que sea mucho más alto que tú. Ya conoces tu altura (H) y la longitud de tu sombra (Ls). También puedes medir la longitud de la sombra del objeto (Lso), con estos datos puedes



establecer una relación para calcular la altura del objeto h.

Nota: recuerda que siempre es posible establecer una relación entre tu altura y tu sombra y la altura del objeto y su sombra

$$\frac{H}{Ls} = \frac{h}{Lso}$$

¿Por qué es válida está relación?_____

Recuerda que lo que vas a hallar es la altura del objeto h.

Calcula dicho valor_____

Segundo Método

Si le pides a uno de tus compañeros que se pare frente al árbol, podrás calcular el número de personas que se necesita poner una sobre otra para alcanzar la cima del árbol. ¿Cuántas personas se necesitan?_____

Convierte la altura del árbol expresado en número de personas a una unidad diferente, como por ejemplo metros. ¿Qué debes hacer?_____

_____

Realiza la conversión._____

_____

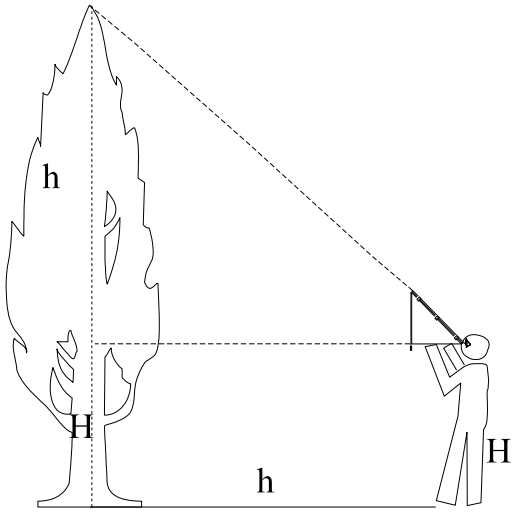
Nota: en los métodos siguientes, para evitar un efecto visual denominado de paralaje, debes realizar las observaciones utilizando únicamente uno de tus ojos.

Tercer método

Toma el teodolito, selecciona el árbol al cual le deseas calcular la altura. Alza el teodolito hasta tu ojo. Sujétalo de modo tal que la cuerda cuelgue verticalmente a lo largo del borde del triángulo. ¿Por qué es importante que suceda esto?_____

_____.

Mirando a través del pitillo y manteniendo la cuerda vertical, debes avanzar o retroceder hasta enfocar el extremo superior del árbol. Une con una línea imaginaria tu ojo y el extremo superior del árbol. Une con otra línea imaginaria horizontal tu posición y el árbol. Termina de formar un polígono teniendo en cuenta tu altura y la altura del árbol. Observa la ilustración.



¿Qué tipo de polígono formaste?

_____

El polígono que acabas de formar lo puedes partir en dos polígonos más simples. ¿qué tipo de polígonos son?_____

_____

¿Qué tipo de triángulo se formará?_____

_____¿Cómo son los ángulos de este nuevo triángulo?_____

¿Cómo son los ángulos de este triángulo, comparados con los del triángulo de cartón (teodolito)?_____

_____.

Ya estás a un paso de calcular la altura del árbol. Como ya sabes el triángulo que se forma es isósceles y rectángulo, por eso bastará con que midas la distancia que te separa del árbol y luego le sumes tu propia altura y listo.

Escoge un patrón de medida para que calcules la distancia que te separa del árbol, puede ser tu altura, pasos, pies, la unidad que desees.

Realiza tus cálculos._____.

