



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

**DESARROLLO DE PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE SEGUNDO
AÑO DE EDUCACIÓN BÁSICA, CON EL USO DE SITUACIONES PROBLEMA DE
ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS**

ADRIANA PATRICIA ARIAS CARMONA

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2021

**DESARROLLO DE PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE SEGUNDO
AÑO DE EDUCACIÓN BÁSICA, CON EL USO DE SITUACIONES PROBLEMA DE
ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS**

ADRIANA PATRICIA ARIAS CARMONA

Trabajo Final de maestría, presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

DIRECTOR:

Dr. TULIO AMAYA DE ARMAS

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2021

Agradecimientos

A mi madre María Teresa, que desde el cielo me vigila y me cuida a que cumpla todos mis sueños. Te amo Mamá.

A mi esposo Cesar Vera Correa, que con su tiempo y paciencia ha sabido fortalecer mis metas a alcanzar. Amore mío Te amo.

A mi hija Catalina, que gracias a mis logros tendrás el empuje para que vivencies los tuyos. Mi catico Te amo desde mi ser.

A mi hija Sofía, gracias a tu pequeña experiencia he sabido que siempre es posible lograr lo que se propone. Mi Sofi Te amo desde mi ser.

A mi tutor Tulio Amaya, gracias a su experiencia, paciencia y fortaleza, me estimula para que siga luchando por mis ideales. Infinitas gracias.

Resumen

En este informe se presentan los resultados de un trabajo cuyo objetivo fue analizar el desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes de segundo año de educación básica, con el uso de situaciones problema de estructuras multiplicativas de la Institución Educativa Nuevo Horizonte Paulo VI de Medellín. La muestra de informantes estuvo constituida por 76 estudiantes de segundo año, a quienes se les pidió resolver seis cuestionarios, los cuales contienen situaciones problema contextualizados de estructuras multiplicativas. La información se recogió utilizando entrevistas basadas en las soluciones dadas a las tareas que se propusieron en los cuestionarios, asimismo, la información se analizó utilizando la técnica análisis de contenido, según criterios temáticos, por agrupación de ideas básicas similares de acuerdo a las categorías de análisis previamente establecidas.

Los resultados evidencian que los estudiantes usaron variadas estrategias de solución, como sumas repetidas por sumandos iguales, tanteo y agrupación de valores convencionales. Algunas de las respuestas dadas por algunos estudiantes superaron las expectativas generadas en relación con los estándares básicos de competencias en matemáticas para el segundo año de educación básica primaria, sin embargo, se debe tener en cuenta que la mayoría de los cuestionarios fueron resueltos utilizando herramientas virtuales, y no se tiene la certeza de que hayan sido resueltos por los estudiantes, sin ayuda de un adulto.

Se concluye destacando la pertinencia del marco teórico utilizado, pues el papel de los registros y representaciones semióticas fungieron como elementos articuladores de los objetos matemáticos, y del uso que los estudiantes hicieron de las relaciones de orden y los valores posicionales, para dar solución a los problemas y responder las cuestiones por las que se indagaron.

Palabras clave: Pensamiento numérico, situaciones problema, estructuras multiplicativas, situaciones didácticas.

Abstract

This report presents the results of a work whose objective was to analyze the development of numerical thinking in second-year students of basic education, with the use of problem situations of multiplicative structures at the Nuevo Horizonte Paulo VI Educational Institution in Medellín. The sample of informants consisted of 76 second-year students, who were asked to solve six questionnaires, which contain contextualized problem situations of multiplicative structures. The information was collected using interviews based on the solutions given to the tasks that were proposed in the questionnaires, likewise, the information was analyzed by using the content analysis technique, according to thematic criteria, by grouping similar basic ideas according to the categories of previously established analyzes.

The results show that the students used various solution strategies, such as repeated sums by equal addends trial and error, and grouping of conventional values. Some of the answers given by some students exceeded the expectations generated in relation to the basic standards of competence in mathematics for the second year of primary basic education, however, it should be taken into account that most of the questionnaires were solved by using virtual tools, and it is not certain that they have been solved by the students, without the help of an adult.

It concludes by highlighting the relevance of the theoretical framework used, since the role of the records and semiotic representations acted as articulating elements of the mathematical objects, and the use that the students made of the order relations and the positional values, to solve the problems and answer the questions for which they were asked.

Keywords: Number thinking, problem situations, multiplicative structures, didactic situations.

DEVELOPMENT OF NUMERICAL THINKING IN SECOND YEAR STUDENTS OF BASIC
EDUCATION, WITH THE USE OF PROBLEM SITUATIONS OF MULTIPLICATIVE
STRUCTURES

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN	13
CAPÍTULO 1. DISEÑO TEÓRICO	15
1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	15
1.1 Descripción del Problema.....	15
1.2 Formulación de la pregunta	17
1.3 Justificación	17
1.4 Objetivos	19
CAPÍTULO 2. MARCO REFERENCIAL.....	20
2 MARCO REFERENCIAL.....	20
2.1 Marco de Antecedentes	20
2.1.1 Antecedentes en la resolución de situaciones problema de estructuras aditivas.....	21
2.1.2 Antecedentes en la resolución de situaciones problema de estructuras multiplicativas....	23
2.1.3 Antecedentes en la resolución de situaciones combinadas de problema de estructuras aditivas y multiplicativas.....	27
2.2 Referentes Teóricos.....	28
2.2.1 Las situaciones problema en la enseñanza de la matemática	29
2.2.2 Las representaciones semióticas	45
2.2.3 Desarrollo intelectual y aprendizaje	47
2.2.4 Relación entre desarrollo y aprendizaje	48
2.2.5 El aprendizaje colaborativo	51
2.2.6 Condiciones para un aprendizaje significativo	54
2.2.7 La comprensión en matemáticas.....	57
2.2.8 El aprendizaje de las matemáticas mediado por el contexto	61
2.3 Referentes Conceptuales	67
2.3.1 Pensamiento numérico	67
2.3.2 Operaciones de estructuras aditivas	68
2.3.3 Estructuras multiplicativas	69
2.4 Referente Legal o Normativo	75
2.5 Referente Espacial o Contextual.....	76
CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO	79

3	DISEÑO METODOLÓGICO	79
3.1	Muestra de informantes.....	80
3.2	Instrumentos y técnicas utilizados para recoger la información	81
3.3	Procesamiento y análisis de la información	82
CAPITULO 4. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN		84
4	RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN	84
CAPITULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES		98
5	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	98
5.1	Conclusiones	98
5.2	Recomendaciones	100
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		103

Lista de tablas

Tabla 1. Categorías y elementos para el análisis de la información 82

Lista de Figuras

Figura 1. Billeto de cien mil pesos colombianos	71
Figura 2. Billetes colombianos de varias denominaciones	72
Figura 3. Ilustración figural de una multiplicación como sumas repetidas.....	73
Figura 4. Modelado de figuras con una matriz rectangular con rejillas iguales.....	74
Figura 5. Manuscrito de José al dar solución a la situación a dos de las situaciones planteadas.....	87
Figura 6. Manuscrito de Samuel al ilustrar algunas situaciones propuestas	94
Figura 7. Manuscrito de Karen al resolver la situación donde los niños compran entradas para un circo.	97

Lista de anexos

Anexo A. Situaciones correspondientes a las aplicadas en el primer taller.....	111
Anexo B. Situaciones correspondientes a las aplicadas en el taller 2.....	115
Anexo C. Situación 3, correspondiente a las aplicadas en el taller 3.....	118
Anexo D. Situaciones correspondientes a las aplicadas en el taller 4.....	121
Anexo E. Situaciones correspondientes a las aplicadas en el taller 5.....	123
Anexo F. Situación problema 6, aplicada a los estudiantes.....	125
Anexo G. Foto de tres niños resolviendo uno de los talleres.....	128
Anexo H. Foto de niños resolviendo taller 1.....	129
Anexo I. Niño resolviendo taller en casa.....	130
Anexo J. Foto de niño resolviendo un taller en casa.....	131
Anexo K. Foto de niña resolviendo taller en casa.....	132

INTRODUCCIÓN

El entendimiento de las operaciones básicas es fundamental para el dominio de cualesquiera otras habilidades matemáticas, puesto que se requiere su comprensión y uso para poder resolver problemas matemáticos a cualquier nivel. Indagar las dificultades de los estudiantes sobre el dominio y uso de operaciones de estructura tanto aditivas como multiplicativas, y de las relaciones entre ambas estructuras, podría facilitar comprender los aspectos donde éstos tienen ciertas limitaciones. Luego de tener conocimientos claros sobre estas limitaciones, poder orientarlos en la consecución de fuertes vínculos entre las representaciones de los objetos matemáticos que estudien, y con ello la comprensión de estos temas de tanta relevancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje en esta área.

En este trabajo se indaga sobre las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver situaciones problema de estructuras multiplicativas, sobre la verificación y uso de condiciones necesarias para resolver dichos problemas, hechas por los estudiantes al resolverlos, y sobre la comprensión y uso de estos estudiantes de las estructuras aditivas al resolver situaciones problema de estructuras multiplicativas.

En el primer capítulo se hace el planteamiento del problema, iniciando con una descripción de éste, en seguida se presenta la formulación del problema, y luego la justificación y los objetivos. En el segundo capítulo se presenta el marco referencial, el cual se ha subdividido en cinco

epígrafes: antecedentes, referentes teóricos, referentes conceptuales, referentes legales o normativos y referente espacial o contextual. Los antecedentes se subdividieron en tres tipos: los que trabajan problemas de estructuras aditivas, los de estructuras multiplicativas y los que trabajan la combinación entre problemas de ambas estructuras.

En el marco teórico, se abordan fundamentos en aspectos tales como las situaciones problema en el aprendizaje de las matemáticas, la observación como elemento fundamental en los procesos evaluativos, las representaciones semióticas, desarrollo intelectual y aprendizaje, el aprendizaje colaborativo, condiciones para un aprendizaje significativo, la comprensión en matemáticas y el aprendizaje de las matemáticas mediado por el contexto.

En los referentes conceptuales, se hace una revisión de aspectos como: los números y los niños, pensamiento numérico, operaciones de estructuras aditivas, estructuras multiplicativas, estrategias lúdicas y estrategias de enseñanza. Enseguida se muestran algunos referentes legales o normativos y referentes espaciales o contextuales.

En el tercer capítulo se presenta el diseño metodológico, en el cual se presenta el tipo de estudio, la muestra de informantes, instrumentos y técnicas utilizadas para recoger la información y el procesamiento y análisis que se hace de la información. En el cuarto capítulo se presentan los resultados y el análisis de la información y en el quinto capítulo se presentan las conclusiones y las recomendaciones.

CAPÍTULO 1. DISEÑO TEÓRICO

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Seguidamente se hace una descripción del problema de investigación, se presenta la formulación del problema, se hace la justificación de éste y también se presentan los objetivos.

1.1 Descripción del Problema

Uno de los grandes objetivos en la enseñanza de la matemática, es lograr que los estudiantes de la básica primaria, apliquen las operaciones fundamentales en su vida cotidiana con problemas contextualizados que lleven al niño a pasar de lo concreto a lo abstracto de forma lógica, secuencial y estructurada. De igual forma se debe despertar en el niño el interés de realizar apropiadamente las operaciones pertinentes y adecuadas a las necesidades que se le presenten, de manera consciente produciendo y articulando las representaciones semióticas de los objetos estudiados.

La producción y articulación de estas representaciones deben conllevar a que el estudiante aprenda a resolver situaciones problema que involucren estructuras lógico-matemática, tanto aditivas como multiplicativas, y que logren pasar de una estructura a otra de forma natural, ya que estas representaciones son esenciales para resolver problemas de la vida real (Chinnappan, 2002), por lo que demandan del alumno un gran esfuerzo por apropiarse de los conceptos que se ponen en juego de acuerdo al nivel de complejidad.

Además, el manejo y uso de las operaciones aditivas y multiplicativas son fundamentales en cualquier persona, pues son indispensables para el proceso de enseñanza y de aprendizaje de otros temas matemáticos más avanzados que se pueden aplicar transversalmente a otras áreas del conocimiento. Como es sabido, las estructuras aditivas son la base de las estructuras multiplicativas, ya que, los primeros pasos de los niños en el razonamiento multiplicativo se derivan directamente de sus experiencias en el razonamiento aditivo (Jacob y Willis, 2003). Sin embargo, el solo desarrollo del pensamiento aditivo no es suficiente para que los niños logren progresar matemáticamente, ya que todas las multiplicaciones no se dan por sumas repetitivas sino por otras estrategias que propone el estudiante al llegar a la solución por otro procedimiento; entre tanto el alumno llega a comprender y analizar las diferencias entre los dos tipos de razonamiento para luego ser utilizados independientemente resolviendo problemas cotidianos que los ayuden a desempeñarse adecuadamente en la sociedad.

No obstante, ambos pensamientos, aditivo y multiplicativo, sirven como fundamento al conocimiento matemático en cualquier grado, aspecto que determina, en gran medida, la importancia de desarrollarlos adecuadamente desde los primeros años de escolaridad. Siendo el papel del docente como facilitador de la primera infancia, orientando de una manera didáctica, amena e innovadora la enseñanza para que los procesos de aprendizaje matemáticos que realiza el estudiante, puedan ser asimilados y aplicados significativamente en los diversos campos del conocimiento que presenta en su diario vivir.

Si estas estructuras, aditivas y multiplicativas, no se realizan adecuadamente el estudiante puede habituarse a cometer errores. Sin embargo, aunque los errores son indispensables en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, la falta de tratamiento para minimizarlos genera un desfase de nivel a nivel en la apropiación del concepto y la aplicación de diversos procedimientos, que en algunas ocasiones son tomados como errados, llevando al niño a hacer análisis inapropiados de situaciones que se le presenten en la vida cotidiana, lo que puede ser nocivo para su desarrollo personal y profesional. Es por ello que como profesional de la Educación indago en la siguiente pregunta:

1.2 Formulación de la pregunta

¿Cómo potenciar el desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes de segundo año de educación básica de la Institución Educativa Nuevo Horizonte Paulo VI de Medellín, utilizando situaciones problema de estructuras multiplicativas?

1.3 Justificación

Con esta investigación sobre el desarrollo del pensamiento numérico utilizando situaciones problema de estructuras multiplicativas, se analizan diversos procesos que establecen relación entre lo que se trabaja en forma teórico-práctica y lo que se logra conceptualizar, con actividades claras y secuenciales que serán evidentes en el momento de la aplicación de situaciones relacionadas con estructuras multiplicativas.

Año tras año los estudiantes van llegando con deficiencias en cuanto a la apropiación de conceptos matemáticos y al manejo de algoritmos, por lo que avanzar a estructuras más complejas es difícil para que ellos adquieran las competencias requeridas en el grado superior. Pasar de lo concreto a lo abstracto, leer e interpretar un problema matemático del lenguaje natural al lenguaje simbólico es un obstáculo para que el niño adquiera aprendizajes significativos.

Asimismo, diversos trabajos de investigación reportan dificultades de los estudiantes en el uso de las estructuras aditivas y multiplicativas con el paso de una a otra (Chinnappan, 2002; Jacob y Willis, 2003; Wright, 2011) lo que muestra esta dificultad puede ser de origen epistemológico y por tanto afectar a toda la población. Si esto no se analiza desde lo global y se corrige en lo territorial -niños de la Institución Nuevo Horizonte-, suele ocurrir un desfase en su proceso educativo, perpetuando el bajo nivel educativo, sociocultural y laboral de sus progenitores.

Es papel del educador guiar y corregir en el momento adecuado estos caminos que pueden convertirse en un potencializador o limitante del aprendizaje significativo del niño en cuanto a la apropiación de estructuras cognitivas. Desde los primeros años de escolaridad el educando debe ver la matemática como algo que le sirve para aplicar en su vida cotidiana a través de las diversas estrategias pedagógicas que le plantea su maestro base.

Dentro del tema abordado se ha seleccionado las cuatro operaciones básicas que toda persona debe aplicar a lo largo de toda su vida en cualquier contexto. Estas se han agrupado en estructuras aditivas y multiplicativas. El manejo inadecuado o adecuado de estos procesos en los primeros años de escolaridad a través de diversas estrategias figurales, algorítmicas y secuenciales

hacen que se potencie o no sus competencias comunicativas, de razonamiento, de resolución de problemas y también las competencias ciudadanas y laborales.

En la aplicación de la propuesta se benefician los estudiantes de segundo año de educación básica primaria de la Institución Educativa Nuevo Horizonte Paulo VI, de forma directa y a futuro se fortalecerán las competencias cognitivas y ciudadanas de los estudiantes de grados superiores en la resolución de problemas de mayor complejidad, ya que los problemas están contextualizados a su entorno inmediato, encaminados a la comprensión y aplicación de estructuras aditivas y multiplicativas.

Por lo que redundará en la adquisición de nuevos conocimientos, siendo incorporados a aprendizajes significativos ya adquiridos, mejorando ostensiblemente la resolución de problemas, el razonamiento, el espíritu crítico, los niveles de desempeño tanto en las pruebas internas como externas y en la calidad de vida de su comunidad.

1.4 Objetivos

General

Analizar el desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes de segundo año de educación básica de la Institución Educativa Nuevo Horizonte Paulo VI de Medellín, con el uso de situaciones problema de estructuras multiplicativas.

Específicos

➤ Describir los errores que cometen estudiantes de segundo año de educación básica primaria de la Institución Educativa Nuevo Horizonte Paulo VI de Medellín, al resolver situaciones problema de estructuras multiplicativas.

➤ Describir el uso dado por los estudiantes de segundo año de educación básica primaria de la Institución Educativa Nuevo Horizonte Paulo VI de Medellín, a las relaciones de orden, los valores posicionales de los números y las representaciones, al resolver situaciones problema de estructuras multiplicativas.

➤ Analizar las estrategias utilizadas por estudiantes de segundo año de educación básica primaria de la Institución Educativa Nuevo Horizonte Paulo VI de Medellín, al resolver situaciones problema de estructuras multiplicativas.

CAPÍTULO 2. MARCO REFERENCIAL

2 MARCO REFERENCIAL

2.1 Marco de Antecedentes

Un tema que se ha prestado para grandes controversias entre educadores e investigadores en matemática educativa, es la forma de abordar la matemática para que quién aprende tenga las mejores y mayores posibilidades de comprender y aplicar en su contexto, el tema que se aborde. Esto porque el aprendizaje de la matemática, históricamente ha sido problemático, como se puede evidenciar en diversas investigaciones (Fabra y Deulofeaut, 2000; Amaya y Sgreccia, 2014), en las que se indagan acerca de las dificultades presentadas por estudiantes de nivel básico o medio,

al resolver problemas matemáticos. Estos trabajos y otros de los que se abordan más adelante han de plantearse la forma cómo el estudiante adquiere el conocimiento, las estrategias que utiliza para hacerlo, bajo qué condiciones se producen los aprendizajes, o los tipos de dificultades que presentan los alumnos al resolver problemas de estructuras tanto aditivas como multiplicativas.

En esta sección se presenta el resultado de la búsqueda de las investigaciones científicas y tesis de maestría y doctorado, que en educación matemática han abordado el estudio de la resolución de problemas que involucren estructuras aditivas y multiplicativas para potenciar el pensamiento numérico. Los trabajos en los que he encontrado estricta relación con este tema de investigación, el cual se ha denominado - *Desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes de segundo año de educación básica con el uso de situaciones problema de estructuras multiplicativas* - se han clasificado en tres grupos: 1) Antecedentes en la resolución de situaciones problema de estructuras aditivas 2) Antecedentes en la resolución de situaciones problema de estructuras multiplicativas y 3) Antecedentes en la resolución de situaciones combinadas de problema de estructuras aditivas y multiplicativas. A continuación, se hace un esbozo de ellos.

2.1.1 Antecedentes en la resolución de situaciones problema de estructuras aditivas

Inicialmente se tiene a Butto y Martínez (2012), quienes en un contexto mexicano estudiaron las competencias matemáticas que desarrollan los niños al resolver problemas aditivos verificando la viabilidad de una secuencia didáctica que integre tipos y sub-tipos de problemas aditivos. La metodología que se utilizó es de tipo explicativo donde participaron 10 estudiantes de segundo grado a través de cuestionarios iniciales de escritura numérica y resolución de problemas aditivos,

seguidos de entrevistas clínicas individuales. Posteriormente se realizó una secuencia didáctica de problemas aditivos y se finalizó con un cuestionario final.

