MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE ESFUERZOS EN SIMETRÍAS CILÍNDRICAS CON ASIMETRÍA RADIAL APLICADA A ESTRUCTURAS DE GUADUA ANGUSTIFOLIA

JUAN CARLOS MORENO ORTIZ
jcmorenoo@unal.edu.co

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y QUÍMICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS – FÍSICA

MANIZALES, COLOMBIA
2020

MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE ESFUERZOS EN SIMETRÍAS CILÍNDRICAS CON ASIMETRÍA RADIAL APLICADA A ESTRUCTURAS DE GUADUA ANGUSTIFOLIA

JUAN CARLOS MORENO ORTIZ

Tesis presentada como requisito parcial para optar por el título de:
Magister en Ciencias – Física

Director:
Ph.D. CARLOS VARGAS HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y QUÍMICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS – FÍSICA

MANIZALES, COLOMBIA
2020

NOTA DE ACEPTACIÓN

_____

_____

_____

_____

_____
Ph. D. Carlos Vargas Hernández
Director del Proyecto de Grado

_____
Jurado

_____
Jurado

Manizales, 26 de febrero de 2020

Dedicatoria

A mis hijos Sara Sofía, Luisa Fernanda y Juan Miguel. Son el motor de mi vida, la razón por la cual todo tiene sentido y propósito.

Agradecimientos

A Dios por guiarme en este camino, por darme la fuerza de voluntad, tenacidad y perseverancia para finalizar de la mejor manera este importante proyecto para mi crecimiento personal y profesional; al Doctor Carlos Vargas Hernández, mi tutor y director por quien siento un gran respecto, aprecio y admiración, quien me ha guiado con paciencia, rectitud y vehemencia, es la persona por la cual se creó este proyecto y desde el inicio me ha brindado un apoyo inconmensurable en este proceso en lo personal e institucional.

A Yesy Lorena Esterilla, mi compañera sentimental, gracias a la vida por ponerte en mi camino, a toda mi familia por estar siempre presente de corazón y acción; a todas las personas que me han apoyado en este proceso y que también lo han hecho posible al compartir sus conocimientos.

TABLA DE CONTENIDO

pág.

INTRODUCCIÓN/JUSTIFICACIÓN 16
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 20
1.1. ALCANCE 22
2. OBJETIVOS 22
2.1. OBJETIVO GENERAL 22
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS 23
3. MARCO TEÓRICO 23
3.1. ANTECEDENTES 23
3.2. CARACTERÍSTICAS ANATÓMICAS Y MORFOLÓGICAS DEL BAMBÚ GUADUA ANGUSTIFOLIA 25
3.2.1. Estructura interna del culmo 28
3.3. USOS Y APLICACIONES DEL BAMBÚ GUADUA ANGUSTIFOLIA 29
3.4. ASPECTOS TEÓRICOS SOBRE LOS MATERIALES COMPUESTOS 31
3.5. MODELADO DE MATERIALES COMPUESTOS 34
3.6. ANÁLISIS MACROMECÁNICO 36
3.6.2. Esfuerzos de cumplimiento y constantes de ingeniería para materiales ortotrópicos 48
3.6.3. Restricciones a las constantes de ingeniería para materiales ortotrópicos 53
3.6.4. Relación esfuerzo deformación para estado de esfuerzo plano en materiales ortotrópicos 56
3.6.5. Relación esfuerzo deformación para una lámina con orientación arbitraria de sus ejes principales 59
3.6.6. Modelo analítico de esfuerzos en cilindros de pared gruesa como material funcionalmente graduado 70

pág.

3.7. ANÁLISIS MICROMECÁNICO....76
3.8.1. Regla de mezclas....77
3.8.2. Ecuaciones de Halpin – Tsai (H – T)....85
3.8.3. Modelo de Hashim y Rosen....87
3.8.4. Modelo de Mori – Tanaca (M – T)....88
3.8.5. Modelo de Hopkins y Chamis....89
3.8.6. Modelo de Chamis....90
3.9. ANTECEDENTES DEL MODELADO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE PROPIEDADES MECÁNICAS DEL BAMBÚ....91
3.10. ANTECEDENTES EXPERIMENTALES....93
4. RESULTADOS....**Error! Bookmark not defined.**
4.1. ANÁLISIS DE SOLUCIONES CERRADAS A LOS ESFUERZOS TRANSVERSALES DE LA GUADUA....96
4.1.1. Soluciones cerradas para el esfuerzo radial....98
4.1.2. Análisis los resultados....**Error! Bookmark not defined.**
4.1.3. Soluciones cerradas para el esfuerzo circunferencial....99
4.1.4. Análisis de resultados....100
5. SIMULACIÓN DE ESFUERZOS EN DIFERENTES SOLICITACIONES....101
5.1. TRACCIÓN PARALELA A LA FIBRA....102
5.2.1. Análisis de resultados....105
5.3. SIMULACIÓN DE ESFUERZOS A COMPRESIÓN PERPENDICULAR A LA FIBRA....106
5.3.1. Análisis de resultados....109
5.4. SIMULACIÓN DE ESFUERZOS A COMPRESIÓN PARALELA A LA FIBRA 109
5.4.1. Análisis de resultados....112

pág.

5.5. SIMULACIÓN DE TRACCIÓN PERPENDICULAR A LA FIBRA 113
5.5.1. Análisis de resultados 115
5.6. SIMULACIÓN DE CORTE PARALELO A LA FIBRA.....116
5.6.1. Análisis de resultados 123
5.7. SIMULACIÓN DE FLEXIÓN 124
5.7.1. Análisis de resultados 126
5.8. SIMULACIÓN DE TORSIÓN 126
5.8.1. Análisis de resultados 129
5.9. RESUMEN DE RESULTADOS.....130
5.10. ANÁLISIS DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL CULMO Y SU RELACIÓN CON LOS ESFUERZOS 130
6. CONCLUSIONES.....132
7. BIBLIOGRAFÍA 136

LISTA DE FIGURAS

pág.

Figura 1 Conformación del culmo de la guadua.....26
Figura 2 Corte transversal de la estructura interna del culmo de la guadua 28
Figura 3 Corte transversal de un culmo de bambú, haces vasculares dentro del parénquima.....29
Figura 4 Fases de un material compuesto.....33
Figura 5 Esfuerzos en el elemento 38
Figura 6 Deformación a cortante de ingeniería vs deformación a cortante en notación tensorial 39
Figura 7 Deformación de un cubo anisotrópico bajo σy.....47
Figura 8 Significado físico de las relaciones esfuerzo – deformación anisotrópica48
Figura 9 Distinción entre ν_{12} y ν_{21} 51
Figura 10 Lamina reforzada unidireccionalmente 57
Figura 11 Fibra enrollada helicoidalmente – Armadura cilíndrica circular reforzada 60
Figura 12 Rotación positiva de los ejes del material principal a partir de los ejes x-y 61
Figura 13 Representación del comportamiento serie-paralelo de los constituyentes del material compuesto.....79
Figura 14 Propiedades mecánicas macroscópicas de un material compuesto, a partir de la microestructura 87
Figura 15 Constantes elásticas en función de la microestructura.....90
Figura 16 Constantes elásticas de un compuesto transversalmente isotrópico en términos de constantes componentes (matriz isotrópica, fibra anisotrópica).....91

pág.

Figura 17 Detalle de cilindro a presión interna 98
Figura 18 Variación del esfuerzo radial 98
Figura 19 Curva normalizada 99
Figura 20 Variación del esfuerzo circunferencial 99
Figura 21 Curva normalizada 100
Figura 22 Probeta como material compuesto 103
Figura 23 Detalle del mallado sólido estándar, 236434 nodos, 158017 elementos 103
Figura 24 Esfuerzo de tensión Von Mises 104
Figura 25 Desplazamiento global 104
Figura 26 Deformaciones unitarias 105
Figura 27 Discretización mediante mallado de 425997 nodos y 294411 elementos 107
Figura 28 Esfuerzo de Von Mises 107
Figura 29 Esfuerzo normal en la dirección de aplicación de la carga 108
Figura 30 Deformaciones globales 108
Figura 31 Malla solida estándar con 380652 nodos, 261899 elementos 110
Figura 32 Tensión de Von Mises 110
Figura 33 Esfuerzo de compresión en dirección x (paralelo a la fibra) 111
Figura 34 Desplazamientos globales 111
Figura 35 Deformaciones unitarias globales 112
Figura 36 Mallado y distribución de fuerzas en los orificios 113
Figura 37 Detalle del mallado 1055621 nodos, 745105 elementos 114
Figura 38 Esfuerzo de Von Mises mediante FEA 114
Figura 39 Esfuerzo en la dirección de aplicación de la carga 115

pág.

Figura 40 Prueba de mariposa para resistencia al corte paralelo a la fibra 116
Figura 41 Ensayo de corte interlaminar para resistencia al corte paralelo a la fibra 117
Figura 42 Condiciones de contorno para el modelo de prueba de mariposa 118
Figura 43 Esfuerzo de Von Mises 118
Figura 44 Esfuerzo cortante (xy) 119
Figura 45 Esfuerzo cortante (xz) 119
Figura 46 Esfuerzo cortante (yz) mariposa 120
Figura 47 Condiciones de contorno para simulación de resistencia al corte interlaminar, 74554 nodos, 50581 elementos 120
Figura 48 Esfuerzo Von Mises 121
Figura 49 Esfuerzo cortante (xy) interlaminar 121
Figura 50 Esfuerzo cortante (xz) interlaminar 122
Figura 51 Esfuerzo cortante (yz) interlaminar 122
Figura 52 Condiciones de contorno 190977 nodos, 131784 elementos 124
Figura 53 Esfuerzo de Von Mises 125
Figura 54 Deformaciones unitarias 125
Figura 55 Detalle del mallado 1207480 nodos, 841633 elementos 127
Figura 56 Esfuerzo de Von Mises 127
Figura 57 Esfuerzo de cortante (xy) 128
Figura 58 Esfuerzo de cortante (xz) 128
Figura 59 Esfuerzo de cortante (yz) 129
Figura 60 Orientación de los ejes en un material anisotrópico 131
Figura 61 Sección transversal de un culmo de bambú, haces vasculares dentro de parénquima 132

LISTA DE TABLAS

pág.

Tabla 1 Notación tensorial vs notación contractada para los esfuerzos y las deformaciones 38
Tabla 2 Constantes elásticas y resistentes de la parte interna, media y externa de la guadua.....102
Tabla 3 Comparación entre los resultados obtenidos mediante simulación por elementos finitos en este trabajo con los reportados experimentalmente y los hallados en la literatura. Adaptado de [15].....130

LISTA DE ANEXOS

pág.

Anexo A Protocolo implementado en el Software Matlab del modelo analítico....145
Anexo B Planos de detalle de la probeta utilizada para tracción y los diferentes modelos creados para las simulaciones 146

RESUMEN

SIMULACIÓN DE ESFUERZOS EN SIMETRÍAS CILÍNDRICAS CON ASIMETRÍA RADIAL APLICADA A ESTRUCTURAS DE GUADUA

DIRECTOR(A): CARLOS VARGAS HERNÁNDEZ

REALIZADO POR: JUAN CARLOS MORENO ORTIZ

Colombia es uno de los países líderes en Latinoamérica en el estudio y caracterización de las propiedades mecánicas del bambú guadua; en las últimas dos décadas, muchos estudios han estado enfocados en la determinación de sus propiedades tanto elásticas como de resistencia; así mismo, han tomado fuerza diferentes alternativas para la obtención de dichas propiedades, entre las que se pueden mencionar, las pruebas experimentales, los modelos numéricos, analíticos y la combinación de estos. Considerando estos aspectos, en este trabajo se establecen las tensiones de Von Mises para carga paralela y perpendicular a la fibra, compresión paralela y perpendicular, corte paralelo y torsión para el bambú guadua, y se explica el comportamiento del material frente a estas cargas utilizando como herramienta de apoyo, simulación por elementos finitos mediante el software de SolidWorks versión de prueba estudiantil; obteniéndose en un gran porcentaje valores que son comparables con los reportados en los experimentos de campo. Además de lo anterior, se presenta la interpretación de las soluciones exactas para las tensiones transversales, asumiendo el material como un cilindro de pared gruesa sometido a presiones internas, donde las tensiones varían según una función de potencia a través del culmo mediante la incorporación de una constante que mide lo heterogéneo del material.

Palabras clave: Bambú guadua, heterogéneo, Propiedades mecánicas, simulación.

ABSTRACT

SIMULATION OF EFFORTS IN CYLINDRICAL SYMMETRICS WITH RADIAL ASYMMETRY APPLIED TO GUADUA STRUCTURES
DIRECTOR (A): CARLOS VARGAS HERNÁNDEZ
WRITER: JUAN CARLOS MORENO ORTIZ

Colombia is one of the leading countries in Latin America in the study and characterization of the mechanical properties of bamboo guadua; In the last two decades, many studies have been focused on determining its elastic and resistance properties. Likewise, different alternatives have taken force to obtain these properties, among which we can mention, the experimental tests, the numerical and analytical models, and the combination of these. Considering these aspects, in this work the Von Mises stresses for parallel and perpendicular load to the fiber, parallel and perpendicular compression, parallel cutting and torsion for guadua bamboo are explained, and the behavior of the material against these is explained. loads using as a support tool, simulation by finite elements using SolidWorks software student test version; obtaining in a large percentage values that are comparable with those reported in field experiments. In addition to the above, the interpretation of the exact solutions for the transverse stresses is presented, assuming the material as a thick-walled cylinder subjected to internal pressures, where the stresses according to a power function through the culm by incorporating a constant which measures the heterogeneity of the material.

Keywords: Bamboo guadua, heterogeneity, mechanical properties, simulation.

INTRODUCCIÓN/JUSTIFICACIÓN

Dentro del marco de un mundo preocupado por el medio ambiente y por las alternativas de industrialización eco amigables, surge gran cantidad de investigaciones alrededor de materiales de construcción que permitan el desarrollo sostenible de la infraestructura de una sociedad bajo parámetros ambientales aceptables mundialmente. Entre estos materiales sobresale la guadua, como alternativa importante que mezcla el buen comportamiento estructural junto con el manejo y buen acabado superficial, lo cual lo hace un material idóneo en el diseño y construcción de obras de infraestructura.

Teniendo en cuenta lo anterior, es conveniente decir que sus propiedades físicas y mecánicas le han permitido establecerse como materia prima en la industria de los laminados[1]. En ese orden de ideas, se ha venido incorporando el concepto de sostenibilidad en el marco de las construcciones. En este sentido es importante retomar el significado de sostenibilidad según McDonough, el cual lo define como una postura inteligente, creativa y esperanzada hacia el futuro. Dicho de otra forma, mediante la sostenibilidad se aseguran diseños que se mantendrán a lo largo del tiempo sin comprometer las necesidades de generaciones futuras[2].

En este orden de ideas, en la actualidad, los problemas ecológicos deberían condicionar aún más el desarrollo, los procesos industriales y las ocupaciones de los asentamientos humanos a nivel global. Por lo tanto, la búsqueda de materiales renovables y fuentes de energía no convencionales se ha convertido en una prioridad mundial [3].

La *Guadua angustifolia Kunth* es una especie endémica del Neotrópico y representa un recurso muy valioso especialmente en las zonas rurales, siendo popularmente catalogada con fines estructurales como el acero vegetal. La *Guadua* posee propiedades estructurales sobresalientes, que no sólo superan a las de la mayoría de las maderas, sino que además pueden ser comparadas con las del acero y algunas fibras de alta tecnología.

Esta especie vegetal absorbe gran cantidad de energía, admite grandes niveles de flexión, por lo tanto, sería ideal para levantar construcciones sismo resistentes accesibles en mayores proporciones, con niveles de confiabilidad y seguridad adecuados. La Guadua como material ingenieril, actualmente es usada en Colombia y a nivel mundial, como elemento estructural en esquemas de construcción destinado para vivienda, puentes y estructuras de soporte. Por todo lo anterior, es importante continuar con la investigación acerca de la respuesta del material desde la microescala y la macroescala para su uso ingenieril con fines estructurales, en aras del aprovechamiento de las bondades que ofrece el material.

Como consecuencia de la poca caracterización de resistencia mecánica de este material, se puede desencadenar fallas de carácter técnico al momento de diseñar estructuras de ingeniería, situación que podría elevar la probabilidad de falla de la estructura y poner en riesgos vidas humanas[4].

En Colombia el interés por el bambú se ha incrementado en los últimos 20 años. Este interés ha recaído únicamente en la especie Guadua angustifolia Kunth, siendo el tercer bambú más grande del mundo, el cual crece por debajo de los 2000 msnm. Por tanto, es necesario conocer la ecología de esta especie, entender su biología reproductiva, conocer las propiedades anatómicas y físico-mecánicas de sus

culmos, desarrollar tecnologías para su aprovechamiento y propagación, para poder considerar este bambú andino como una alternativa económica viable, que pueda contribuir en la diversificación agropecuaria, en el incremento de productos con alto valor agregado, en la restauración ecológica, en la generación de empleo rural, y en la construcción de capital social y tecnológico de las comunidades rurales de la parte alta de la cordillera de los Andes [5].

Teniendo en cuenta la importancia histórica de la guadua angustifolia como elemento natural, económico y resistente para usos en la construcción y en las otras áreas donde encuentra aplicaciones[6], se hace necesario proporcionar valores confiables en sus propiedades mecánicas, razón por la cual, esta planta ha despertado el interés y la atención de muchos investigadores [7].

En concordancia con lo anterior, algunas de las alternativas que se pueden tener en cuenta para lograr estos propósitos, es el uso del modelamiento matemático de situaciones físicas mediante herramientas numéricas que permitan establecer y describir de manera apropiada el comportamiento del material en condiciones de carga, lográndose así edificaciones más seguras, duraderas y con mayores niveles de accesibilidad a la población, especialmente aquellos que viven en zonas altamente sísmicas. Análogamente, en proyectos de vivienda rural se disminuirían los costos, especialmente porque permite sustraer las pruebas de laboratorio para determinar ciertas propiedades mecánicas del material y su respuesta a diferentes cargas. Otra oportunidad es que se podrían sustituir productos como la madera, obteniéndose un mayor nivel competitivo a nivel nacional e internacional.

Ahora bien, la importancia de proponer soluciones mediante análisis numéricos o modelos analíticos no solo satisface las expectativas anteriormente mencionadas, también pretende aumentar el auge de este material con lo que se obtiene el mínimo

impacto de las construcciones en el ambiente, llevándolas a formar parte de la naturaleza, disminuyendo las consecuencias de los gases de efecto invernadero, debido a su gran capacidad de absorción de carbono. De manera que, se hace necesario estandarizar el comportamiento a diferentes cargas de este material.

Es de resaltar que “desde el 26 de enero del 2010 está en vigor la actualización de la NSR-98”, la cual recibe el nombre de NSR-10 y en ella, además de la corrección y ampliación de alguno de los capítulos, se introduce un nuevo capítulo en el que la guadua es considerada como material de construcción, este nuevo capítulo recibe el nombre de Capítulo G12: Estructuras de guadua. Lo más destacable de este capítulo es la creación de unos valores de referencia de esfuerzos admisibles de la guadua angustifolia Kunth.

Contribuyendo con esta iniciativa del gobierno nacional, diferentes grupos de investigación en el país se han dado a la labor de reunir información alrededor de las características físicas y mecánicas de este material [1], con el fin de ir actualizando el reglamento y hacer más especializado y confiable su empleo en la construcción de edificaciones.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En Colombia se ha venido trabajando a lo largo de las últimas décadas en contextos institucionales, sobre el análisis y caracterización de las propiedades mecánicas de la guadua angustifolia, mediante el análisis estructural y la resistencia de materiales. Sin embargo, a pesar de estos esfuerzos, se requiere mayor investigación en aras de poder ampliar su uso a edificaciones estructuralmente estables y seguras; cuando es sometida a diferentes tipos de carga.

En Colombia, desde el 2010 se encuentra vigente la norma NSR – 10, en la cual se considera a la guadua angustifolia como material de construcción, sin embargo, a pesar de los avances en las diferentes investigaciones, la naturaleza anisotrópica del material, se ha convertido en un reto para los investigadores y en algunos estudios las pruebas experimentales, presentan algún grado de incertidumbre bien sea por falta de estandarización, unificación de criterios universales en la implementación de los ensayos, o no tienen en cuenta el carácter anisotrópico de esta planta, debido a que en la sección del culmo la densidad de fibras aumenta notablemente desde la parte interna hasta la parte externa [8], [9], modificando de manera considerable las propiedades mecánicas del material.

Las fibras naturales son prometedoras para aplicaciones de ingeniería debido a su bajo costo. Están disponibles en abundancia en las regiones tropicales y subtropicales del mundo y se pueden emplear como materiales de construcción [10]. Entre las fibras naturales la guadua ha sido ampliamente utilizada para la construcción de viviendas en todo el mundo. La guadua es un material compuesto optimizado que explota el concepto de funcionalidad gradual del material (MGF), siendo este término asociado a materiales que están constituidos por dos o más

componentes cuya densidad de distribución es variacional [11]–[13]. Las estructuras biológicas tales como el bambú tienen formas microestructurales complicadas en la distribución del material[10], por tanto, para mejorar la comprensión del comportamiento de estos materiales, se puede hacer uso de herramientas computaciones como Matlab y SolidWorks.

. Actualmente en el país, se han realizado una gran variedad de investigaciones mediante las cuales se han obtenido algunas constantes elásticas y la caracterización mecánica de ciertas propiedades; sin embargo, en este trabajo, se pretende sentar un precedente para estudios futuros con respecto a otras propiedades del mismo material.

Dicho estudio sería de gran importancia para el país, específicamente en regiones con poblaciones en alto grado de vulnerabilidad sísmica o en zonas rurales, donde exista riesgo de desastres naturales ocasionados por la topografía; sumando a lo anterior, se puede mencionar el desplazamiento forzado debido al conflicto armado entre otros aspectos por tener en cuenta.

En vista de lo anterior, el gobierno podría ofrecer a las personas o regiones afectadas, el acceso a viviendas de interés social, económicamente accesibles, confiables y eco amigables, con recursos renovables, optimizándose el tiempo de construcción y minimizando la inversión económica necesaria para su obtención; lo que se traduciría en una respuesta eficaz, eficiente y con prontitud por parte de este para hacerle frente a las ayudas humanitarias necesarias, reubicación e incorporación a la sociedad de las familias afectadas por los distintos aspectos mencionadas anteriormente.

Teniendo en cuenta lo anterior, surgen los siguientes interrogantes

- ¿Cómo podría explicarse el comportamiento de la Guadua Angustifolia a distintas cargas y geometrías mediante el uso de herramientas como SolidWorks, Autodesk Inventor o ANSYS?

- ¿De qué manera los modelos analíticos pueden aportar soluciones confiables en el estudio las tensiones transversales del material?

1.1. ALCANCE

El estudio se puede aplicar para los diferentes tipos de guadua angustifolia y sirve para todo el territorio nacional y aquellos lugares donde se cultive esta planta.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GENERAL

- Establecer la respuesta de la guadua angustifolia a distintas cargas mediante la formulación de un modelo analítico y simulación por elementos finitos.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar los modelos de la literatura y establecer un modelo para simulación por medio de Matlab
- Utilizar herramientas para el cálculo de tensiones y deformaciones
- Analizar y utilizar criterios de falla para materiales compuestos
- Deducir la solución analítica para tensiones transversales.
- Mostrar por medio de simulaciones el comportamiento mecánico de este material frente a diferentes cargas
- Comparar los resultados de las simulaciones con los resultados experimentales.
- Interpretar los resultados en correspondencia con el comportamiento real del material
- Estimar el grado de correspondencia entre los resultados experimentales y los del modelo por elementos finitos
- Presentar resultados mediante soluciones cerradas de esfuerzos transversales

3. MARCO TEÓRICO

3.1. ANTECEDENTES

"La palabra 'bambú' fue introducida por Carl Von Linné en 1753 en su obra Species Plantarum. Es una herbácea como el arroz, el maíz o la caña de azúcar. Pero a diferencia de estas plantas, la lignina de sus tejidos se convierte con el paso del tiempo en una estructura tan dura como la madera, pero más flexible y ligera. Esto hace del bambú un material muy interesante para muchísimos usos, entre ellos el estructural" [14].

“Colombia ocupa el segundo lugar en diversidad de bambú en Latinoamérica. Actualmente, 9 géneros y 70 especies están reportadas, siendo 27 especies endémicas y por lo menos 24 especies por describir. La mayoría de las especies pertenecen al género Chusquea (30%), y el resto pertenecen al género Neurolepis, Arthrostylidium, Aulonemia, Elytrostachys, Merostachys, guadua y Otatea. En especial, la guadua ha jugado un papel importante en la economía del país” [15].

El creciente interés en el desarrollo de investigaciones enfocadas en la utilización de recursos renovables y naturales, los cuales puedan servir como reemplazo o complemento de los materiales convencionales utilizados en la construcción (acero, cemento y mampostería en arcilla), por otros que tengan un menor costo ambiental, económico y energético, se ha generado como consecuencia de las problemáticas que existen actualmente en el planeta en materia ambiental y económica [2]. Desde hace más de 100 años en Colombia los pueblos indígenas, colonizadores, campesinos, arquitectos e ingenieros, han construidos diversas edificaciones como viviendas, puentes, miradores y otras obras civiles de menor escala, utilizando el bambú guadua.

“Con el fin de establecer un procedimiento para el diseño de estructuras en guadua frente a las diferentes cargas de servicio, se han adelantado diferentes investigaciones en Colombia, en su mayoría lideradas por la Universidad Nacional de Colombia, en convenio con el Ministerio de Agricultura y Desarrollo rural. Todo lo anterior con el firme propósito de establecer un procedimiento para el diseño de estructuras en guadua por el método de esfuerzos admisibles, analizando además, los diferentes factores que pueden afectar la resistencia mecánica del material [2]. Con estos datos, los ingenieros diseñadores pueden aplicar una metodología de diseño que les permita predecir el comportamiento de las estructuras de una manera

más aproximada y sus cálculos podrán ser adaptados a cualquier condición impuesta por el ambiente" [16].

3.2. CARACTERÍSTICAS ANATÓMICAS Y MORFOLÓGICAS DEL BAMBÚ GUADUA ANGUSTIFOLIA

El bambú es una gramínea, botánicamente se clasifica en los Cormofitos, dentro de la subdivisión de los espermatofitinios (Fanerógamas); dentro de la subfamilia Bambusoidea existen aproximadamente 90 géneros en los que se clasifican las 1250 especies que se conocen dentro de cinco (5) tribus (Anomochloeae Olyreae Buerge Siochioeae, Sreptochacteae Bambusae).

"La especie bambusea es la más utilizada en la Industria de la construcción, dentro de la que se encuentra la *Guadua angustifolia* como la especie de mayor aplicación en Colombia. Las Gramíneas Bambusoides, morfológicamente se encuentran en el grupo de las plantas leñosas" [17].

La siguiente figura muestra las características:

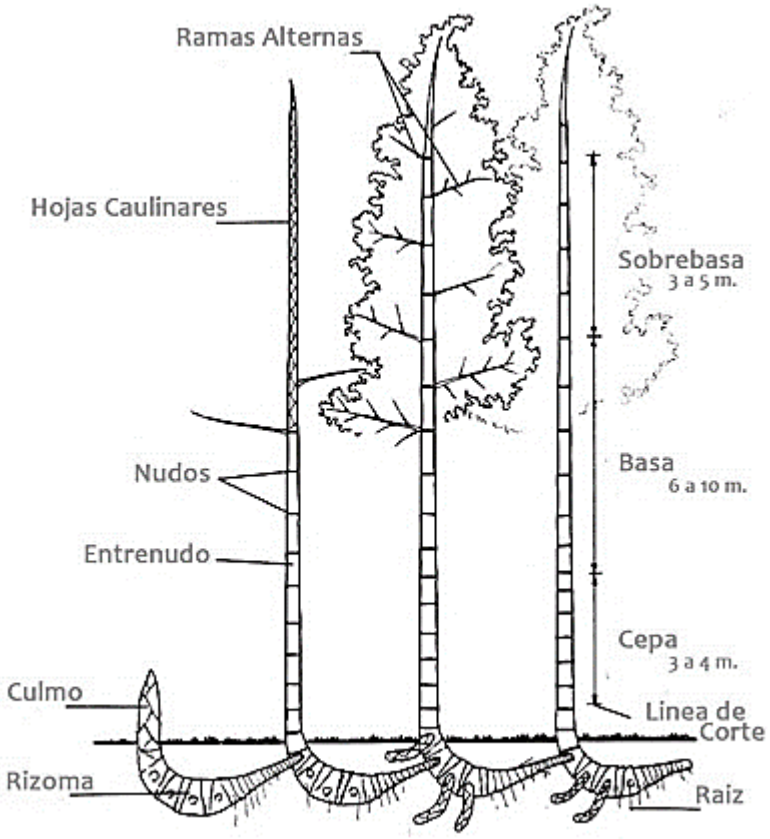


Figura 1 Conformación del culmo de la guadua. Fuente [17]

La morfología de las plantas de bambú consiste en ramas, vainas, culmos, flores, hojas, rizomas y raíces las cuales se describen brevemente a continuación [3].

EL CULMO: El culmo es la parte más notable y visible de la planta de bambú que se desarrolla a partir de brotes que emergen de las yemas. Aparece como un vástago cilíndrico alargado con uniones intermitentes conocidas como nodos. Generalmente, los culmos varían en dimensiones, color y, a veces, olor según la especie. El culmo tiene tres constituyentes principales, a saber: tallo, base del tallo y pecíolo del tallo [3]–[5]. Se caracteriza por tener forma cilíndrica y hueca con segmentos separados transversalmente por nudos. La distancia entre estos puede variar entre 10 y 40 cm de acuerdo con la variedad y posición en altura del culmo.

El diámetro y el espesor de la pared del culmo disminuyen con la altura; mientras la densidad, la concentración de fibras y la distancia entre nudos aumentan con ésta. Puede alcanzar alturas promedio de 18 a 20 m y tener diámetros entre 5 a 25 cm [18].

EL RIZOMA: El sistema de rizomas en un bambú está bien desarrollado y constituye la base estructural de la planta, es decir el sistema de soporte de la guadua [5]. Es subterráneo y muy ramificado. Los ejes individuales del sistema rizoma se denominan segmentos de rizoma. Cada rama o eje individual del sistema de rizomas se conoce como rizoma. El rizoma consta de dos partes, el cuello del rizoma y el rizoma propiamente dicho. El cuello del rizoma puede ser corto o a veces alargado. Básicamente, hay dos tipos de rizomas. Son determinados e indeterminados o simpo diales y monopodiales. El rizoma determinado se llama rizoma Paqui morfo, y el rizoma indeterminado se conoce como rizoma leptomorfo [4]

LAS RAMAS: El bambú tiene un sistema de ramificación más complicado que el de las gramíneas ordinarias. Debajo de cada vaina en el culmo principal hay un capullo, encerrado en una vaina plana propia, la vaina se apoya en el culmo mismo, y tiene dos bordes inflexos que abrazan la parte interior de los capullos. Cuando un culmo alcanza su altura máxima, los brotes laterales en los nodos comienzan a crecer y formar ramas. Los brotes de las ramas emergen en lados alternativos del culmo justo por encima de la cicatriz de la vaina en nodos sucesivos [4]. Las ramas salen de las yemas que se encuentran por encima de las líneas de los nudos cuando ha terminado el proceso del desarrollo del culmo. Las hojas caulinares que se forman en cada uno de los nudos que aparecen, protegen la parte aérea de los rizomas, el tallo y las yemas en su proceso de formación y se desprenden una vez ha concluido este proceso. Las hojas foliares tienen forma alargada y longitudes entre 15 y 20 cm y anchos entre 2 y 5 cm [18]

EL NODO: El nodo proporciona un lugar para que las ramas y las hojas crezcan, ayudando a los nodos a generar nutrientes. La longitud del segmento, definida como la distancia entre cada nodo, varía a lo largo de la altura del culmo [19]

La guadua antes de los 3 años es considerada joven con coloración verde brillante y una superficie libre de musgo, tiene alto contenido de humedad. Entre los 3 y 6 años posee su mayor resistencia y dureza siendo apta para la construcción; su tallo tiene una coloración verde oscura, líquenes y manchas de hongos. Se conoce la guadua de esta edad como madura o adulta. A partir de los 6 años en promedio, cuando la guadua está sobre madura o seca, el tallo toma un color amarillento y pierde resistencia [18].

3.2.1. Estructura interna del culmo

En la sección transversal de los culmos de bambúes, incluyendo la guadua, se pueden distinguir: la pared externa, la pared interna, los haces vasculares y el tejido parenquimático. Como se aprecia en la figura 2, la densidad de haces vasculares es mayor hacia la pared externa y disminuye hacia la pared interna [20]–[22]

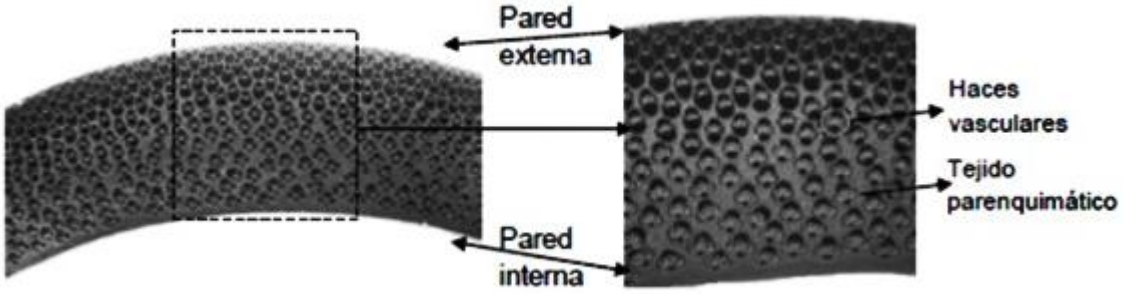


Figura 2 Corte transversal de la estructura interna del culmo de la guadua. Fuente [5]

En general, el culmo consiste en aproximadamente 50% de células parenquimatosas, 40% de fibras y 10% de haces vasculares (vasos, tubos de tamiz

con células compañeras). Una sección transversal en la figura 3, muestra los haces vasculares oscuros con sus aglomerados de fibra dentro del tejido del parénquima, que contribuyen en gran medida al carácter estructural del culmo. Todas las cañas de bambú exhiben un patrón similar en la distribución de sus células. El porcentaje de fibras disminuye de afuera hacia adentro, mientras que el parénquima aumenta [23]. La base del culmo contiene más parénquima, y la parte superior tiene muchos haces vasculares más pequeños con una alta porción de fibras, lo que proporciona una esbeltez superior [4]

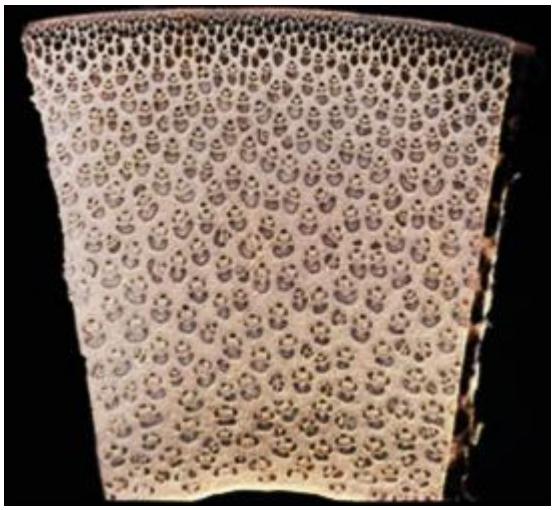


Figura 3 Corte transversal de un culmo de bambú, haces vasculares dentro del parénquima. Fuente [3]

3.3. USOS Y APLICACIONES DEL BAMBÚ GUADUA ANGUSTIFOLIA

Los seres humanos durante muchos siglos han aprovechado las aplicaciones multifacéticas del bambú, incluidas aquellas en los campos de la ingeniería y la estructura y con fines alimentarios y medicinales, principalmente en Asia y África. Sin embargo, las aplicaciones prácticas para el bambú en las áreas de materiales compuestos, textiles e ingeniería estructural han experimentado un enorme crecimiento e interés en la investigación durante la última década [3].