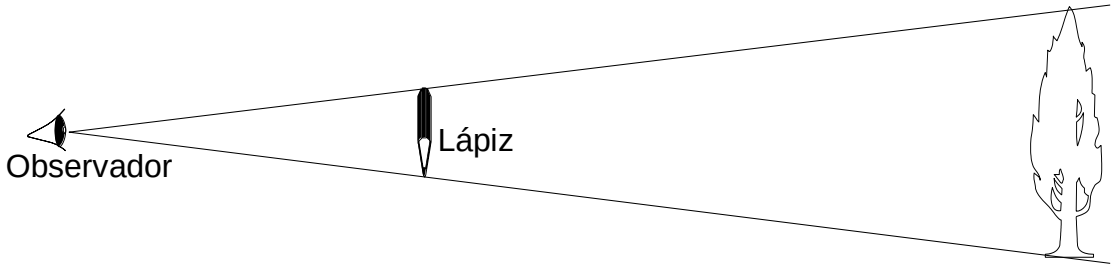
_____

Realiza una conversión de tus unidades a metros._____

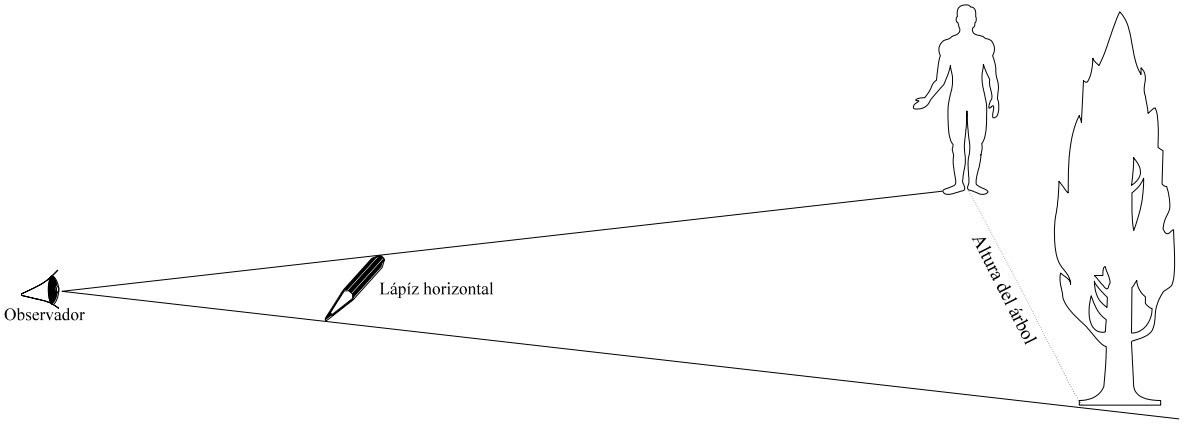
_____.

Cuarto método

Toma un lápiz o un lapicero. Ubícate frente al árbol al cual le deseas determinar la altura. Con el brazo extendido, coloca el lápiz verticalmente frente a tus ojos y observa el árbol, avanza o retrocede hasta que el lápiz cubra totalmente la altura del árbol. Observa la ilustración.



Sin moverte de la posición que ocupas, inclina el lápiz horizantalmente de forma que uno de sus extremos coincida con la base del árbol. Pídele a uno de tus compañeros que se pare a un lado del árbol, de modo tal que se forme un ángulo recto entre tu posición y el árbol y la posición de tu amigo y el árbol. Dile que camine lentamente y horizontalmente. Obsérvalo por el lápiz, cuando el lápiz cubra exactamente la distancia que hay entre la base del árbol y tu amigo, dile que se pare. Observa la ilustración.



La distancia que separa a tu amigo de la base del árbol será la altura que buscas.

¿Por qué se puede asegurar que la distancia que separa a tu amigo de la base del árbol es la altura del árbol?_____

_____

¿Existirá alguna relación entre los triángulos que se formaron en las dos situaciones? Observa bien y escribe._____

_____:

¿Cómo son los ángulos en estos triángulos?_____

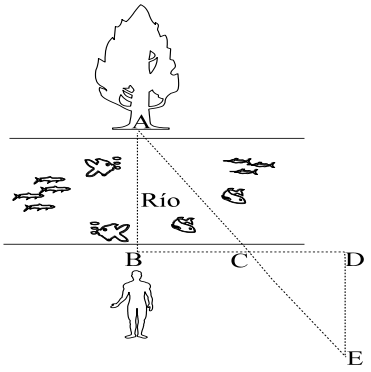
_____.

Calcula en las unidades que desees la altura del árbol._____

Determinación de la anchura de un río

Cuando te encuentras frente a un río a veces se hace necesario conocer su anchura. Hoy vamos a calcular el ancho de un río o de una carretera.

Sobre la orilla opuesta de la carretera o del río ubica un objeto que te sirva de referencia, como por ejemplo un árbol o una roca al que llamaremos el punto A. Colócate en la otra orilla exactamente al frente del punto A y marca este punto como B. Camina en línea recta y de forma que en B se forme un ángulo recto. Marca un punto C sobre esta horizontal. Sigue caminando un poco más en la misma línea y marca un punto D. Gira un cuarto de vuelta (90°) de modo que quedes dando la espalda a la carretera o al río. Camina en línea recta y marca un último punto E. Desde este punto debes observar el punto A que te sirvió como referencia. Observa la ilustración.