En lo que se refiere a las conclusiones, señala Butto y Martínez (2012) que cuando los niños tienen claro la parte conceptual de los problemas de estructura aditiva, son capaces de resolver diferentes tipos y subtipos de problemas aditivos, desarrollando competencias para comprender los problemas. Además, recalca Butto y Martínez (2012), que los niños modifican los soportes de representaciones externos cuando se enfrentan al proceso de resolución de un problema, constituyéndose éstos en una parte fundamental en la cognición del niño, pues ésta cambia mientras, el niño interactúa con sistemas externos de representación.

La investigación de Butto y Martínez (2012) está en estrecha relación con la que se está esbozando ya que es menester que los alumnos tengan claro el concepto de adición siendo capaces de representarlos bajo cualquier estructura semiótica ya sea figural, de conteo, secuencial o aritmética, contextualizados al ambiente del estudiante de tal forma que pueda modificar los soportes de representación cognitiva.

En un segundo trabajo reportado por Castillo, Paz y Marmolejo (2017), quienes plantean como propósito resolver problemas de ecuaciones en situaciones aditivas de composición y transformación cuando hay un valor desconocido. La metodología se lleva a cabo mediante una estrategia didáctica en la cual los estudiantes son capaces de jugar con los datos en cualquier posición conservando las reglas de juego, ello conlleva a generar una serie de preguntas por cuál operación utilizar, en qué momento y en qué lugar de la ecuación ha de quedar. El papel del

estudiante cada vez es más retador ya que ha de hacer transformaciones inversas para llegar al resultado.

La investigación que se está llevando a cabo se relaciona con la de Castillo et al. (2017), cuando son los niños quienes a través del planteamiento de una situación problema han de jugar con las posibles variables a través de diversas estrategias dadas por el profesor o planteadas por los mismos estudiantes, para llegar a una misma conclusión. Siendo el papel del maestro procurar porque los alumnos sigan resolviendo los problemas desde la perspectiva de ellos y no del adulto. Pero si corresponde al docente hacer que el estudiante que está equivocado, aprenda a interpretar bien lo que se le plantea, para que el niño aprenda a buscar por sí mismo la solución a los problemas.

2.1.2 Antecedentes en la resolución de situaciones problema de estructuras multiplicativas

Para Ivars y Fernández (2016), el objetivo del estudio se caracterizó por la evolución de los niveles de éxito y de las estrategias empleadas en la resolución de los problemas de estructura multiplicativa, en 273 estudiantes de educación primaria (primero a sexto) con edades entre los 6 y 12 años, de los cuales 44 son de grado segundo. Así mismo los estudiantes emplearon estrategias de modelización y conteo, y los más avanzados emplearon el algoritmo. Sin embargo, el uso de este, no implicó una disminución de las estrategias incorrectas en la resolución de problemas.

Dicha investigación, sugiere que la introducción del algoritmo en la resolución de problemas multiplicativos conlleva a la disminución del uso de otras estrategias correctas que

implican una comprensión adecuada de la situación, pero no conllevan una mejora en la comprensión de dichas situaciones. Por otro lado, los resultados obtenidos sugieren: proponer una clasificación de los problemas en función del nivel de dificultad y mostrar las características de la evolución de uso de las estrategias correctas e incorrectas (Ivars y Fernández, 2016), al disponer de un repertorio amplio de estrategias que les permitan solucionar con cierta solvencia problemas de estructura multiplicativa desde los primeros años.

Es de resaltar como la investigación de Ivars y Fernández (2016) coincide con la que he adelantado en esta tesis ya que se percibe en los alumnos que presentaron la prueba, que no todos entendieron las preguntas y por ende la forma de resolverlas fue diferente en cada uno. Así mismo, la estrategia utilizada por ellos como el conteo, la modelización figural y algunos algoritmos fueron los correctos, desde el punto de vista del alumno, pero no desde la interpretación correcta del enunciado. Por ello es conveniente, hacer la retroalimentación en el acto y corroborar mediante distintas estrategias metodológicas el aprendizaje significativo de estas.

En un segundo aspecto, se presenta la tesis de maestría de Acosta (2018), quien propone una intervención centrándose en una unidad didáctica al atender las dificultades de estudiantes de grado segundo frente al desarrollo de problemas multiplicativos de estructura simple fortaleciendo el proceso lecto-escritor.

Dicha estrategia bajo la metodología, investigación-acción, contó con la aplicación de una prueba diagnóstica con problemas de estructura simple, solucionados con algoritmos

multiplicativos. A partir de esta acción, identificó dificultades por parte de los estudiantes frente a la comprensión de textos y la solución de problemas.

Como conclusión, Acosta (2018) plantea que la secuencia didáctica basada en resolución de problemas fortalece el análisis, interpretación y planteamiento de enunciados matemáticos de tipo multiplicativo, permitiendo al estudiante establecer nuevos procedimientos analíticos frente a diversas contextualizaciones y representaciones numéricas. De igual forma, concluye que los pasos planteados por Polya en el año 1965 siguen vigentes hoy en día para resolver y plantear problemas que hace que el estudiante encuentre una ruta que lo guíe a dar solución al mismo, de una forma más clara y sencilla (Acosta, 2018), donde el niño logra identificar los datos más relevantes dentro de un enunciado, estableciendo para ello también un paso a paso que le ayude a la consecución de un resultado óptimo y correcto en problemas matemáticos.

En relación con esta investigación, se coincide con Acosta (2018) en la correcta lectura e interpretación del planteamiento del problema para llegar a un adecuado proceso matemático, es decir, que el alumno plasme sobre el papel la forma cómo entendió el problema ya sea a través de diversas estructuras semióticas como el conteo, la representación, la aplicación del algoritmo y haga las comparaciones entre ambas para que él mismo saque sus propias conclusiones.

En un tercer momento, se analiza el contexto mexicano, con una investigación de maestría cuyo objetivo es evaluar el impacto de una secuencia basada en la teoría de situaciones didácticas -TSD- en el proceso de aprendizaje significativo de estudiantes de tercer año, respecto a la estructura multiplicativa a partir de la estructura aditiva. La metodología utilizada por Medina

(2017) es de carácter cualitativo donde interesa saber cómo se da la dinámica o cómo ocurre el proceso, es decir, la forma cómo impacta una secuencia de actividades para la comprensión de una temática a partir de un diagnóstico inicial y una evaluación final. Se contó con la participación de 30 estudiantes entre los 8 y 10 años de edad.

Como conclusiones se evidencia: en primer lugar, la empatía o el desagrado por la asignatura de matemática, mostrando en muchos casos bloqueo o desmotivación por la dicotomía entre los contenidos matemáticos y el contexto social. En segundo lugar, los conocimientos previos adquiridos en la adición son la base para llegar a la multiplicación a partir de actividades que involucran situaciones de la cotidianidad. Y, por último, los estudiantes no comprenden los ejercicios cuando están descontextualizados, desarrollándolos de manera mecánica o no haciéndolos.

Existe una diferencia entre este trabajo de investigación y el presente, donde Medina (2017) utiliza una metodología cuasi experimental, sin embargo, hay aspectos de mucha utilidad con respecto al que se está presentando por el tipo de situaciones contextualizadas utilizadas. Se evidencia, que cuando se coloca una situación problema ilustrándola mediante una imagen-contexto, que el alumno está acostumbrado a manipular en su vida cotidiana, los interpreta y comprende de una forma certera adquiriendo el hábito de solucionarnos por cualquier metodología, asimilándolo de una forma natural y espontánea.

2.1.3 Antecedentes en la resolución de situaciones combinadas de problema de estructuras aditivas y multiplicativas

Este artículo científico, analiza en el contexto español la influencia de las relaciones multiplicativas entre las cantidades y su naturaleza discreta o continua en el desarrollo de la capacidad de los estudiantes de educación primaria de diferenciar situaciones aditivas y proporcionales. Señala Fernández y Llinares (2011) que se trabajó con 167 estudiantes de educación primaria en la que se aplicó una serie de cuestionarios que les permitió avanzar en un grado mayor de complejidad. Por lo que se evidencia que los alumnos tienen un mayor grado de apropiación de los conceptos matemáticos y una mayor evolución en los procedimientos, ya que las situaciones problema están enfocadas en situaciones de la vida real cercana al joven.

Llama la atención este artículo, ya que hace aportes significativos a la investigación que se está realizando por lo que no se queda en lo simple, sino que va avanzando a lo complejo, es decir, se parte de los conocimientos previos que han representado para ellos innovaciones en sus vidas, traduciéndolos en aprendizajes significativos que son adaptados a sus necesidades cotidianas. Cuando se contextualizan las situaciones problema, los jóvenes asimilan más fácil las estructuras aditivas y multiplicativas, para dar solución a conocimientos más complejos los cuales son incorporados a su esquema cognitivo.

En un segundo momento, se estudia la tesis de maestría en gestión de la tecnología educativa, donde Atencia (2016) aplica una estrategia didáctica a través del uso del software Jclíc para resolver situaciones problema con estructuras aditivas y multiplicativas en estudiantes de segundo grado. Predominaron las estrategias de cálculo mental y de visualización, dándosele

solución directa sin realizar ningún procedimiento algorítmico, de modelamiento o de análisis. Señala el autor que los niños desarrollan los problemas de manera mecánica ya que el programa muestra los mismos o similares ejercicios sin aumentar el nivel de complejidad. Otra de las desventajas que se observó en la investigación realizada por Atencia, al utilizar este software es que los estudiantes no llevan al papel la interpretación y aplicación de las estructuras aditivas y multiplicativas apropiadas ya que no comprenden bien los textos debido a la baja comprensión lectora.

El adiestramiento de manera mecánica, la resolución de estructuras aditivas y multiplicativas sin ningún tipo de procedimientos algorítmicos, figurales, de tanteo y secuenciales es lo que diferencia la investigación de Atencia (2016) con la que se presenta en esta ocasión. Ya que, en el presente estudio sobre desarrollo del pensamiento numérico, se analiza que los estudiantes tienen un nivel más avanzado de representar por cualquier método las estructuras aditivas y multiplicativas. Y se asimilan ambos, en el bajo nivel de comprensión lectora.

2.2 Referentes Teóricos

A lo largo de este trabajo investigativo se parte de una premisa de corte epistémico dando cuenta de unos referentes teóricos que potencian el desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes de segundo año utilizando situaciones problema de estructuras multiplicativas, a la luz de los cuales se entra a analizar el saber y el saber hacer de los estudiantes de la Institución Educativa adoptando el modelo pedagógico social con un componente ambiental y de inclusión sociocultural.

Es por ello, que la labor del educador de matemática es propender porque su metodología se enfoque en un aprendizaje mediado por el contexto, es decir, permitir que el estudiante infiera

desde su quehacer cotidiano aquellos elementos matemáticos que lo llevan a pasar de lo concreto a lo abstracto y viceversa a través de representaciones semióticas. De igual forma, tanto en el hogar con sus padres y hermanos como en el aula de clase con sus compañeros, se refuerza el trabajo colaborativo, conllevando con ello a un desarrollo intelectual y a un aprendizaje significativo.

2.2.1 Las situaciones problema en la enseñanza de la matemática

Tomando como punto de partida, el pensamiento numérico, propuesto en los Lineamientos Curriculares para el grado segundo, el interés en este acápite es el trabajo con situaciones problema contextualizadas, donde se indaga por el estado de desarrollo del pensamiento numérico de los estudiantes, a través de la resolución de problemas de estructuras multiplicativas. Con lo que se apunta a que los estudiantes sean protagonistas de su propio proceso educativo, al tratar que éste sea un proceso educativo lo más integral posible, que los haga competentes y creativos para afrontar los retos del mundo actual.

El uso de situaciones problema contextualizadas dota al proceso educativo, de elementos que pueden facilitar los procesos comprensivos en matemáticas, pues, permite que los estudiantes utilicen sus pre saberes y confronten sus concepciones erróneas con elementos formales de las estructuras matemáticas construidas previamente, al hacer los ajustes necesarios que los lleve a un aprendizaje significativo de los objetos matemáticos estudiados. Ya que cuando las situaciones problema se contextualizan y se articulan a las representaciones formales, al pasar de forma natural de lo concreto a lo abstracto, le permite al estudiante modificar sus estructuras mentales dándole sentido al objeto estudiado, facilitando por ende la adquisición de un aprendizaje significativo.

Algunos autores como Brousseau (2007), Sevillano (2008) y Múnera (2011) consideran que una alternativa para lograr que los estudiantes pongan lo máximo de su parte para comprender los conceptos que se les proponen debe estar relacionada con las características de las actividades a que se enfrentan en su proceso de aprendizaje. Al respecto Sevillano (2008) considera que:

resulta imprescindible un proceso de enseñanza-aprendizaje constructivista, preocupado no tanto de transmitir cuanto de poner a los alumnos en condiciones de elaborar su propio conocimiento, desde ese trabajo individual, pero también desde la participación del trabajo en grupo y considerando el contexto desde el que se interactúa (p.265).

En este contexto es que el trabajo con los problemas y las situaciones problema toman sentido como una forma de simular, con elementos del contexto, una actividad matemática. Para ello, **un problema** es una situación para la que su resolutor, no tiene una solución inmediata, ni visionada de primer momento, y que debe esforzarse por lograr resolverla. Es decir, es una situación que origina una necesidad para la que no se conciben estrategias de solución de forma inmediata. El MEN (2006), considera los problemas como una actividad compleja, es decir, una actividad que involucra procesos cognitivos superiores como la visualización, la asociación, la abstracción, la comprensión, la manipulación, el razonamiento, el análisis, la síntesis y la generalización. Al respecto, algunos estudios sobre la forma en que los estudiantes resuelven problemas, han demostrado que la reflexión que el alumno hace de sus propias acciones ligadas a este proceso, posibilita la modificación de sus estructuras cognitivas.

Por su parte Múnera (2011) considera que los contextos de aprendizaje son favorecidos por las **situaciones problema**, las cuales representan un espacio para la actividad matemática en la que los estudiantes exploran tratando de dar solución a las problemáticas planteadas por el docente, interactúan con los conocimientos matemáticos y a partir de ellos exteriorizan diversas ideas asociadas a los conceptos en cuestión. De esta manera surgen y se aclaran interrogantes posibilitadores de la conceptualización, la simbolización y aplicación significativa de los conceptos para plantear y resolver problemas matemáticos; se colaboran mutuamente en el aprendizaje, interactúan entre ellos, y con el docente orientador, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de saberes.

Según Brousseau (2007) una actividad contextualizada con una situación problema propicia las condiciones para avanzar y profundizar en la comprensión de un objeto matemático estudiado, potencia las habilidades y las actitudes de los estudiantes hacia la matemática, esto es, provee las condiciones básicas para generar competencias matemáticas en los estudiantes. En este mismo sentido Múnera (2011, p.181) considera que “las situaciones problema dinamizan la actividad del estudiante y orientan su manera de pensar respecto a las actividades planteadas y los conceptos implícitos en las mismas”. Moreno y Waldegg (2002) establecen algunas condiciones para que las situaciones problema sean un detonador de la actividad cognitiva de los estudiantes, por lo que consideran que para serlo deben: involucrar implícitamente los conceptos que se pretenden trabajar, representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, ser accesible a él, y permitirle al alumno utilizar conocimientos anteriores. Debe, además, ofrecer una resistencia

suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones y contener su propia validación.

En este contexto, es fundamental que el trabajo que realice tanto educador como educando, para favorecer el proceso de enseñanza y de aprendizaje, tenga en cuenta todos los elementos del contexto en el que se esté, para evitar intervenciones en abstracto y lograr que el estudiante participe activamente de su propio proceso de aprendizaje.

De lo anterior se puede inferir que se necesitan actividades que exijan del estudiante la utilización de sus pre saberes, ya que él necesita de hechos problemáticos que lo estimulen a interrogar y a reflexionar, que despierten su interés, su disposición a estudiar un determinado contenido. Lo que parece evidente que más fácilmente originará esa motivación podría ser un hecho del ámbito de su vida, del cual se tenga referencia por alguna experiencia suya, que lo lleve a ponerla en duda o a utilizarla conscientemente. En relación con lo anterior Escudero, Goded y Lagos (2010, p.16) consideran que:

lo que se enseña, no puede estar desligado de cómo se enseña, como también lo que se aprende no puede estar desligado de cómo se aprende. En la Didáctica el qué, es el cómo. La forma, es el fondo. Y el deleite tiene que darse ya en la propia instrucción. El premio no puede venir de ninguna motivación extraña, ajena a la cosa misma, tiene que brotar del propio aprendizaje, del gusto de hacerlo bien.

Es decir, el proceso en sí mismo debería ser el deleite, el premio, dada la inseparabilidad de lo que se hace con la forma cómo se hace, de tal forma que el que aprende le queden ganas de seguirlo haciendo, con la posibilidad de replicarlo.

Asumimos la definición de Krulik y Rudnik según la cual “un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma” (Rodríguez, 2012, p.3). Por lo que tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata.

De ambas definiciones se infiere que un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes. En primer lugar, la aceptación: el individuo o grupo, debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas, como internas. En segundo lugar, el bloqueo: los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan. Y tercero, la exploración: el compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

Una situación problema, es un problema que puede conllevar a múltiples soluciones, todas coherentes con los datos suministrados y que por tanto obliga a cada estudiante a trabajar de forma independiente pero mancomunadamente con un equipo de trabajo colaborativo. Cuando el trabajo es de este tipo, se enriquecen las discusiones al compartir los resultados por la diversidad de éstos, pues de lo contrario se evidenciaría que no ha trabajado o que replicó el trabajo de un

compañero. Para Obando y Múnera (2003) una situación problema se puede interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la adquisición y construcción de nuevos conocimientos.

En la comunidad de educadores matemáticos se entiende por **situación problema** al conjunto de problemas, proyectos, investigaciones, construcciones, instrucciones y relatos que se elaboran basados en la matemática, en otras ciencias y en los contextos cotidianos y que en su tratamiento generan el aprendizaje de los estudiantes. Una actividad se refiere al trabajo intelectual personal y grupal de los estudiantes, como por ejemplo diseñar estrategias para interpretar, analizar, modelar y reformular la situación: formular preguntas y problemas, conjeturas o hipótesis; explicar, justificar o refutar sus conjeturas e hipótesis (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006). En fin, definir el conjunto de estrategias que les permitan dar soluciones ajustadas a la situación. Es la interacción y manipulación de las situaciones el instrumento que funciona como detonador para que comiencen a surgir soluciones al problema, y el conocimiento comience a convertirse en saber.

Así, en una Situación problema los enunciados contienen información no necesariamente matemática, y las preguntas, explícitas o no, no refieren ni implícita ni explícitamente lo matemático, pero que para resolverlos o intentar darles solución, es necesario acudir a la matemática. Además, el hecho de que un individuo perciba una situación a la distancia precisa para ser considerada como un detonador epistémico (problema) de sus capacidades, no asegura

que éste explote en esfuerzos para resolverla comprometiendo su voluntad en ello. Pues como es sabido, a pesar de que el detonador es el que inicia la explosión, ésta no se asegura cuando la pólvora está mojada (Hernández, 1996). Pero ni siquiera si explota en esfuerzos y compromete todo de sí para resolverlo se puede asegurar que llegue a una solución ya que, aunque la situación esté al alcance de sus capacidades, existen los obstáculos epistemológicos que pueden ser un fuerte impedimento para que finalmente lo logre.

En términos generales, una situación problema debe permitirle al estudiante la interacción entre pares, que facilite la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, ser garantía de la participación en y desde la diversidad de los estudiantes, para que se convierta en el detonador de la actividad cognitiva, que permita “involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender; al representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él; permitiendo al alumno utilizar conocimientos anteriores” (Moreno y Waldegg, 2002, p.56).

Con las situaciones problema se apunta siempre a explorar los contenidos más significativos de un determinado tema, puntualiza cada noción que involucra y permite analizar su estructura matemática. Pero esto no es algo que pueda evidenciarse por sí sólo en la situación, sino que tienen que ser evidenciado por el estudiante a través de sus interpretaciones. Y las interpretaciones son mediadas por las transformaciones que se logren de las diferentes representaciones semióticas de los objetos estudiados y por el aprovechamiento que se logre de las representaciones fenomenológicas inmersas en la situación.