Las aplicaciones generales del bambú, en los últimos años, atraviesan los campos de la ingeniería, así como los campos que no son de ingeniería; observando algunos usos tradicionales y no tradicionales del bambú dentro de los que se destacan los revestimientos decorativos de paredes, instrumentos musicales, entrepisos, sillas mecedoras, chapas acanaladas para techo, utensilios de cocina, embaces para alimentos y bebidas, prendas de vestir, papel, marcos o estuches para aparatos electrónicos, puentes, andamios, barcos, casas, paredes, partes de aspas de autogeneradores, carrocerías de camiones, bicicletas, muebles y diseño de interiores, entre otros aspectos por mencionar [3], [4], [14], [17], [24], lo que demuestra que efectivamente es una planta multipropósito.

Durante muchos siglos, ha sido principalmente la industria de la construcción la que se ha beneficiado del uso del bambú. Sin embargo, en los últimos tiempos, la tendencia ha evolucionado a una en la que otros campos como la industria textil, pulpa y papel, médico, artes y diseño, aeroespacial y de alimentos y bebidas están investigando y utilizando todas las facetas de la planta de bambú. Su uso generalizado ha llevado a muchas oportunidades de investigación y proyectos que están estudiando críticamente todas las propiedades y extractivos útiles y aplicables a campos emergentes aún más recientes, como la nanotecnología.

Actualmente, se ha encontrado que todas las partes de la planta de bambú pueden ser aprovechadas y utilizadas. La importancia económica de esta planta para la mayoría de los países en desarrollo en África, Asia y América del Sur seguirá creciendo [3]. En Colombia, dentro de las aplicaciones de la guadua, el sector de la construcción es seguramente el más importante, el consumo de la guadua depende de la coyuntura del país y de la coyuntura del sector nacional de la construcción entre otros.

Como bien es sabido mediante las investigaciones realizadas, el Bambú Guadua angustifolia (BGA) es un material “inteligente” y apto para la construcción gracias a

su carácter compuesto y funcionalmente graduado [9], [10], su anatomía, su forma, su abundancia y su buen comportamiento estructural en construcciones existentes. Actualmente la norma de diseño y construcción sismo resistente de Colombia (AIS, 2010, título G) incluye las recomendaciones necesarias para construir estructuras con este material. Esta última actualización corresponde a la primera vez que dicho material hace parte de la normativa de construcción colombiana, con lo cual se reconoce su alto potencial como material de construcción.

Al respecto conviene decir que, la comunidad académica en Colombia, continua a explorando a profundidad el comportamiento mecánico de este material [25]. Las otras aplicaciones más comunes para la guadua son su procesamiento en el sector de artesanías y muebles, aquí el valor agregado es muy alto, pero la cantidad de la materia aplicada es marginal. Los artesanos representan el sector más dinámico y diverso de toda la cadena productiva de la guadua. El proceso productivo más importante y representativo asociado a la guadua, es la fabricación de laminados [15], el cual consiste en transformar la guadua rolliza en latas y tablillas para la elaboración de paneles y tableros. Motivo por el cual, estas empresas han desarrollado y adaptado algunas maquinarias y tecnología; sin embargo, estas no les han permitido resolver los problemas críticos de los procesos que representan elevados costos de producción [15].

3.4. ASPECTOS TEÓRICOS SOBRE LOS MATERIALES COMPUESTOS

Los materiales compuestos son creados por dos o más constituyentes unidos entre sí, donde la sinergia entre ellos produce un material superior [26]. Dicho de otra forma, un compuesto estructural es un sistema de material que consta de dos o más fases en una escala microscópica, cuyo rendimiento mecánico y propiedades están diseñados para ser superiores a las de los materiales constituyentes que actúan de forma independiente. Una de las fases es generalmente discontinua, más rígida y

más fuerte y se llama refuerzo, mientras que la fase menos rígida y más débil es continua y se llama matriz [27], la figura 4 ilustra dicha composición.

Las propiedades mecánicas de los materiales compuestos dependen de las propiedades de cada uno de sus constituyentes, la disposición de estos y la fracción de volumen del material que proporciona el refuerzo [13], [28], [29]. Todos los materiales compuestos no son homogéneos y, según las propiedades, pueden tener diferentes escalas de anisotropía [30]–[32]. Los materiales compuestos se pueden analizar a diferentes escalas. El análisis micromecánico comprende el estudio de cada uno de los constituyentes (fibras y matriz) del material por separado, en la mesoescala la cual es considera una escala intermedia en el análisis, se asume que el tamaño del elemento estudiado tiene varios ordenes en comparación con el diámetro de las fibras, motivo por el cual las propiedades se consideran como un promedio del material compuesto, considerándose este como homogéneo; la macromecánica considera el comportamiento de la lámina o laminado en su conjunto [33].

Las láminas son materiales con una disposición particular de constituyentes. Los laminados son varias láminas unidas entre sí, que pueden organizarse con diferentes orientaciones y conformarse por diferentes tipos de láminas. En el análisis macromecánico, se supone que el material es homogéneo [26].

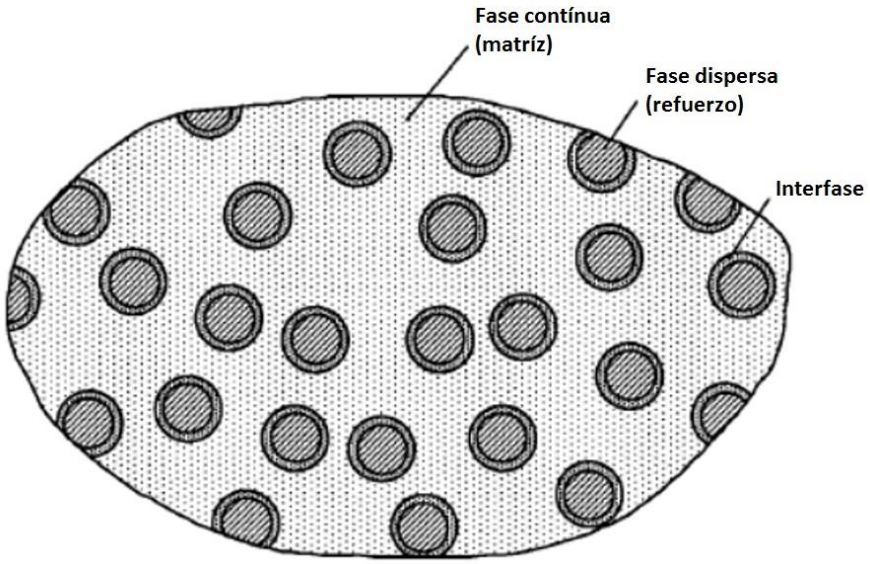


Figura 4 Fases de un material compuesto. Fuente [27]

Los materiales compuestos son frecuentemente no homogéneos (o heterogéneos los dos términos deben ser usados intercambiadamente) y no isotrópicos [27], [34] (ortotrópicos o más generalmente anisotrópicos).

En otras palabras: Un cuerpo no homogéneo, tiene propiedades no uniformes sobre el cuerpo; sin embargo, las propiedades son una función de la posición en dicho cuerpo [32], [35]. Un cuerpo ortotrópico, tiene propiedades que son diferentes en cada una de las tres direcciones cartesianas en un punto en el cuerpo y tiene tres planos mutuamente perpendiculares de simetría de material [36]. Así las propiedades son función de la orientación en un punto en el cuerpo; se considera un material transversalmente isotrópico, aquel material ortotrópico en el que el plano transversal a la dirección de las fibras se comporta como un material isotrópico[27].

En un cuerpo anisotrópico, el material tiene propiedades que son diferentes en todas las direcciones en un punto en el cuerpo [37]. No hay planos de propiedades de material simétricas. Por lo tanto, las propiedades son una función de la orientación en un punto en el cuerpo.

3.5. MODELADO DE MATERIALES COMPUESTOS

Las limitaciones de la mente humana son tales que no puede captar el comportamiento del complejo mundo que la rodea en una sola operación global [38]. Por ello, una forma natural de proceder de ingenieros, científicos e incluso economistas, consiste en separar los sistemas en sus componentes individuales, o “elementos”, cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad, y a continuación reconstruir el sistema original para estudiarlo a partir de dichos componentes.

Una forma conveniente es mediante el uso del método del elemento finito (FEA), el cuál en la actualidad es una herramienta poderosa en la solución numérica de un amplio rango de problemas de ingeniería. Las aplicaciones van desde el análisis por deformación y esfuerzo de automóviles, aeronaves, edificios, y estructuras de puentes hasta el análisis de los campos de flujo de calor, de fluidos, magnético, filtraciones y otros problemas de flujo. Con los avances de la tecnología y de las computadoras y de los sistemas CAD y CAM, pueden modelarse problemas más complejos con relativa facilidad. Mediante este método de análisis, una región compleja que define un continuo, se discretiza en formas geométricas simples llamadas elementos finitos.

Las propiedades del material y las relaciones gobernantes son consideradas sobre esos elementos y expresadas en términos de valores desconocidos en los bordes del elemento [39]. Un proceso de ensamble, cuando se consideran debidamente las cargas y restricciones, da lugar a un conjunto de ecuaciones. La solución de dichas ecuaciones proporciona el comportamiento aproximado del conjunto. A partir de lo anterior, es importante especificar que los procedimientos para la aplicación de este

método se desarrollan en tres fases principales para cualquier FEA, a saber, las fases de preprocesamiento, solución y posprocesamiento. El procesamiento previo implica la subdivisión del problema al discretizar la solución de dominio creada en formas de elementos finitos. Se crea una representación geométrica del comportamiento físico de los elementos y sirve como una solución elemental aproximada.

El desarrollo de las ecuaciones, la creación de la matriz de rigidez global, la entrada de propiedades del material y la aplicación de condiciones de contorno (carga, simetría, etc.) son los pasos finales en esta fase. En la fase de solución, se computa la evaluación de variables de ingeniería tales como tensiones, deformaciones, desplazamiento y sus grados de libertad asociados. La solución global se logra a través de la solución simultánea de varias ecuaciones lineales o no lineales en los nodos. La última etapa denominada procesamiento posterior implica la visualización de los resultados obtenidos de la simulación. Estos resultados pueden incluir tensiones, distribuciones de temperatura, deformaciones y configuraciones de fallas.

La mayoría del software FEA disponible comercialmente requiere algunas entradas críticas para hacer posible el análisis, a saber, geometría (construida a partir de nodos), elementos, propiedades, condiciones de contorno, carga y tipo de análisis (por ejemplo, análisis estático). Los principales inconvenientes asociados con FEA son el análisis del gran volumen de datos generados a partir de simulaciones y los errores resultantes del aumento de la cantidad de elementos [3].

Las propiedades de los materiales son los elementos principales que determinan las aplicaciones apropiadas de esos materiales. Estas propiedades también ayudan a los ingenieros de diseño, arquitectos, científicos de materiales y otros usuarios industriales de materiales a saber dónde aplicarlos [3].Cuando se modela un material vegetal, es importante conocer a nivel jerárquico, que parte del elemento

es importante y la que se quiere conocer, dada la compleja estructura que forman las células de fibras [21].

3.6. ANÁLISIS MACROMECÁNICO

La macromecánica es el estudio del comportamiento de los materiales compuestos, en donde el material es considerado como homogéneo y los efectos del material constituyente son sólo detectados como propiedades promedio evidentemente claras de los compuestos [37]. Estos análisis son muy utilizados para la caracterización de las propiedades mecánicas de los materiales, mediante ensayos experimentales, o mediante el análisis de láminas en el proceso de laminado. Los compuestos fibrosos laminados se fabrican uniendo dos o más láminas.

Estos materiales compuestos, a menudo denominados laminados, son diferentes de los laminados de lámina hechos mediante la unión de láminas planas de materiales. En un compuesto fibroso laminado, las láminas o capas unidireccionales individuales están orientadas de tal manera que el componente estructural resultante tiene las características mecánicas y / o físicas deseadas en diferentes direcciones. Por lo tanto, se explota la anisotropía inherente de los compuestos fibrosos para diseñar un material compuesto con propiedades apropiadas [34].

Teniendo en cuenta lo anterior, el proceso consiste en generar una transición en la que, a partir de las propiedades microscópicas del material, se determinan las constantes elásticas y de resistencia de una lámina, para luego generar un laminado y con tales propiedades analizar la respuesta estructural a diferentes tipos de cargas.

3.6.1. Relación esfuerzo deformación unitaria para materiales compuestos

Se consideran materiales compuestos aquellos que consisten en fibras continuas o discontinuas incrustadas en una matriz [40]. Tal compuesto es heterogéneo, y las propiedades varían de un punto a otro [13]. En una escala que es grande con respecto al diámetro de la fibra, las propiedades de la fibra y la matriz pueden promediarse, y el material puede tratarse como homogéneo. Este supuesto, comúnmente empleado en los análisis macro mecánicos de compuestos, se adopta aquí. Por lo tanto, el material se considera casi homogéneo, lo que implica que las propiedades se consideran iguales en cada punto. Estas propiedades no son las mismas que las de la fibra o la matriz, sino que son una combinación de las propiedades de los constituyentes [36].

Se presentan en esta sección las ecuaciones constitutivas para el cálculo de los desplazamientos, deformaciones y tensiones cuando el material sufre pequeñas deformaciones en el rango elástico; es decir, en aquella franja donde se cumple la ley de Hooke.

La ley generalizada de Hooke que relaciona las tensiones con las deformaciones se puede escribir en notación contractada como:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \qquad i,j = 1,\dots,6 \qquad (1)$$

donde σ_i son los componentes de tensión que se muestran en un cubo tridimensional en las coordenadas x, y y z en la Figura 5, C_{ij} es la matriz de rigidez y ε_j son los componentes de la deformación. La notación contractada para tensiones y deformaciones tridimensionales se define en comparación con la notación tensorial habitual en la Tabla 1 para situaciones en las que la tensión y las deformaciones son simétricas (el caso habitual cuando las fuerzas del cuerpo están

ausentes). Tenga en cuenta que, en virtud de la tabla 1, las deformaciones se definen como:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z};$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

Donde u, v, y w son desplazamientos en las direcciones x, y y z (o las direcciones 1, 2 y 3).

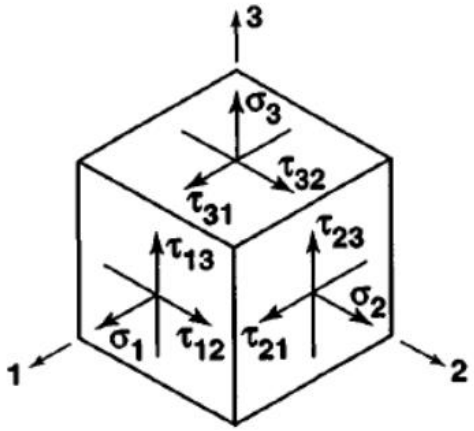


Figura 5 Tensiones en el elemento. Fuente [41]

Tabla 1 Notación tensorial vs notación contractada para los esfuerzos y las deformaciones. Fuente [41]

Tensiones		Deformaciones	
Notación tensorial	Notación contractada	Notación tensorial	Notación contractada
$\sigma_{11}(\sigma_1)$	σ_1	$\varepsilon_{11}(\varepsilon_1)$	ε_1
$\sigma_{22}(\sigma_2)$	σ_2	$\varepsilon_{22}(\varepsilon_2)$	ε_2
$\sigma_{33}(\sigma_3)$	σ_3	$\varepsilon_{33}(\varepsilon_3)$	ε_3
$\tau_{23} = \sigma_{32}$	σ_4	$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{32}$	ε_4
$\tau_{31} = \sigma_{31}$	σ_5	$\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$	ε_5
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	σ_6	$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$	ε_6

Note que γ_{ij} representa la deformación a cortante de ingeniería, mientras que ε_{ij} (i ≠j) representa la deformación del tensor de corte.

Es importante tener en cuenta que la deformación a cortante de ingeniería γ_{ij} en la Tabla 1, es el ángulo total de corte en un estado de cortante simple en la Figura 6. Además, el tensor de deformación a cortante ε_{ij} es la mitad del ángulo total de corte bajo estado a cortante puro en la Figura 6. La deformación por cizallamiento de ingeniería implica una rotación del elemento originalmente cuadrado, mientras que la deformación por cizallamiento tensorial no tiene una rotación acompañante. Estas distinciones tienen poca importancia para los cálculos de ingeniería habituales, pero tienen una importancia crucial en lo que sigue [41].

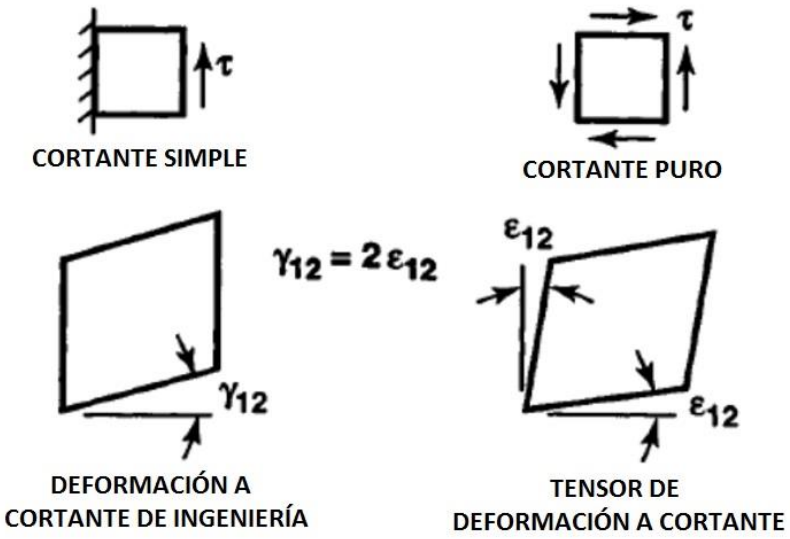


Figura 6 Deformación a cortante de ingeniería vs deformación a cortante en notación tensorial. Fuente [41]

La matriz de rigidez, C_{ij}, tiene 36 constantes en la ecuación 1. Sin embargo, se puede demostrar que menos de 36 de las constantes son realmente independientes para los materiales elásticos cuando se consideran características importantes de la energía de deformación [36], [41], [42]. Los materiales elásticos para los cuales existe un potencial elástico o una función de

densidad de energía de deformación tienen un trabajo incremental por unidad de volumen que viene expresado como:

$$dW = \sigma_i d\varepsilon_i \qquad (3)$$

Cuando las tensiones σ_i actúan a través de las deformaciones $d\varepsilon_i$. Sin embargo, debido a las relaciones de tensión-deformación, la Ecuación 1, y la ecuación 2 del trabajo incremental se convierte en

$$dW = C_{ij}\varepsilon_j d\varepsilon_j \qquad (4)$$

Tras la integración de las deformaciones en la ecuación anterior, el trabajo por unidad de volumen es

$$W = \frac{1}{2} C_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j \qquad (5)$$

Sin embargo, la ley de Hooke, ecuación 1, puede derivarse de la Ecuación 5:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij}\varepsilon_j \qquad (6)$$

Después de lo cual

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij} \qquad (7)$$

De forma similar

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji} \qquad (8)$$

Teniendo en cuenta que el orden de diferenciación de W es independiente del material, así que

$$C_{ij} = C_{ji} \qquad (9)$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez es simétrica, por lo que solo 21 de las constantes son independientes [42], [43]. De manera similar, se puede demostrar que

$$W = \frac{1}{2} S_{ij} \sigma_i \sigma_j \qquad (10)$$

Donde S_{ij} es la matriz de flexibilidad definida por la inversa de las relaciones tensión-deformación, las cuales vienen relacionadas por:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad i, j = 1, \dots, 6 \qquad (11)$$

Un razonamiento similar al del párrafo anterior lleva a

$$S_{ij} = S_{ji} \qquad (12)$$

Es decir, que la matriz de flexibilidad es simétrica y, por lo tanto, tiene solo 21 constantes independientes. En este punto, se debe tener en cuenta que las rigideces y flexibilidades no se describen con notación mnemotécnica, pero desafortunadamente se invierten en el uso común. Los componentes de rigidez y flexibilidad se denominarán constantes elásticas (aunque podrían ser funciones de temperatura o contenido de humedad).

Con la reducción anterior de 36 a 21 constantes independientes, las relaciones de tensión-deformación son...

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16}\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36}\\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46}\\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56}\\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} \qquad (13)$$

La ecuación anterior, representa la expresión más general en el marco de la elasticidad lineal [41]. En realidad, las relaciones en la ecuación 13 son las expresiones representativas y características para materiales anisotrópicos (medios anisotrópicos sin isotropía) porque no hay planos de simetría para las propiedades del material [36]. Un nombre alternativo para dicho material anisotrópico es un material triclínico (tres ejes del material son todos oblicuos entre sí).

Si las propiedades el material, poseen un plano de simetría, entonces las relaciones de tensión - deformación se reducen a

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16}\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36}\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0\\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} \qquad (14)$$

Donde el plano de simetría es z = 0 (o el plano 1-2). Dicho material se denomina monoclínico y tiene 13 constantes elásticas independientes [44].

Si hay dos planos ortogonales de simetría, con respecto a las propiedades del material se puede afirmar que, la simetría existirá en relación con un tercer plano ortogonal mutuo. Por tanto, las relaciones de tensión - deformación en coordenadas alineadas con las direcciones principales del material vienen siendo.

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} \qquad (15)$$

Y se dice que definen un material ortotrópico [45]. Se debe tener en cuenta que no hay interacción entre las tensiones normales σ_1, σ_2 y σ_3 y las deformaciones por cizallamiento γ_{23}, γ_{31} y γ_{12}, como ocurre en los materiales anisotrópicos (en virtud de la presencia de, por ejemplo, C_{14}). De manera similar, no hay interacción entre las tensiones de cizallamiento y las deformaciones normales, así como ninguna entre los esfuerzos de cizallamiento y las deformaciones de cizallamiento en diferentes planos. Por todo lo anterior, se ha de tener en cuenta que ahora solo hay nueve constantes independientes en la matriz de rigidez.

Si en cada punto de un material hay un plano en el que las propiedades mecánicas son iguales en todas las direcciones, entonces el material se llama transversalmente isotrópico [36], [41], [42], [46]. Si, por ejemplo, el plano 1-2 es el plano de isotropía, entonces los subíndices 1 y 2 en las rigideces son intercambiables. El material denominado transversalmente isotrópico, es un caso particular de la ortotropía en el que uno de los planos principales de simetría es considerado como isótropo [34], [47]; dicha suposición es generalmente aplicada para el tratamiento de un compuesto reforzado unidireccionalmente, siendo el plano perpendicular a las fibras el plano de isotropía [47]. Las relaciones tensión-deformación tienen solo cinco constantes independientes, entonces la matriz aumentada toma la forma:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} \qquad (16)$$

Por otro lado, si hay un número infinito de planos de simetría con respecto a las propiedades del material, entonces las relaciones anteriores simplifican a tal punto que toman la forma de las relaciones para materiales isotrópicos con solo dos constantes independientes en la matriz de rigidez, reescribiéndose como:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{11}-C_{12})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{11}-C_{12})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{11}-C_{12})}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}$$

(17)

Las relaciones de tensión - deformación para los cinco casos de simetría de propiedades materiales más comunes se muestran en las Ecuaciones 18 a 22:
Material Anisotrópico (21 constantes independientes):

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix} \qquad (18)$$

Material ortotrópico (9 constantes independientes):

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0\\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix} \qquad (20)$$

Material transversamente isotrópico (5 constantes independientes):

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix} \qquad (21)$$

Donde el plano 1-2 es un plano de simetría en el que los subíndices de la matriz de flexibilidad son intercambiables y en la dirección 3 (transversal al plano de simetría), los subíndices de la matriz de flexibilidad son diferentes.

Material isotrópico (2 constantes independientes):

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix} 22$$

Uno de los objetivos principales en el estudio de las relaciones de tensión – deformación, es poder concluir qué respuesta de deformación se produce debido a una tensión específicamente aplicada. Las relaciones tensión - deformación se pueden escribir como

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{13}\sigma_3 + S_{14}\tau_{23} + S_{15}\tau_{31} + S_{16}\tau_{12}$$

.

. (23)

.

$$\gamma_{12} = S_{16}\sigma_1 + S_{26}\sigma_2 + S_{36}\sigma_3 + S_{46}\tau_{23} + S_{56}\tau_{31} + S_{66}\tau_{12}$$

Por consiguiente, para una tensión uniaxial aplicada $\sigma_1 = \sigma$ (todas las demás tensiones son cero):

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma \quad \varepsilon_2 = S_{12}\sigma \quad \varepsilon_3 = S_{13}\sigma \quad \gamma_{23} = S_{14}\sigma \quad \gamma_{31} = S_{15}\sigma \quad \gamma_{16} = S_{16}\sigma \quad (24)$$

La interpretación física de estas deformaciones es que un cubo originalmente del mismo lado tiene muchas deformaciones. Específicamente, cada lado se deforma en longitud de manera diferente a cualquier otro lado (porque $S_{11} \neq S_{12} \neq S_{13}$), y cada lado del cubo sufre una deformación de cizallamiento diferente (porque $S_{14} \neq S_{15} \neq S_{16}$), como se muestra imperfectamente en la Figura 7, donde las líneas discontinuas representan el cubo sin deformar y las líneas continuas representan el cubo deformado.

En contraste, un material isotrópico tendría el mismo cambio en la longitud del lado en las direcciones 2 y 3 (porque $S_{12} = S_{13}$) y ninguna deformación por cizallamiento de ningún lado (porque $S_{14} = S_{15} = S_{16} = 0$). Por lo tanto, para un material anisotrópico, se produce un acoplamiento significativo entre la tensión aplicada y las diversas respuestas de deformación [42], [48].

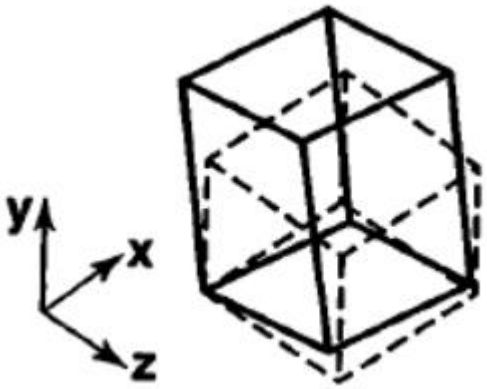


Figura 7 Deformación de un cubo anisotrópico bajo σ_y. Fuente [41]

En la figura 8 se puede notar los diversos acoplamientos para un cuerpo sometido a esfuerzos arbitrarios, donde se etiqueta el significado físico de cada acoplamiento [44]. Allí, los términos S_{11}, S_{22} y S_{33} representan cada uno la respuesta ampliada a una tensión individual aplicada, σ_1, σ_2 o σ_3, respectivamente, en la misma dirección. Los términos S_{44}, S_{55} y S_{66} representan la respuesta de la deformación de corte a una tensión de corte aplicada en el mismo plano. Los términos S_{12}, S_{13} y S_{23} representan el acoplamiento entre esfuerzos normales diferentes y las deformaciones normales (el acoplamiento de elongación más conocido comúnmente como el efecto de Poisson) [41].

Los términos S_{14}, S_{15}, S_{16}, S_{24}, S_{25}, S_{26}, S_{34}, S_{35} y S_{36} representan la respuesta de deformación normal, a la tensión de corte aplicado de una manera más compleja que para los acoplamientos anteriores [49] (acoplamiento de elongación - cortante). Finalmente, los términos S_{45}, S_{46} y S_{56} representan la respuesta de deformación de corte, al esfuerzo de corte aplicado en otro plano (acoplamiento entre cortantes).

En contraste, el único acoplamiento que existe para un material isotrópico es el acoplamiento de elongación. Por tanto, la respuesta de deformación de un material anisotrópico incluso a estados de tensión simples puede ser literalmente en todas las direcciones y en todos los planos. De lo anterior, es posible afirmar que los materiales ortotrópicos pueden mostrar una anisotropía aparente cuando se

someten a tensiones en planos diferentes a los planos principales del material [41]. Además, en estos materiales S_{11}, S_{22} y S_{33} están relacionados con los módulos de Young en las direcciones 1, 2 y 3, respectivamente. Así mismo, S_{12}, S_{13} y S_{14} estarán relacionados con las proporciones de Poisson y los módulos de Young. Finalmente, S_{44}, S_{55} y S_{66} estarán relacionados con módulos de corte en los planos 2-3, 3-1 y 1-2, respectivamente.

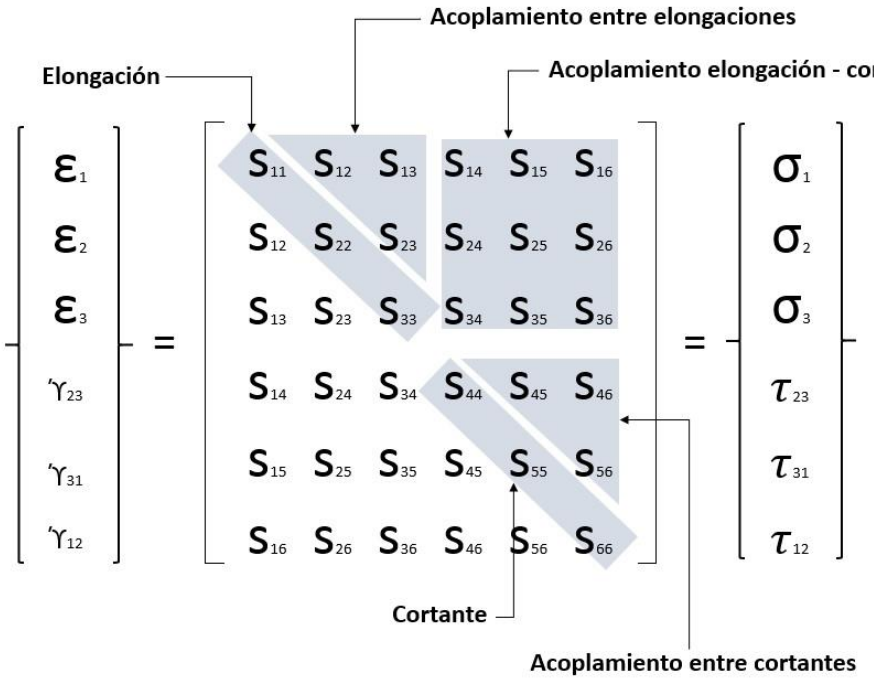


Figura 8 Significado físico de las relaciones tensión – deformación anisotrópica. Fuente [41]

3.6.2. Esfuerzos y constantes de ingeniería para materiales ortotrópicos

Las constantes de ingeniería (a veces conocidas como constantes técnicas) son los módulos de Young generalizados, las relaciones de Poisson y los módulos de corte [50]. Estas constantes se miden en pruebas simples, como la tensión uniaxial o las pruebas de cizallamiento puro [51]. Así, estas constantes con su obvia interpretación

física tienen un significado más directo que los componentes de las matrices de rigidez y flexibilidad relativamente abstractas utilizadas en la Sección anterior.

Las pruebas de caracterización de materiales más simples se realizan con una carga o tensión conocida [52]. Luego, se mide el desplazamiento o la tensión resultante. Las constantes de ingeniería son generalmente la pendiente de una curva de tensión-deformación (por ejemplo, E = σ/ε) o la pendiente de una curva de deformación-deformación [50] (por ejemplo, $v = -\varepsilon_y / \varepsilon_x$ para $\sigma_x = \sigma$ y todas las demás tensiones son cero). Por lo tanto, los componentes de la matriz de flexibilidad (S_{ij}) se determinan más directamente que los de la matriz de rigidez (C_{ij}). Para un material ortotrópico, los componentes de la matriz de flexibilidad en términos de las constantes de ingeniería son

$$[S_{ij}]=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{v_{21}}{E_2} & -\frac{v_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{v_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{13}}{E_1} & -\frac{v_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Donde $E_1, E_2, E_3 =$ Módulos de Youngs (elongación) en las direcciones 1, 2 y 3; $v_{ij} =$ es la relación de Poisson (Coeficiente de acoplamiento de elongación); es decir, el negativo de la deformación transversal en la dirección j sobre la deformación en la dirección i cuando se aplica tensión en la dirección i, es decir:

$$v_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (26)$$

Para $\sigma_i = \sigma$ y todas las demás tensiones son cero.

$G_1, G_2, G_3 =$ representan los módulos a cortante en los planos 2-3, 3-1 y 1-2.

Se debe tener en cuenta que un material ortotrópico que está sometido a esfuerzo de tensión en las coordenadas principales del material (las coordenadas 1, 2 y 3) no presenta una extensión de corte o un acoplamiento a cortante. Recordemos que un material ortotrópico tiene nueve constantes independientes porque:

$$S_{ij} = S_{ji} \qquad (27)$$

y la matriz de flexibilidad es la inversa de la matriz de rigidez (C_{ij}) que se mostró simétrica en la ecuación 9. Cuando las constantes de ingeniería se sustituyen en la ecuación 27, se obtiene:

$$\frac{v_{ij}}{E_i} = \frac{v_{ji}}{E_j} \quad i, j = 1,2,3 \qquad i \neq j \qquad (28)$$

Por tanto, se deben satisfacer tres relaciones recíprocas para un material ortotrópico. Además, solo $v_{12}, v_{13}\ y\ v_{23}$ deben considerarse más a fondo porque $v_{21}, v_{31}\ y\ v_{32}$ pueden expresarse en términos del primer grupo mencionado de las relaciones de Poisson y los módulos de Young. El último grupo de relaciones de Poisson no debe olvidarse; sin embargo, para algunas pruebas son lo que realmente se mide.

