Modelamiento Estocástico de Neuronas Biológicas usando Procesos Puntuales

Wilson Andrés Sarmiento Lozano
Matemático,
Código: 1024479353

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Estadística
Bogotá, D.C.
Junio de 2017

Modelamiento Estocástico de Neuronas Biológicas usando Procesos Puntuales

Wilson Andrés Sarmiento Lozano
Matemático,
Código: 1024479353

Tesis presentada para optar al título de
Magister en Ciencias-Estadística

Director
Viswanathan Arunachalam, Ph.D.
Doctor en Matemáticas

Línea de investigación
Procesos Estocásticos

Grupo de investigación
Procesos Estocásticos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Estadística
Bogotá, D.C.
Junio de 2017

Título en español

Modelamiento Estocástico de Neuronas Biológicas usando Procesos Puntuales

Title in English

Stochastic Modeling of Biological Neurons using Punctual Processes

Resumen: En la actualidad están siendo diseñados modelos para redes de neuronas con el objetivo de entender el funcionamiento del cerebro. En la tesis se usa el modelo para una neurona desarrollado por Vidibyda y Arunachalam, esta idea es utilizada en una red de neuronas llamada circuito WTA. Se deducen las propiedades del modelo combinado. Se desarrollan fórmulas para modelos con retroacción instantánea y sin ella. Por último, Se insertan los valores esperados de disparos del circuito en el modelo de Reloj de Arena (Cottrell, 1994) de manera computacional y se comparan los resultados con el análisis hecho por Hesam (2015) para este tipo de circuitos.

Abstract: Models for many neurons connected are required nowadays in order to model the brain. Here, it is used the simple model to one neuron by Vidibyda and Arunachalam and its idea is introduced in the neural network called WTA network and the properties of the new composed model are analyzed. It is assumed both, with instantaneous feedback and without feedback, so equations for each case will be shown. Finally, the firing expect times of the networks are inserted in the hourglass model (made by Cottrell in 1994) computationally and the results are compared with the rhythmic inhibition simulation analysis for neural networks made by Hesham et al.

Palabras clave: Proceso de renovación, Spike, circuito WTA, Excitación e inhibición de neuronas.

Keywords: Renewal Process, Spike, WTA circuit, Excitation and inhibition neurons

Dedicatoria

Agradezco a mi madre Clara Lozano por su apoyo incondicional.

Agradecimientos

Primeramente, al mi Director de tesis Viswanathan Arunachalam por su confianza y a los Jurados Liliana Blanco y Johana Garzón por sus correcciones y recomendaciones.

Agradezco a los miembros de la Facultad de medicina por su disposición a ayudarme en lo referente a los conocimientos en neurociencia y contestar a todas mis preguntas, entre ellos al Doctor en Neurociencias Francisco Alejandro Múnera Galarza, a la Doctora en Ciencias Biomédicas María José Contreras y al Magister en Neurociencias Jonathan Muñoz.

También agradezco a la universidad Nacional por su apoyo con la Beca de Asistente docente y por todas las ayudas que tienen para los estudiantes y su buen desempeño.

Índice general

Índice general **I**

Índice de figuras **III**

Introducción **IV**

1. Algunos Conceptos y Teoremas de Procesos Estocásticos **1**

1.1. Cadenas de Markov 1

1.2. Procesos Puntuales 3

1.2.1. Procesos de Poisson 4

1.2.2. Propiedades de la distribución exponencial 4

1.3. Procesos de renovación 6

2. Redes neuronales biológicas y modelos existentes **10**

2.1. La neurona 10

2.1.1. Redes Neuronales Biológicas 12

2.2. Modelo de neuronas conectadas (Binding Neuron Model) 13

2.3. Modelos compuestos por circuitos WTA 15

2.4. Modelo de reloj de Arena 17

3. Modelos para circuitos WTA con Neuronas conectadas **23**

3.1. Modelo de Neuronas Conectadas (sin retroacción instantánea) 23

3.2. Modelo con dos neuronas. 29

3.2.1. Esperanza de disparos clasificados como 1 o 2. 34

3.3. Resultados de simulaciones 38

Conclusiones **42**

Bibliografía **43**

Índice de figuras

2.1. Neurona idealizada. 11

2.2. Forma clásica de una acción potencial o spike. Tomada de [4] página 6 11

2.3. Organización posible de una red (forma anticipativa). Tomado de http://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/neural-networks/Architecture/feedforward.html 12

2.4. Organización posible de una red (forma recurrente). Tomado de http://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/neural-networks/Architecture/competitive.html 12

2.5. Estructura básica de una red WTA 17

2.6. Modelo de Reloj de Arena para una neurona. Tomada de [3] 19

2.7. Posible comportamiento de $X(t)$ para una neurona particular con el Modelo de Reloj de Arena. Tomada de [3] 20

2.8. Resultados de simulaciones, casos convergentes y divergentes. Tomada de [3] 21

2.9. Simulación sólo con pesos de inhibición y aumentando pesos de inhibición [3] 21

2.10. Número de olores (estímulos externos) por mapa [3]. M representa la cantidad de mapas diferentes que se formaron 22

3.1. Estructura modificada de una red WTA que guarda las mismas características básicas de la red original. 29

3.2. Gráfico general de la red a simular, tomado directamente de [7] 38

3.3. Red de neuronas a simular, explicación de cómo están conectadas las neuronas (sólo ceros superiores) 39

3.4. Tiempo que tarda la red emitiendo cada palabra (cada palabra está numerada del 1 al 64, siendo 64 el mismo 0) 40

3.5. Tiempo de estadía en cada estado, en el eje x el número de condiciones violadas 41

3.6. Tiempo de estadía en cada estado (normalizado), gráfico sacado directamente del artículo [7] 41

Introducción

Modelar el comportamiento de las neuronas es una pieza clave para entender el cerebro y cómo pensamos. Muchos modelos han sido creados para intentar imitar el comportamiento de las neuronas biológicas. El modelo más famoso que describe los cambios en el voltaje de la neurona es el dado por Alan Lloyd Hodgkin y Andrew Huxley en 1952 [5], ganadores del premio Nobel en 1963, por este modelo que involucra ecuaciones diferenciales cuya solución sólo puede llevarse a cabo por métodos numéricos. A pesar de que posteriormente se realizaron otros trabajos que modificaban dicho modelo (por ejemplo el modelo de FitzHugh-Nagumo o modelo de Morris-Lecar), ninguno de éstos tiene en cuenta la distribución de la llegada de los estímulos externos. Tratando de dar soluciones numéricas a estos modelos, Vidybida presentó el Modelo de Neuronas Conectadas con Retroacción Instantánea (MNCRI) [11, 12, 13, 14] (más conocido en inglés como Binding Neuron Model with Instantaneous Feedback) que tiene una sencilla forma de explicarse en comparación con otros que tienen en cuenta cambios físico-químicos de la neurona. En este modelo se asume que las llegadas de impulsos a la neurona es un proceso de Poisson, innovando en la inclusión de la función de densidad del tiempo entre llegadas de estímulos a la neurona, como principal componente de un modelo de neuronas. También se asume que cada impulso se acumula en la memoria sólo por un tiempo determinado τ constante y cuando en la memoria se acumulan N impulsos, la neurona dispara un spike (se usa la palabra en inglés) y la memoria queda en cero (se le llama 'con retroacción instantánea' si en la memoria queda 1 impulso guardado en vez de cero). En sus trabajos, Vidybida obtuvo algunos resultados para la distribución de probabilidad del tiempo entre spikes que lanza la neurona cuando $N = 2$ y cuando $N = 3$ (manteniendo la suposición de tiempos entre llegadas de impulsos distribuidos de manera exponencial) [11, 12]. Teniendo en cuenta determinadas características biológicas, Arunachalam et al. [1] generalizan el modelo haciendo de τ una variable aleatoria y considerando las llegadas de impulsos como un proceso de renovación en vez de simplemente como un proceso de Poisson.

En su trabajo, Arunachalam et al. [1] también consideran un modelo para una red llamado Modelo de Reloj de Arena (Hourglass Model) propuesto por Cottrell en [3]. En [1] se deduce el tiempo esperado de disparo de una neurona con el Modelo de Neuronas Conectadas modificado y luego este tiempo se inserta como una de las variables libres que usa el Modelo de Reloj de Arena. Las simulaciones en este punto se hacen inevitables, pues hay demasiadas conexiones y neuronas (se han simulado grupos de 100 neuronas). De ahí, en [3], las conclusiones más importantes son resultados de simulaciones en las que se pueden ver algunos comportamientos específicos de red, que en la teoría, aún no se han

podido predecir.

En vez de pasar a una red que puede tener más de 10 neuronas como en el Reloj de Arena y depender de simulaciones para ver los efectos del nuevo modelo, lo que se hizo en esta tesis fue usar un circuito WTA (siglas de Winner Takes All, en español, "El ganador toma todo"[7] y [8], una forma especial en la que se pueden organizar las redes, ver sección 2.3) que en muchas aplicaciones se consideran independientes de otros circuitos WTA, y caracterizar la respuestas de la red (respuestas que se dan en forma de disparos o spikes de salida), tanto en frecuencia, como en tipo de disparo (clasificados más delante como 1 o 2), con herramientas dadas por los procesos puntuales, siguiendo la misma línea del Modelo de Neuronas Conectadas con Retroacción.

Los circuitos WTA consisten de un grupo de k neuronas que están conectadas de tal forma que $k-1$ neuronas, rotuladas con los números del 1 al $k-1$, compiten entre ellas disparando impulsos eléctricos, de tal forma que si la neurona 'j' dispara más que las demás, el circuito proyecta al exterior un mensaje al que se le llamará 'j', correspondiendo al nombre de la neurona. La idea es que, cuando ha transcurrido mucho tiempo, las neuronas ganadoras sean las mismas y el circuito proyecte estados 'j' con una probabilidad establecida. Si se combinan varios circuitos WTA en una red, esta red en cada momento emitirá un mensaje compuesto por las letras que proyecta cada circuito WTA involucrado (ver sección 2.1.1).

Los circuitos WTA son utilizados para modelar circuitos córticos locales [7] (circuitos de neuronas en la corteza cerebral) y para el desarrollo de neuronas electrónicas neuromorficas [8] (neuronas artificiales que buscan imitar el comportamiento de las reales). Conscientes de la utilidad de los circuitos WTA para tomar decisiones en microcircuitos córticos, Oster, Douglas y Liu [8] empezaron el trabajo de encontrar medias y distribuciones de probabilidad para un circuito simple, teniendo en cuenta que las llegadas de estímulos al circuito se distribuyen Poisson. Se presenta en su trabajo algunas expresiones para la probabilidad de que una determinada neurona sea la n-ésima en disparar en un circuito de tres neuronas. En contraste con lo hecho en [1], el enfoque en [8] no es tomar un umbral de número de impulsos ahorrados para que la neurona dispare, sino un umbral de voltaje que la neurona debe alcanzar para disparar, como en la mayoría de modelos biológicos. Otra diferencia es que en [8] el voltaje se mantiene constante hasta que llega un nuevo impulso, mientras que en el Modelo de Neuronas Conectadas después de un tiempo se van borrando los impulsos.

En el capítulo 1, se encuentran algunos conceptos y teoremas que se usan en el desarrollo del trabajo, como por ejemplo, los conceptos de proceso de renovación, convolución, transformada de Laplace y sus propiedades. En el capítulo 2, se incluye información sobre las neuronas, su funcionamiento y la forma en la que están organizadas. Además, se describen de manera general los modelos neuronales básicos en los que se trabaja en el capítulo posterior (También se nombran algunos modelos neuronales famosos, en los que se inspiraron los modelos básicos mencionados). En el capítulo 3, se deducen expresiones para la distribución de los disparos de salida de un circuito WTA y para algunas características estadísticas básicas relacionadas con esta distribución. Adicionalmente, se combinan los resultados con el modelo de Reloj de Arena, de forma similar a como lo

hace [1] con el modelo básico neuronas conectadas con retroacción instantánea.

CAPÍTULO 1

Algunos Conceptos y Teoremas de Procesos Estocásticos

En este capítulo se presentan conceptos y teoremas de la teoría de probabilidad y de los procesos estocásticos que son la base de los modelos finales para la red de neuronas a tratar. En la primera sección se hace una breve descripción de una cadena de Markov en tiempo discreto, prestando especial atención a la clasificación de estados y al teorema de existencia de distribuciones estacionarias. En la segunda sección se definen los procesos puntuales en general sin dar muchos detalles. En la última sección se revisan teoremas de la teoría de renovación que son casos particulares de procesos puntuales y que se usan en algunas deducciones posteriores.

1.1. Cadenas de Markov

Considérese como ejemplo en esta sección, un conjunto finito de neuronas numeradas y alineadas (red en línea recta) e imaginemos que por esta red pasa un mensaje de neurona en neurona. En el turno 1 el mensaje estaría en la neurona 1, en el turno 2 el mensaje estará en la neurona 2, y así sucesivamente, hasta llegar a la n-ésima neurona y empieza un nuevo mensaje a fluir por la red, de tal forma que en el turno $n+1$ el nuevo mensaje está en la neurona 1. Estamos interesados en el numeral de la neurona que lleva el mensaje en el turno k. En cada turno, estamos considerando un número de 1 hasta n (número de neuronas) y los turnos son números enteros de uno en adelante. Al conjunto de 1 hasta n se le llama conjunto de estados por los que transita el proceso y se quiere calcular la probabilidad de estar en el estado i en el turno k. Una cadena de Markov es uno de estos procesos, pero con la característica importante de que lo que pasa en el turno k depende solamente de lo que pasó en el turno inmediatamente anterior. De [2] se define formalmente una cadena de Markov:

Definición 1. *Una sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados discreto es llamada una cadena de Markov en tiempo discreto si satisface la condición:*

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ *y para todos* $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$ *con*

$$P(X_n = i) > 0.$$

En el ejemplo con el que se arrancó en la sección, la neurona en la que vamos a estar en el siguiente turno, depende únicamente de saber en qué neurona estamos en el presente turno, por lo cual, nuestro proceso es obviamente una cadena de Markov en tiempo discreto. A pesar de que en el ejemplo la probabilidad de pasar al estado siguiente es 1, esto no necesariamente es así siempre, puede que en otro escenario, estemos en la siguiente neurona con una probabilidad de 0.5 o en la anterior con una probabilidad de 0.5. Por lo tanto, es natural que podamos encontrar probabilidades de pasar de un estado a cualquier otro estado dado.