Construir situaciones problema demanda del docente un amplio conocimiento de su cultura y un alto dominio del saber matemático para recontextualizarlo. Para ello se deben tener en cuenta elementos del medio sociocultural, los saberes previos y las condiciones socio-cognitivas de sus estudiantes, para poder tomar decisiones acertadas respecto a las actividades que se les proponen para su interacción con los conceptos. Por esto más que matemáticos que enseñen matemáticas se necesitan verdaderos educadores matemáticos que ayuden a potenciar el pensamiento matemático de sus estudiantes al enfrentarlos a tareas con las que se anticipen sus dificultades de aprendizaje, para con ellas potenciar sus habilidades y ayudarlos a resolver sus incomprensiones. Para Herbst (2011) una tarea matemática no es la actividad matemática misma, es sólo una representación de ésta, que hace uso de objetos y procedimientos matemáticos. En ese sentido,

una tarea es una representación de la actividad matemática, encarnada en las interacciones entre personas e instrumentos culturales. Tareas que involucran a los estudiantes en calcular, definir, conjeturar, representar, y demostrar, son importantes porque proveen a los estudiantes acceso a experiencias personales en el quehacer matemático. Pero precisamente porque la realización de las tareas depende de las acciones de los estudiantes, la medida en que ellas vayan a proporcionar experiencias personales en el quehacer matemático depende de si el trabajo conjunto ha representado legítimamente aquel quehacer. Así, las tareas matemáticas no sólo ofrecen oportunidades individuales de crecimiento (cognitivo o emocional), también (y por lo menos con aquél propósito) crean reproducciones públicas de las prácticas matemáticas. De ahí que la tarea del maestro, como responsable de la gestión de la instrucción, y a propósito de las tareas, incluye no solamente involucrar a los

estudiantes en el trabajo sino también darle un valor a ese trabajo, como mínimo en términos de sus cualidades matemáticas (p.7).

En cuanto a los estudiantes cabe preguntarse ¿ante qué actividades o tareas movilizan un determinado saber? es decir, ¿Ante qué eventos en la vida de un estudiante se movilizan determinados saberes y no otros? ¿Qué se necesita para que comprometan todo de sí en dar solución a las inquietudes que le genere una tarea? ¿Qué condiciones debe tener el contexto donde se desarrollan los hechos para que favorezcan el interés del estudiante en la solución de la tarea? ¿De qué información requiere y qué medios necesitan para lograrlo?

Sin embargo, hay cierto consenso tanto entre investigadores como entre docentes quienes coinciden en que los contextos socioculturales donde los estudiantes puedan relacionar con facilidad los conceptos con elementos del medio, juegan un papel fundamental en el desarrollo de sus procesos de aprendizaje, ya que proveen las condiciones para el desarrollo de este proceso. Esto si se tiene en cuenta que enseñar la matemática como una actividad social y cultural en la que el conocimiento no se descubre, sino que se construye a partir de la experimentación y la formulación, contrastación y justificación de conjeturas, y en la que se mira el entorno desde un punto de vista matemático al estar dispuestos a buscar patrones y regularidades en las situaciones problemáticas, hace que los significados para los objetos matemáticos cambien. Lo que según Farfán (2012) convierte a las matemáticas en una actividad social en la que se construye el conocimiento. En este contexto, ser matemático es pertenecer a una comunidad de aprendizaje donde se experimenta a reinventar la matemática, es participar en la clase de matemática haciendo sus aportes y aceptando sugerencias. Entonces la enseñanza pasa de ser un proceso instructivo a

un proceso social. Proceso que se automonitorea y retroalimenta, reorientándose continuamente hacia la mejora, y cada resultado es parcial, que sólo sirve como insumo para iniciar un nuevo ciclo. Aprender ya no sería recibir irreflexivamente la información, sino construir su propio conocimiento y tener la capacidad de comunicarlo a los compañeros reflexionando sobre lo hecho.

Así pues, las matemáticas escolares perderían el tabú al que nos tienen acostumbrados y pasarían a ser una actividad en la que se resuelven problemas. Es decir, se utilizarían para encontrar solución a aquellas situaciones para las que no se dispone de un procedimiento inmediato para resolverlas. Las matemáticas vistas así tendrían sentido en su aplicación práctica, materializadas en un estudiante capaz de explorar y experimentar con situaciones contextualizadas, que permitan desarrollar un punto de vista matemático de interacción con el entorno y que además pueda comunicarse matemáticamente.

Lo anterior deja ver la importancia de que sea el estudiante por sus propios medios quien descubra o redescubra los conocimientos matemáticos al relacionar sus pre saberes con elementos del medio para así asignar significado y sentido a los conceptos estudiados. En este sentido la matemática comenzaría a ser vista por los estudiantes como un elemento más con el que se relacionan a cada momento y el hacer matemática sería más que recibir ciertas indicaciones y poder calcarlas luego, en un compartir las experiencias de cada uno, como resultado de sus propios experimentos.

Sin embargo, hay que tener presente que en la construcción de las situaciones problema que se diseñen para dinamizar los aprendizajes, los objetos de enseñanza deben ser fieles a los

objetos de saber a los cuales corresponden (Douady, 1986). Según esta autora, para ello, deben tener las siguientes características:

- El concepto subyacente es un instrumento adaptado a los problemas elegidos para los alumnos. Dicho de otro modo, las propiedades esenciales que los científicos utilizan son mantenidas en los problemas del alumno.
- La diversidad de los aspectos que entran en juego en la significación del concepto está convenientemente representada en el conjunto de los problemas retenidos.

Atendiendo la necesidad de trabajar en la resolución de situaciones problema, surgen las **estrategias** de solución, consideradas por cada estudiante, intentando dar respuesta a las cuestiones que se les preguntan. Las estrategias se consideran formas de responder a una determinada situación dentro de una estructura conceptual. Pero se pretende que se lleguen a usar de forma reflexiva e intencional, es decir, que no se utilicen de forma mecánica, que se tenga conciencia de que cuando se usa una estrategia se analice conscientemente la situación y se llegue a soluciones con sentido. El MEN (2006), considera que:

dato que el conocimiento matemático es dinámico, hablar de estrategias implica ser creativo para elegir entre varias vías la más adecuada o inventar otras nuevas para responder a una situación. El uso de una estrategia implica el dominio de la estructura conceptual, así como grandes dosis de creatividad e imaginación, que permitan descubrir nuevas relaciones o nuevos sentidos en relaciones ya conocidas. Entre las estrategias más utilizadas por los estudiantes en la educación básica se encuentran la estimación, la aproximación, la elaboración de modelos, la construcción de tablas, la

búsqueda de patrones y regularidades, la simplificación de tareas difíciles, la comprobación y el establecimiento de conjeturas (p. 10).

Otras de las estrategias comúnmente usadas por los estudiantes son el tanteo, los remplazos sucesivos y la inspección visual.

En la misma línea de los problemas y de las situaciones problema están las **situaciones didácticas**, con las que según Barallobres (2013)

se trata de estudiar las condiciones que permiten, en teoría, la adquisición de conocimientos matemáticos, lo que conduce a la elaboración de situaciones en las cuales los conocimientos se manifiestan como instrumentos de control de las situaciones. En estas situaciones, se identifican variables que determinan las condiciones óptimas de apropiación de conocimientos y cuyos valores se validan mediante instrumentos matemáticos y experimentales (...) El modelo de Guy Brousseau describe el proceso de producción de conocimientos matemáticos en una clase a partir de dos tipos de interacciones básicas: a) la interacción del alumno con una problemática que ofrece resistencias y retroacciones que operan sobre los conocimientos matemáticos puestos en juego, y, b) la interacción del docente con el alumno a propósito de la interacción del alumno con la problemática matemática (...) A partir de ellos postula la necesidad de un “medio” pensado y sostenido con una intencionalidad didáctica. Las interacciones entre alumno y medio se describen a partir del concepto teórico de situación adidáctica, que modeliza una actividad de producción

de conocimiento por parte del alumno, de manera independiente de la mediación docente. El sujeto entra en interacción con una problemática, poniendo en juego sus propios conocimientos, pero también modificándolos, rechazándolos o produciendo otros nuevos, a partir de las interpretaciones que hace sobre los resultados de sus acciones (retroacciones del medio) (p.17).

Según este autor el concepto de *medio* incluye tanto la problemática matemática inicial a que se enfrenta el sujeto, como el conjunto de relaciones matemáticas, que se modifican en paralelo con la realidad con la que el sujeto interactúa. Esto sucede a medida que la persona produce conocimientos al darle solución a una tarea compartida socialmente. Una **tarea** en el sentido amplio incluye la actividad resultante cuando los aprendices se comprometen a resolverla, incluyendo cómo la alteran con el fin de darle sentido, las distintas formas que tiene el profesor de reorientar la atención del aprendiz hacia los aspectos que surgen, y hacia la reflexión para que logren aprender a partir de la experiencia de comprometerse en la actividad iniciada por la tarea (Watson y Mason, 2007).

De la mano de lo anterior, están otras condiciones impuestas por las instituciones y los condicionantes curriculares determinados por el Estado. Entre ellos está el trabajo por competencias. **La competencia en matemática** es la capacidad del alumno para articular sus saberes matemáticos adquiridos, al plantear y resolver las situaciones problema a que son enfrentados en sus prácticas sociales. Según el MEN (2006), en estas prácticas los estudiantes deben mostrar sus “habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño

flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” (p.49). Por la extensión de las prácticas sociales a cualquiera de los miembros de la cultura, se puede hablar del aprendizaje por competencias como un aprendizaje significativo y comprensivo socialmente compartido.

Según los estudios Pisa (2013) **las competencias matemáticas** son entendidas como:

La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan (p.9).

Es una capacidad que según esta organización, engloba tres dimensiones adecuadamente relacionadas: 1) los contenidos matemáticos específicos que van a utilizarse en la solución de las situaciones; 2) los procesos matemáticos que describen lo que hacen los individuos para relacionar el contexto del problema con las matemáticas y de ese modo resolverlo, y las capacidades que subyacen a esos procesos, y 3) los contextos, en los que se insertan las situaciones, y que además, se aplican en la resolución de los problemas de la vida en sociedad, y permite afrontar exigencias de diferentes niveles y tipos, por lo que son un prerrequisito fundamental para seguir aprendiendo a lo largo de toda la vida. Es una capacidad que se demuestra en la ejecución autónoma de sucesivos procesos cognitivos y se centra en el proceso y el razonamiento más que en el conocimiento. Además, hace referencia a la capacidad del individuo para la formulación matemática de las situaciones, al empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos

matemáticos, y la interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos en sus contextos de desempeño. “Estos tres términos, ‘formular’, ‘emplear’ e ‘interpretar’, ofrecen una estructura útil y significativa para organizar los procesos matemáticos que describen lo que hacen los individuos para relacionar el contexto de un problema con las matemáticas y, de ese modo, resolverlo” (Pisa, 2013, p.12).

En el documento Pisa (2013) se reconocen siete competencias fundamentales utilizadas en el comportamiento matemático socialmente compartido de una persona, las cuales son las siguientes:

- **Comunicación:** consiste en la interpretación y posterior decodificación de la información en un registro y a partir de esta información formular un modelo mental de la situación y hacerlo evidente ante otros. Este modelo puede ser una solución a la situación y el sujeto al comunicarla puede dar explicaciones de su actuar y/o justificarlo.
- **Matematización:** consiste en la transformación de una situación o un problema del contexto de desempeño de la persona en un modelo matemático.
- **Representación:** es la selección del sujeto de un conjunto de signos con los cuales representa el objeto. Esto está íntimamente relacionado con la semiosis, al requerir de la transformación de la información al interior de un registro (tratamiento) o entre registros (conversión) en por lo menos dos de ellos de forma natural.
- **Razonamiento y argumentación:** son las diferentes capacidades asociadas a la competencia matemática a las que se recurre en las diferentes etapas y actividades al resolver una situación problema. Estas implican procesos de pensamiento arraigados de forma lógica que exploran y conectan los elementos del problema para realizar inferencias a partir de ellos, como por

ejemplo comprobar una justificación dada o proporcionar una justificación de los enunciados o soluciones a los problemas.

- **Diseño de estrategias para resolver problemas:** esta competencia está constituida por un conjunto de procesos de control fundamentales que sirven de guía para que el aprendiz reconozca, formule y resuelva problemas eficazmente. En esta competencia lo fundamental es la selección o diseño de un plan o estrategia cuyo fin es utilizar las matemáticas para resolver los problemas derivados de una tarea o contexto, además de guiar su implementación.
- **Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico:** consiste en el uso adecuado de procesos semióticos en la comunicación de los resultados. Ello implica la transformación de los registros semióticos y el uso apropiado de las reglas internas de cada uno de ellos.
- **Utilización de herramientas matemáticas:** consiste en el uso tanto de herramientas e instrumentos físicos, como digitales y virtuales. Un ejemplo de ellos son los instrumentos de medición, las calculadoras y las herramientas matemáticas computacionales a los que se tenga acceso. El uso de estas herramientas matemáticas puede desempeñar un papel crucial en la comunicación de los resultados.

Las anteriores son capacidades cognitivas que las personas tienen a su disposición o pueden aprenderlas para comprender y relacionarse con el mundo de forma matemática, para resolver problemas o para tener acceso a las matemáticas de forma más fácil.

La evaluación por competencias implica la implementación de pruebas que involucren situaciones problema que permitan precisar las capacidades del aprendiz en el uso, en

determinados contextos, de sus conocimientos matemáticos adquiridos. Esta práctica evaluativa necesita la verificación de la resolución de situaciones problema para lo que el estudiante requiere en el planteamiento del problema: comprender los enunciados, identificar la información relevante y la no relevante, comprender las preguntas o cuestiones por las que se indaguen, interpretar, argumentar sobre lo que se comunica, seleccionar entre las estrategias disponibles las más adecuadas para utilizarlas, o inventar las que necesite, elaborar y ejecutar un plan de soluciones y verificar la solución.

2.2.2 Las representaciones semióticas

Las representaciones son configuraciones elaboradas bajo cierta organización, para lo cual se utilizan signos con ciertos significados, además, dichas configuraciones son utilizadas por los individuos, para exteriorizar sus representaciones mentales. A través de las representaciones semióticas, se representan los objetos matemáticos, ya que estas son el único medio de acceso a dichos objetos (Duval, 2017), asimismo, son el medio apropiado para comunicar una idea. Se refiere a cualquier manifestación del pensamiento, es decir, las palabras, la escritura, el dibujo, las expresiones algebraicas, las figuras, gráficas o tablas, entre otras. En la práctica pedagógica se diferencia entre la expresión abstracta (lenguaje oral, lenguaje escrito) y la expresión concreta (dibujo, trabajos con material manipulativo). Lo que permite al estudiante relacionar sus conocimientos previos con los adquiridos en la observación, al potenciar la ordenación de objetos, comparación, seriación y abstracción, cuya finalidad es ampliar sus conocimientos para así llegar a la causa y efecto de las cosas.

Las representaciones admiten dos tipos de transformaciones: transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento. Una conversión tipo conversión es aquella que se hace al decodificar los elementos de una representación en un registro y recodificarlo en otro registro, es decir, siempre se hacen cambiando de registro (Amaya, 2020). Además, hacer una transformación tipo conversión requiere de cierta elaboración semántica hasta llegar a construir el objeto representado, o la idea que se quiere expresar. Las representaciones tipo tratamiento se hacen al decodificar los elementos de una representación en un registro y recodificarlos en el mismo registro, es decir, se hacen sin cambiar de registro, estas transformaciones se hacen por manipulación sintácticas o por elaboración semánticas, se pueden hacer cambiando los símbolos o sin cambiarlos.

Las conversiones y los tratamientos son el fundamento para hacer las articulaciones entre diferentes representaciones de un mismo objeto. Articular dos o más representaciones consiste en poner en paralelo los elementos de sus representaciones, es decir, una vez producidas las representaciones, buscar los elementos en una y asignarle un elemento correspondiente, en otra representación. Para articular o conectar los elementos de dos o más representaciones, se necesita de quien lo haga mucha fluidez perceptiva, que facilite identificar un mismo elemento en más de una representación. Al hacer parte de las observaciones resulta indispensable el contacto con la realidad visual aportados por la observación, y el trabajo personal, en lo que se hace necesaria la fluidez perceptiva, el razonamiento, el juicio, utilizando todos los sentidos que favorezcan establecer las conexiones entre los elementos de las representaciones involucradas, de un mismo objeto. Permiten tener cierto control, al hacer la traducción de una actividad mental por medio de una expresión concreta, es decir manipulando los objetos en el aula de matemáticas.

Esta última fase se refiere a la materialización de observaciones y creaciones personales; facilita la traducción entre representaciones de un mismo objeto matemático, como por ejemplo, representar cuerpos geométricos haciendo trabajos manuales partiendo del doblado de papel y los diversos juegos educativos existentes en matemáticas, que desde lo concreto permiten hacer el paso a lo abstracto en relación a la materialización del pensamiento, a través de símbolos y códigos plasmados en el texto libre y en el lenguaje matemático.

Para finalizar se logra que las operaciones básicas se fundamenten en los niños desarrollando la inteligencia, la voluntad, el sentimiento y la acción que permite la adquisición de diversas formas de conocer los diferentes conceptos y así tener claro que el interés que logre generarse en un estudiante hacia su propio proceso de aprendizaje, es fundamental para que éste desarrolle sus capacidades y pueda desenvolverse dentro de la sociedad, utilizar elementos del medio que lo rodea y lo motivan a desarrollar y explicar las experiencias educativas. Siendo el punto de apoyo, la escuela como su primer lugar de formación.

2.2.3 Desarrollo intelectual y aprendizaje

En las últimas décadas las investigaciones en Educación Matemática han tenido un importante desarrollo, sobre todo en la forma de analizar los abordajes que los estudiantes hacen de los objetos matemáticos, los contenidos matemáticos a enseñarles y el tipo de actividades que se les proponen.

Sin pretender ser exhaustivo en la materia, al hablar de desarrollo, en el contexto educativo se hace referencia al proceso en el que se viabilizan progresivamente las potencialidades del ser

humano. Y se denomina aprendizaje al proceso mediante el cual la persona sufre cambios en su comportamiento, variando su desempeño, reestructurando su modo de pensar y de actuar, al convertir un conocimiento en saber, y donde el alumno se adapta a nuevas formas de conseguir, analizar y utilizar la información que requiere en la solución de una tarea. Desde este punto de vista, el aprendizaje responde a dos perspectivas diferenciadas: 1) al desarrollo de conductas manifiestas adaptables a ciertas condiciones y 2) al conocimiento adquirido. Se tiene que reconocer entonces, que el aprendizaje es un proceso permanente y continuo, es decir, no se termina de aprender nunca, se aprende durante toda la vida. Asimismo, cada educador debe ser un especialista, tanto en aprender de su propia experiencia, como en enseñar a que sus alumnos aprendan de la suya. Existen distintas teorías que estudian la relación entre desarrollo y aprendizaje, a lo que haremos alusión a continuación.

2.2.4 Relación entre desarrollo y aprendizaje

Las teorías más relevantes que estudian la relación entre desarrollo y aprendizaje se pueden agrupar en tres categorías fundamentales:

- 1) Las teorías que proponen *la independencia entre el proceso de desarrollo y el proceso de aprendizaje*. En esta concepción el aprendizaje sigue siempre al desarrollo. El aprendizaje es un proceso inminentemente externo que se da luego que se ha alcanzado cierto desarrollo o maduración en la persona, por lo tanto, el aprendizaje tiene poca o ninguna incidencia en su desarrollo. Según esto el aprendizaje tiene como fundamento el desarrollo biológico, donde tiene mucho peso el orden en que se dan los procesos de desarrollo y de aprendizaje. El proceso de maduración debe cumplir ciertos requisitos para que el aprendizaje pueda darse. Esta escuela se ocupa esencialmente de la génesis no escolar de los conocimientos,

por lo que la enseñanza vista de esta forma, se convierte en un estudio de procesos de adaptación. Entre los pioneros de esta teoría el más sobresaliente es Jean Piaget.

- 2) Las teorías que proponen que *el aprendizaje es desarrollo*. Su principio fundamental es la simultaneidad sincrónica de los dos procesos. Según esta teoría los dos procesos se desarrollan simultáneamente, con etapas paralelas en el desarrollo de cada uno de ellos. Se estudian las modalidades de la influencia del medio sociocultural en los aprendizajes de los alumnos, pero a la vez la del sujeto y lo que aprende en la transformación del medio. Aquí la enseñanza termina convirtiéndose en un proceso de enculturación.
- 3) Las teorías dualistas del desarrollo que consideran válidos ambos enfoques. Según esta teoría el desarrollo mental del niño está caracterizado por dos procesos conexos de diferente naturaleza y mutuamente condicionados. Esto es, la maduración biológica depende del desarrollo del sistema nervioso, y el aprendizaje es en sí mismo un proceso de desarrollo. Esta es la llamada Escuela de Psicología de la Gestalt y entre sus principales exponentes está Kurt Koffka.

