



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Propuesta didáctica para la enseñanza de la resolución de triángulos con el apoyo del programa Cabri Geometry

Martha Isabel Escobar Rodríguez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

Propuesta didáctica para la enseñanza de la resolución de triángulos con el apoyo del programa Cabri Geometry

Martha Isabel Escobar Rodríguez

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Myriam Acevedo Caicedo

Línea de Investigación:
Didáctica de la Matemática

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

A Dios porque siempre está presente en mi vida y a mi familia.

Agradecimientos

Un agradecimiento inmenso a la profesora Myriam Acevedo Caicedo, con su profesionalismo y larga trayectoria en la enseñanza, me dedicó tiempo de su vida para dirigir la construcción de este trabajo.

Resumen

Este trabajo es una propuesta que pretende aportar al proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de triángulos (identificación de las medidas de los lados y ángulos de triángulos rectángulos y oblicuángulos). Se ofrece como un aporte didáctico para ser aplicado y desarrollado por estudiantes del ciclo IV cuyas edades oscilan entre los 15 y los 17 años. Para estructurar la propuesta se revisó la teoría relacionada con los teoremas de Pitágoras, del Seno y del Coseno en lo concerniente a sus aplicaciones a la resolución de triángulos y se utilizó el programa Cabri Geometry como herramienta para aproximarse a los teoremas y a diferentes demostraciones de éstos. Se incluye en él una unidad didáctica que contiene diferentes actividades secuenciadas donde el estudiante manipula el software Cabry Geometry para solucionar ejercicios de aplicación.

Palabras clave: (Resolución de triángulos, Teorema de Pitágoras, Teorema del Seno, Teorema del Coseno, Cabri Geometry).

Abstract

This work is a proposal that seeks to contribute to the process of learning of the resolution of triangles (identification of the measures of the sides and angles of right triangles and acute angles). It is offered as a didactical contribution to be applied and developed by student of cycle IV whose age is between 15 and 17 years. To structure the proposal we revised theory related theorems of Pythagoras, the sine and cosine with regard to their application to solving triangles and we use the program Cabri Geometry as a tool to approach theorems and different demonstrations of them. It is Included a didactical teaching unit containing different sequential activities where the student manipulates the Cabri Geometry software to solve application problems.

Keywords: (resolution of triangles, theorems of Pythagoras, the sine and cosine, Cabri Geometry)

Contenido

	Pág.
Resumen	IX
Introducción	1
1. Aspecto histórico: Algunos aportes al desarrollo de la trigonometría	3
1.1 En Egipto	3
1.2 En Grecia.....	4
1.3 En India y Arabia	7
1.4 Durante el Renacimiento	10
2. Aspectos disciplinares	13
2.1 Trigonometría del triángulo rectángulo.....	13
2.1.1 Teorema de Pitágoras.....	13
2.1.2 Razones trigonométricas.....	14
2.2 Trigonometría de triángulos oblicuángulos.....	19
2.2.1 Teorema del seno.....	20
2.2.2 Teorema del Coseno	24
3. Diseño de la propuesta didáctica	33
3.1 Marco teórico de la unidad didáctica	33
3.2 El pensamiento espacial y los Sistemas Geométricos en el currículo de la Básica y media	33
3.3 La geometría activa y Cabri	36
3.4 Marco Metodológico	38
3.5 Población y nivel educativo de los estudiantes	40
3.6 Temática de la propuesta	41
3.6.1 Objetivos	41
Objetivo general	41
Objetivos específicos	41
3.6.2 Conocimientos Previos.....	42
3.6.3 Prerrequisitos.....	42
3.7 Unidad didáctica.....	42
3.7.1 Introducción	42
3.7.2 Estructura de las Guías de Aprendizaje	42
4. Conclusiones y recomendaciones	55
A.Anexo: Guías de Aprendizaje para la resolución de triángulos.....	57
Bibliografía	65

XII Propuesta didáctica para la enseñanza de la resolución de triángulos con el apoyo del programa Cabri Geometry

Introducción

En la actualidad en la educación básica y media se trabajan tópicos muy limitados de trigonometría y éstos son desarrollados de una forma mecánica. Se enfatiza usualmente en el aprendizaje sin significado de conceptos y reglas y no se consideran aproximaciones intuitivas a éstos. Con esta propuesta se intenta sugerir al docente una metodología diferente para trabajar estos tópicos que vaya más allá de la presentación de un listado de términos, definiciones, clasificaciones o propiedades fuera de un contexto significativo de aprendizaje.

Uno de los temas que se incluye en el programa de matemáticas del grado 10°, como lo estipulan los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional es la resolución de triángulos. Y como se comentaba en el párrafo anterior, al trabajar en el aula este tema se enfatiza principalmente en la aplicación mecánica de los teoremas, lo cual carece de significación para los estudiantes, que se limitan a memorizar resultados y usarlos sin entender condiciones y criterios; aspectos que se han evidenciado en los análisis de las pruebas Saber en las que se observa entre otros, que cuando los estudiantes requieren plantear y solucionar un problema de resolución de triángulos no diferencian las propiedades de los triángulos, no entienden las relaciones entre los lados, la correspondencia entre lados y ángulos, las propiedades de una clase determinada de triángulos. Es pertinente entonces plantear a los docentes una propuesta didáctica que permita a los estudiantes trabajar estos temas de manera más significativa.

Este trabajo está desarrollado en tres capítulos. En el primer capítulo se revisan aspectos relacionados con el aporte de algunos matemáticos de la antigüedad a la construcción de nociones básicas de la trigonometría. En el segundo capítulo, se enuncian y presentan, demostraciones de los Teoremas de Pitágoras, del Seno y del Coseno, se ilustran gráficamente para dar claridad a los pasos realizados en cada demostración. En el tercer capítulo se revisan algunos aspectos didácticos relacionadas con el uso del programa Cabri Geometry para la enseñanza de la trigonometría a nivel básico y se describe una

unidad didáctica que le permita al estudiante aproximarse de manera significativa al reconocimiento de ángulos y clasificación de triángulos con apoyo del programa Cabri Geometry.

La propuesta está pensada, en principio, para ser implementada con los estudiantes de la básica secundaria del I.E.D Integrado de Fontibón, Jornada Mañana. Sin embargo, se espera que constituya una motivación para que todos los profesores de matemáticas que tengan acceso a ella reconsideren la importancia de enseñar resolución de triángulos con apoyo del programa Cabri Geometry.

Como en todo trabajo académico, al final se presentan unas conclusiones y un listado de la bibliografía estudiada para que quien resulte interesado pueda consultar y ampliar sus conocimientos al respecto de lo que trata este trabajo.

1. Aspecto histórico: Algunos aportes al desarrollo de la trigonometría

El hombre a través de la historia, ha identificado y estudiado diversidad de problemas que se presentan en su entorno y la necesidad de resolverlos ha sido clave para generar conocimiento. Los conceptos, relaciones y propiedades matemáticas que ha utilizado para solucionar estos problemas, en particular los relacionados con la trigonometría fueron consolidándose gracias a los aportes de culturas como la Egipcia, la Griega, la India, la Árabe y a grandes estudiosos de la trigonometría en el Renacimiento.

En el transcurso de este capítulo, se recorrerán aspectos relacionados con la determinación de elementos de un triángulo; en primera instancia se revisará un aparte de uno de los más antiguos textos matemáticos: El Papiro de Rhind, luego se analizará el primer estudio sistemático de las relaciones entre los ángulos en un círculo y las longitudes de las cuerdas por parte de los griegos; posteriormente, se revisarán las tablas de los senos en documentos de la trigonometría india y árabe; por último, se dará una mirada a la trigonometría durante el Renacimiento.

1.1 En Egipto

Los egipcios (hace más de 3000 años) para resolver problemas prácticos midieron ángulos en grados, minutos y segundos. Manejaron aproximaciones de medidas de ángulos y de longitudes de los lados de los triángulos y determinaron razones trigonométricas para calcular indirectamente medidas requeridas en la construcción de las pirámides.

En la construcción de éstas, los egipcios, se preocuparon por mantener la misma pendiente en cada cara de la pirámide y la misma en las cuatro caras. En mediciones realizadas por los investigadores se determinó, que todas las caras de las pirámides forman con la horizontal un ángulo de 52 grados aproximadamente y la solución del

problema anterior, los llevó a introducir un concepto equivalente al de la cotangente de un ángulo. Probablemente, la necesidad de construir las pirámides, llevó a los egipcios a emplear el *seqt* que corresponde a “la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura.”[1] Pág. 40. Hoy en día, se puede interpretar esta noción como la razón entre los catetos de un triángulo rectángulo o la pendiente de una superficie plana inclinada.

Las ideas anteriores aparecen en el problema 56 del papiro de Rhind (o Ahmes)(1650 a.J.C.), uno de los más antiguos textos matemáticos, en este problema se incorporan elementos de trigonometría y teoría de triángulos semejantes. Los problemas que se plantean tienen que ver con calcular el *seqt* de una pirámide de altura y lado de la base dados. El problema 56, por ejemplo pide calcular el *seqt* de una pirámide de 250 codos de altura y 360 de lado.¹

A pesar de que no se podría afirmar que los egipcios empleaban una trigonometría totalmente definida, ellos usaban propiedades relacionadas con razones entre los lados de triángulos semejantes, sin expresarlas de un modo formal y claro.

1.2 En Grecia

Los griegos prestan atención por primer vez a la relación entre los ángulos centrales (o sus arcos correspondientes) en un círculo y las longitudes de las cuerdas que los subtienden. “Las propiedades de las cuerdas tomadas como medidas de ángulos centrales e inscritos en una circunferencia, les eran familiares ya a los griegos de la época de Hipócrates”[1] Pág.211

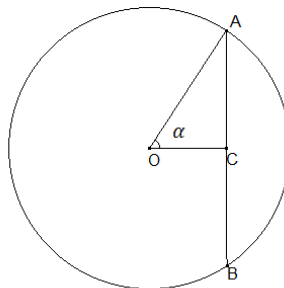
En las proposiciones 12 y 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides (325 a.C.-265 a.C.) se enuncia el teorema del coseno para ángulos obtusos y agudos, empleando términos geométricos más que trigonométricos, y se demuestran por un método similar usando el Teorema de Pitágoras.

¹En Collette [2] se encuentra la solución de este problema. Pág.59-60

Teniendo en cuenta que una de las razones por las que se empezó a estudiar la trigonometría se deriva de la necesidad de resolver problemas de astronomía (cálculo indirecto de medidas y distancias), en esta línea, es importante hacer referencia al trabajo de Aristarco de Samos, quien en su obra: *Sobre las dimensiones y las distancias del Sol y de la Luna*, determina algunas razones trigonométricas en las 18 proposiciones, que incluye.

Parece ser que quien elaboró la primera tabla de cuerdas (hoy en día, primer modelo de de una tabla trigonométrica) para resolver triángulos e introdujo la división del círculo en 360° fue Hiparco de Nicea (ca.180-ca. 125 a.C.) a quien se atribuye la creación de la trigonometría. Su aproximación a ésta, partía del hecho de que si la circunferencia de un círculo se divide en 360° y un diámetro se divide en 120 partes, cada parte de la circunferencia y del diámetro se divide a su vez en 60 partes y cada una de ellas en otras 60, de acuerdo al sistema babilónico de fracciones sexagesimales. De tal forma que, para un arco dado AB de un determinado número de grados, él da el número de unidades en la cuerda correspondiente AB (el número de unidades de la cuerda correspondiente a un arco de un determinado número de grados equivale a la función seno actual); “Si 2α es el ángulo central del arco AB (Ver Figura 1-1) actualmente, $\text{sen}\alpha = \frac{AC}{OA}$, mientras que, en vez de $\text{sen}\alpha$, Hiparco da el número de unidades en $2AC$ cuando el radio OA contiene 60 unidades. Por ejemplo, si la cuerda de 2α es de 40 unidades, entonces hoy en día, $\text{sen}\alpha = \frac{20}{60}$, o, con más generalidad, $\text{Sen}\alpha = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{2} \text{ cuerda } 2\alpha = \frac{1}{120} \text{ cuerda } 2\alpha$ ”[8] Pág. 167

Figura 1-1:



Hiparco tabuló los valores correspondientes de arcos y cuerdas para una serie completa de ángulos, parece ser que, con su tabla de cuerdas él influyó en la utilización sistemática posterior, herencia de los babilonios, del círculo de 360° y sus divisiones. Esta tabla de cuerdas, seguramente calculada de la manera que lo hacía el egipcio Claudio Ptolomeo (hacia el siglo II d.J.C.), sugiere las tablas de los senos. El desarrollo de la trigonometría griega y sus aplicaciones a la astronomía tuvieron su culminación en los trabajos de Ptolomeo, quien continúa y completa los trabajos de Hiparco y Menelao en trigonometría y astronomía.

En cuanto al trabajo de Menelao de Alejandría (ca. 100 d.C.), los historiadores afirman que parece ser el primero que definió el triángulo esférico y desarrolló un número significativo de teoremas sobre trigonometría de este tipo de triángulos. En su obra *Sphaerica*, “define el triángulo esférico como el espacio, sobre la superficie de una esfera, comprendido entre arcos de grandes círculos, y estos arcos, menores que la mitad de la circunferencia, son los lados del triángulo.”[2] Pág. 151. En el libro III aborda la trigonometría esférica a la manera griega empleando la trigonometría de cuerdas en un círculo deducida del “Teorema de Menelao”²: “El producto de tres razones de segmentos consecutivos de los lados de un triángulo, determinados por cualquier línea transversal, es igual a la unidad.” [2]Pág. 151

El teorema de Menelao desempeñó un papel importante en la trigonometría esférica pero en realidad, la obra de trigonometría más relevante en Grecia fue la *Sintaxis Matemática* o *Colección Matemática* (obra de trece libros), escrita por Ptolomeo de Alejandría; esta obra fue llamada posteriormente por los árabes *Almagesto* (“el más grande”). En esta obra propone que, “dado un arco que contenga un determinado número de las 360 unidades, encontrar la longitud de la cuerda expresada en términos del número de unidades que contiene todo el diámetro, es decir, 120 unidades.”[8] Pág. 170; además, incluye las tablas trigonométricas y la justificación de los procesos empleados para su elaboración. Para el cálculo de cuerdas, Ptolomeo utilizaba, el Teorema que lleva su nombre “Teorema de Ptolomeo”, el cual afirma que: “La suma de

² En Collette [2] se encuentra una demostración del Teorema. Pág. 151

los productos de los lados opuestos de un cuadrilátero cíclico es igual al producto de las diagonales.”[2].Pág.152

Teniendo en cuenta que los griegos no conocían las razones trigonométricas, Ptolomeo utilizó líneas trigonométricas como cuerdas de arco de círculo, asociándoles a las longitudes de estas cuerdas, de manera aproximada, valores numéricos. Para hacerlo, “dividió el diámetro de su círculo trigonométrico en 120 partes, cada una de las cuales estaba subdividida en 60 minutos y cada minuto de longitud a su vez en 60 segundos de longitud” [1] Pág. 221 (más tarde de aquí surgieron los términos “minuto” y “segundo”).