Definición 2. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una cadena de Markov. La probabilidad*

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

(si está definida) es llamada probabilidad de transición del estado i *al estado* j*. También se define* $\pi_i := P(X_0 = i)$ *(distribución inicial).*

La notación $p_{ij}^{(n)}$, hace referencia a la probabilidad de pasar del estado i al estado j en n pasos. Con todo lo anterior establecido, se procede a clasificar los estados de la cadena para lo cual es útil la siguiente definición:

Definición 3. *[2] El periodo de un estado* i *está definido por*

$$\lambda_i = MCD\left\{n \geq 1, n \in \mathbb{Z} : p_{ii}^{(n)} > 0\right\}.$$

Si $p_{ii}^{(n)} = 0$ *para todo* $n \geq 1$*, se dice que el periodo es cero.*

Un estado de la cadena de Markov i es aperiódico cuando $\lambda_i = 1$, esto es, cuando la probabilidad de volver a i en cualquier turno arrancando en i, es mayor que cero. Adicionalmente, a una cadena de Markov con todos sus estados aperiódicos se le llama una cadena de Markov aperiódica. Continuando con la clasificación: Un estado j se dice recurrente si estando en j, la probabilidad de volver a j es 1; si tal probabilidad es menor que 1, se dice que el estado es trascendente [10]. En el ejemplo de la red lineal de neuronas (con el que arrancamos la sección), se tiene que el periodo de cada estado es n, ya que con probabilidad 1 el mensaje vuelve a cada estado en los n pasos siguientes, pero no antes, y también se tiene que todos los estados son recurrentes.

Si el estado i es recurrente, cabe la posibilidad de que la cadena cada vez se demore más en volver a un estado particular. De ahí, se dice que el estado i es positivo recurrente si, iniciando en i, el tiempo esperado hasta que el proceso retorne a i, es positivo. Los estados que son aperiódicos y positivo recurrentes son llamados estados ergódicos ([2], [10]).

Ahora se enunciará un teorema bastante conocido y de gran importancia para hacer aplicaciones.

Teorema 1. *[10]*

Para una cadena de Markov ergódica e irreducible se tiene que el siguiente límite existe y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_i$$

Además $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ *y* $\pi_i = \sum_{j=1}^n \pi_j p_{ji}$.

Es notoria la importancia de este teorema, ya que en la práctica se tienen muchas probabilidades condicionales que resultan conocidas de manera natural, pero no se tiene las probabilidades de los eventos sin condicionar, lo cual, es lo que se necesita en muchos casos.

Dadas ya las propiedades de las cadenas de Markov útiles en el desarrollo del trabajo, se procede a revisar las propiedades de los procesos puntuales.

1.2. Procesos Puntuales

El proceso puntual es una generalización de lo que conocemos como proceso de renovación, que a su vez, generaliza al proceso de Poisson. Estos procesos son útiles para describir comportamientos en diferentes escenarios como tiempos de arribos, tiempos de falla y reparación de máquinas, eventos naturales como catástrofes y muchos otros eventos en física, biología y economía.

Para empezar tenemos eventos o puntos esparcidos en el conjunto $[0,\infty)$ (en general están esparcidos en un subconjunto de $\mathbb{R}$ [9] pero sólo se hará mención a este caso más simple) y se define una función que cuenta el número de eventos en un subconjunto acotado A de $[0,\infty)$.

Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ los puntos (llamados también elementos aleatorios) que están en $[0,\infty)$, se define la medida:

$$\epsilon_{X_n}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n \in A \\ 0 & \text{si } X_n \notin A \end{cases}$$

y por lo tanto, la función que cuenta el número de puntos en A queda definida por

$$N(A) = \sum_n \epsilon_{X_n}(A)$$

Como los X_n son aleatorios, está función también queda aleatoriamente determinada. A N así definida, se le llama proceso de conteo.

Un requerimiento que generalmente se pone para un proceso de conteo es que para los conjuntos acotados siempre el número de puntos en ellos sea finito, esto es,

$$P(N(A) < \infty) = 1$$

Esta condición se cumple en particular para procesos de renovación, los cuales serán definidos en la siguiente sección. Ahora nos limitaremos a dar la definición de procesos de Poisson, un ejemplo muy particular de procesos puntuales que muchos autores como Alexander Vidybida trabajan en sus artículos ([11],[12]) como modelo base para los modelos que él trabaja.

1.2.1. Procesos de Poisson

La siguiente definición es tomada de [9]

Definición 4. *Sea N un proceso puntual sobre el conjunto $[0,\infty)$. Sea $\mathcal{E}$ una σ-álgebra sobre $[0,\infty)$ (puede ser $\mathfrak{B}([0,\infty))$, sigma álgebra de Borel sobre $[0,\infty)$), entonces N es un proceso de Poisson con media μ si*

1. *Para $A \in \mathcal{E}$*
$$P(N(A)=k) = \begin{cases} \frac{e^{-\mu(A)}(\mu(A))^k}{k!}, & si\ \mu(A) < \infty \\ 0 & si\ \mu(A) = \infty. \end{cases}$$
2. *Si $A_1, ..., A_k$ son subconjuntos disjuntos de $[0,\infty)$ en $\mathcal{E}$, entonces, $N(A_1), ..., N(A_k)$ son variables aleatorias independientes.*

La segunda propiedad también es conocida como la propiedad de *incrementos independientes*, además cuando la media vista como una función del tiempo (o largo del intervalo) es un múltiplo de la medida de Lebesgue, el proceso se llama *homogéneo*. De esta manera, para un proceso de Poisson homogéneo, $\mu(A) = \alpha\,|A|$, donde $|A|$ es la medida de Lebesgue y la constante α es llamada intensidad o parámetro del proceso de Poisson.

Muchos autores buscan modelar situaciones en sus campos de estudio por medio de Procesos de Poisson por las propiedades especiales que tiene la distribución de Poisson que facilita realizar cálculos y llegar a fórmulas que con otras distribuciones no se pueden deducir de ninguna forma. Dos propiedades muy útiles, por ejemplo, son las siguientes; si se tienen n procesos de Poisson N_i independientes, la suma de ellos es un nuevo proceso de Poisson; y todo proceso de Poisson puede ser descompuesto en procesos de Poisson con intensidades más pequeñas que al sumarlas dan la intensidad del primer proceso.

Una de las propiedades más conocidas es que si N es un proceso de Poisson, entonces los tiempos transcurridos entre ocurrencias sucesivas de eventos del proceso, son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución exponencial. Esta es una propiedad que muestra la fuerte conexión entre la distribución Poisson y la distribución exponencial. Para otras distribuciones encontrar tal relación resulta más difícil de deducir.

1.2.2. Propiedades de la distribución exponencial

Algunas propiedades de interés de la distribución exponencial en esta tesis se mostrarán a continuación. La distribución exponencial es la única que cumple con la propiedad de pérdida de memoria, esto es, si T se distribuye exponencial con parámetro λ entonces:

$$P(T > t + s \mid T > t) = P(T > s).$$

Esta propiedad es la esencia de las cadenas de Markov en tiempo continuo, ya que en ellas se asume que la probabilidad de lo que pase en un momento dado sólo depende de lo que pase en un tiempo anterior del que tengamos información y no de tiempos anteriores a éste. Cuando se definen las cadenas de Markov en tiempo continuo, se puede deducir que la propiedad de pérdida de memoria se tiene que cumplir para las variables en la cadena continua, pero como la única distribución que cumple esta propiedad es la distribución exponencial, se concluye que en las cadenas de Markov en tiempo continuo siempre se trabaja con distribuciones exponenciales (ver [10] sección 6.2).

Por otra parte se tiene que si T_1 y T_2 son variables aleatorias independientes que se distribuyen de manera exponencial con parámetros λ_1 y λ_2 entonces la variable aleatoria $T = \text{mín}(T_1, T_2)$ también se distribuye exponencial con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$. Efectivamente

$$P(T > t) = P(T_1 > t, T_2 > t) = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

Además, la probabilidad de que T_1 sea menor que T_2 es

$$P(T_1 < T_2) = \int_0^\infty \int_{t_1}^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} dt_2 dt_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

No siempre las variables aleatorias se distribuyen exponencial en las aplicaciones. Pensando en esto, se trabajará en general con procesos de renovación (presentados en la siguiente sección) que no asumen ninguna distribución previa para los tiempos transcurridos entre ocurrencias sucesivas. En la siguiente proposición (tomada de [2]), se deja indicada una expresión para hallar las distribuciones del mínimo y del máximo de dos variables aleatorias o más.

Proposición 1. *Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes y sean $Y = \text{máx}(X_1, X_2, ..., X_n)$ y $Z = \text{mín}(X_1, X_2, ..., X_n)$ entonces sus distribuciones de probabilidad quedan expresadas como*

$$F_Y(y) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(y)$$

para Y, y para Z

$$F_Z(z) = 1 - \prod_{k=1}^{n} [1 - F_{X_k}(y)]$$

en donde $F_{X_k}(\cdot)$ es la distribución de la variable aleatoria X_k.

La variable aleatoria *mínimo* será usada en repetidas ocasiones en el capítulo 3. Con esto ya se empieza a pensar en trabajar con procesos que usen otras distribuciones además de la exponencial. En la siguiente sección se trabaja con procesos puntuales que no asumen ninguna distribución en particular para el número de eventos en un intervalo, con las propiedades de estos procesos es suficiente material para construir los modelos del capítulo 3.

1.3. Procesos de renovación

Se considera un proceso puntual que representa los tiempos de ocurrencias de un evento dado. La idea en este caso es tomar estos tiempos de tal manera que sean variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y luego, deducir propiedades del proceso puntual, por medio de fórmulas, en las que posteriormente se puedan reemplazar las distribuciones particulares que se necesiten. A continuación se definen los procesos de renovación de manera formal y algunos teoremas importantes en esa teoría que se da en el libro de Resnick [9].

Definición 5. *Sea* $\{T_n; n \geq 1\}$ *una sucesión de variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución común* F*, donde* $F(0) = P(T_n = 0) < 1$*. El proceso* $\{S_n; n \geq 1\}$ *dado por:*

$$S_0 = 0,$$

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

es llamado Proceso de renovación ([2],[9]) y F *es llamada la distribución de los tiempos entre eventos.*

Si se interpreta a T_n como la duración del tiempo entre la $(n-1)$-ésima y la n-ésima ocurrencia de cierto evento, entonces la variable aleatoria S_n representa el tiempo total que tarda el n-ésimo evento en ocurrir.

En estos procesos de renovación es a veces necesario considerar un primer tiempo T_0, que es el tiempo medido desde que empezamos a observar el proceso hasta que ocurre el primer evento (T_1 considerado como en la definición 5, es un tiempo entre dos eventos). Este tiempo no necesariamente se distribuye igual que los demás T_i (i=1,. . . , n) como en el caso del proceso de Poisson. El proceso descrito en la definición 5 sin T_0, es llamado *Proceso de Renovación Puro* y el proceso $\{T_n; n \geq 0\}$ es llamado *proceso de renovación con retardo.* Cabe notar que en el caso retardado,

$$S_n = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

para $n \geq 0$, entero.

Ahora definimos el proceso de conteo para $t \geq 0$ que es en sí lo que se definió en la sección anterior como el proceso puntual

$$N_t = Sup\{n : S_n \leq t\}.$$

Así, N_t representa el número de eventos (o renovaciones) que han ocurrido hasta el tiempo t.

Teorema 2. *Para* $k \in \mathbb{N}$ *y* $t \geq 0$ *se tiene que ([2],[9]):*

$$\{N_t \geq k\} \text{ si y sólo si } \{S_k \leq t\}.$$

Gracias a este resultado sencillo se puede mostrar que la esperanza de N_t es

$$m(t) := E(N_t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t),$$

en donde F^{k*} denota la k-ésima convolución de F consigo misma [9]. $m(t)$ es llamada la función de valor medio o *función de renovación*. Antes de continuar se recuerda el concepto de convolución y algunas características básicas de ésta.

Definición 6. *Para una función g (de variable real y valor real) acotada localmente (o sea, g es acotada sobre intervalos finitos) y una distribución F se define la convolución [9] de F y g como la función*

$$(F * g)(t) := \int_0^t g(t-x)F(dx), \text{ para } t \geq 0.$$

La notación para la convolución de F consigo misma cero veces, una vez y n-veces es la siguiente

$$F^{0*}(x) = 1_{[0,\infty)}(x)$$
$$F^{1*}(x) = F(x)$$
$$F^{(n+1)*}(x) = F^{n*} * F(x).$$

Así definida, la convolución cumple la propiedad conmutativa entre distribuciones, es decir, $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$. Adicionalmente, se puede demostrar que la convolución de dos distribuciones de variables aleatorias independientes corresponde a la distribución de la suma de las variables. (ver [2])

A continuación se recuerda una de la ecuaciones representativas de la teoría de renovación en la cual se expresa a $m(t)$ implícitamente, la idea es que en cada caso particular de F se intente hallar una expresión explícita.

Teorema 3. *Suponga que $\{N_t; t \geq 0\}$ es un proceso de renovación y que T_0 denota el primer tiempo de renovación. Si T_0 tiene función de densidad f, entonces:*

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-y)f(y)dy,$$

en donde F denota la distribución de T_0. Esta ecuación es conocida como la ecuación de renovación [2]. En el caso en el que la variable aleatoria T_0 sea discreta se puede expresar $m(t)$ como sigue:

$$m(t) = F(t) + \sum_{k=0}^{[t]} m(t-k)P(T_1 = k).$$

En el caso particular en el que los tiempos T_i se distribuyan exponencial con parámetro λ, el proceso de renovación es un proceso de Poisson con $m(t) = \lambda t$.

Ahora, para terminar de describir los procesos de renovación se hace mención de dos teoremas límites importantes dentro de tal teoría. Para su demostración ver [6].

Teorema 4.

$$Si \quad t \longrightarrow \infty, \ entonces \quad \frac{N(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu} \quad con\ probabilidad\ 1,$$

donde $\mu = E(T_n)$.

Teorema 5. *Se tiene que*

$$si \ \ t \longrightarrow \infty, \ entonces \ \ \frac{m(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu}$$

donde $\mu = E(T_n) < \infty$*, y si llega a ser infinito el límite se interpreta como cero.*

Los anteriores teoremas nos dan el comportamiento del proceso cuando ha transcurrido mucho tiempo, un comportamiento que resulta interesante puesto que hay una convergencia hacia μ, un valor que debería ser conocido.