Las dos primeras concepciones parecen contradictorias: la primera basada en la separación de los procesos de desarrollo y de aprendizaje. No toca el problema de la relación entre la enseñanza y el aprendizaje. Mientras la segunda atribuye al aprendizaje una gran incidencia en el desarrollo del individuo. Sin embargo, un análisis más a profundidad permite visualizar varios puntos de confluencia. El desarrollo puede verse como la acumulación de reacciones a estímulos tanto internos como externos, es decir, es en cierto modo un proceso de acomodación; así mismo, los procesos de aprendizaje se fundamentan en los conocimientos previos, los cuales son

reemplazados por nuevas concepciones, que por acomodación a nuevos requerimientos se van instalando en el sujeto.

Como complemento a lo anterior aparece la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, en la que se priorizan las concepciones de los alumnos. Dichas concepciones son consideradas por Brousseau (2007) como el resultado de un intercambio permanente con las situaciones problema en las que son involucrados y en el curso de los cuales los conocimientos anteriores son movilizados para ser modificados, completados o rechazados. Brousseau hace una clasificación de las situaciones de clase, pero no relaciona las situaciones con los contenidos susceptibles de ser utilizados en las situaciones para dinamizar las clases. Por su parte Vernard (1983) plantea que la acción es fuente de saber. Lo que se interpreta como que la tarea de resolver problemas, en el sentido amplio de resolución de una situación problema en un contexto sociocultural y conceptual apropiado, contribuye a dar sentido al problema y a los conceptos en juego. Este autor considera que hay tres aspectos fundamentales para que se dé la formación de un concepto: 1) el campo conceptual, esto es, el conjunto de situaciones de referencia que dan sentido al concepto; 2) el conjunto de propiedades y relaciones invariantes que el niño debe extraer para tratar esas situaciones y 3) el conjunto de significantes lingüísticos y símbolos susceptibles de representar el concepto y sus propiedades.

Para Brousseau (2007) una situación didáctica es un conjunto de relaciones establecidas explícitas y/o implícitamente entre los alumnos, el medio (un contexto sociocultural determinado) y el profesor, con el propósito de que los alumnos se apropien de un conocimiento y lo conviertan en saber.

2.2.5 El aprendizaje colaborativo

El aprendizaje colaborativo hace referencia al desarrollo de actividades de aula, en pequeños grupos. Es un trabajo centrado en los estudiantes, donde ellos forman pequeños equipos centrados en resolver una tarea que generalmente propone el docente. Los estudiantes trabajan colaborativamente en la tarea, interactuando e intercambiando información hasta que cada miembro del equipo llega a comprenderla. En este proceso los estudiantes son responsables de su propio aprendizaje. Según López (2009) para desarrollar con éxito este proceso es necesario que cada estudiante “pueda valorar sus progresos y reconocer sus dificultades y posibilidades, permitiendo así una mejor autoregulación del aprendizaje (...) el conocimiento es concebido como un constructo social, facilitado por la interacción, la evaluación y la cooperación entre iguales” (p.94).

Estas iniciativas según Douady (1986) “apuntan a crear desequilibrios, pero de modo tal que los alumnos puedan participar activamente en su propio reequilibrio dentro del plano cognoscitivo. Con tal motivo, actuamos sobre los contenidos (dialéctica instrumento-objeto; juego de marcos), o sobre las relaciones sociales” (p.10).

Entre las principales características del aprendizaje colaborativo se pueden citar las siguientes:

1. El aprendizaje de los estudiantes se fundamenta en actividades que suceden en la escuela.

2. Las actividades de aprendizaje están centradas en la solución de situaciones problema, y en la experimentación, cuyo éxito está determinado, en gran parte, por la interacción cooperativa de grupos muy heterogéneos.
3. Existe una alta interdependencia positiva entre los miembros del grupo, esto es, que se necesita del empeño de cada uno de los miembros para la solución de la tarea. Esto implica la responsabilidad compartida de cada miembro de un grupo, tanto en su aprendizaje como en el de sus compañeros.
4. En el desarrollo del trabajo no hay peritos, es decir, no existe un líder definido en el grupo y es fundamental el aporte individual de cada uno, lo que lleva a la solución de la tarea, y aunque cada miembro puede tener un rol específico, en un momento determinado cualquiera puede desempeñar el rol de otro.
5. En el desarrollo del trabajo es indispensable una buena comunicación, organización y capacidad de negociación entre los miembros del grupo, que al tener en cuenta las normas sociomatemáticas producidas, permita que se elaboren significados matemáticos en la clase.
6. El docente facilita espacios y actividades de búsqueda de recursos y fuentes de información y dinamiza la actividad y funcionamiento de los grupos para que trabajen con autonomía.
7. El docente proveer espacios para que el estudiante comunique sus resultados. Además, analiza constante y continuamente las producciones de los estudiantes, utilizando los resultados para hacer los ajustes pertinentes al proceso de enseñanza y aprendizaje.
8. El docente formaliza matemáticamente los hallazgos de los estudiantes en su proceso experimental.

Entre las ventajas del aprendizaje colaborativo podríamos citar las siguientes:

1. Lleva a los estudiantes paso a paso a aprender a aprender, incrementando su responsabilidad frente a su propio proceso de aprendizaje.
2. Los enseña a convivir juntos, elevando su credibilidad en sí mismos y en los demás.
3. Mejora su rendimiento académico.
4. Su interacción directa con elementos del medio sociocultural permite visionar las matemáticas en el contexto y asignarle significado y sentido a los conceptos estudiados prácticamente sin darse cuenta que lo hacen al reflexionar sobre su práctica.
5. El trabajo con situaciones problema contextualizadas y adecuadas a su edad y capacidades los reta a poner todo de sí para resolverlas, y un estudiante motivado es ganancia para el aprendizaje.
6. El hecho de que sean los estudiantes quienes solucionen las situaciones/tareas va creando estudiantes autónomos.

Al respecto Godino (2013) considera que

La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión. Los estudiantes, en lugar de ser receptores de una matemática ya elaborada, son considerados como participantes activos del proceso de enseñanza - aprendizaje, en el que ellos mismos desarrollan herramientas y comprensiones, y comparten sus experiencias unos con otros (...) Uno de los principios fundamentales de la educación matemática es que se debe dar a los estudiantes una ‘oportunidad guiada’ de ‘reinventar’ las matemáticas. Esto implica que, en la EMR, (Educación Matemática Realista) tanto los profesores como los programas educativos tienen un papel fundamental en cómo los estudiantes adquieren

los conocimientos. Ellos dirigen el proceso de aprendizaje, pero no de una manera fija mostrando lo que los estudiantes tienen que aprender. Esto estaría en contradicción con el principio de actividad y daría lugar a comprensiones falsas (...) Por el contrario, los estudiantes necesitan espacio y herramientas para la construcción de conocimientos matemáticos por sí mismos. Con el fin de alcanzar este estado deseado, los profesores tienen que proporcionar a los alumnos un ambiente de aprendizaje en el que el proceso de construcción pueda surgir. Uno de los requisitos es que los profesores deben ser capaces de predecir dónde y cómo se pueden anticipar las comprensiones y habilidades de los estudiantes que están emergiendo (p.124).

Lo anterior es de tanta importancia en los procesos de aprendizaje, que con el aprendizaje colaborativo se promueven los dos pilares de la educación más difíciles de desarrollar en la escuela: aprender a aprender y aprender a vivir juntos, debido quizás al mismo proceso interactivo, donde se fomentan tanto competencias como valores, lo que conllevaría a formar alumnos más humanos, pero a la vez, altamente competitivos.

2.2.6 Condiciones para un aprendizaje significativo

Son muchos los factores que intervienen posibilitando u obstaculizando la enseñanza de la matemática en la escuela; por ello es necesario que los estudiantes tengan una visión adecuada de ésta; la relacionen con sus vivencias, comparen elementos del medio sociocultural con conceptos matemáticos, con los que se puedan relacionar. Bajo esta perspectiva, contextualizar el aprendizaje de la matemática es esencial para utilizar los conocimientos previos de los estudiantes. Así, el motor de avance en la construcción del saber, está constituido por los problemas que se encadenan

y se reproducen (Chevallard, 1985, citado por Echegaray, s.f); así la resolución de situaciones problema puede resultar ser el camino hacia el éxito de un aprendizaje significativo; “entendido como la integración de un nuevo contenido en los esquemas cognitivos previos del alumno” (Font, 2007, p. 421), para el cual Rodríguez (2010) considera que deben darse las siguientes condiciones:

- Actitud potencialmente significativa de aprendizaje por parte del aprendiz, o sea, predisposición para aprender de manera significativa.
- Presentación de un material potencialmente significativo. Esto requiere: por una parte, que el material tenga significado lógico, esto es, que sea potencialmente relacionable con la estructura cognitiva del que aprende de manera no arbitraria y sustantiva. Y, por otra, que existan ideas de anclaje o subsumidores adecuados en el sujeto que permitan la interacción con el material nuevo (p. 2).

Para Font (2007), “aprender significativamente quiere decir poder atribuir significado al material que es objeto de aprendizaje; esta atribución solamente se puede efectuar a partir de aquello que ya se conoce mediante la actualización de esquemas de conocimiento pertinentes para la situación estudiada” (p.421), por lo que el proceso de instrucción debería funcionar como medio de enlace que permita una transformación de los conocimientos residentes en el que aprende, al compararlos con conocimientos nuevos y verificar que pueden funcionar en un contexto y no hacerlo en otro.

En lo planteado por Rodríguez (2010) y Font (2007) como condiciones para que haya aprendizaje significativo, se distinguen tres elementos: actitud para aprender de parte del que aprende, la significatividad del material de trabajo y la utilización de los presaberes de los

estudiantes en beneficio de su propio aprendizaje. La combinación de estos elementos puede llevar a los estudiantes a atribuir significado a los conceptos que se les presentan, y a facilitar su aprendizaje significativo. Para lo que se requiere, según Duval (2004) que se logren conectar por lo menos dos de los sistemas de representación del objeto que se aprende. Para Hitt (2000) la adquisición de un concepto en un individuo se dará en el momento que haya una coordinación libre de contradicciones entre las diferentes representaciones del objeto matemático. Esto quiere decir, que el proceso de construcción de un concepto es dinámico, dado que esa coordinación varía con el tiempo en un mismo sujeto y de un sujeto a otro.

Según lo expuesto anteriormente, la significatividad del aprendizaje se caracteriza por la interacción entre el nuevo conocimiento y el conocimiento previo. Y que es en esa interacción donde ese nuevo conocimiento adquiere significados modificándose para aceptar significados nuevos. Por lo que, “el profesor debe efectuar no la comunicación de un conocimiento, sino la devolución de un buen problema. Si esta devolución se lleva a cabo, el alumno entra en el juego y si acaba por ganar, el aprendizaje se ha realizado” (Brousseau, 1986, p.51), por lo que debe devolverse un problema a ver si se produce el aprendizaje, en espera de los mejores resultados.

En estas condiciones, el aprendizaje debe permitir que el individuo interactúe con el conocimiento y su realidad en una dinámica generadora de nuevas actividades, el acercamiento a otras realidades y la posible construcción de ideas novedosas. Así podría hablarse de un aprendizaje significativo, como una oportunidad de crear personas cada vez más adaptables a un mundo cada vez más cambiante.

2.2.7 La comprensión en matemáticas

El hecho de que los estudiantes comprendan las matemáticas, debería preocupar a todos aquellos académicos interesados en que en la sociedad haya gente matemáticamente competente. Además, cualquier docente, en cualquier proceso de enseñanza de la matemática que se emprenda, espera hacer un gran aporte al conocimiento matemático de las personas involucradas. Por lo que es fundamental que los mismos docentes dominen el concepto de comprensión, ya que, estando conscientes de ello, se les facilitará decidir las estrategias a implementar sobre el tipo de acciones que se deben realizar para ayudar a los estudiantes a comprender la matemática y, a las directivas institucionales a tomar las decisiones apropiadas para proveer las condiciones necesarias que favorezcan desempeños adecuados de los estudiantes en matemáticas.

Dado que el interés del docente es que sus estudiantes comprendan las actividades a que se les enfrentan, el tema de la comprensión en matemática debe ser de sumo interés para profesores, formadores de profesores e investigadores. Esto porque interesa que se evidencie en el trabajo que se realiza, el aporte a que los estudiantes comprendan más y mejor las matemáticas. Por lo que el conocimiento del docente acerca de los procesos de comprensión de sus estudiantes es fundamental para saber qué se necesita de los estudiantes, que facilite su comprensión, qué se debe hacer para que los estudiantes comprendan, y qué condiciones se deben tener en las instituciones para satisfacer las necesidades de aprendizaje de los estudiantes.

En cuanto a los procesos en los cuales un estudiante llega a comprender un concepto y su relación con lo que se ha pretendido que aprenda, Ortiz de Maschwitz (2004) considera que:

Comprender es poder llevar a cabo una diversidad de acciones o desempeños que demuestran que uno entiende el tópico y al mismo tiempo lo amplía, y ser capaz de asimilar un conocimiento y utilizarlo de una forma innovadora, así, comprender un tópico significa poner en juego una serie de actividades donde éste se muestre y poderlo hacer con actividades nuevas, lo que implica, que llevar a la práctica esa serie de actividades se constituye en el pilar para los procesos de aprendizajes para la comprensión (p. 40).

Por lo que entendemos que desarrollar la comprensión, significa hacer cosas usando los conocimientos previos, reconocer y poder aplicar los conceptos para resolver una necesidad que se presente en un momento determinado, utilizar los conceptos cuando las circunstancias lo indiquen, independiente de que las situaciones que se presenten tengan algún parecido o no a lo que se ha manejado previamente.

Sierpinska (1994) considera la comprensión en matemáticas como un proceso mental, que va evolucionando con el hecho mismo de comprender; como una forma de ver las cosas, que surge como resultado de las experiencias vividas que hayan involucrado el concepto que se trabaje. Y ante situaciones matemáticas que le evoquen ese concepto, el estudiante establece cierto patrón de comportamiento heurístico, que va ganando coherencia a medida que se desarrolla intelectualmente. Pero las formas de llegar a la comprensión de un concepto matemático no son absolutas o acabadas, son relativas o parciales, esto porque las experiencias vividas por una persona no se ajustan del todo, o necesariamente, a las características de cada concepto. Además,

porque las experiencias vividas son cada vez cambiantes, lo que en cada momento le va a dar una perspectiva diferente de lo que aprenda en ese instante.

La comprensión surge entonces por los choques que se dan entre las experiencias anteriores y las recientes. Estas experiencias llevan a la persona a generar concepciones nuevas, lo que lo obliga a reacomodarse a la realidad de la experiencia actual. Este proceso de reacomodación es destructivo, es decir, los saberes nuevos adquiridos no se adicionan a los ya existente, los remplazan. Son cambios estructurales de los saberes y creencias previamente adquiridos; por lo que lograr la comprensión de un concepto matemático es reorganizar la estructura mental al tener una experiencia de vida exitosa. Pero según esto, toda comprensión de un concepto lleva a un obstáculo epistemológico, porque al ser un saber parcial y depender de la acomodación a las experiencias vividas, siempre va a funcionar ante algunas situaciones y no va a hacerlo ante otras.

Gatica, Maz-Machado, May, Cosci, Echevarría y Renaudo (2010) consideran que para la comprensión de un concepto matemático es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, ya que con la representación en un solo registro no se obtiene la comprensión integral del concepto. Es decir, se necesita identificar en cada registro, los elementos suficientes del objeto estudiado y asignarle el significado que sea posible asignarle en el registro en juego y ponerlos en paralelo con los elementos que les resulten congruentes en por lo menos otro registro. En este sentido Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez (2006) considera que en este enfoque se cuestiona la idea de que la cognición se reduzca a la acción de recobrar el entorno inmediato mediante un proceso de representación, para asumir que la cognición sea así entendida como la capacidad de 'hacer emerger' el significado a partir de realimentaciones sucesivas entre el humano

y su medio ambiente próximo, tanto físico como culturalmente, a partir de una interacción ‘dialéctica’ entre protagonistas. Esta interacción, socialmente normada, da a la práctica, inevitablemente, una connotación de práctica social. El conocimiento entonces depende de las experiencias vividas que, a su vez, modifica las propias percepciones y creencias (p.85).

Según lo anterior comprender en matemáticas significa poseer información y poderla utilizar consciente y espontáneamente, por ejemplo, saber utilizar algoritmos, seguir reglas aun cuando sean descontextualizadas. Es aprender y asimilar, es decir, lo importante es mostrar que se tiene un saber matemático, manifestado a través de una habilidad obtenida y transferible a otros espacios de razonamiento en y sobre la realidad.

Para Meel (2003) comprender en matemáticas significa saber qué hacer y por qué se debe hacer algo con el concepto en el momento que se requiera utilizarlo, lo que proporciona vías para una transferencia más eficiente, para la extracción de información desde la memoria del estudiante, para lograr que esa comprensión sea una meta por sí misma, y para promover el crecimiento de la comprensión. Este concepto está relacionado con la manera como se construyen conceptos o redes conceptuales, vinculados a una serie de procesos cognitivos en relación con representaciones simbólicas, esto es, a la significación que un individuo le atribuye a un objeto matemático al vincular las representaciones internas y externas en una situación contextual.

En este mismo sentido Godino, Batanero y Font (2003) consideran que aprender matemática es construir significados personales y enseñar matemática consiste en procurar que los significados personales se aproximen al significado a priori de un objeto matemático para un sujeto

desde el punto de vista de la institución escolar, y la construcción de un nuevo registro a partir de otro dado, que aunado a la justificación matemática permite identificar cuál es la comprensión que un individuo hace de un concepto determinado (Gatica et al, 2010). Además, según Duval (2004) el aprendizaje de la matemática se presta para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Y enseñar y aprender matemática lleva a que en estas actividades cognitivas utilicen distintos registros de representación.

Además, por estar en un mundo en el cual ninguna persona puede aprender de antemano todo lo que le será profesional o humanamente útil, el reto de la enseñanza para la formación inicial es según Duval (2004) dotar al estudiante de los medios para comprender y aprender por sí mismo, enseñarlo a canalizar la adquisición de sus propios conocimientos matemáticos que les permitan el desarrollo de sus habilidades de pensamiento matemático. El desarrollo de estas habilidades depende de adquisiciones funcionales de diferentes sistemas que se requieren para la comprensión de todos los conocimientos que él deberá adquirir por sus propios medios, no solo en la escuela, sino después de ella. Se trata, según Duval (2012), del desarrollo de la autonomía intelectual de los estudiantes. Desde esta perspectiva es que las matemáticas pueden aportar una gran contribución a la formación de los alumnos.

2.2.8 El aprendizaje de las matemáticas mediado por el contexto

El fin de cualquier proceso de enseñanza debería ser lograr un aprendizaje. Para algunos investigadores (Brousseau, 1999; Santos y Sepúlveda, 2006), una de las mejores formas de lograrlo es trabajar con situaciones familiares a los que aprenden; que les permitan utilizar sus

conocimientos previos y ponerlos a prueba ante nuevas situaciones; al respecto Santos y Sepúlveda (2006, p. 1390), consideran que “los estudiantes cuando trabajan con problemas o tareas planteadas en contextos familiares donde tengan la oportunidad de utilizar recursos que le permitan aplicar ideas fundamentales de las matemáticas en los procesos de resolución de problemas, enriquecen las experiencias de aprendizaje”. Así la resolución de situaciones problema que involucren distintos contextos es fundamental para lograr una sólida formación en la educación matemática de los estudiantes. Esto podría permitirles a los estudiantes utilizar sus propias experiencias y pre saberes en beneficio de su proceso de formación matemática, al tener la posibilidad de ir confrontando sus conocimientos previos con las nuevas experiencias y verificando la consistencia de éstos, a la vez que viven la metamorfosis de los conocimientos que no funcionan en los contextos donde se ponen a prueba y se van acomodando a las concepciones nuevas que poco a poco se establecen en sus mentes. Arrieta (2003, p. 21) establece que:

Las actividades matemáticas no son neutras, dependen del contexto social donde se abordan. La matemática cobra vida, tiene sentido, exactamente en contextos sociales concretos. Este contexto remite a diversas prácticas sociales anteriores escolares, o no escolares, este contexto social es determinante en la utilización de las estrategias, herramientas y procedimientos para la actividad. Igualmente, establece que aprender está referido a las formas en que el conocimiento, construido por el humano, vive, es movilizado en las interacciones sociales. Desde este punto de vista, no sólo es importante que un estudiante construya el concepto de derivada, por ejemplo, sino que fundamentalmente interesa saber cómo es movilizado en sus interacciones sociales, la forma en cómo viven los conocimientos construidos, cómo son movilizados como argumentos o se emplean como herramienta para intervenir en su entorno.