De tal forma que Ptolomeo concibe las diferentes razones trigonométricas como cuerdas de arcos; para solucionar triángulos oblicuángulos, los descompone en triángulos esféricos rectángulos. Aunque, estudió triángulos esféricos él fue quien estableció las bases de la trigonometría plana, “Pues, conociendo $\text{sen } A$ y, por tanto, $\text{cos } A$ para cualquier ángulo comprendido entre 0° y 90° , se pueden resolver triángulos planos”. [8] Pág.174

1.3 En India y Arabia

Los árabes prefirieron adoptar las tablas de los senos procedentes de las matemáticas indias de tal forma que la mayor parte de la trigonometría árabe se construyó basada en la función seno. Cabe recordar en cuanto a la trigonometría india que, las tablas más antiguas de la razón seno que se conocen son las que figuran en la literatura sánscrita los *Siddhantas* o *sistemas astronómicos*; la trigonometría de los *Siddhantas* se diferencia de la de Ptolomeo en que los *Siddhantas* se varía “la correspondencia entre la cuerda y el ángulo en el centro para convertirse en una relación funcional entre una semicuerda y el semiángulo en el centro que subtiende esta semicuerda. Esto es, de hecho, el equivalente a la función seno considerada como razón”. [2] Pág.183.

Del siglo VI se conoce el trabajo de Aryabhata (475-550) quien escribió la obra *Aryabhatiya*, la segunda parte de su libro consiste en la medición del tiempo y de la trigonometría esférica. Aryabhata asoció la semicuerda con la mitad del arco de la cuerda completa, en esta obra aparece además una tabla completa de senos, “en la que se dan los senos de los ángulos menores o iguales que 90° para 24 intervalos angulares iguales

de $3\frac{3}{4}^\circ$ cada uno. Para el seno de $3\frac{3}{4}^\circ$ tanto en los *Siddhantas* como el *Aryabhatiya* toman exactamente el número de unidades que contiene el arco, es decir, $60 \times 3\frac{3}{4} = 225$; traducido al lenguaje moderno, el seno de un ángulo pequeño es casi igual a la medida del ángulo en radianes, que es justamente lo que hacían los hindúes.” [1] Pág. 279-280

En lo concerniente a la trigonometría árabe, fue a través de la astronomía de Al-Battani (ca 850-929), más conocido en Europa como Albategnius, quien en su “obra titulada *Sobre el movimiento de las estrellas*, utilizó sistemáticamente el seno y dio una tabla de tangentes y cotangentes de todos los grados de 0 a 90, fórmulas trigonométricas como $b = \frac{a|\text{sen}(90^\circ - A)|}{\text{sen } A}$, en la que aparecen las funciones seno y seno del ángulo complementario y en donde se presenta la ley de los cosenos aplicada al triángulo esférico”[2] Pág.204. Se concluye de esto que Al-Battani, fue uno de los que introdujo el uso de los senos de arcos en vez de cuerdas de arcos dobles, a pesar de que “el número de unidades en el seno o semicuerda depende del número de unidades tomadas en el radio” [8] Pág. 264; las razones de tangente y cotangente se encuentran en su trabajo “como líneas que contenían un determinado número determinado de unidades, exactamente como el seno de un arco era una longitud que contenía una cantidad dada de unidades”[8] Pág. 265, teniendo presente que “la función tangente árabe se daba generalmente para el círculo unidad” [1] Pág. 308. Al-Battani construyó además tablas de valores de las tangentes y las cotangentes de los ángulos, obtuvo un gran reconocimiento con el uso de estas relaciones trigonométricas que actualmente se siguen empleando.

En el trabajo de Abu'l-Wefa (940-998) aparecen demostraciones de “los teoremas sobre las fórmulas del ángulo doble y del ángulo mitad”[2] Pág.205 y en un estudio de astronomía introduce las nociones de secante y cosecante, empleó las seis funciones trigonométricas y las relaciones existentes entre ellas; también “calculó una tabla de senos y tangentes para intervalos de $10'$ de ángulo”[8] Pág. 265; “construyó una tabla de senos de ángulos de cuarto en cuarto de grado con una aproximación a ocho cifras

decimales, una tabla de tangentes, e hizo uso en sus cálculos de todas las seis funciones trigonométricas"[1] Pág. 308; aunque, el teorema de los senos ya lo conocía básicamente Ptolomeo, y también aparece expresamente en la obra de Brahmagupta, es común atribuirle a Abul'í-Wefa su formulación clara y precisa para los triángulos esféricos.

En su trabajo Al-Biruni (973-1048) describe de manera pormenorizada los *Siddhantas*, construye una tabla de cuerdas para todos los múltiplos de 3° , basado en el teorema de la cuerda rota, lo que lo conduce a evaluar las cuerdas de 72° , 6° y 3° . Al-Biruni escribió además un tratado sobre el conocimiento de las sombras proyectadas por un gnomon. Explica que pocas personas perciben la dificultad de emplear un radio distinto de 1 aunque junto con Abul-I-Wafa "terminaron con la atribución de distintos valores a la longitud del radio, suponiendo que éste debía ser igual a uno"[2] Pág.207. Por otra parte, fue Al-Biruni quien dio una demostración del teorema del seno con su respectiva demostración, para triángulos planos.

Tanto en la India como en Arabia se empleó "una teoría general de longitudes de sombras con respecto a una unidad determinada de longitud o gnomon, para alturas variables del sol sobre el horizonte; no había ninguna unidad de longitud estándar para la varilla o gnomon, aunque a menudo se adoptaba o bien un palmo o la altura media de un hombre. Entonces la sombra horizontal proyectada por el gnomon vertical de longitud es lo que se llama hoy día cotangente del ángulo de elevación del sol sobre el horizonte. La "sombra invertida", es decir, la sombra proyectada sobre una pared vertical por una varilla o gnomon de longitud unidad fijado perpendicularmente a la pared, sería en cambio lo que se llama hoy día la tangente del ángulo de elevación del sol. La "hipotenusa de la sombra", es decir, la distancia del extremo del gnomon vertical unidad al extremo de su sombra era lo equivalente a hoy día la función cosecante, y la "hipotenusa de la sombra invertida" jugaba el mismo papel hoy día de la secante"[1] Pág. 309

Finalmente es importante comentar que fue Nasir-Eddin (1201-1274) quién sistematizó la trigonometría plana y esférica como una disciplina autónoma e independiente de la astronomía, en su *Tratado del cuadrilátero*, aquí expresó 6 fórmulas esenciales para la resolución de triángulos rectángulos esféricos y explicó cómo resolver triángulos más generales por el método del triángulo polar.

1.4 Durante el Renacimiento

El astrónomo Prusiano Johannes Müller (1436-1476) llamado Regiomontano, tomó la noción del seno de los indios, esto es, “la semicuerda del semi arco, y construyó una tabla de senos basada en un radio de 600.000 unidades y otra basada en un radio de 10.000.000 de unidades. También calculó una tabla de tangentes. En la *Tabulae Directionum*, dio tabla de tangentes de cinco cifras y subdivisiones decimales de los ángulos”[8] Pág. 320, además, sintetizó y difundió una interpretación de los resultados de la trigonometría árabe que promovió en las escuelas europeas, en su obra *De triangulis omnimodis*(1464), la cual consta de 5 libros: los dos primeros dedicados básicamente a la trigonometría plana. En el primero introduce las nociones de magnitud y razón, también incluye definiciones básicas de radio, igualdad, círculos, arcos, cuerdas, y la función seno, luego expone 50 proposiciones relacionadas con la resolución de triángulos. En el segundo, incluye una demostración del teorema del seno y lo utiliza en la resolución de algunos problemas con triángulos, establece el área de un triángulo plano conocidos dos lados y el ángulo que forman. Los tres últimos capítulos del libro estudian trigonometría esférica enfocando este estudio para posteriores obras de astronomía; En general, Müller sistematizó los métodos de resolución de triángulos, compiló los conocimientos que se tenían en “trigonometría plana, geometría y trigonometría esférica y obtuvo la ley de los senos y la de los cosenos para triángulos esféricos, es decir, $\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$ y la ley de los cosenos que relaciona los lados, esto es, $\cos a = \cos b \cos c + \text{sen } b \text{ sen } c \cos A$ “ [8] Pág. 321

Georg Joachim Rhaeticus (1514-1576) empleó “radios de cada vez mayor número de unidades, de manera que los valores de las cantidades trigonométricas podían obtenerse de manera más precisa...Por ejemplo, Rhaeticus calculó una tabla de senos basada en un radio de 10^{10} unidades y otra basada en unos 10^{15} unidades, y dio valores para cada

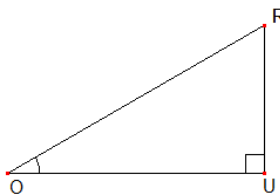
2. Aspectos disciplinares

Para dar inicio al estudio de la resolución de triángulos (determinación de los elementos desconocidos del triángulo), es necesario empezar con las definiciones básicas que intervienen en la trigonometría de los triángulos rectángulos y obtusángulos (acutángulos y oblicuángulos).

2.1 Trigonometría del triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo (Ver Figura 2-1) el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los otros dos lados se llaman catetos. El triángulo $\triangle ORU$ de la figura es recto en U tiene ángulos agudos complementarios $\sphericalangle O < \sphericalangle R$, $\sphericalangle O + \sphericalangle R = 90^\circ$. Los catetos de un triángulo rectángulo son opuestos o adyacentes dependiendo del ángulo que se esté analizando; en este caso \overline{RU} es el cateto opuesto al ángulo O y \overline{OU} es el cateto adyacente al ángulo O .

Figura 2-1:



En cualquier triángulo rectángulo es válido el teorema de Pitágoras

2.1.1 Teorema de Pitágoras

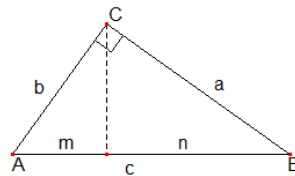
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Dado el $\triangle ABC$, un triángulo rectángulo con $\sphericalangle C$ recto, catetos de longitudes a y b e hipotenusa de longitud c .

Demostración:

Se traza la altura del vértice C a la hipotenusa \overline{AB} , determinando sobre ésta segmentos de longitudes m y n . Ver Figura 2-2.

Figura 2-2:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

De donde $c = m + n$ (1)

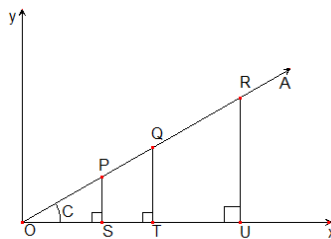
Como cada cateto en un triángulo rectángulo es media geométrica entre la hipotenusa y el segmento de ésta, adyacente al cateto, se tiene que $\frac{c}{a} = \frac{a}{n}$ y $\frac{c}{b} = \frac{b}{m}$.

De donde $a^2 = cn$ (2) y $b^2 = cm$ (3) (producto de medios igual a producto de extremos)

Sumando las igualdades (2) y (3), $a^2 + b^2 = cn + cm = c(n + m)$ y sustituyendo (1), $a^2 + b^2 = cc$, se concluye que, $a^2 + b^2 = c^2$

2.1.2 Razones trigonométricas

Figura 2-3:



El ángulo C , de la Figura 2-3 se dibujó en un plano cartesiano, en posición normal y orientado positivamente. Sobre el lado terminal del ángulo C , se ubicaron tres puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_3, y_3)$ y por cada uno de ellos se trazaron perpendiculares al eje x (eje de las abscisas). Se determinaron de esta forma, tres triángulos rectángulos: ΔPOS , ΔQOT y ΔROU que son semejantes por criterio lado-ángulo-lado (Si dos lados de un triángulo son proporcionales a los lados correspondientes de otro triángulo y los ángulos correspondientes entre estos lados son congruentes, entonces los triángulos son semejantes).

Es decir, $\Delta POS \cong \Delta QOT \cong \Delta ROU$, por lo tanto, se pueden establecer proporciones entre sus lados correspondientes, de la siguiente manera:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{RU}}{\overline{OR}} \circ \frac{y_1}{OP} = \frac{y_2}{OQ} = \frac{y_3}{OR} \quad (1)$$

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{OR}} \circ \frac{x_1}{OP} = \frac{x_2}{OQ} = \frac{x_3}{OR} \quad (2)$$

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{RU}}{\overline{OU}} \circ \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} \quad (3)$$

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{RU}} \circ \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} \quad (4)$$

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OU}} \circ \frac{OP}{x_1} = \frac{OQ}{x_2} = \frac{OR}{x_3} \quad (5)$$

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{RU}} \circ \frac{OP}{y_1} = \frac{OQ}{y_2} = \frac{OR}{y_3} \quad (6)$$

En (1) y (2), \overline{OP} , \overline{OQ} y \overline{OR} son justamente las hipotenusas de los triángulos rectángulos determinados, por tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras a estos triángulos y llamando respectivamente h_1 , h_2 y h_3 las medidas de las hipotenusas se tiene que:

$$h_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$h_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$h_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2}$$

Por la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes, se tiene que para un ángulo dado, cualquiera que sea el punto P elegido sobre el lado terminal, los cocientes $\frac{x}{OP}$ o $\frac{y}{OP}$ tienen cada uno un valor constante.