La diferencia entre $v_{12}\ y\ v_{21}$ para un material ortotrópico se enfatiza con la ayuda de la figura 9, donde se muestran dos casos de esfuerzo uniaxial para un elemento cuadrado. Primero, el esfuerzo se aplica en la dirección 1 en la figura 9. Luego, a partir de las Ecuaciones 20 y 25, las deformaciones son:

$$^{1}\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_1} \qquad ^{1}\varepsilon_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma \quad (29)$$

Donde la dirección de carga se denota con el pre-superíndice, las direcciones de tensión y deformación se denotan con subíndices, y los desplazamientos son:

$$^{1}\Delta_1 = \frac{\sigma L}{E_1} \qquad ^{1}\Delta_2 = \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma L \quad (30)$$

En segundo lugar, el mismo valor de tensión se aplica en la dirección 2 en la figura 9. Las deformaciones son:

$$^{2}\varepsilon_1 = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma \qquad ^{2}\varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E_2} \quad (31)$$

Y los desplazamientos son:

$$^{2}\Delta_1 = \frac{\nu_{21}}{E_2} \qquad ^{2}\Delta_2 = \frac{\sigma L}{E_2} \quad (32)$$

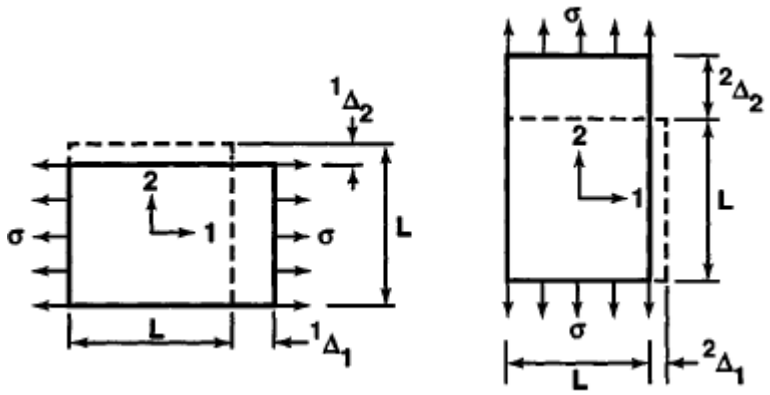


Figura 9 Representación de la deformación de una lámina sometida a una carga en las direcciones 1 y 2. Fuente [41]

Por razones obvias, si $E_1 > E_2$ es el caso de una lámina reforzada con fibras en la dirección 1, entonces $A_1 < A_2$, como cabría esperar, porque la lámina es más rígida en la dirección 1 que en la dirección 2. Sin embargo, debido a las relaciones recíprocas, independientemente de los valores de E_1 y E_2

$$^{1}\square_{2} = {}^{2}\square_{1} \quad (33)$$

Que es una generalización de la ley de Betti para el tratamiento de los cuerpos ortotrópicos [41]. Es decir, "*el desplazamiento transversal (y la deformación transversal) es el mismo cuando la tensión se aplica en la dirección 2 y cuando se aplica en la dirección 1"* [53]. Claramente, v_{12} no es en absolutamente igual a v_{21}, debido a que las matrices de rigidez y flexibilidad son mutuamente inversas, se sigue por álgebra matricial que sus componentes están relacionados de la siguiente manera para los materiales ortotrópicos:

$$C_{11} = \frac{S_{22}S_{11} - S_{23}^2}{S} \quad C_{12} = \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S} \quad C_{13} = \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S}$$
$$C_{22} = \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S} \quad C_{23} = \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S} \quad C_{33} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S}$$
$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}} \quad C_{55} = \frac{1}{S_{55}} \quad C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \quad (34)$$

Donde:

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13} \quad (35)$$

En la ecuación 34, los símbolos C y S pueden intercambiarse en todas partes para proporcionar la relación inversa. La matriz de rigidez, C_{ij} para un material ortotrópico en términos de las constantes de ingeniería se obtiene por inversión de la matriz de flexibilidad, S_{ij} en la ecuación 25 o por sustitución en las ecuaciones 34 y 35. Las rigideces distintas de cero en la ecuación 15 son:

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \qquad C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \quad C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \quad C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \qquad (36)$$

$$C_{44} = G_{23} \qquad C_{55} = G_{31} \qquad C_{66} = G_{12}$$

Donde

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \qquad (37)$$

en la que Δ es idéntica a S en la ecuación 35.

Se debe tener en cuenta especialmente que, si se sospecha que un material es ortotrópico, las pruebas mecánicas en varios ángulos revelarán si existen coordenadas para las cuales no existe un acoplamiento de extensión de corte[37]. Por lo tanto, la ortotropía, la isotropía o la falta de ella pueden determinarse, aunque a un costo a veces significativo. La forma más fácil de determinar las direcciones principales del material es la observación. Sin embargo, para que la observación funcione, las características del material deben verse fácilmente.

3.6.3. Restricciones a las constantes de ingeniería para materiales ortotrópicos

Las relaciones entre las constantes de ingeniería son más complejas para los materiales ortotrópicos [37], [41]. Se debe aplicar una investigación rigurosa para establecer de modo adecuado estas relaciones, evitándose así, los inconvenientes causados por la intuición en el trabajo con materiales isotrópicos. Como primera medida, se debe saber que, el producto de una tensión y la respectiva deformación representa el trabajo realizado por la tensión. Teniendo en cuenta lo anterior, la

suma del trabajo realizado por todas las tensiones debe ser positiva para evitar la creación de energía [54].

Esta última condición proporciona una restricción termodinámica sobre los valores de las constantes de ingeniería. La restricción fue generalizada para materiales ortotrópicos por Lempriere [55]. Formalmente, demostró que las matrices que relacionan el esfuerzo con la deformación deben ser definidas positivas, es decir, tener valores principales o invariantes positivos. Así entonces, tanto la matriz de rigidez como la matriz de flexibilidad, deben ser definidas positivas [44].

Teniendo en cuenta lo anterior, dicha condición matemática puede ser reemplazada por el siguiente argumento físico. Si solo se aplica una tensión normal a la vez, la deformación correspondiente está determinada por los elementos diagonales de la matriz de flexibilidad.

Por lo tanto, esos elementos deben ser positivos, es decir:

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66} > 0 \qquad (38)$$

En términos de las constantes de ingeniería toma la forma

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{31}, G_{12} > 0 \qquad (39)$$

De forma análoga, bajo restricciones adecuadas, es posible que el desplazamiento solo surja o se aplique una deformación extensional. Una vez más, el trabajo es producido solamente por el esfuerzo correspondiente. Por lo tanto, dado que el trabajo realizado está determinado por los elementos diagonales de la matriz de rigidez, esos elementos deben ser positivos, es decir,

$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66} > 0 \qquad (40)$$

Con lo cual de la ecuación 34 se deducen

$$(1-\nu_{23}\nu_{32})>0 \qquad (1-\nu_{13}\nu_{31})>0 \qquad (1-\nu_{12}\nu_{21})>0 \qquad (41)$$

$$\overline{\Delta}=1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}>0 \qquad (42)$$

Lo anterior obedece al hecho de que el determinante de una matriz debe ser positivo para que la matriz sea definida positiva [56], [57]. Por otro lado, de la ecuación 34 y de la naturaleza positiva de las rigideces, se conduce a la siguiente expresión:

$$|S_{23}|<\sqrt{S_{22}S_{33}} \qquad |S_{13}|<\sqrt{S_{11}S_{33}} \qquad |S_{12}|<\sqrt{S_{11}S_{22}} \qquad (43)$$

Usando la condición de simetría de cumplimiento, la ecuación 12 toma la forma:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i}=\frac{\nu_{ji}}{E_j} \qquad i,\ j=1,2,3 \qquad (44)$$

Las condiciones de la ecuación 41 se pueden reescribir de la forma:

$$|\nu_{21}|<\sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \qquad |\nu_{32}|<\sqrt{\frac{E_3}{E_2}} \qquad |\nu_{13}|<\sqrt{\frac{E_1}{E_3}}$$

$$|\nu_{12}|<\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \qquad |\nu_{23}|<\sqrt{\frac{E_2}{E_3}} \qquad |\nu_{31}|<\sqrt{\frac{E_3}{E_1}} \qquad (45)$$

Las ecuaciones 45 también se pueden obtener de las ecuaciones 43 si se sustituyen las definiciones de S_y en términos de las constantes de ingeniería. Del mismo modo, la ecuación 42 se puede expresar como:

$$\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}<\frac{1-\nu_{21}^2\frac{E_1}{E_2}-\nu_{32}^2\frac{E_2}{E_3}-\nu_{13}^2\frac{E_3}{E_1}}{2}<\frac{1}{2} \qquad (46)$$

Reagrupando términos

$$\left[1-v_{32}^2\frac{E_2}{E_3}\right]\left[1-v_{13}^2\frac{E_3}{E_1}\right]-\left[v_{21}\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}+v_{32}v_{13}\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right]^2>0 \qquad (47)$$

Si se desea obtener una restricción en la relación de Poisson, v_{21}en términos de otras dos, v_{32} y v_{13}, la Ecuación 47 se puede reorganizar aún más como:

$$-\left[v_{32}v_{13}\frac{E_2}{E_1}+\sqrt{1-v_{32}^2\frac{E_2}{E_3}}\sqrt{1-v_{13}^2\frac{E_3}{E_1}}\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right]<v_{21}<-\left[v_{32}v_{13}\frac{E_2}{E_1}-\sqrt{1-v_{32}^2\frac{E_2}{E_3}}\sqrt{1-v_{13}^2\frac{E_3}{E_1}}\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right] \qquad (48)$$

Las restricciones anteriores en las constantes de ingeniería para materiales ortotrópicos se utilizan para examinar datos experimentales, con el propósito de ver si son físicamente consistentes dentro del marco del modelo de elasticidad matemático; cumpliendo entre otras

$$|v_{12}|<\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \qquad (49)$$

Si las propiedades del material medidas satisfacen las restricciones descritas, entonces se puede proceder con confianza para diseñar estructuras con el material. De lo contrario, hay motivos para dudar del modelo de material, los datos experimentales o ambos [41].

3.6.4. Relación tensión - deformación para estado de esfuerzo plano en materiales ortotrópicos

Las estructuras construidas mediante materiales compuestos, en su mayoría están diseñadas para aplicaciones que obedecen a un estado de tensión plana [58]; siendo este, el modo de tensión real al cual son sometidos los elementos de estos materiales. En este orden de ideas, si el material se encuentra sometido a tensiones en la dirección de las fibras, como la lámina de la figura 10, se tiene que:

$$\sigma_3 = 0 \qquad \tau_{23} = 0 \qquad \tau_{31} = 0 \qquad (50)$$

$$\sigma_1 \neq 0 \qquad \sigma_2 \neq 0 \qquad \tau_{12} \neq 0 \qquad (51)$$

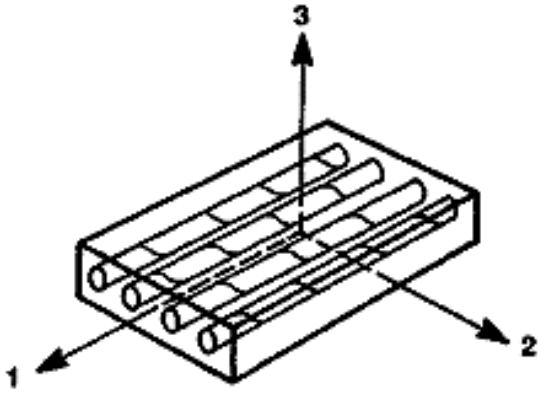


Figura 10 Lamina reforzada unidireccionalmente. Fuente [41]

Para los materiales ortotrópicos, la imposición de un estado de tensión plana implica que las deformaciones implícitas fuera de plano sean:

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \qquad \gamma_{23} = 0 \qquad \gamma_{31} = 0 \qquad (52)$$

Donde

$$S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \qquad S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \qquad (53)$$

Por tanto, la ecuación 20 se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (54)$$

Complementando la ecuación 52 se tiene que:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \qquad S_{12} = -\frac{v_{12}}{E_1} = -\frac{v_{21}}{E_2} \qquad S_{22} = \frac{1}{E_2} \qquad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \qquad (55)$$

Es importante resaltar que para determinar ε_3 en la ecuación 52, v_{13} y v_{23}, se deben conocer, además de las constantes de ingeniería en la ecuación 55 [40]. En otras palabras v_{13} y v_{23} surgen de S_{13} y S_{23} en la ecuación 52. Entonces, las relaciones tensión-deformación en la ecuación 54 se pueden invertir para obtener las relaciones tensión - deformación en la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (56)$$

Donde los Q_{ij} son las rigideces reducidas para un esfuerzo de estado plano en el plano 1-2 que se determinan bien sea como los componentes de la matriz de flexibilidad invertida en la ecuación 54 o del C_{ij} directamente [44], aplicando la condición $\sigma_3 = 0$ a las relaciones de tensión - deformación para obtener una expresión para ε_3 y simplificando los resultados se obtiene.

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \qquad i, j = 1, 2, 6 \qquad (57)$$

El término C_{63} es cero porque no existe un acoplamiento de extensión de corte para una lámina ortotrópica en las coordenadas principales del material [41], [59]. Para la lámina ortotrópica, los Q_{ij} son:

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \qquad Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \qquad Q_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \qquad Q_{66} = \frac{1}{S_{66}} \qquad (58)$$

Si se expresan en términos de las constantes de ingeniería se obtiene:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}} \qquad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{12}v_{21}} \qquad Q_{12} = \frac{v_{12}E_2}{1 - v_{12}v_{21}} = \frac{v_{21}E_1}{1 - v_{12}v_{21}} \qquad Q_{66} = G_{12} \qquad (59)$$

Note que, en las ecuaciones 54 y 56, hay cuatro propiedades de los materiales independientes E_1, E_1, v_{12} y G_{12}; cuando se consideran las ecuaciones 55 y 59, además de la relación recíproca:

$$\frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2} \qquad (60)$$

Las relaciones anteriores de tensión y deformación son la base para el análisis de rigidez y deformación de una lámina individual sometida a fuerzas en su propio plano [41]. Así, las relaciones son indispensables en el análisis laminado.

3.6.5. Relación esfuerzo deformación para una lámina con orientación arbitraria de sus ejes principales

En la sección anterior, los esfuerzos y las deformaciones fueron definidos en función de las coordenadas principales del material, siendo este considerado ortotrópico. Sin embargo, por lo general las direcciones principales de la ortotropía no coinciden con las direcciones de coordenadas que son geométricamente naturales para la solución del problema [37], [41], [47]. Por consiguiente, se necesita una relación entre las tensiones y deformaciones en coordenadas principales del material y aquellas coordenadas del cuerpo que se analiza.

Teniendo en cuenta los motivos descritos anteriormente, es necesario un método para transformar las relaciones de tensión - deformación de un sistema a otro [41]. Para tal efecto, considere la cubierta cilíndrica circular, reforzada con fibra enrollada helicoidalmente, de la figura 11. Allí las coordenadas naturales del problema son x,

y, y z, mientras que las coordenadas principales del material son x´, y´, z´. El ángulo de arrollamiento del filamento se define como cos(y´y) = $cos\alpha$, también se sabe que z´= z. Las placas laminadas en diferentes orientaciones representan aplicaciones adicionales a la situación planteada.

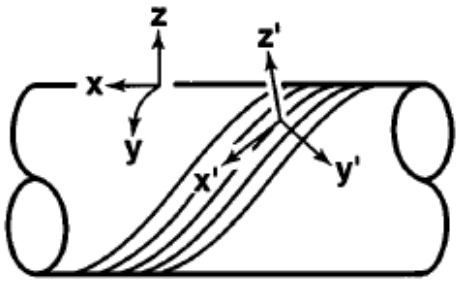


Figura 11 Fibra enrollada helicoidalmente – Armadura cilíndrica circular reforzada. Fuente [37], [41]

De la mecánica de los materiales, se sabe que las ecuaciones de transformación que expresan las tensiones en un sistema de coordenadas x-y en términos de tensiones en un sistema de coordenadas 1-2 [50], son de la forma.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & s\text{in}^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ s\text{in}^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - s\text{in}^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (61)$$

Donde θ es el ángulo desde el eje x al eje 1, como se observa en la Figura 12. Se debe tener en cuenta especialmente que la transformación es independiente de las propiedades del material [50], [51], es simplemente una rotación de las direcciones de tensión. Además, la dirección de rotación es crucial.

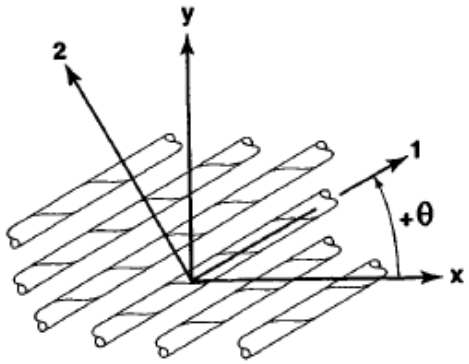


Figura 12 Rotación positiva de los ejes del material principal a partir de los ejes x-y. Fuente [37], [41]

Del mismo modo, las ecuaciones de transformación de deformación unitaria son

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & s\text{in}^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ s\text{in}^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - s\text{in}^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dfrac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix} \qquad (62)$$

Es importante resaltar que, de la misma forma en que se transforman las tensiones, lo hacen las deformaciones unitarias, si se utiliza la definición tensorial de deformación por cizallamiento (lo que equivale a dividir la deformación por cizallamiento de ingeniería por dos).

Las transformaciones se escriben comúnmente como

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (63)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix} \qquad (64)$$

Donde el superíndice -1 denota la matriz inversa de T, la cual se expresa como:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & s\text{in}^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ s\text{in}^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - s\text{in}^2\theta \end{bmatrix} \qquad (65)$$

Sin embargo, si la matriz simple

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (66)$$

Para lo cual se incorporan los vectores de deformación de ingeniería, teniendo en cuenta la transformación de Reuter [60]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix} \qquad (67)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} \qquad (68)$$

En lugar de los tensores de deformación, se puede utilizar las transformaciones de deformación de Reuter [60], así como en las transformaciones de tensión – deformación. Lo interesante de la transformación de Reuter es que se puede utilizar una notación matricial concisa. Una consecuencia inmediata es que se evitan las expresiones ordinarias para matrices de rigidez y flexibilidad con factores incómodos de ½ y 2 en varias filas y columnas.

Se puede inferir que una lámina llamada especialmente ortotrópica, es aquella en cuyos ejes principales del material están alineados con los ejes naturales del cuerpo [37], [41] :

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} \qquad (69)$$

Para obtener las relaciones de transformación de esfuerzo deformación en el sistema referencial x-y, se utilizan las ecuaciones 63 y 64, junto con la matriz representada en la ecuación 66, para luego abreviar la ecuación 69 y obtener:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=[Q]\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} \qquad (70)$$

Organizando:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=[T]^{-1}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=[T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \qquad (71)$$

Sin embargo, $[R]\,[T]\,[R]^{-1}$ puede mostrarse como T^{-T} donde el superíndice T denota la transposición de la matriz. Entonces, si usamos la abreviatura:

$$\left[\overline{Q}\right]=[T]^{-1}[Q][T]^{-T} \qquad (72)$$

Por tanto, las relaciones tensión – deformación en el sistema de coordenadas x-y son:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\left[\overline{Q}\right]\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16}\\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26}\\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \qquad (73)$$

Para lo cual:

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta\\
\overline{Q}_{12} &= (Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\\
\overline{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta
\end{aligned} \qquad (74)$$

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_{16} &= (Q_{11}-Q_{22}-2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta\\
\overline{Q}_{26} &= (Q_{11}-Q_{22}-2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta\\
\overline{Q}_{66} &= (Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)
\end{aligned}$$

En la anterior ecuación, la barra sobre la matriz $\overline{Q_{ij}}$ denota que se está tratando con las rigideces reducidas transformadas[44], en lugar de las rigideces reducidas, Q_{ij} Es importante destacar que la matriz $\overline{Q_{ij}}$ de rigidez reducida transformada, tiene términos en las nueve posiciones, en contraste con la presencia de ceros en la matriz Q_{ij} de rigidez reducida. Sin embargo, todavía hay solo cuatro constantes materiales independientes porque la lámina es ortotrópica. En el caso general con las coordenadas locales x e y, existe un acoplamiento entre la deformación de corte y las tensiones normales y entre las tensiones de corte y las deformaciones normales; es decir, existe un acoplamiento de elongación de corte [37], [41].

Por lo tanto, en las coordenadas locales, incluso una lámina ortotrópica parece ser anisotrópica [33]. Sin embargo, debido a que una lámina de este tipo tiene

características ortotrópicas en las coordenadas principales del material, se denomina lámina generalmente ortotrópica porque puede representarse por las relaciones de tensión-deformación en la Ecuación 73. Es decir, una lámina generalmente ortotrópica es una lámina ortotrópica cuyos ejes principales del material no están alineados con los ejes locales [41].

Una alternativa opcional al procedimiento anterior, es expresar las deformaciones en términos de las tensiones en las coordenadas locales mediante la inversión de las relaciones tensión-deformación en la ecuación 73 o por medio de la transformación de las relaciones tensión-deformación en coordenadas principales del material, en la ecuación 54

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (75)$$

Eligiendo el segundo enfoque y aplicando las transformaciones de las ecuaciones 63 y 63 junto con la matriz de ecuación 66, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [T]^T [S][T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S}_{11} & S_{12} & \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{12} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \overline{S}_{16} & \overline{S}_{26} & \overline{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \qquad (76)$$

$[R]\ [T]^{-1}\ [R]^{-1}$ puede mostrarse como T^T y:

$$\overline{S}_{11} = S_{11}\cos^4\theta + (2S_{12} + S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{22}\sin^4\theta$$
$$\overline{S}_{12} = S_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + (S_{11} + S_{22} - S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$\overline{S}_{22} = S_{11}\sin^4\theta + (2S_{12} + S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{22}\cos^4\theta \qquad (77)$$
$$\overline{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{22} - S_{66})\sin\theta\cos^3\theta - (2S_{22} - 2Q_{12} + S_{66})\sin^3\theta\cos\theta$$
$$\overline{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})\sin^3\theta\cos\theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})\sin\theta\cos^3\theta$$
$$\overline{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$$

Note que los S_{ij} se definen en términos de las constantes de ingeniería en la ecuación 55.

Debido a la presencia de $\overline{Q_{16}}$ y $\overline{Q_{26}}$ en la ecuación 73 y de S_{16} y S_{26} en la ecuación 76, la solución de problemas relacionados con láminas generalmente ortotrópicas llamadas, es más difícil que los problemas con las denominadas láminas especialmente ortotrópicas [37], [41]. Es decir, el acoplamiento de elongación-cortante complica la solución de problemas prácticos. De hecho, no hay diferencia entre las soluciones para láminas generalmente ortotrópicas y aquellas para láminas anisotrópicas cuyas relaciones de tensión-deformación, en condiciones de tensión plana, por tanto, las ecuaciones pueden escribirse como:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{16}\\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26}\\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} \qquad (78)$$

O en su forma invertida

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{16}\\ S_{12} & S_{22} & S_{26}\\ S_{16} & S_{26} & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix} \qquad (79)$$

Donde los coeficientes de la matriz de flexibilidad anisotrópicos en términos de las constantes de ingeniería son:

$$S_{11}=\frac{1}{E_1} \qquad S_{22}=\frac{1}{E_2} \qquad S_{16}=\frac{\eta_{12,1}}{E_1}=\frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \qquad S_{12}=-\frac{\nu_{12}}{E_1}=-\frac{\nu_{21}}{E_2}$$

$$S_{66}=\frac{1}{G_{12}} \qquad S_{26}=\frac{\eta_{12,2}}{E_2}=\frac{\eta_{2,12}}{G_{12}} \qquad (80)$$

Note que, se han usado algunas constantes de ingeniería nuevas. Las nuevas constantes se llaman coeficientes de influencia mutua de Lekhnitskii [61], y se definen como:

$\eta_{i,ij}$= Coeficiente de influencia mutua del primer tipo que caracteriza el estiramiento en la dirección i causado por el esfuerzo cortante en el plano ij.

$$\eta_{i,ij}=\frac{\varepsilon_i}{\gamma_{ij}} \qquad (81)$$

Para $\tau_{ij} = \tau$ y todos los demás esfuerzos son cero

$\eta_{ij,i}$= Coeficiente de influencia mutua del segundo tipo que caracteriza el corte en el plano ij causado por la tensión normal en la dirección i

$$\eta_{ij,i}=\frac{\gamma_{ij}}{\varepsilon_i} \qquad (82)$$

Para $\sigma_i = \sigma$ y todos los demás esfuerzos son cero.

Lekhnitskii, define los coeficientes de influencia mutua y las relaciones de Poisson con subíndices que se invierten a partir de la presente notación. Los coeficientes de influencia mutua no se nombran de manera muy efectiva porque las relaciones de Poisson también podrían denominarse coeficientes de influencia mutua [37], [41], [61]. En su lugar, el $\eta_{ij,i}$ y $\eta_{i,ij}$ se llaman más apropiadamente por el nombre funcional de los coeficientes de acoplamiento de corte y elongación.

Otras relaciones de elasticidad anisotrópicas se utilizan para definir los coeficientes de Chentsov, que se relacionan con las tensiones de corte y las deformaciones por cortante, lo que las relaciones de Poisson son con respecto a las tensiones y las deformaciones normales. Sin embargo, los coeficientes de Chentsov no afectan el comportamiento en el plano de las láminas bajo tensión plana, porque los coeficientes están relacionados con S_{45},S_{46}, S_{56} en la ecuación 18. Los coeficientes de Chentsov se definen como:

$\mu_{ij,kl}$ = Coeficiente de Chentsov que caracteriza la deformación de cizallamiento en el plano kl debido a la tensión de cizallamiento en el plano ij, es decir,

$$\mu_{ij,kl} = \frac{\gamma_{kl}}{\gamma_{ij}} \qquad (83)$$

Para $\tau_{ij} = \tau$ y todas las demás tensiones son cero

Los coeficientes de Chentsov están sujetos a las relaciones recíprocas.

$$\frac{\mu_{kl,ij}}{G_{kl}} = \frac{\mu_{ij,kl}}{G_{ij}} \qquad (84)$$

Se debe tener en cuenta que los coeficientes de Chentsov se denominan más efectivamente el nombre funcional de los coeficientes de acoplamiento de corte.

Las deformaciones de corte fuera del plano de una lámina anisotrópica debido a la tensión de corte en el plano y a las tensiones normales son:

$$\gamma_{13} = \frac{\eta_{1,13}\sigma_1 + \eta_{2,13}\sigma_2 + \mu_{12,13}\tau_{12}}{G_{13}}$$

(85)

$$\gamma_{23} = \frac{\eta_{1,23}\sigma_1 + \eta_{2,23}\sigma_2 + \mu_{12,23}\tau_{12}}{G_{23}}$$

Es importante resaltar que se requieren tanto los coeficientes de acoplamiento de corte, como los coeficientes de acoplamiento de la resistencia al corte. Se debe tener en cuenta que ninguna de estas tensiones de corte surge en un material ortotrópico, a menos que se resalte en coordenadas que no sean las coordenadas principales del material [37], [41]. En tales casos, los coeficientes de acoplamiento entre cortantes y los coeficientes de acoplamientos de elongación a cortante, se obtienen a partir de los coeficientes de la matriz de flexibilidad transformados como se mostrará a continuación.

El procedimiento consiste en comparar los coeficientes de la matriz de flexibilidad ortotrópicos transformados en la ecuación 77 con los coeficientes de la matriz de flexibilidad anisotrópicos en términos de constantes de ingeniería en la ecuación 80. Para lo cual se produce un coeficiente de acoplamiento de elongación - cortante aparente, cuando se hace hincapié en una lámina ortotrópica en coordenadas no principales del material.

Por tanto, se debe volver a designar las coordenadas 1 y 2 en la ecuación 79 como x e y porque, por definición, un material anisotrópico no tiene direcciones principales del material [40], [41], [44]. Luego, se debe sustituir el S_{ij} rediseñado de la ecuación 80 en la ecuación 77, junto con los coeficientes de la matriz de flexibilidad ortotrópicos en la ecuación 55. Finalmente, las constantes de ingenierías aparentes para una lámina ortotrópica que se somete a tensiones en coordenadas x-y no principales son:

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_1}\cos^4\theta + \left[\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}\right]\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{E_2}\sin^4\theta$$

$$\nu_{xy} = E_x\left[\frac{\nu_{12}}{E_1}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta\right]$$

$$\frac{1}{E_y} = \frac{1}{E_1}\sin^4\theta + \left[\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}\right]\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{E_2}\cos^4\theta$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = 2\left[\frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} + \frac{4\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}}\right]\sin^2\theta\cos^2 + \frac{1}{G_{12}}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \quad (86)$$

$$\eta_{xy,x} = E_x\left[\left[\frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}}\right]\sin\theta\cos^3\theta - \left[\frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}}\right]\sin^3\theta\cos\theta\right]$$

$$\eta_{xy,y} = E_y\left[\left[\frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}}\right]\sin^3\theta\cos\theta - \left[\frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}}\right]\sin\theta\cos^3\theta\right]$$

Una implicación importante de la presencia del coeficiente de acoplamiento de elongación – cortante, es que las cargas de tracción fuera del eje (dirección no principal del material) para materiales compuestos produce una deformación por cortante además de la elongación axial habitual [59].

Teniendo en cuenta lo anterior, se debe reconocer que la ecuación 86 es una cuantificación de la implicación anterior para las pruebas de tracción y de las observaciones cualitativas. Los módulos anisotrópicos aparentes para una lámina ortotrópica sometida a tensión en un ángulo de θ respecto de las direcciones principales del material, varían con θ como en la ecuación 86 [41].

3.6.6. Modelo analítico de esfuerzos en cilindros de pared gruesa como material funcionalmente graduado

La forma tradicional de probar materiales de ingeniería para determinar sus propiedades ha experimentado un cambio, de la experimentación costosa se ha

avanzado a la integración completa de modelado y simulación para ahorrar costo y tiempo necesarios para las pruebas[62]. El bambú, debido a su característica única de ser una hierba, y debido a su capacidad de crecer tan alto como los árboles, debe considerarse como un material calificado funcionalmente [3], [10] (MGF) para garantizar la precisión en su análisis computacional. La geometría, la distribución de la fibra y las propiedades mecánicas de los tallos de bambú en relación con los principios de los materiales funcionalmente graduados(MGF) se deben tener en cuenta para su caracterización mecánica [3]. Es importante resaltar, que un material funcionalmente graduado o calificado (MGF) posee una microestructura que varía espacialmente, con lo cual se crea una distribución no uniforme en la fase del refuerzo [13], [63]; así mismo, este puede estar compuesto de dos o más fases constituyentes cuya composición es variable [28], [64].

Teniendo en cuenta lo anterior, en este apartado se adoptan los planteamientos y procedimientos desarrollados por Tutuncu et al. [62], donde se deducen las soluciones de forma cerrada para las tensiones y desplazamientos en recipientes cilíndricos funcionalmente graduados sometidos a presiones internas y externas mediante el método de la teoría infinitesimal de la elasticidad; como consideraciones el material es transversalmente isotrópico con coeficiente de Poisson constante, en el que el módulo elástico varía según la ley de potencia con una distribución de tensiones radial y circunferencial, las cuales dependen de una constante heterogénea, la cual el autor determinó de manera empírica y es independiente del material.

Teniendo en cuenta las condiciones para deformación simple, la simetría respecto del eje, la relación entre el desplazamiento y la deformación, las ecuaciones constitutivas se plantean como [12], [54]:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$
$$\gamma_{r\theta} = 0 \qquad (87)$$
$$\sigma_r = C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\theta$$
$$\sigma_\theta = C_{12}\varepsilon_r + C_{11}\varepsilon_\theta$$

Donde

$$C_{11} = \left(\frac{E_0(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \right) r^\beta \qquad (88)$$

$$C_{12} = \left(\frac{E_0\,\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \right) r^\beta$$

La ecuación de equilibrio para un material transversalmente isotrópico [65], [66], la cual corresponde a la única ecuación no trivial:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \qquad (89)$$

Usando las ecuaciones 87-89, la ecuación gobernante del desplazamiento radial toma la forma

$$r^2 u'' + (\beta+1) r u' + (\nu^* \beta - 1) u = 0 \qquad (90)$$

Donde

$$\nu^* = \frac{\nu}{(1-\nu)} \qquad (91)$$

La ecuación anterior, es denominada ecuación familiar de Euler-Cauchy [62], cuya ecuación característica es

$$m^2 + \beta m + (\nu^* \beta - 1) = 0 \qquad (92)$$

Las raíces de la ecuación son

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(-\beta - \sqrt{4 + \beta^2 - 4\beta\nu^*}\right)$$
$$m_2 = \frac{1}{2}\left(-\beta + \sqrt{4 + \beta^2 - 4\beta\nu^*}\right) \qquad (93)$$

Estas raíces pueden ser reales y distintas, raíces dobles o complejas conjugadas [67], [68]. Para el caso de raíces reales y distintas, la solución es:

$$u = Ar^{m_1} + Br^{m_2} \qquad (94)$$

Para raíces dobles $m_1=m_2=m$

$$u = (A + B\ln r)r^m \qquad (95)$$

Para el caso de raíces complejas m =x+yi; m=x-yi, motivo por el cual la solución se escribe de la forma

$$u = \left[A\cos(y\ln r) + Bsen(y\ln r)\right]r^x \qquad (96)$$

De las soluciones solo se tendrá en cuentas aquella relacionada con las raíces reales y distintas. Los valores de las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones de contorno $\sigma_r(a/R) = -P$, donde P es la presión aplicada en la superficie interna, “a” es el radio interno y $\sigma_r(1) = 0$, por tanto:

$$A = -\frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta}(1+\nu)(1-\nu)}{E_0\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1}-\left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right]\left(\nu+(1-\nu)m_1\right)}$$

$$B = \frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta}(1+\nu)(1-\nu)}{E_0\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1}-\left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right]\left(\nu+(1-\nu)m_2\right)} \qquad (97)$$

Las expresiones resultantes para los esfuerzos radial y circunferencial son

$$\sigma_r = -\frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta}\left(r^{m_1}-r^{m_2}\right)r^{\beta-1}}{\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1}-\left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right]} \qquad (98)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta}\left(\chi_1-\chi_2\right)}{\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1}-\left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right]\left(\left(m_1(\nu-1)-\nu\right)\left(m_2(\nu-1)-\nu\right)\right)} \qquad (99)$$

Donde,

$$\chi_1 = r^{m_1}\left[\left\{m_2(\nu-1)-\nu\right\}\left(1+\nu(m_1-1)\right)\right]$$

$$\chi_2 = r^{m_2}\left[\left\{m_1(\nu-1)-\nu\right\}\left(1+\nu(m_2-1)\right)\right] \qquad (100)$$

Las tensiones para los recipientes a presión de MGF se pueden comparar con los de los recipientes homogéneos. Las expresiones de tensiones para un cilindro homogéneo bajo presión interna son:

$$\sigma_r^H = -\frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^2\left(r^2-1\right)}{r^2\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2-1\right]} \qquad (101)$$

$$\sigma_\theta^H = -\frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^2\left(r^2+1\right)}{r^2\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2-1\right]} \qquad (102)$$

De lo anterior es importante resaltar que la constante de inhomogeneidad varía entre $-2 \leq \beta \leq 2$, valores que son determinados de manera empírica según el autor, en los que se tiene en cuenta la no homogeneidad del material para así obtener la distribución de las tensiones transversales en este [69]. Dicho de otro modo, esta no homogeneidad isotrópica, es la característica que permite percibir la variación en las tensiones transversales de un punto a otro a través del espesor [35] . Así mismo, es recomendable normalizar dichos esfuerzos, en aras de comparar y mostrar los efectos en la falta de homogeneidad [12], [69]. Por tanto, las ecuaciones normalizadas para las tensiones tanto tangenciales como circunferenciales son

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_r^H} = \frac{r^{1+\beta}\left(r^{m_1} - r^{m_2}\right)\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2 - 1\right]}{\left(r^2 - 1\right)\left(\frac{a}{R}\right)^{1+\beta}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right]} \tag{103}$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_\theta^H} = -\frac{r^2\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2 - 1\right](\chi_1 - \chi_2)}{\left(r^2+1\right)\left(\frac{a}{R}\right)^{1+\beta}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{m1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m2}\right]\left((m_1(\nu-1)-\nu)(m_2(\nu-1)-\nu)\right)} \tag{104}$$

Donde el super índice “H” corresponden a un material homogéneo.

3.7. ANÁLISIS MICROMECÁNICO

Con el análisis del material compuesto a nivel micromecánico se pretende obtener una predicción de las propiedades elásticas totales del compuesto a partir de las propiedades, la disposición y el estudio de la interacción entre los materiales constituyentes [27], [45], [70]. El grado de precisión en la estimación de las propiedades y la respuesta del material compuesto reforzado con fibras (FRP), dependerá sustancialmente del enfoque y del grado de sofisticación del modelo utilizado [47]. Existen básicamente tres enfoques diferenciados:

- Modelos basados en la mecánica de materiales en los que se asume como hipótesis simplificadora un campo de tensiones y deformaciones uniforme en los constituyentes [27], [41]. En dichos modelos, solo se tiene en cuenta las propiedades y fracciones de volumen de los materiales constituyentes, descartando la geometría y disposición interna; con lo cual es considerado el compuesto como un material macroscópicamente isótropo y homogéneo. Generalmente son modelos simples, siendo útiles para proporcionar limites

superiores e inferiores de las constantes ingenieriles [71]. Existe una ventaja en estos enfoques, debido a que son adecuados para las propiedades longitudinales como el módulo de Young y la relación de Poisson principal de un compuesto de fibra unidireccional [27]. En referencia a dichos modelos se puede mencionar la ley de mezclas, la ley de mezclas inversa, los principios energéticos y los principios variacionales entre otros.

