



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Modelo de interacción relativista para el espectro de mesones

David Julian Molina Beltrán

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2018

Modelo de interacción relativista para el espectro de mesones

David Julian Molina Beltrán

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ciencias Física

Director:
Dr Maurizio De Sanctis

Línea de Investigación:
Física Hadrónica

Grupo de Investigación:
Grupo de campos y partículas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Bogotá
Colombia
2018

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi director Dr Maurizio De Sanctis por toda su paciencia y ayuda. Agradezco, también, al Dr Cesar Fernandez Ramirez por toda su ayuda académica y por sus palabras de aliento y confianza.

Además quisiera expresar mi gratitud al profesor Roelof Bikjer y al Instituto de Ciencias Nucleares en la Universidad Nacional Autónoma de México por su hospitalidad durante el primer semestre de 2016 y por facilitarme amablemente acceso al Cluster TOCHTLI para realizar los complejos cálculos numéricos realizados en este trabajo de tesis. Finalmente quiero agradecer a mi familia por su paciencia en este largo camino.

Resumen

Se construye un modelo de interacción relativista basado en el intercambio de un gluón, en el que se utilizan espinores de Dirac de energía positiva. La formulación aquí desarrollada, no utiliza aproximaciones no relativistas y de esta forma, la interacción es construida completamente en el espacio del momentum. El Hamiltoniano de interacción cuenta con una interacción vectorial y una interacción escalar y además se introducen factores de apantallamiento con el fin de incluir efectos cuánticos de vacío. Para determinar los parámetros libres del modelo se realiza un ajuste (*fit*) utilizando los valores experimentales de estados bien establecidos tanto para el charmonium como para el bottomonium y se predice la parte alta del espectro para ambos sistemas mesónicos. En general, se predice la estructura completa del charmonium y del bottomonium, describiendo razonablemente bien. Los valores numéricos de los parámetros libres del modelo son determinados teniendo en cuenta también las incertidumbres experimentales de las energías de las resonancias utilizadas en el proceso de ajuste (*fit*). Así, se obtienen las incertidumbres de las masas de las resonancias teóricas, de los parámetros del modelo y las correlaciones entre los parámetros libres del modelo.

Palabras clave: Charmonium, Bottomonium, quarks, efecto de apantallamiento, Bootstrap, Un gluon de intercambio.

Abstract

A relativistic interaction model is constructed based on one gluon exchange expression, in which positive energy Dirac spinors are used. The formulation developed here, does not use nonrelativistic approaches, in this way, the interaction is built completely in the momentum space. The Hamiltonian of interaction has a vector interaction and a scalar interaction and also introduces screening factors in order to include quantum vacuum effects. To determine the free parameters of the model an fitting is made using the experimental values of well established states for both the charmonium and the bottomonium and the upper part of the spectrum is predicted for both mesonic systems. In general, the complete structure of the charmonium and the bottomonium is predicted in a good way. The numerical values of the free parameters of the model are determined also taking into account the experimental uncertainties of the resonance energies used in the fitting process. In this way, the uncertainties of the masses of the theoretical resonances, the parameters of the model and also the correlations between the free parameters of the model are obtained.

Keywords: Charmonium, Bottomonium, quarks, screening effect, Bootstrap, One gluon exchange.

Índice general

1. Introducción	11
2. Marco teórico	15
2.1. QCD	15
2.2. Lattice QCD	17
2.3. Modelos de potencial	18
2.4. Modelos de potencial con efectos relativistas	18
2.5. Ecuaciones relativistas para estados ligados	19
2.5.1. Ecuación de Bethe-Salpeter	20
2.5.2. Reducción tridimensional de la ecuación de Bethe Salpeter con la aproximación de interacción instantánea	22
2.5.3. Ecuación de Gross o del espectador	24
2.5.4. Ecuación de Mandelzweig-Wallace	25
2.5.5. Ecuación de Blankenbecler-Sugar	25
3. Estado Actual del tema	27
3.1. Algunos aspectos experimentales	27
3.2. Aspectos teóricos	28
4. Ecuación relativista utilizada en el presente trabajo	31
5. Modelo específico de interacción relativista en el espacio del momentum	33
5.1. Definiciones preliminares	33
5.2. Hamiltoniano total y efecto de apantallamiento	34
5.3. Interacción vectorial	35
5.4. Interacción escalar	36
5.4.1. Potencial escalar y vectorial	36
5.5. Ecuación integral para los sistemas $c\bar{c}$ y $b\bar{b}$	37
6. Uso del bootstrap en la propagación de errores experimentales	39
6.1. Bootstrap	39
6.2. Propagación de errores a través del Bootstrap	40
7. Método de solución y procedimiento de ajuste (<i>fit</i>)	43
7.1. Método de Solución	43
7.2. Cálculo del elemento de matriz	44
7.2.1. Cálculo de la parte angular del elemento de matriz	46
7.3. Procedimiento de ajuste (<i>fit</i>) y cálculo de incertidumbres	47
8. Espectro del charmonium	49
8.1. Parámetros del modelo y matrices de correlación	49
8.2. Espectro del charmonium	51
8.2.1. $X(3915)$, $X(3872)$ y $\chi_{c2}(2P)$	51
8.2.2. $\psi(3770)$, $\psi(4040)$, $\psi(4160)$ y $\psi(4415)$	52
8.2.3. $X(4260)$, $X(4360)$ y $X(4660)$	53

8.2.4.	$X(3940)$ y $X(4160)$	54
8.2.5.	$X(4140)$	54
8.2.6.	$\psi(3823)$	55
8.2.7.	Resonancias faltantes (Missing resonances)	55
8.3.	Conclusiones del capítulo	55
9.	Espectro del bottomonium	59
9.1.	Parámetros del modelo y matrices de correlación	59
9.2.	Espectro del Bottomonium	61
9.2.1.	$\Upsilon(4S)$, $\Upsilon(10860)$ y $\Upsilon(11020)$	62
9.2.2.	Estados $\chi_b(3P)$	63
9.3.	Resonancias faltantes (Missing Resonances)	65
9.4.	Conclusiones del capítulo	66
10.	Conclusiones y perspectivas	69
A.	Participación en eventos científicos y publicación	71
B.	Obtención de la expresión inicial de la interacción vectorial	73
C.	Cálculo de los términos angulares de los elementos de matriz del operador Hamiltoniano	75
D.	Expresión completa de los elementos de matriz	79
E.	Generadores aleatorios utilizados en el bootstrap	81
F.	Método de solución de una ecuación de valores propios	83
F.0.1.	El principio variacional	83

Capítulo 1

Introducción

En las últimas dos décadas la física hadrónica, en particular la espectroscopía de mesones, ha sido objeto de un creciente interés debido a la observación experimental de nuevas resonancias, obtenidas en diferentes colaboraciones experimentales [1–7]. Algunos de estos estados se han acoplado muy bien a lo que los modelos teóricos predecían [8–13]. Sin embargo, otras resonancias se han convertido en auténticos retos para la comunidad científica, puesto que no cumplen con las expectativas teóricas. Estos estados son conocidos como X , Y y Z , los cuales son considerados como mesones *charmonium-like* y *bottomonium-like*. Todos ellos yacen en la región de alta excitación de los mesones, cerca a los umbrales de decaimiento. Las hipótesis acerca de la naturaleza de estos estados son tan variadas como los enfoques teóricos con los cuales se analizan. Los candidatos a describir estos estados son: tetraquarks, mesones híbridos, glueballs [1–4, 7, 14–22], estados pertenecientes al charmonium ó bottomonium e incluso han sido interpretados como efectos cinemáticos propios de las cercanías de los canales de *open charm* y *open bottom* [23, 24].

A nivel general, la cromodinámica cuántica (Quantum Chromodynamics QCD) debe ser considerada, en cualquier caso, como la teoría de campo subyacente para el estudio de los sistemas hadrónicos, las principales características de la QCD serán discutidas en la sección 2.1. Pero, como es conocido, en la región de energía de los estados ligados no existen técnicas directas para obtener soluciones confiables para la QCD, debido a que la QCD no es perturbativa en esa región de energía.

Debido a la dificultad del problema, los teóricos estudian el espectro mesónico (en particular, para las energías donde están los estados X , Y y Z) desde diferentes enfoques que utilizan distintas aproximaciones.

Lattice QCD (LQCD) [25–28] (ver sección 2.2) constituye una herramienta teórica poderosa que, en principio, desde la QCD es capaz de calcular las amplitudes de dispersión y a partir de ellas construir el espectro de las partículas hadrónicas. Sin embargo, los complejos cálculos numéricos requeridos necesitan recursos computacionales no siempre disponibles debido a su alto costo. Además, a pesar de los inmensos avances teóricos [25, 26, 28] y técnicos que se han hecho, debido a las aproximaciones propias del método, aún los resultados no son completamente satisfactorios [29–36] para los estados excitados y en particular para los estados adyacentes a los umbrales de decaimiento, es decir, en la región donde yacen los estados X , Y y Z . Otro enfoque relevante, con importantes desarrollos recientes, es representado por las ecuaciones integrales de Dyson-Schwinger y Bethe-Salpeter [37–39]. El objetivo de estas ecuaciones es sumar diferentes clases de diagramas de Feynman que representan la interacción entre quarks; sin embargo, debido a la compleja naturaleza de la interacción fuerte, es necesario utilizar aproximaciones que generan varias limitaciones en sus bases teóricas y en los resultados obtenidos para los espectros [40, 41].

Por último, un enfoque ampliamente utilizado, desde el comienzo de la física hadrónica y también en la actualidad, son los modelos de potencial no-relativistas y semi-relativistas [42–54]. Por décadas, estos modelos han permitido estudiar la interacción fuerte entre quarks en sistemas ligados y además han dado pistas a los experimentalistas en la búsqueda de nuevas resonancias. Las reducciones no relativistas tienen el propósito de obtener una expresión que contenga potencias finitas del momentum para poder transformar analíticamente la interacción en una expresión local en el espacio de coordenadas y así facilitar los cálculos numéricos. Desafortunadamente, estos enfoques de aproximación no relativista no tienen una completa fundamentación teórica y podrían arrojar resultados no confiables, sobre todo, en regiones de alta excitación donde los efectos relativistas no son despreciables, en particular en zonas de *open charm* y *open bottom*. Esto implica que podrían producir predicciones teóricas no exactas para las masas de las resonancias y por lo tanto perjudicar

la correcta asignación de los estados teóricos a las resonancias experimentales. Además, en los así dichos modelos *relativizados*, en donde la energía cinética tiene forma relativista pero la interacción es una expresión fenomenológica local, no se tiene en cuenta, de manera completamente satisfactoria, el hecho que los quarks son partículas de espín 1/2 representadas por espinores de Dirac. Por consiguiente, los resultados obtenidos no son *consistentes* a nivel teórico ni adecuados para reproducir los datos experimentales. Aún así, algunos de ellos pueden reproducir los espectros mesónicos con buena precisión debido al uso de parámetros fenomenológicos y a la estructura de los potenciales que *simulan* las propiedades relativistas del sistema. En todo caso carecen de consistencia teórica por no incluir la relatividad como primer principio necesario para el estudio de la espectroscopía hadrónica.

El lector puede dirigirse a la sección 3 para detalles adicionales.

Adicionalmente, en este tipo de modelos las incertidumbres experimentales no son incluidas en los modelos o son tratadas de manera incompleta y por lo tanto queda sin determinar si las diferencias entre los resultados experimentales y teóricos pueden ser absorbidas en las incertidumbres teóricas o son causadas por efectos físicos no tenidos en cuenta.

Lo discutido hasta el momento invita a continuar indagando acerca del espectro mesónico, ya que de esta manera se profundiza en el estudio teórico de la poco conocida región no perturbativa de la QCD.

En base a lo anteriormente expuesto, el presente trabajo tiene como fin construir un modelo de interacción relativista en el espacio del momentum para reproducir el espectro del charmonium y bottomonium. En el modelo propuesto no se hacen truncamientos no relativistas y además se va a tener en cuenta la relatividad utilizando, para representar los estados del quark y antiquark, los correspondientes espinores de Dirac que, en todo caso, constituyen los “ladrillos” fundamentales de toda teoría relativista para estos sistemas.

Debe recordarse que la relatividad es un elemento necesario y fundamental para el estudio teórico de sistemas hadrónicos, debido a que permite un mejor acercamiento a la teoría subyacente que establece la dinámica entre hadrones que es la QCD. En esto radica la importancia del presente trabajo y su originalidad debido a que podría ser considerado como de los primeros (o quizás el primer) estudio Dirac-relativista de este tipo de sistemas.

Para reproducir los espectros experimentales, en el presente trabajo, ha sido suficiente utilizar dos interacciones: una interacción vectorial basada en la expresión completa del intercambio de un gluón y una interacción fenomenológica escalar; en las dos interacciones se utilizan espinores de Dirac de energía positiva. En ambas interacciones se incorporan potenciales fenomenológicos $V^{(v)}$ y $V^{(s)}$ para la interacción vectorial y escalar respectivamente, en los que se incluye el confinamiento de los quarks. Además, se introducen factores de apantallamiento fenomenológico en el Hamiltoniano de interacción, lo cual es una novedad en los cálculos que se realizan en el espacio del momentum. De hecho, toda la interacción es contruida en el espacio del momentum debido a la estructura de los espinores de Dirac que se utilizan en el modelo. Por consiguiente, debido a que no se realizan reducciones no relativistas, la interacción no tiene transformada de Fourier analítica, inhibiendo la obtención de una expresión analítica en el espacio de coordenadas. Por tal razón, es necesario hacer todos los cálculos numéricos en el espacio del momentum.

Para resolver la compleja ecuación integral de autovalores para el operador Hamiltoniano se utiliza una técnica variacional y se diagonaliza la matriz Hamiltoniana en una base ortonormal seleccionada. Los parámetros del modelo se ajustan para reproducir las masas experimentales mejor establecidas del charmonium y bottomonium. Este proceso de ajuste (fit) se hace de manera separada, teniendo en cuenta las incertidumbres experimentales. Las incertidumbres, a su vez, son propagadas exactamente a los parámetros y al espectro determinado teóricamente a través de la técnica estadística conocida como bootstrap. Este método es computacionalmente costoso pero permite una rigurosa determinación, desde el punto de vista estadístico, de los parámetros del modelo y de sus incertidumbres y también permite la propagación de las incertidumbres al espectro calculado. Además, esta técnica posibilita la construcción de matrices de correlación de los parámetros del modelo relativista. Para realizar los cálculos se construyeron diferentes subrutinas en lenguaje FORTRAN y los ajustes fueron realizados en paralelo utilizando el protocolo MPI (*Message Passage Interface*) y empleando las subrutinas de MINUIT [55].

La inclusión de las incertidumbres experimentales tiene como fin identificar las diferencias estadísticas significativas entre el espectro teórico y el experimental, indicando cuales estados necesitan física más allá que solo el sistema $q\bar{q}$ descrito por la interacción del modelo que aquí se propone. Adicionalmente el análisis de las matrices de correlación arroja información sobre la independencia física de las diferentes piezas que constituyen el modelo fenomenológico. Al hacer una búsqueda profunda en la literatura científica, no se en-

cuentran trabajos previos en modelos fenomenológicos de charmonium o bottomonium que hayan estudiado las correlaciones entre parámetros o hayan asociado las incertidumbres experimentales a los parámetros o al espectro predicho. Lo anterior implica que la inclusión de las incertidumbres experimentales en el ajuste de los espectros del charmonium y bottomonium constituye otro aporte original del presente trabajo de investigación.

La mejora en el fundamento relativista del modelo de interacción propuesto para el estudio de los mesones pesados, responde a la necesidad de una descripción más adecuada del espectro mesónico y especialmente de los estados excitados, los cuales experimentan los efectos relativistas con más intensidad que los estados base, debido al rango de energía que en el que se encuentran. Así mismo, los efectos de producción de pares pueden afectar el valor de la energía de los estados en regiones cercanas a umbrales de decaimiento. Por esta razón fue añadido el factor de apantallamiento el cual tiene en cuenta este efecto de manera fenomenológica. Se resalta además, que los estados X y Y^1 al yacer en esa misma zona de energía, generan un mayor interés en una descripción más completa a nivel relativista. De esta manera, en el presente trabajo se utiliza el modelo desarrollado para calcular teóricamente el espectro del charmonium y bottomonium y comparar las predicciones realizadas con los datos experimentales en particular los de los estos estados X y Y . En esta forma, en el contexto del modelo propuesto, se discute la naturaleza de estos estados.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 2 se exponen antecedentes teóricos importantes para este trabajo; en el capítulo 3 se discuten brevemente unos enfoques teóricos alternativos, actualmente relevantes, con los que se estudia el quarkonium y se mencionan algunos avances experimentales recientes de relevancia para el presente estudio; en el capítulo 4 se expone la ecuación relativista utilizada, en el capítulo 5 se construye el modelo de interacción relativista propuesto en este trabajo de tesis; en el capítulo 6 se describe el método estadístico utilizado en la propagación de los errores experimentales en los parámetros del modelo y en el espectro producido; en el capítulo 7 se exponen en detalle tanto el método de solución que se utiliza para resolver el Hamiltoniano propuesto como el procedimiento de propagación de los errores experimentales lo cual es basado en el anterior capítulo; en el capítulo 8 se muestran y discuten en detalle los resultados relacionados al charmonium. Se destaca que este capítulo es basado en la publicación realizada en mayo del presente año en la revista Physical Review D [56]. En el capítulo 9 se exponen los resultados del espectro relacionado con el bottomonium, resultados que serán sometidos a publicación y finalmente, en el capítulo 10 se tienen las conclusiones del trabajo de tesis.

¹No se tiene en cuenta más el estado Z debido a que es un estado cargado, el cual no puede ser $c\bar{c}$ solamente y por lo tanto, no puede ser descrito por el modelo aquí propuesto.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. QCD

La primera teoría de campo cuántica y relativista fue la QED (Quantum Electro-Dynamics). En esta teoría se modelan las interacciones electromagnéticas a través del intercambio de fotones. Es ampliamente conocido que el fotón carece de carga eléctrica debido a la sencilla simetría $U(1)$ que posee la QED [57]. La QED, siendo una teoría gauge (con grupo de simetría $U(1)$) es renormalizable.

Además, es posible escribir la serie perturbativa asociada a la interacción como una serie de potencias de la constante de estructura fina α_{em} y representar gráficamente cada término de la serie por medio de un diagrama de Feynman [58]. El pequeño valor de α_{em} (elevado en cada término a la potencia correspondiente) permite una descripción perturbativa, extremadamente útil, en particular, para el estudio de los procesos de dispersión. Por consiguiente, los datos experimentales de estos procesos han sido reproducidos con un alto nivel de precisión numérica por medio de la expansión perturbativa.

Con estos antecedentes, se construyó una teoría apta para el estudio de las partículas hadrónicas que incluye el número cuántico de *color*, cuya existencia se ha verificado de manera fenomenológica en procesos de dispersión e^+e^- . Adicionalmente, en la función de onda de la resonancia Δ^{++} (compuesta por tres quarks u), el principio de Pauli puede ser satisfecho sólo introduciendo el número cuántico de color.

La teoría así construida es la QCD (Quantum Cromo-Dynamics) que es una teoría gauge y por lo tanto renormalizable, la cual está basada en la simetría no Abelianiana $SU(3)$ del color a nivel local. En más detalle es necesario recordar que las interacciones de los quarks en los hadrones son más complejas que las electromagnéticas, pues existen tres diferentes “cargas” de color [59] debido a la simetría ya mencionada. Adicionalmente, las partículas de intercambio, los gluones, también tienen carga de color, en total oposición al fotón. Bajo estas circunstancias el Lagrangiano de la QCD es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu,\nu}^a G_a^{\mu,\nu} + \bar{\psi}_i (i(\gamma^\mu D_\mu)_{ij} - m\delta_{ij})\psi_j \quad (2.1)$$

$$\text{Donde } G_{\mu,\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + gf^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c \quad (2.2)$$

Donde \mathcal{A} es el campo gluónico, a, b y c son los índices de color, m es masa de los quarks, γ^μ las matrices de Dirac, ψ el campo fermiónico asociado a los quarks y f son las constantes de estructura propias de la simetría $SU(3)$, lo cual implica que la teoría es no Abelianiana. A causa de esta simetría los bosones intermedios poseen carga de color y por lo tanto interactúan entre ellos. Por último, los índices i, j están asociadas a la representación irreducible asociada a $SU(3)$.

La ecuación (2.1) expresa, en principio, todas las interacciones entre gluones y quarks. De esta manera, la QCD permite la existencia de diagramas de Feynman como los que se muestran en la Figura 2.1

A diferencia de la QED el término de acoplamiento de las interacciones no se puede considerar como perturbativo a todo valor del momentum transferido. En QCD la constante de acoplamiento α_{st} (running coupling constant) es perturbativa sólo en las regiones de alto momentum transferido. Esto es conocido como *libertad asintótica* [60]. Esto permite calcular con técnicas perturbativas secciones eficaces en procesos de alta energía. Los resultados teóricos son acordes a los datos experimentales, confirmando que la QCD es la teoría apta para el estudio de las interacciones hadrónicas.

Por el contrario, la descripción de estados ligados, que pertenecen a la región de baja energía, no puede ser

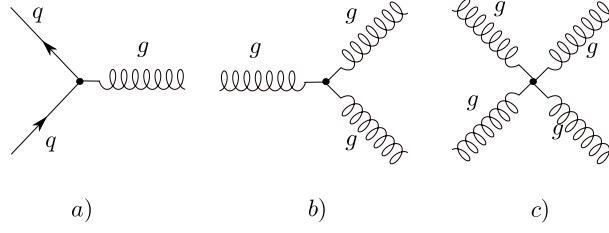


Figura 2.1: Diagramas de Feynman fundamentales de la QCD.

realizada con las mismas técnicas.

A bajos valores de momentum transferido, α_{st} tiene valores que no permiten expresar la interacción como una serie perturbativa. De esta manera, configuraciones más y más complicadas de la Figura 2.1 vienen a ser importantes en la interacción.

En todo caso, la interacción que describe el estado ligado debe incluir la expresión relacionada al intercambio de un gluón (OGE *One Gluon Exchange*), el cual está representado en Figura 2.2 y es obtenido por medio de dos diagramas (a) de la Figura 2.1. Teniendo en cuenta la importancia de este diagrama, se calculará el factor de color asociado a este diagrama en el canal t , puesto que el único canal relevante que contribuye a la amplitud en el estudio del Charmonium y del Bottomonium [61, 62].

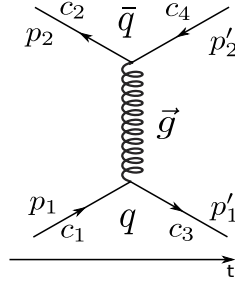


Figura 2.2: Diagrama asociado al intercambio de un gluon en un sistema $q\bar{q}$.

Utilizando la reglas de Feynman de la QCD la amplitud de probabilidad asociada a este diagrama (Figura 2.2) se puede escribir en la forma

$$\mathcal{M} = i \left(\bar{u}(p'_1) c_3^\dagger \right) \left(-\frac{i\sqrt{\alpha_{st}} \lambda^a \gamma^\mu}{2} \right) (u(p_1) c_1) \left[-i\delta^{ab} D_{\mu\nu}(q) \right] \left(\bar{v}(p'_2) c_4^\dagger \right) \left(-\frac{i\sqrt{\alpha_{st}} \lambda^b \gamma^\nu}{2} \right) (v(p_2) c_2). \quad (2.3)$$

Donde $\lambda^{a,b}$ son las matrices de Gell-Mann u y v son los espinores quark y antiquark respectivamente. Finalmente c_i es el vector asociado al color del quark y antiquark. $-i\delta^{ab} D_{\mu\nu}(q)$ es el propagador gluónico, en algun gauge particular. En este trabajo se utilizará el gauge de Coloumb el cual es conveniente, cuando se estudian estados ligados (ver ecuaciones (5.14) y (5.15)).

$$\mathcal{M} = \alpha_{st} (\bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1)) [D_{\mu\nu}(q)] (\bar{v}(p'_2) \gamma^\nu v(p_2)) \underbrace{\left\{ \frac{1}{4} \left[c_3^\dagger \lambda^a c_1 \right] \left[c_4^\dagger \lambda^a c_2 \right] \right\}}_A. \quad (2.4)$$

En la anterior ecuación la expresión en llaves (A) es el factor de color. Puesto que se esta considerando un sistema mesónico (quarkonium) se sabe que el estado de color debe ser un singlete antes y después del

intercambio. El singlete se puede expresar como $\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})$, donde $r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Haciendo el cálculo correspondiente en el factor A se obtiene la siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \frac{1}{3} (\lambda_{mn}^\alpha \lambda_{nm}^\alpha) \\ &= \frac{1}{12} \underbrace{\text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\alpha)}_{16} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\mathcal{M} = \frac{4\alpha_{st}}{3} (\bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1)) [D_{\mu\nu}(q)] (\bar{v}(p'_2) \gamma^\nu v(p_2)). \quad (2.5)$$

Se recuerda que la expresión (2.5) se puede obtener a partir de la correspondiente expresión de la QED solo reemplazando la constante de estructura fina α con $4\alpha_{st}/3$.

Como se verá, a través del presente escrito, esta expresión (ecuación (2.5)) será parte fundamental de la interacción propuesta y no se aproximará de forma no relativista (ver secs. (5.3) y (7.2)).

En la siguiente sección se discutirá brevemente un método no perturbativo, directamente relacionado con la QCD, para estudiar los estados ligados.

2.2. Lattice QCD

Como ya se mencionó, obtener información de observables a bajas energías a partir de la QCD es difícil debido a su compleja estructura y a la intensidad de la interacción que no permite un enfoque perturbativo en regiones de estados ligados. Sin embargo, a finales de los setentas Keneth Wilson demostró la posibilidad de abordar la QCD a nivel numérico [63] aprovechando el desarrollo computacional de la época.

La técnica del Lattice QCD (LQCD) es caracterizada por tres aspectos importantes. En primer lugar, no se utiliza el normal espacio-tiempo de Minkowski con un tiempo físico (representado por una variable real), sino que este se reemplaza por una variable imaginaria, obteniendo un espacio cuadridimensional Euclideano. De esta manera se evitan unas divergencias típicas de la teoría de campo. El siguiente aspecto consiste en aproximar el espacio tiempo Euclideano continuo con una grilla (retículo), es decir, se discretiza el espacio tiempo. Por ultimo, se construyen las variables de campo bajo la invarianza gauge [64]. Una ventaja que presenta esta descripción es que la discretización actúa como un esquema de regularización no perturbativa, puesto que se crea un “cut-off” que regula la divergencias ultravioletas [65, 66].

Debido a las limitaciones computacionales iniciales fue necesario realizar una aproximación en la cual no se tenía en cuenta el determinante fermiónico y por lo tanto la dinámica del mar de quarks era omitida. Esta aproximación es llamada “quenched” QCD (QQCD). Sin embargo, recientemente se han incluido estos grados de libertad, permitiendo trabajar bajo el enfoque “unquenched”.

Evidentemente las limitaciones que tiene el método están relacionadas precisamente a la discretización y a la necesidad de utilizar un volumen finito, puesto que esto afecta el rompimiento espontaneo de la simetría. Adicionalmente al reducir el tamaño del “cubo” tetradimensional, el tiempo de cálculo crece de forma muy rápida.

A pesar de estas dificultades, este método ha conseguido importantes resultados desde su utilización, debido a que se fundamenta en las ecuaciones completas de la QCD y por lo tanto trata de manera relativista y cuántica, en el espacio Euclideano discretizado, el problema no perturbativo. Bajo estas condiciones, es posible calcular las amplitudes de dispersión. Estos resultados requieren de un análisis de amplitudes, que utiliza modelos con parámetros libres, para poder encontrar los polos a los que son asociadas las resonancias. De esta manera es posible extraer el espectro de un sistemas ligado.

En particular, los cálculos de Lattice indican que el confinamiento de los quarks crece linealmente con la distancia de los quarks, soportando, de esta manera, el bien conocido potencial de Cornell [67], el cual será presentado junto a otros potenciales en la siguiente sección. Se anticipa que una interacción con esta característica será usada también en el modelo relativista propuesto en el presente trabajo.

2.3. Modelos de potencial

A pesar de que en los años sesentas el modelo de quark ya se había propuesto solo hasta mediados de los setentas dicho modelo fue casi completamente aceptado a causa del descubrimiento del estado J/ψ el cual podía ser explicado en términos del charm-anticharm. De esta forma los modelos de potencial se empezaron a usar como primera herramienta para analizar los datos experimentales del espectro del charmonium. Debido a que la masa del quark charm es lo suficientemente grande, se hizo la hipótesis que, en primera aproximación fuera posible estudiar el charmonium con la ecuación no relativista de Schrödinger, agregando correcciones relativistas. En otras palabras, se empezó la construcción de modelos dinámicos efectivos no relativistas para el estudio de los sistemas hadrónicos. Estos modelos han sido definidos de quark *constituyentes* para subrayar que, en estos modelos, los quarks no tienen (necesariamente) las mismas propiedades de los quarks de la QCD, sino que representan grados de libertad efectivos para el estudio de las propiedades de las partículas hadrónicas. Existen estudios que intentan relacionar las propiedades de los quarks constituyentes con la QCD.

En particular, en estos modelos los siguientes potenciales [68, 69] son los más comunes:

$$V(r) = -\frac{4\alpha_{st}}{3r} + \sigma r, \quad (2.6a)$$

$$V(r) = -A + B \text{Log}\left(\frac{r}{a}\right), \quad (2.6b)$$

$$V(r) = C + D(r/1\text{GeV})^k. \quad (2.6c)$$

El primero de ellos, dado en la ecuación (2.6a), es el más usado debido a que sus términos son inspirados en la QCD, donde α_{st} se asocia de manera efectiva a la “running coupling constant” y σ es conocida como “string tension” y son considerados como parámetros fenomenológicos ajustables con respecto a los datos experimentales. Sus valores típicos son de 0.35 y 0.9GeV/fin. La parte tipo Coulomb se basa en aproximación a un gluón de intercambio para la interacción. El confinamiento lineal es fundamentado en cálculos de Lattice QCD. Por otro lado los potenciales (2.6b), (2.6c) son totalmente fenomenológicos. A pesar de esto pueden reconstruir de buena forma el espectro del charmonium [70] [71]. Valores típicos de los parámetros utilizados en estos potenciales totalmente fenomenológicos son $A = -0.66\text{GeV}$, $B = 0.73\text{GeV}$ y $a = 1\text{fm}^{-1}$ y $C = 8.06\text{GeV}$ además $C = -0.8\text{GeV}$, $D = 6.870$ y $k = 0.1$.

2.4. Modelos de potencial con efectos relativistas

Por completez se discute ahora la estructura general de unos modelos de potencial que tienen en cuenta algunos efectos relativistas introducidos con el fin de mejorar la reproducción de los espectros del charmonium o bottomonium. Esto es posible al tener en cuenta con técnicas perturbativas al primer orden, las correcciones relativistas a la energía cinética, la interacción espín-órbita, la interacción espín-espín y tensorial. Estos términos están sustentados en la reducción de Fermi-Breit [72] y permiten, además, reproducir de mejor manera los estados más excitados de los espectros.

La expresión de Fermi-Breit tiene su origen en la amplitud (2.5) para dos partículas de masa m_q . Utilizando el gauge de Coulomb y haciendo una expansión no relativista hasta términos $1/c^2$, es posible obtener una expresión semirelativista de la interacción entre los quarks de masa m_q . Calculando su transformada de Fourier al espacio de coordenadas, se obtiene:

$$V(r; p)_{Fermi-Breit} = -\frac{4\alpha_{st}}{3r} + \sigma r + \frac{4\pi\alpha_{st}}{3m_q^2c^2}\delta^{(3)}(\vec{r}) - \frac{2\alpha_{st}}{3m_q^2c^2}\left[\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{r} + \frac{(\vec{r}\cdot\vec{p})(\vec{r}\cdot\vec{p})}{r^3}\right] \\ + \frac{4\alpha_{st}}{3m_q^2c^2}\left[\frac{8\pi}{3}\delta^{(3)}(\vec{r})(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2) + \frac{3(\vec{s}_1\cdot\hat{r})(\vec{s}_2\cdot\hat{r}) - \vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{r^3}\right] + \frac{2\alpha_{st}}{m_q^2c^2}\frac{(\vec{r}\times\vec{p})\cdot(\vec{s}_1+\vec{s}_2)}{r^3}. \quad (2.7)$$

Donde \vec{s}_1 y \vec{s}_2 son operadores de espín asociados a los dos quarks, \vec{p} es el momentum relativo, \hat{r} es un vector unitario en dirección de una partícula a la otra y r la distancia entre quarks. Adicionalmente, el factor $4/3$ surge del elemento de matriz asociado al color (ver sección 2.1). El término lineal no surge de esta aproximación, pero es incluido para tener en cuenta el confinamiento de los quarks. El término de Coulomb es de orden c^0 , mientras que los otros términos son correcciones relativistas de orden c^{-2} . En esta ecuación

se observan las interacciones finas e hiperfinas que optimizan la posibilidad de reproducir mejor un espectro hadrónico. Vale la pena resaltar que en muchos casos todos los términos fuera del Cornell (ecuación (2.6a)) son tratados de forma perturbativa. Es una suposición que podría ser errónea y que algunos autores critican. Por otro lado, existen otros modelos que tienen en cuenta más consideraciones que mejoran el apelativo de relativista. Por ejemplo en la referencia [42] tienen en cuenta términos adicionales inspirados en la QCD, en particular la dependencia de la “running coupling constant” α_{st} con el momento transferido.

Adicionalmente, existen trabajos que generalizan la ecuación de Fermi-Breit y encuentran una expresión para la interacción, hasta los términos de corrección relativista de orden c^{-2} , partiendo de potenciales de orden c^0 con una dependencia espacial diferente a la del potencial de Coulomb. En particular en la referencia [47] se encuentra la siguiente expresión para el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
H_{int}^g(\vec{r}, \vec{p}; \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = & V(r) + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{8m_1^2} (1 + 2\kappa_1) + \frac{1}{8m_2^2} (1 + 2\kappa_2) \right] \nabla^2 V(r) + \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{1}{4m_1^2} + \frac{1}{2m_1 m_2} \right) (1 + 2\kappa_1) \vec{\sigma}_1 \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{4m_2^2} + \frac{1}{2m_1 m_2} \right) (1 + 2\kappa_2) \vec{\sigma}_2 \right] \cdot \vec{r} \frac{V'(r)}{r} + \frac{1}{c^2} \frac{1}{m_1 m_2} (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) \left[\frac{1}{6} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \nabla^2 V(r) \right. \\
& - \frac{1}{4} [(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) - \frac{1}{3} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2] \left(-\frac{V'(r)}{r} + V''(r) \right) \left. \right] + \frac{1}{c^2} \frac{1}{8m_1 m_2} [\{p^2, V(r)\} + 2p^\alpha V(r) p^\alpha] \\
& + \frac{1}{c^2} \frac{1}{4m_1 m_2} [\{p^\alpha p^\beta, \hat{r}^\alpha \hat{r}^\beta W(r)\} + 2p^\alpha \hat{r}^\alpha \hat{r}^\beta W(r) p^\beta]. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

En la anterior expresión los términos κ_i hacen referencia a las posibles contribuciones de los momentos (cromo) magnéticos anómalos de las partículas y es tomado para un sistemas de dos partículas de masas m_1 y m_2 . Donde $V(r)$ es el potencial de interacción y $W(r) = -\frac{1}{2}V'(r)$. De esta ecuación se obtiene la tradicional expresión de Fermi-Breit si $V(r)$ es tomado como el potencial de Coulomb estándar. Es posible obtener, con la misma técnica, una reducción no relativista para una interacción escalar. Utilizando las dos interacciones se ha estudiado en esta aproximación, el espectro del charmonium [45].