Sustituyendo en las proporciones \overline{OP} , \overline{OQ} y \overline{OR} por h_1 , h_2 y h_3 , se tiene que:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{RU}}{\overline{OR}} \text{ o } \frac{y_1}{h_1} = \frac{y_2}{h_2} = \frac{y_3}{h_3} \quad (1)$$

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{OR}} \text{ o } \frac{x_1}{h_1} = \frac{x_2}{h_2} = \frac{x_3}{h_3} \quad (2)$$

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{RU}}{\overline{OU}} \text{ o } \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} \quad (3)$$

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{RU}} \text{ o } \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} \quad (4)$$

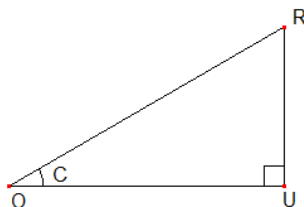
$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OU}} \text{ o } \frac{h_1}{x_1} = \frac{h_2}{x_2} = \frac{h_3}{x_3} \quad (5)$$

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{RU}} \text{ o } \frac{h_1}{y_1} = \frac{h_2}{y_2} = \frac{h_3}{y_3} \quad (6)$$

Como cada una de las razones o cocientes: $\frac{x}{h}$, $\frac{y}{h}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$, $\frac{h}{x}$, $\frac{h}{y}$ tienen para un ángulo dado valor constante, es posible definir estas razones, respectivamente, como **seno**, **coseno**, **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** del ángulo C .

En resumen, si C es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo (Ver Figura 2-4), entonces las razones trigonométricas están definidas así:

Figura 2-4:



$$\text{Sen } C = \frac{\text{Longitud del cateto opuesto}}{\text{Longitud de la hipotenusa}}$$

$$\text{Cos } C = \frac{\text{Longitud del cateto adyacente}}{\text{Longitud de la hipotenusa}}$$

$$\text{Tg } C = \frac{\text{Longitud del cateto opuesto}}{\text{Longitud del cateto adyacente}}$$

$$\text{Ctg } C = \frac{\text{Longitud del cateto adyacente}}{\text{Longitud del cateto opuesto}}$$

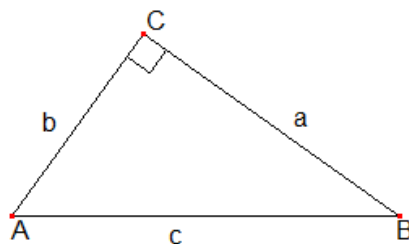
$$\text{Sec } C = \frac{\text{Longitud de la hipotenusa}}{\text{Longitud del cateto adyacente}}$$

$$\text{Csc } C = \frac{\text{Longitud de la hipotenusa}}{\text{Longitud del cateto opuesto}}$$

Todo triángulo rectángulo tiene un ángulo recto, por tanto, es suficiente que se conozcan al menos dos de sus elementos para poder resolver el triángulo, así que, cuando se sabe la longitud de uno de los lados y otro cualquiera de los elementos del triángulo, se puede determinar los otros elementos.

En la siguiente tabla se presentan los casos de resolución de triángulos rectángulos que pueden darse, con una propuesta de solución. Ver Figura 2-5.

Figura 2-5:



Caso	Datos conocidos	Incógnitas	Fórmulas de resolución
1	a, b	c, A, B	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $Tg A = \frac{a}{b}$ $Tg B = \frac{b}{a}$
2	a, c	b, A, B	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $Sen A = \frac{a}{c}$ $Cos B = \frac{a}{c}$
3	b, c	a, A, B	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $Cos A = \frac{b}{c}$ $Sen B = \frac{b}{c}$
4	A, a	b, c, B	$\sphericalangle B = 90^\circ - A$ $b = \frac{a}{Tg A}$ $c = \frac{a}{Sen A}$
5	A, b	a, c, B	$\sphericalangle B = 90^\circ - A$ $a = b Tg A$ $c = \frac{b}{Cos A}$
6	A, c	a, b, B	$\sphericalangle B = 90^\circ - A$ $a = c Sen A$ $b = c Cos A$
7	B, a	b, c, A	$\sphericalangle A = 90^\circ - B$ $b = a Tg B$ $c = \frac{a}{Cos B}$

8	B, b	a, c, A	$\sphericalangle A = 90^\circ - B$ $a = \frac{b}{Tg B}$ $c = \frac{b}{Sen B}$
9	B, c	a, b, A	$\sphericalangle A = 90^\circ - B$ $a = c Cos B$ $b = c Sen B$

En algunos casos, es necesario determinar la medida de un ángulo en un triángulo rectángulo conocidas las longitudes de dos de sus lados y para resolver este problema se procede de la siguiente manera:

Se halla el ángulo con la relación trigonométrica específica. Por ejemplo, si se requiere hallar la medida del ángulo A en $Sen A = \frac{a}{c}$, se usan en una calculadora las teclas Sen^{-1} , o $INV Sen$, o $SHIFT Sen$ o $ArcSen$, es decir se determina el ángulo cuyo seno es conocido, el arco seno, $A = ArcSen \left(\frac{a}{c} \right)$ o $A = Sen^{-1} \left(\frac{a}{c} \right)$. La calculadora también permite determinar ángulos cuyo coseno o tangente se conocen, con la tecla Cos^{-1} o Tg^{-1} .

2.2 Trigonometría de triángulos oblicuángulos

Los triángulos acutángulos y los obtusángulos reciben el nombre de triángulos oblicuángulos u oblicuos, es decir, triángulos sin ángulos rectos. Los triángulos escalenos acutángulos y obtusángulos, los triángulos isósceles que no tengan ángulo de 90° y los triángulos equiláteros son triángulos oblicuángulos. Así, un triángulo oblicuo tendrá tres ángulos agudos, o dos ángulos agudos y un ángulo obtuso.

Para resolver un triángulo oblicuángulo se requiere conocer mínimo 3 de sus elementos y uno de estos debe ser la medida de uno de sus lados. Por ejemplo: si se dan dos ángulos y el lado común a ellos se puede formar un solo triángulo; si se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos se determina un solo triángulo. Pero dados solamente tres ángulos sin conocer por lo menos un lado, no se puede establecer de forma única el triángulo porque muchos triángulos tienen los mismos tres ángulos, así que no se tiene en cuenta esta última situación. De tal forma que, existen cuatro casos

de resolución de triángulos oblicuos y para ellos se puede aplicar el Teorema del Seno, cuando se conocen un lado y dos ángulos; o, cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos; o el Teorema del Coseno, si se conocen dos lados y el ángulo entre ellos; o, se conocen tres lados. Se enunciará y demostrará a continuación estos teoremas.

2.2.1 Teorema del seno

“En todo triángulo oblicuángulo, las medidas de los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, respectivamente, a esos lados”.

Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos respectivamente A, B, C se tiene,

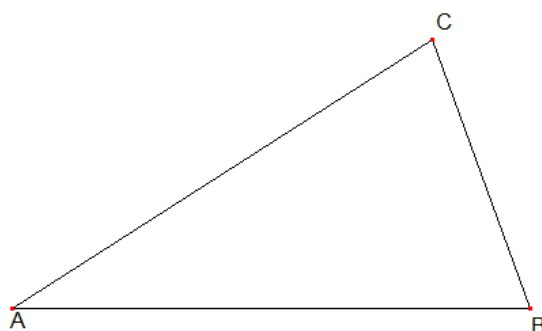
$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

Para demostrar el teorema se requiere considerar dos casos: Triángulo acutángulo y triángulo obtusángulo

Caso 1:

Sea el $\triangle ABC$ acutángulo, ver Figura 2-6

Figura 2-6:

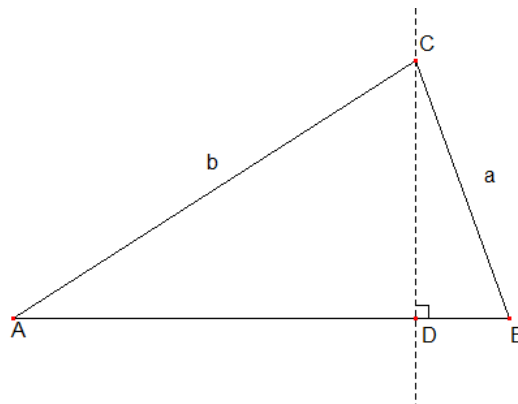


Para demostrar el teorema se trazarán dos de sus alturas.

Demostración:

La altura \overline{CD} determina $\triangle ADC$, recto en D , y $\triangle BDC$, recto en D . Ver Figura 2-7.

Figura 2-7:



En el $\triangle ADC$ se tiene $\text{Sen } A = \frac{\overline{CD}}{b}$ de donde $\overline{CD} = b \text{ Sen } A$ (1)

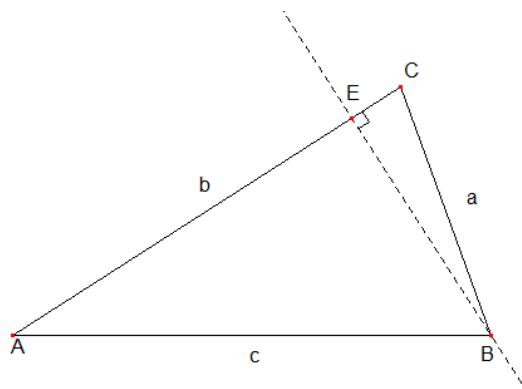
En el $\triangle BDC$ se tiene $\text{Sen } B = \frac{\overline{CD}}{a}$ de donde $\overline{CD} = a \text{ Sen } B$ (2)

Por transitividad entre (1) y (2):

$b \text{ Sen } A = a \text{ Sen } B$ de donde se concluye que: $\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B}$ (3)

La altura \overline{BE} determina el $\triangle BEA$, recto en E , y $\triangle BEC$, recto en E . Ver Figura 2-8.

Figura 2-8:



En el $\triangle BEA$ se tiene $\text{Sen } A = \frac{\overline{BE}}{c}$ de donde $\overline{BE} = c \text{ Sen } A$ (4)

En el $\triangle BEC$ se tiene $\text{Sen } C = \frac{\overline{BE}}{a}$ de donde $\overline{BE} = a \text{ Sen } C$ (5)

Por transitividad entre (4) y (5):

$$c \operatorname{Sen} A = a \operatorname{Sen} C \text{ se tiene que: } \frac{a}{\operatorname{Sen} A} = \frac{c}{\operatorname{Sen} C} \quad (6)$$

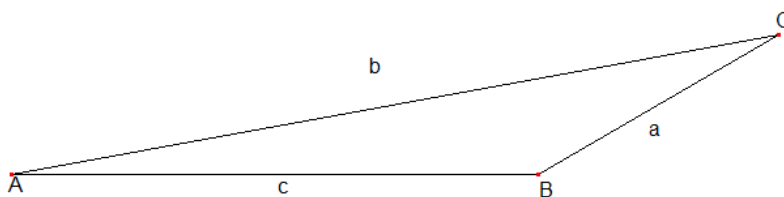
Dado que en (3) y (6) hay un miembro en común por transitividad se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{\operatorname{Sen} A} = \frac{b}{\operatorname{Sen} B} = \frac{c}{\operatorname{Sen} C}$$

Caso 2:

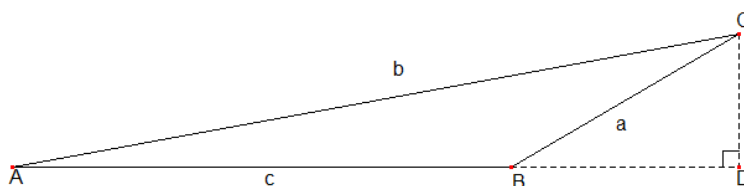
Sea el $\triangle ABC$ obtusángulo, ver Figura 2-9.

Figura 2-9:



La altura \overline{CD} del triángulo $\triangle ABC$ determina $\triangle ADC$, recto en D , y $\triangle BDC$, recto en D . Ver Figura 2-10.

Figura 2-10:



En el $\triangle ADC$ se tiene $\operatorname{Sen} A = \frac{\overline{CD}}{b}$ de donde $\overline{CD} = b \operatorname{Sen} A \quad (7)$

En el $\triangle BDC$ se tiene $\operatorname{Sen} CBD = \frac{\overline{CD}}{a}$ de donde $\overline{CD} = a \operatorname{Sen} CBD$

La Figura 2-10 implica que $\text{Sen } CBD = \text{Sen } (180^\circ - B) = \text{Sen } B$ y de nuevo, $\text{Sen } B = \frac{\overline{CD}}{a}$

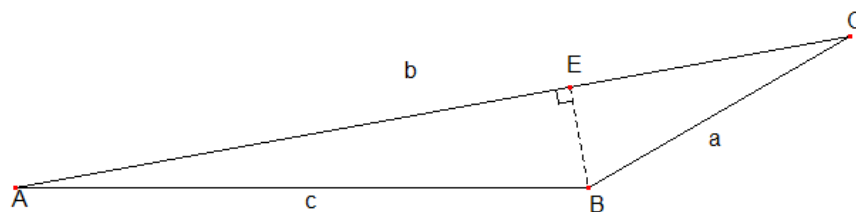
entonces, $\overline{CD} = a \text{ Sen } B$ (8)

Por transitividad entre (7) y (8):

$b \text{ Sen } A = a \text{ Sen } B$ de donde: $\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B}$ (9)

La altura \overline{BE} del $\triangle ABC$, determina $\triangle BEA$, recto en E, y $\triangle BEC$, recto en E. Ver Figura 2-11.