- Modelos basados en la teoría clásica de la elasticidad que proporcionan formulaciones de problemas acotados [41]. Éstos requieren del uso de herramientas de métodos numéricos para la estimación de las tensiones y deformaciones a nivel micromecánico. En estos modelos, la geometría y disposición interna de las fases es considerada [71].

- Modelos semiempíricos, basados en el ajuste de curvas de datos obtenidos experimentalmente, mediante la formulación de correlaciones [71].

- Modelos o enfoques numéricos, los cuales utilizan métodos de diferencia finita, elemento finito, celda periódica o elemento limite produciendo mejores predicciones; sin embargo, requieren de mucho tiempo y no producen soluciones mediante expresiones de forma cerrada; más bien, los resultados se presentan generalmente mediante familias de curvas [27].

A continuación, se abordan los conceptos y procedimientos relacionados con los diferentes enfoques.

3.8.1. Regla de mezclas

Basados en la resistencia de materiales, referentes a la regla de mezclas serie – paralelo y la regla de mezclas serie- paralelo modificada.

Si se asume una compactación perfecta entre la fibra y la matriz [27], [40], se definen las fracciones volumétricas ${}^{i}\upsilon$ y las fracciones másicas ${}^{i}m$, como:

$${}^{f}\upsilon = \frac{{}^{f}V}{{}^{c}V} = \frac{{}^{f}M/{}^{f}\rho}{{}^{c}M/{}^{c}\rho} = \frac{{}^{f}M\,{}^{c}\rho}{{}^{c}M\,{}^{f}\rho} = {}^{f}m\frac{{}^{c}\rho}{{}^{f}\rho} \qquad (105)$$

$${}^{m}\upsilon = \frac{{}^{m}V}{{}^{c}V} = \frac{{}^{m}M/{}^{m}\rho}{{}^{c}M/{}^{c}\rho} = \frac{{}^{m}M\,{}^{c}\rho}{{}^{c}M\,{}^{m}\rho} = {}^{m}m\frac{{}^{c}\rho}{{}^{m}\rho} \qquad (106)$$

Los superíndices f, m y c denotan fibra, matriz y compuesto; siendo V el volumen, M la masa y ρ la densidad. En adelante, las propiedades elásticas e higrotérmicas se determinan en base a las fracciones volumétricas de los materiales constituyentes. Sin embargo, en la práctica es útil disponer de una relación entre masas o densidades, los cuales son parámetros fácilmente mesurables y la fracción volumétrica [45]. Combinando las expresiones anteriores asumiendo que f_u + m_u = 1, se obtiene:

$${}^{c}\rho = {}^{f}\upsilon\,{}^{f}\rho + {}^{m}\upsilon\,{}^{m}\rho \Rightarrow \frac{1}{{}^{c}\rho} = \frac{{}^{f}m}{{}^{f}\rho} + \frac{{}^{m}m}{{}^{m}\rho}; \quad {}^{f}\upsilon = \frac{{}^{c}\rho - {}^{m}\rho}{{}^{f}\rho - {}^{m}\rho} \qquad (107)$$

Como es bien sabido, existe dificultad inherente para conseguir la compactación perfecta en los procedimientos de impregnación manual de la fibra, generándose así la aparición de huecos en el compuesto que pueden disminuir su comportamiento estructural frente a diferentes solicitaciones. Por tanto, la fracción volumétrica ${}^{h}\upsilon$ que ocupan estos huecos puede estimarse a partir de la ecuación:

$${}^{f}\upsilon + {}^{m}\upsilon + {}^{h}\upsilon = 1 \Rightarrow {}^{h}\upsilon = 1 - {}^{c}\upsilon\left(\frac{{}^{f}m}{{}^{f}\rho} + \frac{{}^{m}m}{{}^{m}\rho}\right) \qquad (108)$$

)

La denominada regla de mezclas serie-paralelo establece una condición de isodeformación en la dirección del refuerzo, ${}^{c}\varepsilon_1$ = ${}^{f}\varepsilon_1$ = ${}^{m}\varepsilon_1$, y una condición

de isotensión en el resto de direcciones, ${}^{c}\sigma_2 = {}^{f}\sigma_2 = {}^{m}\sigma_2$, tal y como se ilustra en la Figura 13.

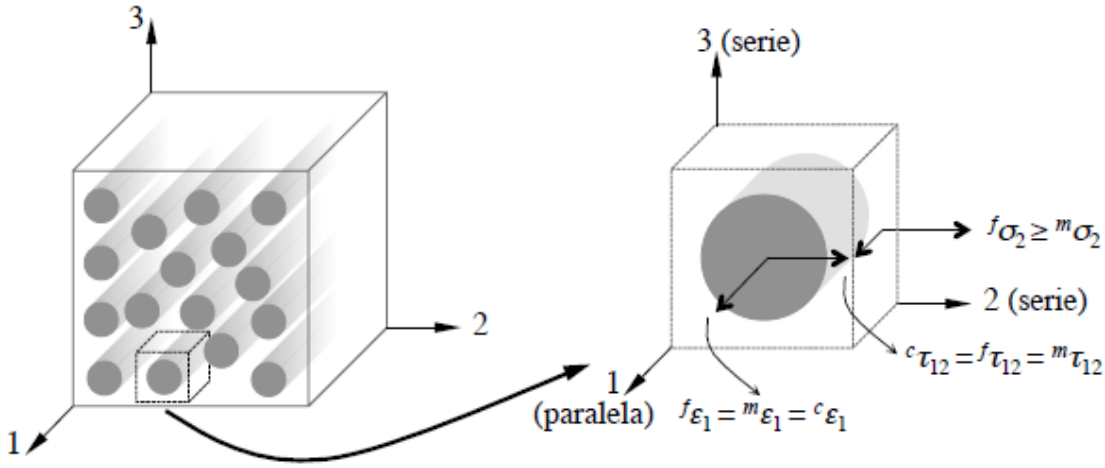


Figura 13 Representación del comportamiento serie-paralelo de los constituyentes del material compuesto. Fuente [40]

.

Atendiendo al caso particular de un material reforzado con fibras (FRP), con refuerzo unidireccional que no presenta defectos de compactación, en el que se considera que la fibra es ortótropa y la matriz isótropa, el módulo elástico longitudinal del compuesto ${}^{c}E_1$ puede determinarse mediante:

$${}^{c}E_1 = {}^{f}\upsilon\,{}^{f}E_1 + {}^{m}\upsilon\,{}^{m}E = {}^{f}\upsilon\,{}^{f}E_1 + (1 - {}^{f}\upsilon)\,{}^{m}E \qquad (109)$$

Siendo ${}^{f}E_1$ el módulo elástico longitudinal de la fibra y ${}^{m}E_1$ el módulo elástico de la matriz. Dependiendo de la fracción volumétrica y dada la diferencia en el orden de magnitud entre la rigidez del refuerzo y la rigidez de la matriz, se admite la eliminación del segundo término de la ecuación 109. Análogamente el coeficiente de Poisson longitudinal (mayor) ${}^{c}\nu_{12}$ se obtiene mediante:

$${}^{c}\nu_{12} = {}^{f}\upsilon\,{}^{f}\nu_{12} + {}^{m}\upsilon\,{}^{m}\nu \qquad (110)$$

Mientras que el coeficiente de Poisson transversal (menor) se obtiene de:

$$ {}^{f}\nu_{21} = {}^{f}E_2 \frac{{}^{f}\nu_{12}}{{}^{f}E_1} \qquad (111) $$

Véase como las propiedades del compuesto en la dirección longitudinal están gobernadas por las propiedades de la fibra de refuerzo. Por el contrario, en la dirección transversal (perpendicular a la dirección de las fibras), las propiedades están dominadas por las características de la matriz como se expone a continuación.

A partir de la condición de isotensión en la dirección serie se deduce la siguiente expresión para la estimación del módulo elástico transversal:

$$ \frac{1}{{}^{c}E_2} = \frac{{}^{f}\upsilon}{{}^{f}E_2} + \frac{{}^{m}\upsilon}{{}^{m}E} \Rightarrow {}^{c}E_2 = \frac{{}^{f}E_2 \, {}^{m}E}{{}^{m}\upsilon \, {}^{m}E + (1 - {}^{f}\upsilon) \, {}^{f}E_2} \qquad (112) $$

Está demostrado que la aproximación anterior tiende a subestimar el valor del módulo elástico transversal, lo que obliga a replantearse la hipótesis de isotensión en los materiales constituyentes. Para ello se introduce un parámetro de corrección denominado factor de partición de tensiones, η_2, en la dirección transversal, que permite diferenciar entre las tensiones medias que soporta la fibra, ${}^{c}\overline{\sigma}_2$, y la matriz, ${}^{m}\overline{\sigma}_2$, esto es:

$$ \frac{1}{{}^{c}E_2} = \frac{\frac{{}^{f}\upsilon}{{}^{f}E_2} + \frac{\eta_2 \, {}^{m}\upsilon}{{}^{m}E}}{{}^{f}\upsilon + \eta_2 \, {}^{m}\upsilon}; \quad 0 < \eta_2 = \frac{{}^{m}\overline{\sigma}_2}{{}^{f}\overline{\sigma}_2} < 1 \qquad (113) $$

A la expresión anterior se la conoce como regla de mezclas serie – paralelo modificada para ${}^{c}E_2$. El factor η_2 es dependiente de la fracción volumétrica y debe ser determinado experimentalmente.

Por otro lado, en la regla de mezclas serie-paralelo en dirección transversal, se está asumiendo que la deformación de la fibra puede ser independiente de la deformación de la matriz. Para restringir esta condición se introducen dos nuevos factores de partición de tensiones, ${}^{f}\eta$ y ${}^{m}\eta$, para cada material constituyente, llegando a la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{{}^{c}E_2} = \frac{{}^{f}\eta\,{}^{f}\upsilon}{{}^{f}E_2} + \frac{{}^{m}\eta\,{}^{m}\upsilon}{{}^{m}E} \qquad (114)$$

Donde los factores se definen como:

$${}^{f}\eta = \frac{{}^{f}E_1\,{}^{f}\upsilon + \left[(1-{}^{f}\nu_{12}\,{}^{f}\nu_{21})\,{}^{m}E + {}^{m}\nu\,{}^{f}\nu_{21}\right]{}^{m}\upsilon}{{}^{f}E_1\,{}^{f}\upsilon + {}^{m}E\,{}^{m}\upsilon} \qquad (115)$$

$${}^{m}\eta = \frac{\left[(1-{}^{m}\nu^2)\,{}^{f}E_1 - (1-{}^{m}\nu\,{}^{f}\nu_{12})\,{}^{m}E\right]{}^{f}\upsilon + {}^{m}\upsilon\,{}^{m}E}{{}^{f}E_1\,{}^{f}\upsilon + {}^{m}E\,{}^{m}\upsilon} \qquad (116)$$

La estimación del módulo de cizalladura ${}^{c}G_{12}$. en el plano es análoga a la del módulo elástico transversal ${}^{c}E_2$, considerando ahora una condición de isotensión a cizalladura, esto es:

$${}^{c}\tau_{12} = {}^{f}\tau_{12} = {}^{m}\tau_{12} \qquad (117)$$

De donde se deduce la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{{}^{c}G_{12}} = \frac{{}^{f}\upsilon}{{}^{f}G_{12}} + \frac{{}^{m}\upsilon}{{}^{m}G} \Rightarrow {}^{c}G_{12} = \frac{{}^{f}G_{12}\,{}^{m}G}{{}^{m}\upsilon\,{}^{m}G + (1-{}^{f}\upsilon)\,{}^{f}G_{12}} \qquad (118)$$

Donde ${}^{f}G_{12}$ denota el módulo de cizalladura de la fibra y ${}^{m}G$ el módulo de cizalladura de la matriz considerada isótropa, siendo entonces válida la relación:

$${}^{m}G = \frac{{}^{m}E}{2(1+{}^{m}\nu)} \qquad (119)$$

Análogamente al caso anterior, esta aproximación (ecuación 114) tiende a subestimar el valor del módulo elástico de cizalladura, siendo necesario introducir un parámetro de corrección denominado factor de partición de tensiones η_{12}, es decir:

$$\frac{1}{{}^{c}G_{12}} = \frac{\dfrac{{}^{f}\upsilon}{{}^{f}G_{12}} + \dfrac{\eta_{12}\,{}^{m}\upsilon}{{}^{m}G}}{{}^{f}\upsilon + \eta_{12}\,{}^{m}\upsilon}; \quad 0 < \eta_{12} = \frac{{}^{m}\bar{\tau}_{12}}{{}^{f}\bar{\tau}_{12}} < 1 \qquad (120)$$

Donde el factor η_{12} es dependiente de la fracción volumétrica y debe determinarse experimentalmente.

Para un caso particular en el que se asume una condición de isotropía de la fibra, puede emplearse de manera alternativa la siguiente relación deducida a partir de la teoría de la elasticidad:

$${}^{c}G_{12} = {}^{m}G\left[\frac{({}^{m}G + {}^{f}G) - {}^{f}\upsilon({}^{m}G - {}^{f}G)}{({}^{m}G + {}^{f}G) + {}^{f}\upsilon({}^{m}G - {}^{f}G)}\right] \qquad (121)$$

En lo referente a la estimación de los parámetros de resistencia, si bien se han publicado varios modelos, los resultados han demostrado ser menos precisos que las estimaciones de los parámetros de rigidez. No obstante, en el caso particular de la resistencia longitudinal a tracción ${}^{c}\sigma_1^T$ de un material reforzado unidireccionalmente, cuyo comportamiento está gobernado principalmente por las propiedades de la fibra, puede estimarse el parámetro de resistencia mediante:

$$ {}^{c}\sigma_1^T = {}^{f}\upsilon\, {}^{f}\sigma_1^T + {}^{m}\upsilon\left({}^{m}E \frac{{}^{f}\sigma_1^T}{{}^{f}E_1} \right) \qquad (122) $$

Siendo ${}^{c}\sigma_1^T$ la tensión de rotura de la fibra. Nótese que se está considerando que se produce antes el fallo de la fibra que el de la matriz. La ecuación anterior admite una simplificación conservativa debido a que el segundo término es generalmente muy inferior al primero.

En los casos de refuerzos con fibras continuas, por cuestiones prácticas, se ignora la contribución de la matriz a la rigidez y resistencia longitudinal, y se reemplaza la fracción volumétrica f_v por la fracción de área de la fibra f_a, resultando las siguientes expresiones simplificadas:

$$ {}^{c}E = {}^{f}a\, {}^{f}E \qquad (123) $$

$$ {}^{c}\sigma = {}^{f}a\, {}^{f}\sigma^{ult} \qquad (124) $$

Como se indicó anteriormente, a partir del mismo enfoque basado en la mecánica de materiales se pueden también derivar las expresiones para una primera estimación de las propiedades higrotérmicas del compuesto. Los coeficientes

higrotérmicos se utilizan para determinar las deformaciones inducidas por las cargas térmicas e higroscópicas.

Paralelamente a los desarrollos anteriores, se obtienen las expresiones de los coeficientes de expansión por efectos de temperatura del compuesto en la dirección longitudinal ${}^{c}\alpha_1$, y transversal ${}^{c}\alpha_2$, expresados como:

$$ {}^{c}\alpha_1 = \frac{{}^{f}\upsilon\, {}^{f}E_1\, {}^{f}\alpha_1 + {}^{m}\upsilon\, {}^{m}E\, {}^{m}\alpha}{{}^{f}\upsilon\, {}^{f}E_1 + {}^{m}\upsilon\, {}^{m}E} \qquad (125) $$

$$ {}^{c}\alpha_2 = \left[{}^{f}\alpha_2 - \left(\frac{{}^{m}E}{{}^{c}E_1} \right) {}^{f}\nu_{12} \left({}^{m}\alpha - {}^{f}\alpha_1 \right) {}^{m}\upsilon \right] {}^{f}\upsilon + \left[{}^{m}\alpha - \left(\frac{{}^{f}E_1}{{}^{c}E_1} \right) {}^{m}\nu \left({}^{m}\alpha - {}^{f}\alpha_1 \right) {}^{f}\upsilon \right] {}^{m}\upsilon = $$

$$ = {}^{m}\alpha + \left({}^{f}\alpha_2 - {}^{m}\alpha \right) {}^{f}\upsilon + \left(\frac{{}^{f}E_1\, {}^{m}\upsilon - {}^{m}E\, {}^{f}\nu_{12}}{{}^{c}E_1} \right) \left({}^{m}\alpha - {}^{f}\alpha_1 \right) \left(1 - {}^{f}\upsilon \right) {}^{f}\upsilon \qquad (126) $$

Siendo ${}^{f}\alpha_1$, ${}^{f}\alpha_2$ y ${}^{m}\alpha$, los coeficientes de expansión por temperatura de los materiales constituyentes en las respectivas direcciones. El término ${}^{c}E_1$, viene dado por la ecuación 109.

Finalmente, los coeficientes de expansión por humedad del compuesto ${}^{c}\beta_i$, considerando
que la concentración de humedad en la fibra es nula, se obtiene:

$$ {}^{c}\beta_1 = \frac{{}^{m}E}{{}^{c}E_1} {}^{m}\beta \qquad (127) $$

$$ {}^{c}\beta_2 = {}^{m}\beta - {}^{f}\upsilon\, {}^{f}\nu_{12}\, {}^{c}\beta_1 + {}^{m}\nu \left({}^{m}\beta - {}^{m}\upsilon\, {}^{c}\beta_1 \right) \qquad (128) $$

Donde $^{m}\beta$ es el coeficiente de expansión por humedad de la matriz.

Conviene destacar que los modelos micromecánicos presentados evalúan la interacción entre los materiales constituyentes proporcionando estimaciones de las propiedades efectivas [59]. No obstante, hay que considerar las expresiones anteriores como aproximaciones basadas en la resistencia de materiales, cuyos resultados no necesariamente satisfacen las ecuaciones de la elasticidad. Así mismo, el requerimiento de ciertos parámetros experimentales puede limitar su aplicabilidad. Por lo general, es recomendable determinar las propiedades del compuesto mediante ensayos experimentales, y reservar los modelos micromecánicos para un análisis paramétrico o de sensibilidad[40]. El enfoque anteriormente descrito, se utiliza generalmente para estimar las propiedades físicas o mecánicas promedio del material compuesto, a lo largo de diferentes direcciones [72].

3.8.2. Ecuaciones de Halpin – Tsai (H – T)

Estas ecuaciones, proponen un intento muy juicioso para realizar una interpolación entre los limites superior e inferior; donde existe buena concordancia con los resultados experimentales para distintas geometrías de las fibras[27], [73]. la propiedad compuesta general P^{*} se obtiene como:

$$P^{*}=\frac{P_m(1+\xi\eta V_f)}{1-\eta V_f} \qquad (129)$$

Donde

$$\eta=\frac{P_f-P_m}{P_f+\xi P_m} \qquad (130)$$

ξ = Parámetro estimado de eficiencia de refuerzo

P_f, P_m= Propiedades de la fibra y de la matriz respectivamente. Las relaciones anteriores se pueden escribir como

$$P^* = \frac{P_m\left[P_f + \xi P_m + \xi V_f\left(P_f - P_m\right)\right]}{P_f + \xi P_m - V_f\left(P_f - P_m\right)} \qquad (131)$$

Para ξ→ infinito se obtiene el modelo paralelo (Formula de Voigt)

$$P^* = V_f P_f + V_m P_m \qquad (132)$$

Para ξ→ 0 se obtiene el modelo paralelo (Formula de Reuss)

$$P^* = \left(\frac{V_f}{P_f} + \frac{V_m}{P_m}\right)^{-1} \qquad (133)$$

Los valores apropiados para ξ, deben ser determinados experimentalmente [27]. Para un valor experimental de una propiedad compuesta P* y una relación de volumen de fibra dada V_f, el parámetro ξ viene dado por:

$$\xi = \frac{P_f\left(P^* - P_m\right) - V_f P^*\left(P_f - P_m\right)}{P_m\left[\left(P_f - P^*\right) - V_m\left(P_f - P_m\right)\right]} \qquad (134)$$

Se pueden determinar valores confiables para ξ, comparando las ecuaciones de Halpin – Tsai con las soluciones numéricas de las ecuaciones de la micromecánica

$\xi = 2\frac{l}{t} + 40v_f^{10}$ para E_1

$\xi = 2\frac{w}{t} + 40v_f^{10}$ para E_2

$\xi = 2\left(\frac{w}{t}\right)^{1,732} + 40v_f^{10}$ para G_{12}

Donde l, w y t son la longitud el ancho y el espesor del refuerzo, respectivamente. Para una fibra de sección circular $l=l_f$, $t=w=d_f$. Halpin concluyo que E_2, G_{12}, y v_{12} no se ven afectados de manera significativa por la longitud de la fibra, ni por las distintas secciones transversales de la misma.

3.8.3. Modelo de Hashim y Rosen

En el cuadro se proporcionan las diferentes constantes elásticas, así como las propiedades mecánicas macroscópicas y su obtención a partir de la microestructura

Módulo de Young longitudinal	$E_1 = E_f\, v_f + E_m\, v_m + \frac{4\, v_f\, v_m\, (\nu_f - \nu_m)^2}{\frac{v_m}{k_f} + \frac{v_f}{k_m} + \frac{1}{G_m}}$
Módulo de Young transversal	$E_2 = \frac{4\, k_t^*\, G_t^*}{k_t^* + G_t^* \left(1 + \frac{4\, k_t^*\, \nu_{12}^2}{E_1}\right)}$
Módulo de Cizalladura longitudinal	$G_{12} = G_m\, \frac{v_m\, G_m + (1 + v_f) G_f}{(1 + v_f) G_m + v_m\, G_f}$
Módulo de Cizalladura transversal	$G_{23} = \frac{E_2}{2\,(1 + \nu_{23})}$
Coeficiente de Poisson longitudinal	$\nu_{12} = v_f\, \nu_f + v_m\, \nu_m + \frac{v_f\, v_m\, (\nu_f - \nu_m)\left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_f}\right)}{\frac{v_m}{k_f} + \frac{v_f}{k_m} + \frac{1}{G_m}}$
Coeficiente de Poisson transversal	$\nu_{23} = \frac{E_2}{2\, G_t^*} - 1$
donde:	
$k_f = E_f/(2\,(1 - \nu_f - \nu_f^2))$	$k_m = E_m/(2\,(1 - \nu_m - \nu_m^2))$
$k_t^* = \frac{k_m\, k_f + (v_f\, k_f + v_m\, k_m) G_m}{v_m\, k_f + v_f\, k_m + G_m}$	$G_t^* = G_m\, \frac{(\alpha + \beta_m\, v_f)(1 + \rho\, v_f^3) - 3\, v_f\, v_m^2\, \beta_m^2}{(\alpha - v_f)(1 + \rho\, v_f^3) - 3\, v_f\, v_m^2\, \beta_m^2}$
$\alpha = (\gamma + \beta_m)/(\gamma - 1)$	$\beta_m = \frac{1}{3 - 4\,\nu_m}$ $\quad$ $\beta_f = \frac{1}{3 - 4\,\nu_f}$
$\rho = (\beta_m - \gamma\, \beta_f)/(1 + \gamma\, \beta_f)$	$\gamma = G_f/G_m$

Figura 14 Propiedades mecánicas macroscópicas de un material compuesto, a partir de la microestructura. Fuente. [34]

3.8.4. Modelo de Mori – Tanaca (M – T)

Basados en el supuesto promedio de la tensión de la matriz, donde la fibra se incrusta en la fase de la matriz, Mori y Tanaca propusieron esta técnica exacta de homogeneización elástica [74].

Ellos aplicaron cepas macroscópicas de campo lejano para generar la matriz de concentración de tensión $A_{m\infty}^{f}$; la cual se usa para relacionar la tensión promedio de la fibra con la tensión promedio de la matriz, de la siguiente forma:

$$\overline{\varepsilon f}=A_{m\infty}^{f}\cdot\overline{\varepsilon m} \qquad (135)$$

Si el material compuesto es de dos fases, entonces se tiene la siguiente relación:

$$\bar{\varepsilon}=c_f\cdot\overline{\varepsilon f}+c_m\cdot\overline{\varepsilon_m}\rightarrow\bar{\varepsilon}=\left[c_f\cdot A_{m\infty}^{f}+c_m\cdot I\right]\overline{\varepsilon m} \qquad (136)$$

A partir de lo anterior, la matriz de concentración de deformación que relaciona la deformación promedio de la fibra con la deformación macroscópica promedio toma la siguiente forma:

$$A^{f}=A_{m\infty}^{f}\left[c_f A_{m\infty}^{f}+c_m I\right]^{-1} \qquad (137)$$

Por tanto, la matriz de rigidez elástica final se puede expresar de la siguiente forma:

$$C^{M-T}=C^{m}+c_f\left(C^{f}-C^{m}\right)A_{m\infty}^{f}\left[c_f A_{m\infty}^{f}+c_m I\right]^{-1} \qquad (138)$$

3.8.5. Modelo de Hopkins y Chamis

También conocido como ley de mezclas modificada [71], se genera por la necesidad de mejorar las predicciones que se obtienen mediante ley de mezclas inversa para compuestos de fibra continua. Dichas ecuaciones se pueden se resumir mediante las siguientes relaciones:

$$P = \left[\frac{\sqrt{v_f}}{P_b} + \frac{1-\sqrt{v_f}}{P_m} \right]^{-1}$$

$$P_b = \sqrt{v_f} P_f + \left(1-\sqrt{v_f}\right) P_m \qquad (139)$$

Donde P es la propiedad deseada, la cual puede ser E_2, G_{12} o G_{23}. Con respecto a las constantes E_1 y σ_{12}, pueden ser determinadas mediante la ley de mezclas. El siguiente cuadro representa en forma condensada las propiedades macromecánicas en función de la microestructura en dicho modelo.

Módulo de Young longitudinal	$E_1 = v_f\, E_{f1} + v_m\, E_m$
Módulo de Young transversal	$E_2 = \left(\frac{\sqrt{v_f}}{E_{b2}} + \frac{1-\sqrt{v_f}}{E_m}\right)^{-1}$ $donde \quad E_{b2} = \sqrt{v_f}\, E_{f2} + (1-\sqrt{v_f})\, E_m$
Módulo de Cizalladura longitudinal	$G_{12} = \left(\frac{\sqrt{v_f}}{G_{b12}} + \frac{1-\sqrt{v_f}}{G_m}\right)^{-1}$ $donde \quad G_{b12} = \sqrt{v_f}\, G_{f12} + (1-\sqrt{v_f})\, G_m$
Módulo de Cizalladura transversal	$G_{23} = \left(\frac{\sqrt{v_f}}{G_{b23}} + \frac{1-\sqrt{v_f}}{G_m}\right)^{-1}$ $donde \quad G_{b23} = \sqrt{v_f}\, G_{f23} + (1-\sqrt{v_f})\, G_m$
Coeficiente de Poisson longitudinal	$\nu_{12} = v_f\, \nu_{f12} + v_m\, \nu_m$
Coeficiente de Poisson transversal	$\nu_{23} = \frac{E_2}{2\, G_{23}} - 1$

Figura 15 Constantes elásticas en función de la microestructura. Fuente [34]

3.8.6. Modelo de Chamis

Este modelo, asume el compuesto como transversalmente isotrópico donde las constantes elásticas están en función de las constantes componentes de la fibra y la matriz [34].

Módulo de Young longitudinal

$$E_{11} = E_{f1}V_f + E_mV_m$$

Módulo de Young transversal

$$E_{22} = E_{33} = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_f}(1 - E_m/E_{12})}$$

Módulo de cizalladura longitudinal

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f}(1 - G_m/G_{f12})}$$

Módulo de cizalladura transversal

$$G_{23} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f}(1 - G_m/G_{f23})}$$

Coeficiente de Poisson longitudinal

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{f12}V_f + \nu_mV_m$$

Coeficiente de Poisson transversal

$$\nu_{23} = \frac{E_{22}}{2G_{23}} - 1$$

Figura 16 Constantes elásticas de un compuesto transversalmente isotrópico en términos de constantes componentes (matriz isotrópica, fibra anisotrópica). Fuente [34]

3.9. ANTECEDENTES DEL MODELADO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE PROPIEDADES MECÁNICAS DEL BAMBÚ

A nivel nacional sobresale el trabajo realizado por Padilla 2018 [5], en donde a partir de los resultados experimentales de carga a tracción, se realiza la caracterización de las tensiones a tracción paralela a la fibra, mediante un modelo numérico de

distribución de probabilidad de Weibull. Dicho enfoque es importante porque analiza el comportamiento del material en el rango plástico, a partir de una distribución de probabilidad de falla de las fibras como resultado de la deformación permanente que sufre el material a partir del primer ciclo de carga progresiva hasta llevar el material a la falla.

Por otro lado Saraz 2009 [21] validó un modelo matemático propuesto por Chandrupatla & Belegundu 1999 en donde se utilizaron varias ecuaciones que permiten predecir algunas propiedades mecánicas como la resistencia a la tracción paralela a la fibra en la zona media del material. Su importancia radicó en que los resultados numéricos no fueron muy alejados de los experimentales, por lo que se concluye que los modelos utilizados son aceptables.
En el artículo presentado por Takeuchi et al.,2018 [75] además de las pruebas experimentales, se utiliza la simulación numérica mediante el método de elementos finitos para caracterizar la resistencia a la flexión paralela y perpendicular a la fibra utilizando un enfoque continuo de discontinuidad fuerte para materiales compuestos y el modelo de probabilidad de Weibull que se utiliza en el fallo progresivo de las fibras. Se observó que la dirección de las grietas en el modelo numérico fue similar al de la prueba experimental, generando así un alto grado de confiabilidad.

Se puede mencionar el trabajo realizado por García et al., 2012 [76] sobre el análisis de elementos finitos de juntas estructurales de bambú a lo largo de los ejes transversales; se obtuvo parámetros como las relaciones de Poisson, las deformaciones radiales y circunferenciales con variaciones entre el 2% y el 9%. Khatry y Misrha 2012 [77] presentan un estudio numérico del bambú mediante el método de elementos finitos, considerándolo como un material lineal elástico ortotrópico no uniforme, mediante el análisis a cortante paralelo a la fibra y flexión perpendicular a la fibra, encontrándose que las deformaciones eran aceptables (< 5%), se sugiere continuar investigando el comportamiento del material, en aras de optimizar las soluciones.

Se destaca la investigación realizada por Osorio 2018 [78] mediante la cual se utiliza el modelo analítico de Cox y la ecuación semi empírica de Halpin – Tsai asumiendo las fibras del Guadua Angustifolia Kunth como cortas para la obtención del módulo de elasticidad longitudinal del material desde el punto de vista micromecánico. Finalmente, Estrada 2016 [25], analiza el proceso de fractura de la GAK(Guadua Angustifolia Kunth) mediante la implementación de un modelo numérico micromecánico en condición de esfuerzos planos y deformación infinitesimal mediante el método de los elementos finitos por esfuerzo axial (paralelo a la fibra). Mediante este método se pudo determinar el módulo de elasticidad inicial del material, así como el esfuerzo normal máximo, concluyéndose que el modelo responde de manera satisfactoria a la respuesta estructural.

3.10. ANTECEDENTES EXPERIMENTALES

Actualmente, los resultados de las pruebas experimentales siguen siendo fundamentalmente necesarios en el análisis de las propiedades mecánicas de la guadua, muchas pruebas con diferentes enfoques se han realizado, incluyendo protocolos novedosos no enmarcados en los estándares de las de las normas ISO y ASTM. Ardila 2013 [1] determino valores para los esfuerzos admisibles de la Guadua Angustifolia para el departamento del Tolima; fue un trabajo importante porque se utilizaron las recomendaciones de la norma NST – 10 Titulo G lo que garantiza su uso estructural de manera funcional y segura debido a los altos factores de seguridad incorporados.

En el trabajo realizado por Li et al.,2018 [79] se evaluó la capacidad de flexión de vigas de bambú laminado y se comparan los resultados con los de un modelo analítico, llegando buenos acuerdos, Sarath 2015 [80] mediante pruebas experimentales, desarrolla un diseño donde se aprovechan las bondades del bambú como la resistencia a la tracción para su uso como refuerzo en vigas de

hormigón armado, y se compara con los mismo refuerzos de bambú pero sin tratamiento químico. Mitch 2009 [81] realiza un estudio y análisis estructural sobre el comportamiento del bambú frente a diferentes pruebas y cargas mecánicas como tracción, compresión, cortante y sus respectivos modos de falla; el estudio toma gran relevancia porque se proponen algunos de los protocolos para pruebas experimentales que se usan en la actualidad.

Scherer et al., (2019) [82], determinaron los módulos de corte G_{13} y G_{23} mediante ensayo de torsión utilizando las fibras de bambú como material de refuerzo con resina epoxi, el propósito de dicho estudio estaba enfocado en la utilización y aprovechamiento de las fibras naturales para aplicarlos a la industria automotriz. Otros estudios se enfocan en la determinación de las propiedades elásticas y de resistencia a partir de la micromecánica, por ejemplo Zhao et al.,2018 [46] aplican el modelo de Mori – Tanaca y la ecuación de Halpin – Tsai para determinar los módulos transversales mediante soluciones cerradas, considerando la funcionalidad graduada del material, aquí se tiene en cuenta el grado de dificultad para predecirlos mediante métodos convencionales.

Actualmente, a nivel mundial son muchas las investigaciones que se están adelantando en pro de la caracterización mecánica del bambú guadua con el propósito de maximizar su aprovechamiento incorporándolo en los diferentes sectores, como automotriz, construcción, sector inmobiliario, y utensilios entre otros aspectos por mencionar.

4. RESULTADOS

En este trabajo se utiliza el modelo analítico propuesto por Tutuncu et al., [62], en el cual se obtiene las funciones que modelan la tensión trasversal radial y circunferencial aplicados a cilindros de paredes gruesas. En dicho modelo, el cual se encuentra detallado en la sección 3.6.6 del marco teórico de este documento, se realiza el análisis, planteamiento y solución para un material transversalmente isotrópico y funcionalmente graduado, donde las tensiones transversales varían según una ley de potencia. En vista de lo anterior, se utilizan las funciones de la solución obtenidas y mediante la herramienta MATLAB, se modelan dichas funciones con características y parámetros específicos para la Guadua Angustifolia Kunth, obteniendo la variación de las tensiones mencionados a través del culmo desde la parte interna hacia la externa. Por otro lado, mediante la herramienta SolidWorks, se describen algunos aspectos del comportamiento del material, frente a diferentes cargas, mediante dos modelos; uno de cilindros concéntricos de igual espesor con propiedades elásticas y de resistencia especificas para la zona interna, media y externa del culmo. Un segundo modelo mediante una probeta cuyas características geométricas son acordes a la norma ASTM 143D. Los resultados obtenidos son interpretados desde la fenomenología observada y comparados con los reportados experimentalmente en las diferentes fuentes bibliográficas consultadas. La respuesta del material se explica para cargas de tracción paralela y perpendicular a la fibra, compresión paralela y perpendicular a la fibra, carga a cortante puro paralelo a la fibra, flexión y torsión pura con geometrías acordes a las especificaciones técnicas. Finalmente, se analizan los resultados y se concluye. En todos los análisis mediante el método de los elementos finitos con la herramienta SOLIDWORKS, el criterio de falla es de Von Mises.