A pesar de estas mejoras, las anteriores expresiones son, en todo caso, aproximaciones no relativistas. Como se verá en el presente trabajo, la interacción vectorial del modelo propuesto (ver sección 5.3), parte de esta misma amplitud (expresión (2.5)) pero sin realizar ninguna expansión no relativista.

2.5. Ecuaciones relativistas para estados ligados

De manera alternativa al LQCD y a los modelos de potencial, es posible abordar el estudio relativista de sistemas ligados por la interacción fuerte a partir de ecuaciones integrales relativistas. Sin embargo, estas ecuaciones no tienen, todavía, una formulación teórica completa y satisfactoria. En otras palabras no existe (para estos sistemas) una verdadera generalización de la ecuación de Schrödinger al caso relativista.

En esta sección se va a discutir brevemente la estructura de algunas de las muchas ecuaciones propuestas en la literatura. Más precisamente se van a analizar las ecuaciones de carácter tridimensional que más directamente se relacionan con el Hamiltoniano utilizado en el presente trabajo. Algunos detalles sobre otras técnicas relativistas utilizadas recientemente para el estudio de las partículas hadrónicas serán examinadas en el siguiente capítulo (3).

Por medio de estas ecuaciones relativistas (si se quisiera encontrar resultados exactos a partir de la QCD en la región de estados ligados) sería, en todo caso, necesario sumar un conjunto infinito de diagramas de Feynman. Infortunadamente, este procedimiento aún no es viable y es necesario recurrir a aproximaciones que permitan expresar y resolver las ecuaciones integrales según un modelo específico. Una de estas aproximaciones consiste en buscar una ecuación integral cuya solución represente la suma de *un tipo* de diagramas de Feynman que se supone aporte de manera más significativa a la interacción. De esta manera al solucionar dicha ecuación integral debería ser posible dar cuenta de las características más importantes del sistema físico en cuestión.

Como punto de partida, se recuerda que, en general, la amplitud de dispersión para dos partículas se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathcal{T}(p, p', P) = V(p, p', P) + \int_k V(p, k, P) G(k, P) \mathcal{T}(k, p', P). \quad (2.9)$$

Donde p , k , p' y P representan los cuadrimomentos relativos inicial, intermedio, final y el cuadrimomento total del sistema, respectivamente. El tipo de integral, sea cuatridimensional o tridimensional depende del particular modelo escogido. Por esta razón solo se ha utilizado en la ecuación (2.9) la notación general \int_k . El funcional de estado de los cuadrimomentos p y P correspondientes, para un estado ligado, se puede escribir:

$$\psi(p) = \int d^4k G(k, P) V(p, k, P) \psi(k) . \quad (2.10)$$

Las elecciones para el propagador G y para la interacción V son propias de cada modelo.

Desde un punto de vista histórico es conveniente recordar que el complicado problema de la interacción entre nucleones dio inicio, en los años setentas y ochentas, al estudio de diferentes métodos para reproducir los espectros y los demás observables nucleares. A pesar del hecho que, en general, los sistemas nucleares son considerados esencialmente “poco” relativistas, el estudio de los posibles efectos que la relatividad pudiese tener, comenzó a tomar importancia en el ámbito científico. Por lo tanto, se intentó calcular las *correcciones relativistas* no sólo para la energía cinética, sino para los términos de interacción.

Con este propósito se estudiaron diferentes ecuaciones relativistas. Hipotéticamente, sería conveniente que dichas ecuaciones fueran de carácter 4-dimensional, de esta forma, serían más aptas para representar una interacción relativista, pero el funcional 4-dimensional no puede ser interpretado según los conceptos estándares de la mecánica cuántica y no es, en general, una cantidad normalizable con técnicas estándares.

En base a lo anterior se discuten ahora brevemente las siguientes características ideales, o requisitos, que la ecuación relativista debería tener y las dificultades relacionadas con las diferentes elecciones [73].

- I) La ecuación debe estar estrictamente conectada con la teoría cuántica de campos subyacente. Esto se puede alcanzar sólo de forma aproximada. Buenos resultados se han obtenido por medio de ecuaciones tridimensionales que, además, presentan la ventaja de poder ser interpretadas y resueltas por medio de las herramientas estándares de la mecánica cuántica.
- II) En este marco, se requiere que la ecuación, cuando se aplica a sistemas de dos partículas ligadas por la interacción electromagnética, debe tender a la ecuación de Dirac para una partícula cargada en un campo electromagnético en el caso en que la masa de la *otra* partícula tienda al infinito.
- III) La ecuación debería asegurar un correcto tratamiento de las componentes de energía negativa de los espinores de Dirac del quark y del antiquark, para que la ecuación no admita soluciones espurias no normalizables (problema de la “continuum dissolution”). Este problema es particularmente relevante cuando la ecuación se utilice para la descripción de sistemas muy relativistas (heavy-light mesons y light-light mesons).
- IV) La ecuación debe tratar de la misma manera las dos partículas. En particular, en el caso de dos fermiones indistinguibles, debe ser simétrica respecto al intercambio de las dos partículas para permitir la correcta antisimetrización de la función de onda del sistema.

A continuación se describen algunas de las principales ecuaciones relativistas que se suelen utilizar en la investigación de espectros de estados ligados. Se anticipa que el problema es muy complejo y, por tanto, no puede ser tratado de manera exhaustiva en la presente tesis. Además, se resalta que diferentes investigaciones muestran que es muy difícil satisfacer simultáneamente los cuatro requisitos que se mencionaron anteriormente.

2.5.1. Ecuación de Bethe-Salpeter

A través de la técnica diagramática de Feynman se ha logrado una gran precisión en la descripción asociada a procesos electromagnéticos. De esta manera se ha demostrado su gran efectividad en la comprensión y en los cálculos asociados a estos procesos perturbativos. Dado el éxito mencionado, es natural utilizar estas mismas herramientas teóricas para obtener una ecuación covariante para el estudio de un sistema ligado, es decir, un sistema en el que las partículas interactúan permanentemente. Bethe y Salpeter encontraron una ecuación cuatridimensional que, en principio, permite estudiar de manera completamente relativista un sistema de dos partículas en estado ligado. Sin embargo, la naturaleza de la interacción (por ejemplo con interacción fuerte) y la dificultad propia de la ecuación, no permite un sencillo desarrollo de la misma, como

pronto se verá en la presente sección. Esta ecuación es considerada por razones históricas y conceptuales (más que por los resultados directamente obtenidos de ella) como el punto de partida y el marco teórico necesario para enfrentar el estudio de las ecuaciones relativistas.

Para construir la ecuación de Bethe-Sapeter es posible comenzar en el espacio de coordenadas y posteriormente pasar al espacio del momentum. De esta manera se parte de la siguiente expresión:

$$\psi(x_3, x_4) = -i \int d^4x_1 d^4x_2 G(x_3, x_4; x_1, x_2) \psi(x_1, x_2), \quad (2.11)$$

donde $\psi(x_1, x_2)$ es el funcional de estado asociado a las dos partículas de cuadricordenadas x_1 y x_2 y que es propagado en el espacio-tiempo por medio de $G(x_3, x_4; x_1, x_2)$. En el caso de partícula libre, el propagador puede ser escrito como el producto del propagador de cada partícula. Pero, para el caso no trivial en el que sí existe interacción el propagador se complica.

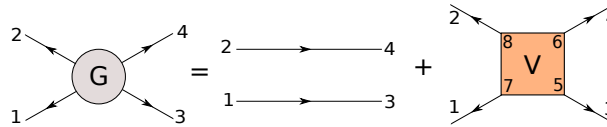


Figura 2.3: Propagador de la interacción expresado como la suma de un propagador libre y un término asociado a la interacción.

Es posible expresar el propagador en términos de un propagador libre y un término asociado a la interacción, como está representado en la Figura 2.3. En esa figura la interacción V , que representa el kernel de interacción, puede contener cualquier tipo de diagramas de Feynman. Algunos de estos diagramas están constituidos por partes que pueden ser desconectadas al cortar dos líneas fermiónicas. Estos gráficos son llamados *reducibles*, de lo contrario son *irreducibles*; esto significa que la sumatoria infinita de todos los gráficos *irreducibles*, iterados por el propagador, describe de forma completa toda la interacción.

En otras palabras, es posible reescribir la interacción representada en la Figura 2.3, utilizando los gráficos *irreducibles* \mathcal{V} a través de la iteración sucesiva [74] del diagrama que se muestra en la Figura 2.4.

La expresión asociada a la interacción de la Figura 2.4, en donde se han utilizado los diagramas irreducibles

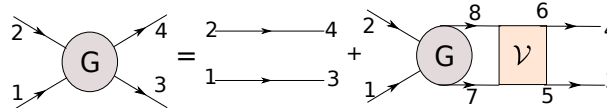


Figura 2.4: Propagador de la interacción expresado como la suma de un propagador libre y diagramas irreducibles.

\mathcal{V} en la interacción es:

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = iG(x_1, x_3)G(x_2, x_4) + \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 iG(x_3, x_5) iG(x_4, x_6) \mathcal{V}(x_5, x_6, x_7, x_8) iG(x_7, x_8; x_1, x_2). \quad (2.12)$$

Al reemplazar el propagador de la ecuación (2.12) en la ecuación (2.11) se obtiene:

$$\psi(x_3, x_4) = \psi^0(x_3, x_4) + \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 iG(x_3, x_5) iG(x_4, x_6) \underbrace{\mathcal{V}(x_5, x_6, x_7, x_8) G(x_7, x_8; x_1, x_2)}_{\psi(x_7, x_8)} \psi(x_1, x_2). \quad (2.13)$$

La anterior ecuación es la ecuación de Bethe-Salpeter en el espacio de coordenadas, donde $\psi^0(x_3, x_4)$ representa el funcional de estado de dos partículas libre. Renombrando los índices por sencillez de notación sin

perder generalidad y utilizando el hecho de que los propagadores son funciones de Green, es posible escribir la anterior ecuación para estados ligados, de la siguiente forma:

$$(i\nabla_1 - m_1)(i\nabla_2 - m_2)\psi(x_1, x_2) = \int d^4x_3 d^4x_4 \mathcal{V}(x_1, x_2, x_3, x_4)\psi(x_3, x_4), \quad (2.14)$$

donde m_i son las masas de las partículas $i = 1, 2$ que forman el estado ligado y $\nabla_i = \gamma_i^\mu \partial_{\mu_i}$ con $i = 1, 2$ el índice de cada partícula. Fácilmente se puede obtener su transformada de Fourier, para finalmente ser expresada en el espacio del momentum, tomando la siguiente forma:

$$(\not{p}_1 - m_1)(\not{p}_2 - m_2)\psi(p_1, p_2) = \int d^4p'_1 d^4p'_2 \mathcal{V}(p_1, p_2, p'_1, p'_2)\psi(p'_1, p'_2). \quad (2.15)$$

Donde p_1 y p_2 son los cuadrimomentos de las dos partículas, además $\not{p}_i = \gamma^\mu p_{i\mu}$ para $i = 1, 2$.

A pesar de su aparente sencillez, esta ecuación aún en la actualidad no puede ser resuelta de manera completamente satisfactoria para interacciones físicamente relevantes. En la práctica, para desarrollar modelos de sistemas físicos reales, se utiliza un propagador de quark que cumpla con su propia ecuación de Dyson Schwinger [38], además es necesario realizar aproximaciones en el kernel de interacción. También, muchos modelos usan una reducción tridimensional para obtener una solución de esta ecuación.

Como ya se había comentado, en la forma del kernel se encuentra la suma de gráficos irreducibles de la teoría de campo subyacente. Por lo tanto el kernel define la aproximación en la cual la ecuación de BS será aplicada [75]. Para que la ecuación fuera exacta sería necesario sumar todos los posibles diagramas irreducibles, los cuales están constituidos por los (infinitos) diagramas “escalera” y “cruzados”. Se observa con claridad la limitación de la ecuación de BS, puesto que no hay forma eficiente de sumar todos los diagramas necesarios. Bajo estas circunstancias, se prefiere aplicar métodos de aproximación para conseguir resultados numéricos para cantidades observables. Una aproximación usada con mucha frecuencia consiste en tener en cuenta sólo los diagramas tipo “escalera”. Esta expresión es conocida como *Ladder Approximation*. Por supuesto, esto genera problemas. Aparecen soluciones con energías complejas conocidas como soluciones anormales [75], originadas por no tener en cuenta los diagramas cruzados, además (en la aproximación de diagramas “escalera”) no se obtiene el límite de Dirac cuando una de las masas tiende a infinito. El hecho de elegir unos

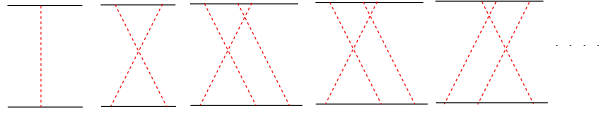


Figura 2.5: Gráficos irreducibles tipo “escalera” y “cruzados”

diagramas y excluir otros, no es justificado a nivel teórico [76] y por tal razón, muchos trabajos basados en esta técnica tienen profundas limitaciones en el estudio del espectro de hadrones.

2.5.2. Reducción tridimensional de la ecuación de Bethe Salpeter con la aproximación de interacción instantánea

En la presente sección se describe un método específico para obtener una (entre las muchas posibles) ecuación relativista tridimensional.

Dado que se está estudiando un sistema de dos partículas es conveniente pasar a coordenadas de centro de masa. Además, en la práctica es conveniente suponer que la interacción (considerando en particular el Gauge de Coulomb para la QED y la QCD) puede ser tratada de manera aproximada en el límite de interacción instantánea (no relativista), eliminando, en la interacción, la dependencia de las componentes temporales de los momentos relativos, es decir, $\mathcal{V}(p, p', P) \rightarrow \mathcal{V}(\vec{p}, \vec{p}', P)$ [77, 78]. En aproximación instantánea y por medio de la introducción del cuadrimomento total y del cuadrimomentum relativo, la ecuación (2.15) se puede escribir como

$$(\mu_1 \not{P} + \not{p}_1 - m_1)(\mu_2 \not{P} - \not{p}_2 - m_2)\psi(p) = -(2\pi i)^{-1} \int d^4p' \mathcal{V}(\vec{p}, \vec{p}', P)\psi(p'), \quad (2.16)$$

donde $\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$, $\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ y $\psi(p)$ es la función de onda del sistema. Además, P es el cuadrimomentum total asociado al centro de masa con E como componente cero (componente temporal), es decir, $P = (P^0 =$

E, \vec{P}) y p representa el cuadrivector relativo con componente cero ϵ , es decir $p = (p^0 = \epsilon, \vec{p})$, además $p_i = p^\mu \gamma_\mu^i$ para $i = 1, 2$.

Si se multiplica la ecuación (2.16) por $\gamma_0^1 \gamma_0^2$ con facilidad se obtiene:

$$(\mu_1 E - H_1(\vec{p}) + \epsilon) (\mu_2 E - H_2(\vec{p}) - \epsilon) \psi(p) = -\frac{1}{2\pi i} \int d^4 p' \mathcal{V}'(\vec{p}, \vec{p}', P) \psi(p'), \quad (2.17)$$

donde $\mathcal{V}'(\vec{p}, \vec{p}', P) = \gamma_0^1 \gamma_0^2 \mathcal{V}(\vec{p}, \vec{p}', P)$ y

$$H_1(\vec{p}) = \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{p} + \beta_1 m_1, \quad H_2(\vec{p}) = -\vec{\alpha}_2 \cdot \vec{p} + \beta_2 m_2 \quad \text{y} \quad \vec{p} = \vec{p}_1 = -\vec{p}_2. \quad (2.18)$$

Aprovechando la reducción a interacción instantánea, es posible integrar respecto a la componente cero ϵ . De esta manera, es posible definir una función de onda estándar que solo dependa del trivector \vec{p} , de la siguiente forma

$$\phi(\vec{p}) = \int d\epsilon \psi(\epsilon, \vec{p}). \quad (2.19)$$

Además es conveniente definir

$$\mathcal{F}(\epsilon, \vec{p}) = (\mu_1 E - H_1(\vec{p}) + \epsilon) (\mu_2 E - H_2(\vec{p}) - \epsilon), \quad (2.20)$$

Utilizando las anteriores definiciones la ecuación (2.17) toma la forma

$$\mathcal{F}(\epsilon, \vec{p}) \psi(\epsilon, \vec{p}) = -\frac{1}{2\pi i} \int d^3 p' \mathcal{V}'(\vec{p}, \vec{p}', P) \phi(\vec{p}'). \quad (2.21)$$

Se define preliminarmente los siguientes operadores de proyección de energía:

$$\Lambda_{\pm}^{1,2}(\vec{p}) = \frac{E_{1,2}(\vec{p}) \pm H_{1,2}(\vec{p})}{2E_{1,2}(\vec{p})}, \quad \text{con} \quad E_{1,2}(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m_{1,2}^2}, \quad (2.22)$$

con el fin de obtener ecuaciones independientes para los diferentes estados de energía, se aplican dichos operadores de proyección a ambos lados de (2.21) obteniendo cuatro ecuaciones acopladas

$$\mathcal{F}_{\pm\pm}(\epsilon, \vec{p}) \psi_{\pm\pm}(\epsilon, \vec{p}) = -\frac{1}{2\pi i} \Lambda_{\pm}^1(\vec{p}) \Lambda_{\pm}^2(-\vec{p}) \int d^3 p' \mathcal{V}'(\vec{p}, \vec{p}', P) \phi(\vec{p}'), \quad (2.23a)$$

$$\mathcal{F}_{\mp\pm}(\epsilon, \vec{p}) \psi_{\mp\pm}(\epsilon, \vec{p}) = -\frac{1}{2\pi i} \Lambda_{\mp}^1(\vec{p}) \Lambda_{\pm}^2(-\vec{p}) \int d^3 p' \mathcal{V}'(\vec{p}, \vec{p}', P) \phi(\vec{p}'). \quad (2.23b)$$

Donde se ha definido

$$\psi_{\pm\pm} = \Lambda_{\pm}^1(\vec{p}) \Lambda_{\pm}^2(-\vec{p}) \psi(p), \quad (2.24)$$

$$\psi_{\mp\pm} = \Lambda_{\mp}^1(\vec{p}) \Lambda_{\pm}^2(-\vec{p}) \psi(p), \quad (2.25)$$

$$\mathcal{F}_{\pm\pm}(\epsilon, \vec{p}) = (\mu_1 E - E_1(p) + \epsilon \pm i\delta)(\mu_2 E - E_2(p) - \epsilon \pm i\delta), \quad (2.26)$$

$$\mathcal{F}_{\mp\pm}(\epsilon, \vec{p}) = (\mu_1 E - E_1(p) + \epsilon \mp i\delta)(\mu_2 E - E_2(p) - \epsilon \pm i\delta). \quad (2.27)$$

Se observa que el lado derecho de las ecuaciones (2.23) no depende de ϵ . Por lo tanto, es conveniente pasar el apropiado \mathcal{F} al lado derecho de la expresión (2.23). De esta manera es posible integrar, nuevamente, respecto a ϵ con el fin de obtener una función de onda solamente dependiente de la parte espacial de cuadrivector relativo, obteniendo las siguientes expresiones

$$\phi_{\pm\pm}(\vec{p}) = -\frac{1}{2\pi i} \int d\epsilon \mathcal{F}_{\pm\pm}^{-1}(\epsilon, \vec{p}) \Lambda_{\pm}^1(\vec{p}) \Lambda_{\pm}^2(-\vec{p}) \int d^3 p' \mathcal{V}'(\vec{p}, \vec{p}', P) \phi(\vec{p}'), \quad (2.28a)$$

$$\phi_{\mp\pm}(\vec{p}) = -\frac{1}{2\pi i} \int d\epsilon \mathcal{F}_{\mp\pm}^{-1}(\epsilon, \vec{p}) \Lambda_{\mp}^1(\vec{p}) \Lambda_{\pm}^2(-\vec{p}) \int d^3 p' \mathcal{V}'(\vec{p}, \vec{p}', P) \phi(\vec{p}'). \quad (2.28b)$$

Utilizando el teorema del residuo se encuentra que:

$$\int d\epsilon \mathcal{F}_{\pm\pm}^{-1}(\epsilon, \vec{p}) = \pm(2\pi i)(E \pm E_1(\vec{p}) \pm E_2(\vec{p}))^{-1}, \quad (2.29a)$$

$$\int d\epsilon \mathcal{F}_{\mp\pm}^{-1}(\epsilon, \vec{p}) = 0. \quad (2.29b)$$

El anterior resultado implica que en aproximación de interacción instantánea, las combinaciones \pm, \mp de la función de onda son cero.

Finalmente pueden expresarse las ecuaciones (2.23) de la siguiente forma compacta:

$$(E - H_1(\vec{p}) - H_2(\vec{p})) \phi(\vec{p}) = \{ \Lambda_+^1(\vec{p}) \Lambda_+^2(-\vec{p}) - \Lambda_-^1(\vec{p}) \Lambda_-^2(-\vec{p}) \} \int d^3 p' \mathcal{V}'(\vec{p}, \vec{p}', P) \phi(\vec{p}'). \quad (2.30)$$

La anterior ecuación es conocida como aproximación instantánea de Bethe-Salpeter. Se resalta que en cualquier reducción de la ecuación de BS obtenida con técnicas y aproximaciones diferentes, el término de energías positivas, es decir, el término asociado a los proyectores $\Lambda_+^1(\vec{p}) \Lambda_+^2(-\vec{p})$ en la ecuación (2.30), es el más importante puesto que representa el término dominante y, por lo tanto, debe estar presente en cualquier descripción dinámica de un sistema ligado.

A pesar de la aparente sencillez de la ecuación (2.30), debe recordarse que en un sistema con interacción fuerte el término $\mathcal{V}'(\vec{p}, \vec{p}', P)$ presenta gran dificultad y más aún cuando diferentes términos no locales dependientes del momentum están presentes en dicha interacción.

La ecuación (2.30) en principio podría ser utilizada directamente para el estudio del espectro mesónico pero, considerando la dificultad de la solución numérica, por un lado, y, por otro, debido a las dificultades teóricas relacionadas con la contribución de los espinores de energías negativas, se introducirá, en la capítulo 4, una versión simplificada de la ecuación (2.30) en donde dichas contribuciones no aparecen.

Se examinan ahora brevemente otras expresiones de ecuaciones relativistas tridimensionales, con el fin de ilustrar la variedad de los acercamientos propuestos, con las ventajas y desventajas correspondientes. Además, por que orienta un posible desarrollo subsecuente al presente trabajo donde se estudien las contribuciones de los espinores de energía negativa.

2.5.3. Ecuación de Gross o del espectador

La ecuación de Gross (G) representa una manera, diferente a la descrita anteriormente, de reducir en forma tridimensional la ecuación de BS. En esta aproximación, en la ecuación de BS una de las dos partículas, por ejemplo la partícula 1, es puesta *on-shell* con energía positiva. Esto significa que, para esta partícula se impone la condición $p_1^2 = m_1^2$. Introduciendo esta condición en la función de Green se obtiene: $G_G(p_1', P) = \delta_+(p_1'^2 - m_1^2) G(P - p_1')$

Por lo tanto, la amplitud de dispersión (scattering), utilizando la ecuación (2.9) toma la forma

$$\mathcal{T}(\hat{p}_2, \hat{p}_2'') = \mathcal{V}(\hat{p}_2, \hat{p}_2'') + \int \frac{d^3 p_2'}{(2\pi)^3} \mathcal{V}(\hat{p}_2, \hat{p}_2') S(p_2') \mathcal{T}(\hat{p}_2', \hat{p}_2''). \quad (2.31)$$

Donde \hat{p} representa un cuadvivector *on shell*. A partir de esta expresión, se obtiene, en forma integral, la ecuación relativista tridimensional para el sistema ligado:

$$S_F^{-1} \psi(p_2) = \int \frac{d^3 p_2'}{(2\pi)^3} \mathcal{V}(p_2, p_2') \psi(p_2'), \quad (2.32)$$

donde se ha introducido la notación $p_2 = P - \hat{p}_1$.

La ecuación de Gross tiene la falla de no tratar de la misma manera las dos partículas debido a que solo una de ellas es tomada *on-shell*. Por consiguiente, si las dos partículas son indistinguibles, no se obtiene directamente, como solución, una función de onda antisimétrica. Por otro lado, considerando soluciones aproximadas, es posible tomar funciones de onda de prueba ya antisimetrizadas y obtener, con una técnica variacional, la mejor aproximación a la hipotética solución exacta, con la correcta simetría. La ecuación de Gross es bien comportada cuando la masa de la partícula *on shell* tiende al infinito, pues correctamente tiende a la ecuación de Dirac. La razón por la cual esta ecuación tiene un apropiado límite de “ecuación

de Dirac de un cuerpo”, radica en el hecho que en la aproximación de un bosón de intercambio la ecuación del espectador suma, de manera *efectiva* los principales términos de los diagramas *escalera* y *cruzados*, a diferencia de la ecuación original de BS. Adicionalmente, haciendo un análisis más profundo al descomponer la función de onda en sus componentes de energías, de manera similar a como se hizo en la sección 2.5.2, es posible mostrar que en la ecuación de Gross son nulas las componentes ϕ_{-+} y ϕ_{--} ; queda no nula la componente ϕ_{+-} y por supuesto ϕ_{++} .

Finalmente, como ya se mencionó, vale la pena recordar que para el cálculo de observables la ecuación de Gross puede ser simetrizada, de manera efectiva, mediante la inclusión de canales donde la “otra” partícula esté *on shell* [79].

2.5.4. Ecuación de Mandelzweig-Wallace

Esta ecuación integral involucra tanto espinores de energía positiva como negativa y fue construida inicialmente para QED. Bajo este enfoque cumple con la condición de “límite de un cuerpo”, de simetría ante intercambio y reduce a tres dimensiones la ecuación de Bethe-Salpeter. Incluye gráficos “escalera” y gráficos “cruzados” en la aproximación eikonal [80] de manera que sean reproducidos los diagramas de Feynman para los procesos de dispersión hasta orden α^2 .

A partir del análisis de la función de Green, suponiendo dos partículas de igual masa, e implementando los operadores de proyección es posible encontrar una forma para la función de Green inversa:

$$G^{-1} = \gamma_0^1 \gamma_0^2 \left[\left(\frac{E}{2} - \hat{H}_1 \right) \hat{\rho}_2 + \left(\frac{E}{2} - \hat{H}_2 \right) \hat{\rho}_1 \right]. \quad (2.33)$$

Donde $\hat{\rho}_{1,2} = \frac{\hat{H}_{1,2}}{E(\vec{p})}$ y se han utilizado las definiciones (2.18), pero para masas iguales. Vale la pena mencionar que los operadores $\hat{\rho}_i$ tienen autovalores $+1$ ó -1 dependiendo de la energía.

De esta manera es posible obtener la ecuación:

$$\gamma_0^1 \gamma_0^2 \left[\left(\frac{E}{2} - \hat{H}_1 \right) \hat{\rho}_2 + \left(\frac{E}{2} - \hat{H}_2 \right) \hat{\rho}_1 \right] \phi(\vec{p}) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} V(\vec{p}, \vec{p}', P) \phi(\vec{p}'). \quad (2.34)$$

Se obtiene así una ecuación no local de forma no Hamiltoniana (en donde la energía E aparece como un parámetro interno y no como un autovalor). Como en la BS instantánea aparecen las componentes ϕ_{--} y ϕ_{++} , en cambio las componentes ϕ_{+-} y ϕ_{-+} , en la ecuación de Mandelzweig-Wallace son no nulas y aparecen en *canales cerrados*, es decir, sin multiplicar la energía E. Esto impide que aparezcan soluciones espurias relacionadas con la *continuum dissolution*. La ecuación trata las dos partículas de la misma manera admitiendo soluciones antisimétricas para fermiones indistinguibles. Ha sido aplicada al estudio de los núcleos ligeros, considerando, en el caso de la simetría SU(2) de isoespín, un término adicional que tiene en cuenta el carácter no abeliano de este grupo de simetría. El estudio de este término podría ser generalizado al caso de la simetría SU(3) de color para la interacción entre quarks.

2.5.5. Ecuación de Blankenbecler-Sugar

Como ya fue mencionado, la ecuación de BS, al ser covariante, involucra cuadvectores de momentum cuya componente esta relacionada con la energía. De esta manera, se incluye la física del campo interactuante, dando como resultado la adición de una variable asociada a la diferencia de tiempos o tiempo relativo entre las dos partículas.

Blankenbecler y Sugar [81] propusieron una reducción tridimensional en la cual el problema de la diferencia de tiempos es suprimida. Para realizar esto, se parte de la aplicación de la condición “on-shell” sobre las dos partículas. En el caso (físicamente muy relevante) de partículas de igual masa en su centro de masa, la energía de las partículas tiene la forma estándar *on-shell* [82]:

$$E_{1,2}(\vec{p}) = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (2.35)$$

Se aclara que, de esta manera, se excluyen todas las componentes de energía negativa de los espinores de Dirac de los quarks.

Aplicando esta condición en la función de Green de la ecuación (2.9), y haciendo la suposición de interacción

instantánea, es posible integrar sobre la componente temporal. Por lo tanto al reemplazar la función de Green [83]

$$G_{BbS}(k_0, \vec{k}) = \frac{\delta(k_0)}{2\pi^3} \frac{m^2}{E(\vec{k})} \frac{\Lambda_+^1(\vec{k})\Lambda_+^2(-\vec{k})}{(E(\vec{k}))^2 - E^2 + i\mathcal{E}}, \quad (2.36)$$

en la ecuación (2.9) obtenemos una ecuación tridimensional para la amplitud de dispersión (scattering) conocida como ecuación de Blankenbecler-Sugar (BbS):

$$\mathcal{T}(\vec{p}', \vec{p}) = \mathcal{V}(\vec{p}', \vec{p}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{V}(\vec{p}', \vec{k}) \frac{1}{2\pi^3} \frac{m^2}{E(\vec{k})} \frac{\Lambda_+^1(\vec{k})\Lambda_+^2(-\vec{k})}{(E(\vec{k}))^2 - E^2 + i\mathcal{E}} \mathcal{T}(\vec{k}, \vec{p}). \quad (2.37)$$

Donde se ha definido $\vec{p}, \vec{k}, \vec{p}'$ como trimomentos relativos inicial, intermedio y final. Esta ecuación presenta una ventaja sobre la ecuación de Gross. Es invariante ante intercambio de partículas. Es una reducción tridimensional que permite ser trabajada a nivel numérico de manera práctica y efectiva. Sin embargo, las anteriores cualidades conseguidas no son gratuitas. En efecto, la ecuación presenta ciertas carencias derivadas de la reducción conseguida. Esta ecuación no da cuenta de los estados de energía negativa. Esto, por supuesto, le resta cualidades propias de la teoría de campos a la ecuación. Aún así, esta ecuación representa una forma práctica de empezar el estudio de forma relativista un sistema de partículas. En virtud de estas cualidades, la ecuación de BbS puede ser considerada una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger. De hecho si se define $\mathcal{V} \rightarrow (\frac{m}{E(\vec{p})})^{\frac{1}{2}} \mathcal{V}(\frac{m}{E(\vec{p}')}), \mathcal{T} \rightarrow (\frac{m}{E(\vec{p})})^{\frac{1}{2}} \mathcal{T}(\frac{m}{E(\vec{p}')}),$ luego de un poco de álgebra y tomando los espinores de energía positiva, como lo sugiere la función de Green propuesta, se puede obtener:

$$\mathcal{T}(\vec{p}', \vec{p}) = \mathcal{V}(\vec{p}', \vec{p}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{V}(\vec{p}', \vec{k}) \frac{1}{2\pi^3} \frac{1}{(E(\vec{k}))^2 - E^2 + i\mathcal{E}} \mathcal{T}(\vec{k}, \vec{p}), \quad (2.38)$$

la cual es básicamente la ecuación de Lippmann-Schwinger no relativista. De esta manera se resalta su relación con el formalismo de la ecuación de Schrödinger.

Se subraya que en modelos más complejos que incluyen las contribuciones de energía negativa, el término de BbS siempre está presente. Por esta razón se puede afirmar que resolver esta ecuación representa, de alguna manera, el necesario primer paso de un estudio relativista de sistemas ligados.

Se recuerda que existen muchas otras técnicas y expresiones posibles para obtener ecuaciones relativistas tridimensionales. Entre estas debe mencionarse la ecuación de Dirac de dos cuerpos que se obtiene sumando los Hamiltonianos libres de Dirac de las dos partículas más el término de interacción. Esta ecuación tendría la ventaja de ser local (si la interacción lo es) y permitir, en unos casos, soluciones analíticas exactas [84, 85]. Por otro lado esta ecuación da lugar a soluciones espurias y, por consiguiente, al problema de la “continuum dissolution”, es decir, soluciones no normalizables.

Se concluye este capítulo recordando que las diferentes ecuaciones relativistas tridimensionales difieren esencialmente por las contribuciones de los estados de energía negativa. Considerando esta profunda dificultad de carácter teórico, como ya fue anticipado, en este trabajo se va a considerar una ecuación en la cual estas contribuciones no aparezcan.

Capítulo 3

Estado Actual del tema

En el presente capítulo se describirán algunos avances recientes en la física hadrónica en el ámbito experimental y teórico. En cuanto a la parte experimental, se mencionaran sólo resultados experimentales recientes, directamente relacionados con estados en las regiones de energía del charmonium y bottomonium, los cuales son relevantes y útiles en el presente estudio. En la parte teórica, a partir de lo desarrollado en el capítulo anterior, se describen brevemente los principales métodos actuales que se utilizan para estudiar y reproducir el espectro del charmonium y bottomonium.

3.1. Algunos aspectos experimentales

La espectroscopía de hadrones ha estado en continuo trabajo, en particular, desde el 2003 cuando nuevas resonancias fueron halladas y verificadas en diferentes colaboraciones experimentales. Estos esfuerzos experimentales han generado también importantes resultados recientes [86] que muestran la relevancia de la física hadrónica en la actualidad. Algunas de estas resonancias cuentan con características que poco encajan en modelos tradicionales de quarks, ya sea por sus números cuánticos, por sus amplitudes de decaimiento distintas a las esperadas o por su carga eléctrica no nula ¹. En la actualidad continúa siendo motivo de investigación y debate la clasificación de los nuevos estados encontrados, que en general son calificados como hadrones exóticos, como por ejemplo $X(3872)$ y $X(3915)$, entre otros, los cuales se mencionaran en esta sección y con más detalle en el capítulo 8.