Figura 2-11:



En el $\triangle BEA$ se tiene $\text{Sen } A = \frac{\overline{BE}}{c}$ de donde $\overline{BE} = c \text{ Sen } A$ (10)

En el $\triangle BEC$ se tiene $\text{Sen } C = \frac{\overline{BE}}{a}$ de donde $\overline{BE} = a \text{ Sen } C$ (11)

Por transitividad entre (10) y (11):

$c \text{ Sen } A = a \text{ Sen } C$ se concluye que: $\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{c}{\text{Sen } C}$ (12)

De (9) y (12) se deduce que

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

Esto es equivalente a las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B}$$

$$\frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

2.2.2 Teorema del Coseno

“En todo triángulo oblicuángulo, el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble del producto de estos dos lados multiplicado por el coseno del ángulo que forman”

Para un triángulo de lados a, b, c y ángulos opuestos A, B y C , respectivamente,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

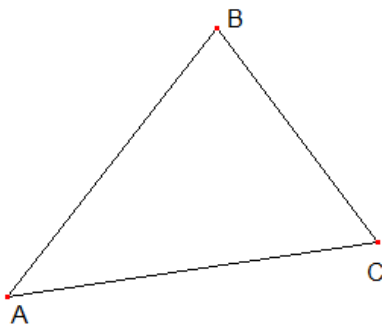
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Para demostrar el teorema se requiere considerar dos casos: Triángulo acutángulo y triángulo oblicuángulo para cada caso se trazarán las tres alturas del $\triangle ACB$

Caso 1:

Sea el $\triangle ABC$ acutángulo, ver Figura 2-12.

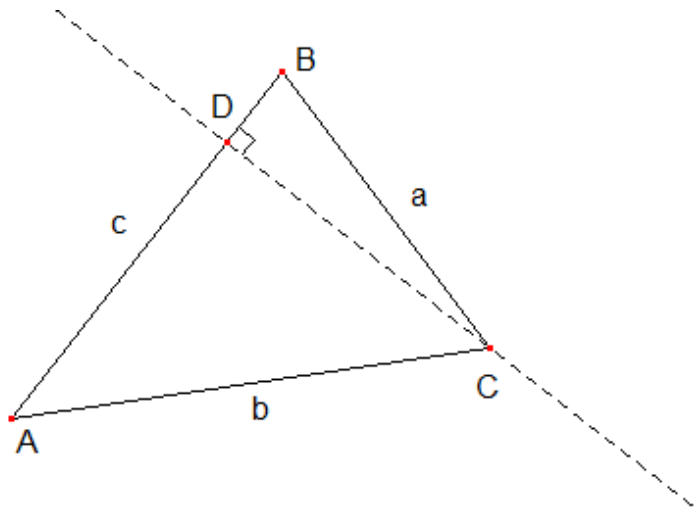
Figura 2-12:



Demostración:

La altura \overline{CD} determina $\triangle ADC$, recto en D , y $\triangle BDC$, recto en D . Ver Figura 2-13.

Figura 2-13:



Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \quad (1)$$

$$b^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 \quad (2)$$

Restando a la igualdad (1) la igualdad (2): $a^2 - b^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$

$$a^2 - b^2 = (\overline{AB} - \overline{AD})^2 - \overline{AD}^2$$

$$a^2 - b^2 = \overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AD}^2 - \overline{AD}^2$$

$$a^2 - b^2 = \overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} \quad (3)$$

Pero $\overline{AB} = c$ (4) y, además, en el triángulo rectángulo ADC : $\cos A = \frac{\overline{AD}}{b}$ en donde $\overline{AD} = b \cos A$ (5)

Reemplazando (4) y (5) en (3), se tiene: $a^2 - b^2 = c^2 - 2c \cdot b \cos A$

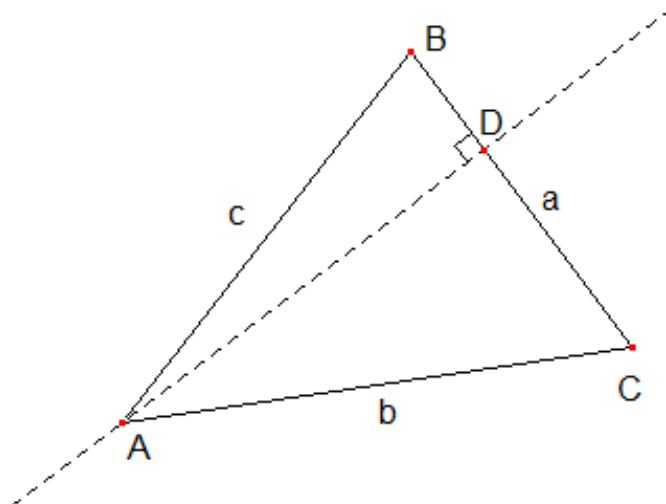
organizando, resulta:

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2bc \cos A$$

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

Ahora, la altura \overline{AD} determina $\triangle ADC$, recto en D , y $\triangle ADB$, recto en D . Ver Figura 2-14.

Figura 2-14:



Por el teorema de Pitágoras se tiene que: $b^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$ (6)

$$c^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \quad (7)$$

Restando a la igualdad (6) la igualdad (7): $b^2 - c^2 = \overline{DC}^2 - \overline{BD}^2$

$$b^2 - c^2 = (\overline{BC} - \overline{BD})^2 - \overline{BD}^2$$

$$b^2 - c^2 = (\overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{BD} + \overline{BD}^2) - \overline{BD}^2$$

$$b^2 - c^2 = \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{BD} \quad (8)$$

Pero $\overline{BC} = a$ (9) y, además, en el triángulo rectángulo ADB : $\cos B = \frac{\overline{BD}}{c}$ en donde $\overline{BD} = c \cos B$ (10)

Reemplazando (9) y (10) en (8), se tiene:

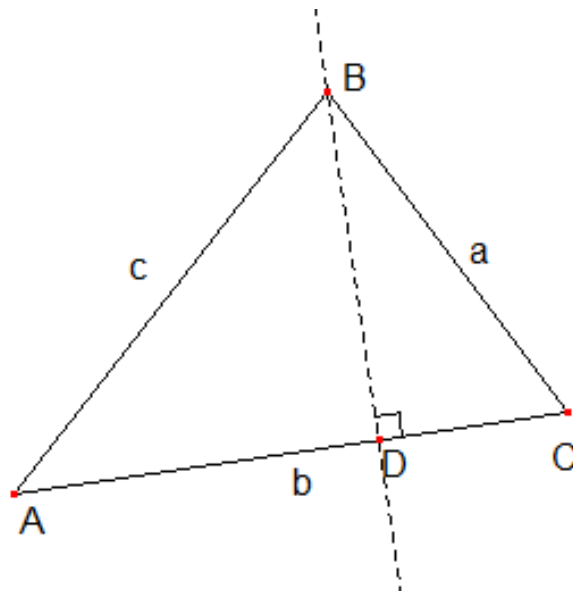
$$b^2 - c^2 = a^2 - 2ac \cos B$$

organizando resulta:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

Por último, la altura \overline{BD} determina $\triangle ADB$, recto en D , y $\triangle CDB$, recto en D . Ver Figura 2-15.

Figura 2-15:



Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$c^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \quad (11)$$

$$a^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2 \quad (12)$$

Restando a la igualdad (11) la igualdad (12): $c^2 - a^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2$

$$c^2 - a^2 = (\overline{AC} - \overline{DC})^2 - \overline{DC}^2$$

$$c^2 - a^2 = (\overline{AC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{DC} + \overline{DC}^2) - \overline{DC}^2$$

$$c^2 - a^2 = \overline{AC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{DC} \quad (13)$$

Pero $\overline{AC} = b$ (14) y, además, en el triángulo rectángulo CDB : $\cos C = \frac{\overline{DC}}{a}$ en donde

$$\overline{DC} = a \cos C \quad (15)$$

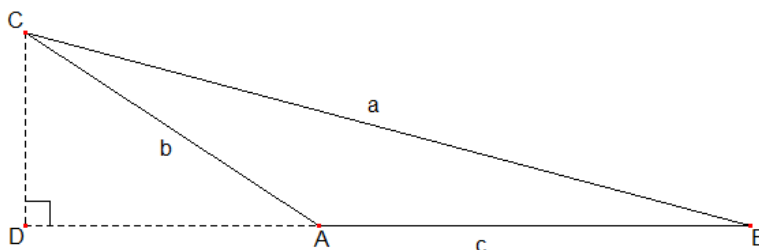
Reemplazando (14) y (15) en (13), se tiene: $c^2 - a^2 = b^2 - 2b \cdot a \cos C$, organizando, resulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Caso 2:

Sea el $\triangle ABC$ obtusángulo

La altura \overline{CD} determina $\triangle ADC$, recto en D , y el $\triangle BDC$, recto en D como se muestra en la Figura 2-16.

Figura 2-16:

Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \quad (16)$$

$$b^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 \quad (17)$$

Restando a la igualdad (16) la igualdad (17): $a^2 - b^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$

$$a^2 - b^2 = (\overline{AD} + \overline{AB})^2 - \overline{AD}^2$$

$$a^2 - b^2 = \overline{AD}^2 + 2\overline{AD} \cdot \overline{AB} + \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$$

$$a^2 - b^2 = 2\overline{AD} \cdot \overline{AB} + \overline{AB}^2 \quad (18)$$

Pero $\overline{AB} = c$ (19) y, además, en el triángulo rectángulo ADC : $\cos A = \cos(180^\circ - A)$ en donde $\cos 180^\circ \cos A - \text{sen } 180^\circ \text{sen } A$

$$-1 \cos A = -\cos A \quad \text{entonces} \quad \cos A = -\cos A \quad \text{y} \quad \frac{\overline{AD}}{b} = -\cos A, \quad \text{por lo tanto,} \quad \overline{AD} = -b \cos A \quad (20)$$

Reemplazando (19) y (20) en (18), se tiene: $a^2 - b^2 = c^2 + 2(-b \cos A)c$

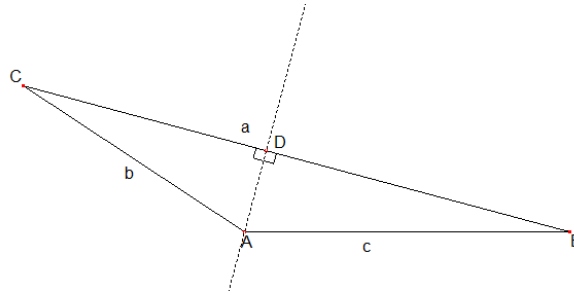
organizando, resulta:

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2bc \cos A$$

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

Ahora, la altura \overline{AD} determina $\triangle ADC$, recto en D , y $\triangle ADB$, recto en D . Como se muestra en la Figura 2-17.

Figura 2-17:



Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$b^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \quad (21)$$

$$c^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 \quad (22)$$

Restando a la igualdad (21) la igualdad (22): $b^2 - c^2 = \overline{CD}^2 - \overline{DB}^2$

$$b^2 - c^2 = (\overline{CB} - \overline{DB})^2 - \overline{DB}^2$$

$$b^2 - c^2 = \overline{CB}^2 - 2\overline{CB} \cdot \overline{DB} + \overline{DB}^2 - \overline{DB}^2$$

$$b^2 - c^2 = \overline{CB}^2 - 2\overline{CB} \cdot \overline{DB} \quad (23)$$

Pero $\overline{CB} = a$ (24) y, además, en el triángulo rectángulo ADB : $\cos ABD = \frac{\overline{DB}}{c}$ en donde

$$c \cdot \cos B = \overline{DB} \quad (25)$$

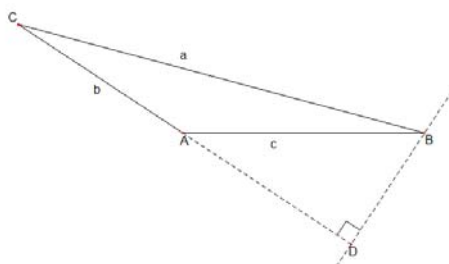
Reemplazando (24) y (25) en (23), se tiene: $b^2 - c^2 = a^2 - 2ac \cdot \cos B$

organizando, resulta:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

Por último, la altura \overline{BD} determina $\triangle CDB$, recto en D , y $\triangle ADB$, recto en D . Como se muestra en la Figura 2-18.