En los procesos de renovación es usual hacer uso no solamente de la convolución entre distribuciones, sino también de la transformada de Laplace de una distribución, para la demostración de diferentes teoremas. Por lo anterior y para posteriores deducciones en el capítulo 3, se termina la sección dando el concepto de transformada de laplace y sus propiedades más importantes.

Definición 7. *Suponga que* X *es una variable aleatoria no negativa con función de distribución* F*. La transformada de Laplace [9] de* X *o* F *es la función definida sobre los números reales positivos por la expresión:*

$$\widehat{F}(\lambda) := E(e^{-\lambda X}) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx), \ \lambda > 0$$

A continuación se presentan las propiedades de esta transformada [9].

1. Si tenemos dos funciones de distribución diferentes entonces sus transformadas de Laplace también serán diferentes.
2. Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes y X_i tiene función de distribución F_i, $i = 1, 2$ entonces

$$\widehat{F_1 * F_2}(\lambda) = \widehat{F_1}\widehat{F_2}(\lambda) \tag{1.3.1}$$

   Lo cual puede ser generalizado para n distribuciones
3. Para $\lambda > 0$, $\widehat{F}$ tiene derivadas de todos los ordenes y éstas pueden ser halladas derivando directamente dentro de la integral. Esto es

$$(-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \widehat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^n F(dx), \ \lambda > 0$$

4. Existen fórmulas que facilitan algunos cálculos en la teoría de renovación:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} F(x)dx = \lambda^{-1}\widehat{F}(\lambda),$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}(1 - F(x))dx = \lambda^{-1}(1 - \widehat{F}(\lambda)).$$

Estas propiedades se usarán repetidamente hasta el capítulo 3. Se puede extender la definición de una transformada para funciones en general (ver [9]), y para este caso, también se pueden demostrar estas mismas propiedades.

CAPÍTULO 2

Redes neuronales biológicas y modelos existentes

Para entender al cerebro los científicos han estudiando las neuronas, su funcionamiento y su interacción con otras neuronas. En estos estudios se ha podido determinar propiedades químicas y eléctricas en el cerebro que explican su funcionamiento. Aún así, las redes son demasiado complejas y para entenderlas se ha recurrido a modelos estadísticos que permiten analizar las respuestas de las redes a determinados estímulos.

En este capítulo se revisan los conceptos básicos sobre la neurona, su funcionamiento a grandes rasgos y la forma cómo se pueden organizar y comunicar entre ellas. Luego, en las secciones finales se hace mención a algunos modelos estocásticos que describen tal comunicación y en especial se hace una revisión de los modelos que se usan como base para realizar los nuevos modelos del capítulo 3.

2.1. La neurona

La neurona es una célula especializada de un micrómetro de longitud, abundante en el cerebro y parte fundamental del sistema nervioso. Es la estructura fundamental y unidad funcional del cerebro. Las neuronas son unidades discretas, es decir, son independientes estructuralmente de otras células (en la mayoría de los casos), esto es importante para el desarrollo de los modelos pues antes se tenía una idea continua sobre las neuronas, se pensaba que estaban 'pegadas' de tal manera que la red era una sola estructura indivisible. En el modelo idealizado la información fluye por medio de las dendritas (ver figura[1] 2.1), luego por el cuerpo hasta el axón y allí la información pasa a las dendritas de la siguiente neurona por medio de una conexión llamada sinapsis. Este traslado de energía se da por propiedades eléctricas y químicas de la sinapsis misma. Más precisamente, La sinapsis es una región en donde se encuentran sin tocarse el final de una neurona (final del axón) y el principio de otra (dentritas)

[1]Gráfico de la neurona idealizada tomado de una de las diapositivas del curso Computational Neuroscience dictado por Rajesh P. N. Rao, Adrienne Fairhall, www.coursera.org

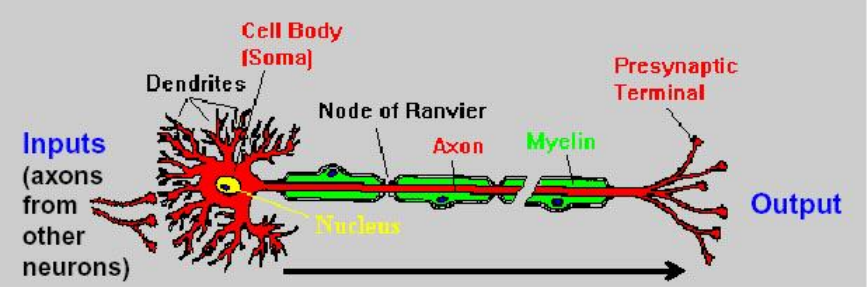

FIGURA 2.1. Neurona idealizada.

Cada neurona mantiene una diferencia de potencial entre el exterior de la membrana y el interior de -70mV, cuando esta diferencia de potencial se incrementa por encima de aproximadamente -50mV la neurona dispara un impulso eléctrico de salida llamado *spike* o *acción potencial* que estímula a las neuronas a las cuales esté conectada. La estimulación puede incrementar o disminuir el voltaje en la membrana potencial[2] de las neuronas vecinas. La forma del spike (ver figura 2.2) no depende de la neurona, en todos los casos el comportamiento del voltaje es muy característico y es bien conocido entre biólogos y neurólogos.

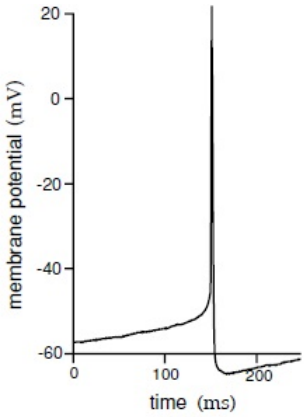

FIGURA 2.2. Forma clásica de una acción potencial o spike. Tomada de [4] página 6

Poco después de que la neurona dispara, se demora un tiempo en recuperarse y disparar de nuevo. En general, lo que hace la neurona es esperar a que le lleguen estímulos de otras neuronas, acumularlos por un tiempo y en el momento en el que se alcanza el umbral de voltaje, la neurona dispara. Se ve en el gráfico que en muy poco tiempo la neurona aumenta mucho su voltaje e inmediatamente después, éste disminuye por debajo del nivel de estabilidad para luego recuperar este nivel.

Con respecto a las sinapsis, se pueden clasificar de dos maneras: excitatorias e inhibitorias.

Una sinapsis se dice *excitatoria* cuando el spike de la neurona presináptica (neurona que envía el spike) tiene el efecto de aumentar la diferencia de potencial en la neuro-

[2]se le llama membrana potencial a la diferencia de potencial entre ambos lados de una membrana biológica

na postsináptica (neurona que recibe el spike), y por tanto disminuir su tiempo de disparo.

Por otro lado, una sinapsis se dice inhibitoria cuando el spike de la neurona presináptica tiene el efecto de disminuir la diferencia de potencial en la neurona postsináptica, y por tanto, aumentar su tiempo de disparo.

Un interrogante que surge en este punto es cuál es el papel que cumplen estos tipos de conexiones en la red completa. Precisamente, como se verá más adelante, Cottrell [3] con el modelo de reloj de arena propone una posible respuesta para conexiones inhibitorias por medio de simulación y deja abierta la discusión para conexiones excitatorias.

2.1.1. Redes Neuronales Biológicas

Una red neuronal está conformada por neuronas conectadas por medio de sinapsis. Esta conformación se puede dar de diferentes maneras, a saber, anticipativa y recurrente.

Cuando la red se organiza de manera *anticipativa* (Feedforward) la señal sólo pasa una vez a través de cada neurona. Esta configuración es muy usada en redes neuronales artificiales (ver figura 2.3).

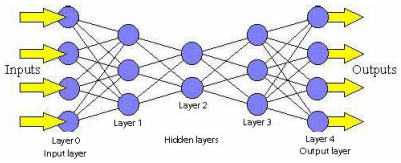

FIGURA 2.3. Organización posible de una red (forma anticipativa). Tomado de http://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/neural-networks/Architecture/feedforward.html

La organización se dice *recurrente* (Recurrent) cuando hay retroalimentación en alguna parte de la red, es decir la señal pasa por un grupo de neuronas varias veces. Esta retroalimentación es una de las características de las redes biológicas que más se quieren estudiar, pues muchos procesos en el cerebro se llevan a cabo mediante esta dinámica.

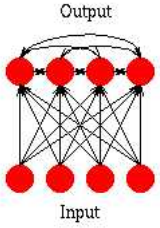

FIGURA 2.4. Organización posible de una red (forma recurrente). Tomado de http://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/neural-networks/Architecture/competitive.html

Un ejemplo de este tipo de conformación es la usada en unos modelos llamados WTA, en los que hay interacción en circuitos básicos y gracias a esta interacción se produce una respuesta por cada circuito dependiendo directamente del conjunto de estímulos de entrada. Este modelo de organización se amplía en la sección respectiva para el modelo en particular (sección 2.3).

Dados los conceptos básicos de las neuronas biológicas, se procede a explicar los modelos existentes para la caracterización de los procesos que se desarrollan en la redes.

2.2. Modelo de neuronas conectadas (Binding Neuron Model)

Este modelo se desarrolla para describir el comportamiento de una sola neurona a la cual llegan estímulos externos. Está inspirado en el modelo desarrollado por Hodgkin and Huxley en 1952 [5] que se basa en ecuaciones diferenciales en varias variables. Posteriormente, el investigador (Ucraniano) Alexander Vidybida disminuye la cantidad de variables [11] con el fin de que las simulaciones de las miles de neuronas quede más sencilla y fácil de analizar sin perder la esencia del proceso que se desarrolla en cada neurona (ni la esencia del modelo de Hodgkin and Huxley).

En un modelo de neuronas conectadas ([12] y [11]) todo impulso de entrada es acumulado por un periodo fijo de tiempo τ, después del cual desaparece para siempre. Cuando el número de impulsos acumulados cruza un umbral K (entero positivo), la neurona detona un spike y los impulsos acumulados son borrados de tal forma que la neurona comienza de nuevo a ahorrar impulsos desde cero.

Observaciones en redes neuronales biológicas recurrentes ([12]) muestran que cuando una neurona dispara, ella recibe inmediatamente después un spike, lo que hizo necesario considerar un modelo de neuronas conectadas modificado. De ahí, se obtiene un Modelo de Neuronas Conectadas con Retroacción Instantánea [1, 12, 13] cuando después de que la neurona lanza un spike la cantidad de impulsos acumulados no se vuelve cero si no que se supone que entra un impulso inmediatamente, así que la cantidad de impulsos acumulados queda en 1 (en vez de cero), y éste tiene la duración de un impulso corriente (τ).

No se describe este modelo de manera detallada como en [1] puesto que en el capítulo 3 se hace una descripción completa del mismo modelo pero cambiando la condición de retroacción instantánea. Por lo tanto, sólo se hace una descripción general en esta sección sin dar tantos detalles.

En este modelo todo impulso que llega a la neurona tiene un tiempo de vida τ, el cual se ve como una variable aleatoria con función de distribución $G(\cdot)$. Ésta es una diferencia con lo hecho por Vidybida ([11]), pues este autor siempre consideró a τ como constante. Por lo anterior y por el hecho de trabajar con procesos de renovación en vez de solamente Procesos de Poisson, el modelo de Arunachalam et. al. [1] generaliza el modelo

de neuronas conectadas.

El modelo con retroacción instantánea [1, 11] requiere de los siguientes supuestos para funcionar:

1. La neurona es excitada con estímulos externos. Los tiempos entre las llegadas de dos estímulos sucesivos (Z) se asumen independientes e idénticamente distribuidos.
2. Cada impulso tiene tiempo de vida τ, durante el cual es guardado en la memoria. Este tiempo de vida y los tiempos entre estímulos Z son independientes. f se toma como la densidad de Z.
3. Cuando el número de impulsos guardados alcanza el umbral K, la neurona dispara y el número de impulsos guardados cae a un impulso con tiempo de vida τ. En [1] se restringe el análisis al caso $K = 2$ puesto que para casos en los que $K \geq 2$, una solución analítica aún no ha sido obtenida.

Como se dijo anteriormente, se sigue comentando de manera general lo hecho en [1]: Tomando como T el tiempo entre spikes de la neurona y después de hacer un análisis del intervalo $[0, T]$, en donde se usan los conceptos de renovación dados en el capítulo anterior, se obtiene una expresión para la transformada de Laplace de la función de densidad $\bar{h}$ de la variable aleatoria T:

$$\mathscr{L}_{\bar{h}}(s) = \frac{\mathscr{L}_{f(1-G)}(s)}{1 - \mathscr{L}_{fG}(s)}, \tag{2.2.1}$$

donde $\mathscr{L}_{f(1-G)}(s)$ y $\mathscr{L}_{fG}(s)$ son las transformadas de Laplace de las funciones $f(t)(1 - G)(t)$ y $f(t)G(t)$, respectivamente.

De acuerdo a Arunachalam et. al. [1], cuando se conocen las distribuciones F y G, entonces se puede invertir esta ecuación para obtener la función de densidad de probabilidad $\bar{h}$. En los casos en los que no sea posible la inversión de $\mathscr{L}_{\bar{h}}(s)$ se pueden usar los algoritmos propuestos por Abate y Whitt (inversión numérica de transformadas de Laplace especialmente diseñadas para funciones de densidad de probabilidad) [1].

Con lo anterior se pueden obtener algunas propiedades estadísticas de T. Una característica estadística de interés es el tiempo medio entre spikes neuronales. Aprovechando que se cuenta con la transformada, se realiza la respectiva diferenciación y cambios necesarios para obtener $E(T)$ y $Var(T)$:

$$E(T) = \frac{E(Z)}{Pr(Z \leq \tau)} \tag{2.2.2}$$

$$Var(T) = \frac{E(Z^2)}{Pr(Z \leq \tau)} + \frac{2E(Z)E(Z|Z > \tau)Pr(Z > \tau) - E^2(Z)}{[Pr(Z \leq \tau)]^2} \tag{2.2.3}$$

Para comparar con lo hecho por Vidybida en [12], Arunachalam et al. en [1] toman a τ como constante y se supone que los estímulos llegan de acuerdo a una distribución exponencial $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. De esta forma la distribución de τ se puede escribir como

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \tau \\ 1 & \text{si } t \geq \tau. \end{cases}$$

Aplicando la fórmula (2.2.1) se deduce:

$$\mathscr{L}_{\bar{h}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s+\lambda} \right)^n [e^{(s+\lambda)(n-1)\tau} - e^{-(s+\lambda)n\tau}]$$

e invirtiendo esta transformada de Laplace, se obtiene la densidad de T:

$$\bar{h}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \times \left[(t-(j-1)\tau)^{(n-1)} U_{(n-1)\tau} - (t-j\tau)^{n-1} U_{n\tau} \right],$$

donde $U_c(t)$ es la función de Heaviside. Usando fórmulas anteriores se hallan también la esperanza, la varianza y el coeficiente de variación de T:

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{\lambda(1-e^{-\lambda\tau})} \\ Var(T) &= \frac{1+2\lambda\tau e^{-\lambda\tau}}{\lambda^2(1-e^{-\lambda\tau})^2} \\ CV(T) &= \sqrt{1+2\lambda\tau e^{-\lambda\tau}}. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Lo que coincide con lo hecho por Vidybida en [12]. Según el objetivo del estudio, se puede hacer uso de otras distribuciones. Por ejemplo, en [1] también realizan dos ejemplos cambiando estas distribuciones, uno tratando a f como una distribución uniforme y a τ como una constante, y otro, tratando tanto a f como a G como exponenciales con diferentes intensidades.