Algunos de estos estados yacen en la región de energía de alta excitación del quarkonium y por lo tanto es posible que pertenezcan a un sistema $q\bar{q}$. En años recientes se han observado algunos nuevos estados de este estilo y se han corroborado los números cuánticos de otros estados ya establecidos.

Uno de ellos es el estado $X(3915)$, observado hace pocos años [87], el cual podría ser clasificado como $\chi_{c0}(2P)$ (χ'_{c0}), es decir, un estado del espectro del charmonium. Diferentes trabajos [24], [88], han colocado en duda que esta asignación sea correcta.

El segundo, y quizás más importante, es la resonancia $X(3872)$ descubierta en la colaboración Belle en el 2003 [89]. Debido a que se ubica en la vecindad del umbral $D^0\bar{D}^{*0}$ algunos autores se inclinan hacia la idea que este estado es una molécula de $D^0\bar{D}^*$ [90], otros a que es una combinación de un charmonium y una molécula hadrónica [91] [92]. Sus números cuánticos fueron materia de debate hasta hace poco. En julio de 2015, en el LHCb [93] fue posible verificar que sus números cuánticos son $J^{PC} = 1^{++}$. A causa de esto, también es posible considerarla un estado del charmonium, en particular la excitación radial $\chi_{c1}(2P)$.

Adicionalmente es necesario resaltar que recientemente LHCb determinó los números cuánticos del estado $X(4140)$ reportando 1^{++} [94] descartando los números cuánticos 0^{++} con los que generalmente era identificado este estado.

En cuanto al bottomonium, los pocos estados descubiertos encima de los umbrales de decaimiento parecen estar bajo control en los modelos de potencial, excepto el estado $\Upsilon(10860)$ el cual cuenta con una discrepancia en su anchura de decaimiento (ver sección 9.2.1).

Por último, otro reciente e importante hallazgo experimental realizado en el LHCb está asociado a la medición de la masa del estado $\chi_{b1}(3P)$ [95], el cual representa un paso adicional en el estudio del sistema $\chi_b(3P)$

¹Estos estados cargados eléctricamente no pueden ser descritos con el modelo que en el presente trabajo se expone y por lo tanto no serán considerados.

perteneciente al bottomonium.

Todos estos resultados experimentales evidencian la importancia actual de la física hadrónica y motivan el análisis teórico de sistemas mesónicos, en los cuales se enfoca el presente trabajo de tesis, en particular en la reproducción teórica del espectro de estos sistemas ligados, con el fin investigar la naturaleza de las interacciones entre quarks.

3.2. Aspectos teóricos

En la actualidad las diferentes técnicas con las cuales se aborda el estudio de los estados ligados se basan en la teoría fundamental de las interacciones fuertes QCD. En particular: Lattice QCD, ecuaciones integrales tipo Dyson-Schwinger-Bethe-Salpeter, adicionalmente, modelos de potencial relativista en el contexto de modelos de quarks constituyentes.

Utilizando Lattice QCD se ha abordado la búsqueda del espectro de diferentes mesones, en particular del charmonium y los estados charmonium-like ya mencionados, suponiendo diferentes combinaciones de quarks [96], las que por supuesto son hipótesis válidas. En estos estudios sólo algunos estados charmonium-like “encajan” con el fit realizado y otros no, sugiriendo que el problema de la composición de dichos estados aún está abierto. Algunas posibilidades podrían ser tetraquarks ó híbridos quarks-gluon.

Adicionalmente, recientemente se han realizado grandes avances en el estudio de estados excitados de mesones [97] utilizando técnicas variacionales dentro de los complicados cálculos asociados al LQCD. Ésto ha sido posible debido al mejoramiento de las técnicas computacionales y al desarrollo de los supercomputadores y por lo tanto, la precisión de los cálculos obtenidos han mejorado profundamente. Sin embargo, aun queda trabajo por hacer en el estudio de estados cercanos a los umbrales de decaimiento en donde hasta el momento los trabajos han sido de carácter exploratorio [98].

El formalismo de Dyson-Schwinger-Bethe-Salpeter (DSBS) representa una importante fuente de análisis de sistemas ligados que en la actualidad tiene gran importancia. A nivel teórico representa hipotéticamente la mejor forma de reproducir el espectro de mesones y bariones. Pero en la práctica se requiere de la conocida aproximación rainbow-ladder con las limitaciones ya descritas (ver sección 2.5.1). En este formalismo y con la aproximación mencionada, el reciente trabajo [99] resalta por su relativa mejora en la concordancia con los datos experimentales, del charmonium, en particular los primeros estados excitados. En ellos se usa la DSBS junto con la conocida interacción efectiva de Maris-Tandys. En general, todavía no se obtienen resultados satisfactorios con este método a pesar de la fuerte relación con la QCD que se impone en las investigaciones actuales.

Adicionalmente se han hecho adelantos significativos en la solución de estas ecuaciones sin hacer reducciones tridimensionales, es decir, directamente en el espacio de Minkowsky [100–102] [103]. Las aplicaciones que hasta el momento se han hecho, están orientadas a casos no físicos de partículas escalares que intercambian una partícula escalar masiva; se espera generalizar esta técnica al caso de dos fermiones interactuantes y confinados. A pesar que dista de la interacción entre quarks, los cuales son partículas fermiónicas que intercambian partículas vectoriales, esta técnica representa un interesante avance teórico en la solución de la ecuación de BS.

Actualmente otra posibilidad, sigue siendo el enfoque basado en modelos de potencial [104] [105] [106] los cuales han sido de mucha ayuda en particular en el inicio del estudio de la física hadrónica y aún en la actualidad permanecen útiles para brindar información acerca de la estructura de los mesones y bariones. Evidentemente el enfoque no relativista de los primeros modelos, a pesar que describe en buena forma sistemas como el charmonium cerca de sus estado base, ha tenido que ser mejorado para optimizar las correcciones relativistas implementando potenciales tipo interacción Breit o derivados de él (más un potencial de confinamiento) [45].

En años recientes los modelos de quarks no relativistas y *relativizados* han sido modificados para tener en cuenta efectos de pares quark-antiquark del mar de Dirac que se introducen explícitamente utilizando, generalmente, el mecanismo de producción de pares en estados con números cuánticos 3P_0 . Bajo este enfoque la función de onda “completa” se construye teniendo en cuenta la función de onda del mesón quark-antiquark a orden cero $|\phi\rangle$ y adicionándole los posibles estados de Fock debidos a la creación de pares $|BC, \vec{p}\rangle$. Se obtiene

así una expresión de la siguiente forma:

$$|\psi\rangle = A \left(|\phi\rangle + \sum_{BC} \int d^3p |BC, \vec{p}\rangle \times \frac{\langle BC, \vec{p} | T^\dagger | \phi \rangle}{E_\phi - E_B - E_C} \right). \quad (3.1)$$

De esta manera la corrección a la masa debida a este efecto se escribe:

$$\delta M = \sum_{BC} \int d^3p \frac{|\langle BC, \vec{p} | T^\dagger | \phi \rangle|^2}{E_\phi - E_B - E_C}. \quad (3.2)$$

Se señala que B y C son los mesones creados del vacío, E_B y E_C representan sus respectivas energías. T^\dagger es el operador de creación de pares y la suma \sum_{BC} puede ser hecha sobre una base completa de estados intermedios accesibles [107] o en los canales que más interesen a un estado en particular [108].

Generalmente las consecuencias generadas por este efecto, que puede ser definido como una “polarización del vacío”, debida a los pares-quark-antiquark, se ven reflejadas a grandes distancias disminuyendo la acción del potencial entre quarks. Por esta razón al considerar un potencial apantallado es posible introducir, igualmente, el efecto neto de la generación de pares por medio de parámetros fenomenológicos en el término de apantallamiento del potencial propuesto en el presente trabajo.

Por otro lado, recientemente se ha utilizado también la reducción tridimensional de Gross (con algunas aproximaciones) en el estudio del charmonium y bottomonium [109, 110]. A pesar de que el formalismo no trata de la misma manera las dos partículas, se encuentran buenos resultados en la parte baja del espectro. Al igual que en el presente trabajo, se utilizan solo espinores de energía positiva, para el charmonium y bottomonium, considerando que ésta sea una apropiada aproximación, pero si utilizan los espinores de energía negativa para otros sistemas más relativistas como mesones D y B . De esta manera de los cuatro canales, que son el número de vértices acoplados que usan en el kernel, solo consideran uno. Los autores obtienen diferentes ajustes con los cuales concluyen que pueden describir en buena forma el *spin splitting* en los estados con $J = 1$ debajo del umbral $D\bar{D}$. Utilizan un modelo con confinamiento pseudoescalar+escalar y vectorial. Los diferentes términos de la interacción son mezclados utilizando un parámetro adicional. A pesar de este excelente enfoque, que en principio debería ser apropiado para estados excitados, no hacen mención de los estados X ó Y .

Por último, un interesante formalismo, cuyos fundamentos requieren todavía un estudio más profundo por parte de la comunidad científica, está siendo usado para tratar estados ligados por interacciones fuertes, el cual se fundamenta en la hipótesis de la simplicidad del vacío del *light-front quantization*. En la dinámica del light front es posible cuantizar las variables dinámicas sobre coordenadas asociadas a un frente de onda plana en el espacio de Minkowsky [111]. En ese contexto los estados de partícula se pueden representar como una expansión infinita de estados de Fock, en la cual, las funciones de onda del light front son los coeficientes de la expansión. El Hamiltoniano de interacción se construye bajo el enfoque *AdS/QCD*, es decir, suponiendo una correspondencia entre el espacio anti de Sitter y la QCD, y en este contexto, se proyecta dicho Hamiltoniano sobre una base seleccionada [112]. Bajo tal hipótesis, es posible introducir una variable holográfica, en la base utilizada, que es mapeada a una dimensión extra en el espacio AdS. En particular en los artículos [113, 114] utilizando una base holográfica, logran escribir la interacción como un oscilador armónico tridimensional, obteniendo un espectro satisfactorio del charmonium y del bottomonium. Se resalta que se han utilizado los estados debajo de los umbrales $D\bar{D}$ y $B\bar{B}$ para los ajustes en cada mesón. El estado X(3872) es sobreestimado ligeramente y de esta manera, este modelo, lo sugiere como un posible candidato a estado de charmonium. Por otro lado los estados X(3940) y X(4160) no se ajustan a este modelo sugiriéndolos de naturaleza diferente a $c\bar{c}$.

Todos estos métodos son válidos en la actualidad, todos tienen aproximaciones en su desarrollo y esto muestra que la dificultad del problema de los estados ligados es muy seria y merece, por supuesto, ser estudiada desde todos los enfoques posibles para seguir indagando en la naturaleza de la interacción efectiva entre los quarks.

Capítulo 4

Ecuación relativista utilizada en el presente trabajo

Después de revisar diferentes ecuaciones relativistas (ver sección 2.5) y teniendo en cuenta el fuerte trabajo numérico que se requiere para resolver estas ecuaciones, la ecuación que se va a utilizar en el presente trabajo es la ecuación (2.30), pero conservando sólo los espinores de energía positiva, según la misma lógica de la ecuación de BbS. Para analizarla, se hace la expansión de la función de onda utilizando la propiedad de completéz de los espinores de Dirac de la siguiente forma:

$$\phi(\vec{p}) = u_+^1(\vec{p})u_+^2(-\vec{p})\phi_{++}(\vec{p}) + u_+^1(\vec{p})u_-^2(-\vec{p})\phi_{+-}(\vec{p}) + u_-^1(\vec{p})u_+^2(-\vec{p})\phi_{-+}(\vec{p}) + u_-^1(\vec{p})u_-^2(-\vec{p})\phi_{--}(\vec{p}). \quad (4.1)$$

En donde, 1 ó 2, son índices de partícula y donde las $\phi_{\alpha\beta}(\vec{p})$ representan funciones espinoriales de dos componentes (Pauli) asociadas a las proyecciones de energía $\alpha\beta$.

En el marco de la reducción de la BS se había encontrado que $\phi_{-+} = \phi_{+-} = 0$. Haciendo la hipótesis adicional $\phi_{--} = 0$ y recordando que:

$$H_1(\vec{p})\Lambda_+^1(\vec{p}) = E_1(\vec{p})\Lambda_+^1(\vec{p}), \quad (4.2a)$$

$$H_2(\vec{p})\Lambda_+^2(-\vec{p}) = E_2(\vec{p})\Lambda_+^2(-\vec{p}), \quad (4.2b)$$

es posible escribir la ecuación (2.30) de la siguiente manera:

$$[E - E_1(\vec{p}) - E_2(-\vec{p})]u_+^1(\vec{p})u_+^2(-\vec{p})\phi_{++}(\vec{p}) = \Lambda_+^1(\vec{p})\Lambda_+^2(-\vec{p}) \int d^3p' U(\vec{p}, \vec{p}') u_+^1(\vec{p}') u_+^2(-\vec{p}') \phi_{++}(\vec{p}'). \quad (4.3)$$

Donde se ha reemplazado por simplicidad de notación $\mathcal{V}'(\vec{p}, \vec{p}', P) \rightarrow U(\vec{p}, \vec{p}')$ la cual es una interacción fenomenológica dependiente de las variables cinemáticas realmente usadas en los cálculos. Debe recordarse que los proyectores de energía, definidos en la ecuación (2.22), también se pueden expresar como:

$$\Lambda_+^1(\vec{p}) = \sum_s u_+^1(\vec{p}) u_+^{1\dagger}(\vec{p}), \quad (4.4)$$

$$\Lambda_+^2(-\vec{p}) = \sum_s u_+^2(-\vec{p}) u_+^{2\dagger}(-\vec{p}), \quad (4.5)$$

en donde las sumas son realizadas sobre los espines, cuyos índices por brevedad no se han colocado en los espinores. Dado que las masas del quark y del antiquark son iguales, en el centro de masa del sistema las energías *on shell* cumplen $E_1(\vec{p}) = E_2(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Multiplicando la ecuación (4.3) por $u_+^{1\dagger}(\vec{p})u_+^{2\dagger}(-\vec{p})$ se obtiene

$$[E - E_1(\vec{p}) - E_2(-\vec{p})]\phi_{++}(\vec{p}) = u_+^{1\dagger}(\vec{p})u_+^{2\dagger}(-\vec{p}) \int d^3p' U(\vec{p}, \vec{p}') u_+^1(\vec{p}') u_+^2(-\vec{p}') \phi_{++}(\vec{p}'). \quad (4.6)$$

Si se define la normalización de los espinores como $u^\dagger(p)u(p) = 1$ y además se define $K(p) = 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ y la interacción como $\mathcal{H}_{int}(\vec{p}, \vec{p}') = u_+^{1\dagger}(\vec{p})u_+^{2\dagger}(-\vec{p})U(\vec{p}, \vec{p}')u_+^1(\vec{p}')u_+^2(-\vec{p}')$ la ecuación puede ser escrita como

$$E\phi_{++}(\vec{p}) = K(p)\phi_{++}(\vec{p}) + \int d^3p' \mathcal{H}_{int}(\vec{p}, \vec{p}')\phi_{++}(\vec{p}'). \quad (4.7)$$

Expresando la ecuación (2.30) de la forma (4.7) se pone de forma explícita el uso de los espinores de energía positiva y el hecho que la interacción misma contiene ahora la estructura de los espinores de Dirac. Con un ligero cambio de notación, debido a razones de claridad y uniformidad con el artículo publicado [56], esta es la ecuación que se utilizará en el capítulo 5 para calcular el espectro del charmonium y bottomonium (ver ecuaciones (5.24) y (7.3)).

Se resalta que la anterior ecuación representa la manera más natural para escribir una ecuación Hamiltoniana para dos partículas relativistas de espín 1/2; el término cinético es la usual energía cinética relativista y el término de interacción tiene correctamente en cuenta las propiedades de los espinores de Dirac (de energía positiva) para las dos partículas interactuantes. Se subraya que este último aspecto no es tenido en cuenta en los modelos “relativizados” en los cuales la interacción tiene un carácter puramente fenomenológico, los cuales casi siempre están en el espacio de coordenadas, por facilidad de computo. Sin embargo, una interacción como la propuesta en el presente trabajo requiere de difíciles cálculos en el espacio de momentum que son posibles ahora gracias al reciente desarrollo computacional.

A pesar de que en el presente trabajo se busca una descripción relativista del charmonium y bottomonium consideramos que un tratamiento con espinores de energía positiva es suficiente, como primer paso, para el presente propósito de la misma forma en que se hace en [109, 110] para el charmonium y bottomonium. Además, debido a la difícil dependencia del momentum en la interacción que se va utilizar, esta ecuación ya representa, en sí misma, una compleja tarea numérica. Finalmente, si se tiene en cuenta el proceso de ajuste y la propagación de errores (que requiere 1000 procesos de ajuste) esta ya es una tarea que requiere de un alto esfuerzo y tiempo de computo. Evidentemente, la siguiente etapa en una futura investigación incluirá estos estados de energía negativa y se determinará su importancia real en el cálculo de espectro del quarkonium.

En el siguiente capítulo se describe en detalle el modelo de interacción propuesto en el presente trabajo y que será usado junto con la ecuación (4.7) en la reproducción del espectro del charmonium y bottomonium.

Capítulo 5

Modelo específico de interacción relativista en el espacio del momentum

Como ya se ha mencionado, los diferentes modelos semirelativistas o no relativistas en el espacio de coordenadas son generalmente basados en la reducción no relativista de la interacción vectorial debida al intercambio de un gluón (debe recordarse que esta interacción es considerada preponderante a cortas distancias). Sin embargo, estas aproximaciones no relativistas podrían restar precisión al modelo particularmente en la región de alta energía.

Es conveniente enfatizar que en el presente trabajo no se realizan las aproximaciones no relativistas mencionadas y que se utiliza el formalismo de los espinores de Dirac. Esto genera la necesidad de trabajar en el espacio de momentum con expresiones fuertemente no locales, es decir, que el Hamiltoniano de interacción depende de expresiones que requieren conocer la función de onda en todo el espacio para calcular la interacción en un punto \vec{r} . De forma más clara, este tipo de expresiones fuertemente no locales no permiten ser transformadas, de manera analítica, al espacio de coordenadas por medio de una transformación de Fourier. Con el fin de obtener una mejor reproducción del espectro, es usual adicionar una interacción escalar [45,115]. Esta interacción suele estar fuertemente conectada con el confinamiento de los quarks en el mesón. Una motivación adicional para agregar esta interacción se basa en el débil desdoblamiento espín-órbita que aparece en el espectro mesónico. Esta característica requiere, a nivel teórico, la introducción de la interacción escalar. Por otro lado, es conocido que en la parte alta del espectro los efectos de campo se hacen más importantes y pueden modificar el espectro. Uno de estos efectos de campo consiste en la aparición de pares virtuales quark-antiquark. El efecto global del acoplamiento de estos pares virtuales se traduce en un apantallamiento que reduce, generalmente, los valores energéticos de los estados encima de las energías correspondientes a los umbrales de decaimiento. Buscando una mejor descripción del quarkonium se han tenido en cuenta todos los aspectos mencionados. El modelo de potencial propuesto está compuesto de una interacción vectorial y un término escalar. Adicionalmente se ha considerado un factor de apantallamiento que tendrá en cuenta, de manera fenomenológica, la producción de pares de quarks en regiones de alta energía.

En los siguientes apartados se construirá el modelo específico del Hamiltoniano de interacción que será usado para calcular el espectro de energías del charmonium y bottomonium. Pero para obtener una clara descripción del Hamiltoniano, primero se presentan algunas definiciones que servirán como herramienta en el desarrollo de la interacción fenomenológica y en la correcta descripción de los elementos de matriz con los cuales se calcularán las energías de los sistemas estudiados.

5.1. Definiciones preliminares

Cómo es costumbre se trabajará en el centro de masa del sistema de dos cuerpos ($c\bar{c}$ ó $b\bar{b}$). Adicionalmente, será utilizado el sistema natural de unidades, es decir, $\hbar = c = 1$. Las cantidades en el *bra* y en el *ket* serán etiquetadas con los índices a y b respectivamente. Por lo tanto, el tri-momentum del primer y segundo quark

son escritos como:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{1a} &= -\vec{p}_{2a} = \vec{p}_a, \\ \vec{p}_{1b} &= -\vec{p}_{2b} = \vec{p}_b.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Donde los tri-momentum relativos \vec{p}_a y \vec{p}_b serán las variables cinemáticas empleadas en los cálculos numéricos. También es necesario introducir el tri-momentum transferido

$$\vec{q} = \vec{p}_b - \vec{p}_a,\tag{5.2}$$

y el coseno del ángulo entre \vec{p}_a y \vec{p}_b

$$x = \cos \theta = \hat{p}_a \cdot \hat{p}_b,\tag{5.3}$$

tal que

$$\vec{q}^2 = \vec{p}_a^2 + \vec{p}_b^2 - 2p_a p_b x.\tag{5.4}$$

Donde p_a y p_b representan el modulo de los respectivos tri-momentum \vec{p}_a y \vec{p}_b y adicionalmente $\hat{p}_a = \vec{p}_a/p_a$ y $\hat{p}_b = \vec{p}_b/p_b$ son los correspondientes vectores unitarios.

Las energías de ambas partículas ($i = 1, 2$), las cuales serán tomadas *on shell*, tienen la forma estándar:

$$\begin{aligned}E(\vec{p}_{ia}) &= E(\vec{p}_a) = \sqrt{\vec{p}_a^2 + m^2}, \\ E(\vec{p}_{ib}) &= E(\vec{p}_b) = \sqrt{\vec{p}_b^2 + m^2},\end{aligned}\tag{5.5}$$

donde m representa la masa del quark y antiquark.

Se introduce la diferencia de energía (para ambas partículas) entre los estados del bra y el ket:

$$\Delta E = E(\vec{p}_b) - E(\vec{p}_a),\tag{5.6}$$

y el cuadrado del cuadri-momentum transferido ($Q^2 > 0$)

$$Q^2 = \vec{q}^2 - (\Delta E)^2.\tag{5.7}$$

Finalmente se presenta la definición estándar de los espinores de Dirac de energía positiva que serán usados en el cálculo:

$$u(\vec{p}_i, \vec{\sigma}_i) = \sqrt{\frac{E(\vec{p}_i) + m}{2E(\vec{p}_i)}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{\sigma}_i}{E(\vec{p}_i) + m} \end{pmatrix} \chi,\tag{5.8}$$

donde $i = 1, 2$ identifica cada partícula, $\vec{\sigma}_i$ representan las matrices de Pauli y χ representa una función de onda de espín genérica. Usando la ecuación (5.1), se toma $\vec{p}_i = \vec{p}_{ia}$ y $\vec{p}_i = \vec{p}_{ib}$, para los estados del *bra* y del *ket*, respectivamente. Los espinores son normalizados a $u^\dagger(\vec{p}_i, \vec{\sigma}_i)u(\vec{p}_i, \vec{\sigma}_i) = 1$.

5.2. Hamiltoniano total y efecto de apantallamiento

Partiendo de la teoría de la QCD, el Hamiltoniano de interacción entre dos quarks debería involucrar grados de libertad gluónicos y fermiónicos en expresiones no perturbativas de alta complejidad. Sin embargo, en la práctica, obtener resultados analíticos en la región no perturbativa de la QCD, hasta el momento, no es viable. Aun así, el cálculo perturbativo de la amplitud asociada al OGE (One Gluon Exchange) brinda información sobre la interacción a cortas distancias. Por tanto, se puede asumir que la interacción vectorial es predominante a cortas distancias en el Hamiltoniano total. Por otro lado, la naturaleza exacta del confinamiento no es conocida. Sin embargo, generalmente es considerada como la mezcla de una interacción vectorial y una escalar. Esta característica escalar es generalmente incluida para representar de forma apropiada los efectos espín-órbita.

Debido a lo anteriormente mencionado el Hamiltoniano total propuesto está conformado por la suma de un término de interacción vectorial y un término de interacción escalar

$$\bar{\mathcal{H}}_{\text{int}}(\vec{p}_b, \vec{p}_a) = \langle \vec{p}_b | H^{(v)} | \vec{p}_a \rangle + \langle \vec{p}_b | H^{(s)} | \vec{p}_a \rangle,\tag{5.9}$$

donde, por facilidad, no se han mostrado de forma explícita las matrices asociadas al espín. Por otro lado, los potenciales fenomenológicos estándar no permiten una buena reproducción en la parte alta del espectro [116, 117], en parte por su limitada fundamentación relativista y en ocasiones por su poca cercanía con la teoría de interacciones fuertes subyacente (QCD). Se requiere un tratamiento dinámico más completo. Algunos efectos del vacío, predichos por la QCD, pueden ser adicionados por medio del *unquenching* del modelo de quark, como en [118, 119]. Lo anterior significa que los efectos de creación de pares son adicionados al Hamiltoniano teniendo en cuenta la contribución dada por el acoplamiento de los estados de $c\bar{c}$ y $b\bar{b}$ al *meson-meson continuum* [118, 120]. Debajo del umbral de decaimiento, este acoplamiento a los estados del continuo da lugar a componentes virtuales $q\bar{q} - q\bar{q}$ en la función de onda mesónica que modifican las energías del charmonium [120] y bottomonium [107, 121, 122] a través del término de *self-energy* el cual está directamente relacionado a la creación de pares.

Parte de los efectos de la producción de pares pueden ser incluidos en una forma más fenomenológica al introducir un factor de apantallamiento en la interacción en el espacio de coordenadas [116, 123].

En este trabajo se introduce un efecto de apantallamiento fenomenológico incorporando factores que dependen del momentum en la interacción según el método que se expone a continuación. Se reemplaza el Hamiltoniano de interacción estándar con un Hamiltoniano apantallado

$$\bar{\mathcal{H}}_{\text{int}}(\vec{p}_b, \vec{p}_a) \rightarrow \mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{p}_b, \vec{p}_a) = F_s(p_b) \bar{\mathcal{H}}_{\text{int}}(\vec{p}_b, \vec{p}_a) F_s(p_a), \quad (5.10)$$

donde los factores $F_s(p_a)$ y $F_s(p_b)$ toman en cuenta los efectos de apantallamiento. Se ha elegido la siguiente función fenomenológica:

$$F_s(p) = \frac{1 + k_s}{k_s + \exp(p^2/p_s^2)}. \quad (5.11)$$

La forma particular del apantallamiento proviene del buen resultado obtenido en el proceso de ajuste y superior a otras expresiones con las que se intentó modelar el apantallamiento. Además, por que cumple con el propósito de acotar altas energías en las cuales se producen los pares quark-antiquark.

En la anterior ecuación (ecuación (5.11)) k_s y p_s serán determinados (como el resto de parámetros del modelo) por ajuste (procedimiento de Fit) a las energías de las resonancias mejor establecidas experimentalmente del charmonium y bottomonium. Los detalles del proceso serán dados en la Sección 7.3.

5.3. Interacción vectorial

Como ya se ha mencionado se utilizará como punto de partida para la interacción vectorial la expresión asociada al OGE (fig 2.2), la cual suponemos como diagrama principal en la interacción que se propone en el presente trabajo. La reducción no relativista de esta interacción ha sido parcialmente exitosa en la reproducción del espectro de mesones y por lo tanto válida su utilización en el presente trabajo como parte principal en la interacción vectorial entre quarks. En la sección 2.1 se ha escrito la expresión (ver ecuación (2.5)) relacionada a este diagrama en un gauge no especificado y se ha calculado el valor del factor de color correspondiente. Sin embargo, se utilizará, en adelante, el gauge de Coulomb en la interacción propuesta.

De esta forma se busca una mayor consistencia con el límite no relativista, puesto que en este límite se obtiene la expresión de Fermi-Breit [72]. Sin embargo, a diferencia de la expresión 2.5 aquí se utilizarán también para los antiquarks, espinores de energía positiva. Este cambio, que es común en los trabajos que estudian el charmonium, se fundamenta en la invarianza de la interacción bajo conjugación de carga.

Empleando el gauge de Coulomb, el elemento de matriz de la interacción vectorial entre fermiones puntuales dada por el intercambio de un gluón es:

$$\langle \vec{p}_b | H^{(v)} | \vec{p}_a \rangle = \frac{4}{3} \alpha_{st} \left(J_1^0 J_2^0 D_{00} + J_1^\alpha J_2^\beta D_{\alpha\beta} \right). \quad (5.12)$$

Donde J_i^μ es la cuadracorriente de Dirac del quark ($i = 1$) y del antiquark ($i = 2$) y $4/3$ es el factor de color calculado en la sección 2.1. La cuadracorriente se expresa de forma estándar:

$$J_i^\mu = J_i^\mu(\vec{\sigma}_i; \vec{p}_b, \vec{p}_a) = \bar{u}(\vec{p}_{ib}, \vec{\sigma}_i) \gamma_i^\mu u(\vec{p}_{ia}, \vec{\sigma}_i). \quad (5.13)$$

Además

$$D_{00} = -\frac{1}{\vec{q}^2}, \quad (5.14)$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{Q^2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{\vec{q}^2} \right). \quad (5.15)$$

Si se quitara el factor $4/3$ de color y se remplazara α_{st} con α (la constante de estructura fina) se obtendría la interacción electromagnética estándar. Además, en la descripción del quarkonium es necesario incluir la interacción asociada al confinamiento de los quarks. Esto se discutirá en la sección 5.4.1. Trabajos previos han realizado esta inclusión partiendo de propiedades de invarianza relativista [45] para generalizar la ecuación de Fermi-Breit, pero al final de cuentas, en esos cálculos se hicieron expansiones no relativistas.

Dado que se van a usar espinores de energía positiva es posible escribir la ecuación de continuidad en la forma:

$$(\Delta E) J_{1,2}^0 = \pm \vec{q} \cdot \vec{J}_{1,2}, \quad (5.16)$$

donde los signos $+$ y $-$ corresponden al quark y antiquark, respectivamente. Usando la ecuación (5.16) se puede escribir la ecuación (5.12) de la siguiente forma (para más detalles ver apéndice B):

$$\langle \vec{p}_b | H^{(v)} | \vec{p}_a \rangle = V^{(v)}(\vec{q}) \left[J_1^0 J_2^0 \left(1 - \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right) - \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 \left(1 + \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right) \right]. \quad (5.17)$$

La forma explícita del potencial vectorial $V^{(v)}(\vec{q})$ será suministrada en la sección 5.4.1. Al mirar, en particular, el primer término de la ecuación (5.20a) se nota que la constante de acoplamiento efectiva de la interacción fuerte α_{st} y el factor de color han sido incluidos en la expresión $V^{(v)}(\vec{q})$. En la expresión anterior, para la componente cero del momentum transferido se ha tomado la expresión *on shell* $q^0 = \Delta E$ con ΔE definido en la ecuación (5.6). En todo caso se ha controlado que suprimiendo por completo esta cantidad, es decir, poniendo $q^0 = \Delta E = 0$, no se modifican de manera sustancial las energías de los espectros.

Finalmente, se resalta que no fue añadido el término de momentum cromomagnético, lo cual parece ser innecesario dada la calidad del espectro obtenido.

5.4. Interacción escalar

Típicamente un término escalar, parcialmente responsable del confinamiento del quark [5, 124], también es incluido en el Hamiltoniano de interacción empleado para estudiar el espectro del charmonium y del bottomonium [46, 125]. También en el presente trabajo se encuentra que la interacción escalar es necesaria para obtener una buena descripción del espectro del charmonium y bottomonium. Se escribe la interacción escalar de la siguiente forma:

$$\langle \vec{p}_b | H^{(s)} | \vec{p}_a \rangle = V^{(s)}(\vec{q}) I_1 I_2, \quad (5.18)$$

donde la forma explícita del potencial escalar efectivo $V^{(s)}(\vec{q})$ será dada en la siguiente subsección (ver sección 5.4.1). El vértice escalar es dado por:

$$I_i = I_i(\vec{\sigma}_i; \vec{p}_b, \vec{p}_a) = \bar{u}(\vec{p}_{ib}, \vec{\sigma}_i) u(\vec{p}_{ia}, \vec{\sigma}_i). \quad (5.19)$$

5.4.1. Potencial escalar y vectorial

Con el fin de incluir diferentes efectos físicos en la interacción efectiva propuesta, es necesario usar expresiones fenomenológicas para los potenciales en el espacio del momentum. Existe una amplia variedad de modelos para potenciales vectoriales y escalares [44, 45, 115]. Se han elegido los siguientes potenciales efectivos, en los cuales, el segundo término en ambas expresiones corresponde a la transformada de Fourier del potencial lineal regularizado:

$$V^{(v)}(\vec{q}) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_{st}}{\vec{q}^2} + \beta_v \frac{3b^2 - \vec{q}^2}{(\vec{q}^2 + b^2)^3}, \quad (5.20a)$$

$$V^{(s)}(\vec{q}) = A + \beta_s \frac{3b^2 - \vec{q}^2}{(\vec{q}^2 + b^2)^3}. \quad (5.20b)$$

La interacción vectorial de la ecuación (5.20a), es dada por el potencial de Cornell regularizado en el espacio del momentum donde el término $-\frac{4}{3}\alpha_{st}/\vec{q}^2$ en la ecuación (5.20a) corresponde al potencial fuerte de carácter Coulombiano estándar, α_{st} es la constante de acoplamiento efectivo y $\frac{4}{3}$ es el factor de color, calculado en la sección 2.1. El parámetro b ha sido introducido para evitar la singularidad de la interacción $1/q^4$ en el espacio del momentum, sin embargo, en el presente modelo no tiene significado físico directo. Por claridad, a continuación se expone la expresión correspondiente del potencial vectorial ecuación (5.20a) en el espacio de coordenadas:

$$V^{(v)}(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_{st}}{r} + \beta_v\pi^2 r \exp(-rb), \quad (5.21)$$

Se observa que el segundo término representa una interacción lineal regularizada con una función exponencial decreciente. Por conveniencia se fijó $b = 10^{-2}$ GeV, que corresponde a $1/b \simeq 20$ fm. Como ya se mencionó, este segundo término corresponde al confinamiento; el parámetro β_v representa la intensidad del confinamiento vectorial. El valor de b es elegido de tal forma, que evite problemas numéricos y recupere, aproximadamente, el potencial de Cornell en la región espacial de interés. Considerando la interacción escalar en la ecuación (5.20b), se tiene una constante fenomenológica representada por A , más un potencial lineal regularizado en el espacio del momentum, análogo al término de confinamiento del potencial vectorial. Al igual que el potencial vectorial, β_s está relacionado con la intensidad del confinamiento y también se fija $b = 10^{-2}$ GeV.

En este trabajo, para realizar el ajuste (*fit*) de los datos experimentales, se usarán dos prescripciones diferentes para la forma del potencial escalar. En la primera prescripción (potencial I) se ha elegido $\beta_s = 0$, es decir, se omite el potencial lineal regularizado. De esta manera permanece solamente el parámetro fenomenológico A . En la segunda prescripción (potencial II) el valor de $\beta_s \neq 0$ es determinado por ajuste (*fit*) de los datos experimentales. Se realizan estas dos prescripciones de manera separada con el fin de evaluar el impacto del término explícito de confinamiento en la interacción escalar. En lo que sigue nos referiremos a estas dos prescripciones de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \text{potencial I} \rightarrow \text{modelo usando Ecs. (5.20) con } \beta_s = 0, \\ \text{potencial II} \rightarrow \text{modelo usando Ecs. (5.20) con } \beta_s \neq 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

En la primera prescripción, se tiene en cuenta de forma efectiva (sólo por medio de la constante A) a la contribución escalar del confinamiento. Por el contrario en la segunda prescripción se usará de forma explícita la expresión de confinamiento donde β_s , como ya se mencionó, representa la intensidad del confinamiento en su parte escalar.