¿Qué tipos de figuras geométricas se obtienen?

_____

_____

¿Cómo son los ángulos de éstas figuras?_____

_____

Marca en la figura las parejas de ángulos iguales.

Mide con la cinta métrica las distancias BC_____CD_____ y DE_____.

Puedes establecer una proporción entre los lados de las figuras geométricas y calcular la anchura AB del río o la carretera.

¿Por qué?_____

$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD}$, luego y está calculada la anchura que queríamos.

Realiza tus cálculos._____

Elaborado por:	Uriel González Montoya.
Bibliografía:	Bolt Brian, Hobbs David. 101 Proyectos matemáticos, editorial Labor, S.A. El mundo de los niños. Volumen 10 Metamágicas, World Book International, Chicago 1994. páginas 102 – 103. Fiol Mora María Luisa, Fortuny Aymemí Joseph M. Proporcionalidad Directa la forma y el número, Editorial Síntesis, Madrid España, Páginas 62 – 81.
fecha:	diciembre de 2002

ANEXO 2

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MEDELLÍN

Los Logaritmos Log

GRUPO ÁBACO

Proyecto:	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia
Materiales:	Papel y lápiz
No. de páginas:	4

1. Algo de historia...

El paso de la Edad Media a los tiempos modernos estuvo marcado por transformaciones, cuyos resultados generaron un nuevo estilo de vida. Con la decadencia del feudalismo en Europa, aumenta el poder de una nueva clase social: la burguesía, la cual comienza a otorgar préstamos a interés, condenados hasta ese entonces como usura. El hombre comienza a observar la naturaleza, a experimentar, a usar su razón con verdadero espíritu de investigación. En esta época reaparece la matemática, inactiva desde el siglo IV d.C.

A partir del siglo XVI los cálculos que se precisaban hacer, debido principalmente a la expansión comercial y al perfeccionamiento de las técnicas de navegación, eran de tal magnitud que surgía la necesidad de encontrar

algoritmos menos laboriosos que los utilizados hasta ese entonces (algoritmos de la multiplicación, de la división, etc.).

El descubrimiento de los logaritmos no se produjo aisladamente, por un único proceso. Dos caminos condujeron a su hallazgo: los cálculos trigonométricos para las investigaciones astronómicas aplicables a la navegación, y el cálculo de las riquezas acumuladas en lo que se refiere a las reglas de interés compuesto. Ambos caminos inspiraron respectivamente a John Napier y a Jobst Bürgi en el descubrimiento de los logaritmos.

Según Henry Briggs, el objetivo de la invención de los logaritmos es:

> "Los logaritmos son números inventados para resolver más fácilmente los problemas de aritmética y geometría... con ellos se evitan todas las molestias de las multiplicaciones, se hacen solamente adiciones, y en lugar de divisiones se hacen sustracciones. La laboriosa operación de extraer raíces, tan poco grata, se efectúa con suma facilidad... en una palabra, con los logaritmos se resuelve con la mayor sencillez y comodidad todos los problemas, no sólo de aritmética y geometría, sino también de astronomía."

2. Regla de Arquímedes para los logaritmos.

Los orígenes del descubrimiento, o invención de los logaritmos se remontan hasta Arquímedes, en la comparación de las sucesiones aritméticas con las geométricas.

- ¿Qué crees que significa sucesiones aritméticas y geométricas?

_____
_____
_____

Veamos algunos ejemplos para comprender tal comparación:

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/64	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

A los números de la sucesión primera, que es aritmética, los llamaremos logaritmos; a los de la sucesión de abajo, que es geométrica, los llamaremos antilogaritmos.

La regla de Arquímedes dice que:

> " Para multiplicar entre sí dos números cualesquiera de la sucesión de abajo, debemos sumar los dos números de la sucesión de arriba situados encima de aquellos dos. Luego debe buscarse en la misma sucesión de arriba dicha suma. El número de la sucesión inferior que le corresponda debajo será el producto deseado."

Ejemplo #1: Para multiplicar 2*16, encontramos los números que se hallan encima de aquellos y los sumamos, es decir, 1 + 4 = 5; nos ubicamos en el número 5 y leemos el que se encuentra debajo que es el 32; por tanto el resultado de la multiplicación es **32.**

1	4	5

2	16	32

Ejemplo #2: Para efectuar una división se realiza una sustracción o resta. Así, 64 / 4, se hace 6 – 2 = 4, debajo del cual se ve el número **16**, que es el resultado de la división.