4.1. ANÁLISIS DE SOLUCIONES CERRADAS PARA LAS TENSIONES TRANSVERSALES DE LA GUADUA

En esta sección se utilizan las ecuaciones 91, 93, 98, 103 y 104 de la sección 3.6.6 mediante un protocolo secuencial en Matlab, obteniéndose las soluciones cerradas para la variación de las tensiones transversal longitudinal y transversal circunferencial, donde “a” es el radio interno de 38 mm, R es el radio externo de 50 mm, el coeficiente de Poisson es de 0,3; la variable “r” toma valores en el intervalo $0{,}76 \leq r \leq 1$, con incrementos de 0,05. Además, las curvas han sido generadas para una constante β que toma los valores de {0, 1, 1.5, 2}, con los cuales se incorpora el carácter heterogéneo del material. El protocolo implementado en el software Matlab para la obtención de las curvas, se encuentra en el anexo A de este documento. Además de lo anterior, el material es considerado no homogéneo con geometría cilíndrica; debido al tamaño del espécimen analizado, se descarta el desvanecimiento cónico teniendo en cuenta la investigación realizada por D. Mich 2009 [81], donde a partir de mediciones del diámetro externo en muestras de bambú guadua, se estableció que en especímenes de longitudes menores o iguales a 1.9 metros el diámetro exterior es constante. Las siguientes figuras representan los comportamientos con la variación de r, a través del espesor del culmo, con a una presión interna de 100 MPa como valor de referencia para poder realizar el análisis del comportamiento de las tensiones radiales y tangenciales. A continuación, se presentan las funciones que modelan las tensiones transversales a través del espesor del material, junto con otros parámetros, los cuales ya fueron descritos.

$$\sigma_r = -\frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta}\left(r^{m_1}-r^{m_2}\right)r^{\beta-1}}{\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1}-\left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right]}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta}\left(\chi_1-\chi_2\right)}{\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1}-\left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right]\left(\left(m_1(\nu-1)-\nu\right)\left(m_2(\nu-1)-\nu\right)\right)}$$

$$\chi_1 = r^{m_1}\left[\left\{m_2(\nu-1)-\nu\right\}\left(1+\nu\left(m_1-1\right)\right)\right]$$

$$\chi_2 = r^{m_2}\left[\left\{m_1(\nu-1)-\nu\right\}\left(1+\nu\left(m_2-1\right)\right)\right]$$

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_r^H} = \frac{r^{1+\beta}\left(r^{m_1}-r^{m_2}\right)\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2-1\right]}{\left(r^2-1\right)\left(\frac{a}{R}\right)^{1+\beta}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1}-\left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right]}$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_r^H} = \frac{r^2\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2-1\right]\left(\chi_1-\chi_2\right)}{\left(2r^3+1\right)\left(\frac{a}{R}\right)^{2+\beta}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1}-\left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right]\left(\left(m_1(\nu-1)-\nu\right)\left(m_2(\nu-1)-\nu\right)\right)}$$

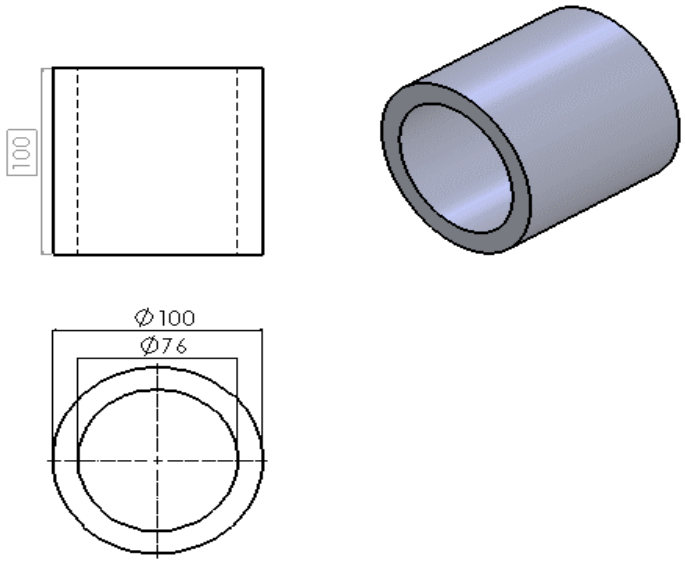


Figura 17 Detalle de cilindro a presión interna. Fuente: Autor

4.1.1. Soluciones cerradas para tensión radial

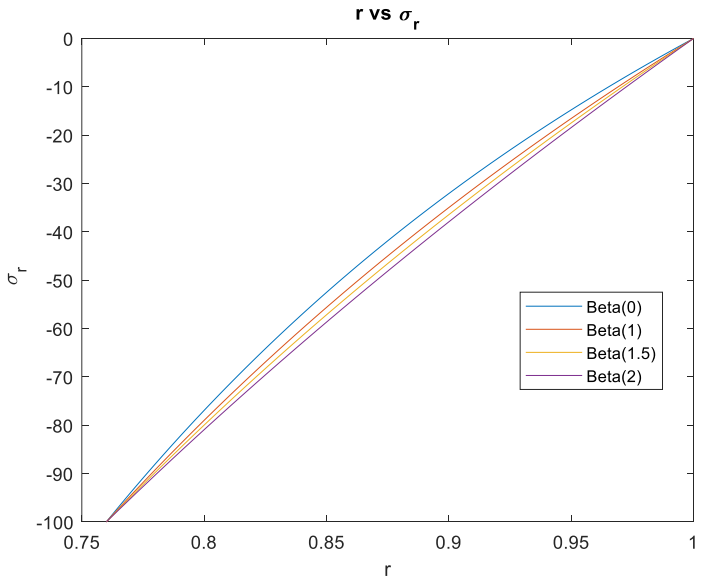


Figura 18 Variación de la tensión radial. Fuente: Autor

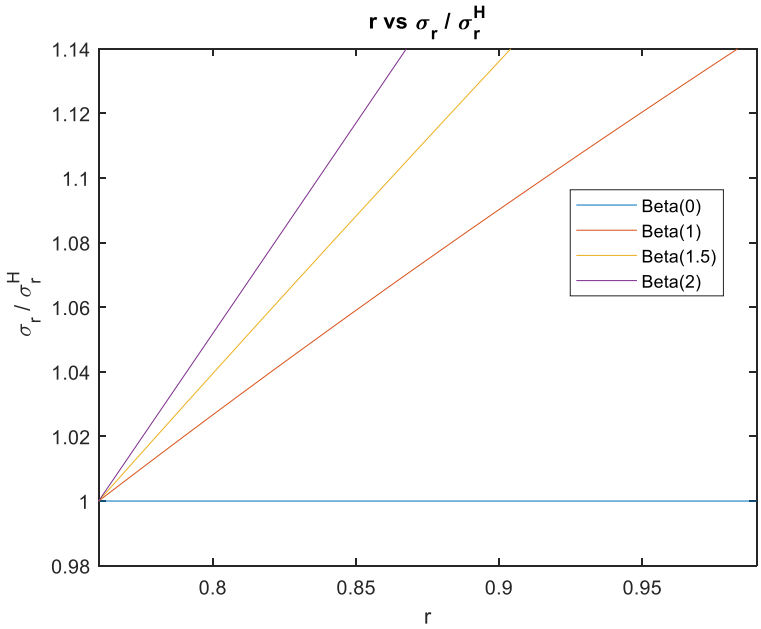


Figura 19 Curva normalizada. Fuente: Autor

4.1.2. Soluciones cerradas para tensión circunferencial

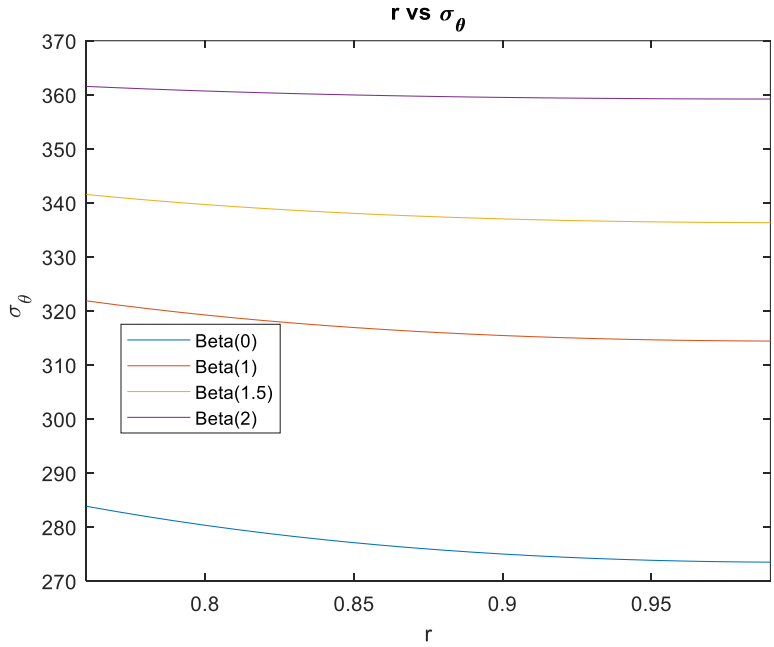


Figura 20 Variación de la tensión circunferencial. Fuente: Autor

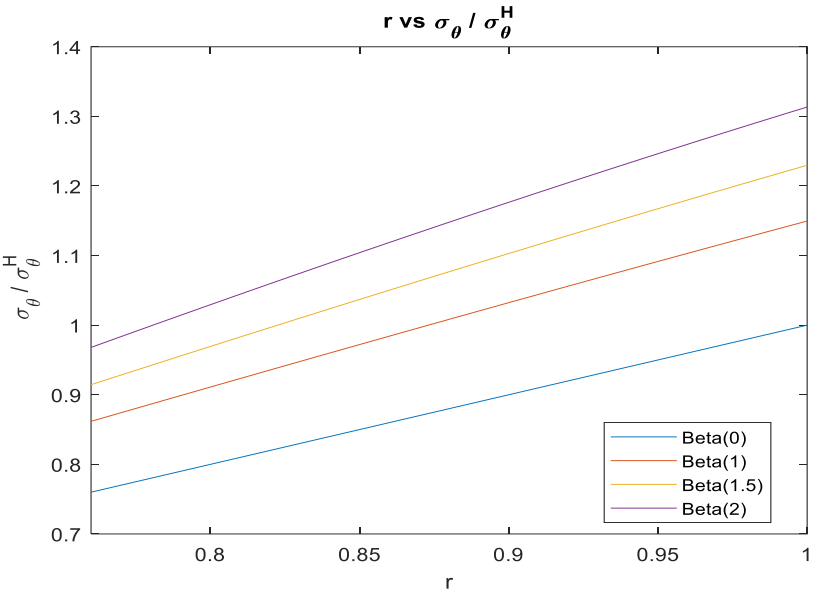


Figura 21 Curva normalizada. Fuente: Autor

4.1.3. Análisis de resultados

Como se puede ver en la figura 18, respecto a la variación de la tensión radial a través del espesor del culmo se puede afirmar que esta crece a medida que la constante de β toma valores positivos, siendo estas tensiones mayores que las del caso homogéneo. Adicionalmente, se observa en esta misma figura, que la tensión radial actúa a compresión, disminuyendo su valor a desde el radio interno hacia el externo, con lo anterior se puede afirmar que el campo de tensiones no es uniforme. Por otro lado, en la figura 19 se puede ver la curva normalizada donde se ilustran los efectos de la falta de homogeneidad; es importante destacar que valores de β>0 representan aumento en la rigidez, lo cual se evidencia en dicha grafica al comparar el valor β= 0 que representa el caso homogéneo. Una interpretación es que se la rigidez aumenta en mayor medida en la dirección radial que circunferencial desde la parte interna del espesor debido al aumento en participación que tienen las fibras en esta dirección. También se observa en la figura 20 que la tensión circunferencial o tangencial, disminuye en menor medida actuando a tracción,

además, la máxima tensión en un punto puede ser de tipo circunferencial, y no radial, de tal forma que la falla se podría presentar debido a esta tensión. De la figura 21, se puede inferir que el aumento en la rigidez a través del espesor, en la dirección circunferencial, es menor que en la dirección radial. Finalmente, en las proximidades del radio interno las tensiones radiales son muy similares a las del caso homogéneo.

5. SIMULACIÓN DE ESFUERZOS EN DIFERENTES APLICACIONES DE CARGA

Los modelos aquí creados, se asumen como material compuesto, con propiedades elásticas y de resistencia diferentes para la zona interna, media y externa del culmo de la guadua. Así mismo, el material es considerado ortotrópico elástico lineal, transversalmente isotrópico. En todos los modelos, se asignó propiedades del material para la zona interna, media y externa, los cuales fueron ensamblados para generar un sólido rígido con propiedades graduadas funcionalmente, así mismo, el criterio de falla utilizado es de Von Mises, se asume geometría cilíndrica para las simulaciones, tomando como referencia los estudios y resultados obtenidos por Silva 2006; Akinlabi 2017 [3], [10] y también las mediciones realizadas por Amada et al.,1996 [83], donde se toman muestras a las cuales se le mide la distancia entre nodos, los diámetros externos e internos, obteniéndose geometrías cilíndricas; por otro lado, D. Mitch 2009 [81] a partir de mediciones del diámetro exterior en muestras de bambú guadua de diferentes especies, se estableció que para longitudes de especimen iguales o menores a 1,9 metros, este diámetro es constante. Finalmente, se descarta el contenido de humedad como variable teniendo en cuenta que el análisis se centra en la observación y descripción del comportamiento y respuesta del material a las diferentes cargas aplicadas.

5.1. CARGA DE TRACCIÓN PARALELA A LA FIBRA

Para realizar este análisis, inicialmente se dibujaron tres probetas siguiendo las recomendaciones de la norma ASTM 143D para prueba a tracción paralélela a la fibra, a cada una se le asigno propiedades del material correspondiente a la parte interna, media y externa del culmo de la guadua. Posteriormente fueron ensambladas mediante la función ensamble del software, esto con el propósito de analizar y comparar la respuesta del material bajo dicha carga, con los datos experimentales, seguidamente se asignó las restricciones, con una fuerza de tracción de 5200 N aplicada paralela la fibra, en uno de sus extremos; dicho dato fue tomado de la prueba de tracción experimental realizada por Takeuchi 2014 [18]. En la tabla 1 aparece la información relacionada con las constantes elásticas y de resistencia de las diferentes partes del culmo.

Tabla 2 *Constantes elásticas y resistentes de la parte interna, media y externa del culmo de la guadua.* Fuente [3], [77]

Propiedad	Parte exterior N/mm^2	Parte media N/mm^2	Parte interna N/mm^2	Capa nodal N/mm^2
Densidad	$710 \cdot 10^{-9}$	$710 \cdot 10^{-9}$	$710 \cdot 10^{-9}$	$710 \cdot 10^{-9}$
Elasticidad ortotrópica				
Módulo de Young X	$1{,}7 \cdot 10^{4}$	$1{,}6 \cdot 10^{4}$	$1{,}2 \cdot 10^{4}$	$1{,}7 \cdot 10^{4}$
Módulo de Young Y	$6{,}2 \cdot 10^{2}$	$4{,}7 \cdot 10^{2}$	$3{,}4 \cdot 10^{2}$	$1{,}7 \cdot 10^{4}$
Módulo de Young Z	$6{,}2 \cdot 10^{2}$	$4{,}7 \cdot 10^{2}$	$3{,}4 \cdot 10^{2}$	$1{,}7 \cdot 10^{4}$
Coeficiente de Poisson XY	0,3	0,3	0,3	0,3
Coeficiente de Poisson YZ	0,3	0,3	0,3	0,3
Coeficiente de Poisson XZ	0,3	0,3	0,3	0,3
Módulo de corte XY	$3 \cdot 10^{2}$	$2{,}3 \cdot 10^{2}$	$1{,}7 \cdot 10^{2}$	$2{,}3 \cdot 10^{2}$
Módulo de corte YZ	$8{,}5 \cdot 10^{3}$	$8 \cdot 10^{3}$	$6 \cdot 10^{3}$	$8 \cdot 10^{3}$
Módulo de corte XZ	$3{,}1 \cdot 10^{2}$	$2{,}3 \cdot 10^{2}$	$1{,}7 \cdot 10^{2}$	$2{,}3 \cdot 10^{2}$
Resistencia máxima a tracción	$2{,}2 \cdot 10^{2}$	$2 \cdot 10^{2}$	$1{,}6 \cdot 10^{2}$	$1{,}06 \cdot 10^{2}$
Resistencia máxima a compresión	$9{,}2 \cdot 10^{1}$	$8 \cdot 10^{1}$	$6{,}4 \cdot 10^{1}$	$8 \cdot 10^{1}$

Figura 22 Probeta como material compuesto. Fuente: Autor

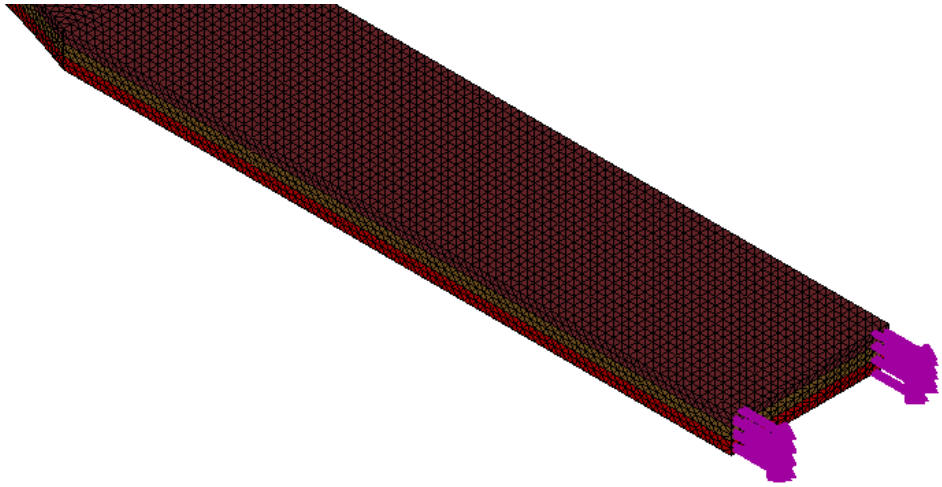


Figura 23 Detalle del mallado sólido estándar, 236434 nodos, 158017 elementos. Fuente: Autor

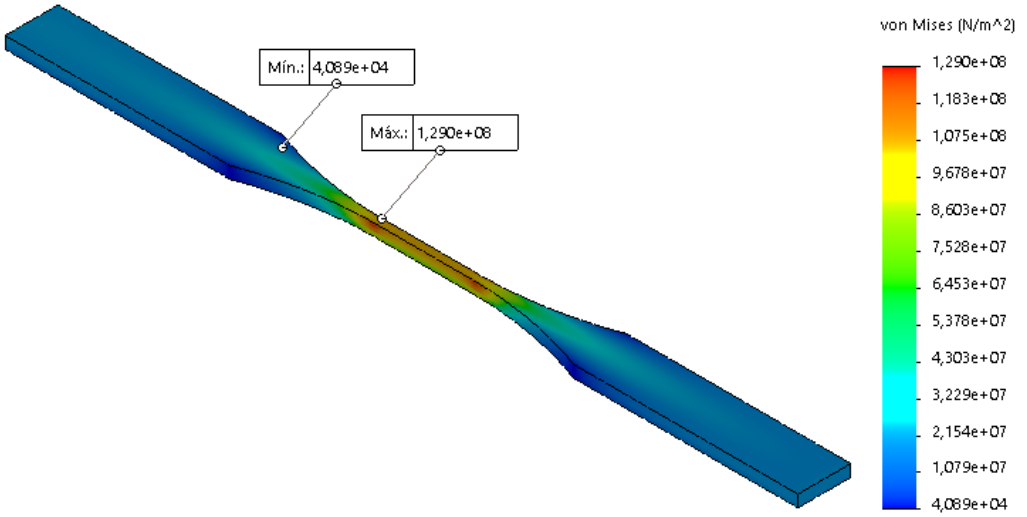


Figura 24 Tensión de Von Mises. Fuente: Autor

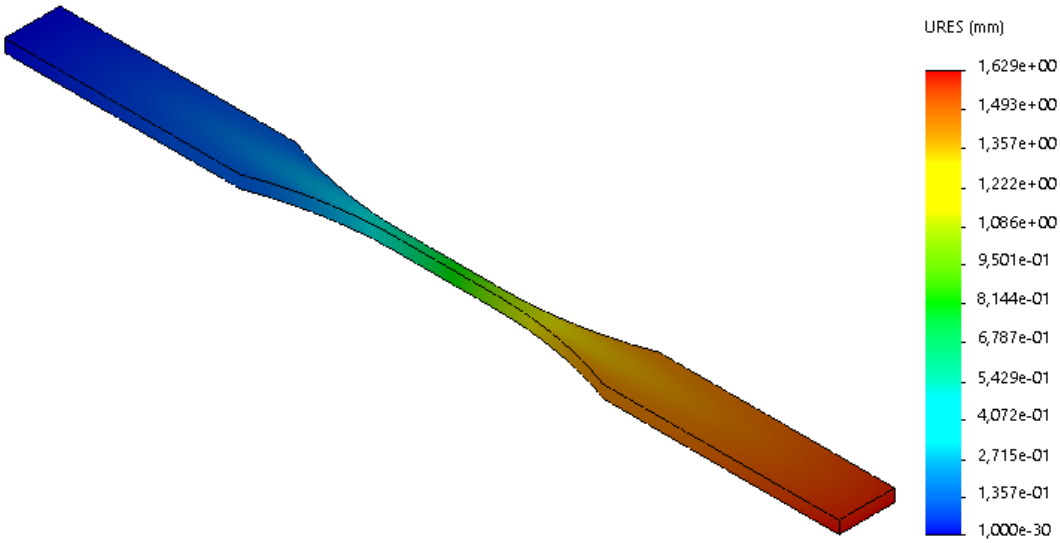


Figura 25 Desplazamiento global. Fuente: Autor

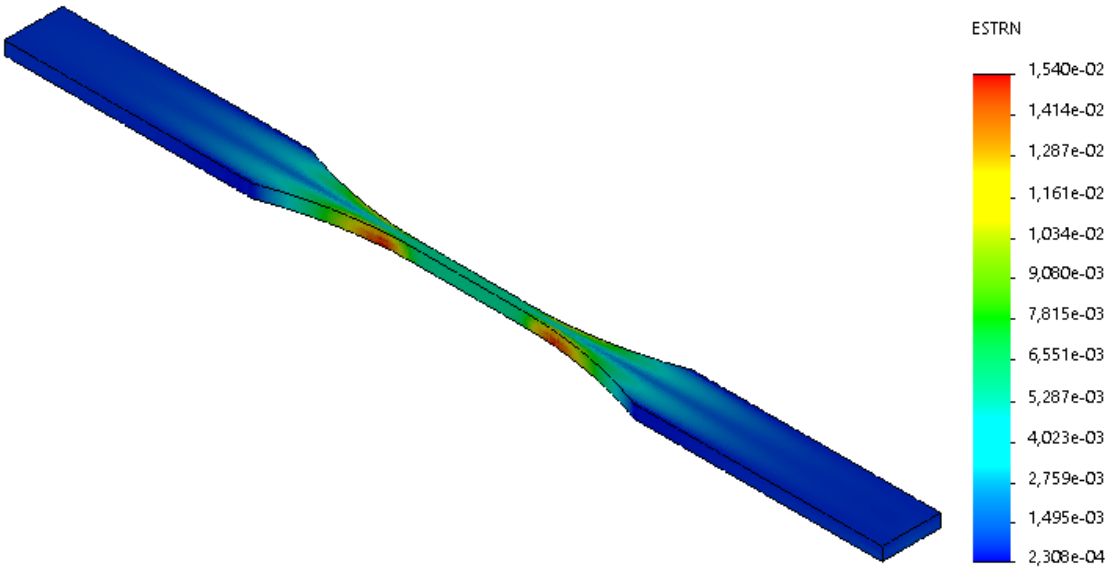


Figura 26 Deformaciones unitarias. Fuente: Autor

5.2.1. Análisis de resultados

De los resultados presentados en las figuras 24 y 26 se puede afirmar que la zona donde se registran mayores tensiones corresponde a la zona de transición entre la sección más amplia y la sección reducida del especimen; es de esperar que la falla se genere en esta zona desde las fibras internas hacia las externas, debido a su menor rigidez y densidad de fibras, además del hecho de que la figura 26 ilustra que las mayores deformaciones se presentan en la parte interna del especimen. La simulación tensión de tracción paralela a la fibra de la guadua, mediante el método de elementos finitos (FEA) proporcionó como respuesta del material compuesto una tensión máxima de 129 MPa; la cual se encuentra dentro del rango de los resultados experimentales reportados; por ejemplo, en la referencia [2] reportan valores de 40,7 MPa, en [1] reportan un promedio de 56,58 MPa, en la referencia [84] reportan valores que varían (101,9 – 193,8) MPa para las diferentes zonas de la guadua, en la referencia [20] reportan valores que varían (37,1 – 41,4) MPa para la diferentes

partes de la guadua, en la referencia [85] reportan 41 MPa, en la referencia [14] reportan 132 MPa, es importante tener en cuenta que la variabilidad en los resultados está ligada directamente a la variación de la geometría en sus dimensiones y formas, debido a que para materiales anisotrópicos u ortotrópicos las propiedades mecánicas dependen de los parámetros mencionados.

5.3. SIMULACIÓN DE CARGA A COMPRESIÓN PERPENDICULAR A LA FIBRA

Para este análisis, se aplicó un protocolo consistente en la creación de tres cilindros concéntricos, el cilindro externo con un diámetro exterior de 100 mm y 4 mm de espesor, el cilindro medio con un diámetro de 92 mm y 4 mm de espesor, finalmente el cilindro interno con un diámetro de 76 mm y 4 mm de espesor, estos fueron ensamblados para generar un sólido rígido, a cada cilindro desde el interno hasta el externo, se le asignaron propiedades de material correspondientes a las zonas interna, media y externa del culmo de la guadua con el propósito de simular un material compuesto graduado funcionalmente, seguidamente mediante el software se asignó el valor de la carga la cual fue de 785 N tomada como valor de referencia del experimento realizado por Ardila 2013 [1], así mismo, realizó la discretización mediante el mallado con 425997 nodos y 294411 elementos.

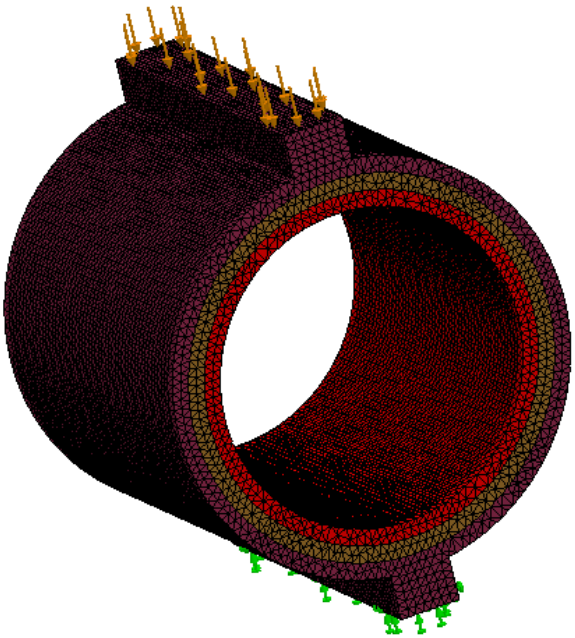


Figura 27 Discretización mediante mallado de 425997 nodos y 294411 elementos. Fuente: Autor

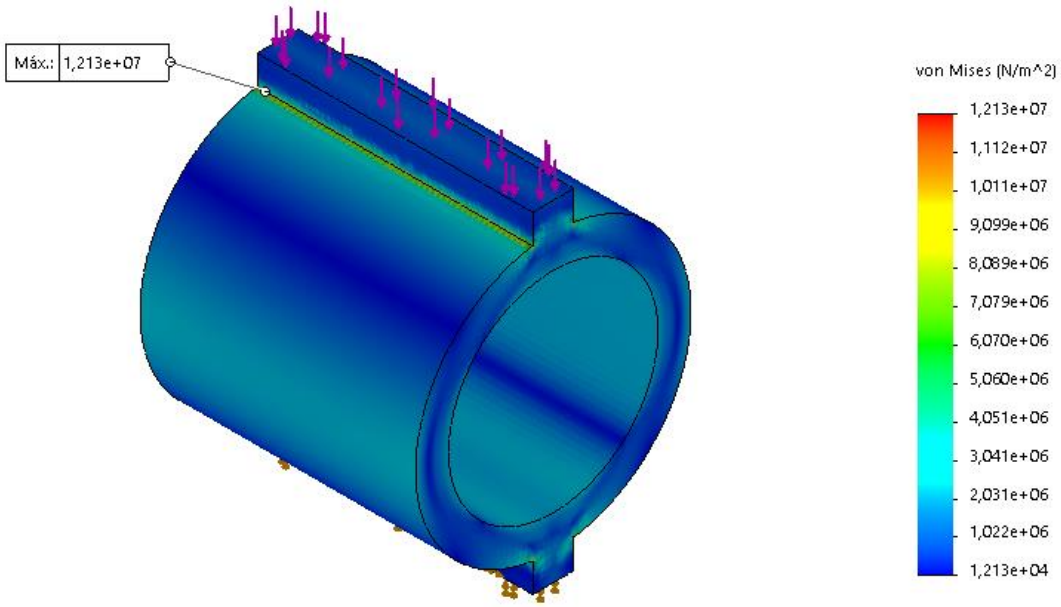


Figura 28 Tensión de Von Mises. Fuente: Autor

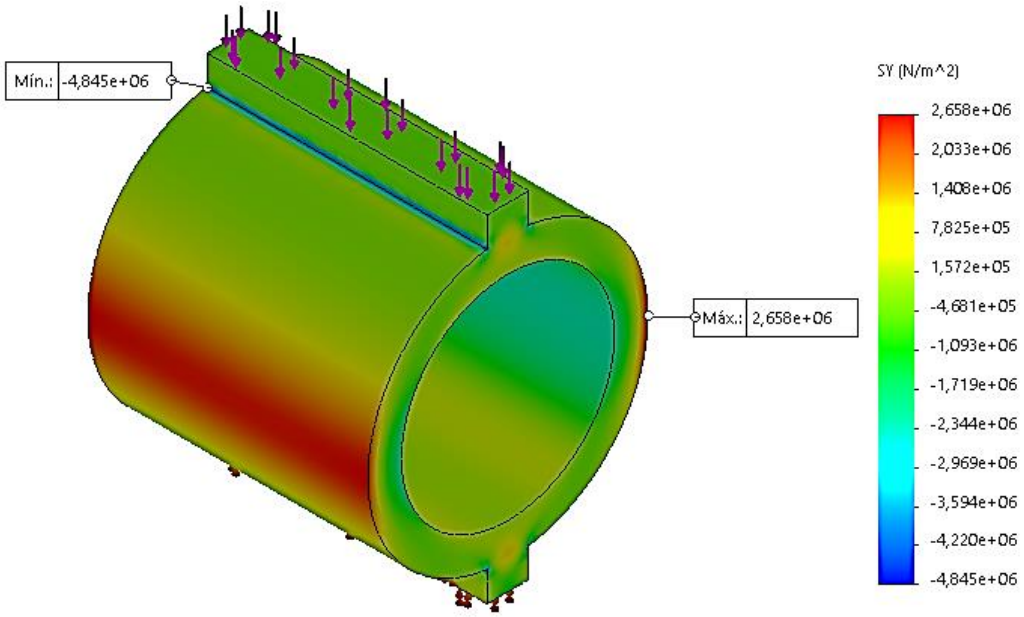


Figura 29 Tensión normal en la dirección de aplicación de la carga. Fuente: Autor

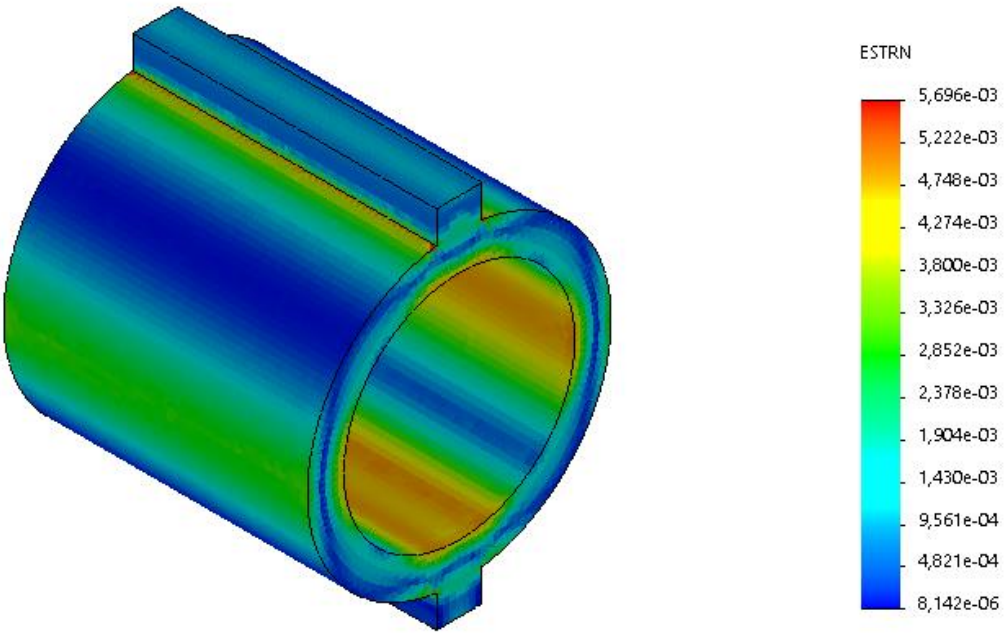


Figura 30 Deformaciones globales. Fuente: Autor

5.3.1. Análisis de resultados

De las figuras 28, 29 y 30 se puede inferir que el material se encuentra sometido a tensión de tracción en las fibras exteriores en la parte superficial del centro del especimen (región en rojo fig 29), con lo que se puede inferir que desde esta región se puede presentar la falla del material, desde las fibras externas hacia las internas. Por otro lado, las fibras internas en esta misma zona se comprimen, sin embargo, están soportando tensiones menores; por otro lado, existe una atipicidad en la ubicación de la tensión máxima, la cual es debida a concentración de esfuerzos por la geometría en la adaptación del especimen para el modelamiento. Dicha dificultad no se pudo superar. Con todo lo anterior, se puede ver que la tensión máxima en la dirección de aplicación de la carga es de 2,65 MPa, así mismo la tensión máxima compresión en la parte interna es de 4,84 MPa, el valor correspondiente a la tensión de Von Mises es de 12, 13 MPa, ubicándose en una región de concentración de esfuerzos, debido al cambio notable en la geometría. Es de resaltar la capacidad que posee el material para distribuir los esfuerzos como se observa en la franja roja de la figura 29, donde se puede ver que dichas tensiones no se concentran en un punto o sobre una pequeña región, por el contrario, están presentes en una región más amplia del especimen. Finalmente, los resultados presentan un buen acuerdo en relación con los obtenidos experimentalmente, teniendo en cuenta que en la referencia [1] reportan 2,32 MPa, en [14] reportan 6,8 MPa para el esfuerzo máximo tangencial y 5 MPa para el esfuerzo máximo radial, en la referencia [20] reportan 1,7 MPa.