5.5. Ecuación integral para los sistemas $c\bar{c}$ y $b\bar{b}$

Ahora, es posible escribir la ecuación integral asociada al Hamiltoniano total, en el espacio del momentum para el charmonium y bottomonium. En primero lugar, se introduce la energía cinética del quark y el antiquark (ya sea del $c\bar{c}$ o del $b\bar{b}$) en el centro de masa:

$$K(\vec{p}) = 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (5.23)$$

De esta manera la ecuación integral Hamiltoniana tiene la forma (ver ecuación (4.7) en el capítulo anterior):

$$[K(\vec{p}_b) + M_0]\Psi(\vec{p}_b) + \int d^3p_a \mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{p}_b, \vec{p}_a)\Psi(\vec{p}_a) = M\Psi(\vec{p}_b), \quad (5.24)$$

donde $\mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{p}_b, \vec{p}_a)$ es dada por la ecuación ecuación (5.9), M_0 representa la energía fenomenológica de punto cero del espectro de energías, M es la masa de la resonancia (que es el autovalor de la ecuación integral) y $\Psi(\vec{p})$ es la función de onda de la resonancia. Por más claridad se recuerda que $\Psi(\vec{p}) = \phi_{++}(\vec{p})$ de la ecuación (4.7).

Por brevedad en la interacción Hamiltoniana, las matrices de espín de Pauli no han sido escritas de forma explícita y también en la función de onda la energía y los números cuánticos del momento angular han sido omitidos. La ecuación (5.24) es obtenida ejecutando una reducción tridimensional de la ecuación de Bethe-Salpeter con una interacción instantánea y proyectando el resultado sobre los espinores de energía positiva [126] como se explicó en el capítulo 4. Se recuerda que los espinores de energía positiva están contenidos

en el elemento de matriz $\mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{p}_b, \vec{p}_a)$ y Ψ representa la función de onda de Pauli que, en el capítulo 7, será expandida en una base apropiada para solucionar numéricamente la ecuación integral y para el extenso proceso de ajustes (*fit*) requeridos en la propagación de incertidumbres experimentales.

Como ya se ha mencionado el proceso de ajuste en el presente trabajo será repetido varias veces con el fin de propagar los errores experimentales a los resultados obtenidos. En el siguiente capítulo, en la sección 6.2, se describirá de forma general el proceso con el cual se realiza la propagación de errores, mejor conocido como bootstrap, el cual será aplicado posteriormente en la reproducción del espectro del charmonium y bottomonium.

Capítulo 6

Uso del bootstrap en la propagación de errores experimentales

Como en la mayoría de estudios de sistemas ligados, el modelo que en el presente trabajo se utiliza tiene diferentes parámetros los cuales deben ser ajustados (*fit*) a valores de observables conocidos experimentalmente. Dicho ajuste hace parte del procedimiento estándar en el estudio de los sistemas ligados utilizando modelos. Sin embargo, en el presente trabajo se utiliza un método más completo, en el cual se propagan los errores experimentales a los parámetros y al espectro producido. Como pronto se verá, esto involucra 1000 procedimientos de ajuste y por lo tanto, es mucho más exigente computacionalmente.

El procedimiento introducido en el presente capítulo, será base fundamental en la descripción de la propagación de los errores experimentales utilizando el modelo propuesto, en el estudio del charmonium y bottomonium (esto será tratado en el siguiente capítulo en la sección 7.3).

A continuación se describe a nivel general, la técnica estadística llamada bootstrap y como ella es utilizada en la propagación de las incertidumbres experimentales. En los siguientes capítulos será usado en la reproducción del espectro del charmonium y bottomonium.

6.1. Bootstrap

En los diferentes modelos usados para reproducir el espectro de mesones es necesario usar datos experimentales bien establecidos para ajustar los diferentes parámetros usados en los modelos. Estos datos, evidentemente, tienen incertidumbres asociadas que deben reflejarse en los parámetros obtenidos, en la reproducción de aquellos datos y también en las predicciones hechas por el modelo. Adicionalmente, el establecimiento de las correlaciones entre los parámetros propuestos representa un valor agregado que puede brindar información valiosa.

Por estas razones se elige un método estadístico conocido como Bootstrap que permite la propagación de los errores y el cálculo de las correlaciones en el modelo propuesto en el presente trabajo.

Bootstrap es una técnica estadística de remuestreo ampliamente usada en todos los ámbitos científicos (por ejemplo [127, 128]) a causa de su fácil manejo en el análisis estadístico y su apropiado funcionamiento en propagación de errores en modelos asociados a una muestra de datos. A pesar de sus múltiples ventajas esta técnica solo alcanzó popularidad en las últimas décadas, debido al gran poder de cómputo al que se tiene acceso en la actualidad.

Para describir este método, supóngase que se tiene una muestra de datos aleatoria $Y = y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, cuyo valor medio es \bar{y}_n . También se puede suponer, que los datos mencionados, provienen de cierta distribución G con un valor esperado β .

En primera aproximación se podría decir que $\beta \approx \bar{y}_n$, aunque no es lo más indicado, debido a que, al tomar otra muestra aleatoria el valor \bar{y}_n cambiaría. Aún así, el análisis de estas posibles variaciones de \bar{y}_n permitirían un mayor acercamiento a una correcta estimación de β . Sin embargo, para encontrar la distribución de β se necesitaría G , la cual no es conocida.

Es posible obtener un estimado G^* de la función de distribución “verdadera” G a través de un remuestreo (Y^*) del conjunto de datos aleatorios disponibles y que se supone provienen de la función de distribución

verdadera. De esta manera se encontraría un nuevo valor medio \bar{y}^* , el cual es llamado valor medio de bootstrap (*bootstrapped sample mean*).

El principio estadístico en el que se basa el *bootstrap* reside en suponer que la distribución G^* asociada al remuestreo es una buena aproximación de la “verdadera” distribución G [129, 130]. Utilizando el anterior principio es posible estimar un rango de incertidumbre en el que se encontrará el verdadero valor medio (β) de la distribución G . Sin embargo, para obtener una buena aproximación se requiere de un alto número de remuestreos, debido a que el principio mencionado es soportado por la ley de números grandes.

Por otro lado, cuando la distribución de datos es conocida y es asociada a un error experimental, es posible utilizar la técnica estadística de bootstrap para propagar dichos errores estadísticos, a parámetros que dependen de los datos asociados a dicha distribución. A continuación se describe como realizar esta propagación.

6.2. Propagación de errores a través del Bootstrap

Bootstrap permite propagar los errores de una manera eficiente y teniendo en cuenta de forma completa las correlaciones entre los parámetros de un determinado modelo. Supóngase que se tiene un dato Y con su correspondiente incertidumbre experimental, a la cual se puede asociar una distribución estadística (por ejemplo una distribución Gaussiana). A partir de esta distribución es posible hacer N remuestreos obteniendo un conjunto de N datos.

Adicionalmente, supóngase que se tiene un modelo teórico $T(X)$, que depende de M parámetros $X = x_1, x_2, x_3 \dots x_M$ y pretende reproducir los valores de los N remuestreos $Y_1^*, Y_2^*, Y_3^* \dots Y_N^*$.

Para obtener los valores apropiados de los parámetros X , en base a estos remuestreos se deben hacer N ajustes (*fits*) para el vector de parámetros X del modelo T para cada remuestreo realizado [131] (ver Figura 6.1).

Así mismo, utilizando estos N conjuntos de parámetros, se pueden realizar predicciones que incluirán dichos

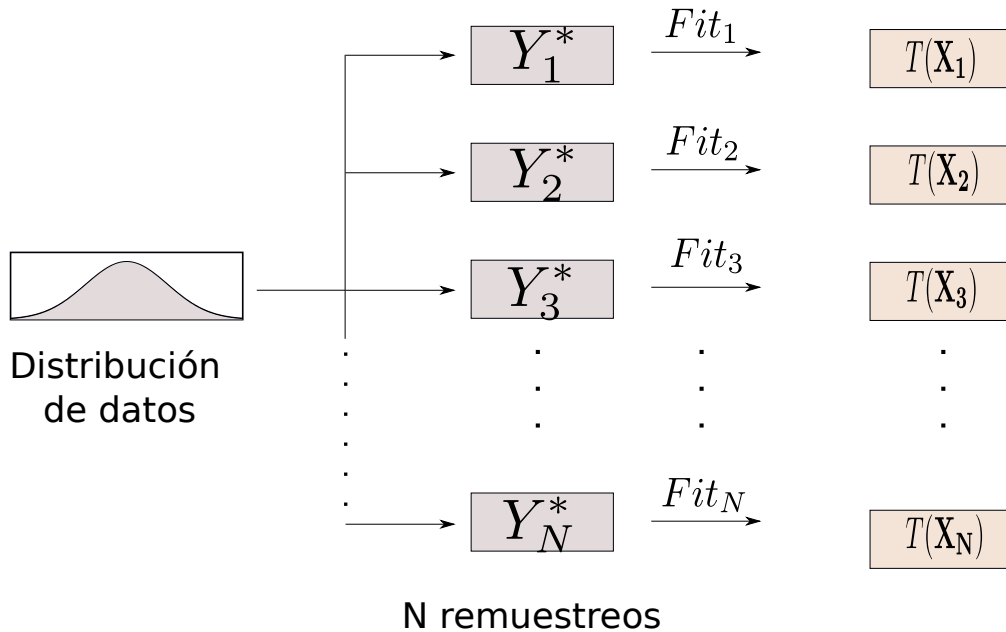


Figura 6.1: Esquema que describe la propagación de los errores usando *bootstrap*: Desde la distribución asociada a los datos (experimentales) se obtienen los remuestreos que posteriormente serán usados en el proceso de ajuste de los parámetros (*fitting procedure*).

errores estadísticos asociados a la distribución de la que se generó inicialmente el remuestreo .

Una vez encontrados estos conjuntos de parámetros es posible analizar la distribución estadística que cada parámetro cumple. Haciendo un histograma de los resultados de cada parámetro, se determina si la distribución que se encuentra es Gaussiana. Si así fuera, la caracterización de los rangos de incertidumbre, para cada

parámetro, serían sencillos de calcular. En caso contrario es conveniente solo tomar el 68% del intervalo de nivel de confianza [132]. De la misma forma es posible evaluar la incertidumbre de las posibles predicciones que se puedan obtener con el modelo T al evaluarlo en todos los conjuntos de parámetros encontrados en el proceso de ajuste.

En cuanto al fit, existen diferentes herramientas de software para realizar estos procesos de ajuste (*fit*). Por ejemplo MINUIT [55] o STEPIT [133], siendo el primero de ellos el más popular debido a sus diferentes y eficientes técnicas de minimización.

Todos estos programas requieren de un punto de partida para cada parámetro. Para garantizar la independencia de cada ajuste, este punto de partida debe ser generado también de forma aleatoria, es decir, también debe realizarse remuestreos en el programa de ajuste. Generalmente es usada una distribución lineal dentro de un rango dispuesto a discreción del experimentalista.

En resumen, utilizando este conjunto de técnicas es posible propagar, de manera formal, los errores estadísticos de una muestra, tanto a los parámetros de un modelo determinado como en las predicciones del mismo. Este tipo de estudios estadísticos son de importancia capital debido a que solo de esta forma se puede evaluar el alcance real de un modelo y de sus predicciones.

Como ya se ha mencionado, en el presente trabajo, este es el método elegido para realizar la propagación de los errores experimentales en los parámetros del modelo y en el espectro reportado aquí (ver sección 7.3). Detalles de los generadores aleatorios utilizados se pueden encontrar en el apéndice E.

Dejando clara la manera como serán propagados los errores experimentales a través del bootstrap, en el siguiente capítulo se explicará en detalle el proceso de solución, de ajuste (*fit*) y de propagación de errores específicamente para el charmonium y bottomonium, utilizando el método aquí descrito.

Capítulo 7

Método de solución y procedimiento de ajuste (*fit*)

En el capítulo 5 fue desarrollado el modelo relativista que será usado para reproducir el espectro del charmonium y bottomonium. Es necesario tener en cuenta que la ecuación integral a resolver tiene un *kernel* conformado por expresiones no locales de difícil solución. En el presente capítulo se describirá el método de solución de la ecuación integral y de ajuste de parámetros. Con este fin, en la sección 7.1 se describe el método de solución utilizado para encontrar el espectro del charmonium y bottomonium, en la sección 7.2 se abordará el cálculo del elemento de matriz. Finalmente, en la sección 7.3 se hablará acerca del proceso de ajuste (*fit*), con el cual se buscará hallar los valores de los parámetros del modelo con los potenciales definidos anteriormente y será descrito cómo, a través de la técnica estadística descrita en el capítulo pasado (capítulo 6), se propaga el error experimental de las masas de los estados utilizados en el ajuste en todo el espectro calculado y a los parámetros del modelo.

7.1. Método de Solución

Con el fin de determinar las energías de las resonancias del espectro del charmonium y bottomonium es necesario solucionar la ecuación (5.24) la cual es una ecuación integral de Fredholm de segundo orden [134]. Existen diferentes métodos para solucionar este tipo de ecuaciones. En particular, se ha empleado un procedimiento variacional en el presente trabajo.

Con este fin, primero se expresa la función de onda del sistema por medio de una superposición de las funciones de onda de una base de prueba dada. Usando el acoplamiento espín-órbita estándar las funciones de onda son

$$\Psi_{n,\{\nu\}}(\vec{p}) = R_{n,L}(p; \bar{p}) [Y_L(\hat{p}) \otimes \chi_S]_{J,M_J}, \quad (7.1)$$

donde la función radial en el espacio del momentum $R_{n,L}(p; \bar{p})$ representa el factor radial de la función de prueba, n es el número cuántico principal, \bar{p} es el parámetro variacional con dimensión de momentum, $Y_{L,M_L}(\hat{p})$ es el correspondiente armónico esférico y χ_{S,M_S} es la función de espín. Por conveniencia se introduce la notación corta $\{\nu\} = L, S, J$ para los números cuánticos espín-angular de la base, es decir, el momento angular orbital (L), el espín total ($S = 0, 1$) y el momento angular total (J). Para los cálculos presentados en este trabajo se toma la proyección del momento angular total sobre el eje z como $M_J = J$. Los valores de elementos de matriz que involucran los otros valores de M_J están directamente relacionados con los que tienen $M_J = J$ a través del teorema de Wigner-Eckart [135]. Por simplicidad no se considera la posibilidad que diferentes valores de L sean mezclados por la interacción tensorial (presente dentro de \mathcal{H}_{int}). Estos efectos han mostrado ser despreciables en modelos semirelativistas [45, 115]. Para la parte radial se seleccionó una función de onda de oscilador armónico tridimensional

$$R_{n,L}(p; \bar{p}) = \left[\frac{2n!}{\Gamma(n + L + \frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{s^L}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}} \mathcal{L}_n^{L+\frac{1}{2}}(s^2) \exp \left[\frac{-s^2}{2} \right], \quad (7.2)$$

donde $\mathcal{L}_n^{L+\frac{1}{2}}(s^2)$ son los polinomios de Laguerre generalizados y $s \equiv p/\bar{p}$.

Ahora, se construye la matriz Hamiltoniana a partir de la ecuación (5.24), utilizando la base de oscilador armónico de la ecuación (7.2), obteniendo

$$M_{\{\nu\},n_b,n_a} = M_0 \delta_{n_b,n_a} + \int d^3p \Psi_{n_b,\{\nu\}}^\dagger(\vec{p}) K(\vec{p}) \Psi_{n_a,\{\nu\}}(\vec{p}) + \int d^3p_b d^3p_a \Psi_{n_b,\{\nu\}}^\dagger(\vec{p}_b) \mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{p}_b, \vec{p}_a) \Psi_{n_a,\{\nu\}}(\vec{p}_a). \quad (7.3)$$

Donde $K(\vec{p})$ esta definida en la expresión (5.23) y $\mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{p}_b, \vec{p}_a)$ es la interacción definida en la ecuación (5.10). La matriz Hamiltoniana (7.3) será posteriormente diagonalizada con el fin de obtener los valores propios de la ecuación. En la ecuación (7.3) las matrices de espín de Pauli en $\mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{p}_b, \vec{p}_a)$ no han sido escritas explícitamente. Se debe notar que una integración en seis dimensiones sobre \vec{p}_b y \vec{p}_a aparece en el término de interacción. Sin embargo, se integra analíticamente la parte espín-ángulo del elemento de matriz así que solo una integración tridimensional sobre p_b, p_a y $\cos \theta = x$ permanece. Para resolver la ecuación (7.3) se usa el procedimiento variacional descrito a continuación [45].

- Se fija el valor de \bar{p} y se realiza la diagonalización del Hamiltoniano completo. Posteriormente, se minimiza la energía del estado base del sistema barriendo el parámetro variacional no lineal \bar{p} (ver apéndice F).
- Se diagonaliza el Hamiltoniano utilizando este valor del parámetro variacional.

Se obtiene una buena convergencia numérica para los autovalores que representan la energía del sistema estudiado, tomando las primeras diez funciones de onda de la base para cada estado. Por lo tanto, la matriz Hamiltoniana 10×10 es diagonalizada y minimizada a través de la técnica variacional estándar ya descrita. Una vez la solución numérica es obtenida, se verifica en todo caso que la solución encontrada represente una buena aproximación numérica. Para ello se substituye la solución numérica en la parte izquierda de la ecuación (5.24) y se verifica que la ecuación integral sea satisfecha. De esta manera se garantiza que las soluciones reportadas realmente cumplen la ecuación integral.

7.2. Cálculo del elemento de matriz

Para mayor claridad se calculará de manera explícita el elemento de matriz en el espacio del momentum. Para tal efecto, primero se escribirá la expresión de la interacción vectorial (ecuación (5.17)) y escalar (ecuación (5.18)) de forma más explícita. Con ese motivo se escriben, en primer lugar, algunas definiciones útiles que simplificarán las expresiones asociadas a la interacción.

Se define entonces:

$$F(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E(\vec{p}) + m}{2E(\vec{p})}}, \quad R(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E(\vec{p}) - m}{2E(\vec{p})}}, \quad (7.4)$$

y

$$\begin{aligned} \eta &= F(\vec{p}_a) F(\vec{p}_b), & \lambda &= R(\vec{p}_b) R(\vec{p}_a), \\ \theta &= F(\vec{p}_b) R(\vec{p}_a), & \phi &= F(\vec{p}_a) R(\vec{p}_a). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Adicionalmente se redefinen las interacciones escalar y vectorial de la siguiente forma:

$$\langle \vec{p}_b | H^{(v)} | \vec{p}_a \rangle = \bar{H}^{(v)}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2), \quad (7.6)$$

$$\langle \vec{p}_b | H^{(s)} | \vec{p}_a \rangle = \bar{H}^{(s)}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2). \quad (7.7)$$

Utilizando las anteriores definiciones junto con la ecuación (5.8) es posible escribir la ecuación (5.17) en la forma:

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(v)}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) &= V^{(v)}(\vec{q}) \left\{ \left[1 - \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right] [\eta^2 + \eta\lambda(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a) + \eta\lambda(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_a) \right. \\ &\quad + \lambda^2(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_a)] + [\theta^2(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_a)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + \theta\phi(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \\ &\quad \left. + \theta\phi(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_a)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + \phi^2(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \right] \left[1 + \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Donde las expresiones ΔE y Q^2 han sido definidas en la sección 5.1.

De igual forma la ecuación (5.18) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(s)}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = V^{(s)}(\vec{q}) \{ & \eta^2 - \eta\lambda(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a) - \eta\lambda(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_a) \\ & + \lambda^2(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_a) \}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Las anteriores expresiones (ecuaciones (7.8) y (7.9)) están compuestas de factores que dependen de los ángulos, de los momentos y de los espines ($\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$) y de factores “escalares” que solo dependen de los valores absolutos de los momentos (p_a, p_b) y de x . Teniendo esto en mente, es posible escribir de forma compacta el Hamiltoniano total dado por la ecuación (5.9). Por claridad, se considera por separado el término vectorial (v) y el escalar (s), identificados por medio del superíndice $\tau = v, s$, respectivamente:

$$\bar{\mathcal{H}}_{int}^{(\tau)}(\vec{p}_b, \vec{p}_a, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = \sum_{\tau} \sum_k \bar{\mathcal{H}}^{(\tau),k}(p_b, p_a, x) \Lambda_k(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2). \quad (7.10)$$

En la anterior ecuación el primer factor ($\bar{\mathcal{H}}^{(\tau),k}(p_b, p_a, x)$) representa el factor “escalar” (que no depende de ángulos) y el segundo factor ($\Lambda_k(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)$) dependiente de las variables espín-ángulo. Adicionalmente k etiqueta cada uno de los términos que aparecen en cada interacción. Desde ahora se dejará de lado la notación con la barra teniendo en cuenta la definición (5.10), es decir se van a incluir los factores encargados del apantallamiento en el Hamiltoniano de interacción, los cuales quedarían incluidos en la parte de la interacción que solo depende del valor absoluto del momentum.

Para separar apropiadamente lo que se puede integrar de forma analítica del resto es conveniente expandir en polinomios de Legendre la interacción $\mathcal{H}^{(v),k}(p_b, p_a, x)$ obteniendo la siguiente expresión:

$$\mathcal{H}_{int}^{(\tau)}(\vec{p}_b, \vec{p}_a, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = 4\pi \sum_{\tau} \sum_k \sum_{\ell} \mathcal{H}_{\ell}^{(\tau),k}(p_b, p_a) \times \sum_m Y_{\ell,m}(\hat{p}_b) Y_{\ell,m}^*(\hat{p}_a) \Lambda_k(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2). \quad (7.11)$$

donde $\mathcal{H}_{\ell}^{(\tau),k}(p_b, p_a)$ se puede obtener a partir de los polinomios de Legendre de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_{\ell}^{(\tau),k}(p_b, p_a) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \mathcal{H}^{(\tau),k}(p_b, p_a, x) P_{\ell}(x). \quad (7.12)$$

Donde $P_{\ell}(x)$ es un polinomio de Legendre de grado ℓ .

El elemento de matriz de la parte angular en la ecuación (7.11), claramente factorizada, se puede calcular analíticamente utilizando el álgebra del momentum angular. De esta manera el último término a la derecha en la ecuación (7.3) (que da cuenta del elemento de matriz de la interacción Hamiltoniana) teniendo en cuenta de forma explícita la función de onda de la expresión (7.1) y a su vez la base de prueba de la ecuación (7.2), se puede escribir:

$$\begin{aligned} \langle n_b; L, S, J | H_{int} | n_a; L, S, J \rangle = 4\pi \sum_{\tau} \sum_k \sum_{\ell} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dp_b p_b^2 dp_a p_a^2 \int_{-1}^1 dx R_{n_b, L}(p_b) \mathcal{H}_{\ell}^{(\tau),k}(p_b, p_a, x) R_{n_a, L}(p_a) P_{\ell}(x) \\ \times \sum_m \int d\Omega_b d\Omega_a [Y_L(\hat{p}_b) \otimes \chi_S]_{J, M_J}^{\dagger} Y_{\ell, m}(\hat{p}_b) \Lambda_k(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) Y_{\ell, m}^*(\hat{p}_a) [Y_L(\hat{p}_a) \otimes \chi_S]_{J, M_J}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

El segundo renglón de la anterior ecuación (ecuación (7.13)) corresponde a la parte de la interacción que puede ser evaluada de forma analítica utilizando el álgebra de momentum angular. Por el contrario, la primera parte de la expresión ecuación (7.13) presenta integrales que no tienen solución analítica. Estas integrales en el espacio del momentum y en las variables p_a, p_b y x se resuelven utilizando un método de integración, basado en un algoritmo global y adaptativo.

A pesar de que el término tipo-Coulomb en el potencial vectorial ecuación (5.20a) tiene una clara singularidad tipo $1/q^2$, es posible evitarla al hacer el siguiente cambio de variable:

$$\vec{u} = (\vec{p}_a - \vec{p}_b), \quad (7.14a)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{p}_b + \vec{p}_a), \quad (7.14b)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{4}u^2 + v^2 - uv)(\frac{1}{4}u^2 + v^2 + uv)}}(v^2 - \frac{u^2}{4}), \quad (7.14c)$$

donde $y = \vec{u} \cdot \vec{v}$. El Jacobiano correspondiente a este cambio de variable es uno. Por lo tanto, integrando respecto a y , u y v es posible superar la singularidad del término tipo Coulomb. Una ventaja adicional que tiene este cambio de variable es que produce una convergencia más veloz para las integrales correspondientes al elemento de matriz (para más detalles ver apéndice D).

7.2.1. Cálculo de la parte angular del elemento de matriz

El cálculo de esta parte del elemento de matriz deberá ser hecho para cada uno de los términos $\Lambda_k(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)$. Por conveniencia se utilizará en esta parte la notación *bra-ket* de Dirac. De esta forma, el elemento de matriz angular en la ecuación (7.13) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\langle b : L, S, J; a : \ell | \Lambda_k(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) | a : L, S, J; b : \ell \rangle = \sum_m \int d\Omega_b d\Omega_a [Y_L(\hat{p}_b) \otimes \chi_S]_{J, M_J}^\dagger Y_{\ell, m}(\hat{p}_b) \Lambda_k(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) Y_{\ell, m}^*(\hat{p}_a) [Y_L(\hat{p}_a) \otimes \chi_S]_{J, M_J}. \quad (7.15)$$

Los números cuánticos se han descrito en la sección 7.1.

Mirando con detenimiento las ecs. (7.8) y (7.9) se observa que $\Lambda_k(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)$ se compone de productos del tipo $(\vec{\sigma}_{1,2} \cdot \hat{p}_{a,b})$. Esta clase de expresiones pueden ser acopladas con $[Y_L(\hat{p}_{a,b}) \otimes \chi_S]_{J, M_J}$ con el fin de evaluar de forma directa el elemento de matriz. Utilizando el álgebra de momentum angular es posible mostrar que (ver apéndice C):

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}) [Y_L(\hat{p}) \otimes \chi_S]_{J, M_J} = \sum_{L_1, S_1} q_1(L, S, J; L_1, S_1) [Y_{L_1}(\hat{p}) \otimes \chi_{S_1}]_{J, M_J}, \quad (7.16)$$

donde

$$q_1(J, S, J; L_1, S_1) = \sqrt{6(2L+1)(2S+1)(2S_1+1)}(-1)^{S_1-L_1+S+J+1} \langle 1, 0; L, 0 | L_1, 0 \rangle \begin{Bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & S_1 & S \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & 1 & L_1 \\ S_1 & J & S \end{Bmatrix}. \quad (7.17)$$

La expresión $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$ representa el símbolo $6J$. Además $L_1 = L - 1, L + 1$ y $S_1 = 0, 1$. Utilizando operaciones de simetría también se puede mostrar lo siguiente:

$$q_2(J, S, J; L_1, S_1) = (-1)^{S_1+S} q_1(J, S, J; L_1, S_1). \quad (7.18)$$

Con estos resultados, y utilizando las propiedades de ortonormalidad de los armónicos esféricos, es posible obtener expresiones analíticas para los diferentes valores de $\Lambda_k(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)$. Por completez, se mostrará el resultado explícito para $\Lambda(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = (\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a)$. De esta manera, se da una idea más clara de lo que representan estos términos angulares en el elemento de matriz.

Para este término se tiene entonces que:

$$\langle b : L, S, J; a : \ell | (\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a) | a : L, S, J; b : \ell \rangle = \sum_{S'} q_1(L, S, J; \ell, S') q_1(L, S, J; \ell, S') \quad (7.19)$$

donde $\ell = L - 1, L + 1$ y $S' = 0, 1$. En general, la parte angular el elemento de matriz es conformada por expresiones al estilo de la anterior ecuación, que pueden ser encontradas en forma cerrada dados los números cuánticos de un estado particular. En base a lo anterior, estas expresiones serán representados de la siguiente manera:

$$\langle b : L, S, J; a : \ell | \Lambda_k(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) | a : L, S, J; b : \ell \rangle = \tilde{\Lambda}_{k, L, S, J; \ell} \quad (7.20)$$

De esta forma el elemento de matriz en la ecuación (7.13) completo queda:

$$\langle n_b; L, S, J | H_{int} | n_a; L, S, J \rangle = 4\pi \sum_{\tau} \sum_k \sum_{\ell} \tilde{\Lambda}_{k, L, S, J; \ell} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dp_b p_b^2 dp_a p_a^2 \int_{-1}^1 dx R_{n_b, L}(p_b) \mathcal{H}_{\ell}^{(\tau), k}(p_b, p_a, x) R_{n_a, L}(p_a) P_{\ell}(x) \quad (7.21)$$

7.3. Procedimiento de ajuste (*fit*) y cálculo de incertidumbres

En el capítulo 6 se describió, de manera general, como a través de la técnica llamada bootstrap es posible propagar los errores experimentales. En la presente sección se aplicará dicho proceso específicamente para el charmonium y bottomonium.

Los potenciales I y II (ver ecuación (5.22)), dependen de 7 y 8 parámetros respectivamente. Se tiene una dependencia de m (masa del quark constituyente c y \bar{c} ó b y \bar{b}), M_0 (energía fenomenológica de punto cero del espectro), α_{st} (constante de acoplamiento fuerte efectivo), β_v (intensidad del confinamiento vectorial), A (constante escalar de interacción), y k_s y p_s (parámetros de apantallamiento), mientras que, con el potencial II, se tiene una dependencia de los mismos parámetros más β_s que representa la intensidad del confinamiento escalar.

Para determinar los valores de los parámetros, las correspondientes incertidumbres y el espectro del sistema $q\bar{q}$ se ajustan las masas experimentales de las resonancias dadas en la tabla 8.4 es decir, los estados base de cada J^{PC} más las resonancias η'_c y ψ' , cuyas energías están por debajo del umbral $D\bar{D}$. De igual forma se han utilizado estados bien establecidos para el bottomonium, consignados en la tabla 9.4, los cuales están debajo del umbral $B\bar{B}$. Haciendo esto procedemos de la siguiente forma [131]:

1. Se eligen aleatoriamente valores de las masas de las resonancias por muestreo de una distribución Gaussiana acorde a las incertidumbres experimentales dadas en la tabla 8.4 para el charmonium y en la tabla 9.4 para el bottomonium, obteniendo un remuestreo de la energía de los estados utilizados en el ajuste (*fit*).
2. Se usa el método de mínimos cuadrados para minimizar la distancia al cuadrado:

$$d^2 = \sum_i (E_i - M_i)^2, \quad (7.22)$$

donde M_i representan las masas de estados bien establecidos, es decir, estados debajo de los umbrales de decaimiento, en el rango experimental reportado en PDG, las cuales fueron obtenidas en el remuestreo mencionado en el ítem anterior. Más precisamente, se utilizan en el proceso de ajuste las siguientes resonancias, con números cuánticos J^{PC} , indicadas entre paréntesis: $i \equiv J^{PC} =$, 0^{-+} (η_c , η'_c); 1^{--} (J/ψ , ψ'); 0^{++} (χ_{c0}); 1^{+-} (h_c); 1^{++} (χ_{c1}) y 2^{++} (χ_{c2}) para el charmonium; para el bottomonium; 0^{-+} ($\eta_b(1S)$); 1^{--} ($\Upsilon(1S)$, $\Upsilon(2S)$, $\Upsilon(3S)$); 0^{++} ($\chi_{b0}(1S)$, $\chi_{b0}(2S)$); 1^{+-} ($h_b(1P)$, $h_b(2P)$); 1^{++} ($\chi_{b1}(1P)$, $\chi_{b2}(2S)$); 2^{--} ($\Upsilon(1D)$) y 2^{++} ($\chi_{b2}(1P)$, $\chi_{b2}(2S)$). E_i representan las energías teóricas correspondientes, obtenidas por medio de los potenciales I y II al resolver la ecuación (7.3).

Estos ajustes (*fits*) son ejecutados usando MINUIT [55]. Vale la pena mencionar que los ajustes realizados para el charmonium y bottomonium se realizan de manera independiente.

Este procedimiento es repetido 1000 veces suministrando estadística suficiente para computar el valor esperado de los parámetros y del espectro de energías así como también de sus incertidumbres a 1σ (68%) de nivel de confianza (NC). Los valores esperados de los parámetros son computados como el valor medio de las 1000 muestras. Para calcular las incertidumbres a 1σ de NC se toma el mejor 68% de los *fits* y se computan las diferencias entre el valor medio y el máximo de igual forma entre el valor medio y el mínimo valor de las masas. De esta manera las incertidumbres reportadas no son simétricas. La tabla 8.1 suministra los parámetros ajustados para ambos potenciales y en las tablas 8.2 y 8.3 se encuentran las matrices de correlación, para el charmonium, de los parámetros para los potenciales I y II, igualmente en la tabla 9.1 están registrados los parámetros para ambos potenciales y en las tablas 9.2 y 9.3 se encuentran las matrices de correlación, para el bottomonium. Estos resultados serán analizados en los capítulos 8 y 9.

Vale la pena mencionar que el estado $\eta_b(2S)$ no se ha utilizado en el proceso de ajuste (*fit*). Esta exclusión se debe a que existió una ligera discusión al respecto del valor de la masa de este estado. Inicialmente la colaboración BABAR [136] reportó un valor de masa del estado $\eta_b(2S)$ entre 9974 y 10015 MeV. Posteriormente, la colaboración CLEO [137] y Belle [11] reportaron valores de $9974.6 \pm 2.3 \pm 2.1$ MeV y $9999.0 \pm 3.5^{+2.8}_{-1.9}$ MeV, respectivamente. Por último, la colaboración Belle [138] buscó en la región de energía explorada por CLEO con 17 veces más estadística y concluyeron que no se evidencia ninguna señal en esa región de energía. A pesar de que el PDG ya ha añadido este resultado en sus registros, en el presente trabajo se consideró conveniente dejarlo fuera del proceso de ajuste para intentar obtener este estado como una predicción. El resultado será comentado en el capítulo 9.

Para la ejecución de los ítems mencionados y la obtención de los parámetros, matrices de correlación de los parámetros y el espectro de los mesones, se construyó una serie de subrutinas en lenguaje FORTRAN. Además fue necesario utilizar programación en paralelo utilizando el protocolo MPI (*Message Passing Interface*) para optimizar todo el proceso computacional. Sólo de esta manera fue posible realizar la gran cantidad de procesos de ajuste que se llevaron a cabo para propagar los errores experimentales en el espectro de energías y en los parámetros del modelo. En este proceso ha sido usado el *cluster* TOCHTLI del Instituto de Ciencias Nucleares (ICN) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Por lo tanto, siguiendo el método de diagonalización-minimización, descrito en la sección 7.1, junto con el proceso de ajuste (fit) aquí descrito (basado en lo explicado en el capítulo 6) y a través de las herramientas de software construidas, fue posible reproducir los espectros del charmonium y bottomonium, los cuales se presentarán y analizarán en los capítulos 8 y 9.