En esta perspectiva se deben plantear situaciones que favorezcan el funcionamiento del saber situado en el estudiante, partiendo de la contextualización de conocimientos de fácil manipulación en la escuela, utilizando elementos que los estudiantes puedan relacionar con algo conocido, que llame su atención y se sientan retados a trabajar. Así, “para lograr un aprendizaje matemático significativo, será necesario diseñar y gestionar una variedad de tipos de situaciones didácticas, implementar una variedad de patrones de interacción y tener en cuenta las normas, con frecuencia implícitas, que regulan y condicionan la enseñanza y los aprendizajes” (Godino, Batanero, Font, 2003, p.10). En estas circunstancias parece no ser suficiente realizar una buena transposición didáctica ya que para que los estudiantes alcancen el conocimiento deseado, la temática estudiada debería enfocarse teniendo en cuenta el contexto sociocultural de los estudiantes y muchos otros factores como la complejidad de los conceptos, las condiciones del medio y lo que los estudiantes comprometan de sí para lograrlo, entre otros. Y las variables docencia, nivel de contenido, relación de las temáticas con elementos del medio, dificultades relativas a los propios temas, no serían las únicas que intervienen en el proceso de aprendizaje de los conceptos.

Así los contextos de representación usados en la actividad matemática surgen como hilo de enlace que permiten proponer problemas interesantes a través de los cuales se analizan las dificultades de comprensión de los estudiantes -a través de, por ejemplo, sus errores conceptuales- y usarlos para mejorar sus procesos de aprendizaje. Según Gallardo, González y Quintanilla (2013) esto conlleva a que toda observación sobre el quehacer matemático de los alumnos, hecha con el propósito de obtener información sobre su comprensión deba ser interpretada por quien efectúa la

observación. Desde este punto de vista el centro de atención del proceso de enseñanza y aprendizaje lo constituye el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático de los estudiantes.

En los últimos años docentes investigadores y comunidades de educadores han ido configurando una nueva visión de la educación matemática y su enseñanza y se han generado y sugerido recursos educativos, que guíen a las personas que toman decisiones en los centros locales, en torno a la educación matemática, a conseguir por lo menos, en los niveles mínimos de desempeño de los estudiantes y las formas cómo conseguirlos (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). En este sentido, este grupo de profesores reconocen la importancia de que los estudiantes construyan sus conocimientos matemáticos al resolver distintos tipos de tareas que reúnan tres características: 1) que los motiven a expresar lo que saben; 2) que los aliente a estar dispuestos a investigar lo que desconocen por medio de la discusión, la experimentación y el intercambio de experiencias; y 3) que permitan recuperar los procesos de pensamiento empleados en sus intentos de solución. Es decir que los lleve a creer en lo que hacen, que lo puedan comunicar y que eso sirva para que mejoren como personas más educadas matemáticamente. Que los lleve a ser competentes matemáticamente hablando.

En el mismo sentido, los Estándares Curriculares de Matemáticas propuestos por el MEN (2006) en Colombia, emergen como un referente a seguir en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los currículos de las escuelas del país. En estos se plantean las competencias y habilidades que sugieren los contenidos que se espera se desarrollen

en determinados grados; esto se refiere al saber, saber qué y el saber hacer al final de un conjunto de grados. Al terminar la media académica sugieren que el estudiante debe:

analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas; resolver y formular problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media; y justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición (p.89).

En lo anterior se evidencia la necesidad de enfrentar a los estudiantes a situaciones o tareas, que demanden de ellos procesos de reflexión constante, donde tengan la oportunidad de expresar y refinar sus acercamientos iniciales a los problemas, compartir sus entendimientos con sus compañeros, explorar y explotar sus potencialidades matemáticas, donde se puedan relacionar o comparar las magnitudes involucradas en una situación con el entorno inmediato, que conlleve al desarrollo de habilidades de pensamiento en el estudiante, lo que podría permitir un acercamiento entre las concepciones de los estudiantes y los significados aceptados por las comunidades de matemáticos, en relación con los conceptos que se trabajan en el aula. De esto puede entenderse que el aprendizaje de las matemáticas va más allá del aprendizaje de conceptos y procedimientos o incluso de sus aplicaciones, éste debe conducir a la adquisición de habilidades de pensamiento y usarlas en la solución de problemas, pero que a la vez el estudiante pueda ser capaz de comunicar sus resultados matemáticos. En este sentido los lineamientos de los estudios Pisa (2013) consideran que en el proceso de formación matemática de los estudiantes debería “prestar especial atención

al desarrollo de grandes competencias o habilidades tales como el pensar matemáticamente, saber argumentar, saber representar y comunicar, saber resolver, saber usar técnicas matemáticas e instrumentos... pero también saber modelizar” (p.15). Y según esta agencia saber modelizar es poder estructurar el contexto, matematizarlo e interpretar los resultados de esta matematización en ese contexto, revisar el modelo, modificarlo, etcétera.

Se entiende por matematización el proceso de trabajar la realidad a través de ideas y conceptos matemáticos: donde partiendo del contexto se creen esquemas, formulen, resuelvan y validen soluciones a los problemas en los contextos donde se trabajen y se establezcan relaciones y semejanzas con otros problemas y se devuelvan las soluciones a los contextos iniciales.

En lo antes planteado se evidencia que una opción para lograrlo es que a los estudiantes se les provean condiciones que muevan sus estructuras cognitivas, que los motiven a utilizar lo que saben y a adaptarlo a nuevas situaciones que faciliten la comprensión de un determinado conocimiento; esto es, enfrentarlos a situaciones problema que los hagan comprometer todo de sí hasta resolverlas, donde se les note su capacidad creativa e innovadora hasta que los conocimientos en juego se conviertan en saber.

2.3 Referentes Conceptuales

2.3.1 Pensamiento numérico

Se llama pensamiento numérico a la forma en que una persona piensa al resolver problemas, que involucren números y sus operaciones, en un ambiente socialmente compartido (Amaya, Castellanos y Pino-Fan, 2021).

Los lineamientos curriculares para matemáticas suministrados por el MEN (1998), comienzan el apéndice de pensamiento numérico y sistemas numéricos haciendo una reflexión sobre la importancia de los números y la operatividad con ellos en la vida diaria, en comunión con lo que ellos plantean puede decirse que la visión actual de la aritmética ha cambiado substancialmente ya que en las actividades cotidianas y profesiones existentes la interacción con los números es evidente a diario.

Con relación a lo anterior se puede decir que: “el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones” (MEN, 1998) Lo anterior profundiza la importancia de éste pensamiento el cual comienza en el sujeto desde pequeño realizando cortas comparaciones y deducciones en su ambiente.

El pensamiento numérico avanza poco a poco a medida que se emplean los números cotidianamente y se empieza a comprender que con ellos se puede comunicar e interpretar lo que

sucede en diferentes situaciones. Es fundamental resaltar que mientras más significativa sea la utilización de los números más se evoluciona en este pensamiento y que el aprendizaje de ellos desde aspectos formales no es lo verdaderamente importante; lo esencial es todo aquello que se puede movilizar cognitivamente en el sujeto y puede aprenderse al lograr aplicar algoritmos y realizar análisis de resultados, composición, descomposición y recomposición en diferentes cantidades, comprender el valor absoluto y relativo, entre otros aspectos que fortalecen este pensamiento.

Las experiencias tanto en la escuela como fuera de ella son fundamentales para un adecuado desarrollo de pensamiento numérico, ya que posibilitan el desarrollo de habilidades y competencias necesarias en la vida diaria que podrán ser evidentes en situaciones que requieran análisis superiores como lo son la formulación y resolución de situaciones problema, para avanzar significativamente en la construcción de las operaciones básicas.

2.3.2 Operaciones de estructuras aditivas

2.3.2.1 Suma

La suma o adición es una operación básica por su naturalidad, que se representa con el signo (+), el cual se combina con facilidad matemática de composición en la que consiste en combinar o añadir dos números o más para obtener una cantidad final o total. La suma también ilustra el proceso de juntar dos colecciones de objetos con el fin de obtener una sola colección. Por otro lado, la acción repetitiva de sumar uno es la forma más básica de contar. Para sumar varios números se coloca cada uno de ellos (sumandos) debajo del otro, de manera que coincidan las unidades, las decenas, las centenas etc.

2.3.2.2 Resta

Es otra de las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética. Es la operación inversa de la suma. La representación de la operación de restar es: $16 - 5 = 11$. El primer número (16) se llama minuendo, el segundo (5) sustraendo y el resultado obtenido (11) se denomina diferencia. Para comprobar que la resta está bien hecha, se suma la diferencia con el sustraendo y tiene que dar el minuendo: ($11 + 5 = 16$). Para restar dos números se coloca el minuendo y debajo el sustraendo, de manera que coincidan las unidades, las decenas, las centenas etc.

2.3.3 Estructuras multiplicativas

Se debe tener en cuenta que el pensamiento multiplicativo no se puede generalizar de manera simple a partir del pensamiento aditivo, ya que el pensamiento aditivo no es suficiente para que los niños progresen matemáticamente (Jacob y Willis, 2003), por lo que hay que analizar las mejores formas de hacer que quien aprende genere habilidades de pensamiento multiplicativo. Al respecto, Bryant, Nunes y Tzekaki (2009) afirman que los primeros pasos de los niños en el razonamiento multiplicativo siguen directamente de sus experiencias en razonamiento aditivo, pero la continuidad entre los dos tipos de razonamiento lleva a quien aprende a cometer graves errores en las tareas multiplicativas, por lo tanto, a menos que los maestros realmente puedan reconocer la diferencia entre lo aditivo y lo multiplicativo es poco probable que puedan ayudar a los niños a avanzar de un pensamiento a otro. A partir de lo anterior, se puede afirmar que las estructuras multiplicativas son más que un conjunto de múltiples operaciones aritméticas que se enseñan después de las estructuras aditivas, esto es, el pensamiento multiplicativo va mucho más allá de una forma rápida de hacer adiciones repetidas (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010).

Esto implica que, para llegar a comprender las estructuras multiplicativas, se necesita mucho más que comprender las estructuras aditivas y extenderlas a las multiplicativas por repetición de sumandos iguales.

El pensamiento multiplicativo puede verse como la capacidad de una persona de resolver problemas, utilizando propiedades de la multiplicación o la división en diversas situaciones de la vida cotidiana (Wright, 2011), y para hacerlo, se puede utilizar una variedad de estrategias, como una agrupación convencional, las sumas repetidas, o de sumandos iguales o el modelado de figuras con una matriz rectangular con rejillas iguales, que conduzcan al concepto de área. Estas estrategias se construyen sobre esquemas de múltiplos y factores, agrupamientos, propiedades de las operaciones y algoritmos.

La multiplicación como una agrupación convencional, se puede ilustrar a través de un ejemplo: cuando se escoge una figura icónica como representante de un grupo, esta figura puede representar cualquier cantidad convenida, y en esa convención pueden establecerse otras figuras contenidas en ella, o que la contengan; es el caso de los billetes utilizados en un determinado país, los cuales pueden funcionar como un sistema numérico particular, donde un solo símbolo puede representar cierta cantidad determinada convencionalmente, por el sistema económico del país. Se muestra como ejemplo, en la figura 1, un billete de cien mil pesos colombiano.



Figura 1. Billete de cien mil pesos colombianos

Este billete se puede representar con otros billetes de otras denominaciones, lo que tradicionalmente llamamos cambiar el billete por menudos o por sencillos, no es más que expresarlo en otras representaciones de éste, haciendo transformaciones tipo tratamiento. Esto puede lograrse por sumas repetidas de dos billetes de 50.000, es decir, $50.000 + 50.000$, de cinco de 20.000: $20.000 + 20.000 + 20.000 + 20.000 + 20.000$, de diez, de cinco, de dos mil o de mil, o con una combinación adecuada de éstos, las cuales, todas implican multiplicaciones como sumas repetidas de representaciones figurales convencionales, que representan el valor de una moneda en Colombia.



Figura 2. Billetes colombianos de varias denominaciones

En el caso de la multiplicación como sumas repetidas o de sumandos iguales, se puede analizar, por ejemplo, que 9×4 equivale a $9 + 9 + 9 + 9$, que a su vez es equivalente a 36, por lo que es importante que los estudiantes puedan comprender la relación que hay entre la suma y la multiplicación, pues, multiplicar 9×4 , equivale a sumar 4 veces el 9, pero también es equivalente a sumar 9 veces el 4 lo que podría ayudar a los estudiantes a descubrir propiedades como la conmutatividad.

Además, se pudiera considerar otra forma de descomponer el número con otra combinación de factores que faciliten ilustrar el valor posicional, pues, con orientaciones adecuadas, podría facilitar mostrarle al niño la estructura del valor posicional introduciendo otras representaciones, por ejemplo 12×3 , que también es equivalente a $12 + 12 + 12$, que se pueden escribir como $30 + 6$ y como $10 + 10 + 10 + 6$, es decir, tres decenas más seis unidades, que también pueden mostrárseles en una configuración de cuadritos, como la mostrada en la figura 3.

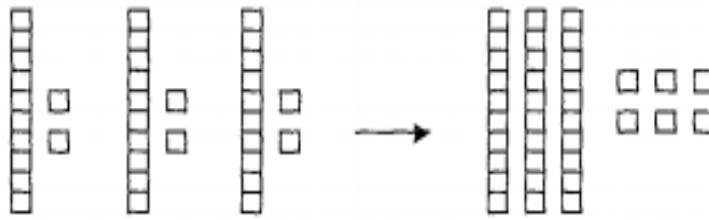


Figura 3. Ilustración figural de una multiplicación como sumas repetidas

La figura 3, se ha construido con la estructura $12 + 12 + 12$ equivalente a $30 + 6$, para poder introducir al aprendiz en el estudio del valor posicional de los números enteros. Chinnappan (2002) considera que “la comprensión de los niños sobre la multiplicación como una operación podría mejorarse mediante el compromiso con una variedad de situaciones de la vida real” (p. 341), pues para (Vergnaud, 1988), una componente fundamental para poder entender una operación es poder reconocer su necesidad de uso consciente, en situaciones cotidianas, que determinen su utilidad.

Asimismo, vale la pena aclarar que el número 36 equivalente a 3 decenas y 6 unidades correspondiente a una estructura aritmética, pues, existen otros tipos de estructuras, como la algebraica, que es multiplicativa y se escribe de manera similar, pero las expresiones tienen otro significado, por ejemplo, al escribir $3x$, se está expresando la multiplicación del número 3, con la letra x , que de ninguna manera podría considerarse equivalente o similar a escribir 36, ya que si en la expresión $3x$ se reemplaza la x por el 6, el valor de la expresión sería 18 y no 36.

El modelado de figuras con una matriz rectangular con rejillas iguales, se ilustrará también con un ejemplo, para lo que se ha considerado una rejilla y tres algoritmos no tradicionales, presentados por Ball, Thames y Phelps (2008). En este esquema se presenta la multiplicación de

35×25 en algoritmos aritméticos muy similares al utilizado convencionalmente en Colombia, pero diseñados por los autores, para poder articular sus elementos con los de la rejilla de colores, que también aparece en la figura. Sería interesante hacer el ejercicio de articulación de los elementos de cada algoritmo con los de la rejilla, y además, con los de la cuadrícula de la figura inferior, donde se ilustra utilizando el algoritmo hindú, con los mismos valores, la citada multiplicación. El caso más elemental lo constituye la articulación entre los elementos de la rejilla con los del algoritmo mostrado en C, pues, los colores en C corresponden a números enteros, los cuales aparecen, cada uno de un solo color, comparables con las zonas y los colores de la rejilla, lo que podría facilitar establecer conexiones entre ambas representaciones. Los algoritmos mostrados en A, B y en la cuadrícula donde se representa el algoritmo de la multiplicación hindú, los números están pintados de varios colores, pero que se pueden hacer corresponder con relativa facilidad, con las zonas coloreadas en la rejilla.

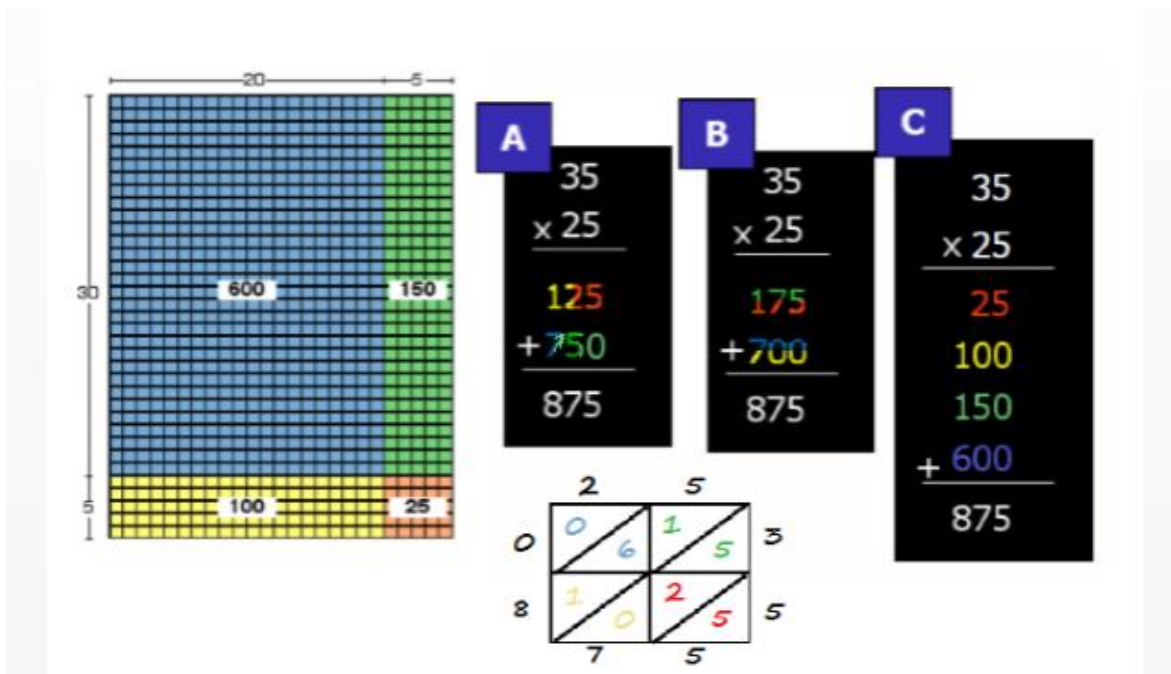


Figura 4. Modelado de figuras con una matriz rectangular con rejillas iguales

2.4 Referente Legal o Normativo

Se expondrá en este normograma las reglamentaciones vigentes en el sector educativo con las cuales se dará sustento a la propuesta.

Normograma: Contexto Nacional

Norma	Año	Artículo	Descripción	Contextualización
Constitución Política de Colombia	1991	44	Son derechos fundamentales de los niños: la vida, la integridad física, la salud y la seguridad social, la alimentación equilibrada, su nombre y nacionalidad y tener una familia.	Serán protegidos contra toda forma de abandono, violencia física o moral, secuestro, venta, abuso sexual, explotación laboral o económica y trabajos riesgosos.
Constitución Política de Colombia	1991	67	La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento.	Es un derecho fundamental que tiene entre sus fines el desarrollo de capacidades y habilidades con las cuales se pueda aportar al desarrollo de la sociedad y aprender a vivir en comunidad.
Ley 115 General de Educación	1994	21	Objetivos de cada nivel en la educación básica primaria.	El desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales,

				favoreciendo en las personas su desarrollo integral.
Lineamientos Curriculares para Matemática	1998		Es un documento de apoyo y orientación para una educación con calidad de los lineamientos pedagógicos y curriculares que el país necesita.	Se espera que la propuesta constituya investigación y reflexión, para empezar a realizar ajustes progresivos y pertinentes.
Estándares Básicos de Competencias Matemáticas	2004		Permiten conocer lo que deben aprender los estudiantes y establece el punto de referencia de lo que están en capacidad de saber en el área.	A través de la propuesta se espera promover prácticas pedagógicas creativas que incentiven el aprendizaje de los estudiantes.
Derechos Básicos de Aprendizaje	2016		Plantean de manera explícita los aprendizajes estructurantes para un grado y un área particular.	La propuesta se ajusta a lo planteado para el grado segundo, en el área de matemáticas.