5.4. SIMULACIÓN DE CARGA A COMPRESIÓN PARALELA A LA FIBRA

Para la realización de este análisis, se aplicó el mismo protocolo de modelo que en la sección anterior, con una fuerza de compresión paralela al eje de las fibras (eje x) de 180000 N, valor tomado del experimento real aplicado por Ardila 2013 [1]

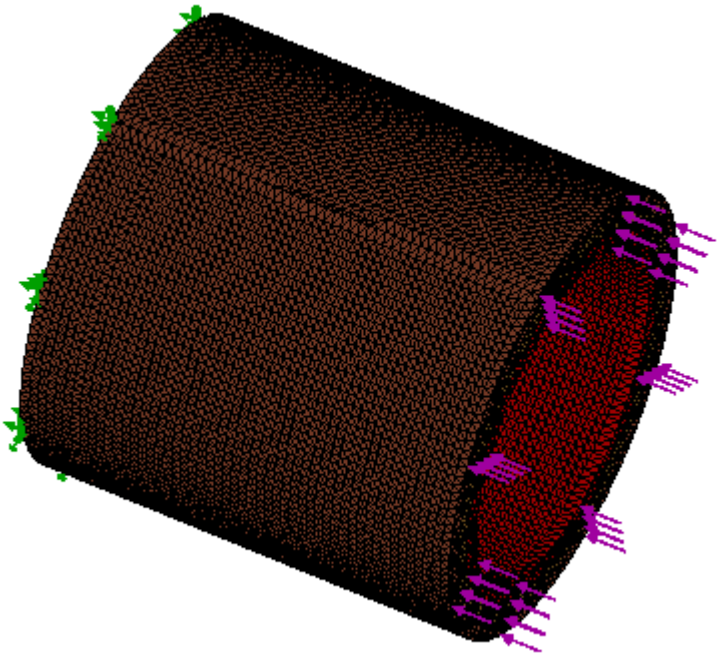


Figura 31 Malla solida estándar con 380652 nodos, 261899 elementos. Fuente: Autor

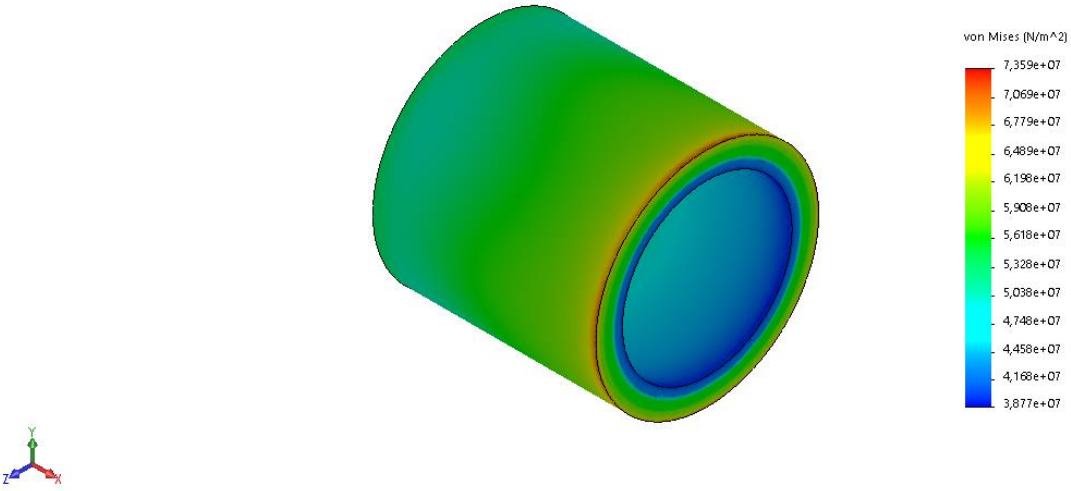


Figura 32 Tensión de Von Mises. Fuente: Autor

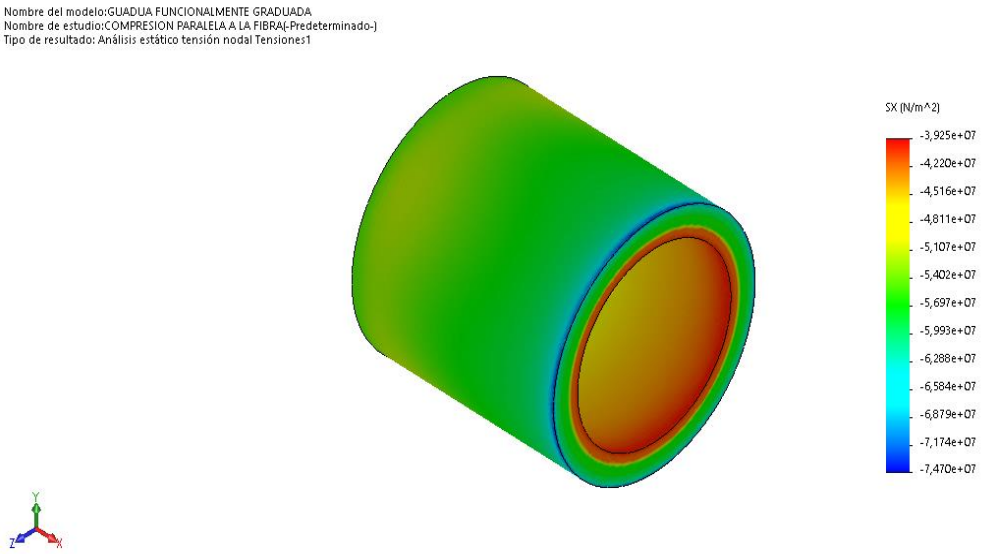


Figura 33 Tensión de compresión en dirección x (paralelo a la fibra). Fuente: Autor

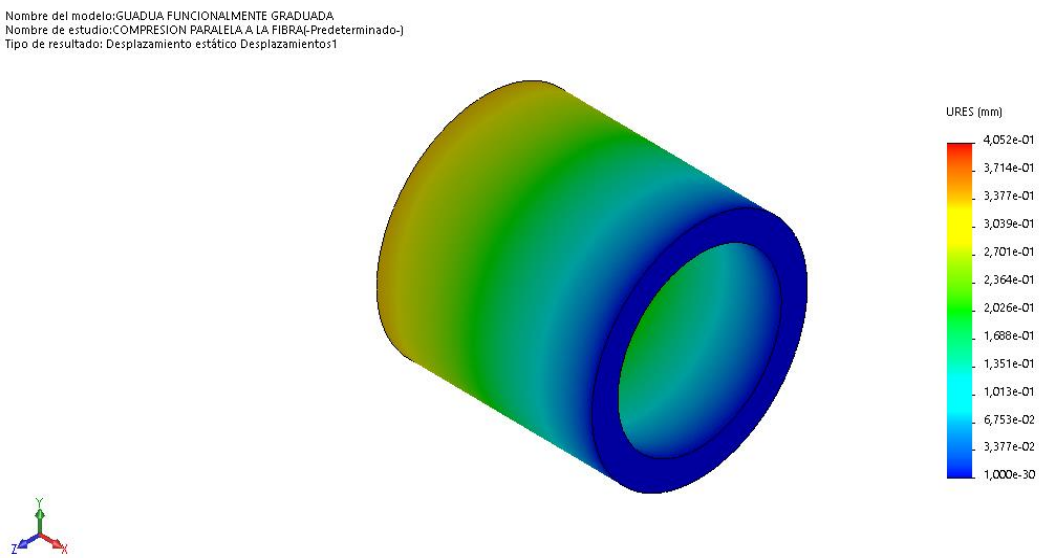


Figura 34 Desplazamientos globales. Fuente: Autor

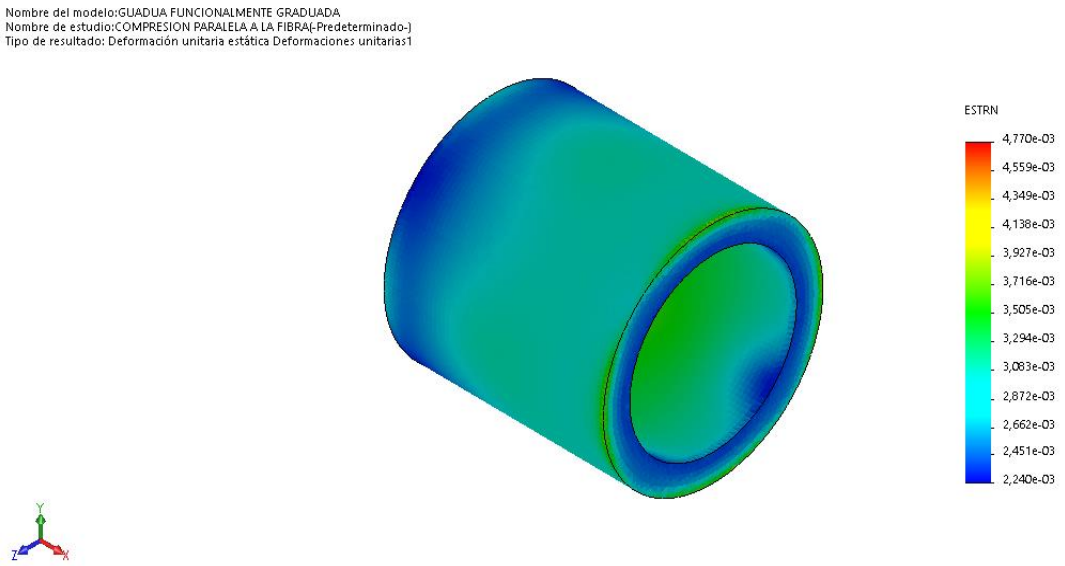


Figura 35 Deformaciones unitarias globales. Fuente: Autor

5.4.1. Análisis de resultados

De la figura 33 se puede inferir, que en las fibras externas es donde se localizan las mayores tensiones, con lo cual, la falla ocurriría desde las fibras externas hacia las internas en el espécimen. Este comportamiento es coherente con los resultados experimentales, teniendo en cuenta que la parte externa del culmo tiene mayor dureza, y menos porosidad lo que limita su capacidad para deformarse en comparación con la parte interna donde presenta mayor contenido de parénquima y baja densidad de fibras. También se puede ver la forma como cambian las tensiones, desde la sección donde se aplica la carga, hasta la sección opuesta, lo que implica una buena distribución en los esfuerzos y la capacidad de absorción de energía del material. Consecuentemente, en esta misma zona se presentan las mayores deformaciones, como se puede ver en la figura 35. El valor para la tensión de Von Mises es de 73, 59 MPa, los resultados son comparables con los 79 MPa reportados experimentalmente por [86], en la referencia [87] reportan valores entre (54,34 – 57,79) MPa, en la referencia [88] reportan 115,08 MPa, en [2] reportan 20,3

MPa, en la referencia [1] reportan un valor promedio de 24, 51 MPa, en la referencia [20] reportan 20, 3 MPa finalmente, en la referencia [81] reportan un valor promedio de 56,7 MPa.

5.5. SIMULACIÓN DE CARGA DE TRACCIÓN PERPENDICULAR A LA FIBRA

Para realización de este análisis, se planteó un protocolo consistente con la prueba experimental, mediante la realización de un orificio central con un diámetro de 38 mm, con una ranura de 2 mm de ancho extendida 3,18 mm del orificio, esto con el propósito de disminuir los factores de concentración de esfuerzos y generar la tendencia de la falla del material. En la figura 36 se puede ver el mallado, así como las condiciones de contorno. Se aplicó una fuerza normal a las caras circulares con un valor de 1884 N distribuidos en los dos orificios; dicho valor fue tomado de la investigación experimental de la misma prueba realizada por Pacheco 2006 [6]

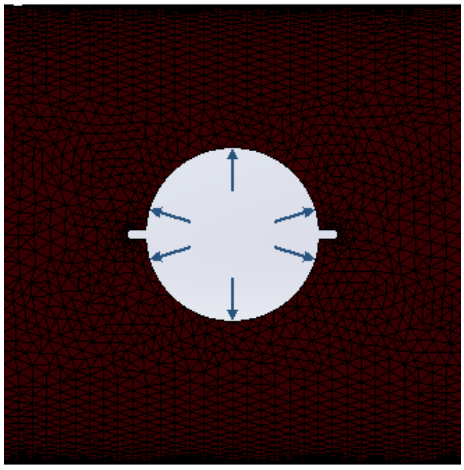


Figura 36 Mallado y distribución de fuerzas en los orificios. Fuente: Autor

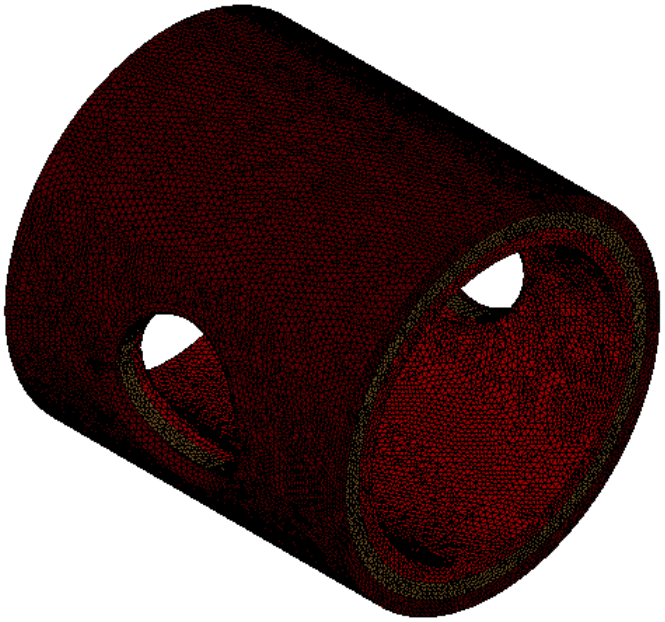


Figura 37 Detalle del mallado 1055621 nodos, 745105 elementos. Fuente: Autor

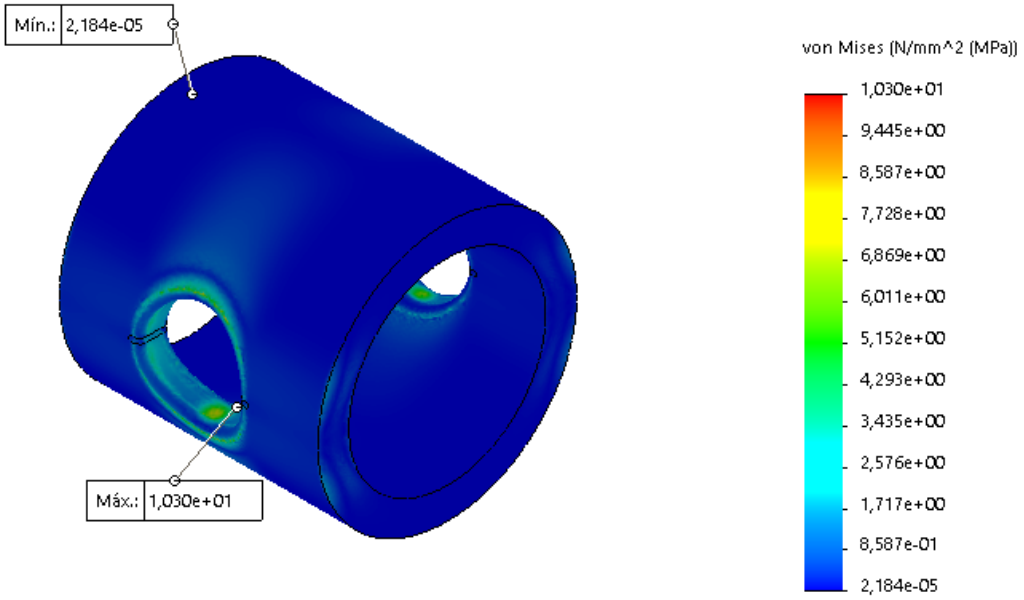


Figura 38 Tensión de Von Mises mediante FEA. Fuente: Autor

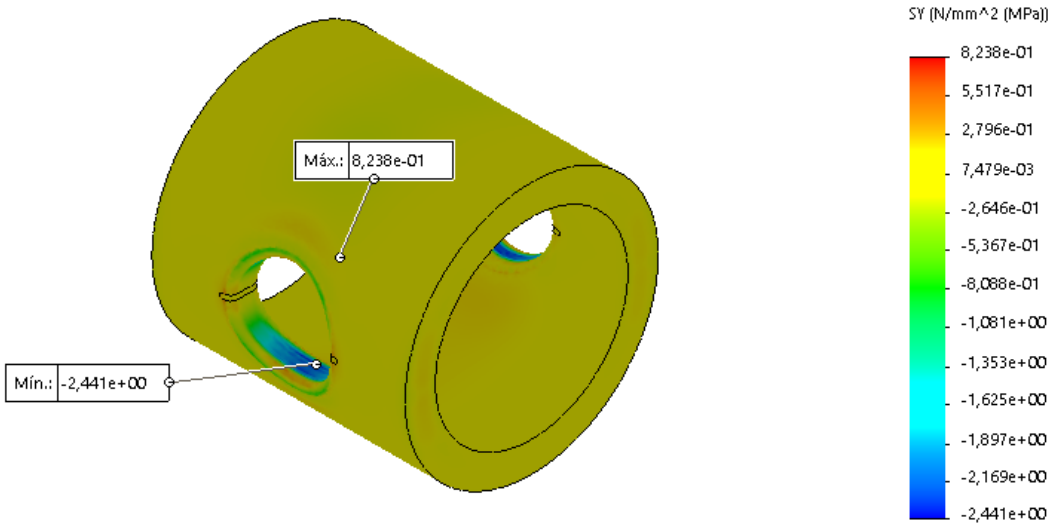


Figura 39 Tensión en la dirección de aplicación de la carga. Fuente: Autor

5.5.1. Análisis de resultados

En las figuras 38 y 39 se muestra una distribución no uniforme de las tensiones en la sección circular donde fue aplicada la carga, lo anterior obedece al ablandamiento gradual por compresión que sufren las fibras desde la parte externa hasta la parte interna de la sección del culmo donde hay mayor flexibilidad. De otro lado, la tensión de Von Mises fue de 10,3 MPa, un valor relativamente elevado en comparación con los resultados experimentales, esta atipicidad se puede explicar desde la geometría del especimen motivo por el cual, en la simulación, el programa realiza mediante el mallado la discretización y en el estudio recorre todos los nodos y elementos, encontrando zonas críticas de concentración de esfuerzos, difíciles de eliminar geométricamente. Sin embargo, el máximo esfuerzo en la dirección de aplicación de la carga es de 2,44 MPa el cual es acorde con los reportes de resultados experimentales. En la referencia [81] reportan un valor promedio de 1,003 MPa con un factor de concentración de esfuerzos K1= 0,164, en la referencia [2] reportan 1,7

MPa de esfuerzo último, en la referencia [89] reportan 1,004 MPa de esfuerzo último, en la referencia [6] reportan valores entre (0,647 – 1,671) MPa

5.6. SIMULACIÓN DE CARGA DE CORTE PARALELO A LA FIBRA

Para el cálculo de la resistencia al corte paralelo a la fibra del bambú, existen dos métodos o protocolos experimentales estandarizados. El primero consiste en una prueba de corte de mariposa o corbatín [90], en donde la longitud del espécimen es igual al diámetro externo del culmo. La carga se aplica de tal forma que la falla se produce en 4 planos como se puede ver en la siguiente ilustración.

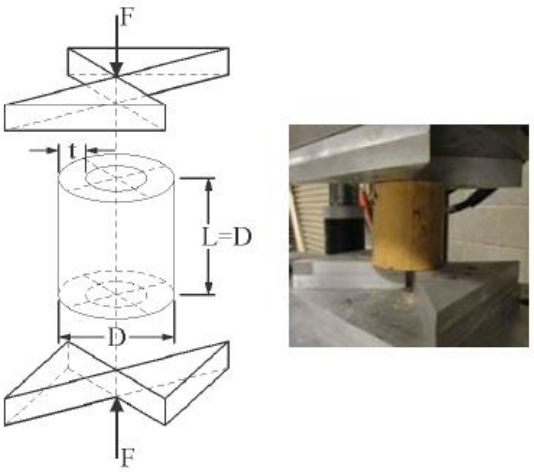


Figura 40 Prueba de mariposa para resistencia al corte paralelo a la fibra. Fuente [84]

El segundo protocolo, denominado " prueba de corte interlaminar" [84], [90], [91] donde se utiliza un espécimen extraído del culmo de la guadua en forma de "S" , al espécimen se le realiza un ranurado hasta la mitad de su profundidad en dirección perpendicular a la fibra en dos partes o ubicaciones, generándose así un plano de corte que tiene la sección A como área de influencia para calcular la resistencia al corte, como se ve en la figura 41.

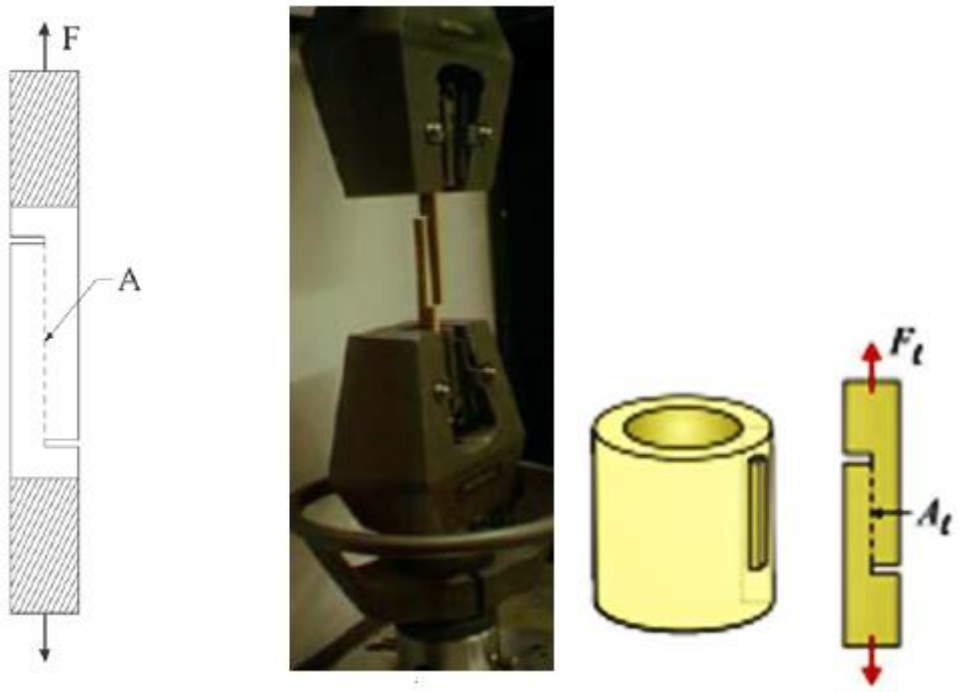


Figura 41 Ensayo de corte interlaminar para resistencia al corte paralelo a la fibra. *Fuente:* [84]

Teniendo en cuenta lo anterior, en este trabajo se realizó el modelamiento de los anteriores protocolos utilizando los siguientes modelos. Primero se realizó un corte de extrusión en la dirección longitudinal del modelo de cilindros concéntricos con propiedades elásticas y de resistencia asignadas para la parte interna, media, y externa del culmo, quedando expuestas dos caras laterales para la aplicación de la fuerza distribuida como lo muestra la figura 42. Seguidamente, se aplicó a cada cara una fuerza proporcional a la de rotura experimental. El valor de la fuerza aplicada fue de 12262 N, el cual fue tomado de Ardila 2013 [1]. Para la simulación de la resistencia al corte interlaminar se aplicó al modelo una fuerza de 1510 N tomada de los datos experimentales de rotura de M. Cruz 2002 [91]

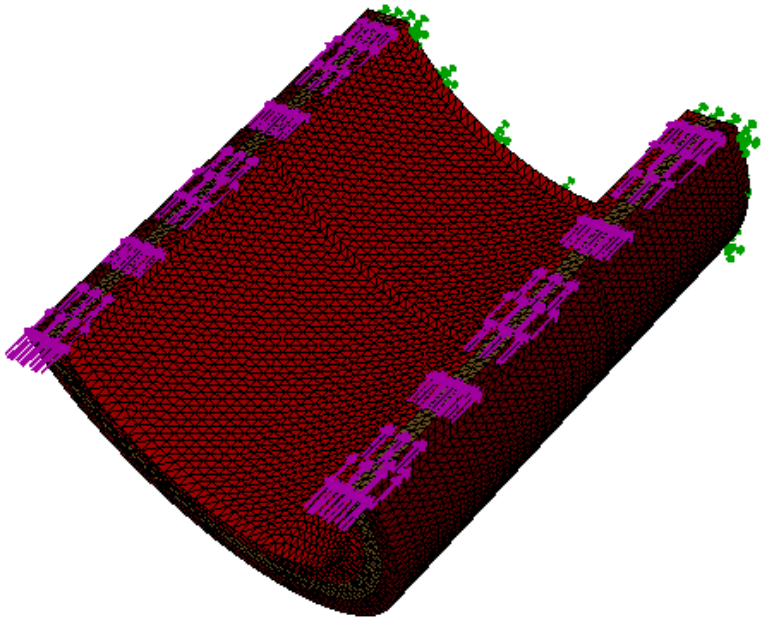


Figura 42 Condiciones de contorno para el modelo de prueba de mariposa. Fuente: Autor

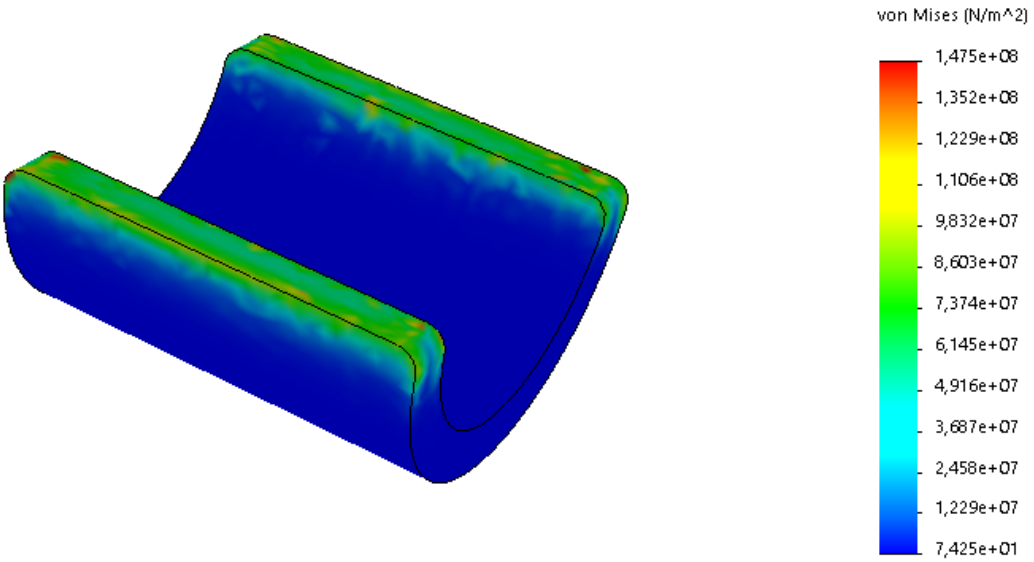


Figura 43 Tensión de Von Mises. Fuente: Autor

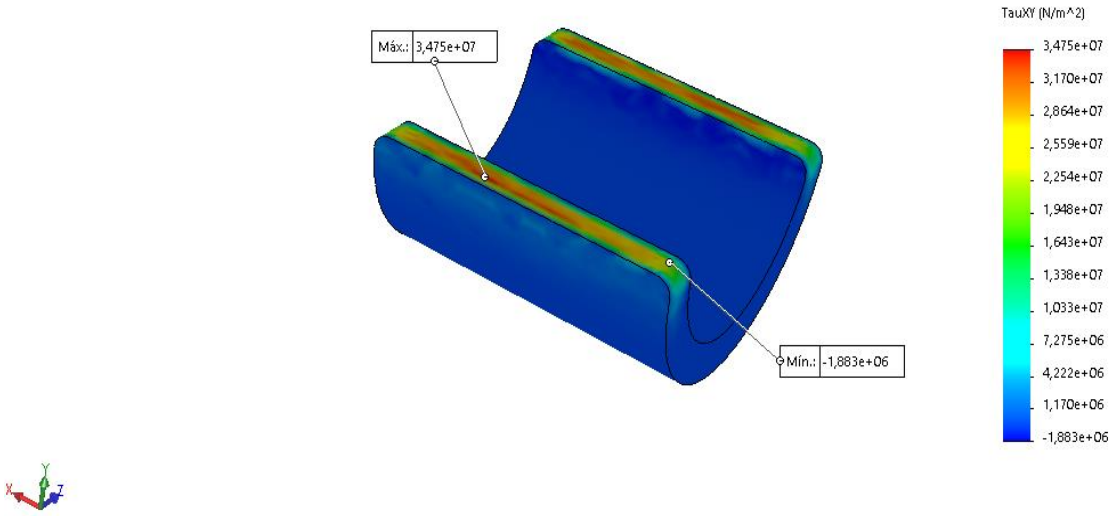


Figura 44 Tensión a cortante (xy). Fuente: Autor

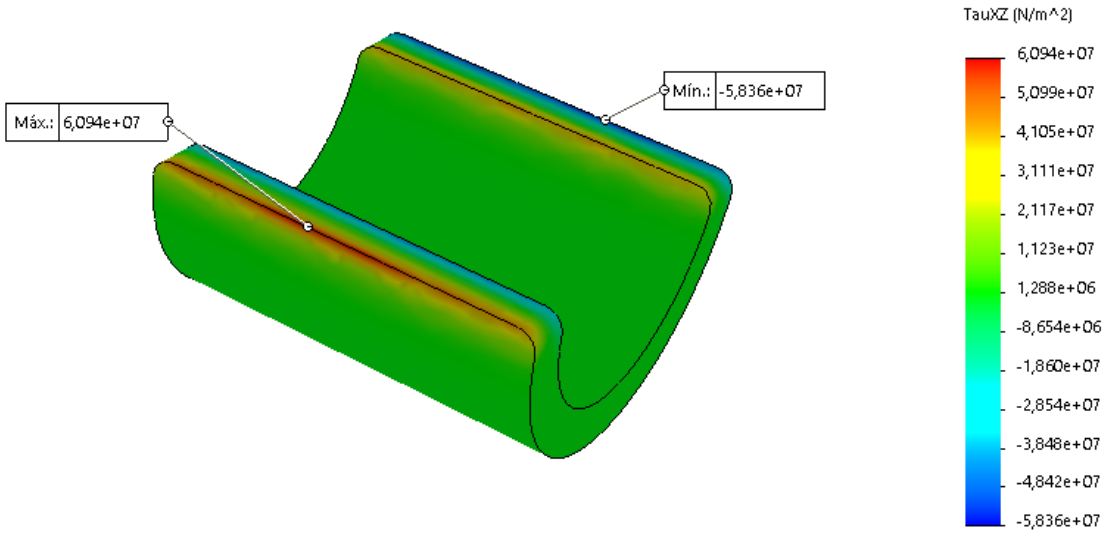


Figura 45 Tensión a cortante (xz). Fuente: Autor

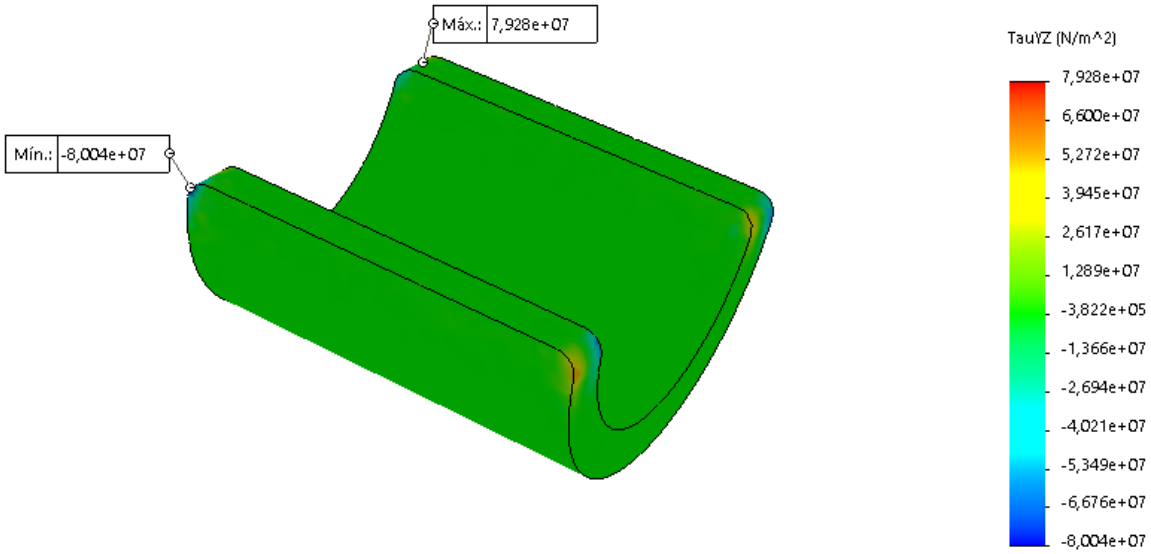


Figura 46 Tensión a cortante (yz) mariposa. Fuente: Autor

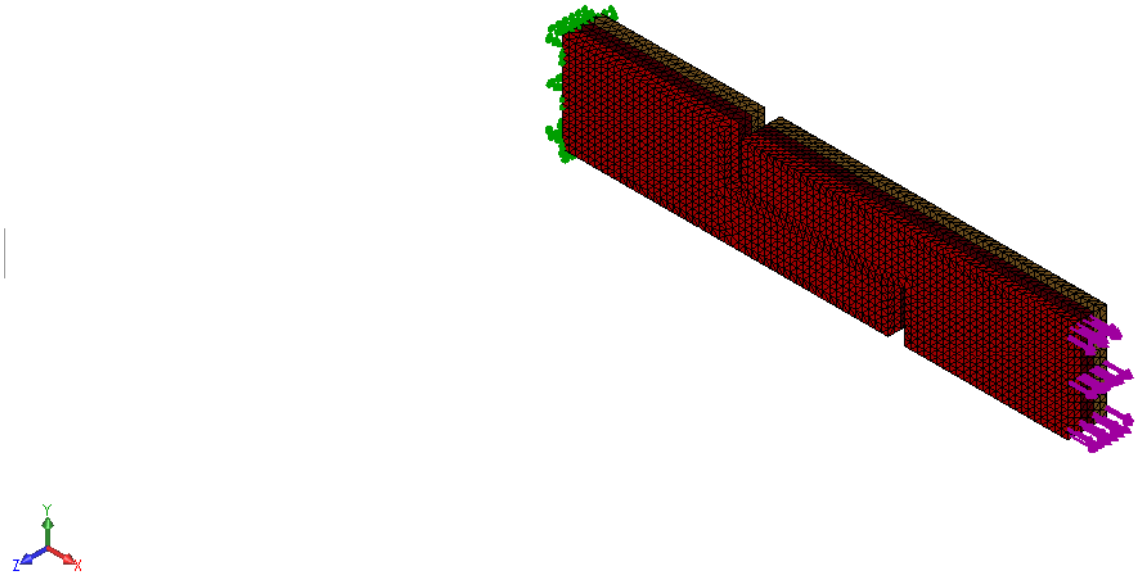


Figura 47 Condiciones de contorno para simulación de resistencia al corte interlaminar, 74554 nodos, 50581 elementos. Fuente: Autor