En este trabajo se combina este modelo con los modelos WTA, usados tanto en redes artificiales como en biológicas.

2.3. Modelos compuestos por circuitos WTA

La redes que se trabajan en [7] están compuestas de un número de circuitos neuronales locales que interactuan a través de un largo rango de conexiones excitatorias y reciben inhibición oscilatoria local (o inhibición rítmica). Esta inhibición rítmica es un fenómeno que se ha observado en la corteza cerebral en el que los disparos de las neuronas generan una vibración que afecta los disparos de las neuronas vecinas. El modelo que se trabaja en [7] es con inhibición rítmica, la idea desarrollada por Mostafa et. al. es observar por medio de simulaciones qué consecuencias tiene incluir la inhibición rítmica en el comportamiento de una red neuronal y su manera de responder. En esta te-

sis no se tendrá en cuenta la inhibición rítmica por lo que se omiten las propiedades de ésta.

Un circuito WTA "Winner takes all" (el ganador toma todo) es una pequeña red de neuronas que genera una respuesta a cada grupo de estímulos que lleguen a ella. Este grupo de circuitos pueden estar conectados a otros circuitos, pero siempre se modelan como una unidad que arroja una respuesta individual. Las siguientes son condiciones del modelo en [7] que se apoyan en resultados de biología y neurociencia:

- Los circuitos WTA son diseños de circuitos locales.
- La inhibición oscilatoria es local para cada WTA. Es decir, la oscilación sólo afecta a cada circuito en particular, ésta no logra afectar ni siquiera a los circuitos WTA vecinos.
- La tasa de disparos se ve como función que depende de impulsos externos y de la memoria de disparos pasados.
- Los disparos de un circuito neural puede afectar a los disparos de otro circuito sólo si estos circuitos están conectados.

En la figura 2.5 se ve la estructura básica de una red WTA con tres neuronas. La idea es que las neuronas A y B están conectadas con la tercera I, sin embargo, entre ellas dos no hay una conexión directa. La conexión que va de la neurona A a la neurona I y la conexión que va de la neurona B a la neurona I son excitatorias lo cual implica que la neurona I es estímulada, y así, dispara más frecuentemente cuando llegan mensajes de las otras dos neuronas. Las conexiones que van de I a las otras neuronas son inhibitorias, de esta forma, cuando la neurona A dispara el efecto que genera es estimular a I a que dispare, y por lo tanto, tendría un efecto sobre la neurona B para que no dispare. Todo esto se resume en una "batalla" entre la neurona A y la neurona B en el que una de ellas toma el control del circuito disparando más que la otra. La respuesta del circuito completo en un instante dado es el rótulo (A o B) de la neurona que va ganando la "batalla" en ese instante, de aquí el nombre "Winner takes all" (el ganador toma todo).

Los estímulos externos que llegan al circuito entran a la neurona A o B dependiendo de la conexión externa. De este modo, el ganador de cada circuito depende directamente de la distribución de los tiempos de interllegada de estímulos que bombardean a cada neurona.

Un circuito WTA se puede constituir de muchas neuronas, pero siempre hay una neurona I que inhibe a las otras, generando así la "batalla" de las demás neuronas por ser la ganadora. La respuesta de este circuito será pues, el rótulo de la neurona que logra disparar más entre las n neuronas existentes.

Cabe decir que las neuronas se retroalimentan apenas disparan, como en el modelo de neuronas conectadas con retroacción instantánea, es decir, la neurona se afecta a sí misma con sus propios disparos, pues en el modelo se asume que hay una conexión de cada neurona consigo misma (como un bucle).

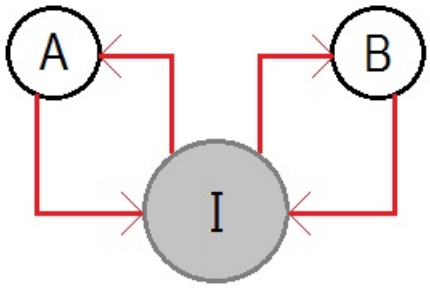

FIGURA 2.5. Estructura básica de una red WTA

En el siguiente capítulo se realiza un modelo con un circuito WTA con tres neuronas, por lo tanto en lo que sigue se considerarán los circuitos sólo con tres neuronas, dos de ellas excitatorias (las neuronas que envían estímulos excitatorios) y una inhibitoria (la neurona que inhibe a las demás)

Cada circuito WTA representa una variable discreta con dos estados: A y B. En [7] se analizan varios circuitos WTA interactuando entre sí, y se hace una simulación en la cual se puede observar en qué estado está cada circuito en varios momentos (A o B o más si la simulación es con más de dos excitatorias) y se compara con un modelo de Montecarlo [7], cuyos resutados imitan a los resultados de la simulación computacional de la red (este modelo de Montecarlo sólo funciona para redes pequeñas).

En [8] se realizan varias metodologías para describir el proceso del circuito WTA, entre ellas el que se quiere trabajar en esta tesis; con distribuciones de probabilidades y hallando la distribución de salida. Tomando una distribución Poisson para las llegadas y asumiendo una cadena de Markov con dos estados, 0 (la neurona A va ganando) o 1 (la neurona B va ganando), se da la siguiente fórmula para la probabilidad (P_{0outI}) de que la primera neurona que gana la 'competencia' sea A (sin pérdida de generalidad):

$$P_{0outI} = \int_0^\infty P(\nu_t, n-1)\nu_0 \left(\sum_0^{n-1} P(\nu_1 t, i) \right) dt$$

donde $P(\nu t, n) = (\nu t)^n e^{-\nu t}/n!$, ν_1 y ν_0 son las tasas de llegadas de estímulos a la neurona B y A respectivamente, y n el número de impulsos necesarios para que la neurona dispare. En [8] también se hallan probabilidades de transición (entre los estados 0 y 1) y una fórmula para la probabilidad de que la primera neurona que gane sea A pero generalizada a N neuronas (siempre se trabaja dando expresiones para probabilidades de eventos relacionados con los primeros disparos, no en general para un disparo cualquiera).

2.4. Modelo de reloj de Arena

Este modelo [3] de desarrolló para describir el comportamiento colectivo de una red neuronal biológica plausible en la vida real. Con este modelo se puede estudiar la dinámica de las redes como función de los parámetros que cuantifican la fuerza de las conexiones

inhibitorias y excitatorias.

Modelo para una neurona

En contraste con modelos de integración y disparo (-Integrate and Fire Models-, estos son modelos neuronales que buscan modelar la función de voltaje en la neurona $V(t)$ con respecto al tiempo, generalmente descritos por ecuaciones diferenciales), la variable en la que se enfoca este modelo no es la diferencia de potencial $V(t)$ de la neurona en el tiempo t, sino el tiempo esperado restante para que dicha neurona dispare $X(t)$, en el tiempo t. Ya que los tiempos entre disparos U_i (tiempo entre los disparos i e $i-1$) se consideran independientes e idénticamente distribuidos para cada neurona, la secuencia de spikes se ve como un proceso de renovación [3]. La distribución de probabilidad de los U_i se denota por F_{Ui}.

El modelo es descrito por la ecuación

$$X(t+dt) = \begin{cases} X(t) - dt & \text{si } X(t) > 0, \\ U - dt & \text{si } X(t) = 0, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

donde U es el tiempo en el que se espera que la neurona dispare (como la cantidad de arena que se ingresa al reloj), es un parámetro en el modelo que se escoge de antemano.

La fórmula (2.4.1) describe el proceso en el que entre más tiempo pasa, más se acorta el tiempo en el que la neurona dispara. Es como si se tuviera un reloj de arena, y cada vez que termina de caer la arena, la neurona hace un disparo y se voltea el reloj de nuevo para el siguiente disparo. En general no es obligatorio que después de un disparo el reloj 'se llene con la misma cantidad de arena' pero el modelo más sencillo se hace de esta forma.

En la figura 2.6 también se puede ver el comportamiento anteriormente descrito.

Con este modelo en mente, se puede pensar ahora en el modelo con varias neuronas interactuando entre ellas ([3]).

Extensión del modelo a una red

Primeramente, se asume que la red tiene n neuronas, cada una de ellas recibiendo estímulos externos y conectadas a un número fijo de neuronas vecinas. Estos estímulos pueden ser dados a una sola neurona o a varias al tiempo. Para el modelo básico de una red también se asume que [3]:

- Como cada neurona tiene su propia actividad, se denota por F_i a las distribuciones de los tiempos interspike para la neurona i.
- I_i es el conjunto de neuronas j que son inhibidas por la neurona i.
- E_i es el conjunto de neuronas j que son excitadas por la neurona i.

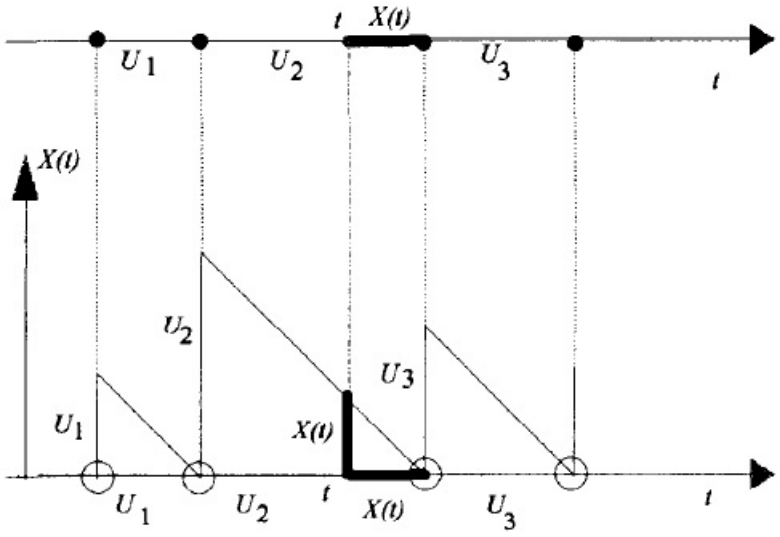

FIGURA 2.6. Modelo de Reloj de Arena para una neurona. Tomada de [3]

- Cada vez que una neurona i dispara un spike se detona un impulso corto a todas sus vecinas cuya duración es tomada como unidad de tiempo.
- Si $j \in I_i$ y la neurona i dispara, se adiciona un retardo positivo w_{ij} al tiempo esperado para disparar de la neurona j.
- Si $j \in E_i$ y la neurona i dispara, el tiempo de disparo de la neurona j es recortado adicionando un retardo negativo w_{ij}.

Consecuentemente, el comportamiento del sistema está dado por:

$$\begin{aligned} &\text{Si } X_i(t) \neq 0, \text{ entonces} \\ &\qquad X_i(t+dt) \;=\; X_i(t) - dt \\ &\text{Si } X_i(t) = 0, \text{ entonces} \\ &\qquad X_j(t+dt) \;=\; \begin{cases} U_i - dt & \text{para } \; j = i, \\ X_j(t) + w_{ij} - dt & \text{si } \; j \in I_i. \\ máx(0, X_j - w_{ij} - dt) & \text{si } \; j \in E_i \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

donde $X_i(t)$ es el tiempo que le queda a la neurona i para disparar en el instante t y U_i representa el tiempo con el que la neurona i se renueva cuando dispara, el cual en general, se puede considerar como una variable aleatoria.

La figura 2.7 describe el posible comportamiento del tiempo de espera para un disparo de una neurona en particular:

Se aprecia en la figura 2.7 que el tiempo disminuye de la misma forma que lo hacía antes, pero en este caso se pueden apreciar algunos saltos que hace la función $X(t)$ aumentando o disminuyendo este tiempo por el efecto que tienen las otras neuronas sobre ésta. Los valores $u_{(i)}$ en el gráfico 2.7 son realizaciones de U vista como una variable aleatoria.

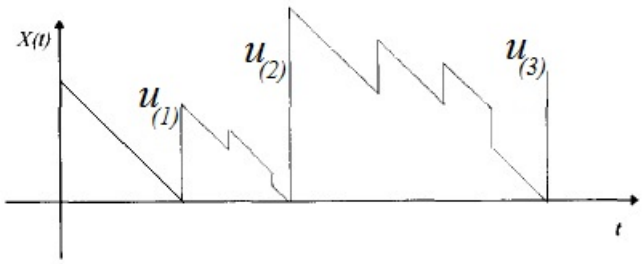

FIGURA 2.7. Posible comportamiento de $X(t)$ para una neurona particular con el Modelo de Reloj de Arena. Tomada de [3]

Los parámetros de este modelo son las distribuciones F_i, los valores de U_i (o su distribución si se toma como variable aleatoria), los w_{ij} y los tamaños $a(i)$ y $b(i)$ de I_i y E_i, respectivamente. De esta forma se puede ver a $(X_i(t),\ i = 1, \ldots, n)$ como una cadena de Markov homogénea con respecto al tiempo (se puede verificar que es irreducible y aperiódica sobre $(\mathbb{R}^+)^n$) [3].

Cuando se hace una simulación de este proceso y se deja correr por suficiente tiempo, se pueden observar dos tipos comportamientos de la red completa

- Caso convergente: Todas las neuronas tienen tiempo de disparo positivo.
- Caso divergente: Algunas neuronas se vuelven inactivas y en una restante sub-red, las neuronas tienen tiempo de disparo positivo.