2.5 Referente Espacial o Contextual

La Institución Educativa Nuevo Horizonte Paulo VI, de carácter oficial se encuentra ubicada en el Barrio Popular Uno, comuna Nororiental de la Ciudad de Medellín. Cuenta con los niveles de transición, básica primaria, básica secundaria, media técnica, caminar en secundaria. Su modelo pedagógico se enfoca en lo social y el proyecto educativo institucional - PEI – lo constituye un componente ambiental y de inclusión sociocultural, bajo el modelo curricular mestizo.

La característica común de la comunidad educativa son sus condiciones sociales, culturales y ambientales pertenecientes al estrato socioeconómico 1 y 2, lo que la hace ser una zona muy vulnerable, de bajos recursos, con grupos familiares disfuncionales, madres cabeza de hogar, desplazados, con bajo nivel de escolaridad, carencia de ofertas laborales y donde se consolida como economía el trabajo informal. Debido a estos factores los estudiantes presentan desmotivación escolar que conlleva a que tengan falencias en el desarrollo de las competencias comunicativas (leer, escribir, escuchar y hablar), por lo tanto, el desarrollo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje son afectados al presentarse debilidades en el razonamiento lógico, análisis e interpretación de situaciones problema y la aplicación de procedimientos adecuados en la solución de ellas.

La misión de la Institución Educativa Nuevo Horizonte Paulo VI es la formación integral de niños, niñas y jóvenes, a través del fortalecimiento de las competencias ciudadanas, el respeto por sí mismo, por los demás y el contexto, contribuyendo de este modo, a la construcción de una sociedad democrática, pacífica y respetuosa del medio ambiente.

Su visión se proyecta hacia el año 2022 en ser reconocida como una Institución educativa formadora de seres humanos respetuosos, autónomos, conscientes y comprometidos con su realidad y el contexto social.

Su filosofía se fundamenta en el lema Educación sin Fronteras, a través de la cual se pretende formar niños, niñas y jóvenes, hombres y mujeres capaces de traspasar las fronteras dadas

por su entorno cultural y socio-económico que restringen sus posibilidades de crecimiento personal, para crear condiciones de vida que propendan a la igualdad y la equidad entre todas las personas y que por tanto, fortalezcan su desarrollo integral, ayudándolos a potenciar y fortalecer sus actitudes y aptitudes en las dimensiones del ser, el saber ser y el saber hacer.

Llama la atención el enfoque curricular mestizo a partir del cual la Institución construye su identidad proponiendo una educación que busca mejorarse continuamente, permitiendo que cada una de las instancias escolares promuevan la unión entre la cultura local y la cultura universal; de esta manera los procesos formativos aportan a una escuela más humana, inclusiva, crítica, reflexiva, flexible y creativa; en la cual desde el encuentro del contexto local con la sociedad global, se generan propuestas que conciben a través del PEI al ser humano, la tecnología y el medio ambiente, como baluartes de una formación que tiene como base la solidaridad, la ciencia y el progreso.

CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO

3 DISEÑO METODOLÓGICO

En este trabajo se utilizó una metodología cualitativa, la cual se desarrolló en cuatro fases: de fundamentación, exploratoria, de desarrollo y de socialización de resultados, cuya continuidad y secuenciación, facilitó comprender mejor el fenómeno estudiado. En la primera fase, en la de fundamentación, se hizo una revisión bibliográfica, se fundamentó la propuesta de investigación, se elaboró y/o escogieron, y se adaptaron las situaciones problema utilizadas para recolectar la información propia de esta investigación.

En la segunda fase: exploratoria, se aplicó una prueba piloto a diez estudiantes de segundo grado de una institución educativa perteneciente al mismo núcleo educativo, buscando que las características de los estudiantes fueran lo más parecido posible a la de los niños participantes en la muestra. Este pilotaje sirvió para hacer ajustes a los cuestionarios, para lo que se tuvo en cuenta, las preguntas realizadas por los estudiantes al resolver cada cuestionario. Posteriormente, se hizo validación por pares expertos a los cuestionarios, y las sugerencias de los pares, también fueron tenidas en cuenta para mejorar, tanto la redacción como hacer ajustes a algunos ítems de los cuestionarios.

En la tercera fase, o fase de desarrollo, se aplicaron los cuestionarios para recoger la información, se realizaron las entrevistas, se hicieron las triangulaciones para el análisis, y se sistematizó la información. Y en la fase de socialización, se hizo entrega del informe final y se

proyecta hacer un artículo para publicar en una revista indexada, y una o dos ponencias en eventos nacionales o internacionales.

3.1 Muestra de informantes

Los informantes lo constituyeron 76 estudiantes de segundo grado de educación básica primaria de la Institución Educativa Nuevo Horizonte Paulo VI de Medellín, los cuales estaban repartidos en tres grupos (A 26, B 26 y C 24 estudiantes), y al momento de recolectar la información tenían edades entre 7 y 9 años. El muestreo que se hizo fue intencional, para lo cual se tuvo como criterios de inclusión, que el estudiante quisiera participar voluntariamente del estudio y que su tasa de inasistencia fuera baja.

En Colombia el MEN (2006), en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, al finalizar segundo grado sugiere que el estudiante:

- Lleva a cabo la adición o la sustracción, (con o sin agrupación), utilizando números de hasta cinco o más dígitos.
- Compone y descompone números por medio de la adición.
- Modela o describe grupos o conjuntos con el mismo número de elementos, y reconoce la multiplicación como la operación adecuada para encontrar el número total de elementos en todos los grupos o conjuntos.
- Reconoce la adición de sumandos iguales como una multiplicación y la representa con los símbolos apropiados.

La Institución Educativa Nuevo Horizonte Paulo VI, es de carácter público, está ubicada en la comuna nororiental de la ciudad de Medellín, y su población proviene de los estratos

socioeconómicos 0, 1 y 2. De primero a tercero, la matemática es orientada por profesores licenciados en educación básica, quienes orientan todas las áreas, pero a partir del cuarto grado, los docentes rotan y cada área es orientada por un licenciado en el área correspondiente, así el área de matemática es orientada por licenciados en matemáticas.

3.2 Instrumentos y técnicas utilizados para recoger la información

Para la recolección de la información se utilizaron cuestionarios abiertos, cuyas estructuras se tomaron como base para las entrevistas, las cuales fueron basadas en las soluciones dadas por los participantes a las tareas (Goldin, 2000), que se les propusieron. En los cuestionarios se plantearon situaciones problema de estructuras multiplicativas, con elementos del contexto sociocultural. Los cuestionarios se diseñaron con la misma estructura, buscando hacerlos comparables para facilitar la triangulación de instrumentos al hacer el análisis de resultados.

Los encuentros con los participantes se hicieron por la plataforma Google Meet, los cuales fueron vídeo grabados. Durante el proceso de solución o al final de estos, se realizaron las entrevistas, en las que se hicieron preguntas de sondeo, pues se buscaba que en sus respuestas los participantes hicieran evidentes sus conocimientos, y razonamientos (Koichu y Harel, 2007), sobre las estructuras, tanto aditivas como multiplicativas, y las necesidades de utilizar las estructuras aditivas al servicio de las multiplicativas, o si a ese nivel aparecían otras características de las estructuras multiplicativas, sin prescindir de las aditivas. Según Rivera, Salgado y Dolores (2019), las entrevistas basadas en tareas facilitan la recolección de información cualitativa en matemática,

ya que, permiten develar ideas y procedimientos utilizados por los estudiantes al resolverlas, y de esta forma, dar validez a las respuestas por ellos aportadas.

La información se recogió en el segundo semestre de 2020, en seis encuentros por video llamadas de dos horas cada una. Los cuestionarios se les pasaban a los estudiantes a través de la plataforma y estos luego de resolverlos y responder las preguntas de la entrevista, debían escanearlos y enviarlos vía correo electrónico o subirlos a Classroom. Sin embargo, debido a la contingencia generada por la pandemia por el Covid 19, algunas actividades se aplicaron por otros medios virtuales, como correo electrónico, y se les aplicó presencialmente a 12 niños que viven en el mismo sector de la proponente del estudio, y por lo tanto se pudo acceder a ellos con relativa facilidad, con la autorización de sus padres. En los anexos, se presentan las actividades o situaciones utilizadas para recoger la información. En la tabla la tabla 1, se presentan, tanto las categorías, como los elementos tenidos en cuenta para analizar la información.

Tabla 1. Categorías y elementos para el análisis de la información

Categorías de análisis	Indicadores para el análisis
Características de las soluciones dadas a la tarea.	Escoge la operación adecuada para resolver la situación. Identifica y usa los valores posicionales de los números, en la solución de la tarea.
Identificación y uso de condiciones dadas en las situaciones, para resolver la tarea.	Identifica y usa las relaciones de orden para resolver la tarea. Identifica y usa convenciones dadas en las actividades para resolverlas.
Estrategias utilizadas para resolver la situación.	Usa elementos de las estructuras aditivas para llegar a la estructura multiplicativa. Usa estrategias por sumas repetidas, de tanteo, o por agrupación de factores para resolver la tarea.

3.3 Procesamiento y análisis de la información

Para procesar la información, tanto oral como escrita, se utilizó la técnica análisis de contenido, donde se agruparon ideas básicas de acuerdo a criterios temáticos (Bernárdez, 1995), lo que permitió establecer diferencias y similitudes para finalmente elaborar el análisis y sistematizar los resultados. Luego de la revisión de la información sistematizada, los resultados de cada situación se compararon por categorías de análisis, para finalmente conformar el informe final. Para ilustrar algunos detalles del proceso, se colocan ejemplos de los manuscritos de algunos estudiantes, en las soluciones reportadas vía correo o Classroom.

CAPITULO 4. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

4 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

A continuación, se describen y analizan las soluciones dadas a las actividades, que, se previeron desarrollar, inicialmente, en la propuesta de investigación. Para el cumplimiento de los objetivos propuestos ligado a la pregunta de investigación ¿Cómo potenciar el desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes de segundo año de educación básica de la Institución Educativa Nuevo Horizonte Paulo VI de Medellín, utilizando situaciones problema de estructuras multiplicativas? se describen los resultados de todo el proceso, sin embargo, se muestran ejemplos solo de los resultados reportados por tres estudiantes, para ilustrar mejor el proceso, sin saturar el informe.

Todos los estudiantes, excepto Samuel, escogieron las operaciones adecuadas para resolver las tareas que se les propusieron, a veces usaban una misma estrategia y otras las combinaban en el desarrollo de una misma situación (Amaya, 2020) que se hace al decodificar los elementos de una representación en un registro y recodificarlo en otro registro. Al realizar las multiplicaciones en la mayoría de las veces apartaron los ceros, realizaban las operaciones y al final, agregaban los ceros al resultado, a juicio de Barallobres (2013) los alumnos determinan condiciones óptimas de apropiación de conocimiento. Este tipo de comportamiento fue intermitente entre los estudiantes, algunas veces apartaban los ceros y otras veces realizaban las operaciones con los números completos, siendo coherentes con lo expresado por Amaya (2020) al tomar un registro y elaborar la representación semiótica llegando al objeto que se quiere expresar. Al indagarles el porqué de este comportamiento manifestaron que la maestra los enseñó a hacer las operaciones de esta forma, y que así les resulta más fácil realizarlas.

En las actividades donde se daban los valores posicionales y relaciones de orden entre cantidades, como elementos facilitadores que en palabras de Hernández (1996) lo llama detonantes epistémicos para dar respuesta a una situación que no siempre es la adecuada, la totalidad de los estudiantes utilizaron adecuadamente este detonador (Moreno y Waldegg, 2002) y a partir de esto llegaron a respuestas adecuadas a las cuestiones por las que se les indagaron. Esto indica que similar a lo reportado por Chinnappan, (2002), la comprensión del valor posicional fue uno de los requisitos clave para comprender las situaciones y poder realizar operaciones de estructuras multiplicativas con números enteros. En este caso particular, Ortiz de Maschwitz (2004) manifiesta que al poner en juego una serie de actividades contextualizadas se observa que esto llevado a la práctica implica una apropiación del aprendizaje, es decir, la comprensión del mismo, siendo el detonante que al parecer ayudó a los niños que participaron de esta investigación a discernir y clasificar la información, y a obtener sus respuestas luego de deducir que, al multiplicar números naturales, la magnitud del producto siempre es mayor que cualquiera de los otros factores.

La identificación de los valores posicionales y relaciones de orden entre cantidades, también ayudó a los estudiantes a buscar formas de hacer explícitas las conexiones entre los números que están involucrados en la multiplicación, con elementos socioculturales, utilizando problemas de la vida real, acuñado por Brousseau (1999) en los siguientes términos: una de las mejores formas de lograrlo es trabajar con situaciones familiares a los que aprenden. En el caso específico de la situación donde se pide elegir una canasta de huevo, dadas tres condiciones (Anexo A), los niños hicieron adecuadas comparaciones, utilizando cada una de las condiciones dadas,

justificando adecuadamente las razones por las que escogieron dicha respuesta. A continuación, se presenta un fragmento de la entrevista realizada a José al resolver las situaciones 1 y 2:

Situación 1.

Andrés debe elegir una canasta que cumpla con las siguientes condiciones:

- Contiene más de 25 huevos.
- Contiene menos de 33 huevos.
- El número de las unidades de la cantidad de huevos es 2



Entrevistador: ¿Cómo resolviste esta situación?

José: La canasta que cumple las condiciones es la que tiene: 32

Entrevistador: ¿Por qué escogiste esa respuesta?

José: Escogí la que tenía 32 huevos porque tiene que terminar en 2 y como dice que tiene que tener menos de 33 huevos escogí el 32 – muestra su manuscrito, del cual se muestra parte en la Figura 5 –. Además, el que escogí tiene más de 25 huevos, así que esa es la correcta. Se analiza esta interpretación que hace José a la luz de lo planteado por Gallardo, González y Quintanilla (2013) quienes manifiestan que toda observación sobre el quehacer matemático de los alumnos, hecha con el propósito de obtener información sobre su comprensión debe ser interpretada por quien efectúa la observación, es aquí donde se refuerza el aprendizaje significativo del estudiante al hacer inferencias de situaciones problema contextualizadas a su diario vivir.

① Es 32 porque dice que contiene más de 25 menos de 33 y termina en 3

② a)
$$\begin{array}{r} 4000 \times \\ 29 \\ \hline 36.000 + \\ 8.000 \\ \hline 116.000 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{r} 6000 \times \\ 5 \\ \hline 30.000 \end{array} \right\} \begin{array}{r} 116.000 + \\ 30.000 \\ \hline 146.000 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 4000 \times \\ 23 \\ \hline 12.000 + \\ 8.000 \\ \hline 92.000 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{r} 6000 \times \\ 14 \\ \hline 24.000 + \\ 6.000 \\ \hline 84.000 \end{array} \right\} \begin{array}{r} 92.000 + \\ 84.000 \\ 24.000 \\ \hline 200.000 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 4.000 \times \\ 26 \\ \hline 24.000 + \\ 8.000 \\ \hline 109.000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 146.000 - \\ 104.000 \\ \hline 640.000 \end{array}$$

d) Solo pagaran 7 adultos porque cada adulto cuesta 6.000 y $7 \times 6 = 42$ y le quedan \$ pesos.

Figura 5. Manuscrito de José al dar solución a la situación a dos de las situaciones planteadas.

Como puede apreciarse, José basa su respuesta en todas las condiciones dadas en la situación y se muestra seguro de que la que dio, es la respuesta correcta. Similar a lo realizado por José, sus compañeros también utilizaron adecuadamente las condiciones de este tipo de situaciones, a las que dieron soluciones adecuadas.

Sierpinska (1994) manifiesta que una de las formas de ver las cosas que surgen como resultado de las experiencias vividas es a través de la comprensión como un proceso mental que va evolucionando a medida que se involucra en el concepto que se trabaje. Además, las operaciones realizadas por José (ver figura 5), son por multiplicaciones directas, aplicando el algoritmo de la multiplicación usado tradicionalmente en Colombia.

En concordancia con los resultados reportados por Jacob y Willis (2003), el 35.5% de los niños reconocieron grupos iguales en los elementos de las situaciones planteadas, utilizando convenciones dadas en las situaciones para obtener sus respuestas, dichos grupos fueron aprovechados por ellos para contar (Ivars y Fernández, 2016). Otro grupo (42.1%), usó eficientemente estrategias de sumas repetidas (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010) para dar sus respuestas, mientras que un grupo más pequeño (5,3%), lo hicieron por tanteo, y los restantes (17,1%) realizaron mecánicamente las operaciones (Medina, 2017), que, en algunos casos, los hizo cometer errores, pues no utilizaron las convenciones establecidas en las situaciones, para dar sus respuestas.

Este último grupo de niños según Jacob y Willis (2003), necesitarían reforzar los elementos que les faciliten utilizar estrategias de agrupamiento y conteo que los lleven a reflexionar en torno a soluciones más complejas, es decir, parecen no entender que los grupos mismos también se pueden contar y hacer multiplicaciones sobre los contenidos de las convenciones establecidas. Además, la forma mecánica (Atencia, 2016) en que resolvían las operaciones los llevó a realizar las multiplicaciones en un solo sentido, como si el multiplicando y el multiplicador siempre pudieran dejarse fijos, dejando inoperante la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Es así, como los procesos comprensivos mostrados por este último grupo de estudiantes fueron de tipo instruccional, ya que se limitaron a desarrollar los algoritmos y realizar operaciones, sin mostrar evidencias (Atencia, 2016) de comprender las estructuras numéricas, y sin lograr establecer conexiones entre las pocas representaciones que lograron producir ni hacer argumentaciones de la forma como desarrollaron los procedimientos (Chinnappan, 2002). Sin embargo, a medida que iban resolviendo situaciones, interactuando con la profesora y reflexionando (Fernández y Llinares, 2011) con el paso a paso de las preguntas realizadas en las entrevistas, se pudo apreciar en algunos de los estudiantes, que comenzaron a utilizar propiedades de los números para resolver las situaciones y dar respuestas a las cuestiones por las que se indagaron, con las que en los talleres iniciales presentaron algún tipo de dificultades.

En las situaciones que se requería la interpretación de la multiplicación como una agrupación convencional, el 52,6% de los estudiantes presentaron dificultades, pues, no interpretaron adecuadamente la convención, haciendo solo el conteo de los elementos figurales correspondientes y dando el resultado de este conteo como respuesta. Sin embargo, el 60.0% de éstos luego de las preguntas en el paso a paso de las entrevistas, lograron reflexionar y modificar sus concepciones erróneas. Mientras que el 11,8% de los estudiantes, centró su atención en cuál de los objetos figurales convencionales, se repetía el mayor número de veces, haciendo este conteo y dando el resultado como respuesta; este comportamiento se ilustra en la entrevista realizada a Karen. Seguidamente se muestran algunos fragmentos de las respuestas dadas por Karen, Valeria y José a la siguiente situación:

Situación 2. La discografía Maxmusic les dice a sus artistas que dará un premio llamado disco brillante, cada vez que vendan 100 copias de su disco. En la siguiente tabla se muestran los premios entregados a tres artistas de Maxmusic. ¿Cuál es la cantidad mínima de discos que ha vendido esta discográfica?

Serrat					
Melendi					
Sanz					

Entrevistador: ¿Cómo resolviste esta situación?

Karen: Mirando la tabla me di cuenta que Melendi es el que más discos vendió.

Entrevistador: ¿Por qué colocas solo el número mínimo de discos vendidos por Melendi y no el total?

Karen: Porque él es el que más vendió y eso me llamó la atención.

Entrevistador: ¿Cuántos discos vendió Melendi?

Karen: Cuatro discos.

Entrevistador: ¿Y con cuatro discos la discografía le entrega el premio?

Karen: No, se lo da ahora que complete 100 discos.

Como puede apreciarse, Karen hace una interpretación errónea de la situación, contando los premios del cantante con mayor cantidad de discos vendidos en la tabla, y dieron su respuesta considerando solo las figuras contables, sin tener en cuenta que debían contar todas las figuras y multiplicar por 100 para dar su respuesta. A lo que Vernard (1983) plantea que para que se dé la

formación de un concepto, el estudiante debe tener claridad del conjunto de propiedades y relaciones invariantes que extrae de esas situaciones problema.

Entrevistador: ¿Qué resultado obtuviste en este ejercicio?