Capítulo 8

Espectro del charmonium

En los capítulos pasados se ha mostrado en detalle el modelo relativista y además se ha descrito el método de solución que se empleó en la obtención del espectro del charmonium y bottomonium. En el presente capítulo, el cual está basado en la publicación [56], se presentarán los resultados concernientes al charmonium. En primera instancia, se mostrarán los valores de los parámetros hallados en los procesos de ajuste utilizando los dos potenciales. Posteriormente, se discutirán las matrices de correlación que surgen del proceso estadístico ya descrito. Adicionalmente, se mostrará el espectro del charmonium, tanto los estados utilizados en el ajuste como los demás estados que serán tomados como predicciones del espectro. Se analizarán varios estados del espectro que revisten especial interés, uno de ellos es el $X(3872)$. Finalmente, se mostrarán las conclusiones obtenidas en el presente capítulo.

8.1. Parámetros del modelo y matrices de correlación

Utilizando el modelo relativista con los parámetros ya descritos y a través del proceso mencionado en el capítulo pasado se encontraron los resultados para los parámetros que se muestran en la tabla 8.1

Tabla 8.1: Parámetros ajustados de los dos potenciales considerados en la reproducción del espectro del charmonium. Las barras de error son reportadas a 1σ (68%) de NC (Nivel de Confianza), teniendo en cuenta todas las correlaciones entre parámetros. (ver Sección 7.3).

Parameter	Potential I	Potential II
m (MeV)	1455^{+30}_{-26}	1364^{+46}_{-63}
M_0 (MeV)	108^{+21}_{-25}	270 ± 45
α_{st}	$0.63^{+0.08}_{-0.06}$	$0.544^{+0.027}_{-0.060}$
β_v (GeV ²)	$0.0134^{+0.0009}_{-0.0014}$	$0.004^{+0.001}_{-0.002}$
k_s	59^{+11}_{-9}	96^{+14}_{-10}
p_s (GeV)	$0.698^{+0.065}_{-0.067}$	$0.91^{+0.11}_{-0.06}$
A (GeV ⁻²)	0.015 ± 0.004	-0.006 ± 0.002
β_s (GeV ²)	0 (fixed)	$0.013^{+0.004}_{-0.003}$

Los valores de los parámetros obtenidos están cerca del rango usual de valores encontrados en otros modelos de potencial, particularmente aquellos que son comunes en casi todos los modelos como m y α_{st} . Sin embargo, el potencial II obtiene un valor de masa del quark charm (≈ 1.3 GeV) un poco más cercano al reportado en el PDG (Particle Data Group) el cual tiene un valor de 1.27 ± 0.03 GeV [139]. Vale la pena resaltar que muchos modelos con muy buenos resultados en su ajuste y en las predicciones reportan masas del quark charm lejanas del valor calculado y reportado en el PDG (por ejemplo [42, 115, 116]). Como se observa en la tabla 8.4 estos valores de parámetros producen un excelente fit para ambos potenciales. Los parámetros relacionados con el apantallamiento revelan una activación de este fenómeno precisamente en la cercanía de los umbrales de decaimiento $D\bar{D}$. Para analizar el apantallamiento es conveniente definir el momentum asociado al apantallamiento $p_{1/2}^j$ ($j = I, II$ etiquetan los potenciales I y II) que son definidos por $F_s(p_{1/2}^j) = 1/2$ (debe recordarse que $F_s(0) = 1$). Se define de esta manera puesto que, a ese valor, se puede considerar

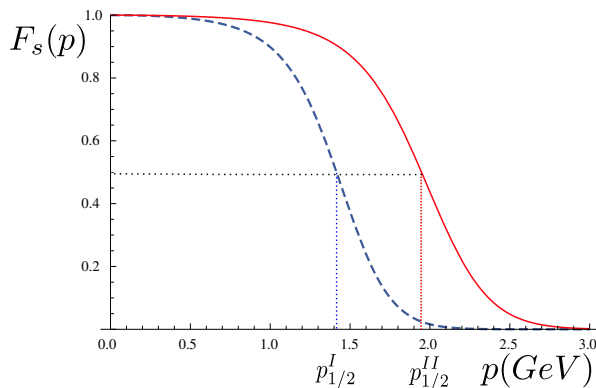


Figura 8.1: Función de apantallamiento, ecuación (5.11), para los potenciales I (línea punteada azul) y II (línea roja). Para k_s y p_s se han usado los valores centrales de la tabla Table 8.1. Se resaltan los valores del momento asociado al apantallamiento $p_{1/2}^I$ (potencial I) y $p_{1/2}^{II}$ (potencial II) definidos en la sección 7.3.

que el apantallamiento está participando en la dinámica del potencial de manera importante. Siguiendo la anterior definición se encuentra que $p_{1/2}^I = 1.4$ GeV and $p_{1/2}^{II} = 1.9$ GeV. Estos valores corresponden a la energía cinética de apantallamiento

$$\bar{E}^j = 2\sqrt{m^2 + \left(p_{1/2}^j\right)^2} \quad (8.1)$$

obteniendo $\bar{E}^I = 4100$ MeV y $\bar{E}^{II} = 4700$ MeV. Esto muestra que el efecto de apantallamiento es activo por encima del umbral de decaimiento donde un efecto de saturación de energía debe ser introducido para la interacción [140].

Antes de analizar el espectro producido se analizarán las matrices de correlación que se exponen en las tablas 8.2 y 8.3. A pesar que los potenciales I y II comparten el mismo tipo de potencial vectorial se debe tener presente que se diferencian por el potencial escalar. La matriz de correlación del potencial I indica una alta correlación entre parámetros. Particularmente se observa que la masa del charm tiene una alta correlación con los parámetros tanto del potencial vectorial como del potencial escalar. Se debe notar la correlación moderada entre el coeficiente β_v y A . Esta correlación implica una conexión entre el confinamiento en la interacción vectorial y la interacción escalar. Una importante correlación que vale la pena mencionar es la existente entre los parámetros asociados al apantallamiento con los demás parámetros. Se observa una apreciable correlación entre el parámetro p_s y A . Siendo que el apantallamiento actúa en la región alta del espectro, esto sugeriría que la interacción escalar actúa también en regiones altas de energía. Por el contrario se nota una baja correlación entre los parámetros de apantallamiento y los parámetros β_v y α_{st} indicando que con este potencial la interacción vectorial influye más a bajas energía y la interacción escalar a altas energías.

Tabla 8.2: Matrices de correlación para los parámetros del potencial I.

	m	M_0	α_{st}	β_v	k_s	p_s	A
m	1						
M_0	-0.78	1					
α_{st}	0.86	-0.40	1				
β_v	-0.88	0.39	-0.93	1			
k_s	0.11	-0.02	0.13	-0.23	1		
p_s	0.33	-0.34	0.05	-0.16	-0.62	1	
A	-0.76	0.59	-0.53	0.62	0.03	-0.70	1

Con respecto al potencial II, las correlaciones cambian drásticamente. La inclusión del parámetro β_s y por lo tanto del término de confinamiento de forma explícita en la interacción escalar, rompe correlaciones que con el potencial I eran muy fuertes, con excepción del parámetro M_0 . Se observa entonces en la tabla 8.3 como los parámetros de la interacción vectorial se encuentran descorrelacionados entre ellos. Esto también sucede

con los parámetros de la interacción escalar. Adicionalmente se observa la disminución de las correlaciones de la masa m del quark charm con los demás parámetros. Sin embargo, se reporta en este potencial una apreciable correlación entre β_v y β_s sugiriendo que en cualquier caso existe una fuerte correlación física entre los términos de interacción vectorial y escalar de confinamiento.

Tabla 8.3: Correlation matrix for the parameters of potential II.

	m	M_0	α_{st}	β_v	k_s	p_s	A	β_s
m	1							
M_0	-0.61	1						
α_{st}	0.40	0.31	1					
β_v	-0.12	0.04	0.06	1				
k_s	0.31	-0.10	0.14	-0.23	1			
p_s	0.02	-0.20	-0.42	-0.17	-0.35	1		
A	0.22	-0.18	0.09	-0.21	0.24	0.58	1	
β_s	-0.29	-0.20	-0.52	-0.66	0.02	0.33	0.29	1

8.2. Espectro del charmonium

En esta sección se presenta el espectro del charmonium, en el cual se han propagado los errores experimentales a través de la técnica de *bootstrap* ya mencionada. En la tabla 8.4 se consignan los valores encontrados para los estados usados en el proceso de ajuste.

Tabla 8.4: Estados del Charmonium usados en el ajuste usando los potenciales I y II comparados con las masas experimentales obtenidas del PDG. n representa el número cuántico principal, L el momento angular orbital, J el momento angular total y S el espín total del sistema quark-antiquark (charm-anticharm).

Nombre	$n^{2S+1}L_J$	Masas (MeV)		
		Potencial I	Potencial II	Experimental
η_c	1^1S_0	2990^{+6}_{-12}	2981^{+8}_{-12}	2983.6 ± 0.6
J/ψ	1^3S_1	$3089.3^{+5.7}_{-6.5}$	3101^{+13}_{-10}	3096.916 ± 0.011
χ_{c0}	1^3P_0	$3417.0^{+8.4}_{-5.9}$	3416^{+11}_{-13}	3414.75 ± 0.31
χ_{c1}	1^3P_1	$3500.7^{+4.4}_{-3.4}$	$3506.3^{+7.7}_{-7.1}$	3510.66 ± 0.07
h_c	1^1P_1	$3514.9^{+5.9}_{-4.6}$	$3521.0^{+6.5}_{-6.7}$	3525.38 ± 0.11
χ_{c2}	1^3P_2	3579^{+5}_{-12}	3563^{+8}_{-14}	3556.20 ± 0.09
η'_c	2^1S_0	3646^{+7}_{-12}	3647^{+10}_{-12}	3639.2 ± 1.2
ψ'	2^3S_1	$3674.9^{+5.4}_{-5.7}$	$3679.2^{+9.2}_{-9.4}$	$3686.109^{+0.012}_{-0.014}$

Ambos modelos presentan un excelente ajuste a los datos experimentales. Sin embargo, cabe notar que el potencial II reproduce todos los estados ajustados dentro de 1σ de NC mientras que con el potencial I χ_{c1} y χ_{c2} caen marginalmente fuera de 1σ de NC (ver tabla 8.4 ó gráficas 8.2 y 8.3).

Si se observan las tablas de las predicciones de los estados 8.5 y la tabla 8.6 se observan diferencias marcadas entre estados en la parte alta del espectro. Sin embargo, la estructura del espectro producido por ambos potenciales es semejante. Se discutirán a continuación algunos de los estados producidos por los potenciales I y II, acorde a la asignación espectroscópica $n^{2S+1}L_J$ de los números cuánticos.

8.2.1. $X(3915)$, $X(3872)$ y $\chi_{c2}(2P)$

Para estos estados se asignan los números cuánticos 2^3P_J , con $J = 0, 1$ y 2 para $X(3915)$, $X(3872)$ [141] y $\chi_{c2}(2P)$ respectivamente. Los potenciales I y II son capaces de reproducir la división hiperfina de los estados ajustados $1P$ (χ_{c0} , h_c , χ_{c1} y χ_{c2}) pero la estructura de los estados $2P$ no puede ser reproducida con la misma precisión. En particular no es posible reproducir el hecho que el estado $X(3915)$ tenga una masa más alta que el estado $X(3872)$. Sin embargo, se predice con buena precisión el estado $\chi_{c2}(2P)$ dentro de las incertidumbres de los dos potenciales. Estos estados yacen en la cercanía del umbral $\bar{D}D^*$ y por lo

tanto aparecen efectos dinámicos y grados de libertad que no son considerados en el modelo. Estos efectos, semejantes a efectos de umbral o mezclas moleculares en las funciones de onda, pueden ser responsables por las desviaciones en las predicciones. El estado $X(3872)$ es de particular interés y requiere de una cuidadosa discusión. Esta resonancia fue descubierta por la colaboración Belle [89] y fue confirmada por la colaboración CDF [142]. Varias interpretaciones han sido realizadas para describir esta resonancia cuyas propiedades no pueden ser explicadas fácilmente dentro del marco estándar de un mesón $q\bar{q}$ debido a la proximidad del umbral de decaimiento $\bar{D}D^*$ [120]. El estado $X(3872)$ ha sido identificado como tetraquark [6, 44, 143, 144], como una molécula $\bar{D}D^*$ [145–148], como un núcleo de $c\bar{c}$ más un componente molecular [120] y como un estado híbrido [149]. En el contexto de un modelo de quark semirelativista hubo cierta controversia sobre la asignación de sus números cuánticos. Sin embargo, esta cuestión ya fue resuelta al confirmarse que sus números cuánticos son 1^{++} [93]. De esta forma, su asignación en modelos de quark suele ser 2^3P_1 . Dentro del enfoque de la ecuación de Bethe-Salpeter esta resonancia ha sido identificada con el estado 3^3P_1 con un valor de masa de 3912 MeV [38] pero, al mismo tiempo, un estado espurio 2^3P_1 con 3672 MeV es también obtenido. Otros cálculos con un formalismo similar obtienen un valor de masa de 3900 MeV, pero incorporan el estado $X(3872)$ dentro del proceso de ajuste [99]. Los cálculos semirelativistas en [45, 150], que emplean una interacción vectorial y escalar obtienen una masa de 3912 MeV para el 2^3P_1 para ese estado. El UQM obtiene una masa de 3908 MeV [119, 120, 122]. Un cálculo en el espacio de coordenadas con un potencial apantallado también ha obtenido un buen resultado de 3901 MeV [151]. En general, los modelos de quarks no relativistas o semi-relativistas tienden a sobrestimar la masa de esta resonancia con respecto al valor experimental [46, 104, 115]. En el presente trabajo se obtiene 3903 y 3918 MeV con los potenciales I y II, respectivamente. Estos resultados son razonables pero no están completamente de acuerdo con el valor experimental. Este resultado, junto con la larga violación de isospin [1] previene la identificación con un estado estándar del charmonium, indicando la necesidad de un modelo que incluya, en una forma más precisa, los efectos de umbral debido a los canales $D\bar{D}$ y $\bar{D}D^*$. Para completar el análisis del multiplete se comentará acerca del estado $X(3915)$. Este estado ha sido descrito como un estado convencional del sistema $c\bar{c}$ [152] y también ha sido modelado como un tetraquark [153] y como molécula [154]. En el contexto del $c\bar{c}$, esta resonancia es identificada como un estado 2^3P_0 [152]. Sin embargo, existen algunos argumentos que cuestionan la validez de esta asignación e incluso ha sido propuesto que el $X(3915)$ sea $\chi_{c2}(2P)$ [155, 156]. Entre ellos se destaca la falta de señal en el decaimiento $X(3915) \rightarrow D\bar{D}$ [1]. Además, la diferencia de energía entre la masa de $X(3915)$ y su compañero de división hiperfina $\chi_{c2}(2P)$ la cual es más pequeña de lo esperado [1, 88, 157]. Con el presente modelo los valores esperados de las masas para el estado 2^3P_0 son aproximadamente ≈ 45 MeV (potencial I) y ≈ 20 MeV (potencial II) por debajo de los datos experimentales. Por lo tanto con el modelo presentado en este trabajo no se describe este estado con buena precisión, pero tomando en cuenta las incertidumbres generales en el modelo hadrónico, una interpretación de este estado como un mesón $c\bar{c}$ no puede ser excluida.

8.2.2. $\psi(3770)$, $\psi(4040)$, $\psi(4160)$ y $\psi(4415)$

La región con números cuánticos $J^{PC} = 1^{--}$ corresponde a una de las zonas más *pobladas* por resonancias por encima del umbral $D\bar{D}$. Con estos números cuánticos, son reportados por el PDG como estados pertenecientes al charmonium: $\psi(3770)$, $\psi(4040)$, $\psi(4160)$ y $\psi(4415)$ los cuales son generalmente interpretados como estados 1^3D_1 , 3^3S_1 , 2^3D_1 y 4^3S_1 respectivamente [1]. Utilizando el presente modelo, con ambos potenciales, es posible reproducir la masa de estado $\psi(3770)$ con aceptable aproximación. Esta diferencia entre los valores teóricos y experimentales (50 MeV con el potencial I y 20 MeV con el potencial II) puede estar relacionada con la proximidad del umbral $D\bar{D}$.

El estado $\psi(4040)$, el cual tiene una masa experimental de 4039 MeV, es generalmente identificado como un estado 3^3S_1 [1, 7]. Sin embargo, el valor teórico obtenido con algunos modelos de potencial para el estado 3^3S_1 es generalmente más grande que el valor experimental [45, 46, 104]. Con el modelo presentado en este trabajo se puede describir este estado con suficiente precisión gracias a la inclusión de los factores de apantallamiento y a su mejor fundamentación relativista. En particular el potencial I suministra una predicción teórica, teniendo en cuenta las incertidumbres teóricas calculadas, en acuerdo con el valor experimental. El potencial II también produce un valor de masa aceptable para este estado, donde el valor experimental cae marginalmente fuera del margen de error teórico calculado con ese potencial.

El estado $\psi(4160)$ es interpretado como la excitación radial de $\psi(3770)$. La masa predicha por el modelo, con ambos potenciales, es menor que la experimental, esta misma situación sucede en otros modelos apan-

tallados [151, 158]. Si se acepta que el $\psi(4160)$ sea considerado como un estado puro 2^3D_1 se concluiría que el presente modelo y los modelos de potencial apantallados no pueden reproducir este estado, sin embargo, el presente resultado sugeriría una naturaleza más elaborada de este estado [159, 160].

Finalmente, la resonancia $\psi(4415)$ se suele interpretar cómo un estado 4^3S_1 [1] pero también como un estado 5^3S_1 en [151] donde las masas de los estados ψ se ven disminuidas por la inclusión de los efectos de apantallamiento. Utilizando el modelo del presente trabajo, esta resonancia puede ser descrita de manera tentativa en dos diferentes maneras (ver tabla 8.6). El potencial I sugiere que esta resonancia puede ser identificada, de manera aproximada, como un estado 4^3D_1 pero el potencial II lo sugiere como un estado 3^3D_1 . Estas inusuales asignaciones para $\psi(4415)$ difieren de las asignaciones estándar provenientes de los modelos de potencial semirelativistas [42, 115] donde esta resonancia es bien descrita como un estado 4^3S_1 . Debe notarse que en el modelo propuesto aquí el estado 4^3S_1 tiene una masa 4311 MeV con el potencial I y 4360 MeV con el potencial II, los cuales encajan de mejor manera con las resonancias $X(4260)$ [$Y(4260)$] y $X(4360)$ [$Y(4360)$] respectivamente. Por lo tanto, el estado 4^3S_1 no puede ser identificado como el estado $\psi(4415)$ con el modelo propuesto.

Tabla 8.5: Predicción de la parte alta del espectro del charmonium para los potenciales I y II comparados con las masas experimentales e incertidumbres del PDG. Notación como en la tabla 8.4. Para la masa experimental del estado $X(4160)$ el primer error es estadístico y el segundo sistemático [161].

Nombre	$n^{2S+1}L_J$	Masa (MeV)		
		Potencial I	Potencial II	Experimental
—	1^1D_2	3788^{+20}_{-12}	3789^{+9}_{-13}	—
$\psi(3770)$	1^3D_1	3723^{+41}_{-8}	3749^{+7}_{-10}	3773.13 ± 0.35
$\psi(3823)$	1^3D_2	3782^{+30}_{-11}	3788^{+9}_{-12}	3822.2 ± 1.2
—	1^3D_3	3849^{+13}_{-17}	3817^{+14}_{-20}	—
$X(3915)$ [$Y(3915)$]	2^3P_0	$3867.9^{+5.5}_{-8.6}$	3884^{+14}_{-13}	3918.4 ± 1.9
—	2^1P_1	3908^{+11}_{-13}	3923^{+11}_{-13}	—
$X(3872)$	2^3P_1	$3903.5^{+9.3}_{-9.4}$	3918^{+13}_{-12}	3871.69 ± 0.17
$\chi_{c2}(2P)$	2^3P_2	3941^{+8}_{-16}	3945^{+17}_{-14}	3927.2 ± 2.6
$\psi(4160)$	2^3D_1	4059^{+13}_{-20}	4094^{+19}_{-20}	4191 ± 5
$X(3940)$	3^1S_0	4030^{+9}_{-71}	4043^{+18}_{-19}	3942 ± 6
$\psi(4040)$	3^3S_1	4046^{+9}_{-13}	4060^{+17}_{-11}	4039 ± 1
—	3^3P_0	4182^{+17}_{-47}	4219^{+26}_{-21}	—
$X(4140)$ [$Y(4140)$]	3^3P_1	4200^{+24}_{-31}	4238^{+29}_{-22}	4146.9 ± 3.1
$X(4160)$	4^1S_0	4300^{+30}_{-100}	4349^{+31}_{-26}	$4156^{+25}_{-20} \pm 15$

8.2.3. $X(4260)$, $X(4360)$ y $X(4660)$

Estas resonancias con $J^{PC} = 1^{--}$ fueron descubiertas por las colaboraciones BaBar [162] y Belle [163, 164] y confirmadas por los autores de la referencia [165]. Existen diferentes interpretaciones de la naturaleza de

Tabla 8.6: Predicción de estados que pueden ser interpretados de diferente manera dependiendo del potencial usado. Notación como en la tabla 8.4.

Nombre	Potencial	$n^{2S+1}L_J$	Mass (MeV)	
			Teoría	Experimental
$X(4260)$	I	4^3S_1	4311^{+33}_{-44}	4251 ± 9
[$Y(4260)$]	II	—	—	
$X(4360)$	I	3^3D_1	4312^{+62}_{-53}	4346 ± 6
[$Y(4360)$]	II	4^3S_1	4360^{+34}_{-28}	
$\psi(4415)$	I	4^3D_1	4489^{+65}_{-78}	4421 ± 4
	II	3^3D_1	4378^{+36}_{-29}	
$X(4660)$	I	—	—	4643 ± 9
[$Y(4660)$]	II	4^3D_1	4620^{+54}_{-39}	

estas resonancias: como estado híbrido de charmonium [17,166], tetraquarks [167,168], moléculas [169], mesón $c\bar{c}$ [170] y algunos autores sugieren que estas señales son el producto de la interferencia entre diferentes canales de resonancias [171–173]. En el contexto del charmonium son unívocamente determinados por su mecanismo de producción pero algunas de sus características, por ejemplo la ausencia de producción de *open charm* [168], no encaja como un estado $c\bar{c}$ [1,2]. Utilizando los dos potenciales propuestos se producen diferentes resultados para estos estados. Debe notarse que en el contexto del modelo propuesto, las predicciones en la región de altas energías del espectro dependen fuertemente de la forma de la interacción escalar. El potencial I predice que el estado 4^3S_1 , es decir, el estado $\psi(4S)$ puede identificarse de forma aproximada a la resonancia $X(4260)$ [$Y(4260)$]. Esta asignación es razonable si se compara con el bottomonium ¹. En particular, al comparar la diferencia de masa experimental $\Upsilon(4S) - \Upsilon(3S) \approx 224$ MeV con la de $\psi(4S) - \psi(3S) \approx 254$ MeV, esta última diferencia, realizada con los resultados del potencial I, muestra que dichas diferencias son comparables y por lo tanto brinda un soporte para esta asignación. Adicionalmente, los autores de la referencia [174] encuentran una masa de ≈ 4260 MeV para el estado $\psi(4S)$, en acuerdo con nuestra asignación.

Por otro lado, como en [151], con en el modelo propuesto utilizando el potencial I, se puede identificar el estado 3^3D_1 con la resonancia $X(4360)$. Finalmente, se debe notar que el potencial I no puede reproducir la resonancia $X(4660)$ [$Y(4660)$].

Con el potencial II se observa una situación completamente diferente. Se identifican las resonancias $X(4360)$ [$Y(4360)$] y $X(4660)$ en los estados 4^3S_1 y 4^3D_1 respectivamente pero con este potencial no se puede describir el estado $X(4260)$.

De esta forma se muestra como a causa de la diferencia de los potenciales en la interacción escalar genera cambios visibles en la parte alta del espectro.

8.2.4. $X(3940)$ y $X(4160)$

Estos estados fueron observados por la colaboración Belle en un proceso de doble producción charm [161, 175, 176]. Sus decaimientos sugieren que sus números cuánticos son $J^{PC} = 0^{-+}$. Han sido descritos en diferentes formas: híbridos [177], moléculas [178, 179], y como segunda (η_c'') y tercera (η_c''') excitación radial del estado η_c en el marco estándar del sistema $c\bar{c}$ [180–182]. Tanto modelos del potencial semirelativistas y no relativistas [104] obtienen masas para η_c'' y η_c''' muy por encima de los valores experimentales de $X(3940)$ y $X(4160)$, lo cual pone en duda esta asignación.

En [174] se asume que la diferencia de energía entre las resonancias $\psi(3S) - \psi(2S) \approx 353$ MeV es similar a la diferencia de energía entre $\eta_c(3S) - \eta_c(2S)$, haciendo posible estimar la energía de $\eta(3S)$. Los autores encuentran que $\eta(3S) \approx 3992$ MeV, que se acerca aproximadamente a la masa experimental del $X(3940)$. Esto lo identificaría como un estado 3^1S_0 . Por otro lado, a pesar del análisis de decaimiento en [174] se concluye que no es posible identificar la resonancia $X(4160)$ con el estado 4^3S_0 . En el modelo de potencial apantallado [151] la correspondencia entre la resonancia $X(3940)$ y el estado 3^1S_0 es ligeramente mejorada. Ellos encuentran $\eta_c(3S) = 3991$ MeV, pero la diferencia entre la masa experimental del $X(4160)$ y el valor de la masa teórica del estado 4^1S_0 (4250 MeV) es lo suficientemente grande para poner en duda esta asignación. En el modelo propuesto, con el potencial I y la asignación 3^1S_0 y 4^1S_0 , se obtienen los valores de 4030 MeV y 4302 MeV para $X(3940)$ y $X(4160)$, respectivamente. Usando el potencial II, se obtiene para los mismos estados los valores de 4043 MeV y 4349 MeV, respectivamente. Se observa en la tabla 8.5 y en la figura 8.2 que con el potencial I se obtiene una descripción aproximada de $X(3940)$. Aun así, en general se concluye que con el presente modelo relativista no es posible hacer una descripción apropiada de estas dos resonancias.

8.2.5. $X(4140)$

Esta resonancia fue observada por primera vez en la colaboración CDF (Collider Detector at Fermilab) [183] y después confirmada por la misma colaboración [184]. Ha sido interpretada como tetraquark [185–187], como una molécula [140, 188, 189], como un híbrido de charmonium [190] y como un estado de $c\bar{c}$ [123]. Recientemente, la colaboración LHCb (Large Hadron Collider beauty) [94] reportó 1^{++} como sus números cuánticos, lo cual permite una interpretación de esta resonancia como un estado 3^3P_1 , es decir, $\chi_{c1}(3P)$, dentro de contexto $dec\bar{c}$ [191]. El valor de masa del estado 3^3P_1 en los modelos de potencial relativista [104] y apantallado [151] es calculado por encima de la masa experimental de las resonancia $X(4140)$

¹Esto se debe a que las diferencias de energía entre estados son similares, es decir, $(M_{\psi(2S)} - M_{\psi(1S)}) \approx (M_{\Upsilon(2S)} - M_{\Upsilon(1S)})$ y $(M_{\psi(3S)} - M_{\psi(2S)}) \approx (M_{\Upsilon(3S)} - M_{\Upsilon(2S)})$. De esta forma se podría esperar que pase lo mismo con los siguientes estados.

[$Y(4140)$], sin embargo, teniendo en cuenta el potencial apantallado esta sobrestimación es solo de 40 MeV, haciendo posible esta interpretación. Con el modelo propuesto en este trabajo con los potenciales I y II se predice este estado aproximadamente 30 MeV y 70 MeV respectivamente, por encima del valor experimental. De esta forma, se deja abierta la posibilidad de que este estado pueda ser compuesto por un sistema $c\bar{c}$, pero no de manera definitiva. Sin embargo, los efectos relativistas no parecen ser los causantes de la discrepancia entre los datos experimentales y teóricos. Más efectos físicos deben ser incluidos para proporcionar una mejor descripción de este estado.

8.2.6. $\psi(3823)$

Esta resonancia fue observada por primera vez más de 20 años atrás [192]. Recientemente, fue observada de nuevo por la colaboración Belle [193] y confirmada por BESIII [194]. En acuerdo con los modelos de potencial semirelativista [104, 115], el modelo aquí propuesto describe razonablemente bien este estado con ambos potenciales asignándoles un valor de ≈ 3785 MeV contra un valor experimental de 3822 MeV, con la asignación estándar 1^3D_2 ($J^{PC} = 2^{--}$). En la referencia [151], fue encontrado un valor de masa de 3798 MeV, similar al encontrado con el modelo aquí propuesto. En el UQM (Unquenched Quark Model) [120] se obtuvo una masa de 3736 MeV significativamente más baja que el valor experimental.

8.2.7. Resonancias faltantes (Missing resonances)

El modelo relativista que se ha propuesto en el presente trabajo, al igual que la mayoría de modelos para mesones (por ejemplo [42, 115, 116] entre otros), predice estados que no se han observado experimentalmente todavía. Los estados 1^1D_2 , 2^1P_1 , 3^3P_0 y 1^3D_3 pueden ser considerados de esta manera (cajas purpura en figuras 8.2 y 8.3). El estado 1^1D_2 , como ya se ha mencionado, no es un buen candidato para el $X(3872)$ y constituye de esta manera un resonancia faltante que produce el modelo relativista propuesto. El estado 2^1P_1 pertenece a la región de energía donde solo los mesones cargados $Z_c(3900)$ y $Z_c(4010)$ han sido ubicados. Actualmente esta región de energías con estos números cuánticos no contiene estados asociados al sistema $c\bar{c}$, a pesar que la excitación radial del estado h_c debería yacer ahí. El estado 3^3P_0 fue identificado como $X(4140)$ sin embargo, recientemente se ha convertido en una resonancia faltante (ver Sección 8.2.5) al considerar los últimos resultados del LHCb [94]. La última resonancia faltante que consideramos es el estado 1^3D_3 , también permanece sin detectar, a pesar de que su valor de energía es cercano al umbral de *open charm*, región de energía donde otros estados han sido observados.

8.3. Conclusiones del capítulo

En el presente capítulo se ha utilizado el modelo de interacción de Dirac relativista, desarrollado en el capítulo 5, en la reproducción y análisis del espectro del charmonium. Además se ha implementado de forma exitosa el método de solución de la ecuación de autovalores y se ha aplicado el método de bootstrap para propagar los errores experimentales al espectro y parámetros. De esta manera se han propagado de manera exacta los errores estadísticos de los datos experimentales en los parámetros y en las energías, teniendo en cuenta todas las correlaciones. En el proceso de ajuste (fitting) fueron usados estados bien establecidos del charmonium, (ver Tabla 8.4): η_c , J/ψ , χ_{c0} , χ_{c1} , h_c , χ_{c2} , η'_c and ψ' , que se encuentran debajo de los umbrales de *open charm*. En ambos casos se han obtenido excelentes resultados incluyendo el *splitting* entre h_c , χ_{c0} , χ_{c1} y χ_{c2} . A partir de los parámetros obtenidos, se obtuvieron predicciones de los estados ubicados encima del umbral de *open charm* y se calcularon las respectivas incertidumbres (ver Tablas 8.5, 8.6 y Figuras 8.2, 8.3). La estructura completa del charmonium es descrita razonablemente bien y en acuerdo con los datos experimentales disponibles.

Por otro lado, es posible concluir que el efecto de apantallamiento es relevante en la descripción del espectro con los dos potenciales, particularmente para valores de energías por encima del umbral de *open charm*. A partir de las matrices de correlación entre los parámetros del potencial I (tabla 8.2) y potencial II (tabla 8.3) se observa una baja correlación entre los parámetros de apantallamiento y los parámetros de la interacción vectorial. Sin embargo, ocurre lo contrario con la interacción escalar la cual es más relevante en la parte alta del espectro debido a su relación con el confinamiento. Esto sugiere que los factores de apantallamiento toman en cuenta de manera fenomenológica, sólo parcialmente, los grados de libertad asociados a los componentes virtuales $q\bar{q}$ que disminuyen la energía de los estados. A medida que crece la energía la reproducción del

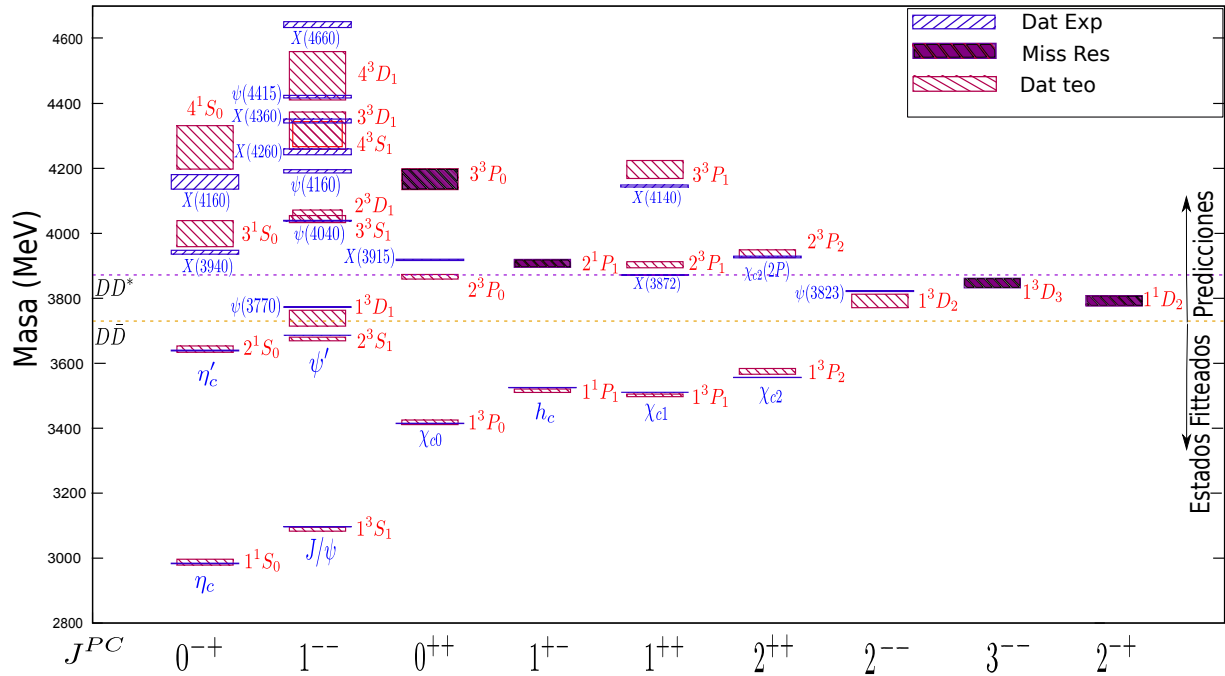


Figura 8.2: Espectro completo del charmonium obtenido con el potencial I (cajas rojas) comparado con el espectro experimental tomado del PDG (cajas azules). Las cajas púrpura representan las *missing resonances*. El tamaño de las cajas rojas incluyen las barras de error a 1σ (68 %) de NC. De la misma manera, el tamaño de las cajas azules representan el error experimental de las masas de las resonancias. Las líneas punteadas representan las energías de *open charm* $D\bar{D}$ y DD^* . Los cálculos de las incertidumbres tienen en cuenta todas las correlaciones entre los parámetros (ver sección 7.3 para más detalles). En el eje horizontal se reportan los números cuánticos J^{PC} para los diferentes estados. Al lado derecho de la figura, las flechas indican los estados que han sido usados en el proceso de ajuste (debajo del umbral $D\bar{D}$) y las predicciones del modelo del potencial I. Es importante notar que se ha usado la nomenclatura más reciente del PDG donde los mesones vectoriales son también denominados como X en lugar de Y. Los estados en ambas denominaciones se relacionan a continuación para mayor claridad: $Y(4260) \leftrightarrow X(4260)$, $Y(4360) \leftrightarrow X(4360)$, $Y(4660) \leftrightarrow X(4660)$, $Y(4140) \leftrightarrow X(4140)$ y $Y(3915) \leftrightarrow X(3915)$.

espectro se torna más difícil, lo cual sugiere nuevos efectos de campo o grados de libertad que deberían ser incluidos en el modelo teórico. Evidentemente, se requieren nuevas investigaciones en este aspecto. Como ya se mencionó se realizó un análisis estadístico completo y de esa forma se determinó las incertidumbres de los parámetros y sus correlaciones. Adicionalmente, el espectro fue calculado teniendo en cuenta de forma completa estas correlaciones entre parámetros. Una amplia revisión bibliográfica revela que este tipo de análisis de error en otros modelos de potencial habían sido limitados e incompletos. Este análisis de error ayuda a identificar más fácilmente que estados requieren de efectos físicos adicionales. En base a lo anteriormente realizado se pudo analizar cada estado del espectro. En más detalle, el estado $X(3915)$, $X(3872)$ y $\chi_{c2}(2P)$ son identificados como estados 2^3P_J con $J=0,1$ y 2 , respectivamente. El $\chi_{c2}(2P)$ es apropiadamente descrito con ambos modelos de potencial. La masa del estado $X(3872)$ es ligeramente sobrestimada, aproximadamente 3904 MeV con el potencial I y 3918 MeV con el potencial II, a pesar de la mejoras relativistas y la inclusión de los errores. Esto señala que este estado es mayormente $c\bar{c}$ y su masa esta ligeramente modificada por efectos que no son tenidos en cuenta en el modelo propuesto en el presente trabajo.