Figura 2-18:



Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \quad (26)$$

$$c^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \quad (27)$$

Restando a la igualdad (27) la igualdad (26): $c^2 - a^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2$

$$c^2 - a^2 = (\overline{CD} - \overline{CA})^2 - \overline{CD}^2$$

$$c^2 - a^2 = \overline{CD}^2 - 2\overline{CD} \cdot \overline{CA} + \overline{CA}^2 - \overline{CD}^2$$

$$c^2 - a^2 = -2\overline{CD} \cdot \overline{CA} + \overline{CA}^2 \quad (28)$$

Pero $\overline{CA} = b$ (29) y, además, en el triángulo rectángulo CDB: $\cos C = \frac{\overline{CD}}{a}$ en donde

$$a \cdot \cos C = \overline{CD} \quad (30)$$

Reemplazando (29) y (30) en (28), se tiene: $c^2 - a^2 = -2a \cdot \cos C \cdot b + b^2$

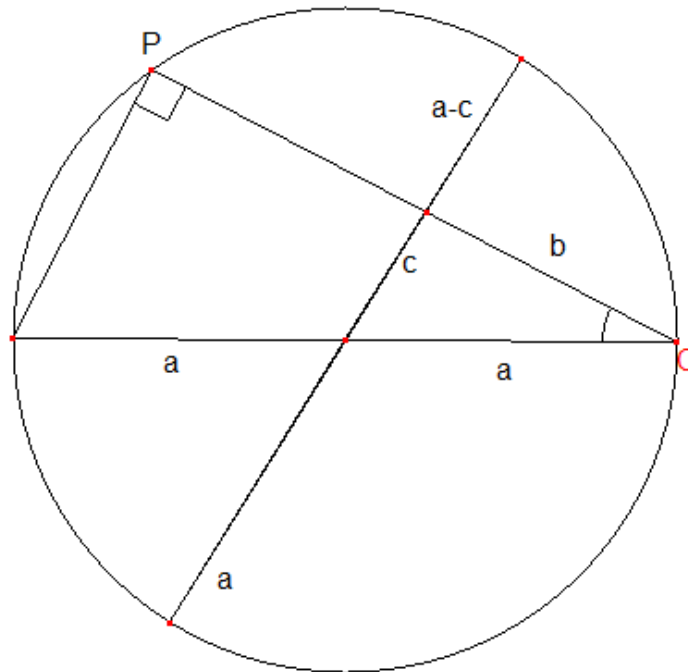
organizando, resulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Existen desde luego otras demostraciones de los teoremas anteriores y también se reportan en la literatura las llamadas pruebas visuales³, la que se ilustra a continuación es un ejemplo de éstas. Ver Figura 2-19:

³ En [10] se encuentra una prueba visual del Teorema del Coseno. Pág. 32

Figura 2-19:



Demostración:

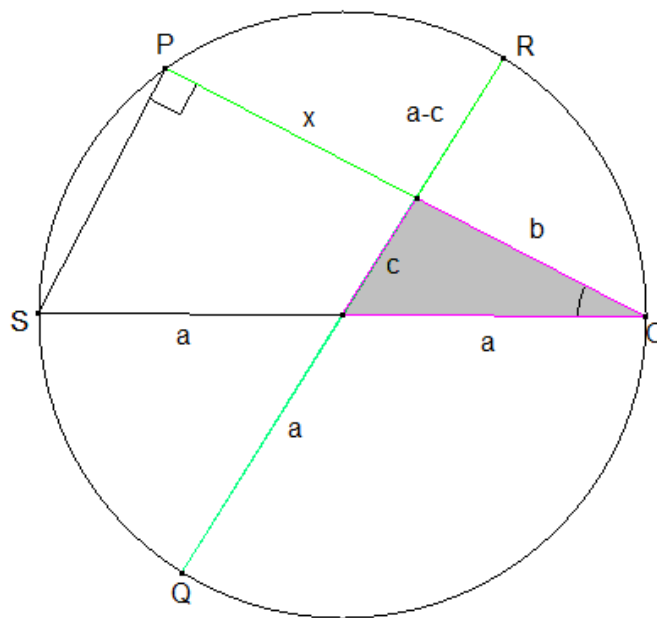
Se sabe que un diámetro de la circunferencia determina una semicircunferencia formando un ángulo central de 180° , de tal manera que cualquier ángulo inscrito determinado por el diámetro tiene una amplitud de 90° . Entonces:

$$\cos C = \frac{\text{cateto adyacente}}{2a}$$

$$2a \cos C = \text{cateto adyacente}$$

Dado que \overline{PC} y \overline{QR} son secantes de la circunferencia y se intersecan, ver Figura 2-20.

Figura 2-20



Se cumple que $(a + c)(a - c) = bx$ (1), del triángulo rectángulo SPC se tiene que $\cos C = \frac{x+b}{2a}$ (2), despejando x en (2), se obtiene $x = 2a \cos C - b$ (3); Reemplazando (3) en (1)

$$(a + c)(a - c) = b(2a \cos C - b)$$

$$(2a \cos C - b)b = (a - c)(a + c)$$

$$2ab \cos C - b^2 = a^2 - c^2$$

$$a^2 - c^2 = 2ab \cos C - b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

3. Diseño de la propuesta didáctica

3.1 Marco teórico de la unidad didáctica

La resolución de triángulos es uno de los temas considerados en el programa de trigonometría del grado 10°, como se establece en los Estándares Básicos de Matemáticas en el componente de Pensamiento espacial y los Sistemas geométricos. Para trabajar este tema en el aula usualmente se introducen las definiciones de las razones trigonométricas, se enuncian los teoremas que se requieren para determinar los elementos del triángulo a partir de la información conocida y posteriormente se resuelven algunos ejercicios y problemas de aplicación que se deducen a partir de procesos meramente algebraicos. Para profundizar y dar un mayor significado a este trabajo, se propone en este aparte empezar el estudio de la resolución de triángulos analizando los teoremas básicos (Pitágoras, del Seno y del Coseno) y sus demostraciones fortaleciendo elementos de la geometría del triángulo y usando el programa Cabri Geometry. Se intentará crear un enlace entre la geometría y la trigonometría en lo relativo a la resolución de triángulos a través de una unidad didáctica que consta de 3 guías de aprendizaje. Cada una de ellas incluye unos objetivos, un listado de conceptos previos requeridos para el desarrollo y actividades pertinentes de construcción geométrica con apoyo del programa Cabri Geometry. Se formulan además en ellas preguntas de diferentes niveles de dificultad.

3.2 El pensamiento espacial y los Sistemas Geométricos en el currículo de la Básica y media

A continuación se incluyen algunos elementos teóricos que permiten caracterizar el pensamiento Espacial y se describen orientaciones que respecto a su desarrollo plantean los Estándares y lineamientos curriculares del MEN para el área de matemáticas.

Jean Piaget (1896-1980), haciendo referencia al Pensamiento Espacial planteaba que la percepción espacial en el sujeto es la acción y el resultado del intercambio de información entre la mente y el cuerpo en su relación con el entorno. El individuo toma como referencia inicialmente su cuerpo, por medio de sus sentidos explora y manipula los objetos así como también conoce el espacio a través de los movimientos y desplazamientos que efectúa. Va diferenciando los elementos, percibiendo y reconociendo las relaciones y representando mentalmente la información adquirida en una estructura que evoluciona (estadio de operaciones concretas) y se perfecciona con el tiempo y con las experiencias cada vez más completa y compleja, resultando esencial para poder trabajar los elementos, formas y relaciones existentes en el espacio.

Al mismo tiempo el sujeto, va distinguiendo entre distintos tipos de espacio (físico, social, corporal, inmediato, lejano, etc.) y va adquiriendo conciencia y configurando los esquemas de acción y representación directa sobre el entorno. Paulatinamente, se desarrolla el conocimiento indirecto del espacio a través del lenguaje lo cual ayuda a mejorar la disposición para trabajar y comprender su entorno.

Howard Gardner (1943-) Considera como una de las múltiples inteligencias, el pensamiento espacial o la inteligencia espacial, la cual supone la capacidad de resolver problemas relacionados con ubicación, orientación y distribución de espacios. Este pensamiento también permite conocer, manipular y representar información por medio de gráficos ideas visuales o espaciales. Varias disciplinas científicas (química, física, matemáticas, entre otras) necesitan personas con un buen desarrollo de inteligencia espacial ya que perciben el mundo que les rodea manejando apropiadamente los espacios y esto es primordial para fortalecer su pensamiento científico.

En el 2006 en el documento “Orientaciones curriculares para el campo de pensamiento Matemático” Vasco C, reitera la idea anterior afirmando que: “el pensamiento espacial definido como el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales, contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar

variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales”[6] Pág.65. Según este planteamiento los objetos están en el mundo y las personas crean relaciones entre éstos con el fin de observar sus posiciones y las modificaciones que puedan sufrir, lo cual le permite operar con las relaciones que las personas logren establecer, en este sentido el proceso de enseñanza debe fortalecer las experiencias que tiene el estudiante con el espacio práctico, como resultado de la interacción que tiene con los objetos del mundo.

Y en los documentos curriculares de matemáticas se enfatiza que en este pensamiento es fundamental analizar conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos, lo que implica las acciones que establece el sujeto en diferentes dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de varias formas con los objetos situados en el espacio, desarrollar diversas representaciones y, por medio de la combinación entre ellas, realizar aproximaciones conceptuales que le permitan la construcción y manejo de nuevas representaciones mentales. Por lo tanto, el pensamiento espacial hace parte del pensamiento relacionado con las experiencias con los objetos físicos, sus representaciones gráficas y simbólicas en el momento en que determina su localización, sus cambios de posición, sus formas y las modificaciones que experimentan éstos.

Cabe resaltar que respecto a los sistemas geométricos en los lineamientos curriculares se hace énfasis también en la importancia de desarrollar el pensamiento espacial y se afirma que éste “se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales. Este proceso de construcción del espacio está condicionado e influenciado tanto por las

características cognitivas individuales como por la influencia del entorno físico, cultural, social e histórico.” [7] Pág. 56-57

Por consiguiente, es necesario diseñar actividades que le permitan al estudiante fortalecer su capacidad de realizar construcciones geométricas, formular conjeturas, que requieran mayor elaboración y le permitan desarrollar procesos sencillos que favorezcan procesos de verificación de esas conjeturas. Para que esto sea posible es indispensable generar en la enseñanza situaciones de investigación, en las que el estudiante asimile las preguntas que se le hacen, construya los procedimientos necesarios para que se aproxime a las respuestas, las compruebe y a partir de ello logre obtener las conclusiones, para que posteriormente las informe y cree razonamientos que le permita validar sus conclusiones.

Lo anterior implica ayudar al estudiante en la elaboración de construcciones gráficas o materiales en las que pueda sustentar sus percepciones a través de ensayo y error. Lo cual favorece la construcción de modelos geométricos que le permitan representar y resolver problemas de otros campos del conocimiento.

3.3 La geometría activa y Cabri

La geometría activa consiste en “la exploración de la figura mediante el movimiento, empezando por el propio cuerpo, (como cuando el niño recorre la frontera de una figura) y pasando por el que se aplica a los objetos físicos, para estudiar los efectos que se producen en la figura que comportan y las relaciones entre productos de estos movimientos y de manera muy parcial, entre los mismos movimientos.” [6] Pág. 66. Por consiguiente, se hace necesario introducir programas que tengan como eje primordial el estudio y construcción de los elementos básicos de las figuras geométricas, sus relaciones y propiedades, que le permitan al estudiante la exploración y manipulación directa y dinámica y la elaboración de conjeturas con el fin de desarrollar sus habilidades mentales y estudiar formalmente aspectos básicos de la geometría euclidiana. Se reconoce de esta forma el papel fundamental de las nuevas tecnologías para dinamizar y propiciar alternativas en la metodología empleada para la enseñanza de matemáticas.

En el documento del MEN con relación al programa computacional que se utilizará en esta propuesta se afirma que: "CABRI -GÉOMÉTRE particularmente, es un programa diseñado para permitir la posibilidad de experimentar con una especie de "materialización" de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones, de tal forma, que pueden vivir un tipo de experimentación matemática que otros ambientes de aprendizaje no proporcionan. Por consiguiente, es natural esperar que los estudiantes que trabajen con CABRI puedan avanzar en su comprensión y conocimiento de la geometría de una manera distinta a la que seguirían si utilizan medios tradicionales." [5] Pág. 68

El software de Cabri Geometry brinda la oportunidad de tener y relacionar de manera dinámica diversas representaciones de un mismo concepto matemático, implica actividad y manipulación con los objetos geométricos y sus relaciones, a la vez que el programa Cabri facilita formular, discutir, comprobar conjeturas y confrontar experiencias reales con la teoría matemática al utilizar datos reales y simulaciones, lo cual se encuentra en correspondencia con los lineamientos curriculares de las nuevas tecnologías y el currículo de matemáticas.

El uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas se puede transformar en un ambiente innovador para trabajar representaciones formales de objetos y relaciones matemáticas; el medio tecnológico suministra de modo inmediato una retroalimentación de las actividades que está ejecutando un estudiante permitiéndole profundizar sus conocimientos.

Es indispensable resaltar que Cabri Geometry facilita el aprendizaje, su objetivo principal consiste en ayudar a mejorar y avanzar la comprensión y conocimiento de las construcciones geométricas que permiten a su vez la creación de las herramientas básicas de la trigonometría en lo relativo a la resolución de triángulos. Por ello resulta fundamental estructurar problemas que se presenten a los estudiantes, en diversas etapas de lo simple a lo complejo, que les permita poner en juego diferentes estrategias de aprendizaje.

3.4 Marco Metodológico

Se requiere de la organización de situaciones o actividades que contemplen diferentes etapas y propicien la construcción gradual de procesos de pensamiento espacial; actividades que permitan a los estudiantes adquirir de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabulario, entre otros.) con los cuales van a trabajar, aprender a utilizarlos y combinarlos.

Para fundamentar las actividades se tomaran elementos de investigaciones relacionadas con el desarrollo y evolución de los niveles de razonamiento geométrico y el uso de programas computacionales como una herramienta.

Con respecto a los niveles de razonamiento en geometría se retoma en la propuesta el modelo teórico de los Van Hiele (Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele, 1959-1984-1986) quienes caracterizaron el progreso del pensamiento geométrico de los estudiantes. En su teoría describieron 5 niveles de pensamiento y 5 fases de aprendizaje que se evidencian en el trabajo de cada nivel. Se describen tres de los niveles pues es poco probable que estudiantes que no han tenido experiencias previas significativas en geometría alcancen niveles superiores. (De deducción formal-Rigor):

- Nivel 1. De Reconocimiento-Visual: En este nivel, los estudiantes reconocen y operan sobre formas y figuras geométricas de acuerdo a su aspecto físico sin establecer relaciones, características y propiedades entre sus formas o sus partes.
- Nivel 2. De análisis: La percepción de las propiedades y elementos de las figuras es más específica, empieza el estudiante a desarrollar la capacidad para descubrir y generalizar a partir de la observación y manipulación propiedades que desconocían. En este nivel se empieza a vislumbrar un inicio de razonamiento "matemático" formal.
- Nivel 3. De clasificación: En este nivel los estudiantes están en capacidad de identificar que unas propiedades se deducen de otras con apoyo de la manipulación, entienden las demostraciones rigurosas pero no las elaboran.

Las actividades que se presentan en esta propuesta enfatizan entonces en el reconocimiento de relaciones y propiedades, en el análisis de regularidades y la generalización y en la deducción usando en este caso la manipulación, con el apoyo de la herramienta computacional. Incluirán preguntas y problemas de diferentes grados de complejidad que permitirán identificar el avance de los estudiantes en cada uno de estos niveles.