2	4	6
4	16	64

Ejemplo #3: *La potenciación*, se efectúa por la suma "consigo mismo" del correspondiente número aritmético. Es decir, para hacer 4^3 se suma tres veces el número 2, que es el correspondiente en la sucesión aritmética al número 4. O sea, 2+2+2=6, debajo del cual encontramos el **64**.

2	6
4	64

Ejemplo #4: *La Radicación* se obtiene mediante la división. Así, la raíz cúbica de 64 ($\sqrt[3]{64}$)

Se obtiene dividiendo el número 6 (que es el correspondiente aritmético de 64) por 3. Es decir, 6/3=2, debajo del cual encontramos el **4**.

2	6
4	64

EJERCICIOS

1. Cuál es el resultado de multiplicar :

1/8 * 32=_____

64 * 1/2=_____

16 * 32=_____

2. Realiza las siguientes divisiones y explica paso a paso el procedimiento que empleaste para hallar la solución:

1/2 dividido 1/4=_____

16 dividido 1/8=_____

64 dividido 2= _____

32 dividido 1/4= _____

3. Resuelve las siguientes potencias:

2^4=_____

$(1/2)^3$= _____

4. Halla las siguientes raíces:

$\sqrt{16}$ = _____

$\sqrt[3]{8}$ = _____

$\sqrt{1/4}$ =

_____

$\sqrt[3]{1/8}$ =

_____

3. Construcción de la sucesión geométrica del 3

De la misma forma que está construida la sucesión del número 2, construye la que corresponde al número 3 y basado en ésta, responde las siguientes preguntas:

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
						1	3					

EJERCICIOS:

1. ¿ Cuál es el resultado de multiplicar 1/27 por 9, 243 por 1/9, 9 por 81?

_____
_____
_____

2. Realiza las siguientes divisiones y explica paso a paso el procedimiento que empleaste para hallar la solución:

1/81 dividido 1/9=_____

81 dividido 1/243= _____

729 dividido 3= _____

27 dividido 1/3= _____

3. Resuelve las siguientes potencias:

3^4=_____

$(1/3)^3$= _____

4. Halla las siguientes raíces:

$\sqrt{81}$ = _____

$\sqrt[3]{729}$ =_____

$\sqrt{1/9}$ =_____

$\sqrt[3]{1/27}$ = _____

Elaborado por:	Carlos J. Echavarría, Sara María Velásquez. Marzo de 2002
Bibliografía:	Axioma. La revista de los estudiantes y profesores de matemáticas. Su dirección electrónica es: http://www.nalejandría.com/axioma/logaritmo/historia.htm

BIBLIOGRAFÍA

Baldor, J.A. (1967) Cultural Centroamericana, Geometría Plana y del Espacio, Guatemala,

Chemello, G y otros. (2007). *Colección Apoyo al último año de secundaria para la articulación con el nivel superior.* Buenos Aires. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.

Diaz, J.L. (2002) *Tales de Mileto*. Apuntes de historia de las matemáticas.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: Labor S.A.

Fiol, M.L., y Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Editorial Síntesis.

Godino, J., y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Proyecto Edumat Maestros. Universidad de Granada. España.

Martínez, N. González, J. (2008) *Construcción y uso significativo del concepto de proporcionalidad, diseño e implementación de actividades desde la experiencia de investigación acción.* Taller realizado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia.

MEN(2003) Documentos: *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*.

Monsalve M, (2002). *Las matemáticas y la física: ciencias…naturales*. La Universidad y la Escuela aprenden enseñando. Medellín. Colombia.

Monsalve M y Echavarría C. (2003) Notas sobre la metodología de Aula Taller. Medellín. Colombia.

Perelman Y. (1968) Ediciones Nacionales, El divertido juego de las matemáticas. Círculo de Lectores. Bogotá.

Pozueta Mendia, E y González García, F. *Evidencias de aprendizaje significativo en el tema de proporcionalidad de 2º de la E.S.O*.

Rodríguez, A., y Pérez, J. (2003). *La noción de proporcionalidad*. Ethos Educativos. México

Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer. (2003) Universidad de los Andes. Colombia.

Páginas de internet relacionadas:

http://vimeo.com/12367599.

http://neoparaiso.com/imprimir/juegos-con-fracciones.html

www.profesorenlinea.com