El $X(3915)$ no es descrito apropiadamente por el modelo. Esto implicaría que este estado experimental no es un simple estado $c\bar{c}$ y que por lo tanto no hace parte del triplete mencionado.

También el modelo es capaz de describir la mayoría de los estados ψ por encima del umbral $D\bar{D}$, a saber: $\psi(3770)$ (1^3D_1), $\psi(4040)$ (3^3S_1), $\psi(4160)$ (2^3D_1) y $\psi(4415)$ (4^3D_1 con el potencial I y 3^3D_1 con el potencial II). Sin embargo, los estados $\psi(3770)$ y $\psi(4040)$ son suficientemente bien descritos pero los estados $\psi(4160)$

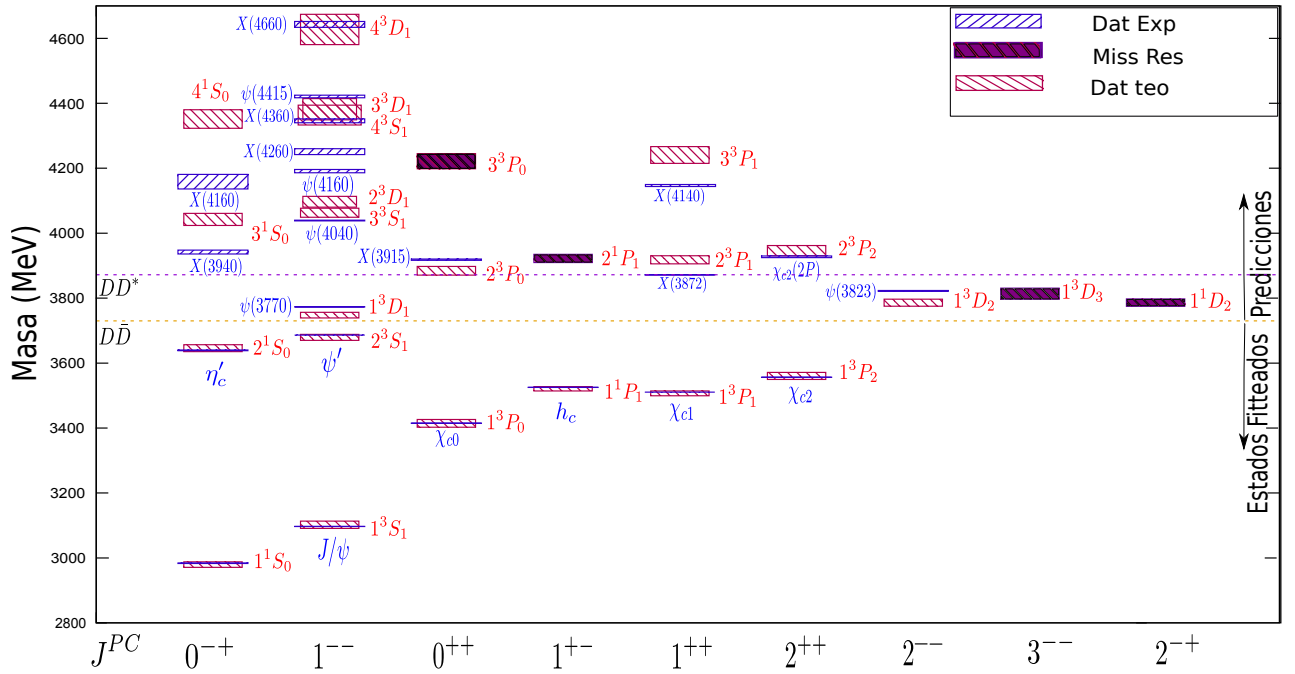


Figura 8.3: Espectro del Charmonium obtenido con el potencial II. Notación como en la figura 8.2.

y $\psi(4415)$ no lo son.

Los dos potenciales producen resultados diferentes para las resonancias $X(4260)$ [$Y(4260)$], $X(4360)$ [$Y(4360)$] y $X(4660)$ [$Y(4660)$]. El potencial I produce un estado 4^3S_1 que puede aproximadamente ser identificado con la resonancia $X(4260)$. El estado $X(4660)$ de la parte alta del espectro es reproducida dentro de las incertidumbres del modelo con el potencial II sin embargo el potencial I no lo puede reproducir. El estado $X(4360)$ es reproducido con ambos potenciales pero con amplias incertidumbres. Las resonancias $X(3940)$ y $X(4160)$ no son descritas apropiadamente esto apoya la hipótesis de que estos estados van más allá de la descripción de un sistema $c\bar{c}$. La resonancia $X(4140)$ es reproducida aproximadamente con el potencial I, sugiriendo una correspondencia con un estado 3^3P_1 de $c\bar{c}$. Sin embargo, no es reproducido apropiadamente por el potencial II a pesar de las grandes incertidumbres en la predicción teórica. El estado $\psi(3823)$ es reproducido de manera aceptable, en acuerdo con los modelos de potencial semirelativista.

El confinamiento representa uno de los problemas más complejos en física hadrónica y por tal razón investigaciones adicionales deben realizarse con el fin de profundizar en el conocimiento de su naturaleza. En el potencial II se utilizó de forma explícita una expresión de confinamiento en la interacción vectorial y escalar, el cual suministra ligeramente mejores resultados que el potencial I (en el cual el confinamiento se encuentra en el potencial vectorial). El anterior resultado está de acuerdo con el argumento de disminución de la interacción espín-órbita generada por la similitud entre el término de confinamiento en las dos interacciones. Adicionalmente, las bajas correlaciones entre los parámetros del potencial II, tabla 8.3 comparadas con las del potencial I, tabla 8.2, permite establecer con más facilidad la conexión física asociada a cada término en el potencial II que en el potencial I.

Los efectos relativistas son de vital importancia en un modelo que intenta describir de la manera más completa posible el espectro de un sistema como el charmonium, especialmente los estados perteneciente a lugares altos del espectro. Teniendo en cuenta este aporte realizado en el presente trabajo y la inclusión de los errores experimentales concluimos que es necesario realizar estudios dinámicos más profundos en este campo de investigación. Interacciones más relacionadas con la QCD deberían ser incluidas, así como también otros efectos asociados a grados de libertad moleculares, componentes de tetraquark, canales acoplados y efectos de umbral que probablemente mejoren la descripción de los estados experimentales, particularmente aquellos cuya diferencia con las predicciones no pueden ser absorbidas por las incertidumbres estadísticas.

Capítulo 9

Espectro del bottomonium

A pesar de que el bottomonium es un sistema pesado en el que los efectos relativistas no deberían ser relevantes, al menos en la parte baja del espectro, es interesante estudiar este sistema con el modelo relativista que se ha desarrollado en el presente trabajo por varias razones. El primer motivo es verificar la consistencia del modelo. Al ser un modelo relativista tiene que ser capaz de reproducir, sin dificultad, un sistema como el bottomonium. La segunda razón proviene de la posible importancia de los efectos relativistas en la parte alta del espectro del bottomonium. Finalmente, el serio tratamiento estadístico que se ha utilizado en el presente trabajo debe ser usado para la reproducción del bottomonium con el fin de propagar los errores experimentales y mostrar sus efectos en el espectro teórico, a través del modelo que aquí se propone. En este capítulo se realiza la reproducción y análisis del espectro del bottomonium a partir del modelo relativista desarrollado en el presente trabajo (ver capítulo 5). Al igual que con el charmonium, se utilizarán dos formas de potencial, con la misma interacción vectorial y diferente interacción escalar (ver expresiones (5.22)). Se discutirán los parámetros obtenidos en el proceso de ajuste y las matrices de correlación provenientes del procedimiento estadístico. Se mostrará el espectro completo dividiendo los estados en aquellos que fueron utilizados en el proceso de ajuste y las predicciones del modelo. Al final se presentan las conclusiones del análisis realizado en el presente capítulo.

9.1. Parámetros del modelo y matrices de correlación

Los parámetros de los potenciales (5.22) usados para reproducir el espectro del bottomonium se han obtenido siguiendo las indicaciones descritas en los capítulos 6 y 7 y se han utilizado los estados bien establecidos del bottomonium (ver tabla 9.4). Los parámetros encontrados al realizar el ajuste se han consignado en la tabla 9.1. Ambos potenciales obtuvieron excelentes ajustes como se puede observar en la tabla 9.4 o mejor aún en las figuras 9.2 y 9.3. Se puede observar que los mismos parámetros para ambos modelos tienen

Tabla 9.1: Notación como en tabla 8.1

Parameter	Potential I	Potential II
m (GeV)	$4.52^{+0.13}_{-0.13}$	$4.51^{+0.08}_{-0.09}$
M_0 (GeV)	$0.48^{+0.33}_{-0.27}$	0.47 ± 0.2
α_{st}	$0.39^{+0.09}_{-0.10}$	$0.37^{+0.10}_{-0.10}$
β_v (GeV ²)	$0.018^{+0.004}_{-0.001}$	$0.017^{+0.003}_{-0.003}$
k_s	98^{+22}_{-12}	100^{+29}_{-20}
p_s (GeV)	$1.55^{+0.23}_{-0.20}$	$1.56^{+0.23}_{-0.21}$
A (GeV ⁻²)	0.0011 ± 0.0010	-0.0013 ± 0.0013
β_s (GeV ²)	0 (fixed)	$0.09^{+0.002}_{-0.002}$

valores muy similares. La diferencia que resalta en ellos son, evidentemente, los parámetros A y β_s . Esto de inmediato sugiere que la diferencia entre las dos formas propuestas de potencial escalar no afectan el espectro, en la misma forma que en el charmonium.

A pesar de la similitud de los parámetros la adición del parámetro β_v modifica ligeramente la matriz de

correlación, aunque los valores teóricos para las masas de los estados *fitteados* y de los estados predichos por ambos modelos son muy similares. Se analizará, de la misma forma que se analizó el charmonium, el apantallamiento incluido en el potencial. Las gráficas asociadas a los factores de apantallamiento con los valores obtenidos en el ajuste de los parámetros se muestran en la Figura 9.1. Utilizando la misma nomenclatura

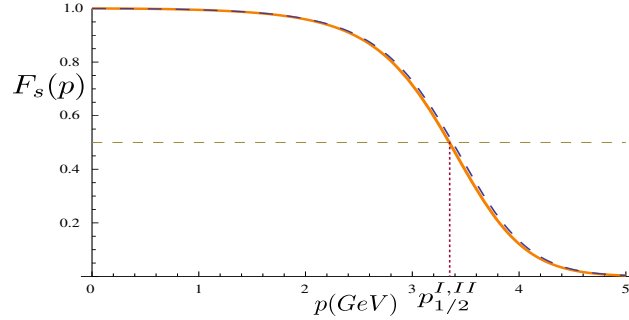


Figura 9.1: Función de apantallamiento en el bottomonium, ecuación (5.11), para los potenciales I (línea punteada azul) y II (línea sólida naranja). Para k_s y p_s se usaron los valores centrales de la tabla 9.1. Se resaltan los valores del *screening momenta* $p_{1/2}^I$ (potencial I) y $p_{1/2}^{II}$ (potencial II) definido en 7.3.

introducida en la sección 8.1, se puede calcular una energía cinética de apantallamiento de $\bar{E}^I = 11281$ MeV y $\bar{E}^{II} = 11260$ MeV. Estos valores indican que la energía donde el apantallamiento se activa está muy por encima de las energías de umbral de *open bottom*. Por consiguiente, el apantallamiento tiene efectos menos relevantes para las resonancias estudiadas del bottomonium que para las del charmonium.

Tabla 9.2: Matriz de correlación para el potencial I.

	m	M_0	α_{st}	β_v	k_s	p_s	A
m	1						
M_0	-0.89	1					
α_{st}	0.13	0.30	1				
β_v	-0.08	-0.36	-0.87	1			
k_s	-0.03	0.01	-0.09	0.03	1		
p_s	0.09	-0.09	-0.07	0.08	0.02	1	
A	-0.18	-0.10	-0.68	0.46	-0.12	-0.55	1

En la tabla 9.2 se encuentran las correlaciones de los parámetros del potencial I que pueden ser extraídas del análisis estadístico realizado. Se observan algunas correlaciones fuertes entre los parámetros del modelo, particularmente entre los parámetros α_{st} y β_v . Por otro lado, existe una moderada correlación entre el parámetro A y los parámetros del potencial vectorial pero en mayor medida con α_{st} . Lo anterior sugeriría que la interacción escalar también influiría en la región de energías donde la interacción tipo Coulomb está presente. También es importante resaltar la correlación existente entre los parámetros asociados al apantallamiento y los demás parámetros del potencial. Se observa una moderada correlación entre k_s y p_s con el parámetro en la interacción escalar A , y sin correlación con los demás parámetros. Puesto que el apantallamiento actúa a altas energías, como ya se ha mostrado, indicaría que la interacción escalar está presente en esa región de energías.

Pasando a la matriz de correlación del potencial II (tabla 9.3), se observa un patrón de correlación ligeramente modificado. En particular se debe notar que la correlación entre los parámetros de la interacción vectorial es ahora moderada a diferencia del potencial I. Además vale la pena resaltar la correlación existente entre β_v y β_s es decir, de las dos expresiones de confinamiento en ambas interacciones. Dicha correlación señala la naturaleza escalar y vectorial que tiene el confinamiento, debido a la conexión que se identifica en la correlación medida. Adicionalmente, se debe mencionar que los parámetros del apantallamiento se encuentran correlacionadas con el parámetro fenomenológico A presente en la interacción escalar. Indicando nuevamente que la interacción escalar es importante en la región de alta energía.

En este caso ambos potenciales producen buenos resultados y debido a que el potencial II está ligeramente

Tabla 9.3: Matriz de correlación para el potencial II.

	m	M_0	α_{st}	β_v	k_s	p_s	A	β_s
m	1							
M_0	-0.76	1						
α_{st}	0.53	0.14	1					
β_v	-0.26	-0.15	-0.58	1				
k_s	0.34	-0.29	0.06	-0.04	1			
p_s	0.13	-0.13	-0.05	0.03	0.36	1		
A	0.42	-0.05	0.52	-0.32	0.48	0.77	1	
β_s	-0.21	0.01	-0.31	-0.57	-0.03	0.07	-0.07	1

menos correlacionado se inclina levemente la preferencia a dicho potencial en comparación con el potencial I.

9.2. Espectro del Bottomonium

Utilizando los resultados a 1σ de NC se ha reproducido el espectro del bottomonium. Dado que ambos conjuntos de parámetros son muy similares, los espectros obtenidos, tanto los usados en el ajuste como las predicciones, también lo son. Los estados utilizados en el ajuste se han consignado en la tabla 9.4 y en las figuras 9.2 y 9.3 para ambos potenciales. Las predicciones del modelo se encuentran en la tabla 9.5. Como se observa, se ha conseguido un excelente ajuste a los datos experimentales. Con ambos potenciales los estados

Tabla 9.4: Notación como en la tabla 8.4. Donde sólo se han colocado las incertidumbres estadísticas.

Nombre	$n^{2S+1}L_J$	Masas (MeV)		
		Potencial I	Potencial II	Experimental
η_b	1^1S_0	$9401.9^{+27.1}_{-24.1}$	$9403.7^{+18.7}_{-14.3}$	9399.0 ± 2.3
$\Upsilon(1S)$	1^3S_1	9455^{+21}_{-23}	$9454.3^{+19.0}_{-15.7}$	9460.30 ± 0.26
$\chi_{b0}(1P)$	1^3P_0	9856^{+22}_{-19}	$9857.7^{+14.2}_{-18.7}$	9859.44 ± 0.42
$\chi_{b1}(1P)$	1^3P_1	$9894.1^{+16.5}_{-15.0}$	9893^{+7}_{-10}	9892.78 ± 0.26
$h_b(1P)$	1^1P_1	9902^{+16}_{-16}	$9900.7^{+8.9}_{-9.6}$	9899.3 ± 0.8
$\chi_{b2}(1P)$	1^3P_2	$9926.5^{+14.1}_{-16.6}$	$9923.4^{+11.7}_{-12.6}$	9912.21 ± 0.26
$\Upsilon(2S)$	2^3S_1	$10017.4^{+19.6}_{-19.3}$	10016^{+17}_{-15}	10023.26 ± 0.31
$\Upsilon(1D)$	1^3D_2	$10150.6^{+13.1}_{-18.7}$	$10148.6^{+15.8}_{-13.9}$	10163.7 ± 1.4
$\chi_{b0}(2P)$	2^3P_0	10231^{+17}_{-15}	10233^{+12}_{-13}	10232.5 ± 0.4
$\chi_{b1}(2P)$	2^3P_1	10253^{+14}_{-15}	$10254.2^{+7.4}_{-10.5}$	10255.46 ± 0.22
$h_b(2P)$	2^1P_1	$10257.9^{+13.4}_{-14.3}$	$10258.6^{+7.6}_{-10.2}$	10259.8 ± 0.5
$\chi_{b2}(2P)$	2^3P_2	$10273.9^{+13.0}_{-14.3}$	$10273.6^{+9.4}_{-11.9}$	10268.65 ± 0.22
$\Upsilon(3S)$	3^3S_1	$10361.5^{+24.7}_{-24.8}$	$10364.1^{+14.3}_{-13.6}$	10355.2 ± 0.5

ajustados caen dentro de las incertidumbres teóricas. En general la estructura del espectro producida por ambos potenciales es la misma. Esto implica, como ya se había mencionado, que la variación sugerida entre los dos potenciales escalares para el caso del bottomonium no genera grandes cambios en el espectro, a diferencia del charmonium.

Como ya fue mencionado al final de la sección 7.3, el estado $\eta_b(2S)$ no fue utilizado en el proceso de ajuste (*fit*). Se resalta que el valor obtenido, como predicción del modelo con ambos potenciales, concuerda perfectamente con el valor experimental reportado en el PDG [139] el cual es el valor obtenido en la colaboración Belle [11] (ver tabla 9.5). A pesar de que esto no es una sorpresa, resulta interesante que el modelo propuesto genere el valor de este estado como predicción, mostrando, de esta forma, las cualidades del modelo propuesto.

A continuación se analizarán las otras resonancias que también son predicciones del modelo relativista y que al estar en la parte alta del espectro merecen especial atención.

Tabla 9.5: Predicciones del modelo. Notación como en la tabla 8.4

Nombre	$n^{2S+1}L_J$	Potencial I	Potencial II	Experimento
$\eta_b(2S)$	1^1S_0	$9999.8^{+21.5}_{-17.0}$	9999^{+20}_{-22}	9999.0 ± 3.5
---	1^1D_2	10153^{+14}_{-69}	9999^{+20}_{-22}	---
---	1^3D_1	$10129.6^{+11.0}_{-17.0}$	$10128.5^{+13.9}_{-12.0}$	---
---	1^3D_3	10173^{+15}_{-19}	10169 ± 17	---
---	2^1D_2	10445^{+17}_{-21}	10446^{+15}_{-16}	---
---	2^3D_1	$10427.2^{+16.6}_{-18.6}$	10429^{+14}_{-26}	---
---	2^3D_2	10443^{+17}_{-21}	$10444.4^{+14.7}_{-28.3}$	---
---	2^3D_3	10460^{+19}_{-23}	10461^{+18}_{-20}	---
$\chi_{b1}(3P)$	3^3P_1	10539^{+25}_{-26}	10543^{+24}_{-40}	10512.1 ± 2.1
---	3^1S_0	$10350.6^{+26.1}_{-24.6}$	$10353.4^{+16.3}_{-19.2}$	---
---	3^1P_1	10542^{+24}_{-26}	10546^{+23}_{-40}	---
---	3^3P_0	$10523.4^{+27.9}_{-26.0}$	10528^{+25}_{-38}	---
---	3^3P_2	10554^{+25}_{-28}	10557^{+22}_{-42}	---
$\Upsilon(4S)$	4^3S_1	10642^{+36}_{-39}	10646^{+21}_{-46}	10579.4 ± 1.2
$\Upsilon(10860)$	5^3S_1	10884^{+48}_{-53}	10889^{+43}_{-79}	10891.1 ± 3.2
$\Upsilon(11020)$	6^3S_1	11107^{+62}_{-66}	11108^{+64}_{-109}	$10987.5^{+6.4}_{-2.5}$

9.2.1. $\Upsilon(4S)$, $\Upsilon(10860)$ y $\Upsilon(11020)$

Estos estados pertenecen a la familia con números cuánticos 1^{--} . El descubrimiento de estos estados se llevó a cabo en el análisis de la sección eficaz de colisiones e^+e^- [195, 196] a mediados de los ochenta. Mediciones más recientes se pueden encontrar en [197]. El estado $\Upsilon(4S)$ es considerado como 4^3S_1 y tiene una masa experimental de 10579.4 ± 1.2 MeV. Utilizando un modelo no relativista [42] se encontró un valor aproximado de 10630 MeV, con un modelo semirelativista [198] se obtiene 10607 MeV y utilizando el formalismo de los canales acoplados [199] se encuentra un valor de 10603 MeV para el estado $\Upsilon(4S)$. A pesar de que este estado es totalmente considerado como $b\bar{b}$, generalmente es sobrestimado por casi todos los modelos.

Utilizando el modelo relativista propuesto en el presente trabajo se encuentra el valor aproximado de 10642 ± 40 MeV, con ambos potenciales. Evidentemente el valor medio de este cálculo teórico no revela mejoras en la descripción de este estado con respecto a otros modelos. Sin embargo, los resultados teóricos de los otros modelos (modelo semirelativistas, canales acoplados, etc.) caen dentro del error teórico calculado para esta resonancia en el presente trabajo. Es interesante ver que a pesar de la inclusión de efectos relativistas y de los efectos de umbral de decaimiento, ya sea de forma fenomenológica o de manera más explícita, no se obtiene aún una descripción completamente satisfactoria de este estado. Esto sugiere, entonces, que efectos físicos adicionales deberían ser incluidos en el modelo teórico para describir con mayor exactitud esta resonancia.

Por otro lado, el estado $\Upsilon(10860)$ es generalmente interpretado como $\Upsilon(5^3S_1)$ por ejemplo en las referencias [42, 198, 199]. Sin embargo, es conocido que las anchuras de decaimiento, por emisión de dos piones, hacia $\Upsilon(1S)$, $\Upsilon(2S)$ y $\Upsilon(3S)$ calculadas a nivel teórico son dos ordenes de magnitud diferentes de las experimentales [200]. Esta discrepancia aun permanece como motivo de investigación [201]. Existen también otras interpretaciones de este estado como $\Upsilon(6S)$ o como estado base de un sistema híbrido $h_b^h(1P)$ [202, 203]. Utilizando el presente modelo relativista se obtiene una excelente reproducción de este estado como un $\Upsilon(5S)$ (5^3S_1) lo cual se puede ver tanto en la tabla 8.4 y en las figuras 9.2 y 9.3. De hecho, el valor medio obtenido a 1σ de NC, está a aproximadamente 5 MeV de diferencia del valor experimental. Esto implica que en el contexto del modelo desarrollado, este estado es descrito apropiadamente como un estado $b\bar{b}$.

Finalmente, el estado $\Upsilon(11020)$ es descrito mayormente como 6^3S_1 de un sistema $b\bar{b}$. Una clara excepción, en este mismo contexto, es la asignación como 7^3S_1 en la referencia [202] donde sugieren el estado 5^3S_1 como una resonancia faltante. En el presente modelo no se encuentra una descripción completamente satisfactoria de este estado. De hecho se obtiene un resultado semejante a los de modelos no relativistas [42]. Esto sugiere que en el contexto del presente modelo relativista otros efectos deben ser tenidos en cuenta para la correcta descripción de este estado. Por otro lado, el apantallamiento que se produce con los parámetros obtenidos en el procedimiento de ajuste (ver sección 9.1) resultó tener importancia cerca de 11.3 GeV. Esto implica que

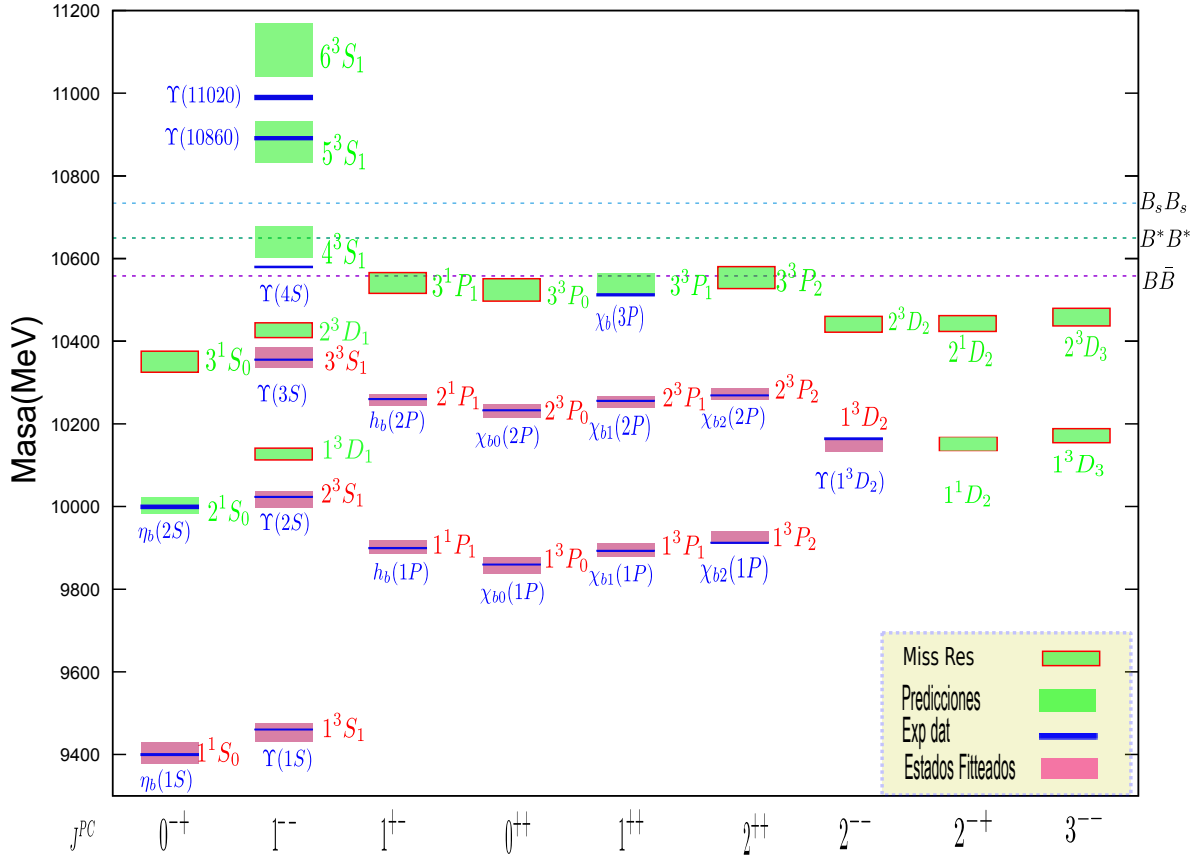


Figura 9.2: Espectro completo del bottomonium calculado con el potencial I (cajas purpura y verdes) comparadas con el espectro experimental obtenido del PDG [139], representadas por las delgadas cajas azules, cuyo grosor es el error experimental (Exp dat). El tamaño de las cajas purpura y verde representan la barra de error a 1σ de nivel de confianza. Las cajas púrpura son los estados usados en el ajuste (Estados Fiteados), todas las cajas verdes (Predicciones) son las predicciones del modelo y las cajas verdes con borde rojo representan los estados faltantes (Miss Res). Las líneas punteadas indican los umbrales $B\bar{B}$, B^*B^* y B_sB_s .

en este modelo el apantallamiento, aunque por encima de los umbrales de *open bottom*, no produce un efecto suficiente para modificar los valores de este estado de alta excitación. Es necesario mencionar que usando el formalismo de los canales acoplados [199] es posible obtener un valor de 11023 MeV, el cual es muy cercano al valor experimental.

9.2.2. Estados $\chi_b(3P)$

Hace 5 años fue estimado el baricentro (spin-weighted average) del sistema $\chi_b(3P)$ (conformado por $\chi_{b0}(3P)$, $\chi_{b1}(3P)$, y $\chi_{b2}(3P)$) por la colaboración ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS) [204] y por la colaboración D0 [205] con valores de $10530 \pm 5(stat) \pm 9(syst)$ MeV y $10551 \pm 14(stat) \pm 17(syst)$ MeV, respectivamente. Sin embargo, aún no se ha podido medir de manera completa las masas de los estados pertenecientes al sistema $\chi_b(3P)$, excepto el estado $\chi_{b1}(3P)$ para el cual fue recientemente publicado [95] un valor de $10515.7_{-3.9}^{+2.2}(stat)_{-2.1}^{+1.5}(syst)$ MeV. En el modelo de potencial apantallado de la referencia [206], se obtiene un valor de 10524 MeV para este estado ($\chi_{b1}(3P)$). Con el formalismo de los canales acoplados [199] se obtiene el valor de 10517 MeV el cual es más cercano al valor experimental que el anterior cálculo. Utilizando UQM [107] se obtiene un valor de 10580 MeV, el cual se aleja del valor experimental por aproximadamente 60 MeV. En el presente trabajo se obtiene aproximadamente 10540 ± 30 MeV en ambos potenciales. A pesar que el valor medio no es el valor experimental, este valor cae dentro de la incertidumbre teórica que

Tabla 9.6: Resultados teóricos obtenidos del potencial I de los estados $\chi_{bJ}(nP)$ comparados con los datos experimentales disponibles. n es el número cuántico principal. \bar{M}_n representa el baricentro del sistema para cada número cuántico $n=1,2,3$. En cuanto a los resultados teóricos, se han utilizado solo los valores medios de $\chi_{bJ}(nP)$ sin sus incertidumbres teóricas.

n	Teo: Potencial I			Experimental		
	1	2	3	1	2	3
$M_{\chi_{b0}(nP)}(MeV)$	9856	10231	10523	9859.44 ± 0.42	10232.5 ± 0.4	— — —
$M_{\chi_{b1}(nP)}(MeV)$	9894.1	10253	10539	9892.78 ± 0.26	10259.8 ± 0.5	$10515.7^{+2.2}_{-3.9}$
$M_{\chi_{b2}(nP)}(MeV)$	9926.5	10273.9	10553.8	9912.21 ± 0.26	10268.65 ± 0.22	— — —
$\bar{M}_n(MeV)$	9907.8	10262.2	10545.4	9899.87 ± 0.7	10260.20 ± 0.36	10530 ± 10 [204] 10551 ± 0.14 [205]

Tabla 9.7: Resultados obtenidos con el potencial II comparados con los datos experimentales. Notación como en la tabla 9.6

n	Teo: potencial II			Experimental		
	1	2	3	1	2	3
$M_{\chi_{b0}(nP)}(MeV)$	9857	10233	10528.15	9859.44 ± 0.42	10232.5 ± 0.4	— — —
$M_{\chi_{b1}(nP)}(MeV)$	9893	10254.2	10542.9	9892.78 ± 0.26	10259.8 ± 0.5	$10515.7^{+2.2}_{-3.9}$
$M_{\chi_{b2}(nP)}(MeV)$	9923.4	10273.6	10556.8	9912.21 ± 0.26	10268.65 ± 0.22	— — —
$\bar{M}_n(MeV)$	9906	10262.6	10549	9899.87 ± 0.7	10260.20 ± 0.36	10530 ± 10 [204] 10551 ± 0.14 [205]

mencionan la posibilidad de que el estado $\chi_{b1}(3P)$ sea parte de este hipotético estado X_b . En el contexto del modelo presentado aquí, no parece ser apropiada esta descripción. A diferencia del $X(3872)$ el cual fue reproducido de forma discreta por ambos modelos (ver sección 8.2.1), el estado $\chi_{b1}(3P)$ identificado como 3^3P_1 es descrito de mejor forma al tener en cuenta las incertidumbres teóricas calculadas. De esta forma, es factible considerar que, según el presente modelo, el estado $\chi_{b1}(3P)$ es un estado $b\bar{b}$.

9.3. Resonancias faltantes (Missing Resonances)

Diferentes estados han sido observados recientemente debajo de los umbrales de *open bottom*. Aun así, permanecen otros estados a bajas energías por ser encontrados experimentalmente. En el presente trabajo se presentan resultados teóricos para once estados que tienen energías por debajo o muy cerca a los umbrales de *open bottom* (≈ 10.6 GeV).

La importancia de estos estados es que podrían ser detectados en el LHC en experimentos que han comenzado recientemente [210].