Para potenciar en los estudiantes las capacidades y los conocimientos necesarios en cada nivel teniendo en cuenta este modelo, en particular en lo relacionado con la resolución de triángulos, se requiere tener en cuenta además las siguientes fases:

Diagnóstico: el docente formula preguntas que propicien un diálogo con el estudiante con el objetivo de obtener información de los conceptos que él posee, su vocabulario y la forma en que se expresa, lo cual le permite al docente establecer el punto de partida de la actividad académica.

Orientación dirigida: permite analizar la habilidad del docente para planear y organizar las actividades, las cuales deben permitir al estudiante obtener de forma gradual la adquisición de las metas correspondientes al nivel, deben ser concretas, cortas y orientadas a lograr respuestas puntuales. Los materiales deben permitir el uso de variedad de recursos didácticos (por ejemplo, el uso de la geometría dinámica) y la claridad de los objetivos que se proyectan conseguir.

Explicación: aquí el estudiante puede aclarar ideas, organizarlas e integrarlas a la información que ya posee puesto que tiene la oportunidad de socializar lo aprendido con sus compañeros de estudio y con el docente, quien ayuda a perfeccionar los conceptos nuevos así como para orientar que el vocabulario que el estudiante emplee sea el apropiado a su nivel.

Orientación libre: En esta fase el estudiante requiere realizar tareas más complejas, con muchas etapas y que pueden desarrollarse por diferentes procedimientos, las cuales implican desarrollar la creatividad, la investigación, plantearse nuevas preguntas y posibles respuestas, estableciendo relaciones diferentes a las ya adquiridas entre lo estudiado y lo propuesto.

Integración: El estudiante con ayuda del docente resume lo que ha aprendido, revisa y unifica los objetos y las relaciones entre éstos que configuran el nuevo sistema de conocimientos construidos, mejorando su nivel de comprensión. Se analizan las causas que le permitieron al estudiante elaborar su síntesis.

Una vez alcanzada esta quinta fase los estudiantes iniciarán nuevamente cada una de las anteriores fases en el siguiente nivel. Las fases anteriores son importantes para desarrollar la unidad didáctica con los estudiantes.

3.5 Población y nivel educativo de los estudiantes

La propuesta está diseñada para los estudiantes de básica secundaria del ciclo IV, de la IED Integrado de Fontibón Jornada Mañana. Las edades de los estudiantes de este ciclo, oscilan entre 15 y 17 años aproximadamente. Un porcentaje significativo de ellos presentan problemáticas de tipo social, familiar, afectivo-sentimental o psicológico. La mayoría de ellos, provienen de la localidad de Fontibón, estrato 2 o 3.

En cuanto al aspecto académico, los estudiantes de este ciclo siempre han tenido resultados en la categoría media a pesar de participar en un proyecto de intensificación que hace parte de los programas del Plan de Desarrollo de la Secretaría de Educación como apoyo extraescolar a la formación de los bachilleres próximos a graduarse. Los estudiantes han evidenciado debilidad en lo relativo al pensamiento espacial y sistemas geométricos en la construcción y manipulación de representaciones de los objetos del espacio; las relaciones entre ellos, sus transformaciones; la comprensión del espacio; el desarrollo del pensamiento visual; el análisis abstracto de figuras y formas en el plano y en el espacio, a través de la observación de patrones y regularidades; el razonamiento geométrico y la solución de problemas de medición; la construcción y comprensión de conceptos de cada magnitud (longitud, área, volumen, capacidad, masa, entre otros.)

Teniendo en cuenta los aspectos mencionados, la propuesta didáctica pretende acercar a los estudiantes a los conceptos y teoremas relacionados con la resolución de triángulos con el objeto de enriquecer su formación matemática, potenciar procesos de pensamiento y prepararlos para aplicar comprensivamente estos conceptos y teoremas

en situaciones matemáticas y de otros campos. Aspectos que se evidencian como una debilidad importante en los análisis de los resultados de las pruebas nacionales en las que ellos participan.

3.6 Temática de la propuesta

Teoremas de Pitágoras, del Seno y del Coseno y sus demostraciones; algunos elementos previos a estos teoremas relacionados con los triángulos y una discusión de sus aplicaciones a la resolución de triángulos.

3.6.1 Objetivos

Objetivo general

Desarrollar, con apoyo del programa Cabri Geometry y a partir de situaciones reales, una propuesta didáctica que permita revisar la teoría básica de la trigonometría relacionada con la determinación de elementos de un triángulo para estructurar algunas actividades de aplicación del tema, en los estudiantes del ciclo IV (grado décimo) de la jornada mañana, en el colegio Integrado de Fontibón, de la localidad 9.

Objetivos específicos

- Propiciar el progreso en el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico, del estudiante a través de la enseñanza de la resolución de triángulos a nivel básico.
- Generar la construcción gradual y significativa de los conceptos relacionados con los teoremas de Pitágoras, del Seno y del Coseno en lo relativo a su aplicación en la determinación de los elementos de un triángulo.
- Incentivar ambientes propicios de aprendizaje, que provoquen y motiven a los estudiantes hacia la exploración del conocimiento de los teoremas del seno y del coseno y su uso en la resolución de triángulos, que además respondan con las necesidades e intereses de la sociedad actual, utilizando herramientas tecnológicas como es el programa Cabri Geometry.

3.6.2 Conocimientos Previos

Conceptos de ángulo, recta, paralelismo, perpendicularidad y área de polígonos. Reconocimiento y clasificación de triángulos, alturas de un triángulo, construcciones geométricas básicas (trazado de paralelas, perpendiculares, alturas del triángulo, construcción de polígonos). Relaciones de semejanza y congruencia de triángulos (razón y proporción), criterios y aplicaciones.

3.6.3 Prerrequisitos

Algunas construcciones con regla y compás (diferentes clases de triángulos) y conocimiento de herramientas básicas del software Cabri Geometry.

3.7 Unidad didáctica

3.7.1 Introducción

El trabajo que se plantea para los estudiantes, pretende mejorar la comprensión de los teoremas de Pitágoras, del Seno y del Coseno en lo relativo a la resolución de triángulos, está estructurado de tal forma que a partir de construcciones geométricas con Cabri Geometry se llegue a nociones de la temática que se está desarrollando, teniendo presente los tres primeros niveles de razonamiento propuestos (reconocimiento, análisis y ordenamiento) y las fases de aprendizaje propuestas por los profesores Van Hiele.

3.7.2 Estructura de las Guías de Aprendizaje

Cada guía como se mencionó en otro aparte incluye: unos objetivos, un listado de prerrequisitos o conocimientos previos y una secuencia de actividades en las cuales se dan instrucciones pertinentes a las herramientas de Cabri Geometry. Se formulan unas preguntas orientadoras que permitan al estudiante llegar a conclusiones y conjeturas relacionadas con los objetivos inicialmente propuestos.

A continuación se incluye la Guía de Aprendizaje No 1, las otras dos guías aparecen en el anexo.

COLEGIO INTEGRADO DE FONTIBÓN
GUIA DE APRENDIZAJE No 1
RECONOCIMIENTO DE ÁNGULOS Y CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS
ASIGNATURA: TRIGONOMETRIA
UNIDAD DE APRENDIZAJE: Resolución de triángulos
ACTIVIDADES: Identificación de ángulos y clasificación de triángulos

1. Objetivos

- Clasificar ángulos según su amplitud.
- Clasificar triángulos en términos de sus ángulos.

2. Conceptos preliminares

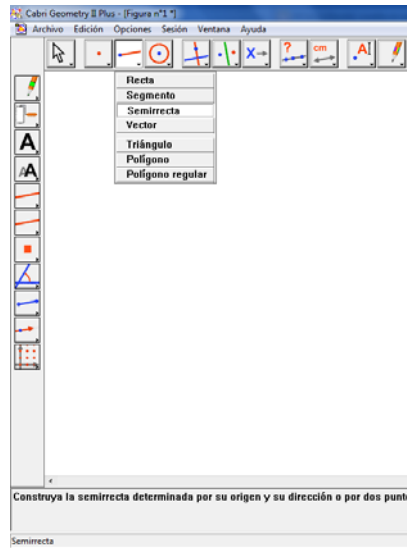
- Punto y recta.
- Segmento, rayo y ángulo.
- Ángulos: recto (90°), obtuso (mayor de 90°) y agudo (menor de 90°)
- Triángulos: Acutángulos, rectángulos, obtusos, isósceles, equiláteros y escalenos.

3. Actividades

3.1 Identificación de ángulos.

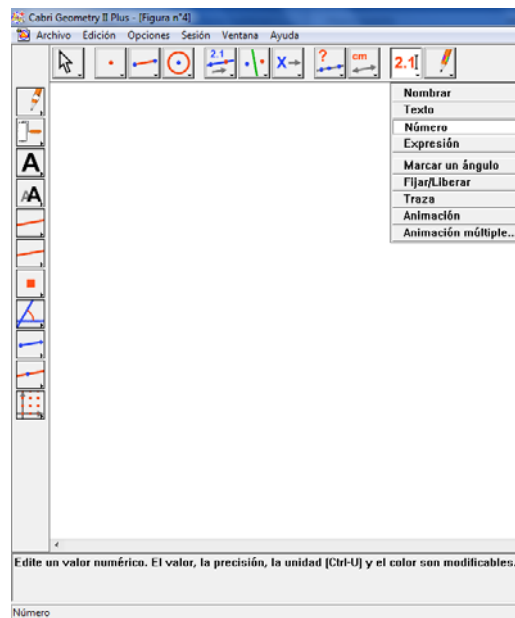
1. Trace una semirrecta. Elija la opción Semirrecta de Cabri. Ver Figura 3-1.

Figura 3-1:



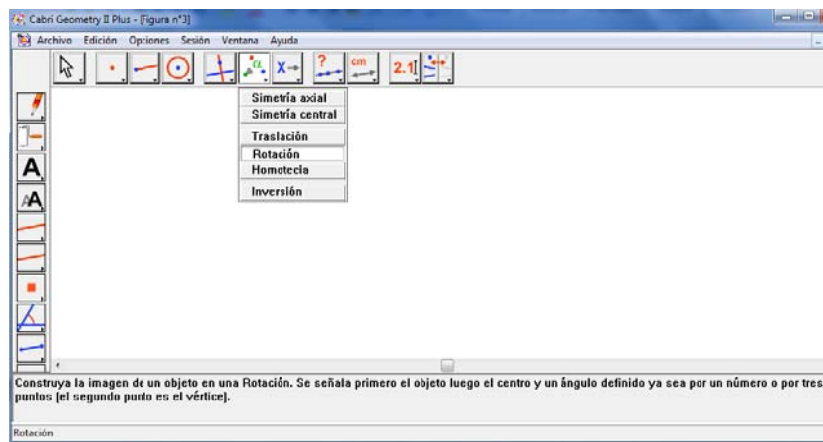
2. Escriba 90 con la herramienta Número de Cabri. Ver Figura 3-2.

Figura 3-2:



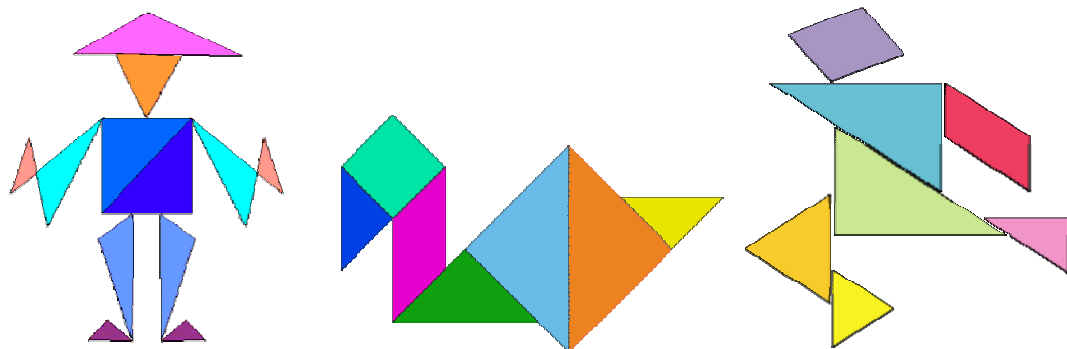
3. Rote la semirrecta como se explica en la parte inferior de la Figura 3-3. (Cabri asume la medida de ángulos en grados sexagesimales). ¿Qué clase de ángulo obtiene?

Figura 3-3:



4. ¿Qué ocurre si selecciona números mayores o menores que 90 grados? ¿Para qué valores obtiene ángulos agudos, obtusos y llano?
5. Repita el proceso anterior seleccionando un número negativo ¿Qué observa? Elabore sus conclusiones
6. Observe ahora la Figura 3-4 formada por diferentes clases de polígonos y señale en ella con rojo los ángulos agudos, con azul los ángulos rectos y con verde los ángulos obtusos.

Figura 3-4 4:

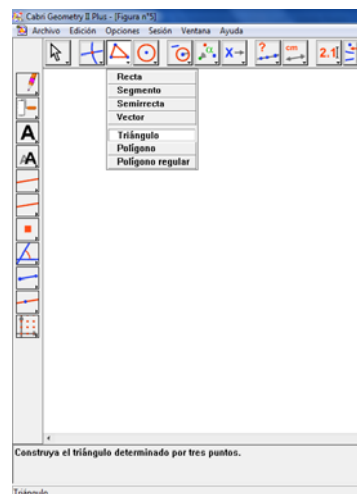


⁴ Tomado de <https://www.google.com.co/search?q=lm%C3%A1genes+de+tangram&hl=es&prmd=imvnsa&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=QQzpfUKCpJ5Cy8ATzulCwCw&ved=0CB0QsAQ&biw=1366&bih=644>

3.2 Los ángulos de un triángulo

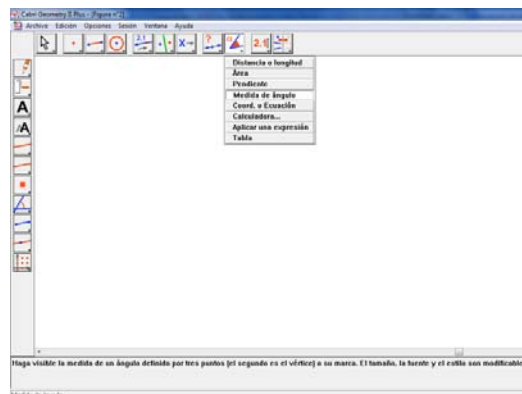
1. Dibuje un triángulo ABC con la herramienta Triángulo de Cabri. Utilice la herramienta Triángulo de Cabri. Ver Figura 3-5.