En el artículo de Cottrell [3] se toman redes en las que hay 100 cuadros cada uno representando a una neurona. Cada neurona estimula a las que están a su alrededor. Luego se pone a correr una simulación en la que se tiene en cuenta cuántas veces están disparando las neuronas. Si la neurona casi no dispara después de un largo tiempo se pone en color blanco, si dispara entre 5 y 200 spikes se pone en color gris y si dispara más de 200 spikes la neurona (cuadrado) se pinta de color negro. El estado límite resultante de la red puede ser interpretado como un código-mapa donde el patrón dibujado por los dos subconjuntos de neuronas (activas e inactivas) es la respuesta de la red a la estimulación externa modulada por las conexiones laterales. Todas las simulaciones hechas muestran que las conexiones inhibitorias mejoran la diversificación de mapas y de dichos mapas se puede inferir qué grupo de estímulos los están generando. ver figura 2.8

En la red mostrada en 2.8 cada neurona inhibe a cuatro y excita a ocho neuronas vecinas y se toma a w_I y a w_E como el peso de inhibición y excitación de cada conexión. Lo que se resalta en este caso son los casos convergentes y los divergentes gráficamente.

En [3] se toma como ejemplo la red del sistema olfativo que tiene un importante número de conexiones inhibitorias, lo que incentivó a Cottrell et. al. a trabajar con una red de sólo conexiones inhibitorias. Los resultados de las simulaciones (presentados en [3]) con este tipo de red mostraron la importancia que tienen estas conexiones, generando distinción entre las respuestas de la red completa dependiendo del olor (estímulo externo) que entraba. En

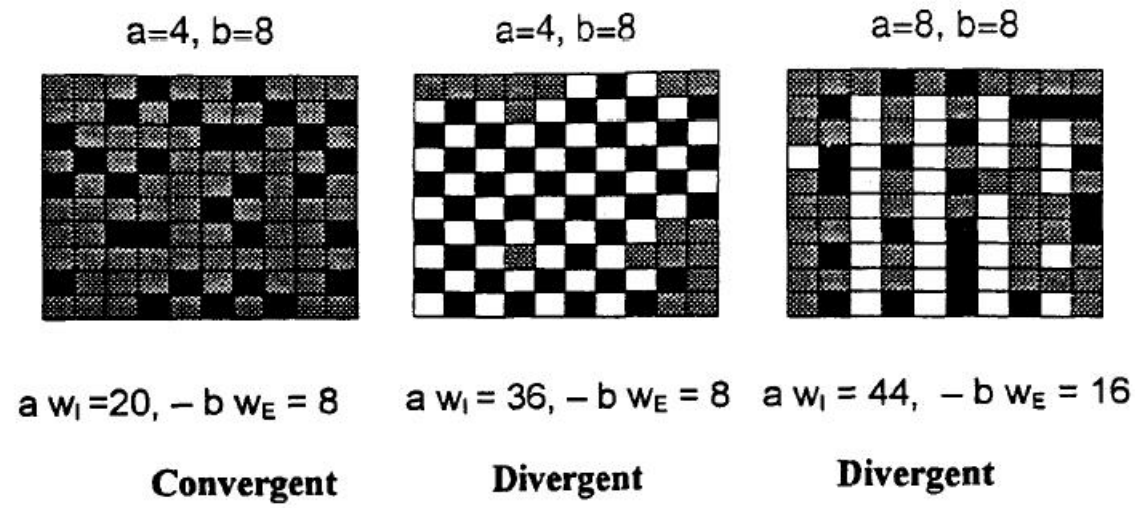

FIGURA 2.8. Resultados de simulaciones, casos convergentes y divergentes. Tomada de [3]

la figura 2.9 se toma una red en la que sólo hay conexiones inhibitorias (imitando al sistema olfativo). En cada caso se aumenta el peso de inhibición y lo que resulta es un mapa respuesta que, en este ejemplo, se podría clasificar como un olor desagradable o placentero.

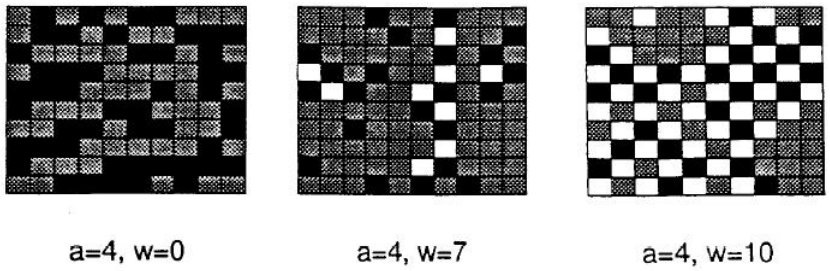

FIGURA 2.9. Simulación sólo con pesos de inhibición y aumentando pesos de inhibición [3]

En la figura 2.10, lo que se ve es que aumentado el peso de inhibición, también se aumentan el número de mapas diferentes que surgen por cada olor. Es decir, mientras que para $w = 0$ hubo aproximadamente 75 olores que resultaron en el mapa 1, para $w = 20$ solo hubo 15 olores que resultaron en el mapa 1, de ahí, los otros olores tienden a formar nuevos mapas. La aplicación aquí es obvia: el mapa que se forme nos dirá qué olores podrían estarlo generando.

Se retomará esta idea del reloj de arena con 64 posibles respuestas (o mapas) en la simulación del capítulo 3. En el siguiente capítulo se desarrollan primero las ecuaciones del modelo principal de esta tesis.

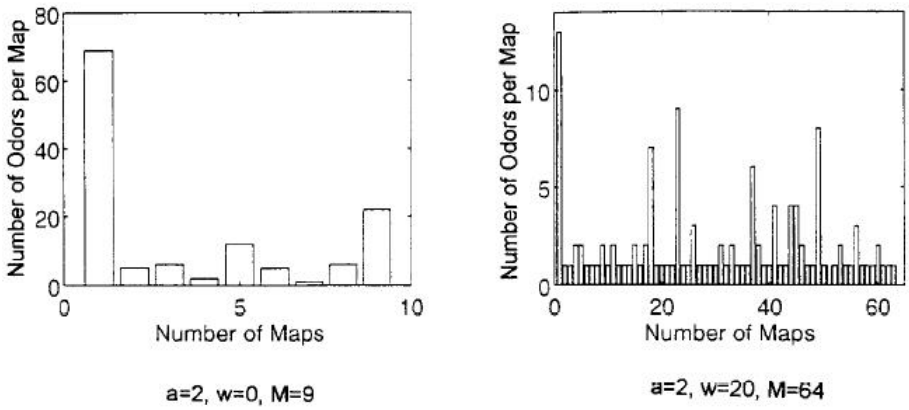

FIGURA 2.10. Número de olores (estímulos externos) por mapa [3]. M representa la cantidad de mapas diferentes que se formaron

CAPÍTULO 3

Modelos Estocásticos para circuitos WTA compuestos por Neuronas Conectadas con y sin retroacción

En este capítulo se presentan modelos para una neurona y tres neuronas que combinan o complementan los modelos del capítulo 2. Para arrancar se inicia mostrando el modelo de neuronas conectadas sin retroacción con las respectivas deducciones inspiradas en [1] y se aprovecha este hecho para mostrar la manera en que las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.4) fueron desarrolladas por Arunachalam et. al. [1]. En la sección 3.2 se empieza a revisar el modelo WTA de tres neuronas bajo diferentes situaciones y supuestos. Como en [8], en este capítulo se hace un cambio en la forma de ver el circuito WTA, ya no se ve como tres neuronas trabajando como en la sección 2.3 sino que se ve como dos neuronas A y B cada una conectada a la otra mediante una conexión inhibitoria, de esta manera se reemplaza la presencia de la neurona inhibitoria por conexiones inhibitorias.

Luego de un análisis de las variables aleatorias tiempos de disparos, se hacen los cálculos de propiedades estadísticas como media y varianza para los tiempos de disparo del circuito completo.

3.1. Modelo de Neuronas Conectadas (sin retroacción instantánea)

Este modelo llamado en inglés *Binding Neuron Model* se analiza en el artículo [1] pero con una condición llamada retroacción instantánea. En esta sección se analiza de nuevo pero sin esta condición, de esta forma contamos con un modelo modificado que no se había revisado (el modelo sin retroacción) y al mismo tiempo las ecuaciones de este modelo quedan establecidas como herramientas para el diseño de modelos posteriores (se usarán luego para el diseño del modelo de la red WTA). Como primera medida, se aclaran las suposiciones bajo las cuales la neurona va a estar inmersa. Esto, por supuesto, se da junto a una notación adecuada que en lo posible no diferirá de la notación dada en [1]. Luego se deducirán las expresiones para las características estadísticas del modelo.

Se considera una neurona biológica descrita como en el capítulo anterior a la cual llegan estímulos externos de manera aleatoria. Los tiempos entre llegadas de estos estímulos se asumen independientes e idénticamente distribuidos, es decir, se asume que estos tiempos cumplen las condiciones para generar un proceso de renovación, y adicionalmente, damos por conocida su distribución de probabilidad. Cabe recordar que esta distribución es cualquiera y no se especifica que sea exponencial, como es el caso de los procesos de Poison que muchos autores toman como base para sus trabajos (ejemplo [12, 11]).

A diferencia de otros modelos como los modelos clásicos de integración y disparo en los que se tiene en cuenta el voltaje acumulado necesario para que la neurona dispare, en este modelo se considera el número de estímulos que tiene que ahorrar la neurona para disparar. Es decir, cada estímulo que llega a la neurona se ahorra en la "memoria" por un tiempo τ, después del cual se borra. Cuando en la memoria hay suficientes impulsos la neurona dispara un spike y la memoria queda en cero. Como ya se dijo en el capítulo anterior, en [1], en el modelo de neuronas conectadas con retroacción la memoria no queda en cero cuando la neurona dispara sino que queda con un impulso en la memoria (como si entrara un estímulo). El objetivo es pues, hallar la densidad de la variable aleatoria que representa el tiempo entre disparos que lanza la neurona y la esperanza matemática de esta variable.

Notación:

Z: Tiempo entre impulsos que llegan a la neurona.
K: Número (umbral) de impulsos necesarios para que la neurona dispare.
F_Z, f_Z: Distribución de probabilidad y densidad de la variable aleatoria Z, respectivamente.
$\mathscr{L}_f$: Transformada de Laplace de la función f.
T: Tiempo entre disparos de la neurona.
τ: Tiempo que dura un estímulo guardado en la neurona.
G_τ: Distribución de probabilidad de la variable aleatoria τ.
h_T: Densidad de la variable aleatoria T.

En el artículo [1] se encuentra una expresión para la densidad de la variable aleatoria T que mide el tiempo entre disparos de una sola neurona que cuenta con retroacción instantánea. Como ya se ha dicho, para completar cálculos posteriores se necesita encontrar la misma expresión pero para un modelo sin retroacción instantánea.

Se enumeran algunas condiciones para el modelo:

1. La neurona no tiene conexiones laterales y es excitada con estímulos externos. Los tiempos de interllegada de estos estímulos se consideran independientes e idénticamente distribuidos.

2. Los tiempos de vida τ de los estímulos en la memoria de la neurona se consideran variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidos.

3. Cuando el número de impulsos alcanza un umbral K la neurona dispara. En este trabajo al igual que en [1] se toma el caso en el que $K = 2$.

Para que la neurona dispare en un tiempo T tienen que llegar una cantidad N de estímulos ($N > 1$, variable aleatoria). Entre estímulo y estímulo, transcurren tiempos que son realizaciones de Z en los que siempre $Z > \tau$, excepto en el primer tiempo en el que Z es cualquier valor que no se compara con el valor de τ (lo que hace que la neurona quede con un estímulo en la memoria), y en el último en el que $Z < \tau$. De ahí, T se puede ver como la suma de un tiempo Z, más $N-2$ tiempos Z condicionados a que $Z > \tau$ (llamados aquí Q_i, que representan fracasos en los que siempre $Z > \tau$) y un último tiempo Z condicionado a que $Z < \tau$ llamado aquí W (en donde se produce el éxito para que la neurona dispare, $Z < \tau$). Esto es,

$$T = Z + \sum_{i=1}^{N-2} Q_i + W \tag{3.1.1}$$

donde la distribución de los Q_i es la misma de Z pero condicionada a que $Z > \tau$, la distribución de W es la misma de Z pero condicionada a que $Z < \tau$ y donde N es la variable aleatoria del número de impulsos que llegaron a la neurona en $[0, T]$.

Obsérvese que N tiene distribución geométrica con posibles valores $2, 3, \ldots$ (por lo que se hablaba antes de éxito y fracasos). Es decir,

$$P(N = n) = pq^{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{3.1.2}$$

donde $p = P(Z \leq \tau)$ y $q = 1 - p$.

Replicando las mismas ideas de [1], se obtienen las expresiones para la densidad $\alpha(t)$ de las Q_i y la de densidad $\beta(t)$ de W

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= P(t < Z < t + dt \mid Z > \tau) \\ &= P(t < Z < t + dt \mid Z > \tau, \tau > t)P(\tau > t) \\ &\quad + P(t < Z < t + dt \mid Z > \tau, \tau \leq t)P(\tau \leq t) \\ &= \frac{f_Z(t)G_\tau(t)}{P(Z > \tau)} \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

y de manera similar

$$\begin{aligned} \beta(t) &= P(t < Z < t + dt \mid Z \leq \tau) \\ &= P(t < Z < t + dt \mid Z \leq \tau, \tau > t)P(\tau > t) \\ &\quad + P(t < Z < t + dt \mid Z \leq \tau, \tau \leq t)P(\tau \leq t) \\ &= \frac{f_Z(t)(1 - G_\tau(t))}{P(Z \leq \tau)} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Con esto, se puede calcular a h_T de manera análoga a como se hizo en [1], con ayuda de la transformada de Laplace y usando el hecho de que N tiene distribución geométrica con parámetro $P(Z \leq \tau)$:

$$h_T(t) = \sum_{n=2}^{\infty} P(t < T < dt \mid N = n) P(N = n)$$

Se usa la descomposición de T en suma de variables independientes y las propiedades de la convolución vistas en el capítulo 1 (la distribución de la suma de variables aleatorias independientes es la convolución de sus distribuciones) para expresar

$$h_T(t) \quad = \quad \sum_{n=2}^{\infty} \Big(f_Z * \alpha^{(n-2)*} * \beta \Big)(t)\, P(Z \leq \tau) P(Z > \tau)^{n-2} \tag{3.1.5}$$

en donde $\big(f_Z * \alpha^{(n-2)*} * \beta\big)(t)$ es la distribución de probabilidad de la variable aleatoria T (Se utiliza el hecho de que la densidad de $T \mid N = n$ es la convolución de las densidades de Z con la de W y con la densidad de Q $(n-2)$ veces, ver 3.1.1)

Aplicando la tranformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, usando sus propiedades, teniendo en cuenta las expresiones 3.1.3 y 3.1.4, y desarrollando la serie geométrica se obtiene

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_h \quad &= \quad \sum_{n=2}^{\infty} \big(\mathscr{L}_f \mathscr{L}_\alpha^{n-2} \mathscr{L}_\beta \big)\ P(Z \leq \tau) P(Z > \tau)^{n-2} \\ &= \quad \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\mathscr{L}_f \mathscr{L}_{fG}^{n-2} \mathscr{L}_{f(1-G)} \Big) \\ &= \quad \frac{\mathscr{L}_f \mathscr{L}_{f(1-G)}}{1 - \mathscr{L}_{fG}} \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

donde $\mathscr{L}_{fG}$ y $\mathscr{L}_{f(1-G)}$ son las transformadas de Laplace de las funciones $f_Z(t)G_\tau(t)$ y $f_Z(t)(1 - G_\tau(t))$, respectivamente. Usando métodos para invertir la transformada, se encuentra una expresión para h_T.