Se comenzará analizando el estado faltante $\eta_b(3S)$ (3^1S_0), para lo cual se hará una comparación con su “compañero” de estructura fina $\Upsilon(3S)$ (3^3S_1) el cual es conocido experimentalmente. Con este fin, en primer lugar, se van a calcular las diferencias $\Delta S_n = n^3S - n^1S$ las cuales descienden a medida que n aumenta [1]. Utilizando los valores medios de energía de las tablas 9.4 y 9.5 para los estados n^1S_0 y n^3S_1 para $n = 1, 2, 3$ se observa que este patrón se cumple. En la tabla 9.8 se consignan los valores ΔS_n .

Tabla 9.8: Diferencias $\Delta S_n = n^3S - n^1S$. Se observa como dichas diferencias disminuyen cuando n aumenta. Todas las diferencias consignadas en esta tabla estan medidas en MeV. Los valores usados son los valores medios consignados en la tablas 9.4 y 9.5.

ΔS_n	Teórico		Experimental
	Pot I	Pot II	
ΔS_1	53.1	50.6	61.3
ΔS_2	17.6	17	24.26
ΔS_3	10.9	10.7	— — —

La disminución de estas diferencias está de acuerdo con los datos experimentales. Dado que los datos teóricos siguen este patrón experimental, la predicción de energía dada en el presente trabajo para la resonancia $\eta_b(3S)$ (3^1S_0) la cual es aproximadamente 10350 ± 20 MeV con ambos potenciales, puede ser considerada

como razonable. Por lo tanto, esta nueva resonancia podría ser observada experimentalmente en el rango de energía reportado en este trabajo.

Por otro lado, los estados 3^3P_0 y 3^3P_2 ya han sido mencionados en la sección 9.2.2. En base a ese análisis es posible afirmar que las predicciones realizadas cumplen de manera adecuada con los datos experimentales disponibles para el baricentro de estas resonancias (ver sección 9.2.2) y en particular para la resonancia $\chi_{b1}(3P)$ recientemente observada. Así mismo, el estado 3^1P_1 se diferencia de sus “compañeros” 3^3P_J por la interacción fina y por lo tanto no debería ser muy diferente de esos estados. En la tabla 9.5 se observa como su energía es cercana a la de los estados 3^3P_J . Por lo tanto, es posible considerarlo como una predicción sensata.

Los estados 1^3D_1 y 2^3D_1 por semejanza con el charmonium y por su energía relativamente baja con respecto a las energías de *open bottom* deberían ser parte del espectro del bottomonium, sin embargo, experimentalmente aun no se han detectado. De igual manera, los estados $2^3D_2, 1^1D_2, 2^1D_2, 1^3D_3$ y 2^3D_3 también permanecen por ser observados experimentalmente.

Se espera que estas predicciones proporcionen pistas para observar estos estados de forma experimental. Su detección podría ser llevada a cabo en el LHC sin embargo, se estima que su tasa de producción no sea muy alta pero aún así podría ser posible su detección [210].

9.4. Conclusiones del capítulo

En el presente capítulo se ha utilizado el modelo de interacción relativista, desarrollado en el capítulo 5 para reproducir el espectro del bottomonium. En dicho modelo se utilizó una interacción vectorial y dos versiones diferentes para la interacción escalar. En el proceso de ajuste (*fit*) se han usado estados bien establecidos y que se encuentran por debajo de los umbrales de *open bottom* ($\eta_b(1S)$, $\Upsilon(1S, 2S, 3S)$, $h_b(1P, 2P)$, $\chi_{b0}(1P, 2P)$, $\chi_{b1}(1P, 2P)$, $\chi_{b2}(1P, 2P)$ y $\Upsilon(1D)$). Se obtuvo un excelente ajuste a los datos experimentales con ambos potenciales. Sin embargo, los resultados con las dos diferentes versiones de interacción escalar son muy similares tanto en los estados *fitteados* como en las predicciones del modelo en la parte alta del espectro. Por tanto, la variación sugerida y utilizada en el potencial escalar, asociado a la interacción escalar, muestra una discreta relevancia en el bottomonium.

El apantallamiento incluido en el Hamiltoniano de interacción afectó el espectro de manera significativa aproximadamente desde ≈ 11200 MeV, es decir, por encima de los umbrales de decaimiento. Esto implica que el apantallamiento obtenido tuvo un efecto particularmente intenso y que, por lo tanto, su efecto tuvo impacto moderado en el espectro del bottomonium.

Fue posible propagar el error estadístico asociado a los datos experimentales, tanto a los parámetros utilizados como a los espectros obtenidos. De esta manera, también se obtuvo la matriz de correlaciones entre los parámetros del modelo con ambos potenciales. Se destaca que al igual que el charmonium, se encontró una correlación entre los parámetros de confinamiento escalar y vectorial, sugiriendo una vez más su relación física. Así mismo, se encontró una disminución en las correlaciones entre parámetros utilizando el potencial II, pero de forma menos marcada que en el charmonium.

El estado $\eta_b(2S)$, que fue materia de un corto debate científico (ver sec. 7.3), fue dejado fuera del *fit* y obtenido como predicción del modelo. El valor teórico obtenido concuerda perfectamente con el valor experimental reportado por la colaboración Belle y PDG.

Por otro lado, se abordó también el análisis de los estados $\chi_{bJ}(3P)$, en particular, el estado $\chi_{b1}(3P)$ y el baricentro del sistema. El valor experimental de la resonancia $\chi_{b1}(3P)$ es obtenida dentro de la incertidumbre teórica calculada con ambos potenciales. De esta forma se concluye que el modelo predice de manera razonable este estado indicando, que en el marco del modelo presentado aquí, es descrito apropiadamente por un sistema $b\bar{b}$. Por lo tanto, en base a la buena reproducción de este estado en el marco del presente modelo, se sugiere que el estado $\chi_{b1}(3P)$ no puede formar parte del hipotético estado X_b . Adicionalmente, se calculó el baricentro para el estado base y los dos primeros estados excitados. Al comparar los datos experimentales con los datos teóricos se observa un acuerdo razonable por lo tanto se concluye que el modelo describe de forma satisfactoria este grupo de estados.

La energía del estado $\Upsilon(4S)$, es sobrestimado en el presente modelo. El valor medio calculado para este estado es semejante a los de otros modelos de potencial que tienen un enfoque semirelativista. Pero vale la pena mencionar que, la incertidumbre teórica calculada con ambos potenciales contiene los resultados teóricos de otros modelos (al menos los que en el presente trabajo se han citado), sin embargo, no contiene el valor experimental de este estado. Este comportamiento, implicaría que algún efecto físico adicional debería

tenerse en cuenta para la correcta descripción de este estado.

Continuando con los estados con números cuánticos 1^{--} , se encuentra el estado $\Upsilon(10860)$ el cual es identificado perfectamente, en el modelo aquí desarrollado, como 5^3S_1 . Dentro de este contexto, esto confirma su naturaleza $b\bar{b}$. A pesar de esta predicción aun queda abierto el problema relacionado con el desacuerdo entre teoría y experimento en cuanto a su anchura de decaimiento por medio de dos piones.

El estado $\Upsilon(11020)$ el cual es bien reproducido por varios modelos de potencial, no se describe apropiadamente con el presente modelo. A pesar de que el potencial II tiene su límite inferior de incertidumbre teórica cerca del valor experimental, no es posible considerarlo como una buena descripción del estado.

Se completa el estudio del espectro del bottomonium reportando algunos estados que aun no se han observado experimentalmente pero que hacen parte de las predicciones del modelo y que vienen a ser importantes en la actualidad debido a que en las *B-factories* en LHC se estan llevando a cabo experimentos en los cuales posiblemente se observen los estados que en el presente trabajo se reportan como faltantes.

Uno de estos estados es el 3^1S_0 el cual tiene una energía aproximada de 10350 ± 20 MeV en ambos potenciales. Al analizar la diferencia de energías $\Delta S = n^3S - n^1S$ se observó una buena concordancia con los datos experimentales dando confianza a la predicción aquí hecha y sugiriendo que el estado $\eta_b(3S)$ debería ser localizado en el rango de energías aquí reportado. De igual forma se reportan los estados 1^1D_J , 2^1D_J , 1^3D_J y 2^3D_J , excepto 1^1D_2 el cual es conocido experimentalmente.

Capítulo 10

Conclusiones y perspectivas

Se presentarán ahora las principales conclusiones que se han obtenido en este trabajo de tesis.

1. Se construyó un modelo de potencial relativista, con espinores de Dirac de energía positiva, compuesto de una interacción vectorial en la que se utilizó completamente el intercambio de un gluón sin aproximaciones no relativistas en el espacio de momentum. El modelo también contó con una interacción escalar, igualmente, en el espacio del momentum y sin aproximaciones no relativistas. Con este modelo se reprodujo satisfactoriamente el espectro del charmonium y del bottomonium hasta altos grados de excitación.
2. Utilizando el lenguaje de programación FORTRAN fue posible desarrollar diferentes subrutinas para encontrar numéricamente el valor del elemento de matriz del Hamiltoniano. Además se pudo acoplar al muy conocido programa MINUIT para realizar los procesos de ajuste de los parámetros libres y de propagación de los errores experimentales a los parámetros y los espectros reportados. Téngase en cuenta que este proceso fue realizado utilizando programación en paralelo.
3. El estado $X(3872)$ se pudo reproducir de forma aproximada, pero no de forma completamente satisfactoria. Esto implica que en su correcta descripción más efectos, probablemente, producidos por la cercanía del *open charm*, deben ser tenidos en cuenta para explicar apropiadamente este estado. Por otro lado el estado de alta excitación $X(4660)[Y(4660)]$ se pudo describir apropiadamente. Su asignación tentativa en el presente modelo es de 4^3D_1 siendo este diferente a las asignaciones que se suelen dar en modelos de potencial semi-relativistas.
4. El presente modelo no logra reproducir de manera satisfactoria los estados $X(3940)$, $X(4160)$ y $X(4140)$. Este hecho y otras investigaciones sugieren que estos estados no sean constituidos sólo por un sistema $c\bar{c}$ y que sea necesario considerar una estructura más compleja que incluya un número más alto de constituyentes.
5. Con el modelo propuesto fue posible obtener una buena descripción del estado $\Upsilon(10860)$ como el estado 5^3S_1 del bottomonium. La energía predicha por el modelo concuerda satisfactoriamente con la energía del estado mencionado. No sucede lo mismo con el estado $\Upsilon(11020)$ el cual no es descrito apropiadamente.
6. En el contexto del modelo de interacción aquí desarrollado, no hay necesidad de que el estado $\chi_{b1}(3P)$ del bottomonium sea considerado como un buen candidato para el hipotético X_b , debido a que este estado $\chi_{b1}(3P)$ se pudo reproducir apropiadamente con el modelo propuesto, con más precisión que el estado $X(3872)$ del charmonium. Así mismo, y en base a la buena reproducción del baricentro del sistema, consideramos que ninguno de los estados $\chi_{bJ}(3P)$ es candidato a ser ese hipotético estado.
7. Se ejecutó un completo análisis de error estadístico a través de una técnica llamada *bootstrap* con la cual fue posible propagar los errores experimentales en los parámetros y en las energías de los espectros obtenidas con el modelo aquí desarrollado. De esta manera se determinaron las incertidumbres teóricas tanto en parámetros como en las energías reportadas. Hasta donde sabemos no existe un análisis así de completo en la espectroscopía hadrónica en el contexto de los modelos de potencial. La importancia de

este análisis radica en que permite identificar cuales desviaciones de los datos experimentales pueden ser incluidas en las incertidumbres del modelo y cuales pueden estar relacionadas a efectos físicos más allá del esquema $q\bar{q}$.

8. Los resultados obtenidos en el presente trabajo nos permiten inferir que la naturaleza de la interacción entre los quarks es de carácter vectorial y también requiere una contribución escalar. Por lo tanto, en el modelo aquí desarrollado no se requiere otro tipo de interacción para la descripción del sistema $q\bar{q}$.
9. A través del análisis de las correlaciones de los parámetros, concluimos que el confinamiento de los quarks tiene participación vectorial y escalar y que se obtienen mejores resultados en la reproducción del espectro utilizando el potencial II, es decir, con confinamiento de forma idéntica en el potencial escalar y vectorial. Resaltamos que a pesar de que este resultado se daba por conocido es la primera vez que se analiza a través de la técnica estadística utilizada en el presente trabajo.
10. El apantallamiento fenomenológico introducido en el Hamiltoniano de interacción resultó ser importante en la reproducción del espectro del charmonium particularmente al utilizar el potencial I pero de menor impacto en el bottomonium. Sin embargo, en ambos sistemas es requerido dicho apantallamiento para producir un buen resultado en el proceso de ajuste llevado a cabo. Por lo tanto, de manera natural se pudo relacionar este apantallamiento con el efecto producido por la aparición de pares de quarks encima de la zona *open charm* y de *open bottom*.

A pesar de estos importantes resultados, en los cuales la exclusión de estados de energía negativa es razonable, consideramos que este formalismo puede ser extendido a sistemas aun más relativistas como mesones *heavy-light* y *light-light*. Esto brindaría un panorama más general de la interacción que experimentan los quarks en un sistema ligado. Sin embargo, para este tipo de sistemas es completamente necesario incluir los estados de energía negativa. Esto implicaría trabajar con ecuaciones integrales acopladas que complicarían, en mayor medida, el trabajo computacional en su resolución.

De esta forma un subsecuente trabajo en mesones más relativistas debería incluir esta importante característica.

Consideramos que de esta manera se complementarían el estudio de las interacciones de mesones, al estudiarlos con el presente modelo de interacción de Dirac relativista y de esta forma se podría contribuir, aún más, al estudio de sistemas interactuantes en el régimen no perturbativo de la QCD.

Apéndice A

Participación en eventos científicos y publicación

Los resultados del presente trabajo de tesis fueron presentados en eventos científicos tanto a nivel nacional e internacional. Adicionalmente, se produjo una publicación en la revista Physical Review D y actualmente se está preparando una publicación adicional que pronto será enviada a la misma revista.

Los eventos en los que se presentó el trabajo fueron:

1. The 32th Hampton University Graduate Studies Program at Thomas Jefferson National Laboratory accelerator Facility (En Estados Unidos)
2. Third Andean School on Nuclear Physics (En Colombia)

Publicación:

D. Molina, M. De Sanctis, C. Fernández-Ramírez, Charmonium spectrum with a Dirac potential model in the momentum space, Phys. Rev. D 95 (2017) 094021. doi:10.1103/PhysRevD.95.094021 [56].

En proceso de escritura:

Bottomonium spectrum with a Dirac potential model in the momentum space.

Apéndice B

Obtención de la expresión inicial de la interacción vectorial

En el presente apéndice se obtendrá de forma explícita la expresión 5.17 asociada a la interacción vectorial. Con este fin, debe notarse que la expresión 5.12 se puede expresar de la siguiente forma:

$$\langle \vec{p}_b | H^{(v)} | \vec{p}_a \rangle = V^{(v)}(\vec{q}) \left(J_1^0 J_2^0 - \frac{\vec{q}^2}{4\pi} J_1^\alpha J_2^\beta D_{\alpha\beta} \right), \quad (\text{B.1})$$

$$= V^{(v)}(\vec{q}) \left(J_1^0 J_2^0 - \vec{q}^2 \frac{\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2}{Q^2} + \frac{(\vec{J}_1 \cdot \vec{q})(\vec{J}_2 \cdot \vec{q})}{Q^2} \right). \quad (\text{B.2})$$

En la anterior expresión se ha utilizado el propagador en el gauge de Coulomb dado en las expresiones 5.14 y 5.15 con $q^0 = \Delta E$.

Ahora, utilizando la conservación de la cuadricorriente 5.16, la anterior expresión toma la forma:

$$\langle \vec{p}_b | H^{(v)} | \vec{p}_a \rangle = V^{(v)}(\vec{q}) \left(J_1^0 J_2^0 - \vec{q}^2 \frac{\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2}{Q^2} - \frac{(\Delta E)^2 J_1^0 J_2^0}{Q^2} \right). \quad (\text{B.3})$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\vec{q}^2}{Q^2} = 1 + \frac{(\Delta E)^2}{Q^2}$ se puede obtener:

$$\langle \vec{p}_b | H^{(v)} | \vec{p}_a \rangle = V^{(v)}(\vec{q}) \left[J_1^0 J_2^0 \left(1 - \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right) - \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 \left(1 + \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right) \right], \quad (\text{B.4})$$

la cual corresponde a la expresión usada en la interacción vectorial.

Apéndice C

Cálculo de los términos angulares de los elementos de matriz del operador Hamiltoniano

Para mayor claridad, en este apéndice se estudiarán algunos factores angulares del elemento de matriz Hamiltoniano (ver ecuación 7.10).

Al comparar las ecuaciones 7.8 y 7.9 con la expresión 7.10 es posible identificar los términos angulares. En particular, para la interacción vectorial los elementos angulares son

$$\Lambda_1(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = \mathbb{1}, \quad (\text{C.1})$$

$$\Lambda_2(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = (\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a), \quad (\text{C.2})$$

$$\Lambda_3(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = (\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_a), \quad (\text{C.3})$$

$$\Lambda_4(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = (\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_a), \quad (\text{C.4})$$

$$\vdots \quad (\text{C.5})$$

$$\Lambda_8(\hat{p}_a, \hat{p}_b, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = (\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2). \quad (\text{C.6})$$

El tratamiento del primer término es obtenido, fácilmente, a través de la ortonormalidad de los armónicos esféricos. De esta forma utilizando la expresión (C.1) en la ecuación (7.15) se obtiene

$$\langle b; L, S, J; a; \ell | \mathbb{1} | a; L, S, J; b; \ell \rangle = \delta_{L\ell}. \quad (\text{C.7})$$

La parte angular del segundo elemento de matriz sería

$$\langle b; L, S, J; a; \ell | (\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a) | a; L, S, J; b; \ell \rangle = \sum_m \int d\Omega_b d\Omega_a [Y_L(\hat{p}_b) \otimes \chi_S]_{J, M_J}^\dagger Y_{\ell, m}(\hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a) Y_{\ell, m}^*(\hat{p}_a) [Y_L(\hat{p}_a) \otimes \chi_S]_{J, M_J}. \quad (\text{C.8})$$

Con el fin de evaluar la anterior expresión es necesario operar algunos de sus elementos de forma separada para mayor claridad. Se comienza con la expresión

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}) [Y_L(\hat{p}) \otimes \chi_S]_{J, M_J}, \quad (\text{C.9})$$

que por ahora se escribe sin las etiquetas a ó b por generalidad. Escribiendo la expresión $(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p})$ en base esférica y desacoplando $[Y_L(\hat{p}_a) \otimes \chi_S]_{J, M_J}$ se obtiene

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}) [Y_L(\hat{p}) \otimes \chi_S]_{J, M_J} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \sigma_{-\mu} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{1, \mu} \sum_{M_L, M_S} Y_{L, M_L} \chi_{S, M_S} \langle L, M_L; S, M_S | J, M_J \rangle. \quad (\text{C.10})$$

En esta última ecuación es posible acoplar los armónicos esféricos

$$Y_{1, \mu}(\hat{p}) Y_{L, M_L}(\hat{p}) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (2L+1)^{\frac{1}{2}} \sum_{L_1, M_{L_1}} (2L_1+1)^{\frac{1}{2}} \langle 1, \mu; L, M_L | L_1, M_{L_1} \rangle \langle 1, 0; L, 0 | L_1, 0 \rangle Y_{L_1, M_{L_1}}, \quad (\text{C.11})$$

donde $L_1 = L - 1, L - 1$. Por otro lado, es posible evaluar el término asociado al espín de la siguiente forma

$$\sigma_{-\mu} \chi_{S, M_S} = \sum_{S_1, M_{S_1}} \chi_{S_1, M_{S_1}} \chi_{S_1, M_{S_1}}^\dagger \sigma_{-\mu} \chi_{S, M_S}. \quad (\text{C.12})$$

Pero debe recordarse que

$$\chi_{S, M_S} = \left[\chi_{\frac{1}{2}}^1 \otimes \chi_{\frac{1}{2}}^2 \right]_{S, M_S}. \quad (\text{C.13})$$

Desacoplando las expresiones, haciendo un poco de algebra y utilizando el teorema de Wigner-Eckart se puede obtener

$$\begin{aligned} \sum_{S_1, M_{S_1}} \chi_{S_1, M_{S_1}} \chi_{S_1, M_{S_1}}^\dagger \sigma_{-\mu} \chi_{S, M_S} = \\ \sum_{S_1, M_{S_1}} -\sqrt{6} \left\{ \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & S_1 & S \end{matrix} \right\} (2S+1)^{\frac{1}{2}} (-1)^{S_1+2} \langle S, M_S; 1, -\mu | S_1, M_{S_1} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Colocando todo esto en la expresión inicial, ecuación (C.9) se obtiene

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}) [Y_L(\hat{p}) \otimes \chi_S]_{J, M_J} = \\ -\sqrt{6} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \sum_{M_L, M_S} (2L+1)^{\frac{1}{2}} \sum_{L_1, M_{L_1}} (2L_1+1)^{-\frac{1}{2}} \langle 1, \mu; L, M_L | L_1, M_{L_1} \rangle \langle 1, 0; L, 0 | L_1, 0 \rangle \langle L, M_L; S, M_S | J, M_J \rangle \\ \left\{ \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & S_1 & S \end{matrix} \right\} (2S+1)^{\frac{1}{2}} (-1)^{S_1+2} \langle S, M_S; 1, -\mu | S_1, M_{S_1} \rangle \sum_{J, M_J} \langle L_1, M_{L_1}; S_1, M_{S_1} | J, M_J \rangle [Y_{L_1} \otimes \chi_{S_1}]_{J, M_J}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Utilizando la identidad

$$\langle S, M_S; 1, -\mu | S_1, M_{S_1} \rangle = (-1)^{-1-\mu} \sqrt{\frac{2S_1+1}{2S+1}} \langle S_1, M_{S_1}; 1, \mu | S, M_S \rangle \langle L, M_L; S, M_S | J, M_J \rangle \quad (\text{C.16})$$

y reorganizando los coeficientes Clebsch Gordan

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{M_L, \mu, M_{S_1} \\ M_{L_1}, M_S}} \langle L, M_L; 1, \mu | L_1, M_{L_1} \rangle \langle L_1, M_{L_1}; S_1, M_{S_1} | J, M_J \rangle \langle 1, \mu; S_1, M_{S_1} | S, M_S \rangle \langle S, M_S; L, M_L | J, M_J \rangle \\ = \left\{ \begin{matrix} L & 1 & L_1 \\ S_1 & J & S \end{matrix} \right\} [(2L_1+1)(2S+1)]^{\frac{1}{2}} (-1)^{-(L+1+S_1+J)}, \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

es posible obtener el siguiente resultado

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}) [Y_L(\hat{p}) \otimes \chi_S]_{J, M_J} = \sum_{L_1, S_1} q_1(J, L, S, L_1, S_1) [Y_{L_1}(\hat{p}) \otimes \chi_{S_1}]_{J, M_J}. \quad (\text{C.18})$$

La anterior ecuación permite escribir la siguiente expresión

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}) |a : L, S, J; b, \ell\rangle = \sum_{L_1, S_1} q_1(J, L, S, L_1, S_1) |a : L_1, S_1, J; b, \ell\rangle. \quad (\text{C.19})$$

Donde

$$q_1(J, L, S, L_1, S_1) = \sqrt{6} \left\{ \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & S_1 & S \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L & 1 & L_1 \\ S_1 & J & S \end{matrix} \right\} (-1)^{-L+1+J} \sqrt{(2S+1)(2L+1)(2S_1+1)} \quad (\text{C.20})$$

Utilizando el anterior resultado, al reemplazar la expresión (C.2) en la ecuación (7.15) y junto con la ortogonalidad de los armónicos esféricos, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle b; L, S, J; a; \ell | (\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b) (\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a) | a; L, S, J; b; \ell \rangle = \\ \sum_{\substack{L_{b_1}, S_{b_1} \\ L_{a_1}, S_{a_1}}} q_1(J, L, S, L_{b_1}, S_{b_1}) q_1(J, L, S, L_{a_1}, S_{a_1}) \delta_{\ell, L_{b_1}} \delta_{\ell, L_{a_1}} \delta_{S_{b_1}, S_{a_1}}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Finalmente se obtiene

$$\langle b; L, S, J; a; \ell | (\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a) | a; L, S, J; b; \ell \rangle = \sum_{S'} q_1(J, L, S, L_{b_1}, S') q_1(J, L, S, L_{a_1}, S'), \quad (\text{C.22})$$

donde $\ell = L - 1, L + 1$ y $S' = 0, 1$. De esta forma es posible evaluar el segundo término, que sólo depende del espín-ángulo, en la ecuación (7.8).

Por otro lado, utilizando propiedades de operación bajo intercambio en las variables de espín es posible obtener la siguiente relación

$$q_2(J, L, S, L_1, S_1) = (-1)^{S+S_1} q_1(J, L, S, L_1, S_1) \quad (\text{C.23})$$

De esta manera es posible evaluar el tercer término angular C.3, siguiendo el mismo razonamiento anteriormente expuesto. Por lo tanto se puede obtener la parte del elemento de matriz asociada al tercer término C.3, el cual quedaría

$$\langle b; L, S, J; a; \ell | (\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_a) | a; L, S, J; b; \ell \rangle = \sum_{S'} q_2(J, L, S, L_{b_1}, S') q_2(J, L, S, L_{a_1}, S'), \quad (\text{C.24})$$

donde $\ell = L - 1, L + 1$ y $S' = 0, 1$.

Para hallar la parte angular del elemento de matriz con el cuarto término (C.4) se debe notar lo siguiente

$$(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_a)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a) | a; L, S, J; b; \ell \rangle = \sum_{L_1, S_1} q_1(J, L, S, L_1, S_1) \sum_{L_2, S_2} q_2(J, L_1, S_1, L_2, S_2) | a; L_2, S_2, J; b; \ell \rangle, \quad (\text{C.25})$$

con $L_1 = L - 1, L + 1$ y $L_2 = L - 2, L, L + 2$. La anterior expresión, por brevedad, puede ser expresada como

$$(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_a)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a) | a; L, S, J; b; \ell \rangle = \sum_{L', S'} q_{12}(J, L, S, L', S') | a; L', S', J; b; \ell \rangle, \quad (\text{C.26})$$

en donde $L' = L - 2, L, L + 2$. Evidentemente el bra tiene forma semejante

A partir del anterior resultado, y de nuevo utilizando la ortonormalidad de los armónicos esféricos, es posible evaluar el término C.4 de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \langle b; L, S, J; a; \ell | (\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_b)(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p}_a)(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p}_a) | a; L, S, J; b; \ell \rangle = \\ \sum_{\substack{L', S' \\ L'', S''}} q_{12}(J, L, S, L', S') q_{12}(J, L, S, L'', S'') \delta_{L', \ell} \delta_{L'', \ell} \delta_{S', S''} \\ = \sum_{S'} [q_{12}(J, L, S, \ell, S')]. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Donde $S' = 0, 1$ y $\ell = L + 2, L, L - 2$.

Los términos adicionales $\Lambda_5, \Lambda_6, \Lambda_7, \Lambda_8$ y los términos angulares de la interacción escalar se pueden calcular de la misma manera.

Apéndice D

Expresión completa de los elementos de matriz

Así como en la sección anterior, se escribirán de forma explícita algunos términos que en la expresión 7.10 dependen solo del momentum p_a, p_b y x . En particular, para la interacción vectorial (ecuación (7.8)) se tiene

$$\bar{\mathcal{H}}^{(v),1}(p_b, p_a, x) = V^{(v)}(\vec{q}) \left[1 - \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right] \eta^2, \quad (\text{D.1})$$

$$\bar{\mathcal{H}}^{(v),2}(p_b, p_a, x) = V^{(v)}(\vec{q}) \left[1 - \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right] \eta \lambda, \quad (\text{D.2})$$

$$\bar{\mathcal{H}}^{(v),3}(p_b, p_a, x) = V^{(v)}(\vec{q}) \left[1 - \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right] \eta \lambda, \quad (\text{D.3})$$

$$\bar{\mathcal{H}}^{(v),4}(p_b, p_a, x) = V^{(v)}(\vec{q}) \left[1 - \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right] \lambda^2, \quad (\text{D.4})$$

⋮

$$\bar{\mathcal{H}}^{(v),8}(p_b, p_a, x) = V^{(v)}(\vec{q}) \left[1 + \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right] \phi^2. \quad (\text{D.6})$$

Solo con comparar las expresiones 7.9 y 7.10 se pueden encontrar los términos referentes a la interacción escalar.

Habiendo identificado con claridad cada término de la interacción completa se escribirá de forma completa el elemento de matriz Hamiltoniano.

Utilizando el cambio de variable en las ecuaciones 7.14 en la expresión 7.21 se obtiene

$$\begin{aligned} \langle n_b; L, S, J | H_{int} | n_a; L, S, J \rangle &= 4\pi \sum_{\tau} \sum_k \sum_{\ell} \tilde{\Lambda}_{k,L,S,J;\ell} \\ &\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} du u^2 dv v^2 \int_{-1}^1 dy R_{n_b,L}(u, v, y) \mathcal{H}_{\ell}^{(\tau),k}(u, v, y) R_{n_a,L}(u, v, y) P_{\ell}(u, v, y) \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Los límites de integración infinitos, para u y para v , no son convenientes a nivel numérico. Esto puede ser evitado con un nuevo cambio de variable de integración. Si se define $u = \bar{p}t$ y $v = \bar{p}w$ donde las nuevas variables t y w son adimensionales y la variable dimensional \bar{p} es el parámetro variacional. Por último se define

$$t = \frac{x_1}{1 - x_1}, \quad (\text{D.8})$$

$$w = \frac{x_2}{1 - x_2}, \quad (\text{D.9})$$

$$\text{con el Jacobiano } J(x_1, x_2) = \frac{1}{[(1 - x_1)(1 - x_2)]^2} \quad (\text{D.10})$$

El elemento de matriz de forma explícita sería

$$\langle n_b; L, S, J | H_{int} | n_a; L, S, J \rangle = 4\pi \sum_{\tau} \sum_k \sum_{\ell} \tilde{\Lambda}_{k,L,S,J;\ell} \int_0^1 \int_0^1 dx_1 x_1^2 dx_2 x_2^2 \int_{-1}^1 dy R_{n_b,L}(x_1, x_2, y, \bar{p}) \mathcal{H}_{\ell}^{(\tau),k}(x_1, x_2, y) R_{n_a,L}(x_1, x_2, y, \bar{p}) P_{\ell}(u, v, y) J(x_1, x_2) \quad (\text{D.11})$$

De esta manera la integral no genera ningún inconveniente y de hecho optimiza el proceso de integración. Diversas verificaciones fueron hechas sobre estas integrales para garantizar el correcto resultado de las mismas.

Apéndice E

Generadores aleatorios utilizados en el bootstrap

El proceso estadístico utilizado en la propagación de errores requirió de remuestreos sucesivos dentro del rango experimental de los valores de las masas usadas en el proceso de ajuste (*fitting procedure*). Por esta razón fue utilizado un generador Gaussiano de número aleatorios. De los posibles diferentes generadores se utilizó el generador de Box-Muller por su fácil tratamiento numérico. En este método, a partir de dos valores aleatorios es posible producir dos números Gaussianos aleatorios independientes de la siguiente forma

$$t_1 = \sqrt{-2 \ln p_1} \cos(2\pi p_2), \quad (\text{E.1})$$

$$t_2 = \sqrt{-2 \ln p_1} \sin(2\pi p_2). \quad (\text{E.2})$$

En las anteriores expresiones p_1 y p_2 son números aleatorios independientes, entre 0 y 1, provenientes de una distribución uniforme. En fortran es posible obtener estos valores utilizando la función intrínseca *random.number*.

Sí se define como σ como la desviación estándar y \bar{r} como el valor medio se tiene que el número aleatorio Gaussiano centrado en el valor requerido es

$$r_1 = \sigma \cdot x_1 + \bar{r}, \quad (\text{E.3})$$

$$r_2 = \sigma \cdot x_2 + \bar{r}. \quad (\text{E.4})$$

De esta manera se generan valores Gaussianos aleatorios alrededor de la media \bar{r} . Debe notarse que con este método se producen dos numero aleatorios. Así que es común almacenar unos de ellos en la primera llamada de la función y liberarlo la segunda vez que se llama o simplemente utilizar uno de ellos.

Por otro lado, en las subrutinas de ajuste se requiere dar un punto de partida a cada parámetro a ajustar. En este caso se usa una distribución uniforme dentro de un rango de valores apropiados para cada valor. Este valor de partida fácilmente puede ser obtenido por medio de la función intrínseca *random.number* en el fortran.

Apéndice F

Método de solución de una ecuación de valores propios para el estudio de un sistema ligado en el marco de un modelo de potencial

Cuando en mecánica cuántica no se puede determinar de manera analítica la solución de la ecuación de autovalores para el Hamiltoniano, es posible proponer una función de onda, ya sea en el espacio de coordenadas o de momentum con cierto parámetro variacional. Al barrer este parámetro variacional se busca minimizar la energía y de esta manera se encuentra el estado base del sistema.

Si se desea construir un espectro de energías, es posible construir una matriz Hamiltoniana en términos de una base variacional para posteriormente minimizar y diagonalizar la matriz Hamiltoniana. Esta tarea se realiza, en general, a nivel computacional. El tiempo de cómputo depende de la complejidad del Hamiltoniano y de la dimensión que la matriz Hamiltoniana tenga.

Por sencillez, es común trabajar en el espacio de coordenadas, sin embargo, realizar cálculos en el espacio del momentum es estrictamente necesario en el caso de ecuaciones relativistas como las descritas en la sección 2.5 en particular la ecuación (4.7) que representa la ecuación que se utilizará con el modelo propuesto en el presente trabajo.

En base a lo anterior, a continuación se describe de manera general el principio variacional como herramienta clave en la técnica utilizada para obtener un espectro de un sistema ligado.

F.0.1. El principio variacional

Supongamos que cierto sistema físico cumpla con la siguiente ecuación de autovalores:

$$H|\phi_k\rangle = E_k|\phi_k\rangle \quad (\text{F.1})$$

Sin embargo, si no es posible hallar los autovalores exactos del Hamiltoniano es posible utilizar un ket de prueba $|\psi\rangle$ el cual deberá depender de un número finito de parámetros.