Valeria: Me dio nueve.

Entrevistador: ¿Cómo llegaste a ese resultado?

Valeria: Conté los discos que vendieron todos los cantantes y me dio nueve.

Entrevistador: Según tu respuesta ¿ningún cantante alcanzó a ganar un premio?

Valeria: No, porque para ganar el premio debe vender 100 discos y ninguno alcanzó a llegar a los 100.

En la solución dada por Valeria se puede observar que, similar a las respuestas dadas por Karen, no interpretó adecuadamente la situación, lo que la condujo a dar respuestas erróneas. Es por ello que Gatica, et al (2010) manifiestan que con un solo registro no se obtiene la comprensión integral del concepto, por lo que se deduce que los niños no están acostumbrados a trabajar sobre este tipo de representaciones semióticas.

Entrevistador: ¿Qué resultado obtuviste en esta situación?

José: Me dio 900 discos.

Entrevistador: ¿Cómo llegaste a esa respuesta?

José: Porque los cantantes han recibido nueve premios, y como cada premio es por cien discos, entonces multiplique 9×100 y me dio 900.

Respuestas similares a la de José fueron dadas por 20 de sus compañeros, quienes consideraron en el conteo, además, de los premios que pudieron contar en la tabla, el número de discos que debieron venderse para recibirlos. Este tipo de respuestas muestra que el pensamiento

multiplicativo de este pequeño grupo de estudiantes, está mucho más desarrollado que el de sus demás compañeros, pues, incluyeron en sus estrategias de solución, tanto las figuras contables, como las convenciones del valor establecido para cada figura, lo que pudo facilitar que sus respuestas fueran más adecuadas a las soluciones esperadas. A ello, Fernández y Llinares (2011) aluden que cuando los alumnos tienen un mayor grado de apropiación de los conceptos matemáticos, existe una gran evolución en los procedimientos ya que estas situaciones problema son asociadas a tareas similares realizadas en el contexto familiar e institucional.

Asimismo, se utilizaron situaciones donde los estudiantes debían buscar uno de los factores cuando se les daba el resultado, es decir, tanto algunos factores como el resultado, se podían deducir de la información dada en la situación, pero debían encontrar uno de los factores, es una idea intuitiva del uso del concepto de ecuación para hallar una incógnita (Castillo, et al, 2017). Al resolver este tipo de situaciones, todos iniciaron multiplicando los factores conocidos y en adelante, se dieron tres tipos de respuestas, el 40,8% de los estudiantes comenzó multiplicando inductivamente el otro factor conocido por 1, 2, 3, ..., hasta llegar a la respuesta, mientras que el 42,1% luego de realizar la multiplicación de los factores conocidos, sumó el factor conocido las veces que necesitó hacerlo hasta llegar a la respuesta y el 17,1% quienes, dieron respuestas erróneas. A continuación, se ilustra esta situación, mostrando el manuscrito de Karen y José, así como un fragmento de la entrevista que se les hizo, a Samuel, al resolver la siguiente situación:

De una escuela se quiere llevar a un grupo de niños al Gran Circo Los Enanos, que llegó a la ciudad la semana pasada. A continuación, se muestra una tabla donde se registra el valor de las entradas por persona.

Entradas al Circo	
PERSONAS	COSTO
Niño	\$4 000
Adulto	\$6 000

a) En segundo grado hay 29 niños, y los van a acompañar 5 de sus profesores ¿Cuánto dinero deben pagar por concepto de entradas?

b) En tercer grado hay 23 niños, 7 de ellos van a ser acompañados por sus padres (papá y mamá) y, además, por 4 de sus profesores ¿cuánto deben pagar por la entrada de todos?

c) La maestra recoge el dinero de las entradas de 26 niños y en total tiene \$146 000. ¿Cuántos adultos han pagado su entrada?

Entrevistador: Explícame la solución que diste al literal a) de esta situación.

Samuel: El dinero que deben pagar es \$34 000.

Entrevistador: ¿Cómo llegaste a esa respuesta?

Samuel: Lo que hice fue sumar 29 más 5, esto dio como resultado 34, entonces lo tomé como \$34 000.

Entrevistador: ¿Por qué colocas 34 000 si me dices que te dio 34?

Samuel: Porque los ceros siempre se colocan después de que uno hace las operaciones.

Entrevistador: ¿Por qué sumas 34 con 5?

Samuel: Los sumo para hallar cuantas personas fueron en total.

En este caso Samuel sumó las personas que asistirían al circo, sin tener en cuenta que el precio pagado por un niño, era diferente al pagado por un adulto. Por lo que parece que Samuel no

hizo una interpretación adecuada (Atencia, 2016) debido a su baja comprensión lectora de esta situación, lo que lo llevó a cometer errores y a no dar soluciones adecuadas a esta situación.

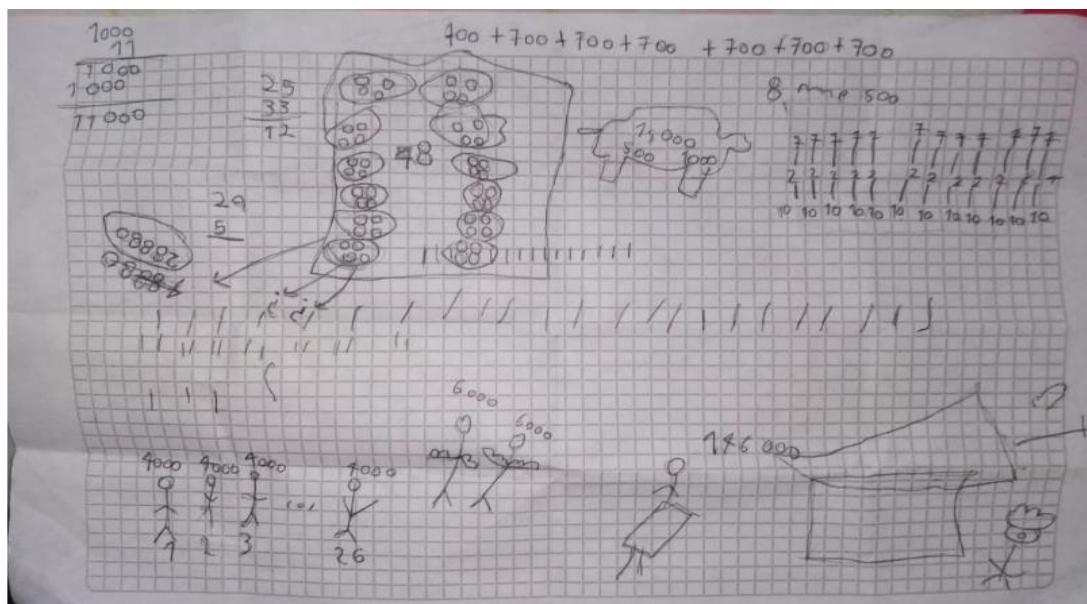


Figura 6. Manuscrito de Samuel al ilustrar algunas situaciones propuestas

Este manuscrito representa una matematización de varias situaciones problema donde el niño modeliza en la hoja, la idea de lo que el intenta comprender del problema y lo representa con imágenes semióticas (Pisa, 2013).

En las situaciones donde debían hacer combinaciones repetidas de sumas y multiplicaciones para obtener sus respuestas, el 28,9% de los estudiantes realizaron sumas repetidas de cada uno de los valores y luego sumaron los totales, el 47,4% realizaron multiplicaciones directas, sin dar evidencias de reflexiones sobre su uso, y mientras que los restantes (23,7%) presentaron algún tipo de dificultades al resolverlas. Sobre estas dificultades se pueden ver evidencias en el fragmento de entrevista realizado a Samuel, Karen, José y en su manuscrito, mostrado en la figura 6.

Entrevistador: Ahora dime ¿cuánto te dio el literal c) de esta situación?

Samuel: Me dio 146 052 pesos.

Entrevistador: ¿Cómo llegaste a esa respuesta?

Samuel: Primeramente, sumé \$146 000 más 26 más 26, para que en total esto me diera 146 052.

Entrevistador: ¿Por qué sumas el 26 dos veces?

Samuel: Porque son 26 niños y cada niño debe ir acompañado por un adulto, porque no puede ir solo.

Como puede apreciarse en sus respuestas, Samuel originalmente combinó los valores que se debían pagar, con el número de personas que debían asistir al circo, suponiendo, además, que, cada niño debía ir acompañado de un adulto, quizás influenciado por factores ontogenéticos, (obsérvese el referente espacial de esta investigación) ligados a la inseguridad que se vive en algunos sectores de la ciudad. Este niño, en todas las situaciones donde se pedía calcular los precios totales por combinación de sumas de factores, siempre sumaba la cantidad de personas o cosas, y ese valor lo tomaba como un precio. En el literal c) en particular, hizo una pequeña variación, ya que sumó las personas que fueron al paseo con el precio total. Asimismo, las estrategias que usó Samuel al resolver las tareas (Herbst, 2011, MEN, 2006, Goldin, 2000), fueron de sumas repetidas o de sumandos iguales para hacer las multiplicaciones.

Entrevistador: Explícame la forma ¿Cómo obtuviste la respuesta al literal c) de esta situación?

Karen: Primero multipliqué 4×26 y me dio 104, y después sumé seis mil varias veces hasta que medio 146, mire aquí – señala su manuscrito, Figura 7 –

Entrevistador: ¿Cuántas veces sumaste seis mil?

Karen: Siete veces.

Entrevistador: ¿Por qué sumaste seis mil?

Karen: Porque es lo que debe pagar un adulto.

Entrevistador: Y ¿qué significa que hayas sumado seis mil siete veces?

Karen: Que son siete adultos los que pagaron la entrada a la maestra.

Entrevistador: Hazme el favor de explicarme lo que hiciste para resolver esta situación.

José: Saqué lo que pagan los niños y lo que pagan los profesores y después sumé

Entrevistador: En la parte b) ¿por qué multiplicaste por 14?

José: Porque hay 7 niños que van con su papá y su mamá, entonces son 14 adultos

Entrevistador: ¿Cómo hiciste para encontrar la respuesta a la parte c)?

José: Aquí sí pagan 7 adultos y como 7×6 es 42, le quedan 104.000 pesos, que son los 26 niños.

Entrevistador: Explícame cómo hiciste los procedimientos.

José: Bueno, multipliqué 26×4 y me dio 104.000 y luego el 6.000 lo fui multiplicando hasta completar 146.000 y me dio 6 adultos.

En las respuestas de José, se aprecian estrategias de multiplicaciones directas, al ejecutar los algoritmos, pero también operó por tanteo y realizó la suma de los resultados obtenidos en las multiplicaciones, hasta llegar a una respuesta adecuada a las cuestiones por las que se indagaron.

2. De una escuela se quiere llevar a un grupo de niños al Gran Circo Los Enanos, que llegó a la ciudad la semana pasada. A continuación, se muestra una tabla donde se registra el valor de las entradas por persona.

Entradas al Circo	
PERSONAS	COSTO
Niño	\$4.000
Adulto	\$6.000

- A) En segundo grado hay 29 niños, y los van a acompañar 5 de sus profesores ¿Cuánto dinero deben pagar por concepto de entradas? *144, multiplica 29x4 y luego 5x6, después sume los resultados y me dio 144.000*
- B) En segundo grado hay 23 niños, 7 de ellos van a ser acompañados por sus padres (papá y mamá) y además, por 4 de sus profesores ¿cuánto deben pagar por la entrada de todos? *127, multiplica 23x4 y luego 7x6, después sume los resultados y me dio 127.000*
- C) La maestra recoge el dinero de las entradas de 26 niños y en total tiene \$146 000, ¿Cuántos adultos han pagado su entrada? *7 adultos*
- D) Describe la forma como obtuviste la respuesta al literal c) de esta situación. *Multiplicamos 26x4.000, que nos dio un total de 104.000. luego sumamos hasta llegar a 146.000*

Figura 7. Manuscrito de Karen al resolver la situación donde los niños compran entradas para un circo.

Se puede apreciar alguna leve diferencia en las respuestas de Karen con la de José, pues mientras la primera realiza multiplicaciones por sumas repetidas, con un pensamiento multiplicativo bastante adecuado a lo que propone el MEN (2006), para estudiantes de ese grado; José por su parte, hace multiplicaciones repetidas, sumando cada vez el último producto, por tanteo, hasta llegar a la respuesta. Aunque José llega a la respuesta por tanteo, y teniendo en cuenta, que, según los Estándares básicos de matemáticas propuestos por el MEN (1998), un estudiante al terminar el segundo grado de educación básica, reconoce la adición de sumandos iguales como una multiplicación, la utilizada por José, es una estrategia que supera las expectativas en ese nivel escolar.

CAPITULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

Luego de hacer el análisis de la información, se pueden formular las siguientes conclusiones:

Respecto al uso del pensamiento aditivo para llegar al pensamiento multiplicativo, se nota en estos estudiantes el uso de múltiples estrategias como sumas repetidas, agrupación de factores y luego sumarlos y multiplicarlos por un valor convencional y el uso de estrategia de tanteo, esto les facilitó a los alumnos responder las situaciones y dar respuesta a las cuestiones por las que se indagaron.

Respecto a la pertinencia del marco teórico utilizado, se puede destacar, el papel de los registros y representaciones semióticas, como elementos articuladores de los objetos matemáticos, y su utilidad en los procesos comprensivos de los estudiantes, pues, la conexión que los estudiantes hicieron de los elementos socioculturales inmersos en las situaciones contextualizadas con elementos conceptuales, facilitó la comprensión de los problemas y el uso de conceptos por estas a un nivel de comprensión de los estudiantes.

Asimismo, las entrevistas basadas en las soluciones que los estudiantes daban a las tareas, fungieron como elementos interventivos, ya que con el paso a paso de las entrevistas los estudiantes iban cambiando sus concepciones erróneas y dando respuestas más adecuadas a las tareas. Por su parte, la estructura de las situaciones, incentivando el uso de sumas repetidas,

agrupamientos por convenciones y rejillas rectangulares que evocan el concepto de área, facilitó el análisis de las estrategias usadas por los estudiantes, al resolver las tareas.

La comprensión de los valores posicionales y de las relaciones de orden entre las cantidades involucradas en las situaciones problema utilizadas, ayudó a los estudiantes a dar solución a las tareas, y a verificar requisitos que les facilitó interpretar las situaciones y a escoger las operaciones que finalmente utilizaron para dar sus respuestas, así como a elaborar argumentos para justificar la forma como realizaron los procesos y procedimientos de solución.

Respecto a la representatividad de la muestra se puede decir que, aunque esta es pequeña el nivel de desarrollo de pensamiento numérico en los estudiantes de esta comuna parece ser muy homogéneo, con una muestra pequeña pudiera lograrse una representatividad satisfactoria.

Respecto a la validez de los cuestionarios por medios virtuales, se puede decir que la falta de seguridad sobre la asertividad de las soluciones haya sido dada por los estudiantes, sin la ayuda de un adulto, es una de las grandes limitaciones que podemos reportar en este estudio, pues no se tuvo forma de establecer un control más riguroso al respecto.

En cuanto a la pregunta, se potenció el desarrollo del pensamiento numérico en los estudiantes de segundo año participantes de esta investigación, ya que se desarrollaron diversas estrategias que permitieron dar claridad frente a la utilización de situaciones problema de estructuras multiplicativas.

El potenciar el pensamiento numérico conlleva a que el educador dinamice su didáctica pedagógica encaminada a que los estudiantes resuelvan situaciones problema desde la concepción del niño al permitirle la modelización, la matematización por medio de representaciones semióticas que le lleven a argumentar el cómo lo hizo, el porqué y el para qué al pasar del lenguaje figural del niño a un lenguaje estructurado del adulto.

5.2 Recomendaciones

Durante la investigación se evidenciaron dificultades en la elaboración de las estructuras multiplicativas en estudiantes de segundo año, debido a que las estructuras aditivas no están bien fundamentadas. Este análisis se puede concluir al observar y escuchar las falencias que tienen los estudiantes cuando al conceptualizar y argumentar la expresión, esta no es correcta. De igual forma se percibe como recurren a procesos sencillos - representaciones figurales, algoritmos - que no necesariamente evocan a una multiplicación. De allí que se proponga el fortalecimiento de los conceptos y procedimientos correspondientes a la adición a través de diversas estrategias metodológicas que disponga el profesor para que conlleven al niño a la apropiación e internalización del saber y del saber hacer. Y por ende que el niño por sus propios métodos llegue a la estructura multiplicativa.

El docente debe aprovecharse de ese aprendizaje significativo que tiene el niño, en cuanto a estructuras aditivas y multiplicativas se refiere, para transversalizarlas con otras asignaturas - lengua castellana, ciencias naturales, ciencias sociales- que propenda por una aplicación más holística de la matemática en cualquier contexto.

Cuando el niño ha internalizado el concepto y el proceso propio o impuesto, es capaz de argumentar de forma crítica donde y como se puede aplicar estas estructuras aditivas y multiplicativas en el contexto familiar y escolar. El maestro, por lo tanto, debe potenciar estas competencias de ese niño para que sea un acompañante par del niño o de los niños que tienen bajos niveles de comprensión y asimilación del concepto y del proceso.

Las situaciones problema han de ser muy cercanas a la realidad del estudiante. En el cuestionario que se aplicó se evidencia cómo en un problema que se resuelve bajo las condiciones de valor posicional y relaciones de orden, los estudiantes analizan con mayor detenimiento la solución a la situación problema. A medida que el niño asimile estas condiciones se le debe proponer que él construya y proponga problemas similares con un nivel de mayor complejidad del contexto familiar e institucional donde se desenvuelve.

Cuando se avanza en la complejidad de las situaciones problema y en la formalización de los algoritmos, tanto aditivos como multiplicativos, se le dificulta al estudiante estructurar éstos. Es el caso de la situación problema que se registra en el ejercicio de la alcancía, se puede notar que les tomó demasiado tiempo para analizar y organizar sus resultados, ya que, al parecer en varias preguntas de un mismo planteamiento del problema, los alumnos solamente ven la parte más no ven el todo. Es decir, descontextualizan el ejercicio por completo. Por lo tanto, se sugiere que los cuestionarios, exámenes, tareas que se le plantea al estudiante sean de un nivel de complejidad acorde a su nivel de asimilación. Se debe planear una actividad para el total de los estudiantes, pero las preguntas y respuestas se deben adaptar a un lenguaje acorde a las necesidades educativas de los estudiantes.

El maestro debe fortalecer el pensamiento numérico con estrategias acordes al contexto familiar y social en el que el niño se desenvuelve, ya que esto hace que el alumno participe activamente de su propio proceso de aprendizaje, es decir, el aprovechamiento de sus pre-saberes hace que se estimule, interroge, reflexione y despierte su interés, su disposición a estudiar un determinado tema matemático.

Si bien, este estudio investigativo se pensó y estructuró desde el ámbito cognitivo, este no se pudo llevar a la práctica en un 100% en atención a la solicitud que nos hizo la Universidad Nacional en cuanto al “relajamiento del requisito de práctica de aula en el desarrollo de sus trabajos de grado, y solo se exigirá una monografía que acuerden entre director y estudiante que contenga los otros ítems contenidos en el formulario de evaluación para trabajos de grado para nuestra Maestría, pueden darse por notificados y actuar en consecuencia. Espero que esas prácticas pedagógicas y didácticas puedan desarrollarlas con sus estudiantes en el futuro, para que puedan evaluarlas y retroalimentarse de sus experiencias y poder practicar una mejor docencia”.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, C. (2018). *Resolución de problemas multiplicativos con estudiantes de grado segundo* (Tesis de maestría). Universidad Externado de Colombia, Bogotá.
- Amaya, T. (2020). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de matemáticas en el desarrollo de una clase utilizando funciones. *Bolema*, 34(66), 110-131.
- Amaya, T., Castellanos, A., y Pino-Fan, L. (2021). Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. *Uniciencia*, 35(2), 1-21. doi: 10.15359/ru.35-2.12
- Amaya, T., & Sgreccia, N. (2014) Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal *Épsilon* 31(3), 88, 21-38
- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. (Tesis doctoral). Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Atencia, A. (2016): *El software jclíc como estrategia didáctica en la enseñanza de las operaciones básicas en matemáticas*. (Tesis de maestría). Universidad de Santander, Santander.
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barallobres, G. (2013). La noción de científicidad en la teoría de situaciones didácticas. *Revista Educación Matemática*, 25(3) 9-25.
- Bernárdez, E. (1995). *El papel del léxico en la organización textual*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Traducido por Fregona, D. Buenos Aires: Libros del Zarzal.
- Brousseau, G. (1999). Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba.
- Butto, C., & Martínez, C. (2012). Abordaje basado en competencias: la resolución de problemas aditivos en el nivel básico. *Revista de la Unidad de Educación de la Facultad de Ciencias Humanas y Sociales. Horizontes Pedagógicos*, 14(1), 30-42.
- Bryant, P., Nunes, T. & Tzekaki, M. (2009). Multiplicative reasoning and mathematics achievement 2: 217–224. Multiplicative reasoning and mathematics achievement. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidi (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 217-224)*. Thessaloniki, Greece: PME.
- Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., & Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, núm. Esp, pp. 83-102.
- Castillo, D., Paz, K., & Marmolejo, G. (2017). Propuesta de enseñanza para la composición y transformación de medidas en las estructuras aditivas, de acuerdo con las categorías de Vergnaud para grado tercero. *Revista Sigma*, 13(1), 27-32.
- Chinnappan, M. (2002). Modelling of multiplicative structures in a B10B Program. In W. Yang, C. Chu, T. de Alwis & F. Bhatti (Eds.), *Proceedings of the Seventh Asian Technology Conference in Mathematics*, 17-21 December 2002 (pp. 339-348). Blacksburg VA: ACTM.

- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, (2da ed.). Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2012). Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.3-6). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.
- Echegaray, S. (s.f). Didáctica de la matemática: algunas consideraciones sobre el programa epistemológico. Recuperado el 23 de noviembre de 2020, del sitio web <http://www.unrc.edu.ar/publicar/cde/05/Etchegaray.htm>
- Escudero, I., Goded, E. y Lagos, P. (2010). *Tratamiento y aplicación de las artes en las diversas áreas del currículo*. Madrid: Amazon.
- Fabra, M., y Deulofeu, J (2000). Construcción de gráficos de funciones: continuidad y prototipos. *Relime*, 3(2), 207-230.
- Farfán, R. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*. Barcelona: Editorial Gedisa S.A.
- Fernández, C., y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Revista Infancia y Aprendizaje*, 34(1), 67-80.

- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. Recuperado el 14 de agosto de 2012 del sitio web: http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2007_10_2_06.pdf.
- Gallardo, J., González, J., y Quintanilla, V. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Revista Educación Matemática*, 25(2), 61-88.
- Gatica, N., Maz-Machado, A., May, G., Cosci, C., Echevarría, G., y Renaudo, J. (2010). Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas. *Revista Iberoamericana de matemática*, (22), 121-131.
- Godino, J. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8 (11), 111-132.
- Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.
- Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In: Kelly, A.; Lessh, R. (Ed.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-545). New York: Routledge.
- Hitt, F. (2000). Representations and mathematics visualization del PME-NA, Tucson, Arizona, pp. 131-147.
- Herbst, P. (2011). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (1), 5-22.

- Hernández, V. (1996). Algunas conjeturas sobre la noción de problema, lingüística y educación matemática y las perspectivas del uso de tecnología.
- Ivars, P., y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Revista Educación Matemática*, 28(1), 9-38.
- Jacob, L. & Willis, S. (2003). *The development of multiplicative thinking in young children*. In: 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group, 6 - 10 July 2003, Deakin University, Geelong.
- Koichu, B., & Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 65(3), 349-365.
- López, A. (2009). *Modelo de evaluación continua formativa-formadora-reguladora y tutorización continua con soporte multimedia apoyado en una plataforma virtual* (Tesis de doctorado). Uned, Madrid.
- Medina, L. (2017). *Propuesta didáctica para el aprendizaje de la estructura multiplicativa* (Tesis de maestría). Tecnológico de Monterrey, México.
- Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(3), 221-271.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998) Lineamientos curriculares Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

- Moreno, L. y Waldegg, G. (2002). *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas*. México: Seminario Nacional de Formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas, pp. 40-66. Recuperado de: https://184.182.233.150/rid=1LQJF6H92-3SJ25S-5TQK/aprendizaje_cognitivo.pdf
- Múnera, J. (2011). Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 179-193.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.
- Obando, G., y Muñera, J. (2003). Las Situaciones Problemas como Estrategia para la Conceptualización Matemática. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35).
- Ortiz de Maschwitz, E. (2004). *El cerebro en la educación de las personas*. Buenos Aires: Bonum.
- Pisa (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012. Recuperado el de: <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d>.
- Rivera, M., Salgado, G., y Dolores, C. (2019). Explorando las Conceptualizaciones de la Pendiente en Estudiantes Universitarios. *Revista Bolema*, 33(65), 1027-1046. doi: 10.1590/1980-4415v33n65a03.
- Rodríguez, M. (2012). Resolución de Problemas. En M. Pochulu y M. Rodríguez (comp), *Educación Matemática. Aportes a la Formación Docente desde distintos Enfoques Teóricos* (pp. 153-174). Buenos Aires: Eduvim-Ediciones UNGS.
- Rodríguez, M. (2010). *La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva*. Barcelona: Editorial Octaedro.

- Santos, L. & Sepúlveda, A. (2006). Desarrollo de episodios de comprensión en matemática. *Revista mexicana de investigación educativa*, 1389-1422.
- Sevillano, M. (2008) (Coord.) *Nuevas Tecnologías en Educación Social*. Madrid: McGraw Hill.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Hong Kong: Graphicraft typesetters.
- Van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2010). From Addition to Multiplication and Back: The Development of Students Additive and Multiplicative Reasoning Skills. *Journal of Cognition and Instruction*, 28(3), 360-381. doi: 10.1080/07370008.2010.488306. 1-48.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J.Hiebert and M.Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Vernard, G. (1983). *Acquisition of mathematical concepts and processes*. Orlando: Academic Press.
- Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, (10), 205-215.
- Wright, V. (2011). *The development of multiplicative thinking and proportional reasoning: models of conceptual learning and transfer* (Tesis doctoral). The University of Waikato, Waikato

ANEXOS

Anexo A. Situaciones correspondientes a las aplicadas en el primer taller

 <small>UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA</small> Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Medellín, Colombia 2020
CUESTIONARIO PENSAMIENTO NUMÉRICO

NOMBRE DEL ESTUDIANTE	
------------------------------	--

CARACTERÍSTICAS DE LA PRUEBA

Taller 1

Estimado estudiante esta prueba se utilizará exclusivamente para recolectar información para el trabajo de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Estos resultados se utilizarán con fines investigativos de carácter académico para mejorar los procesos de estructuras aditivas y multiplicativas de estudiantes de segundo grado. Se le agradece resolver los cuestionarios de la manera más sensata, realizando los procedimientos en una hoja adicional.

1. Carlos debe elegir una canasta que cumpla con las siguientes condiciones:

- Contiene menos de 100 huevos.
- Es un múltiplo de 11.
- El número de las decenas de los huevos es 5.

Entonces ¿cuántos huevos compro Carlos?



La canasta que cumple las condiciones es la que tiene.

Justifica tu respuesta

2. De una escuela se quiere llevar a un grupo de niños al Gran Circo Los Enanos, que llegó a la ciudad la semana pasada. A continuación, se muestra una tabla donde se registra el valor de las entradas por persona.

Entradas al Circo	
PERSONAS	COSTO
Niño	\$ 4 000
Adulto	\$ 6 000

- a. En segundo grado hay 29 niños, y los van a acompañar 5 de sus profesores ¿Cuánto dinero deben pagar por concepto de entradas?

- b. En segundo grado hay 23 niños, 7 de ellos van a ser acompañados por sus padres (papá y mamá) y, además, por 4 de sus profesores ¿cuánto deben pagar por la entrada de todos?

- c. La maestra recoge el dinero de las entradas de 26 niños y en total tiene \$ 1 46 000, ¿Cuántos adultos han pagado su entrada?

d. Describe la forma como obtuviste la respuesta al literal c) de esta situación.

3. En la alcancía de Mariana hay \$ 15 000, en monedas de \$ 500 y de \$ 1 000. Si hay 8 monedas de \$ 500



a. ¿Cuántas monedas hay de \$ 1 000?

b. Mariana quiere comprar lápices por docenas para obsequiarle a sus compañeros, si cada docena cuesta \$ 7 200 para cuántas docenas le alcanzan?

c. ¿Cuál es el valor de cada lápiz individual? ¿Le sobra dinero? ¿Cuánto?

4. En la tienda del señor Rodrigo hay una caja que tiene 12 paquetes de galletas y cada paquete contiene 4 galletas.



a. Si María compra 3 cajas de galletas ¿cuántas galletas se lleva?

b. Si cada caja tiene un precio de \$ 28 880 ¿Cuánto cuesta cada paquete de galletas? ¿Cuál será el precio de una sola galleta?

Anexo B. Situaciones correspondientes a las aplicadas en el taller 2



Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2020

CUESTIONARIO PENSAMIENTO NUMÉRICO

NOMBRE DEL ESTUDIANTE

CARACTERÍSTICAS DE LA PRUEBA

Taller No. 2

Estimado estudiante esta prueba se utilizará exclusivamente para recolectar información para el trabajo de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Estos resultados se utilizarán con fines investigativos de carácter académico para mejorar los procesos de estructuras aditivas y multiplicativas de estudiantes de segundo grado. Se le agradece resolver los cuestionarios de la manera más sensata, realizando los procedimientos en una hoja adicional.

1. En una tienda del colegio se ofrece la siguiente promoción:



¿En cuál de las tablas se muestra correctamente el precio de 3, 6 y 9 paquetes de estas galletas?

A.

Número de paquetes	Costo (\$)
3	350
6	350
9	350

B.

Número de paquetes	Costo (\$)
3	350
6	700
9	1.050

C.

Número de paquetes	Costo (\$)
3	350
6	700
9	1.400

D.

Número de paquetes	Costo (\$)
3	350
6	650
9	900

2. Si Emmanuel compró 3 arepas, 6 tortas, 2 jugos y 4 gaseosas para compartir con sus amigos ¿Cuánto dinero pagó en la cafetería del colegio? ¿Cuánto recibió de cambio si pagó con un billete de \$ 50 000?

Jugo:	\$1.000
Arepa:	\$600
Gaseosa:	\$700
Torta:	\$1.200

3. La discografía Maxmusic les dice a sus artistas que dará un premio llamado disco brillante, cada vez que vendan 100 copias de su disco. En la siguiente tabla se muestran los premios entregados a tres artistas de Maxmusic. ¿Cuál es la cantidad mínima de discos que ha vendido esta discográfica?

Serrat					
Melendi					
Sanz					

4. Sergio es conductor de autobús. Me ha dicho que, si no hiciese ninguna parada y mantuviese siempre la velocidad de 80 kilómetros por hora, tardaría en hacer su recorrido exactamente 2 horas. ¿Cuántos kilómetros mide su recorrido?

Anexo C. Situación 3, correspondiente a las aplicadas en el taller 3



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2020

CUESTIONARIO PENSAMIENTO NUMÉRICO

NOMBRE DEL ESTUDIANTE

CARACTERÍSTICAS DE LA PRUEBA

Taller No. 3

Estimado estudiante esta prueba se utilizará exclusivamente para recolectar información para el trabajo de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Estos resultados se utilizarán con fines investigativos de carácter académico para mejorar los procesos de estructuras aditivas y multiplicativas de estudiantes de segundo grado. Se le agradece resolver los cuestionarios de la manera más sensata, realizando los procedimientos en una hoja adicional.

1. En el acuario de Sandra hay 9 peces; en el de Alonso hay dos veces el número de peces que hay en el acuario de Sandra.



¿Cuántos peces tiene el acuario de Alonso?



2. Un agricultor recoge 29 manzanas de cada árbol.

¿Cuántas manzanas recogerá de 4 árboles?

3. José, el dueño de la pastelería "Mi pan", empaqueta pasteles. Si pone en cada caja 6 pasteles,

¿cuántos pasteles empaquetará en 5 cajas?

DATOS	OPERACIÓN	RESULTADO

4. En la siguiente tabla se presenta información incompleta de los precios de paquetes de dulces en una tienda.

Número de paquetes	Precio
1	
2	\$1.800
3	
4	
5	\$4.500

Si cada paquete de dulces vale lo mismo, ¿cuánto valen tres paquetes?

Anexo D. Situaciones correspondientes a las aplicadas en el taller 4

 <small>UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA</small> Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Medellín, Colombia 2020
CUESTIONARIO PENSAMIENTO NUMÉRICO

NOMBRE DEL ESTUDIANTE	
------------------------------	--

CARACTERÍSTICAS DE LA PRUEBA

Taller No. 4

Estimado estudiante esta prueba se utilizará exclusivamente para recolectar información para el trabajo de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Estos resultados se utilizarán con fines investigativos de carácter académico para mejorar los procesos de estructuras aditivas y multiplicativas de estudiantes de segundo grado. Se le agradece resolver los cuestionarios de la manera más sensata, realizando los procedimientos en una hoja adicional.

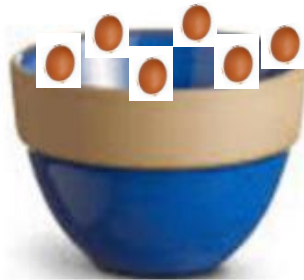
1. Luis va a la tienda a comprar unas cosas para su mamá. Este es el listado: el precio de kilo de papa es de \$ 2 000 y el de una libra de arroz es de \$ 1 200.



- a. ¿El costo total de la compra fue?
-

b. ¿La diferencia entre el costo de las dos libras de arroz y el kilo de papa es?

2. María pone 6 huevos en cada taza.



¿Cuántos huevos pone en tres tazas?

3. Si tenemos 4 cajas grandes. Dentro de cada caja grande hay 3 cajas medianas y dentro de cada caja mediana hay 2 cajas pequeñas. ¿Cuántas cajas hay en total, entre grandes, medianas y pequeñas?

cajas grandes: _____

cajas medianas: _____ × _____ = _____

cajas pequeñas: _____ × _____ × _____ = _____

En total hay _____ cajas.

4. En la gran jungla, el rey león convocó a una gran reunión. Asistieron 120 cebras, 26 gallos, 26 elefantes y 10 leones.

¿Cuántas patas hay por todos los animales? Y justifica el proceso

Anexo E. Situaciones correspondientes a las aplicadas en el taller 5

 <small>UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA</small> Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Medellín, Colombia 2020
CUESTIONARIO PENSAMIENTO NUMÉRICO

NOMBRE DEL ESTUDIANTE	
------------------------------	--

CARACTERÍSTICAS DE LA PRUEBA

Taller No. 5

Estimado estudiante esta prueba se utilizará exclusivamente para recolectar información para el trabajo de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Estos resultados se utilizarán con fines investigativos de carácter académico para mejorar los procesos de estructuras aditivas y multiplicativas de estudiantes de segundo grado. Se le agradece resolver los cuestionarios de la manera más sensata, realizando los procedimientos en una hoja adicional.

1. Isabel compró una docena de chocolates, María compró el doble que ella. Si cada chocolate cuesta \$ 3 000.



¿Cuánto gastó María?

2. Milagros tiene 7 crayolas y Ruby el triple que ella.



¿Cuántas crayolas tienen entre los dos?

3. En un tren viajaban 46 personas. Si subieron 47 personas más, ¿cuántas viajan ahora? Resuélvelo por medio de la siguiente tabla.

4. En la biblioteca de nuestra clase hay 158 libros y en la de 2ºA hay 169. ¿Cuántos libros hay en la biblioteca para utilizar en la clase?



Anexo F. Situación problema 6, aplicada a los estudiantes



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2020

CUESTIONARIO PENSAMIENTO NUMÉRICO

NOMBRE DEL ESTUDIANTE	
------------------------------	--

CARACTERÍSTICAS DE LA PRUEBA

Taller No. 6

Estimado estudiante esta prueba se utilizará exclusivamente para recolectar información para el trabajo de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Estos resultados se utilizarán con fines investigativos de carácter académico para mejorar los procesos de estructuras aditivas y multiplicativas de estudiantes de segundo grado. Se le agradece resolver los cuestionarios de la manera más sensata, realizando los procedimientos en una hoja adicional.

1. Cada mesa en un restaurante tiene capacidad para cuatro personas.



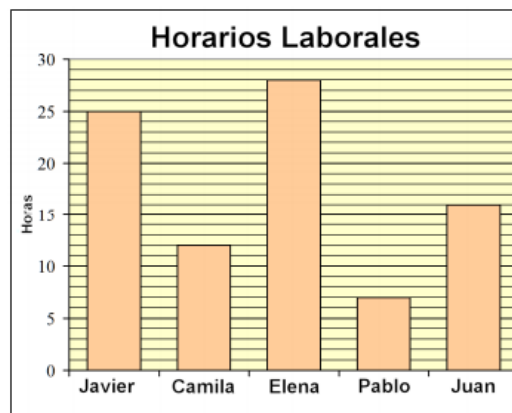
¿Cuántas mesas necesitas reservar para un grupo de 31 personas?

-
-
2. Ana está embolsando rosquillas que ella hizo. Ella guarda cuatro rosquillas en cada bolsa. Ella tiene 28 rosquillas para embolsar.



¿Cuántas bolsas necesitará?

3. El gráfico muestra los horarios laborales de algunas personas que trabajan en el huerto manzanal de Tío Carlos.







- a. ¿Cuántas horas trabajó Elena?

- b. ¿Cuántas horas trabajó Camila?

c. ¿Cuántas horas más trabajó Javier que Juan?

d. ¿Cuántas horas trabajaron los tres chicos en total?

4. Encuentra el costo total de compras de los artículos, en cada problema. Resuelve las operaciones por medio de una multiplicación.

 \$6.60	 \$8.95	 \$1.25	 \$16.59
a. una calculadora y un maletín	b. dos bolígrafos y un libro	c. tres bolígrafos y una calculadora	

Anexo G. Foto de tres niños resolviendo uno de los talleres



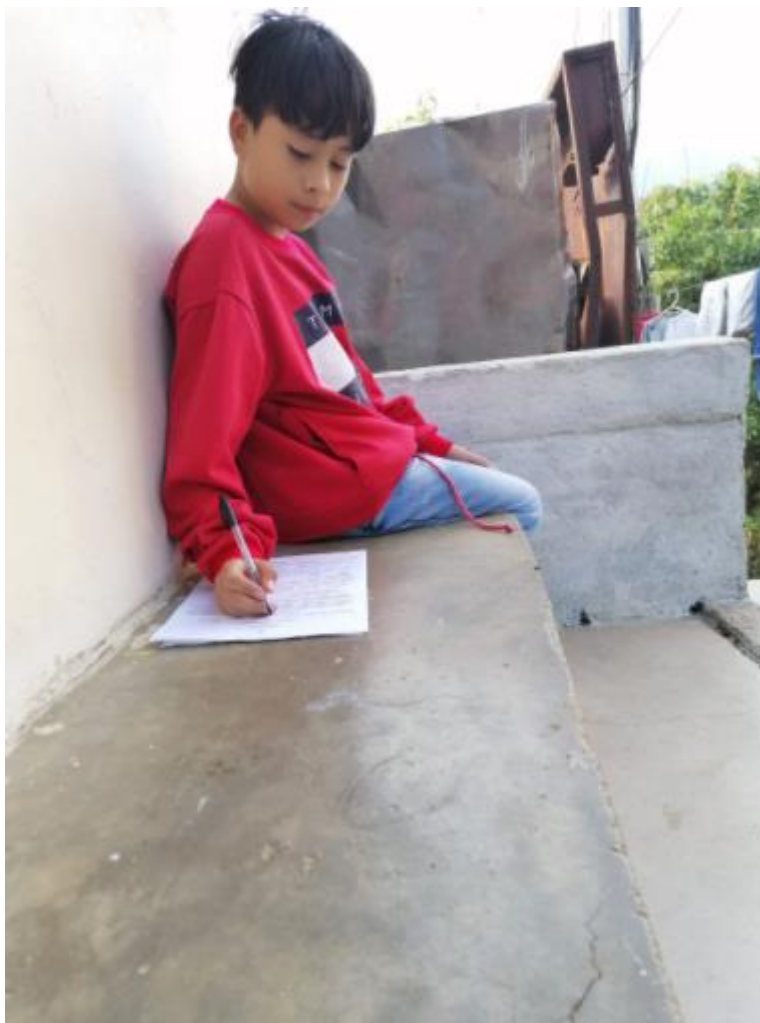
Anexo H. Foto de niños resolviendo taller 1



Anexo I. Niño resolviendo taller en casa



Anexo J. Foto de niño resolviendo un taller en casa



Anexo K. Foto de niña resolviendo taller en casa