También se podría hallar a $h_T(t)$ haciendo la convolución de la densidad de la distribución Z con la densidad hallada para T con el modelo con retroacción instantánea (aquí llamada $\bar{h}(t)$, fórmula (2.2.1)).

$$h_T = f_Z * \bar{h}.$$

La expresión para $E(T)$ se logra usando propiedades del operador esperanza, lo cual resulta en:

$$E(T) = \frac{(1 + P(Z < \tau))E(Z)}{P(Z < \tau)} \tag{3.1.7}$$

Gracias a la independencia entre las variables aleatorias, también se encuentra una expresión para la varianza.

$$Var(T) = Var(Z) + \frac{E(Z^2)}{Pr(Z \leq \tau)} + \frac{2E(Z)E(Z|Z > \tau)Pr(Z > \tau) - E^2(Z)}{[Pr(Z \leq \tau)]^2} \tag{3.1.8}$$

en donde se utiliza la ecuación (2.2.3). Esta expresión también se puede hallar por sí sola derivando dos veces la transformada de Laplace y haciendo los respectivos cambios.

Por último se hace notar que si T^{τ_1} y T^{τ_2} son los tiempos entre disparos del modelo con tiempo de vida de los estímulos τ_1 y τ_2, respectivamente, y si $\tau_1 < \tau_2$, entonces $T^{\tau_1} > T^{\tau_2}$ [1].

Ahora se realiza un ejemplo con distribuciones usuales en las que se utilizan las fórmulas para el modelo sin retroacción y se compara con las del modelo con retroacción.

Ejemplo 1. *Es natural trabajar con las distribuciones que muchos artículos consideran en sus cálculos, como por ejemplo distribuciones exponenciales para describir las llegadas de los estímulos a las dos neuronas, y adicionalmente, tomar a τ como una constante. Se trabaja con dos neuronas, la primera se asume que funciona con retroacción instantánea y la segunda sin retroacción.*

De esta manera, se define a $h_1(t)$ como la distribución de los tiempos entre impulsos de salida correspondiente a la neurona 1, $h_2(t)$, la distribución correspondiente a la neurona 2, y las llegadas de estímulos a las dos neuronas con la misma distribución exponencial $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. La expresión para la distribución de la constante τ es entonces

$$G(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \tau, \\ 1 & t \geq \tau. \end{cases}$$

Ahora se calcula la densidad de los tiempos de salida de cada neurona usando (3.1.6) para cada caso en el que no hay retroacción instantánea y usando (2.2.1) para cuando la haya. En [1] se realiza este cálculo cuya solución se mostró en el capítulo 2 y que se repite a continuación:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{h1}(s) &= \frac{\lambda}{s+\lambda} \frac{1 - e^{-(s+\lambda)n}}{1 - (\lambda/(s+\lambda))e^{-(s+\lambda)\tau}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n \left[e^{-(s+\lambda)(n-1)\tau} - e^{-(s+\lambda)n\tau}\right] \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

y para la respectiva función de densidad h_1,

$$h_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \left[(t-(n-1)\tau)^{n-1} U_{(n-1)\tau}(t) - (t-n\tau)^{n-1} U_{n\tau}(t) \right], \quad (3.1.10)$$

Siendo $U_c(t)$ la función de Heaviside con salto en c. En el capítulo 2 también se muestran las estadísticas más importantes para T_1 que se mencionan en [1] (2.2.4).

Ahora, como es de esperarse, se utiliza el modelo sin retroacción instantánea dado al principio del capítulo para hallar a h_2, y las fórmulas de esperanza y varianza (3.1.7). Se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{h2}(s) &= \mathscr{L}\{\lambda e^{-\lambda t}\} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s+\lambda} \right)^n \left[e^{-(s+\lambda)(n-1)\tau} - e^{-(s+\lambda)n\tau} \right] \quad (3.1.11) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s+\lambda} \right)^{n+1} \left[e^{-(s+\lambda)(n-1)\tau} - e^{-(s+\lambda)n\tau} \right] \end{aligned}$$

El lado derecho de (3.1.11) es la transformada ya hallada en 3.1.9 multiplicada por la transformada de una exponencial.

Ahora invirtiendo esta transformada de Laplace resulta:

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+2}}{(n+1)!} e^{-\lambda t} U_{n\tau}(t) (t-n\tau)^{n+1} - \quad (3.1.12) \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda t} U_{n\tau}(t) (t-n\tau)^n \quad (3.1.13) \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \left[U_{(n-1)\tau}(t)(t-(n-1)\tau)^n - \right. \quad (3.1.14) \\ &\quad \left. U_{n\tau}(t)(t-n\tau)^n \right] \end{aligned}$$

y se sabe que

$$P(Z < \tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

lo que es reemplazado en 3.1.7 para hallar la esperanza

$$E(T_2) = \frac{2 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda(1 - e^{-\lambda\tau})}. \quad (3.1.15)$$

Además, usando la respectiva fórmula (3.1.8), la varianza queda expresada por

$$Var(T_2) = \frac{2 - 2e^{-\lambda\tau} + e^{-2\lambda\tau} + 2\lambda\tau e^{-\lambda\tau}}{\lambda^2(1 - e^{-\lambda\tau})^2}. \tag{3.1.16}$$

Y utilizando las dos últimas expresiones obtenemos el coeficiente de variación

$$CV(T_2) = \frac{\sqrt{2 - 2e^{-\lambda\tau} + e^{-2\lambda\tau} + 2\lambda\tau e^{-\lambda\tau}}}{2 - e^{-\lambda\tau}}. \tag{3.1.17}$$

De esta manera, ya se tienen expresiones para ambos casos, con retroacción y sin retroacción.

En la siguiente sección se trabaja con dos neuronas que cumplen las propiedades del modelo de neuronas conectadas, con lo cual se revisa cómo funcionaría una red WTA con dicho tipo de neuronas.

3.2. Modelo con dos neuronas.

Como se dijo al principio de este capítulo, se trabajará con una red WTA de tres neuronas: dos excitatorias y una inhibitoria. Por conveniencia se pasa de un modelo de tres neuronas a un modelo de dos neuronas y se supone que una inhibe a la otra dejando el trabajo de la neurona inhibitoria a conexiones inhibitorias. Esto también se realiza en [8] y se explica que no hay cambio en el modelo, ya que el efecto total es que las neuronas excitatorias simplemente se inhiben entre sí. En este caso, implícitamente se da por entendido que la neurona inhibitoria dispara inmediatamente le llega un disparo ($K = 1$) ya que si cualquier neurona dispara, la otra neurona se va a ver afectada enseguida. De esta forma, se cambia el modelo graficado en la figura 2.5 por el modelo graficado en la figura 3.1.

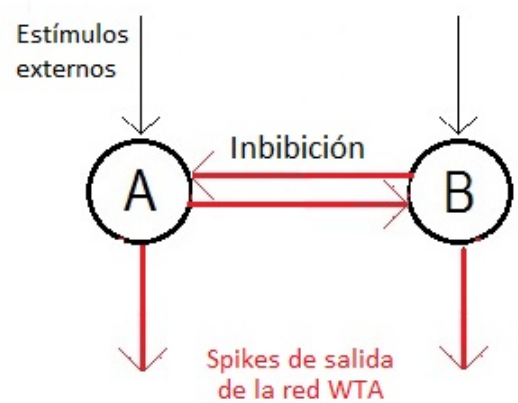

FIGURA 3.1. Estructura modificada de una red WTA que guarda las mismas características básicas de la red original.

Como se ve en la figura 3.1, a cada neurona llegan estímulos externos de manera independiente y cuando una neurona dispara, la red WTA completa lanza un spike al exterior que contiene la información de cuál neurona fue la que disparó. Así, por ejemplo, si la neurona A dispara, el spike de la red es llamado 'A'. Se recuerda que al mismo tiempo que A dispara, se envía una señal a la otra neurona.

Ahora que se tienen dos neuronas, se necesita una notación para diferenciar lo que sucede en cada una de ellas. En la siguiente notación se intenta manejar símbolos análogos para las variables a los que se usaron en el capítulo 2.

Notación:

Z_1: Tiempo entre impulsos que llegan a la neurona A
Z_2: Tiempo entre impulsos que llegan a la neurona B
K: Número (umbral) de impulsos necesarios para que las neuronas disparen (se asume el mismo umbral para ambas neuronas).
F_{Zi}: Distribución de probabilidad de la variable aleatoria Z_i.
$X_i(t)$: Número de impulsos que llegan a la neurona i desde cero hasta el tiempo t.

A manera de ejemplo, tomemos el caso en el que $K = 1$ para ambas neuronas. En este caso cada vez que la neurona A (por ejemplo) recibe un estímulo externo, dispara instantáneamente un spike provocando que la red WTA envíe una señal llamada A. Al mismo tiempo se envía un estímulo inhibitorio a la neurona B, pero dado que esta neurona tiene cero estímulos en su memoria, la red no muestra afectación. La neurona B queda con un estímulo en la memoria y A queda con cero. Es evidente que la retroacción instantánea no tiene sentido aquí puesto que la neurona se retroalimentaría con un impulso en la memoria y así seguiría disparando sin parar, por lo que este modelo con $K = 1$ sólo tiene sentido sin retroacción instantánea.

Ahora se puede pensar en dividir el modelo en dos casos teniendo en cuenta el tiempo que lleva una neurona esperando un estímulo, llamado aquí tiempo de espera. En el **CASO 1** el sistema completo dispara, dejan de entrar estímulos y se resetean los tiempos de espera. Y en el **CASO 2** el sistema dispara pero los tiempos de espera no se resetean, es decir, la neurona que no disparó mantiene lo que lleva ahorrado y el tiempo de espera para el siguiente estímulo no se vuelve cero.

Considérese primero el caso 2. Si bien, pareciera que el disparo de la neurona A no afecta a la neurona B, ya que el ahorro de la neurona B permanece en cero, es necesario darse cuenta de que gracias a la conexión inhibitoria entre ellas por lo menos los tiempos deberían reiniciarse. De esta manera el caso 1 es el único que se debe tener en cuenta en la red WTA.

En el caso 1 se puede ver al sistema completo como un proceso de renovación con distribución entre ocurrencias mín(Z_1, Z_2). La razón por la cual se puede ver como un proceso de renovación es que el borrón en la memoria de las neuronas permite la independencia entre los tiempos de interllegadas.

Si el último impulso vino de la neurona A (B) se dice que el sistema está en estado A (B).

Ahora se responderán algunas preguntas para el caso $K = 1$.

- ¿Cuánto tiempo en promedio se demora el sistema en un estado?

  Ya que el sistema se restablece, el tiempo entre disparos en cada neurona se distribuye de la misma manera y por tanto el tiempo promedio entre disparos es $E(\text{mín}(Z_1, Z_2))$. El valor de esta esperanza depende directamente de las distribuciones particulares de Z_1 y Z_2 y se obtiene de la fórmula

  $$E(\text{mín}(Z_1, Z_2)) = \int_0^\infty P(Z_1 > t)P(Z_2 > t)dt \tag{3.2.1}$$

  Lo anterior se puede escribir por la independencia de las variables Z_1 y Z_2.

- ¿Cuál es la probabilidad de pasar del estado A al estado B?

  Sea S_n el estado del sistema en el turno n, (el nombre (letra) de la neurona que disparó la n-ésima vez). Nótese que S_n es una cadena de Markov en tiempo discreto, pues gracias a la independencia de las variables y el restablecimiento del sistema, no depende de lo que pasó antes del turno n. Por lo tanto, se puede escribir

  $$P(S_n = A) = P(S_1 = A) = P(Z_1 < Z_2)$$

  De esta forma, la probabilidad de estar en un estado se halla revisando qué neurona recibe el primer impulso en el turno anterior.

  Así, la probabilidad de pasar del estado A a B es

  $$P_{AB} = P(S_{n+1} = B \mid S_n = A) = P(S_1 = B) =: 1 - p$$

  Y obviamente, la matriz de transición queda expresada de la siguiente manera:

  $$\begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix}$$

  siendo $q = 1 - p$. De esta manera, el circuito no tiene un estado absorbente (suponiendo $p \neq 0, 1$) y por tanto cuando ha transcurrido mucho tiempo no habrá una neurona ganadora, sino que ésta varía dependiendo exclusivamente de la probabilidad $P(Z_1 < Z_2)$.

Lo anterior es para $K = 1$, que es un caso en el que las neuronas disparan sin ahorrar estímulos. Ahora se pasa al modelo para $K = 2$ en el que se usa el Modelo de neuronas conectadas, asumiendo primero retroacción instantánea.

Se define a S_n de la misma forma de antes, como el estado del sistema en el turno n, esta vez se hará mención el estado A como el estado 1 y al estado B como el estado 2 (de esta manera, el circuito puede estar en un turno determinado en estado 1 o estado 2). Veamos en este caso, cómo sería la dinámica de las neuronas: al disparar la neurona

A le envía un estímulo a la neurona B dejando a ésta en cero sin importar cuántos estímulos ahorrados haya tenido esta neurona B (0 o 1), además, gracias a la retroacción instantánea la neurona A se retroalimenta y queda con un estímulo en la memoria. En general, después de un disparo la neurona que disparó queda con un impulso ahorrado y la otra queda en cero con tiempos de espera también en cero (es decir, el tiempo que lleva la neurona esperando por disparar se vuelve cero, como si no llevara nada esperando), mientras que el circuito toma su estado como el número de la neurona que disparó.