Figura 3-5:



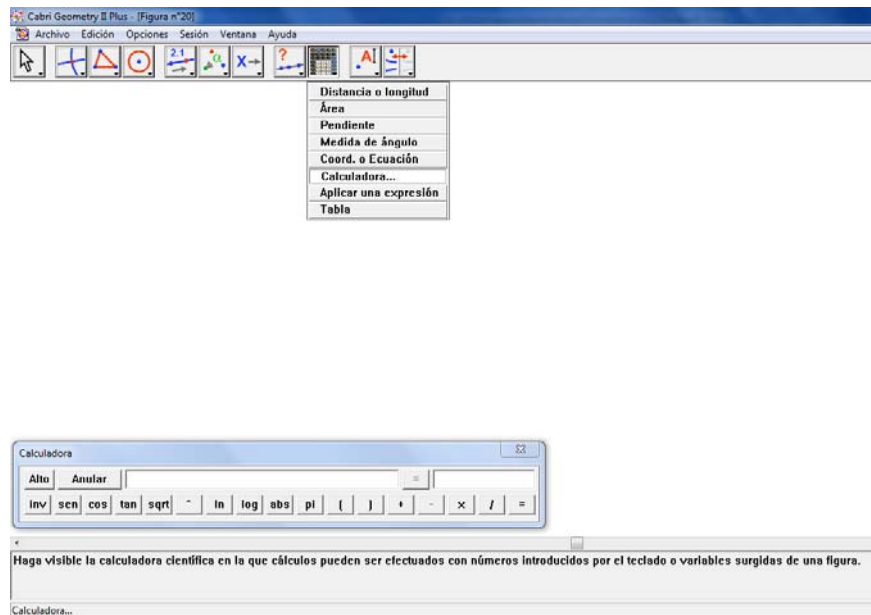
2. Mida con la herramienta de Cabri cada uno de los ángulos interiores del triángulo. Ver Figura 3-6.

Figura 3-6:



3. Determine la suma de los ángulos interiores del triángulo. Utilice la calculadora de Cabri. Ver Figura 3-7.

Figura 3-7:



4. Mueva cualquiera de los vértices del triángulo inicial ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos interiores del triángulo? ¿Cuál es en cada caso la suma de estas medidas?.

3.3 Construcción de triángulos

3.3.1 Dados dos lados y el ángulo que forman

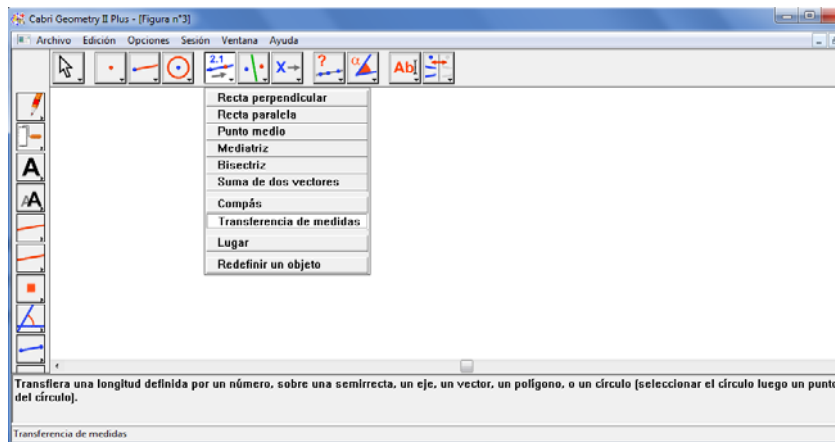
1. Trace una semirrecta cualquiera. Nombre la semirrecta l y su punto de origen O . Utilice la herramienta Nombrar de Cabri. Ver Figura 3-8.

Figura 3-8:



2. Rote la semirrecta l alrededor de O un ángulo de 40° . Nombre esta semirrecta m . El punto de origen O es un vértice del triángulo. Verifique con la herramienta de Cabri la Medida del ángulo.
3. Defina la longitud de dos lados del triángulo escribiendo los números 6 y 5, con la herramienta Número de Cabri.
4. A partir de O transfiera sobre l la longitud definida por el número 6, se determina así un nuevo punto A , el cual es el otro vértice del triángulo. Utilice Transferencia de medidas en Cabri. Ver Figura 3-9.

Figura 3-9:

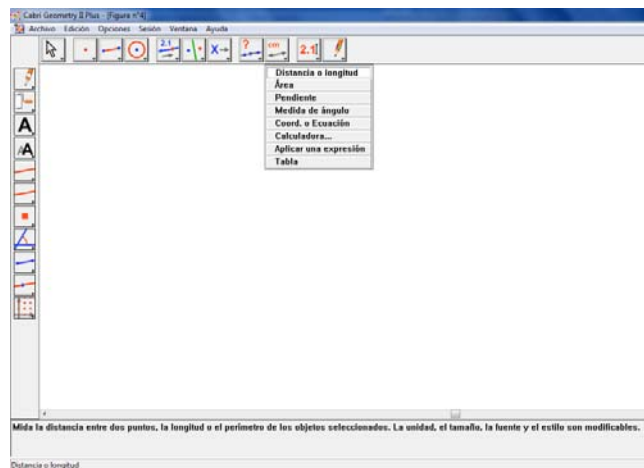


5. A partir de O transfiera sobre m la longitud definida por el número 5; obtiene así otro vértice del triángulo.

6. Construya el triángulo con la herramienta Triángulo de Cabri.

7. Verifique la longitud de cada lado del triángulo con Distancia o longitud en Cabri. Ver Figura 3-10.

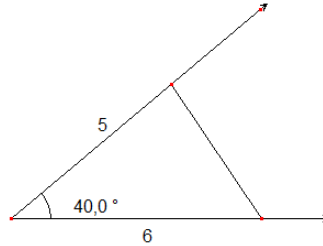
Figura 3-10



8. Observe la Figura 3-11. ¿Obtuvo una figura como esta? Compare y explique las diferencias que encuentra.

Figura 3-11

Primer lado = 6
Segundo lado = 5
Ángulo 40°



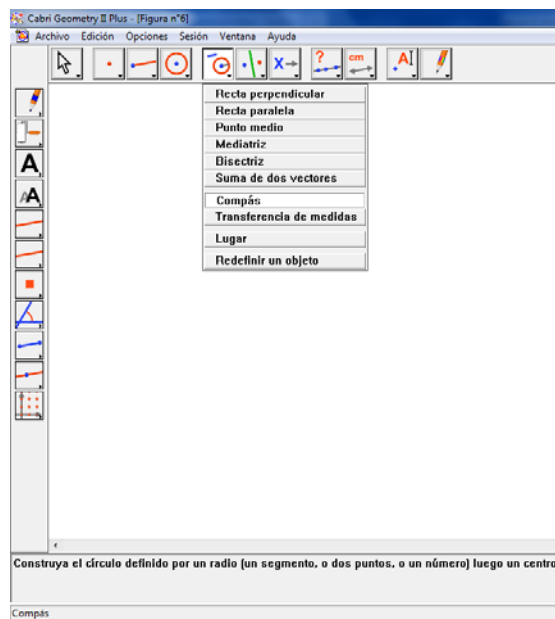
9. ¿Qué sucede con la medida del ángulo inicial si se modifican las medidas de dos lados del triángulo? ¿Alguno de los triángulos construidos es acutángulo, rectángulo u obtusángulo? ¿Qué sucede si la medida del ángulo es 180° y 360° ?

10. ¿Cambia la longitud de los lados cuando cambio la medida del ángulo? ¿Qué modificaciones debe realizar a la construcción anterior para determinar un triángulo equilátero, uno isósceles, uno escaleno, uno acutángulo, uno rectángulo y uno obtusángulo?

3.3.2 Dadas las medidas de los lados

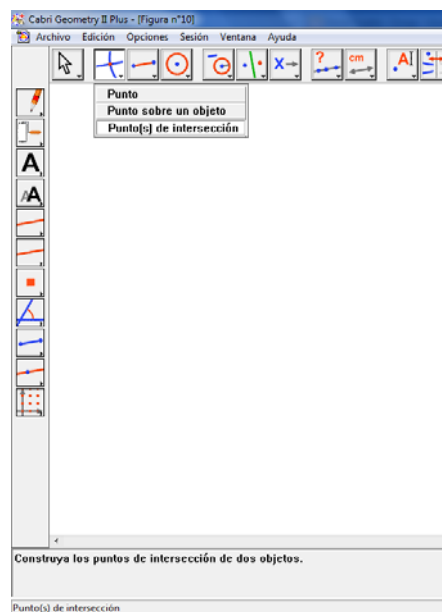
1. Defina la longitud de los tres lados escribiendo 4, 5 y 6 con la herramienta Número de Cabri.
2. Trace una semirrecta; nombre su punto de origen A
3. Construya un círculo definido por 4, con centro en A . Utilice la herramienta Compás de Cabri. Ver Figura 3-12.

Figura 3-12:



4. Nombre B el punto de intersección del círculo con la semirrecta. Utilice la herramienta Punto(s) de intersección de Cabri. Ver Figura 3-13.

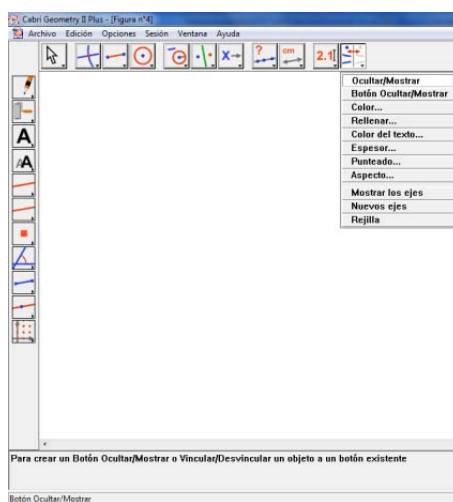
Figura 3-13



5. Construya un segundo círculo definido por 5, con centro en A

6. Construya un tercer círculo definido por $\odot B$, con centro en B
7. Señale el punto de intersección del segundo círculo con el tercero, nómbrelo C
8. Construya el triángulo ABC con la herramienta Triángulo de Cabri; verifique la longitud de cada lado. Oculte la información que no necesita visualizar. Utilice la herramienta Ocultar/Mostrar de Cabri. Ver Figura 3-14.

Figura 3-14:



9. Modifique las medidas de los lados, considere por ejemplo 3, 4 y 6, luego 3, 4 y 7. ¿Puede construir siempre el triángulo? ¿Qué condiciones deben satisfacer las medidas de los lados para que pueda construir el triángulo? Explique.
10. ¿Qué medidas debe seleccionar si quiere construir un triángulo rectángulo, uno escaleno, uno isósceles y uno equilátero?

3.3.3 Dado un lado y dos ángulos (lado común a los dos ángulos)

1. Para trazar el primer lado del triángulo, trace una semirrecta horizontal.
2. Escriba cada uno de los siguientes números 6, 35 y -45 utilizando la herramienta Número de Cabri.

-
3. Transfiera 6 a la semirrecta, de esta manera se determina sobre ella un segmento de 6 unidades de longitud. Nombre A y B los extremos del segmento.
 4. Rote la semirrecta alrededor del punto A 35 grados.
 5. Rote la semirrecta alrededor del punto B un ángulo de -45° (si la dirección del ángulo es en sentido de las manecillas del reloj es negativo)
 6. Construya el triángulo que se determina con los extremos del segmento y el punto de corte de las semirrectas que resultan de las rotaciones. Utilice la herramienta triángulo de Cabri.
 7. Mida los lados y los ángulos interiores de este triángulo. ¿Qué tipo de triángulo construyó? Modifique los valores de los ángulos. Usando este proceso ¿puede construir siempre un triángulo?
 8. Utilice diferentes triplas de valores para las medidas de los lados y construya con ellas triángulos oblicuángulos y rectángulos.

4. Conclusiones y recomendaciones

- La revisión y análisis de aspectos relacionados con el desarrollo histórico de la trigonometría podría enriquecer el trabajo del docente en el aula. En las fuentes históricas no solamente se encuentran aproximaciones didácticas a los conceptos que pueden ser más pertinentes para los estudiantes de la educación media sino que en ellas se identifican elementos que permiten mejorar la comprensión sobre la relación entre la geometría y la trigonometría.
- Es importante que los docentes de matemáticas revisen bibliografía actual relacionada con la didáctica de la trigonometría, en particular el fundamento teórico del modelo de Van Hiele puesto que está relacionado con el pensamiento y razonamiento geométrico y proporciona herramientas para diseñar actividades en Cabri para la enseñanza de los elementos básicos de la resolución de triángulos fortaleciendo de esta forma la estructura de pensamiento espacial y sistemas geométricos en los estudiantes de media.
- En la revisión bibliográfica se identificaron algunas estrategias para desarrollar con los estudiantes de media la resolución de triángulos pero tan sólo en unas pocas publicaciones se reporta el uso del programa Cabri para el tema particular de los Teoremas del Seno y del Coseno.
- Para implementar en el aula la propuesta didáctica que se plantea en este trabajo es indispensable que los estudiantes estén en capacidad de realizar

construcciones geométricas básicas, reconozcan, construyan y clasifiquen triángulos, diferencien y usen sus propiedades; interpreten y apliquen la relación de semejanza entre triángulos y conozcan teoría básica relacionada con la resolución de triángulos. Además se requiere que manejen las herramientas básicas del programa Cabri Geometry.

- Se sugiere a los docentes desarrollar sistemáticamente las guías de aprendizaje propuestas en este trabajo u otras similares, no solo en un período determinado sino a lo largo del año escolar puesto que se requiere familiarizar a los estudiantes con el programa Cabri e iniciar con instrucciones claras y sencillas e ir incrementando el nivel de complejidad de éstas.