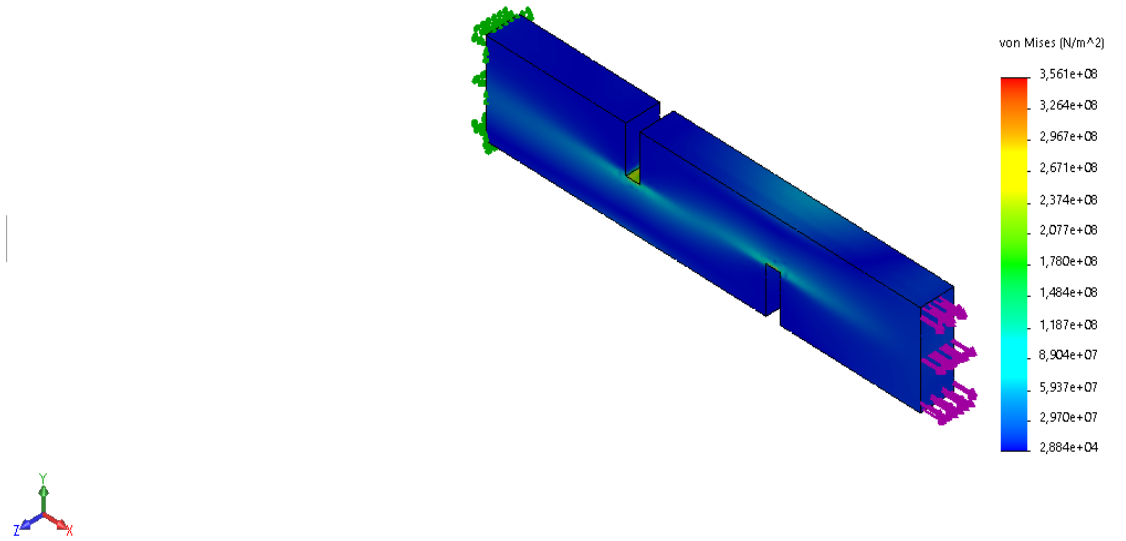


Figura 48 Tensión de Von Mises. Fuente: Autor

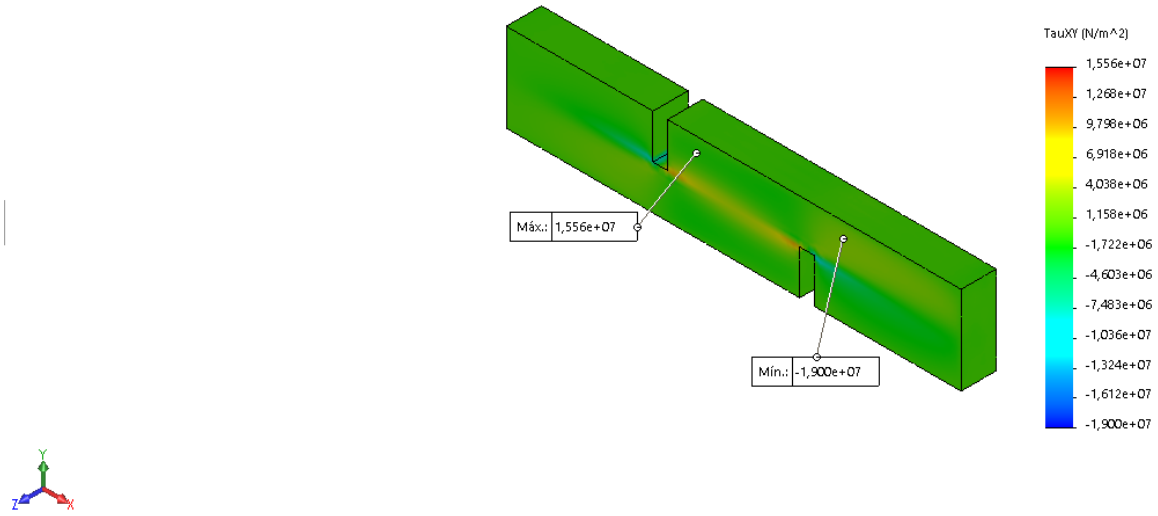


Figura 49 Tensión a cortante (xy) interlaminar. Fuente:Autor

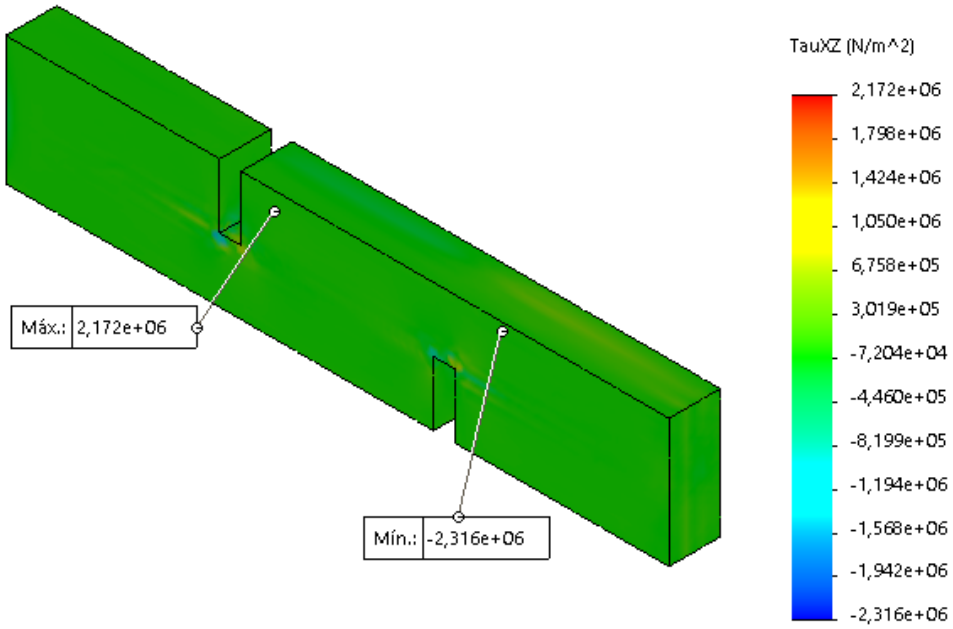


Figura 50 Tensión a cortante (xz) interlaminar. Fuente: Autor

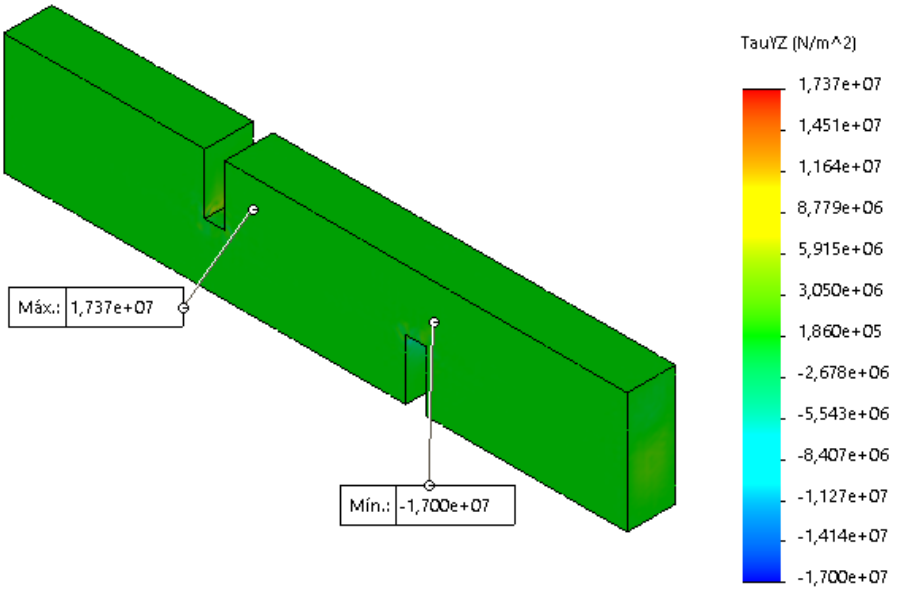


Figura 51 Tensión a cortante (yz) interlaminar. Fuente: Autor

5.6.1. Análisis de resultados

El análisis por elementos finitos arrojo una tensión de Von Mises de 147,5 MPa para la simulación de la prueba de mariposa, y de 356,1 MPa para el corte paralelo interlaminar, estos valores son considerablemente atípicos; uno de los motivos se debe a la concentración de esfuerzos generados en el modelo, y que están directamente relacionados con la geometría, como se puede ver en las figuras 43, 45 46. Sin embargo, en la figura 48 gran porcentaje del espécimen presenta uniformidad en las tensiones, con una franja azul que incluye la sección donde fue aplicada la carga. En esta franja, las tensiones máximas se encuentran en un intervalo 0,0288MPa - 29,7 MPa. Así mismo, en la zona donde puede ocurrir la falla por cortante se puede ver que las tensiones máximas, oscilan entre 59,37 MPa – 89,04MPa valores también atípicos. En otro análisis se puede afirmar que las soluciones del modelo de ecuaciones diferenciales aplicadas al especimen, estén considerando tensiones normales y cortantes en los tres planos, motivo por el cual la simulación no es a cortante puro, lo cual conlleva al incremento deliberado de la tensión máxima en algunos puntos del espécimen.

Lo anterior se puede interpretar como una falta de uniformidad en la distribución de los esfuerzos en la zona donde es aplicada la carga, motivo por el cual se generan estos concentradores de esfuerzos. Por otro lado, se puede ver que, en un gran porcentaje del espécimen, las tensiones se encuentran en concordancia con los resultados experimentales (zona azul, marrón y verde del modelo). Así, la tensión a cortante máxima en la dirección de aplicación de la carga (fig. 44 y 49) es de 34, 75 MPa para la simulación de prueba de mariposa y de 15,56 MPa para la simulación de cortante interlaminar , valores que pueden ser comparables con los datos experimentales reportados por [20] que corresponden a 3,5 MPa, en la referencia [1] reportan 4,46 MPa, en la referencia [2] reportan 3,5 MPa, en la referencia [92] reportan valores entre 4,38-13, 91 MPa.

5.7. SIMULACIÓN DE CARGA A FLEXIÓN

Para este análisis, se utilizó el modelo de probeta DIN 52186, así mismo, la probeta correspondió al culmo de la guadua con una carga de 2000 N, tomada GONZALEZ B. H et al. (2007) [93].

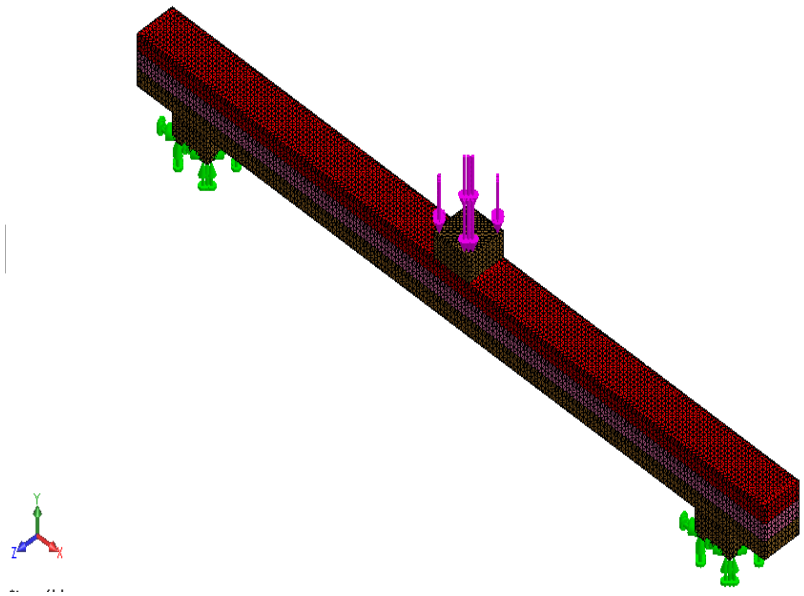


Figura 52 Condiciones de contorno 190977 nodos, 131784 elementos: Fuente: Autor

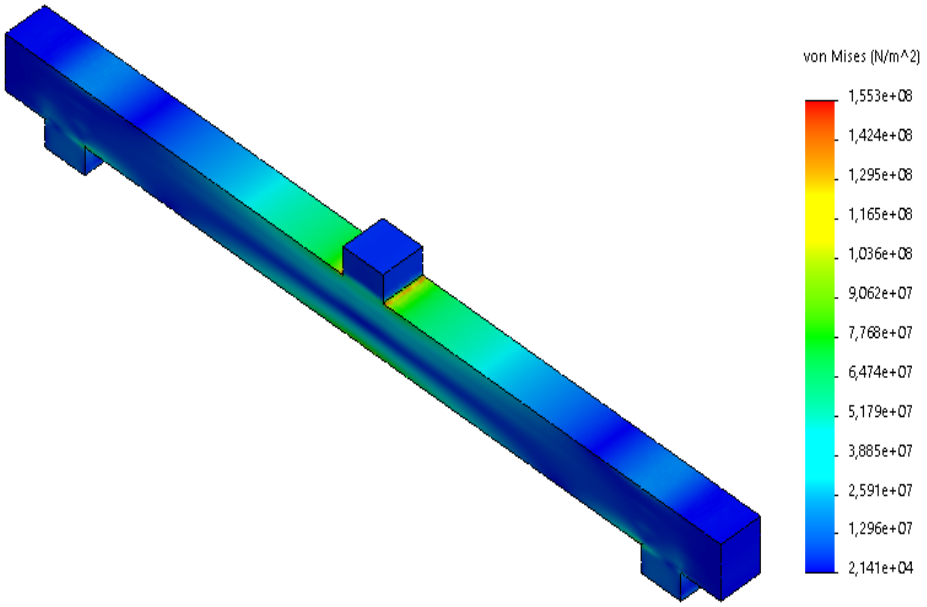


Figura 53 Tensión de Von Mises. Fuente: Autor

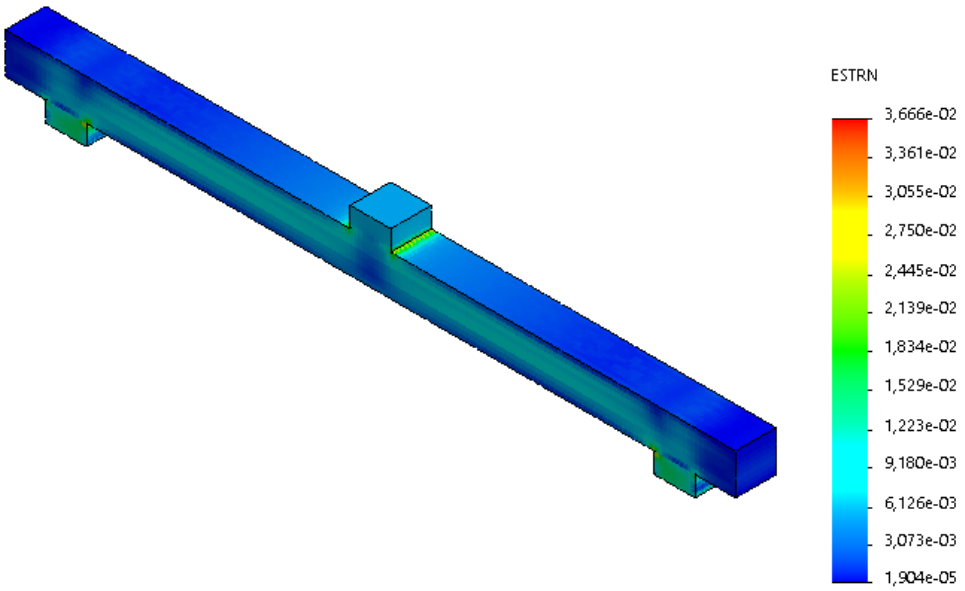


Figura 54 Deformaciones unitarias. Fuente: Autor

5.7.1. Análisis de resultados

De la figura 53 se puede inferir, que las fibras exteriores(superiores) del especimen se encuentran a tensión de compresión, mientras que las fibras internas o inferiores, se encuentran a tensión de tracción; en las primeras, existe concentración de tensiones alrededor del punto de aplicación de la carga, tal inconveniente geométrico no se pudo eliminar. Así mismo, se puede ver como las tensiones disminuyen desde el centro de la viga, hacia los extremos. Se espera que la falla del material ocurra desde la parte inferior a la superior, debido a su menor rigidez. Mediante el método de elementos finitos se obtiene la tensión de Von Mises con un valor de 155,3 MPa, el cual es comparable con los reportados experimentalmente por [93] que varían entre (96,26-132,28)MPa, en la referencia [20] reportan 37,4 MPa, en la referencia [94], reportan un valor promedio de 77,9 MPa. Este estudio es de gran importancia debido a la capacidad de absorción de energía y deformación que posee el material, lo que lo hace atractivo y funcional, especialmente para soportar carga sísmica por su facilidad para deformarse y flexionarse en el rango elástico.

5.8. SIMULACIÓN DE CARGA DE TORSIÓN

Para la simulación de la respuesta del material a sometido a un torque de 203,375 Nm tomado de Askarinejad et al., 2015 [95], se utilizó un modelo de cilindro con un diámetro exterior de 100 mm, un espesor de 12 mm y una longitud de 30 cm, teniéndose en cuenta solamente él entre nudo del espécimen, se tienen en cuenta las propiedades elásticas y de resistencia para la parte interna, media y externa del culmo, con el propósito de obtener una respuesta acorde a la ortotropía del material.

Figura 55 Detalle del mallado 1207480 nodos, 841633 elementos. Fuente: Autor

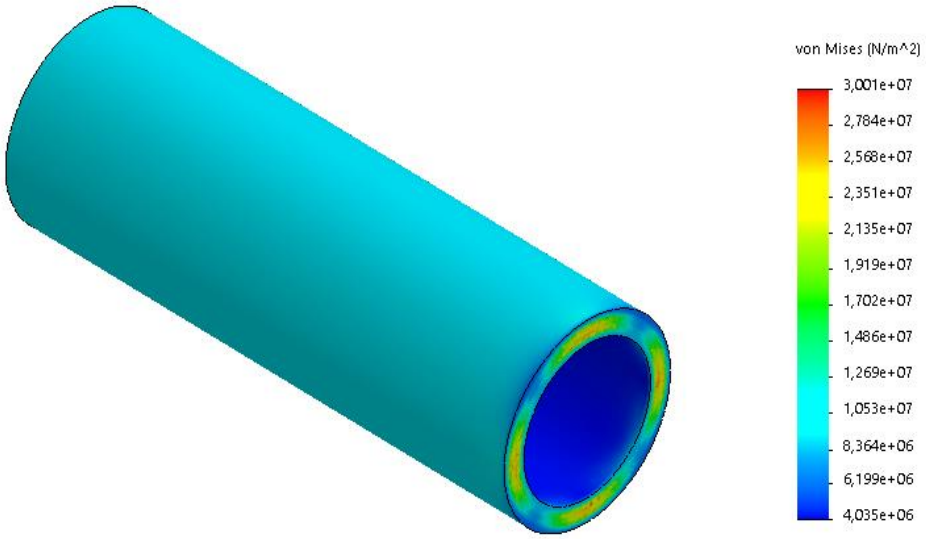


Figura 56 Tensión de Von Mises. Fuente: Autor

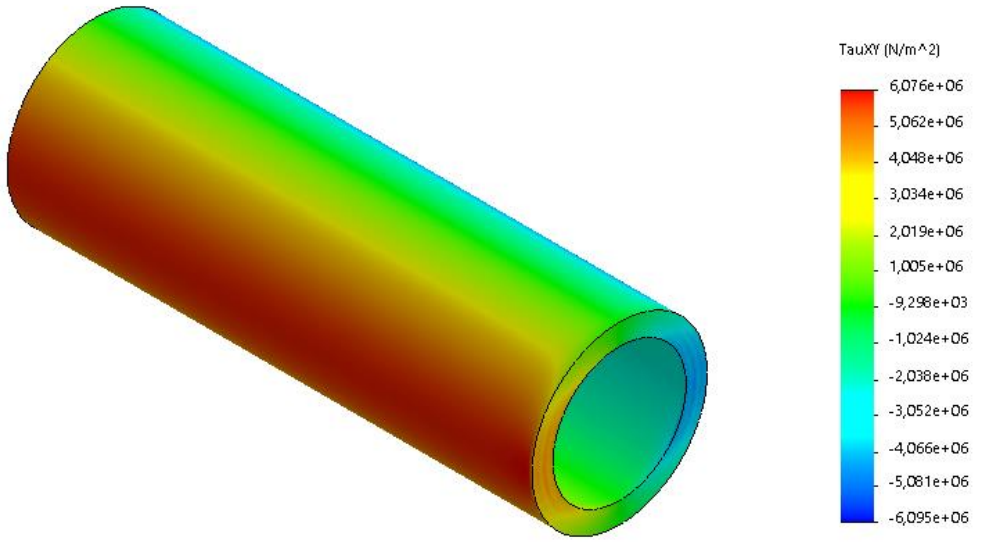


Figura 57 Tensión a cortante (xy). Fuente: Autor

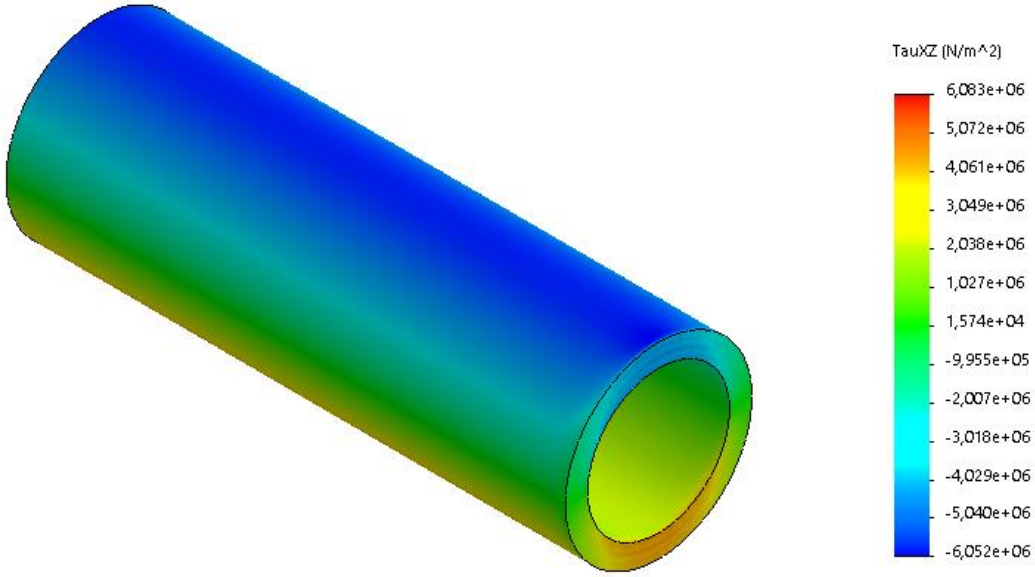


Figura 58 Tensión a cortante (xz). Fuente: Autor

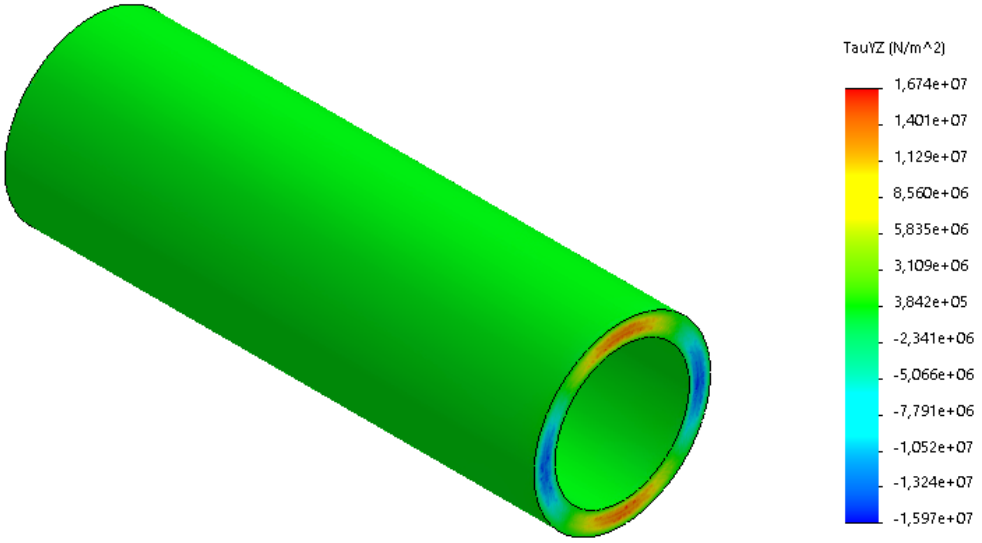


Figura 59 Tensión a cortante (yz). Fuente Autor

5.8.1. Análisis de resultados

En la figura 56 se puede ver que las mayores tensiones se encuentran hacia la parte externa del especimen sobre la sección transversal de este; dicho comportamiento es coherente teniendo en cuenta que en un especimen circular hueco, las mayores tensiones a cortante y brazos de momento ocurren cerca de los bordes exteriores. Adicionalmente, es importante mencionar que en las figuras 57 y 58 las franjas marrón y azul, representan una buena redistribución de las tensiones por parte del material. Finalmente, los resultados del análisis por elementos finitos proporcionan un valor de 30 MPa para la tensión de tensión de Von Mises, existe poca información disponible relacionada con este tipo de ensayo para el bambú guadua.

5.9. RESUMEN DE RESULTADOS

En la siguiente tabla se presenta el resumen de los resultados obtenidos para las diferentes simulaciones y las tensiones máximas obtenidas mediante el método de elementos finitos (FEA) con el software SolidWorks, en comparación con los resultados reportados experimentalmente y con la literatura.

Tabla 3 Comparación entre los resultados obtenidos mediante simulación por elementos finitos en este trabajo con los reportados experimentalmente y los hallados en la literatura. Adaptado de [3], [96]

Ensayo	Resultados reportados experimentalmente (MPa)	Resultados de la literatura (MPa)	Método de elementos finitos (FEA) MPa
Tracción paralela	37,1 – 270	100 – 315	129
Tracción perpendicular	0,647-2,44	–	10,3
Compresión paralela	20,3 – 115,08	44 - 176	73,59
Compresión perpendicular	1,7 – 6,8	–	12,13
Corte paralelo	3,5 – 13,91	3,5–7,84	147,5 – 356,1
Torsión	–	-	30
Flexión	37,4- 148	87,98–132,28	155,3

5.10. ANÁLISIS DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL CULMO Y SU RELACIÓN CON LOS ESFUERZOS

La figura 60 muestra las orientaciones principales para un material anisotrópico, y la figura 61 muestra la sección transversal del culmo del bambú guadua. En la figura

61 la sección transversal del culmo del bambú guadua, los haces vasculares o fibra tienen una distribución con tendencia uniforme en la dirección tangencial; sin embargo, en la dirección radial, los haces vasculares presentan un aumento significativo en volumen, o densidad por unidad de área desde la parte interna hasta la parte externa del culmo. Teniendo en cuenta lo anterior, se puede inferir que, frente a cargas de tracción, compresión y cizalladura, la distribución de las tensiones no va a ser constante en las secciones donde se aplica dicha carga, motivo por el cual, se generan en los diferentes especímenes y pruebas, tensiones adicionales en los diferentes planos, aumentando de esta forma las tensiones máximas en algunos puntos del espécimen, esta situación se evidencia en el criterio de falla seleccionado. Por ejemplo, en la simulación a tracción paralela a la dirección de las fibras, se generan deflexiones en las direcciones perpendiculares a la de aplicación de la fuerza, aunque muy mínimas, estas a su vez generan momentos de flexión con lo que finalmente aumenta el valor da la tensión de Von Mises como criterio de falla.

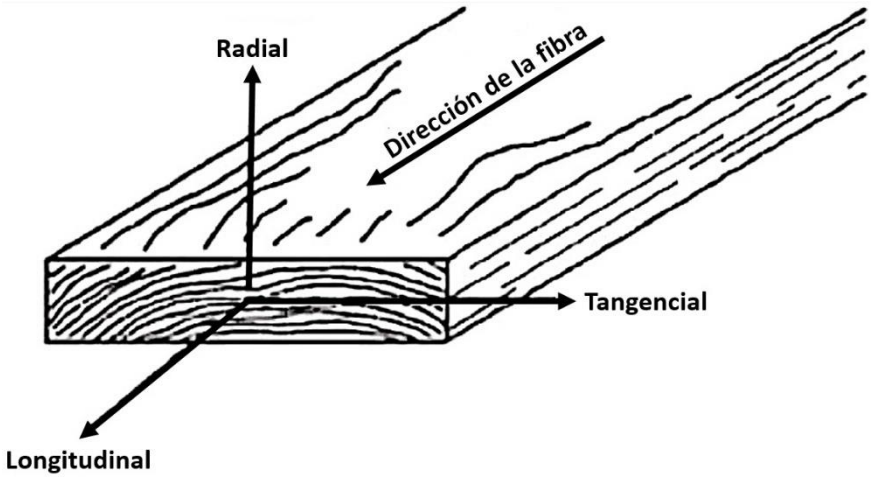


Figura 60 Orientación de los ejes en un material anisotrópico. *Fuente:* [97]

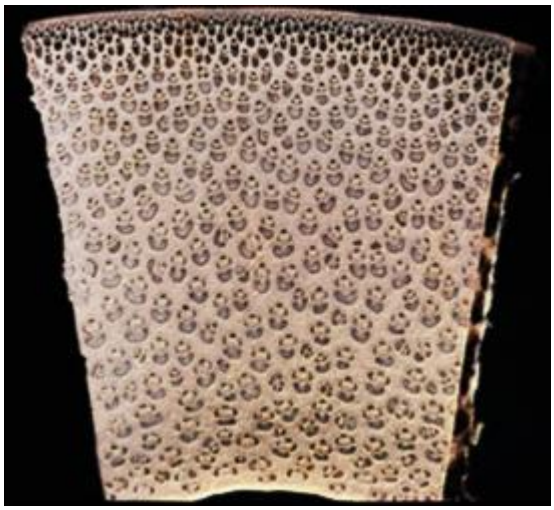


Figura 61 Sección transversal de un culmo de bambú, haces vasculares dentro de parénquima. *Fuente:* [4]

6. CONCLUSIONES

El modelo analítico donde se considera la Guadua Angustifolia Kunth como material funcionalmente graduado sometido a presión interna, muestra que existe un mayor aumento en la rigidez en la dirección radial que en la circunferencial.

Los resultados gráficos del modelo analítico muestran que la falla del material se podría dar por la tensión circunferencial y no por la tensión radial.

La distribución de las tensiones en el material está muy condicionada por la no homogeneidad de este.

La caracterización de las propiedades mecánicas de la guadua Angustifolia Kunt donde se considera su comportamiento anisotrópico no homogéneo, permite tener una mejor predicción de dichas propiedades.

En la simulación de carga de tracción paralela a la fibra se presenta la mayor tensión y deformación del material en la zona de transición, que es donde se espera que ocurra la falla.

En la compresión perpendicular a la fibra se observa que las fibras externas se encuentran sometidas a tensión de tracción siendo estos los mayores valores observados, mientas que las internas a tensión de compresión, se espera que el material falle desde la parte externa, hacia la parte interna a través del espesor.

Se generaron concentradores de esfuerzo inevitables en el modelo para compresión perpendicular a la fibra y corte paralelo a la fibra, debido a la geometría de este.

En la simulación de compresión perpendicular a la fibra se pudo observar la capacidad del material para distribuir las tensiones y para absorber energía.

En las simulaciones se pudo evidenciar el carácter anisotrópico del material, debido a la diferencia notable en los resultados de tensión paralela a la fibra y los resultados de tensiones perpendiculares a esta.

Los resultados de simulación mediante elementos finitos tienen un alto grado de variabilidad especialmente para la resistencia al corte paralelo a la dirección de la fibra, y compresión perpendicular a la fibra.

La variabilidad en los resultados puede obedecer al hecho de que en la simulación el programa tiene en cuenta algunas zonas críticas que no se evidencian en una prueba experimental o en efecto sea necesario optimizar el análisis o las condiciones de contorno.

La falta de homogeneidad y uniformidad en un material ortotrópico afecta de manera directa los resultados en las diferentes simulaciones, como consecuencia de lo anterior, se observa no uniformidad en la distribución de las tensiones donde se aplica la carga.

El criterio de falla es un elemento muy importante al momento de analizar la respuesta de un material a diferentes cargas.

La simulación por elementos finitos donde se tiene en cuenta las diferentes propiedades elásticas y de resistencia para la parte interna, media y externa del culmo, puede servir de indicador para que las pruebas y protocolos experimentales se reformulen o ajusten por otros donde se tengan en cuenta estos aspectos relevantes.

Mediante la correcta interpretación de los resultados analíticos y por elementos finitos, se puede explicar de forma coherente la fenomenología relacionada con la

respuesta de un material a las diferentes cargas a las cuales es sometido, y representa un complemento de las pruebas experimentales.

En el análisis estructural del bambú guadua, se debe seguir profundizando en el estudio detallado de la respuesta del material a cargas en la dirección transversal al culmo, debido a que en esta es donde se presentan los valores más bajos de sus propiedades mecánicas.

En los materiales anisotrópicos u ortotrópicos como el bambú, las propiedades de resistencia mecánica también están en función de la geometría.

El uso de herramientas como SolidWorks, Matlab para el análisis de la respuesta mecánica de materiales es muy útil y versátil para los ingenieros, teniendo en cuenta que mediante su aplicación se pueden obtener predicciones y resultados confiables.

Es posible que los elevadores de tensiones en las diferentes simulaciones se deban a la falta de uniformidad en las distribuciones de las tensiones en los especímenes, como consecuencia directa de las propiedades mecánicas no constantes del material o a las singularidades inevitables en los modelos.

7. BIBLIOGRAFÍA

[1] César Leonardo Ardila Pinilla, “Determinación de los valores de esfuerzos admisibles del bambú,” Universidad Nacional De Colombia, 2013.

[2] P. Luna, C. P. Takeuchi, G. Granados, F. Lamus, and J. Lozano, “METODOLOGÍA DE DISEÑO DE ESTRUCTURAS EN GUADUA ANGUSTIFOLIA COMO MATERIAL ESTRUCTURAL POR EL MÉTODO DE ESFUERZOS ADMISIBLES,” *Rev. Educ. en Ing.*, vol. 11, no. June 2011, pp. 66–75, 2011.

[3] E. T. Akinlabi, K. Anane-fenin, D. R. Akwada, and T. M. Plant, *Bamboo. The Multiporpuse Plant*. Springer International Publishing AG 2017, 2017.

[4] W. Liese and M. Köhl, *Bamboo: The Plant and its Uses*. Hamburg, Germany: Springer, 2015.

[5] W. Padilla, “Comportamiento a tracción del bambú Guadua angustifolia teniendo en cuenta el deslizamiento en la interfaz fibra - matriz,” Universidad Nacional de Colombia, 2018.

[6] C. A. P. PUENTES, “RESISTENCIA A LA TRACCIÓN PERPENDICULAR A LA FIBRE DE LA GUADUA ANGUSTIFOLIA,” UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, 2006.

[7] E. Sapuyes, C. Takeuchi, M. Duarte, and W. Erazo, “Resistencia y elasticidad a la flexión de la Guadua Angustifolia Kunth de Pitalito, Huila,” vol. 11, pp. 97–111, 2018.

[8] M. J. Richard and K. A. Harries, “On inherent bending in tension tests of bamboo,” *Wood Sci. Technol.*, vol. 49, no. 1, pp. 99–119, 2014.

[9] A. Huang, Puxi, Chang, Wen-Shao, Ansell, Martin P., Chew, Y.M. John, Shea, “Density distribution profile for internodes and nodes of Phyllostachys edulis (Moso bamboo) by computer tomography scanning,” *Constr. Build. Mater.*, vol. 93, no. 9, 2015.

[10] E. C. N. Silva, M. C. Walters, and G. H. Paulino, “Modeling bamboo as a functionally graded material: Lessons for the analysis of affordable materials,” *J. Mater. Sci.*, vol. 41, no. 21, pp. 6991–7004, 2006.

[11] L. Xin, G. Dui, S. Yang, and Y. Liu, “Elastic-plastic analysis for functionally graded thick-walled tube subjected to internal pressure,” *Adv. Appl. Math. Mech.*, vol. 8, no. 2, pp. 331–352, 2016.

[12] N. Y. Fukui Yasuyoshi, “Elastic Analysis for Thick-Walled Tubes of Functionally Gradient Material Subject to Internal Pressure,” *JSME Int. J.*, vol. 35, no. 4, 1991.

[13] A. Chakraborty, S. Gopalakrishnan, and J. N. Reddy, “A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials,” *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 45, no. 3, pp. 519–539, 2003.

[14] S. García, “Bambú Como Material Estructural : Generalidades, aplicaciones y modernización de una estructura tipo.,” *Bambú Como Mater. Estructural Gen. Apl. Y Model. Una Estruct. Tipo*, vol. 12, no. dificultad de transporte, p. 52, 2015.

[15] MINISTERIO DE PROTECCIÓN SOCIAL; SERVICIO NACIONAL DE APRENDIZAJE (SENA), *LA GUADUA. CARACTERIZACIÓN OCUPACIONAL*. 2006.

[16] M. Gutiérrez-González and C. P. Takeuchi-Tam, “Efecto del contenido de humedad en la resistencia a tensión paralela a la fibra del bambú Guadua Angustifolia Kunth Moisture content’s effect on the fiber parallel tensile strength of bamboo Guadua angustifolia kunth,” *Sci. Tech. Año XIX*, vol. 19, no. 3, 2014.