De lo anterior se concluye que S_n es una cadena de Markov en tiempo discreto, pues el estado del sistema en el turno $n+1$ depende exclusivamente de cómo haya quedado el estado en el turno n, los turnos anteriores no influyen, ya que el disparo de una neurona siempre deja al circuito en 0 o 1 y "borra" lo sucedido antes del evento. Esto es

$$P(S_{n+1} = i \mid S_n = j_n, S_{n-1} = j_{n-1}, ..., S_1 = j_1) = P(S_{n+1} = i \mid S_n = j_n)$$

donde $i, j_k = 0, 1$ con $k = 1, \ldots, n$. Lo dicho anteriormente también implica que

$$P(S_n = i \mid S_{n-1} = j) = P(S_2 = i \mid S_1 = j)$$

es decir la cadena de Markov es homogénea.

Sean T_1 y T_2 los tiempos en que las neuronas A y B se demoran en disparar, respectivamente. Teniendo en cuenta esto, la probabilidad de pasar del estado 1 de nuevo al estado 1, queda expresada como:

$$p_{11} = P(T_1 < T_2 \mid \text{ la neurona ganadora del turno anterior es A})$$

y la probabilidad de pasar del estado 2 de nuevo al estado 2 queda expresado como:

$$p_{22} = P(T_2 < T_1 \mid \text{ la neurona ganadora del turno anterior es B})$$

Ya se conocen las distribuciones de T_1 y T_2 (conociendo cuál neurona ganó en el turno anterior) por lo que las anteriores probabilidades se pueden calcular integrando (para T_1 con el modelo de neuronas conectadas con retroacción, y para T_2, sin retroacción, o al contrario según corresponda). Consecuentemente, $p_{12} = 1 - p_{11}$ y $p_{21} = 1 - p_{22}$.

Ahora se definen las siguientes variables aleatorias en general válidas en cualquier estado n:

$$T_1^w := T_1 \mid \{S_{n-1} = 1\}$$
$$T_1^l := T_1 \mid \{S_{n-1} = 2\}$$

Análogamente se tiene

$$T_2^w := T_2 \mid \{S_{n-1} = 2\}$$

$$T_2^l := T_2 \mid \{S_{n-1} = 1\}$$

Por lo tanto se puede escribir:

$$\begin{aligned} p_{11} &= P\left(T_1^w < T_2^l\right) \\ p_{22} &= P\left(T_2^w < T_1^l\right) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

y obviamente, $p_{12} = 1 - p_{11}$ y $p_{21} = 1 - p_{22}$. Si las condiciones sobre las dos neuronas son las mismas, es decir, si Z_1 y Z_2 son iguales en distribución, la matriz de transición

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

es simétrica.

Si T_s es el tiempo entre disparos del sistema completo, se puede hallar h_s, la densidad de T_s en forma sencilla teniendo en cuenta que

$$T_s = \begin{cases} \text{mín}(T_1^w, T_2^l) & \text{si 1 ganó en el turno anterior} \\ \text{mín}(T_1^l, T_2^w) & \text{si 2 ganó en el turno anterior} \end{cases}$$

entonces $h_s(t)$ queda expresado como

$$h_s(t) = h_{1min}(t)P(T_1 < T_2) + h_{2min}(t)P(T_1 > T_2) \tag{3.2.3}$$

donde $h_{1min}(t)$ y $h_{2min}(t)$ son las densidades de $\text{mín}(T_1^w, T_2^l)$ y $\text{mín}(T_1^l, T_2^w)$, respectivamente.

La probabilidad del evento $T_1 < T_2$ y la de su complemento, indica las probabilidades de victoria de cada neurona, que es ahora lo que se procede a encontrar.

Como ya es sabido, la probabilidad de estar en el estado i en el turno n,

$$P(S_n = i) = P(T_i < T_j)$$

($i = 1, 2$, $j \neq i$), se debe hallar con las ecuaciones del teorema de probabilidades estacionarias (teorema 1):

$$\begin{aligned} P(T_1 < T_2) &= P(T_1 < T_2) \cdot p11 + P(T_1 \geq T_2) \cdot p21 \\ P(T_1 < T_2) &+ P(T_1 \geq T_2) = 1 \end{aligned}$$

Así, resolviendo el sistema anterior (para $P(T_1 < T_2)$ y $P(T_1 \geq T_2)$) se obtiene,

$$P(T_1 < T_2) = \frac{1 - p_{22}}{p_{12} + 1 - p_{22}}$$

$$P(T_1 \geq T_2) = \frac{p_{12}}{p_{12} + 1 - p_{22}}$$

Lo anterior sólo es cierto si la cadena de Markov es irreducible y ergódica. De esta manera, el modelo depende de las probabilidades de transición que en la práctica pueden ser difíciles de hallar dependiendo de la forma de las densidades obtenidas para T_i^w y T_i^l (Pues se complican las integrales que llevan a la obtención estas probabilidades).

Para hallar la esperanza y la varianza de T_s, se debe tener, en particular, la distribución de las variables T_i^w y T_i^l, ya que se incluye un mínimo entre ellas y éste varía conforme tales distribuciones varían. Se puede escribir entonces

$$E(T_s) = E(\text{mín}(T_1^w, T_2^l))P(T_1 < T_2) + E(\text{mín}(T_1^l, T_2^w))P(T_1 > T_2) \tag{3.2.4}$$

Lo cual resulta de aplicar transfomada de Laplace en (3.2.3). Gracias a la independencia, la esperanza de las variables en la anterior ecuación queda expresada como:

$$E(\text{mín}(T_1^w, T_2^l)) = \int_0^\infty P(T_1^w > t, T_2^l > t)dt = \int_0^\infty P(T_1^w > t)P(T_2^l > t)dt \tag{3.2.5}$$

$$E(\text{mín}(T_1^l, T_2^w)) = \int_0^\infty P(T_1^l > t, T_2^w > t)dt = \int_0^\infty P(T_1^l > t)P(T_2^w > t)dt \tag{3.2.6}$$

Recuérdese que es posible encontrar la distribución de probabilidad de T^l y T^w integrando sobre la densidad expresada en [1] por (2.2.1), y la densidad expresada en la sección 3.1 por la fórmula 3.1.6, y así se tendría un procedimiento para hallar estos valores esperados. Cabe decir que si los estímulos llegan a las neuronas con la misma distribución de probabilidad (es decir, con Z_1 y Z_2 iguales en distribución) la esperanza $E(T_s)$ se simplificaría a

$$E(T_s) = E(\text{mín}(T_1^w, T_2^l)) \tag{3.2.7}$$

El cálculo para la varianza se logra usando de nuevo la transformada de Laplace, diferenciando dos veces y reemplazando en $Var(T_s) = E(T_s^2) - [E(T_s)]^2$. No se presenta la expresión completa pues es simplemente hallar la varianza con esta fórmula que depende de las distribuciones involucradas.

3.2.1. Esperanza de disparos clasificados como 1 o 2.

En la sección anterior se obtuvo la distribución de T_s, el tiempo que tarda el sistema completo WTA en disparar. Para la siguiente sección, se necesitarán los tiempos esperados en los que el sistema dispara pero teniendo en cuenta la neurona que provoca el disparo, de esta manera se tendrán tiempos clasificados como 1 o como 2, haciendo referencia a la neurona que disparó.

Se define ahora a T_{s1} como el tiempo entre dos disparos consecutivos marcados como 1. En este tiempo puede haber disparado la neurona 2 varias veces, así que cada disparo de la red se considera como un intento fallido antes de llegar al éxito marcado como 1. De

esta manera, se ve al tiempo T_{s1} como una suma de tiempos $m_1, m_2, ..., m_M$ donde M es una variable aleatoria con una distribución geométrica modificada dada por la siguientes expresiones

$$\begin{aligned} P(M=1) &= p_{11} \\ P(M=k) &= p_{12}p_{22}^{k-2}p_{21}, \qquad k=2,3,... \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y expresando a T_{s1} como

$$T_{s1} = \sum_{i=1}^{M} m_i \tag{3.2.9}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} E(T_{s1}) &= \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{M} m_i | M=n\right) P(M=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(E(m_1) + \sum_{i=2}^{n} E(m_i)\right) P(M=n) \\ &= E(m_1) + E(m_2)\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P(M=n). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

La serie en la anterior ecuación se desarrolla de la siguiente manera, usando propiedades de las series geométricas:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P(M=n) &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)p_{12}p_{22}^{n-2}p_{21} \\ &= p_{12}p_{21}\frac{1-p_{22}-(-1)p_{22}}{1-p_{22}^2} \\ &= \frac{p_{12}}{p_{21}} \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

y reemplazando lo anterior en (3.2.10), se llega a la expresión:

$$E(T_{s1}) = E(m_1) + E(m_2)\frac{p_{12}}{p_{21}} \tag{3.2.12}$$

$$= E(\text{mín}(T_1^w, T_2^l)) + \frac{p_{12}}{p_{21}}E(\text{mín}(T_1^l, T_2^w)). \tag{3.2.13}$$

Esta fórmula da el tiempo promedio que tarda el sistema en lanzar un spike clasificado como 1. Consecuentemente, se halla el tiempo promedio que tarda la red WTA en lanzar el mensaje 2, aquí llamado T_{s2}. Este cálculo se hace de manera análoga al valor esperado anterior quedando lo siguiente:

$$E(T_{s2}) \quad = \quad E(\text{mín}(T_2^w, T_1^l)) + \frac{p_{21}}{p_{12}} E(\text{mín}(T_1^w, T_2^l)). \tag{3.2.14}$$

En el siguiente ejemplo se eligen otras distribuciones para Z y para τ. En éste, se pretende trabajar en la sección de simulación y se aplicarán las fórmulas vistas hasta el momento.

Ejemplo 2. *Se escogen para la distribución de los tiempos Z, una distribución exponencial y para la distribución de τ también una distribución exponencial pero con diferente parámetro. De ahí, definimos $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, la densidad de la variable aleatoria Z, de nuevo para ambas neuronas, y $g(t) = \mu e^{\mu t}$ la densidad de τ, también para ambas neuronas.*

De igual forma que se hizo en el ejemplo 1 se procede a hallar las densidades h_1 y h_2. La función $f(1 - G_\tau)$ es

$$f(t)(1 - G_\tau(t)) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} e^{-\mu t} & si \;\; t > 0, \\ 0 & si \;\; t \leq 0. \end{cases} \tag{3.2.15}$$

cuya transformada de Laplace queda expresada por

$$\mathscr{L}\left(\lambda e^{-\lambda t} e^{-\mu t}\right)_{(s)} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu + s} \tag{3.2.16}$$

De forma similar, la transformada de fG_τ es

$$\mathscr{L}\left(f(t)(G_\tau(t))\right)_{(s)} = \mathscr{L}\left(\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\mu t})\right)_{(s)} = \frac{\lambda\mu}{(\lambda + \mu + s)(s + \lambda)} \tag{3.2.17}$$

Y usando (2.2.1) resulta

$$\mathscr{L}_{h1}(s) = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}}{\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu+s)(s+\lambda)}} = \frac{\lambda(s+\lambda)}{(s - r_1)(s - r_2)}, \tag{3.2.18}$$

donde r_1 y r_2 son las raíces del polinomio $s^2 + s(2\lambda + \mu) + \lambda^2$. Como μ y λ son mayores que cero, la fórmula cuadrática garantiza que estas raíces siempre existen y son distintas.

Se puede verificar este resultado con lo obtenido en [1], que también llega a la siguiente expresión invirtiendo la transformada de Laplace

$$h_1(t) = \frac{\lambda}{r_1 - r_2}\left[(\lambda + r_1)e^{r_1 t} - (\lambda + r_2)e^{r_2 t}\right] \tag{3.2.19}$$

Ahora para hallar a h_2 se usa la fórmula (3.1.6),

$$\mathscr{L}_{h2}(s) = \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}}{\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu+s)(s+\lambda)}} = \frac{\lambda^2}{(s - r_1)(s - r_2)}, \tag{3.2.20}$$

donde r_1 y r_2 son las mismas raíces definidas antes. Invirtiendo la tranformada se obtiene

$$h_2(t) = \frac{\lambda^2}{r_2 - r_1}\left[e^{r_2 t} - e^{r_1 t}\right]. \tag{3.2.21}$$

Con lo anterior ya se pueden hacer comparaciones de los modelos con retroacción y sin ella. El objetivo ahora es hallar las probabilidades p_{ij} para este caso particular. Por simplicidad, y para la simulación del siguiente capítulo, se escogen valores particulares para μ y para λ. Hacemos $\mu = 2/3$ y $\lambda = 5/24$, valores escogidos (a ojo) de tal forma que $1 < 1/\mu < 1/\lambda$ (valores esperados de las exponenciales) y de tal forma de que en el proceso no hayan estados absorbentes en la cadena. Efectivamente, al reemplazar estos valores en las fórmulas para p_{11} y p_{12} (integrando para hallar las probabilidades en 3.2.2), no resultan tales estados:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \int_0^\infty \int_0^{t_2} h_1(t1)h_2(t2)dt_1 dt_2 \\ &= 31/52 \qquad (3.2.22) \\ p_{12} &= 1 - 31/52 = 21/52 \qquad (3.2.23) \end{aligned}$$

Gracias a que estamos trabajando bajo las mismas condiciones sobre las dos neuronas, las dos probabilidades restantes son iguales a las anteriores, es decir,

$$\begin{aligned} p_{21} &= p_{12} = 21/52 \qquad (3.2.24) \\ p_{22} &= p_{11} = 31/52 \qquad (3.2.25) \end{aligned}$$

Ahora, como se dijo antes

$$\begin{aligned} E(\text{mín}(T_1^l, T_2^w)) &= \int_0^\infty P(T_1^l > t)P(T_2^w > t)dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{5e^{-t/24}}{6} + \frac{e^{-25t/24}}{6}\right)\left(\frac{25e^{-t/24}}{24} - \frac{e^{-25t/24}}{24}\right)dt \\ &= 10.54 \qquad (3.2.26) \end{aligned}$$

Y usando la fórmula (3.2.13), se llega a la conclusión de que el tiempo medio que se demora el sistema WTA en disparar un nuevo mensaje 1, luego de haber disparado un 1, es

$$E(T_{s1}) \quad = \quad 10.54 + 1(10.54) = 21.08 \tag{3.2.27}$$

Y por las condiciones de las neuronas en este ejemplo, éste también será el mismo tiempo medio para el mensaje 2, esto es, $E(T_{s2}) = 21.08$.