COLEGIO INTEGRADO DE FONTIBÓN
GUIA DE APRENDIZAJE No 2
TEOREMA DE PITÁGORAS Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS
ASIGNATURA: TRIGONOMETRIA

UNIDAD DE APRENDIZAJE: Resolución de triángulos

ACTIVIDADES: Comprobación del teorema de Pitágoras y razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Objetivos

- Determinar las medidas de los lados y ángulos de un triángulo rectángulo
- Reconocer e interpretar la relación entre medidas de catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo (Teorema de Pitágoras).

2. Conceptos preliminares

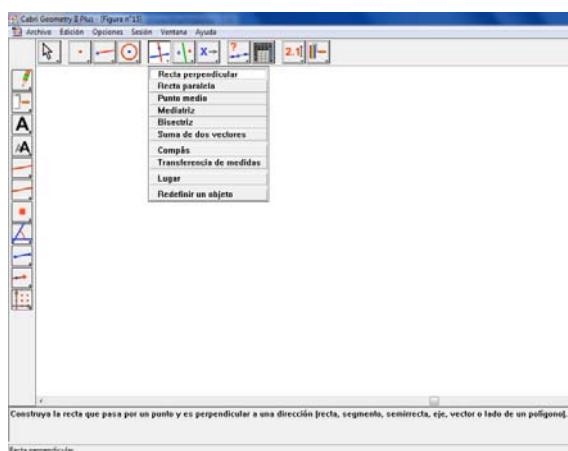
- Rectas perpendiculares y área

3. Actividades

3.1 Dibujar un triángulo rectángulo para modificarlo a partir de sus medidas.

1. Trace un segmento de longitud cualquiera
2. En uno de los extremos del segmento trace una recta perpendicular. Emplee Recta Perpendicular de Cabri, ver Figura 1.

Figura 1:



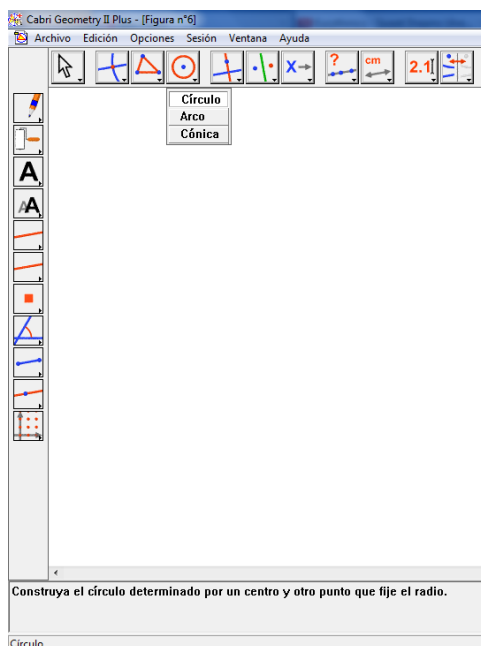
3. Sobre la recta perpendicular marque un punto cualquiera.
4. Trace el triángulo con la herramienta triángulo de Cabri.
5. ¿Qué clase de triángulo obtiene?
6. Mida los lados del triángulo; compruebe que al modificar las medidas de los catetos, el triángulo continúa siendo rectángulo. ¿Por qué?.

3.2 Construcción de cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Para dibujar cada cuadrado proceda de la siguiente manera:

1. Trace perpendiculares al lado por cada uno de sus extremos
2. Construya círculos, de radio la longitud del lado y centro en cada extremo. Utilice Círculo de Cabri. Ver Figura 2.

Figura 2:

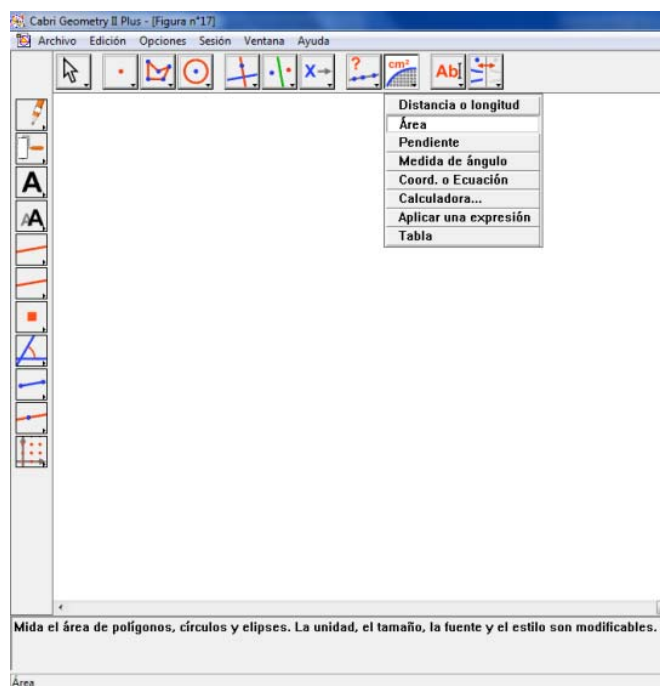


3. Señale las intersecciones de cada círculo con la perpendicular. Con los extremos y las dos intersecciones, se determina el cuadrado, dibújelo.

4. Oculte los elementos que no necesita visualizar. Compruebe que con esta construcción se determinan cuadrados sobre los tres lados del triángulo.

5. Halle el área de cada cuadrado. Utilice la opción Área de Cabri. Ver Figura 3.

Figura 3:



6. ¿Es posible establecer alguna relación entre las áreas de los tres cuadrados construidos? Si es así, ¿Cómo se puede expresar esta relación?, ¿Se conserva esta relación cuando se modifican las medidas de los lados del triángulo? ¿Es válida esta conclusión si el triángulo no es rectángulo?

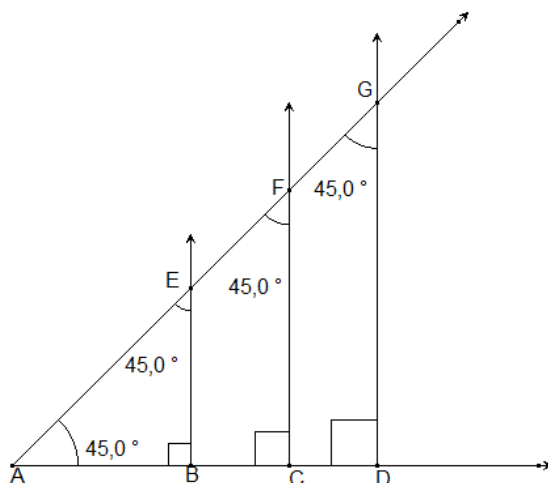
3.3 Razones trigonométricas

1. En Cabri construya un ángulo de 45° cuyos lados sean \overline{AB} y \overline{AE} . De tal forma que \overline{BE} sea perpendicular a \overline{AB} .

2. Trace \overline{CF} y \overline{DG} perpendiculares a \overline{AB} y que cortan a \overline{AE} .

3. Marque los ángulos de 90° , mida los otros ángulos y nombre cada uno de los vértices como muestra la Figura 4.

Figura 4:



4. Sea el $\triangle ABE$, rectángulo en B y sean \overline{AB} , \overline{BE} y \overline{AE} sus lados, determine la longitud de cada uno de ellos.

5. Calcule los siguientes cocientes: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}$, $\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AG}}$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}$ y $\frac{\overline{AD}}{\overline{DG}}$. ¿Qué resultados obtiene? ¿Qué puede concluir de estos resultados?

6. Utilice la calculadora para hallar Sen , Cos y Tg del ángulo de 45° . ¿Existe alguna relación entre los cocientes hallados y las razones trigonométricas calculadas anteriormente en el $\triangle ABE$, $\triangle ACF$ y el $\triangle ADG$?

7. Varíe la medida del ángulo A y calcule los 6 cocientes antes mencionados entre los lados de cada uno de los triángulos $\triangle ABE$, $\triangle ACF$ y el $\triangle ADG$.

8. Calcule las seis razones trigonométricas para cada uno de los triángulos anteriormente mencionados. ¿Existe alguna relación entre los cocientes hallados y las razones trigonométricas calculadas anteriormente en el $\triangle ABE$, $\triangle ACF$ y el $\triangle ADG$?

9. Redacte sus conclusiones.

COLEGIO INTEGRADO DE FONTIBÓN
GUIA DE APRENDIZAJE No 3
TEOREMA DEL SENO Y DEL COSENO
ASIGNATURA: TRIGONOMETRIA
UNIDAD DE APRENDIZAJE: Resolución de triángulos
ACTIVIDADES: Comprobación del Teorema del Seno y del Coseno

1. Objetivos

- Diferenciar los criterios para aplicar el Teorema del Seno y del Coseno en el momento de resolver triángulos.
- Determinar las medidas de los lados y ángulos de cualquier triángulo.

2. Conceptos preliminares

- Construcciones geométricas de círculos, cuerdas y rectas
- Razones

3. Actividades

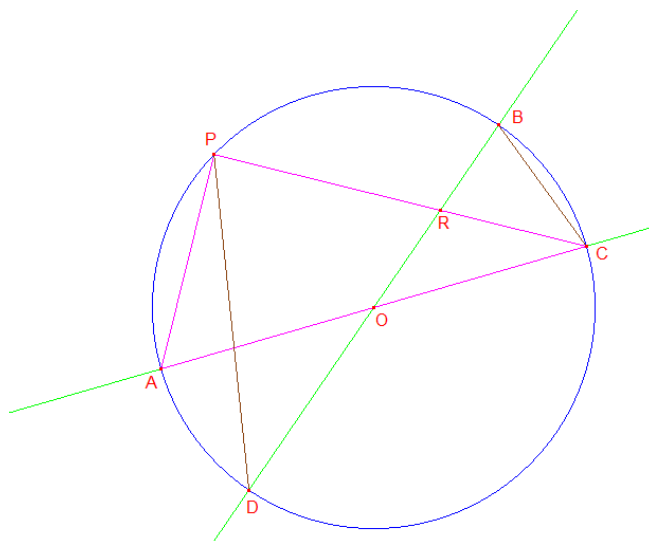
3.1 Teorema del Coseno

1. Dibuje en Cabri un círculo y nombre su centro O .
2. Trace una recta que pase por O y determine los puntos de intersección con el círculo, nómbralos A y C , respectivamente.
3. Trace una cuerda que pase por A , nombre con P su otro extremo.
4. Construya el triángulo con la herramienta de Cabri $\triangle APC$.
5. Determine la medida del ángulo $\angle APC$.
6. Desplace el punto P . ¿Qué ocurre con el triángulo?
7. Trace ahora una recta que pase por O e intercepte a \overline{PC} en R . Nombre los puntos de intersección de la recta con el círculo B y D .
8. Determine PR , RC , BR y RD .

9. Calcule $PR \cdot RC$ y $BR \cdot RD$ ¿Qué observa?

10. Trace los segmentos \overline{PD} y \overline{BC} . Ver Figura 20

Figura 1:



11. Verifique que

$$\cos C = \frac{\overline{PC}}{\overline{AC}}$$

$$\overline{OR}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{RC}^2 - 2\overline{OC} \cdot \overline{RC} \cos C$$

3.2 Teorema del Seno

1. Trace con Compás el círculo con centro en un punto cualquiera C y radio 6; el círculo con centro en C y radio 4;

2. Dibuje un radio para cada círculo de tal forma que no estén contenidos en una misma recta.

3. Dibuje el triángulo $\triangle ACB$ que tiene como lados los radios de los círculos.

4. Mida el ángulo $\angle CAB$

5. Desplace el punto B de tal forma que el ángulo A sea de 40° . De esta forma se tiene la medida de dos lados y un ángulo.

6. Determine las medidas del lado c y de los ángulos B y C .

7. Verifique que:

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } A} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } B}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } B} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } C}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } A} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } C}$$

8. Si las medidas de los dos lados iniciales o del ángulo inicial se modifican ¿es posible aplicar el Teorema del seno?

Bibliografía

- [1] Boyer, Carl B. Historia de la Matemática, España, Alianza Editorial, 2006.
- [2] Collette, Jean P. Historia de la matemáticas I, México, Siglo veintiuno editores,2002.
- [3] Hoffmann, D. Bradley, G. y Rosen, K. Cálculo aplicado, México, Mc Graw Hill,2007.
- [4] Ministerio de Educación Nacional. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. 2006.
- [5] Ministerio de Educación Nacional. Nuevas Tecnologías y currículo de matemáticas. 1999.
- [6] Ministerio de Educación Nacional. Orientaciones curriculares para el campo del Pensamiento matemático. 2007.
- [7] Ministerio de Educación Nacional. Matemáticas Lineamientos Curriculares. 1998.
- [8] Morris Kline. El Pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días, Madrid, Alianza Editorial,2002.
- [9] Munem, M.A y Yizze J.P. Precalculus. España, Editorial Reverté, 1982.
- [10] Nelsen, Roger B. Proofs Without Words-Exercises in Visual Thinking, The Mathematical Association of America, 1993.
- [11] Stewart, J.Redlin, L y Watson, S. Precálculo, México, Cengage Learning,2009.
- [12] Sullivan Michael. Precálculo, México, Prentice Hall,1997.
- [13] Valiente, B. Santiago y Rubio, R. Santiago. Trigonometría, México, Editorial Limusa, 2007.
- [14] López, S. Nahum."El empleo del software Cabri-Geometre II en la enseñanza de la Geometría en la Universidad Autónoma de Guerrero, México". (En línea). (enero de 2006) disponible en:
<http://www.bibliociencias.cu/gsd/collect/tesis/index/assoc/HASHc77d.dir/doc.pdf>.
- [15] Padial, Juan Francisco y Rosado, E."Taller de construcciones clásicas de Geometría con Cabri Geometre". (En línea). (11 noviembre de 2008) disponible en:

(http://dma.aq.upm.es/actividades/2008_taller_construcciones_clasicas_de_geoemtria/Cuaderno_TallerConstruccionesClasicasGeoemtria.pdf).