[17] E. Delgado, “Actualidad y futuro de la arquitectura de bambú en Colombia.,” UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CATALUÑA, 2006.

[18] C. P. TAKEUCHI, “CARACTERIZACIÓN MECÁNICA DEL BAMBÚ GUADUA LAMINADO PARA USO ESTRUCTURAL,” UNIVERSIDAD NACIOANL DE COLOMBIA, 2014.

[19] J. Cui, “Multiscale Structural Investigation of Bamboo Under Compressive

Loading," MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, 2017.

[20] P. Luna, J. Lozano, and C. Takeuchi, "Determinación experimental de valores característicos de resistencia para Guadua angustifolia," *Maderas. Cienc. y Tecnol.*, vol. 16, no. ahead, pp. 0–0, 2014.

[21] J. A. O. Saraz, A. E. Bedoya, and E. A. G. Galeano, "Evaluation of Mechanical Properties of the Internal Structure of the Guadua With Matematical Modelling," *Dyna-Colombia*, vol. 76, no. 160, pp. 169–178, 2009.

[22] P. Zakikhani, R. Zahari, M. T. H. Sultan, and D. L. Majid, "Extraction and preparation of bamboo fibre-reinforced composites," *Mater. Des.*, vol. 63, no. November, pp. 820–828, 2014.

[23] B. Harries, Kent Alexander, Sharma, *Nonconventional and Vernacular Construction Materials*. Elsevier, 2016.

[24] M. A. dos Reis Pereira and T. Q. F. Barata, "Bamboo as Sustainable Material Used in Design and Civil Construction: Species, Management, Characterization and Applications," *Key Eng. Mater.*, vol. 634, pp. 339–350, 2014.

[25] M. Estrada, "Modelo numérico micromecánico del proceso de fractura de estructuras fabricadas con bambú Guadua angustifolia," Universidad Nacional de Colombia, 2016.

[26] M. Godina and R. Lorenzo, "Calibrating a composite material model for analysis and design of bamboo structures," *10th World Bamboo Congr.*, 2015.

[27] I. M. Daniel and O. Ishai, *Engineering Mechanics of Composite Materials*, SECOND. Oxford University Press, 2006.

[28] E. T. Mahamood, Rasheedat Modupe, Akinlabi, *Functionally Graded Materials*. Springer International Publishing AG 2017, 2017.

[29] R. G. (Eds. . Miyamoto, Y., Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A., Ford, *FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS Design, Processing and Applications*, vol. 56, no. 10. 1999.

[30] S. G. Chung, S.W., Hong, “A Shell Theory of Hybrid Anisotropic Materials,” *Int. J. Compos. Mater.*, vol. 6, no. 1, pp. 15–25, 2016.

[31] G. C. S. P. Chen, *Cracks in composite materials*, First. Springer Netherlands, 1981.

[32] B. G. Muravskii, *Foundations of Engineering Mechanics-Mechanics of Non-Homogeneous and Anisotropic Foundations*, 1st ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.

[33] M. A. Pérez and M. Sánchez, “Fundamentos de la mecánica de los materiales compuestos,” *Apl. Av. los Mater. compuestos en la obra Civ. y la Edif.*, pp. 19–50, 2014.

[34] K. K. Chawla, *Composite Materials*, Third., vol. 2–5. Birminghan: Springer, 2012.

[35] A. links open overlay panelL. N. T.-M. Ian, “Some problems in the theory of elasticity of nonhomogeneous elastic media,” *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 25, no. 6, pp. 1120–1125, 1961.

[36] L. P. Kollár and S. George S, *Mechanics of Composite Structures*, no. 1. 2003.

[37] I. Héctor, U. Pineda, and L. H. H. G, “Análisis de esfuerzos en materiales compuestos,” Instituto Politécnico Nacional, 2001.

[38] O. C. Zienkiewicz and H. L. Taylor, *El método de los elementos finitos*, 4th ed. 1994.

[39] Tirupathi Chandrupatla and Ashok D. Belegundu, *Introduction to finite elements in engineering*. 2002.

[40] M. A. Pérez, *Aplicaciones avanzadas de los materiales compuestos en la obra civil y la edificación*. 2014.

[41] R. M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, 2nd ed., vol. 44, no. 3. New York, 1999.

[42] N. J. Pagano, *Mechanics of Composite Materials: selected works of Nicholas J Pagano*. 2015.

[43] G. Dvorak, *Micromechanics of Composite Materials*, 1st ed. Waterloo,

Ontario, Canada: Springer Netherlands, 2013.

[44] A. K. Kaw, *Mechanics of Composite Materials*, 2nd Ed. New York: Taylor & Francis Group, 2006.

[45] E. Barbero, *Introduction to Composite Materials Design, Third Edition*. 2017.

[46] X. Zhao, G. Wang, and Y. Wang, “Micromechanical modeling in determining the transverse elastic moduli and stress distributions of bamboo,” *J. Mater. Sci.*, vol. 53, no. 4, pp. 2553–2565, 2018.

[47] M. A. Pérez, *Aplicaciones avanzadas de los materiales compuestos en la obra civil y la edificación*. Barcelona: Omnia, 2014.

[48] V. V. Vasiliev and E. V. Morozov, *Advanced Mechanics of Composite Materials*, Second. 2007.

[49] A. T. Nettles, *Basic Mechanics of Laminated Composite Plates*. Alabama: NASA Reference Publication 1351, 1994.

[50] J. M. Gere and B. J. Goodno, *Mecánica de Materiales*, Séptima. MÉXICO D.F.: CENGAGE LEARNING, 2009.

[51] F. Beer, *Mecanica de materiales - Beer, Ferdinand P Johnston.pdf.pdf*, 5th ed. Mexico: Mc Graw Hill, 2010.

[52] Robert W. Fitzgerald, *Mecanica de Materiales*, Alfaomega. Mexico, 2007.

[53] R. C. Hibbeler, *Analisis Estructural*, Octava edi. Mexico: PEARSON EDUCACION, 2012.

[54] S. TIMOSHENKO and J. N. GOODIER, *Teoria de la elasticidad*, 2 ed. España: URMO S.A., 1975.

[55] B. M. LEMPRIERE, “Poisson’s ratio in orthotropic materials,” *AIAA J.*, vol. 6, no. 11, pp. 2226–2227, 1968.

[56] I. C. F. Ipsen, *Numerical Matrix Analysis*. North Carolina: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[57] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[58] J. Olmedo, “Diseño de estructuras tipo cáscara basadas en materiales compuestos laminares, utilizando el método de elementos finitos,”

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL, 2008.

[59] M. W. White, Scott R., Hyer, *Stress analysis of fiber-reinforced composite materials*. McGraw-Hill, 2009.

[60] J. Robert C. Reuter, “Concise Property Transformation Relations for an Anisotropic Lamina,” *J. Compos. Mater.*, vol. 5, no. 2, pp. 270–272.

[61] S. G. Lekhnitskii, *Theory of elasticity of an anisotropic body*, First. Moscow: Mir Publishers, 1981.

[62] N. Tutuncu and M. Ozturk, “Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels,” *Compos. Part BEngineering*, vol. 32, no. 8, pp. 683–686, 2001.

[63] H. M. Yin, L. Z. Sun, and G. H. Paulino, “Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions,” *Acta Mater.*, vol. 52, no. 12, pp. 3535–3543, 2004.

[64] V. Birman and L. W. Byrd, “Modeling and analysis of functionally graded materials and structures,” *Appl. Mech. Rev.*, vol. 60, no. 1–6, pp. 195–216, 2007.

[65] R. S. Salzar, “FUNCTIONALLY GRADED METAL MATRIX COMPOSITE TUBES,” *Compos. Eng.*, vol. 5, no. 7, pp. 891–900, 1995.

[66] A. Horgan, C., Chan, “The Pressurized Hollow Cylinder or Disk Problem for Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Materials,” *J. Elast.*, vol. 55, pp. 43–59, 1999.

[67] D. G. Zill, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, Novena Edi. Mexico, D.F.: CENGAGE LEARNING, 2009.

[68] E. E. Ramos, *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones para Estudiantes de Ciencias e Ingenierias*, Sexta Edic. Lima, 2004.

[69] M. F. Kassir, M. K., Chuaprasert, “A Rigid Punch in Contact With a Nonhomogeneous Elastic Solid,” *J. Appl. Mech.*, vol. 41, no. 4, pp. 1019–1024, 1974.

[70] S. W. T. Hong T. Hahn, *Introduction to composite materials*. 1980.

[71] A. Castro, “Modelización micromecánica de materiales compuestos:

comparativa entre modelos analíticos y numéricos (MEF),” Universidad de Sevilla, 2018.

[72] E. Salvati, L. R. Brandt, F. Uzun, H. Zhang, C. Papadaki, and A. M. Korsunsky, “Multiscale analysis of bamboo deformation mechanisms following NaOH treatment using X-ray and correlative microscopy,” *Acta Biomater.*, vol. 72, pp. 329–341, 2018.

[73] J. M. R. Misa, “Estudio de Materiales Reforzados con Fibras en Problemas de Contacto,” UNIVERSIDAD DE SEVILLA, 2013.

[74] X. Zhao, G. Wang, and Y. Wang, “Micromechanical modeling in determining the transverse elastic moduli and stress distributions of bamboo,” *J. Mater. Sci.*, vol. 53, no. 4, pp. 2553–2565, 2018.

[75] C. P. Takeuchi, M. Estrada, and D. L. Linero, “Experimental and numerical modeling of shear behavior of laminated Guadua bamboo for different fiber directions,” *Constr. Build. Mater.*, vol. 177, pp. 23–32, 2018.

[76] J. J. Garcia, C. Rangel, and K. Ghavami, “Experiments with rings to determine the anisotropic elastic constants of bamboo,” *Constr. Build. Mater.*, vol. 31, pp. 52–57, 2012.

[77] R. Khatry and D. P. Mishra, “Finite element analysis of bamboo column along with steel socket joint under loading condition,” *Int. J. Appl. Eng. Res.*, vol. 7, no. 11 SUPPL., pp. 1247–1251, 2012.

[78] L. Osorio, E. Trujillo, F. Lens, J. Ivens, I. Verpoest, and A. W. Van Vuure, “In-depth study of the microstructure of bamboo fibres and their relation to the mechanical properties,” no. July 2019, 2018.

[79] H. Li, G. Wu, Q. Zhang, A. J. Deeks, and J. Su, “Ultimate bending capacity evaluation of laminated bamboo lumber beams,” *Constr. Build. Mater.*, vol. 160, pp. 365–375, 2018.

[80] K. Sarath, “Torsion Behaviour of Beam with Bamboo as Reinforcement and Coconut Shell as Aggregate,” *Int. J. Innov. Res. Eng. Manag.*, no. 1, pp. 217–220, 2015.

[81] D. R. Mitch, “Splitting Capacity Characterization of Bamboo Culms,”

University of Pittsburgh, 2009.

[82] J. F. Scherer and R. P. Bom, “Determination of shear modulus in bamboo fibers composite in torsion tests,” *Mater. Res. Express*, vol. 6, no. 3, 2019.

[83] Y. N. Shigeyasu Amada, Tamotsu Munekata and Y. Z. Yoshinobu Ichikawa, Atsushi Kirigai, “The Mechanical Structures of Bamboos in Viewpoint of Functionally Gradient and Composite Materials,” *J. Compos. Mater.*, vol. 30, no. 7, pp. 800–819, 1996.

[84] J. Oliver, “ASSESSING THE PERFORMANCE OF BAMBOO STRUCTURAL COMPONENTS,” University of Pittsburgh, 2013.

[85] M. and R. Sharma, Gatoo, Bock, “Engineered bamboo: state of the art,” *Proc. Inst. Civ. Eng.*, vol. 168, no. 2, pp. 57–67, 2014.

[86] K. F. Chung and W. K. Yu, “Mechanical properties of structural bamboo for bamboo scaffoldings,” vol. 24, pp. 429–442, 2002.

[87] C. E. G. QUEVEDO, “RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN PARALELA A LA FIBRA DE LA GUADUA ANGUSTIFOLIA Y DETERMINACIÓN DEL MÓDULO DE ELASTICIDAD,” Universidad Nacional de Colombia, 2006.

[88] Okhio C.B., J. E. Waning, and Y. T. Mekonnen, “An experimental investigation of the effects of moisture content on the mechanical properties of bamboo and cane,” *Cyber Journals Multidiscip. Journals Sci. Technol. J. Sel. Areas Bioeng.*, vol. November, pp. 7–14, 2011.

[89] D. Mitch, K. A. Harries, and B. Sharma, “Characterization of splitting behavior of bamboo culms,” *J. Mater. Civ. Eng.*, vol. 22, no. 11, pp. 1195–1199, 2010.

[90] K. A. Harries, B. Sharma, and M. Richard, “Structural Use of Full Culm Bamboo: The Path to Standardization,” *Int. J. Archit. Eng. Constr.*, vol. 1, no. 2, pp. 66–75, 2012.

[91] M. L. S. Cruz, “Caracterização física e mecânica de colmos inteiros do bambu da espécie Phyllostachys aurea : Comportamento à flambagem,” Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2002.

[92] G. L. Cantos, L. F. Lopez, R. M. de Jesus, C. Salzer, and L. E. O. Garciano,

"Investigation of an alternative testing protocol to determine the shear strength of bamboo parallel to the grain," *Maderas Cienc. y Tecnol.*, vol. 21, no. 4, 2019.

[93] H. Á. G. B., J. A. M. ARANGO, and J. R. B. SÁNCHEZ, "RESULTADOS DEL ENSAYO A FLEXIÓN EN MUESTRAS DE BAMBÚ DE LA ESPECIE Guadua angustifolia Kunth," *Sci. Tech.*, vol. 1, no. 35, pp. 503–508, 2007.

[94] D. T. J. M. S. J. Gibson;, "Flexural properties as a basis for bamboo strength grading," *Struct. Build.*, pp. 1–12, 2016.

[95] S. Askarinejad, P. Kotowski, F. Shalchy, and N. Rahbar, "Effects of humidity on shear behavior of bamboo," *Theor. Appl. Mech. Lett.*, vol. 5, no. 6, pp. 236–243, 2015.

[96] C. Rodriguez and E. Morales, *El bambú como material estructural. Análisis de un caso práctico*. 2007.

[97] J. A. G. APOLINAR, "PRUEBAS DE ANILLOS PARA DETERMINAR LAS CONSTANTES ELÁSTICAS DE LOS NUDOS DE LA GUADUA ANGUSTIFOLIA," Universidad del Valle, 2011.

ANEXOS

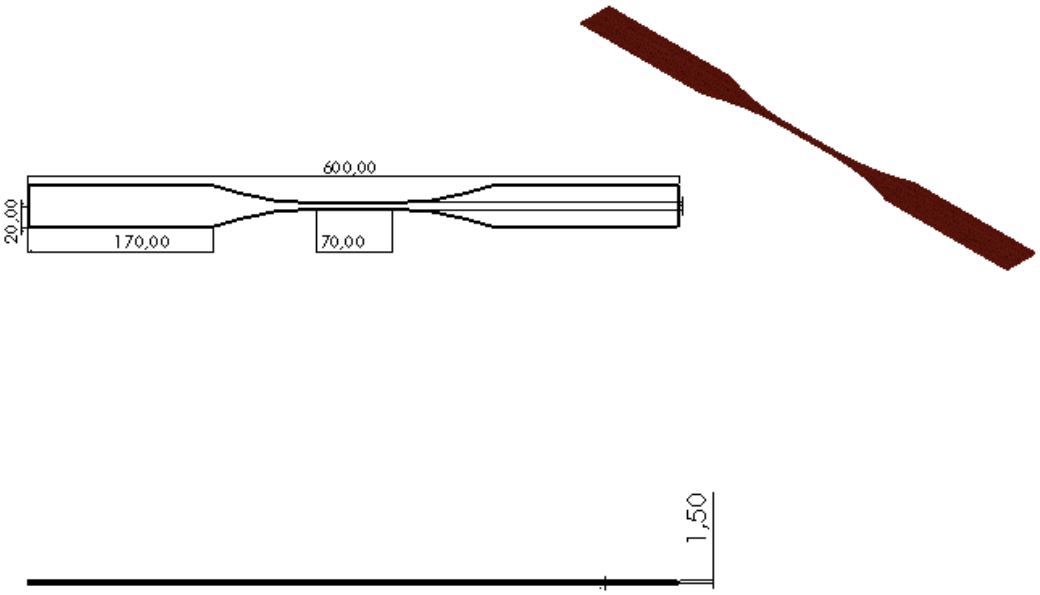
Anexo A Protocolo implementado en el Software Matlab del modelo analítico

```
clc;clear all;close all
%% Soluciones exactas para esfuerzos en recipientes a presión graduados
funcionalmente
Beta=[0 1 1.5 2];
P= 100;
AR=0.76;
v=0.3;
r=0.76:0.001:1;
vp=v/(1-v);
for j= 1:length(Beta)
    for i=1:length(r)
        m1=(1/2)*(-Beta(j)-(4+(Beta(j))^2-4*Beta(j)*vp)^(1/2));
        m2=(1/2)*(-Beta(j)+(4+(Beta(j))^2-4*Beta(j)*vp)^(1/2));
        x1=r(i)^m1*((m2*(v-1)-v)*(1+v*(m1-1)));
        x2=r(i)^m2*((m1*(v-1)-v)*(1+v*(m2-1)));
        sigmar(j,i)=-((P*AR^(1-Beta(j))*(r(i)^m1-r(i)^m2)*r(i)^(Beta(j)-
1))/(AR^m1-AR^m2));
        sigmae(j,i)=(P*AR^(1-Beta(j))*(x1-x2))/((AR^m1-AR^m2)*((m1*(v-1)-
v)*(m2*(v-1)-v)));
        normalizada1(j,i)=(r(i)^(1+Beta(j))*(r(i)^m1-r(i)^m2)*(AR^2-
1))/((r(i)^2-1)*(AR^(1+Beta(j)))*(AR^m1-AR^m2));
        normalizada2(j,i)=-((r(i)^2*(AR^2-1)*(x1-
x2))/((r(i)^2+1)*(AR^(1+Beta(j)))*(AR^m1-AR^m2)*((m1*(v-1)-v)*(m2*(v-1)-
v))));
        sigmaeH(j,i)=-((P*AR^2*(r(i)^2-1))/(r(i)^2*(AR^2-1)));
    end
end
plot(r,sigmar)
ylim([-100 0])
title ('r vs \sigma_r')
xlabel ('r'); ylabel(' \sigma_r')
legend('Beta(0)','Beta(1)','Beta(1.5)','Beta(2)','Location','Best')
set(figure(1),'Color','w')
figure(2)
plot(r,sigmae)
xlim([0.76 1])
title ('r vs \sigma_\theta')
xlabel ('r'); ylabel(' \sigma_\theta')
legend('Beta(0)','Beta(1)','Beta(1.5)','Beta(2)','Location','Best')
set(figure(2),'Color','w')
figure(3)
plot(r,normalizada1)
xlim([0.76 1])
ylim([0.98 1.14])
```

```
title ('r vs \sigma_r / \sigma_r^H')
xlabel ('r'); ylabel(' \sigma_r / \sigma_r^H')
legend('Beta(0)','Beta(1)','Beta(1.5)','Beta(2)','Location','Best')
set(figure(3),'Color','w')
figure(4)
plot(r,normalizada2)
xlim([0.76 1])
title ('r vs \sigma_\theta / \sigma_\theta^H')
xlabel ('r'); ylabel(' \sigma_\theta / \sigma_\theta^H')
legend('Beta(0)','Beta(1)','Beta(1.5)','Beta(2)','Location','Best')
set(figure(4),'Color','w')
```

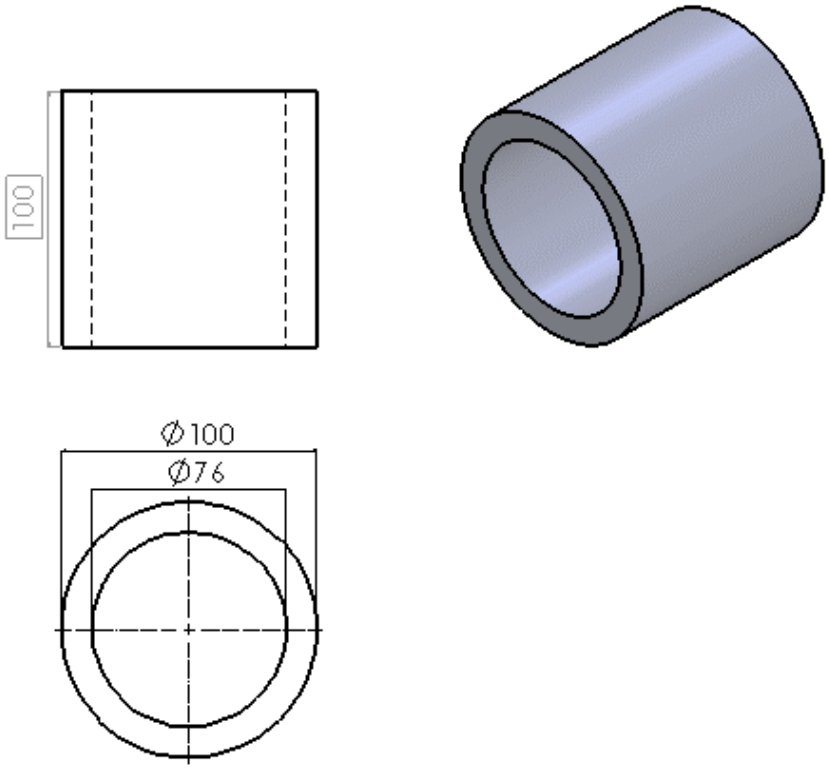
Anexo B Planos de detalle de la probeta utilizada para tracción y los diferentes modelos creados para las simulaciones

Probeta a tracción paralela a la fibra

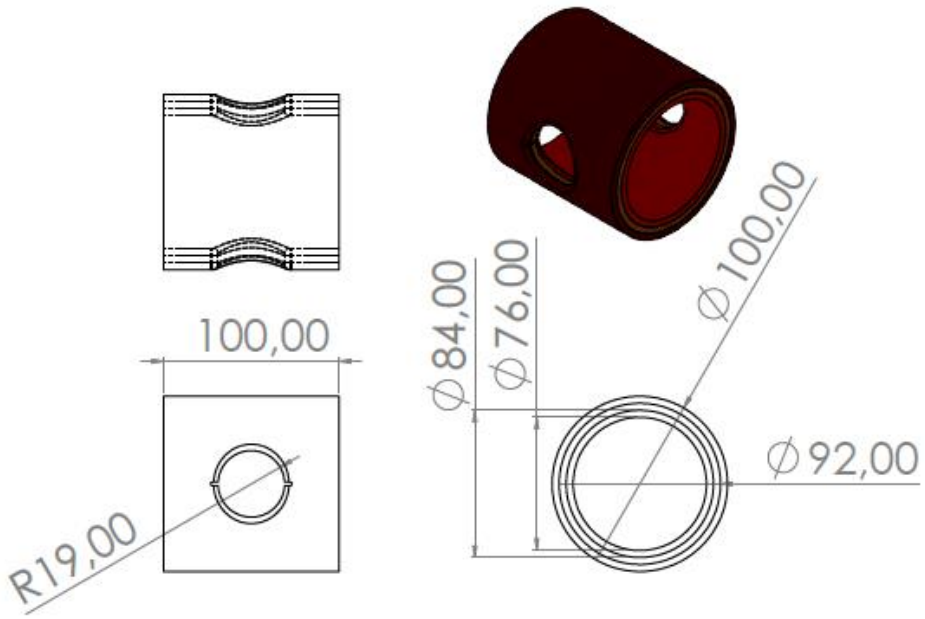


Medidas en mm

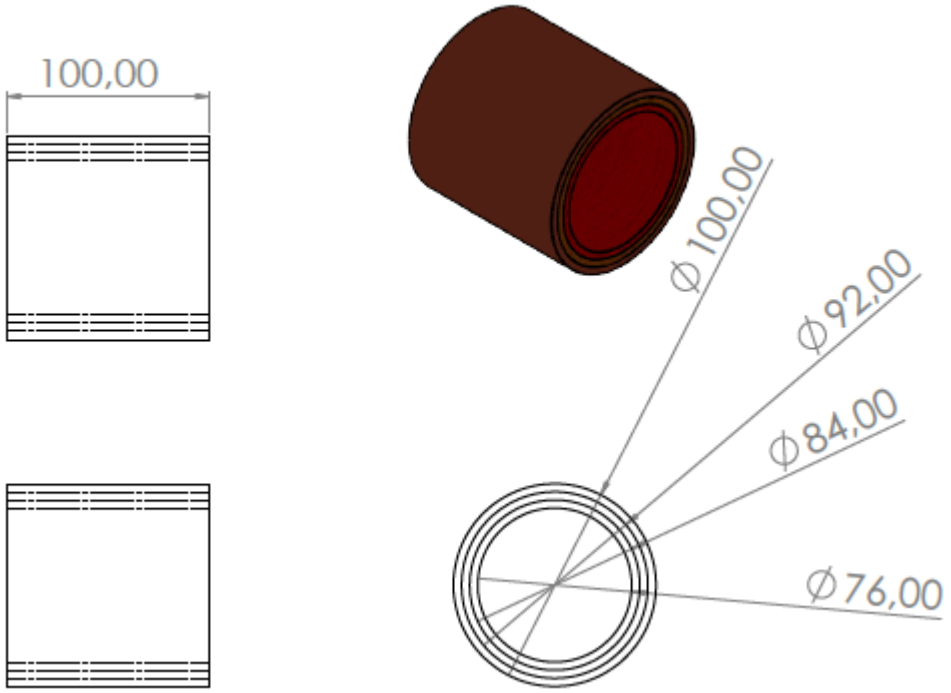
Espécimen de tracción perpendicular a la fibra



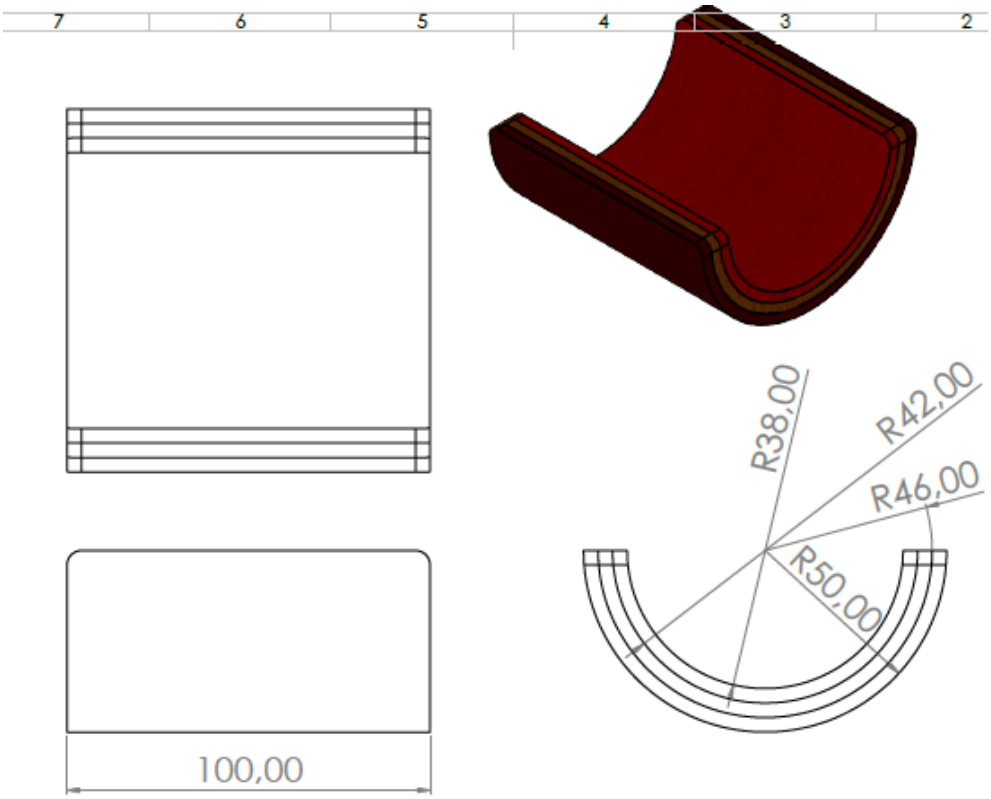
Ensamble del modelo de tracción perpendicular a las fibras



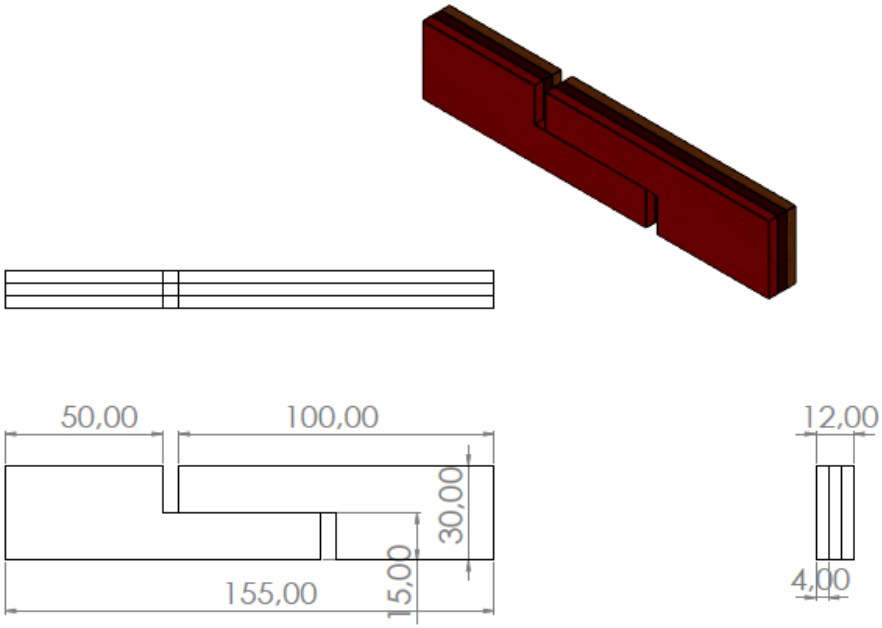
Espécimen de compresión paralela y perpendicular a la fibra a la fibra



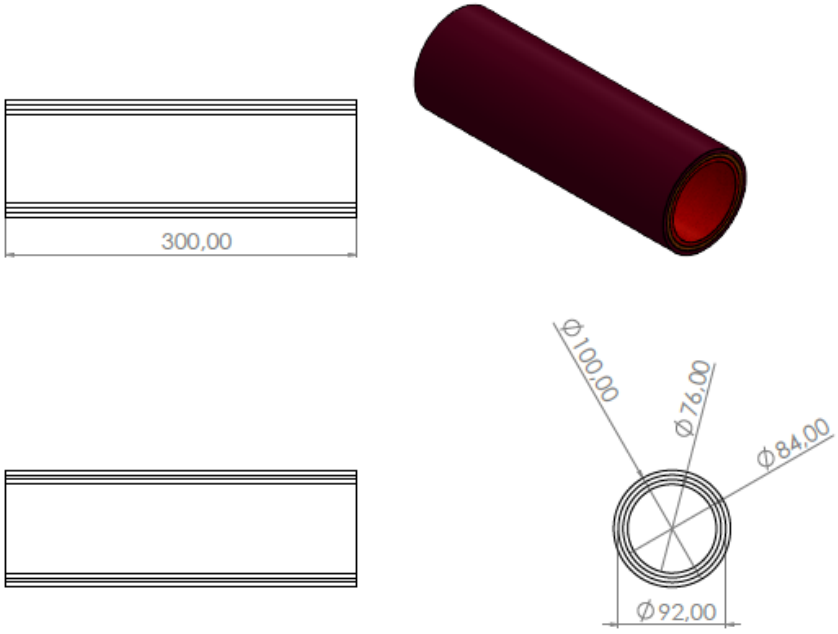
Espécimen para corte paralelo (Mariposa)



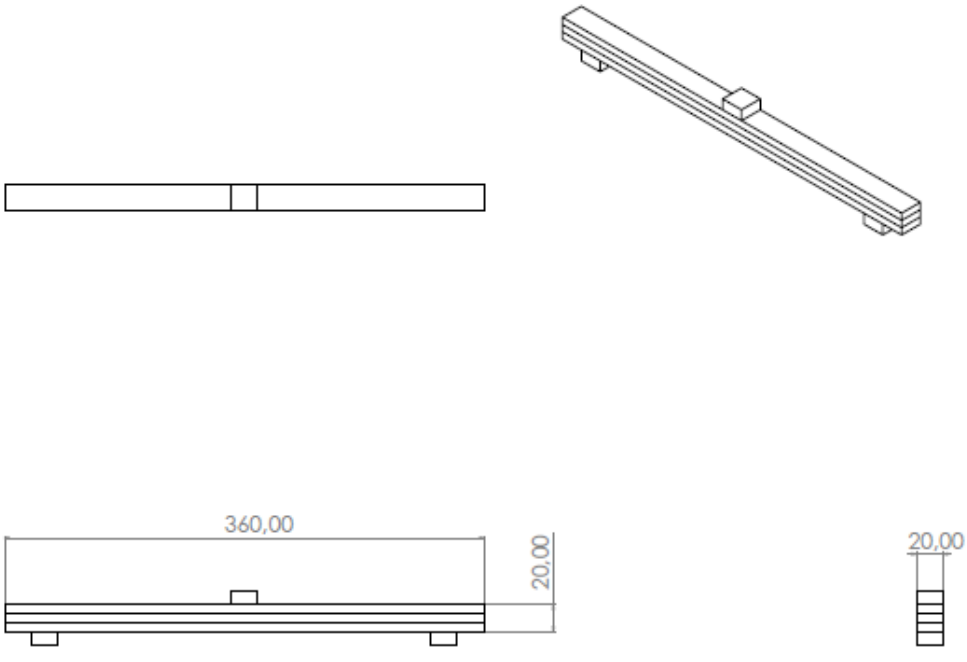
Espécimen de corte paralelo modificado



Espécimen para torsión



Medias para la probeta a flexión (valores en mm)



Anexo C Soporte de versión de prueba de SolidWorks

ear SOLIDWORKS (2019-2020) 60-Day Trial user: Note: This is an automated e-mail. Please do not reply to this message. Thank you for your interest in the SOLIDWORKS Educator 60-day Trial. Please note this download is provided only for students and Educators to explore SOLIDWORKS Student software. PLEASE NOTE: this software is designed to only run on Microsoft Windows 7 (64-bit version only), Windows 8.1, or Windows 10. This product may only be used by Students and Educators on their own computers for purposes such as completing homework assignments, student projects and building your design skills using SOLIDWORKS software. This product is NOT for instructional use on school lab, classroom, or shop computers. When this license expires, Educators may purchase a new, fully-equipped EDUCATION Edition version through their SOLIDWORKS EDU Reseller. Students can then purchase the more advanced SOLIDWORKS STUDENT Edition at: http://www.solidworks.com/goedu ---------- ---------- Your SOLIDWORKS Educator(CAD Premium) 60-Day Trial Serial Number is:9020 0091 0535 4877 8FDZ MZF9

Your SOLIDWORKS Educator (Electrical Professional) 60-Day Trial Serial Number is: 9020 0091 0550 6282 5XSG RH25

Your SOLIDWORKS Educator (Composer) 60-Day Trial Serial Number is: 9020 0091 0545 8275 GV3G J398

Your SOLIDWORKS Educator (Visualize Professional) 60-Day Trial Serial Number is: 9020 0091 0555 3023 Y53M BQC6

Your SOLIDWORKS Educator (CAM) 60-Day Trial Serial Number is: 9020 0091 0540 3047 CZK8 7648

Your SOLIDWORKS Educator (PCB) 60-Day Trial Serial Number is: 9020 0091 0560 9884 3Z8T WM3J

This version of SOLIDWORKS will operate for 60 days, or until 31 JULY 2020, whichever comes first.