En la siguiente sección se usan las constantes halladas en el ejemplo anterior para una red específica usando el modelo de reloj de arena.

3.3. Resultados de simulaciones

La idea en la simulación es combinar el modelo de reloj de arena [3], con el modelo WTA en [7] y con el modelo de neuronas conectadas. Se toma la red mostrada en la figura 3.2 modelada en [7]

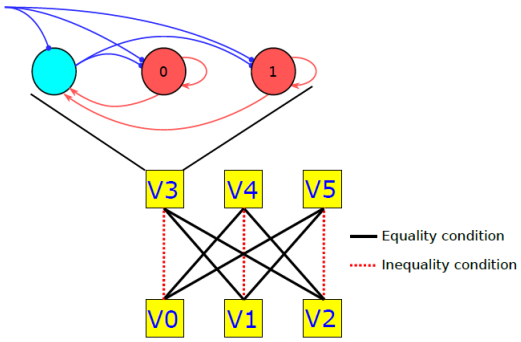

FIGURA 3.2. Gráfico general de la red a simular, tomado directamente de [7]

Cada cuadro amarillo representa una red WTA como la dada en el gráfico 2.5, con dos neuronas excitatorias marcadas como 0 y 1. Cada uno de esos cuadros envía un mensaje 0 o 1, dependiendo de cuál neurona gana en cada circuito WTA, por lo que la red completa puede expresar 64 mensajes diferentes. Estos 64 mensajes se ven como números binarios del 0 al 111111 (63), a los cuales también les llamamos palabras.

En la red hay nueve condiciones que debería cumplir la palabra que se esté expresando. Las líneas negras representan condiciones de igualdad, lo cual significa que si en V3, por ejemplo, expresa un cero, entonces V1 también debe expresar un Cero (ver gráfico 3.2). Por otro lado, las líneas rojas representan condiciones de desigualdad, lo que significa que si, por ejemplo, V3 expresa un Cero, entonces V0 debería expresar un 1. En el gráfico 3.3 se puede observar la forma en que las neuronas marcadas como cero en el primera fila, se conectan con las neuronas de la segunda fila.

Se organizaron las palabras de tal forma que la lectura se hace en el orden (V3,V4,V5,V0,V1,V2), de esta manera si todas expresan un cero excepto V2, la

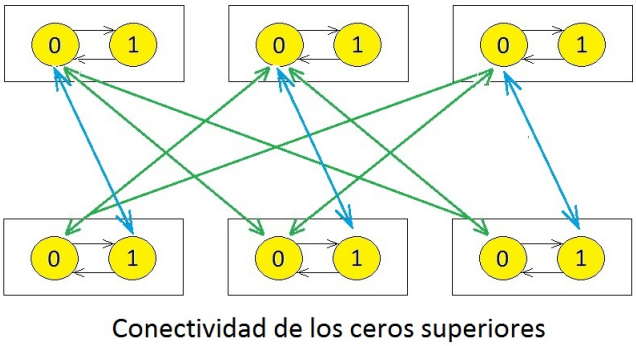

FIGURA 3.3. Red de neuronas a simular, explicación de cómo están conectadas las neuronas (sólo ceros superiores)

palabra sería 000001=1. Esta palabra en particular viola cuatro condiciones entre las nueve condiciones que se modelan. Es de notar que ninguna palabra cumple con todas las restricciones, las 64 palabras siempre van a fracasar en cumplir de dos a siete condiciones.

La simulación se hizo usando la idea del reloj de arena, en el que el tiempo que tarda en disparar una neurona particular es un valor que va disminuyendo y que cuando llega a cero se produce un disparo. Esto se hizo para las 12 neuronas, interactuando como circuitos WTA de dos en dos.

El tiempo U que se usa en el modelo de reloj de arena se tomó como constante para las 12 neuronas. Éste fue el valor de 21.08 del ejemplo 2 (este ejemplo funciona con distribuciones exponenciales para los tiempos Z y también para los tiempos τ en cada neurona). Cabe decir que a todas las neuronas se les dieron las mismas condiciones para la variable Z y la variable τ, así que no hay predilección por ninguna.

Aquí la idea es que la red, conforme pasa el tiempo, se quede en estados (palabras) que cumplen más condiciones y que tarde poco tiempo en los estados que violan más de ellas.

El diagrama de barras del tiempo en el que duró la red en una palabra o estado se puede ver en la figura 3.4

Las palabras más beneficiadas fueron las palabras que efectivamente cumplieron más restricciones, a saber, 1,11,13,15,18,21,22,29,30,31,34,35,36,43,44,47,50,52,54 y 63 (escritas en binario) que violan solo de dos a tres condiciones.

El diagrama de dispersión 3.5 muestra la duración de la red en cada palabra en función de las condiciones violadas. Es de resaltar cómo la red gasta más tiempo en las palabras con menos restricciones violadas y menos tiempo en las que violan más restricciones.

En el artículo [7], usan una propiedad de las redes biológicas llamada Inhibición Rítmica, propiedad que al simularse permite un mejor comportamiento de los resultados como se puede observar en el gráfico 3.6 tomado de [7]. Obsérvese cómo en las palabras que violan

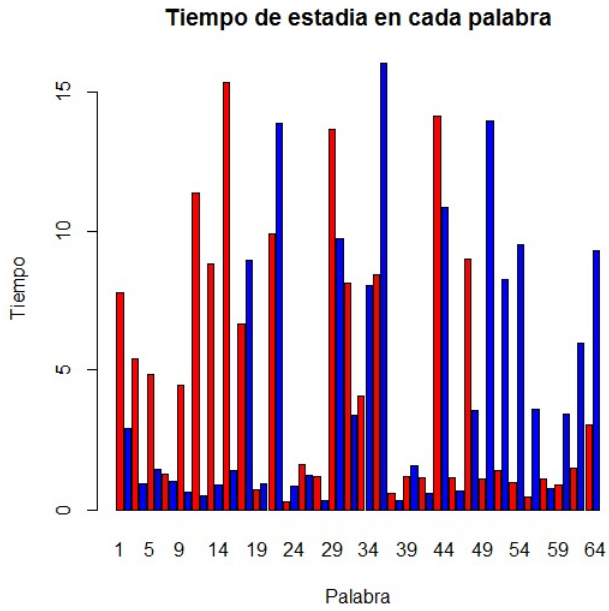

FIGURA 3.4. Tiempo que tarda la red emitiendo cada palabra (cada palabra está numerada del 1 al 64, siendo 64 el mismo 0)

dos o tres condiciones, la red permanece más tiempo que en las demás palabras cuya duración de estadía es casi cero. Comparando a 3.5 con 3.6, se puede apreciar el mismo comportamiento de la duración, altos valores para dos y tres y bajos valores para las palabras que violan de cuatro a siete condiciones, a pesar de ser simulaciones realizadas con métodos diferentes.

En [7], Mostafa et. al. explican cómo el modelar la inhibición rítmica disminuye los tiempos de estadía en palabras no deseadas, lo que resulta interesante para una posterior investigación, ya que el comportamiento de los tiempos de duración es mejor en la figura 3.6.

De esta forma se ha construido un modelo que usa menos variables que el modelo presentado en [7] (ver final del artículo la lista de variables a tener en cuenta) y que es consistente con éste.

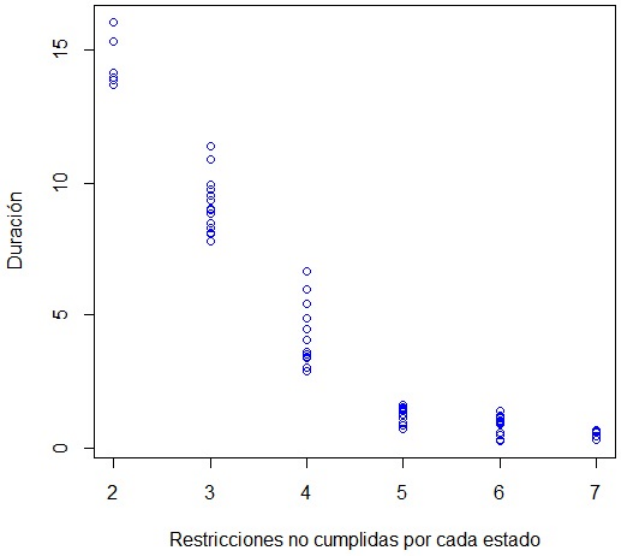

FIGURA 3.5. Tiempo de estadía en cada estado, en el eje x el número de condiciones violadas

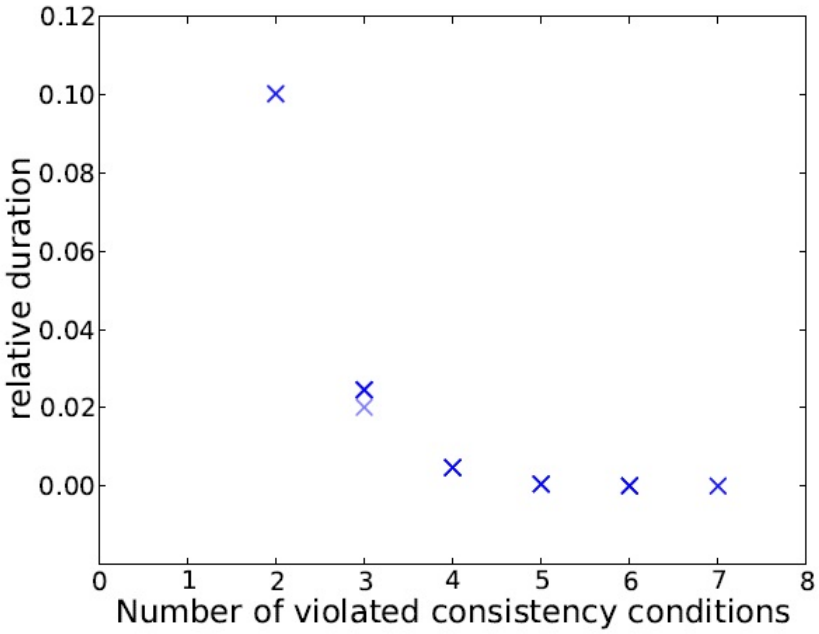

FIGURA 3.6. Tiempo de estadía en cada estado (normalizado), gráfico sacado directamente del artículo [7]

Conclusiones

- Para poder realizar el modelo de neuronas WTA con tres neuronas y combinarlo con el modelo de neuronas conectadas, no fue suficiente el modelo con retroacción instantánea, sino que fue necesario desarrollar ecuaciones para el modelo de neuronas conectadas sin retroacción instantánea (3.1.6, 3.1.7, 3.1.8), lo cual se realizó con la misma metodología usada en [1].

- De manera análoga a lo presentado en [8], se modificó el modelo WTA, el cual cuenta con tres neuronas: dos excitatorias y una inhibitoria, con el fin de tener en cuenta solo dos neuronas en lugar de tres con las mismas condiciones. Por lo tanto, los resultados obtenidos en las simulaciones hacen referencia a 18 neuronas y no a 12.

- Se dedujeron ecuaciones que caracterizan a la red WTA, a saber, la distribución de probabilidad de los impulsos de salida, la matriz de transición entre estados (mensajes), tiempos esperados entre disparos clasificados como bit 0 o bit 1, o simplemente disparos sin clasificar, y varianzas de las principales variables aleatorias.

- Los resultados de la simulación arrojaron datos satisfactorios acerca del comportamiento de la red, pues es lo que se espera de redes con tales conexiones entre neuronas. Así pues, se ve en los gráficos que la red pasa mayor tiempo en las palabras (arreglos de ceros y unos) que cumplen de mejor manera las condiciones dadas implícitamente por la misma red.

- En la figura 3.6, tomada de [7], se puede apreciar que las palabras que violan cuatro o más restricciones tienen tiempos insignificantes de estadía, lo cual no es tan sobresaliente en 3.5. Esto se da principalmente por la inhibición rítmica que se simula en [7] (fenómeno que se ha observado en las redes neuronales reales) ya que permite que la red pase más tiempo en palabras que sólo violan dos o tres condiciones. De esta manera, se sugiere incluir este fenómeno en próximos estudios para que la red pase más tiempo los estados que cumplen el mayor número de requerimientos.

Bibliografía

[1] Viswanathan Arunachalam, Raha Akhavan-Tabatabaei, and Cristina López, *Results on a Binding Neuron Model and Their Implications for Modified Hourglass Model for Neuronal Network*, Hindawi Publishing Corporation (2013).

[2] Liliana Blanco Castañeda, Viswanathan Arunachalam, and Selvamuthu Dharmaraja, *Introduction to probability and stochastic processes with applications*, first ed., Wiley, 2012.

[3] Marie Cottrell, Florence Piat, and Jean-Pierre Rospars, *A Stochastic model for interconnected neurons*, Elsevier BioSystems (1997), no. 40, 29–35.

[4] Peter Dayan and L. F. Abbott, *Theorical Neuroscience, computational and mathematical modeling of neural system*, Terrence J. Sejnowski and Tomaso Poggio, 2001.

[5] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*, The Journal of physiology (1952), no. 117 (4), 500–544.

[6] J. Medhi, *Stochastic Processes*, second ed., New Age International Publisher, 2001.

[7] Hesham Mostafa, Lorenz K Müller, and Indiveri Giacomo, *Rhythmic inhibition allows neural networks to search for maximally consistent states*, Institute for Neuroinformatics (2015).

[8] Matthias Oster, Rodney Douglas, and Shih-Chii Liu, *Computation with Spikes in a Winner-takes-all Network*, Neural computation (2009), no. 21, 2437–2465.

[9] Sidney Resnick, *Adventures in Stochastic Processes*, segunda ed., Birkhäuser, Bostón. Basel. Berlín, 1992.

[10] Sheldon M. Ross, *Introduction to probability models*, tenth ed., Wiley, 2010.

[11] Alexander K. Vidybida, *Input-Output relations in binding neuron*, Elsevier BioSystems (2007), no. 89, 160–165.

[12] Alexander K. Vidybida, *Output stream of binding neuron with instantaneous feedback*, The European Physical Journal B (2008), no. 65, 577–584.

[13] Alexander K. Vidybida, *Relation between firing statistics of spiking neuron with instantaneous feedback and without feedback*, arXiv:1412.7958 [q-bio.NC] (2015).

[14] Alexander K. Vidybida and Kravchuk K. G., *Delayed Feedback makes neuronal firing statistic non-markovian*, Ukrainian Mathematical Journal **64** (2012), no. 12.