El valor esperado del Hamiltoniano en el estado $|\psi\rangle$ toma la siguiente forma:

$$\langle H \rangle = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (\text{F.2})$$

El estado $|\psi\rangle$ puede ser escrito como una combinación lineal de los estados propios del Hamiltoniano:

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\phi_k\rangle \quad (\text{F.3})$$

Utilizando la expresión (F.2) y (F.3) se obtiene:

$$\langle H \rangle = \frac{\sum_k \sum_l c_k c_l^* \langle \phi_l | H | \phi_k \rangle}{\sum_k c_k c_k^*} \quad (\text{F.4})$$

A partir de valores propios (F.1) la anterior ecuación se puede expresar de la siguiente forma:

$$\langle H \rangle = \frac{\sum_k c_k c_k^* E_k}{\sum_k c_k c_k^*} \quad (\text{F.5})$$

$$\langle H \rangle = \frac{|c_0|^2 E_0 + \sum_{k=1} c_k c_k^* E_k}{\sum_k c_k c_k^*} \quad (\text{F.6})$$

Utilizando la expresión $E_k = E_k + E_0 - E_0$ la ecuación (F.6) se puede escribir de la siguiente forma [211]:

$$\langle H \rangle = \frac{\sum_{k=1} c_k c_k^* (E_k - E_0)}{\sum_k c_k c_k^*} + E_0 \quad (\text{F.7})$$

Puesto que el factor $E_k - E_0$ es mayor que cero, se concluye que:

$$\langle H \rangle > E_0 \quad (\text{F.8})$$

El anterior resultado asegura que siempre la energía hallada con cualquier ket de prueba será mayor al estado base exacto del sistema físico.

En concreto, al variar los parámetros de los que depende el ket de prueba se busca minimizar el valor esperado de la energía con el fin de acercarse lo máximo posible al valor exacto del estado base del Hamiltoniano.

El tipo de función de prueba más utilizado, consiste en la combinación lineal de un conjunto finito de N kets pertenecientes a una base ortonormal:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle \quad (\text{F.9})$$

Reemplazando la anterior ecuación (F.9) en la ecuación (F.2) se obtiene:

$$\langle H \rangle = \frac{\sum_m \sum_n c_n c_m^* \langle \varphi_m | H | \varphi_n \rangle}{\sum_n c_n c_n^*} \quad (\text{F.10})$$

Para encontrar los estados estacionarios del Hamiltoniano se realiza la variación del valor esperado del Hamiltoniano respecto a los parámetros lineales c_k^* y se coloca la siguiente condición $\frac{\partial H}{\partial c_k^*} = 0$. Para aplicar la condición mencionada es conveniente escribir la expresión (F.10) de la siguiente forma:

$$\langle H \rangle \sum_n c_n c_n^* = \sum_m \sum_n c_n c_m^* \langle \varphi_m | H | \varphi_n \rangle \quad (\text{F.11})$$

Derivando respecto a c_k^* se obtiene:

$$\sum_n \langle \varphi_k | H | \varphi_n \rangle c_n = \langle H \rangle c_k \quad (\text{F.12})$$

La ecuación matricial (F.12) es una ecuación de valores propios de dimensión N, la cual aproxima, en el espacio N-dimensional, a $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$. Por tanto el cálculo de los autovalores de la ecuación (F.12) proporcionará una buena aproximación a las energías del sistema físico.

Bibliografía

- [1] S. L. Olsen, *A new hadron spectroscopy*, *Frontiers of Physics* 10 (2) (2015) 121–154. doi:[10.1007/s11467-014-0449-6](https://doi.org/10.1007/s11467-014-0449-6).
URL <https://doi.org/10.1007/s11467-014-0449-6>
- [2] N. Brambilla *et al.*, *Heavy quarkonium: progress, puzzles, and opportunities*, *The European Physical Journal C* 71 (2) (2011) 1534. doi:[10.1140/epjc/s10052-010-1534-9](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1534-9).
URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1534-9>
- [3] S. Godfrey, S. L. Olsen, *The exotic xyz charmonium-like mesons*, *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 58 (1) (2008) 51–73. arXiv:<https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.58.110707.171145>, doi:[10.1146/annurev.nucl.58.110707.171145](https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.58.110707.171145).
URL <https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.58.110707.171145>
- [4] A. Esposito, A. Pilloni, A. Polosa, *Multiquark resonances*, *Physics Reports* 668 (2017) 1 – 97, multi-quark Resonances. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.11.002>.
URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731630391X>
- [5] E. S. Swanson, *The new heavy mesons: A status report*, *Physics Reports* 429 (5) (2006) 243 – 305. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.04.003>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157306001475>
- [6] A. Esposito, A. L. Guerrieri, F. Piccinini, A. Pilloni, A. D. Polosa, *Four-quark hadrons: An updated review*, *International Journal of Modern Physics A* 30 (04n05) (2015) 1530002. arXiv:<http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217751X15300021>, doi:[10.1142/S0217751X15300021](https://doi.org/10.1142/S0217751X15300021).
URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217751X15300021>
- [7] R. F. Lebed, R. E. Mitchell, E. S. Swanson, *Heavy-quark {QCD} exotica*, *Progress in Particle and Nuclear Physics* 93 (2017) 143 – 194. doi:<https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2016.11.003>.
URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641016300734>
- [8] J. L. Rosner *et al.*, *Observation of the $h_c(^1p_1)$ state of charmonium*, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 102003. doi:[10.1103/PhysRevLett.95.102003](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.102003).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.102003>
- [9] P. Rubin *et al.*, *Observation of the 1p_1 state of charmonium*, *Phys. Rev. D* 72 (2005) 092004. doi:[10.1103/PhysRevD.72.092004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.092004).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.092004>
- [10] S. Uehara *et al.*, *Observation of a χ'_{c2} candidate in $\gamma\gamma \rightarrow d\bar{D}$ production at belle*, *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006) 082003. doi:[10.1103/PhysRevLett.96.082003](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.082003).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.082003>
- [11] R. Mizuk *et al.*, *Evidence for the $\eta_b(2s)$ and observation of $h_b(1p) \rightarrow \eta_b(1s)\gamma$ and $h_b(2p) \rightarrow \eta_b(1s)\gamma$* , *Phys. Rev. Lett.* 109 (2012) 232002. doi:[10.1103/PhysRevLett.109.232002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.232002).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.232002>
- [12] G. Bonvicini *et al.*, *First observation of a $\Upsilon(1d)$ state*, *Phys. Rev. D* 70 (2004) 032001. doi:[10.1103/PhysRevD.70.032001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.032001).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.032001>

- [13] P. del Amo Sanchez *et al.*, Observation of the $\Upsilon(1^3D_J)$ bottomonium state through decays to $\pi^+\pi^-\Upsilon(1s)$, Phys. Rev. D 82 (2010) 111102. doi:[10.1103/PhysRevD.82.111102](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.111102). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.111102>
- [14] A. Esposito, A. Pilloni, A. Polosa, Hybridized tetraquarks, Physics Letters B 758 (Supplement C) (2016) 292 – 295. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.05.028>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269316301757>
- [15] S. J. Brodsky, D. S. Hwang, R. F. Lebed, Dynamical picture for the formation and decay of the exotic xyz mesons, Phys. Rev. Lett. 113 (2014) 112001. doi:[10.1103/PhysRevLett.113.112001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.112001). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.112001>
- [16] A. Piloni, xyz : Four quark states?, Nuovo. Cim. 39. doi:[10.1393/ncc/i2016-16235-8](https://doi.org/10.1393/ncc/i2016-16235-8). URL <https://www.sif.it/riviste/ncc/econtents/2016/039/01/article/32>
- [17] P. Guo, A. P. Szczepaniak, G. Galatà, A. Vassallo, E. Santopinto, Heavy quarkonium hybrids from coulomb gauge qcd, Phys. Rev. D 78 (2008) 056003. doi:[10.1103/PhysRevD.78.056003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.056003). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.056003>
- [18] P. Guo, A. P. Szczepaniak, G. Galatà, A. Vassallo, E. Santopinto, Gluelump spectrum from coulomb gauge qcd, Phys. Rev. D 77 (2008) 056005. doi:[10.1103/PhysRevD.77.056005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.056005). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.056005>
- [19] M. Berwein, N. Brambilla, J. Tarrús Castellà, A. Vairo, Quarkonium hybrids with nonrelativistic effective field theories, Phys. Rev. D 92 (2015) 114019. doi:[10.1103/PhysRevD.92.114019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.114019). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.114019>
- [20] L. Maiani, V. Riquer, R. Faccini, F. Piccinini, A. Pilloni, A. D. Polosa, $J^{PG} = 1^{++}$ charged resonance in the $\Upsilon(4260) \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi$, Phys. Rev. D 87 (2013) 111102. doi:[10.1103/PhysRevD.87.111102](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.111102). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.111102>
- [21] S. Patel, P. C. Vinodkumar, Tetraquark states in the bottom sector and the status of the Υ_b (10890) state, The European Physical Journal C 76 (7) (2016) 356. doi:[10.1140/epjc/s10052-016-4186-6](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4186-6). URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4186-6>
- [22] D. EBERT, R. N. FAUSTOV, V. O. GALKIN, Relativistic model of hidden bottom tetraquarks, Modern Physics Letters A 24 (08) (2009) 567–573. arXiv:<http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217732309030357>, doi:[10.1142/S0217732309030357](https://doi.org/10.1142/S0217732309030357). URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732309030357>
- [23] A. P. Szczepaniak, Triangle singularities and xyz quarkonium peaks, Physics Letters B 747 (Supplement C) (2015) 410 – 416. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2015.06.029>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269315004517>
- [24] F.-K. Guo, C. Hanhart, Q. Wang, Q. Zhao, Could the near-threshold xyz states be simply kinematic effects?, Phys. Rev. D 91 (2015) 051504. doi:[10.1103/PhysRevD.91.051504](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.051504). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.051504>
- [25] L. Liu, G. Moir, M. Peardon, S. M. Ryan, C. E. Thomas, P. Vilaseca, J. J. Dudek, R. G. Edwards, B. Joó, D. G. Richards, Excited and exotic charmonium spectroscopy from lattice qcd, Journal of High Energy Physics 2012 (7) (2012) 126. doi:[10.1007/JHEP07\(2012\)126](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2012)126). URL [https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2012\)126](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2012)126)
- [26] C. E. Thomas, Excited heavy mesons from lattice qcd, AIP Conference Proceedings 1735 (1) (2016) 030007. arXiv:<http://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4949390>, doi:[10.1063/1.4949390](https://doi.org/10.1063/1.4949390). URL <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4949390>

- [27] C. B. Lang, L. Leskovec, D. Mohler, S. Prelovsek, [Vector and scalar charmonium resonances with lattice qcd](#), *Journal of High Energy Physics* 2015 (9) (2015) 89. doi:[10.1007/JHEP09\(2015\)089](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2015)089). URL [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2015\)089](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2015)089)
- [28] G. S. Bali, S. Collins, C. Ehmman, [Charmonium spectroscopy and mixing with light quark and open charm states from \$n_F = 2\$ lattice qcd](#), *Phys. Rev. D* 84 (2011) 094506. doi:[10.1103/PhysRevD.84.094506](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.094506). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.094506>
- [29] M. Lüscher, [Volume dependence of the energy spectrum in massive quantum field theories](#), *Communications in Mathematical Physics* 105 (2) (1986) 153–188. doi:[10.1007/BF01211097](https://doi.org/10.1007/BF01211097). URL <https://doi.org/10.1007/BF01211097>
- [30] K. Rummukainen, S. Gottlieb, [Resonance scattering phase shifts on a non-rest-frame lattice](#), *Nuclear Physics B* 450 (1) (1995) 397 – 436. doi:[https://doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00313-H](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00313-H). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139500313H>
- [31] R. A. Briceño, M. T. Hansen, A. Walker-Loud, [Multichannel \$1 \rightarrow 2\$ transition amplitudes in a finite volume](#), *Phys. Rev. D* 91 (2015) 034501. doi:[10.1103/PhysRevD.91.034501](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.034501). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.034501>
- [32] R. A. Briceño, M. T. Hansen, [Multichannel \$0 \rightarrow 2\$ and \$1 \rightarrow 2\$ transition amplitudes for arbitrary spin particles in a finite volume](#), *Phys. Rev. D* 92 (2015) 074509. doi:[10.1103/PhysRevD.92.074509](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.074509). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.074509>
- [33] J. J. Dudek, R. G. Edwards, C. E. Thomas, [Energy dependence of the \$\rho\$ resonance in \$\pi\pi\$ elastic scattering from lattice qcd](#), *Phys. Rev. D* 87 (2013) 034505. doi:[10.1103/PhysRevD.87.034505](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.034505). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.034505>
- [34] J. J. Dudek, R. G. Edwards, C. E. Thomas, D. J. Wilson, [Resonances in coupled \$\pi k - \eta k\$ scattering from quantum chromodynamics](#), *Phys. Rev. Lett.* 113 (2014) 182001. doi:[10.1103/PhysRevLett.113.182001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.182001). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.182001>
- [35] D. J. Wilson, R. A. Briceño, J. J. Dudek, R. G. Edwards, C. E. Thomas, [Coupled \$\pi\pi, k\bar{K}\$ scattering in \$p\$ -wave and the \$\rho\$ resonance from lattice qcd](#), *Phys. Rev. D* 92 (2015) 094502. doi:[10.1103/PhysRevD.92.094502](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.094502). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.094502>
- [36] J. J. Dudek, R. G. Edwards, D. J. Wilson, [An \$a_0\$ resonance in strongly coupled \$\pi\eta, k\bar{K}\$ scattering from lattice qcd](#), *Phys. Rev. D* 93 (2016) 094506. doi:[10.1103/PhysRevD.93.094506](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.094506). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.094506>
- [37] T. Hilger, M. Gómez-Rocha, A. Krassnigg, [Masses of \$J^{PC} = 1^{-+}\$ exotic quarkonia in a bethe-salpeter-equation approach](#), *Phys. Rev. D* 91 (2015) 114004. doi:[10.1103/PhysRevD.91.114004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.114004). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.114004>
- [38] C. S. Fischer, S. Kubrak, R. Williams, [Spectra of heavy mesons in the bethe-salpeter approach](#), *The European Physical Journal A* 51 (1) (2015) 10. doi:[10.1140/epja/i2015-15010-7](https://doi.org/10.1140/epja/i2015-15010-7). URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2015-15010-7>
- [39] C. Popovici, T. Hilger, M. Gómez-Rocha, A. Krassnigg, [On a new approach to meson phenomenology with the bethe-salpeter equation](#), *Few-Body Systems* 56 (6) (2015) 481–487. doi:[10.1007/s00601-014-0934-z](https://doi.org/10.1007/s00601-014-0934-z). URL <https://doi.org/10.1007/s00601-014-0934-z>
- [40] S. Ahlig, R. Alkofer, [\(in-\) consistencies in the relativistic description of excited states in the bethe-salpeter equation](#), *Annals of Physics* 275 (1) (1999) 113 – 147. doi:<https://doi.org/10.1006/aphy.1999.5922>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491699959225>

- [41] J. Bijtebier, *Bethe-salpeter equation: 3d reductions, heavy mass limits and abnormal solutions*, Nuclear Physics A 623 (3) (1997) 498 – 518. doi:[https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(97\)00462-4](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(97)00462-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947497004624>
- [42] S. Godfrey, N. Isgur, *Mesons in a relativized quark model with chromodynamics*, Phys. Rev. D 32 (1985) 189–231. doi:[10.1103/PhysRevD.32.189](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.32.189). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.32.189>
- [43] S. Capstick, N. Isgur, *Baryons in a relativized quark model with chromodynamics*, Phys. Rev. D 34 (1986) 2809–2835. doi:[10.1103/PhysRevD.34.2809](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.34.2809). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.34.2809>
- [44] D. Ebert, R. Faustov, V. Galkin, *Masses of heavy tetraquarks in the relativistic quark model*, Physics Letters B 634 (2) (2006) 214 – 219. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.01.026>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269306000815>
- [45] M. De Sanctis, P. Quintero, *Charmonium spectrum with a generalized fermi-breit equation*, The European Physical Journal A 46 (2) (2010) 213–221. doi:[10.1140/epja/i2010-11032-y](https://doi.org/10.1140/epja/i2010-11032-y). URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2010-11032-y>
- [46] L. Cao, Y.-C. Yang, H. Chen, *Charmonium states in qcd-inspired quark potential model using gaussian expansion method*, Few-Body Systems 53 (3) (2012) 327–342. doi:[10.1007/s00601-012-0478-z](https://doi.org/10.1007/s00601-012-0478-z). URL <https://doi.org/10.1007/s00601-012-0478-z>
- [47] M. De Sanctis, *A generalization of the fermi-breit equation to non-coulombic spatial interactions*, The European Physical Journal A 41 (2) (2009) 169–178. doi:[10.1140/epja/i2009-10823-5](https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10823-5). URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10823-5>
- [48] W. H. Klink, *Relativistic simultaneously coupled multiparticle states*, Phys. Rev. C 58 (1998) 3617–3626. doi:[10.1103/PhysRevC.58.3617](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.58.3617). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.58.3617>
- [49] W. N. Polyzou, C. Elster, W. Glöckle, J. Golak, Y. Huang, H. Kamada, R. Skibiński, H. Witała, *Mini review of poincaré invariant quantum theory*, Few-Body Systems 49 (1) (2011) 129–147. doi:[10.1007/s00601-010-0149-x](https://doi.org/10.1007/s00601-010-0149-x). URL <https://doi.org/10.1007/s00601-010-0149-x>
- [50] N. Brambilla, M. Groher, H. E. Martinez, A. Vairo, *Effective string theory and the long-range relativistic corrections to the quark-antiquark potential*, Phys. Rev. D 90 (2014) 114032. doi:[10.1103/PhysRevD.90.114032](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.114032). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.114032>
- [51] T. Kawanai, S. Sasaki, *Interquark potential with finite quark mass from lattice qcd*, Phys. Rev. Lett. 107 (2011) 091601. doi:[10.1103/PhysRevLett.107.091601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.091601). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.091601>
- [52] A. Laschka, N. Kaiser, W. Weise, *Charmonium potentials: Matching perturbative and lattice qcd*, Physics Letters B 715 (1) (2012) 190 – 193. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.07.049>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269312008003>
- [53] T. Kawanai, S. Sasaki, *Charmonium potential from full lattice qcd*, Phys. Rev. D 85 (2012) 091503. doi:[10.1103/PhysRevD.85.091503](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.091503). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.091503>
- [54] T. Kawanai, S. Sasaki, *Potential description of the charmonium from lattice qcd*, AIP Conference Proceedings 1701 (1) (2016) 050022. arXiv:<http://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4938662>, doi:[10.1063/1.4938662](https://doi.org/10.1063/1.4938662). URL <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4938662>

- [55] F. James, M. Roos, *Minuit - a system for function minimization and analysis of the parameter errors and correlations*, Computer Physics Communications 10 (6) (1975) 343 – 367. doi:[https://doi.org/10.1016/0010-4655\(75\)90039-9](https://doi.org/10.1016/0010-4655(75)90039-9).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0010465575900399>
- [56] D. Molina, M. De Sanctis, C. Fernández-Ramírez, *Charmonium spectrum with a dirac potential model in the momentum space*, Phys. Rev. D 95 (2017) 094021. doi:[10.1103/PhysRevD.95.094021](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.094021).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.094021>
- [57] M. Peskin, D. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Frontiers in Physics, Addison-Wesley Pub. Co, 1995.
- [58] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, 2nd Edition, Wiley-VCH, 2008.
- [59] F. Wilczek, *Qcd made simple*, Phys. Tod. 53 (2000) 22. doi:<http://dx.doi.org/10.1063/1.1310117>.
URL <http://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/1.1310117>
- [60] D. J. Gross, F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories*, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343–1346. doi:[10.1103/PhysRevLett.30.1343](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1343).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>
- [61] W. Bao-Kai, D. Wei-Zhen, C. Xiao-Lin, *Dynamical study of the possible molecular state $\chi(3872)$ with the s-channel one gluon exchange interaction*, Chinese Physics C 34 (8) (2010) 1052.
URL <http://stacks.iop.org/1674-1137/34/i=8/a=003>
- [62] Y.-C. Yang, Z.-Y. Tan, J. Ping, H.-S. Zong, *Possible $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ and $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$ molecular states in the extended constituent quark models*, The European Physical Journal C 77 (9) (2017) 575. doi:[10.1140/epjc/s10052-017-5137-6](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5137-6).
URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5137-6>
- [63] K. G. Wilson, *Monte-Carlo Calculations for the Lattice Gauge Theory*, Springer US, Boston, MA, 1980, pp. 363–402. doi:[10.1007/978-1-4684-7571-5_20](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-7571-5_20).
URL https://doi.org/10.1007/978-1-4684-7571-5_20
- [64] A. Ukawa, *Kenneth wilson and lattice qcd*, Journal of Statistical Physics 160 (5) (2015) 1081–1124. doi:[10.1007/s10955-015-1197-x](https://doi.org/10.1007/s10955-015-1197-x).
URL <https://doi.org/10.1007/s10955-015-1197-x>
- [65] R. Gupta, *Introduction to lattice qcd*.
URL <https://arxiv.org/abs/hep-lat/9807028>
- [66] C. McNeile, *Meson and Baryon Spectroscopy on a Lattice*, WORLD SCIENTIFIC, 2011, pp. 1–101. arXiv:http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789812701381_0001, doi:[10.1142/9789812701381_0001](https://doi.org/10.1142/9789812701381_0001).
URL http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812701381_0001
- [67] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, T. M. Yan, *Charmonium: The model*, Phys. Rev. D 17 (1978) 3090–3117. doi:[10.1103/PhysRevD.17.3090](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.17.3090).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.17.3090>
- [68] C. Quigg, J. L. Rosner, *Quarkonium level spacings*, Physics Letters B 71 (1) (1977) 153 – 157. doi:[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90765-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90765-1).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269377907651>
- [69] N. Barik, S. Jena, *Fine-hyperfine splittings of quarkonium levels in an effective power-law potential*, Physics Letters B 97 (2) (1980) 265 – 268. doi:[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(80\)90598-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90598-5).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269380905985>
- [70] A. K. Grant, J. L. Rosner, E. Rynes, *Updated description of quarkonium by power-law potentials*, Phys. Rev. D 47 (1993) 1981–1987. doi:[10.1103/PhysRevD.47.1981](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.1981).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.47.1981>

- [71] S. Jena, [Fit of charmonium and upsilon spectra by a common potential \$v_0 + a \log\(1+r\)\$](#) , Physics Letters B 123 (6) (1983) 445 – 448. doi:[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(83\)90990-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90990-5).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269383909905>
- [72] E. M. L. L. D. Landau, Quantum Electrodynamics, 2nd Edition, Vol. Volume 4 of Course of theoretical physics 4 Pergamon international library of science, technology, engineering, and social studies, Pergamon Press, 1982.
- [73] M. De Sanctis, D. Prosperi, [A two-body covariant equation for interacting nucleons](#), Il Nuovo Cimento A (1965-1970) 104 (12) (1991) 1845–1850. doi:[10.1007/BF02812499](https://doi.org/10.1007/BF02812499).
URL <https://doi.org/10.1007/BF02812499>
- [74] J. R. Walter Greiner, [Quantum Electrodynamics](#), 4th Edition, 2009.
URL <http://www.springer.com/la/book/9783540875604>
- [75] F. Gross, Relativistic quantum mechanics and field theory, revised Edition, Wiley science paperback series, Wiley-VCH, 1999.
- [76] S. Weinberg, [Dynamics at infinite momentum](#), Phys. Rev. 150 (1966) 1313–1318. doi:[10.1103/PhysRev.150.1313](https://doi.org/10.1103/PhysRev.150.1313).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.150.1313>
- [77] E. E. Salpeter, H. A. Bethe, [A relativistic equation for bound-state problems](#), Phys. Rev. 84 (1951) 1232–1242. doi:[10.1103/PhysRev.84.1232](https://doi.org/10.1103/PhysRev.84.1232).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.84.1232>
- [78] E. E. Salpeter, [Mass corrections to the fine structure of hydrogen-like atoms](#), Phys. Rev. 87 (1952) 328–343. doi:[10.1103/PhysRev.87.328](https://doi.org/10.1103/PhysRev.87.328).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.87.328>
- [79] F. Gross, J. W. Van Orden, K. Holinde, [Relativistic one-boson-exchange model for the nucleon-nucleon interaction](#), Phys. Rev. C 45 (1992) 2094–2132. doi:[10.1103/PhysRevC.45.2094](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.45.2094).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.45.2094>
- [80] V. Mandelzweig, S. Wallace, [Qed based two-body dirac equation](#), Physics Letters B 197 (4) (1987) 469 – 473. doi:[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)91035-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)91035-5).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269387910355>
- [81] R. Blankenbecler, R. Sugar, [Linear integral equations for relativistic multichannel scattering](#), Phys. Rev. 142 (1966) 1051–1059. doi:[10.1103/PhysRev.142.1051](https://doi.org/10.1103/PhysRev.142.1051).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.142.1051>
- [82] R. H. Landau, Quantum Mechanics - A Second Course in Quantum Theory, 2nd Edition, Vol. II, Wiley, 2004.
- [83] R. Machleidt, [The Meson Theory of Nuclear Forces and Nuclear Structure](#), Springer US, Boston, MA, 1989, pp. 189–376. doi:[10.1007/978-1-4613-9907-0_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9907-0_2).
URL https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9907-0_2
- [84] P. C. Tiemeijer, J. A. Tjon, [Meson mass spectrum from relativistic equations in configuration space](#), Phys. Rev. C 49 (1994) 494–512. doi:[10.1103/PhysRevC.49.494](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.49.494).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.49.494>
- [85] H. W. Crater, J. Schiermeyer, [Applications of two-body dirac equations to the meson spectrum with three versus two covariant interactions, \$su\(3\)\$ mixing, and comparison to a quasipotential approach](#), Phys. Rev. D 82 (2010) 094020. doi:[10.1103/PhysRevD.82.094020](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.094020).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.094020>
- [86] R. Aaij *et al.*, [Observation of \$j/\psi p\$ resonances consistent with pentaquark states in \$\Lambda_b^0 \rightarrow j/\psi K^- p\$ decays](#), Phys. Rev. Lett. 115 (2015) 072001. doi:[10.1103/PhysRevLett.115.072001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.072001).
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.072001>

- [87] S. Uehara *et al.*, Observation of a charmoniumlike enhancement in the $\gamma\gamma \rightarrow \omega J/\psi$ process, Phys. Rev. Lett. 104 (2010) 092001. doi:10.1103/PhysRevLett.104.092001. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.092001>
- [88] S. L. Olsen, Is the $x(3915)$ the $\chi_{c0}(2p)$?, Phys. Rev. D 91 (2015) 057501. doi:10.1103/PhysRevD.91.057501. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.057501>
- [89] S.-K. Choi *et al.*, Observation of a narrow charmoniumlike state in exclusive $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$ decays, Phys. Rev. Lett. 91 (2003) 262001. doi:10.1103/PhysRevLett.91.262001. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.262001>
- [90] F.-K. Guo, C. Hanhart, Y. Kalashnikova, U.-G. Meißner, A. Nefediev, What can radiative decays of the $x(3872)$ teach us about its nature?, Physics Letters B 742 (Supplement C) (2015) 394 – 398. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2015.02.013>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269315000763>
- [91] F. E. Close, P. R. Page, The $D^{*0}D^0$ threshold resonance, Physics Letters B 578 (1) (2004) 119 – 123. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2003.10.032>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269303015843>
- [92] M. Suzuki, $X(3872)$ boson: Molecule or charmonium, Phys. Rev. D 72 (2005) 114013. doi:10.1103/PhysRevD.72.114013. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.114013>
- [93] R. Aaij *et al.*, Quantum numbers of the $x(3872)$ state and orbital angular momentum in its $\rho^0 j/\psi$ decay, Phys. Rev. D 92 (2015) 011102. doi:10.1103/PhysRevD.92.011102. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.011102>
- [94] R. Aaij *et al.*, Observation of $j/\psi\phi$ structures consistent with exotic states from amplitude analysis of $B^+ \rightarrow j/\psi\phi K^+$ decays, Phys. Rev. Lett. 118 (2017) 022003. doi:10.1103/PhysRevLett.118.022003. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.022003>
- [95] R. Aaij *et al.*, Measurement of the $\chi_b(3p)$ mass and of the relative rate of $\chi_b(1p)$ and $\chi_b(2p)$ production, Journal of High Energy Physics 2014 (10) (2014) 88. doi:10.1007/JHEP10(2014)088. URL [https://doi.org/10.1007/JHEP10\(2014\)088](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2014)088)
- [96] M. Padmanath, C. B. Lang, S. Prelovsek, $X(3872)$ and $Y(4140)$ using diquark-antidiquark operators with lattice qcd, Phys. Rev. D 92 (2015) 034501. doi:10.1103/PhysRevD.92.034501. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.034501>
- [97] G. K. Cheung, C. O'Hara, G. Moir, M. Peardon, S. M. Ryan, C. E. Thomas, D. Tims, Excited and exotic charmonium, D_s and D meson spectra for two light quark masses from lattice qcd, Journal of High Energy Physics 2016 (12) (2016) 89. doi:10.1007/JHEP12(2016)089. URL [https://doi.org/10.1007/JHEP12\(2016\)089](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2016)089)
- [98] C. E. Thomas, Meson spectroscopy from lattice qcd, Few-Body Systems 58 (3) (2017) 122. doi:10.1007/s00601-017-1278-2. URL <https://doi.org/10.1007/s00601-017-1278-2>
- [99] T. Hilger, C. Popovici, M. Gómez-Rocha, A. Krassnigg, Spectra of heavy quarkonia in a bethe-salpeter-equation approach, Phys. Rev. D 91 (2015) 034013. doi:10.1103/PhysRevD.91.034013. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.034013>
- [100] T. Frederico, G. Salmè, M. Viviani, Two-body scattering states in minkowski space and the nakanishi integral representation onto the null plane, Phys. Rev. D 85 (2012) 036009. doi:10.1103/PhysRevD.85.036009. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.036009>

- [101] T. Frederico, G. Salmè, M. Viviani, [Quantitative studies of the homogeneous bethe-salpeter equation in minkowski space](#), Phys. Rev. D 89 (2014) 016010. doi:10.1103/PhysRevD.89.016010. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.016010>
- [102] T. Frederico, G. Salmè, M. Viviani, [Solving the inhomogeneous bethe-salpeter equation in minkowski space: the zero-energy limit](#), The European Physical Journal C 75 (8) (2015) 398. doi:10.1140/epjc/s10052-015-3616-1. URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3616-1>
- [103] J. Carbonell, V. Karmanov, [Bethe-salpeter scattering amplitude in minkowski space](#), Physics Letters B 727 (1) (2013) 319 – 324. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.10.028>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269313008344>
- [104] T. Barnes, S. Godfrey, E. S. Swanson, [Higher charmonia](#), Phys. Rev. D 72 (2005) 054026. doi:10.1103/PhysRevD.72.054026. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.054026>
- [105] M. De Sanctis, [A relativistic wave equation with a local kinetic operator and an energy-dependent effective interaction for the study of hadronic systems](#), Central European Journal of Physics 12 (4) (2014) 221–232. doi:10.2478/s11534-014-0444-0. URL <https://doi.org/10.2478/s11534-014-0444-0>
- [106] J.-B. Liu, M.-Z. Yang, [Spectrum of the charmed and b-flavored mesons in the relativistic potential model](#), Journal of High Energy Physics 2014 (7) (2014) 106. doi:10.1007/JHEP07(2014)106. URL [https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2014\)106](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2014)106)
- [107] J. Ferretti, E. Santopinto, [Higher mass bottomonia](#), Phys. Rev. D 90 (2014) 094022. doi:10.1103/PhysRevD.90.094022. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.094022>
- [108] Y. Lu, M. N. Anwar, B.-S. Zou, [Coupled-channel effects for the bottomonium with realistic wave functions](#), Phys. Rev. D 94 (2016) 034021. doi:10.1103/PhysRevD.94.034021. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.034021>
- [109] S. Leitão, A. Stadler, M. Peña, E. P. Biernat, [Covariant spectator theory of heavy-light and heavy mesons and the predictive power of covariant interaction kernels](#), Physics Letters B 764 (Supplement C) (2017) 38 – 41. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.11.013>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269316306748>
- [110] S. Leitão, A. Stadler, M. T. Peña, E. P. Biernat, [Covariant spectator theory of quark-antiquark bound states: Mass spectra and vertex functions of heavy and heavy-light mesons](#), Phys. Rev. D 96 (2017) 074007. doi:10.1103/PhysRevD.96.074007. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.074007>
- [111] G. Eichmann, H. Sanchis-Alepuz, R. Williams, R. Alkofer, C. S. Fischer, [Baryons as relativistic three-quark bound states](#), Progress in Particle and Nuclear Physics 91 (Supplement C) (2016) 1 – 100. doi:<https://doi.org/10.1016/j.pnnp.2016.07.001>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641016300424>
- [112] J. Hiller, [Nonperturbative light-front hamiltonian methods](#), Progress in Particle and Nuclear Physics 90 (2016) 75 – 124. doi:<https://doi.org/10.1016/j.pnnp.2016.06.002>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641016300217>
- [113] Y. Li, P. Maris, X. Zhao, J. P. Vary, [Heavy quarkonium in a holographic basis](#), Physics Letters B 758 (Supplement C) (2016) 118 – 124. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.04.065>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269316301472>
- [114] Y. Li, P. Maris, J. P. Vary, [Quarkonium as a relativistic bound state on the light front](#), Phys. Rev. D 96 (2017) 016022. doi:10.1103/PhysRevD.96.016022. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.016022>

- [115] S. F. Radford, W. W. Repko, [Potential model calculations and predictions for heavy quarkonium](#), Phys. Rev. D 75 (2007) 074031. doi:10.1103/PhysRevD.75.074031. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.074031>
- [116] B.-Q. Li, C. Meng, K.-T. Chao, [Coupled-channel and screening effects in charmonium spectrum](#), Phys. Rev. D 80 (2009) 014012. doi:10.1103/PhysRevD.80.014012. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.014012>
- [117] J. Vijande, P. González, H. Garcilazo, A. Valcarce, [Screened potential and the baryon spectrum](#), Phys. Rev. D 69 (2004) 074019. doi:10.1103/PhysRevD.69.074019. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.69.074019>
- [118] Santopinto, E., Ferretti, J., [The unquenched quark model](#), EPJ Web of Conferences 96 (2015) 01026. doi:10.1051/epjconf/20159601026. URL <https://doi.org/10.1051/epjconf/20159601026>
- [119] Ferretti, J., Santopinto, E., [The \$X\(3872\)\$ as a \$c\bar{c}\$ state plus extra components due to continuum effects](#), EPJ Web of Conferences 73 (2014) 03010. doi:10.1051/epjconf/20147303010. URL <https://doi.org/10.1051/epjconf/20147303010>
- [120] J. Ferretti, G. Galatà, E. Santopinto, [Interpretation of the \$x\(3872\)\$ as a charmonium state plus an extra component due to the coupling to the meson-meson continuum](#), Phys. Rev. C 88 (2013) 015207. doi:10.1103/PhysRevC.88.015207. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.88.015207>
- [121] J. Ferretti, G. Galatà, E. Santopinto, A. Vassallo, [Bottomonium self-energies due to the coupling to the meson-meson continuum](#), Phys. Rev. C 86 (2012) 015204. doi:10.1103/PhysRevC.86.015204. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.86.015204>
- [122] J. Ferretti, G. Galatà, E. Santopinto, [Quark structure of the \$x\(3872\)\$ and \$\chi_b\(3p\)\$ resonances](#), Phys. Rev. D 90 (2014) 054010. doi:10.1103/PhysRevD.90.054010. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.054010>
- [123] P. González, [Charmonium description from a generalized screened potential model](#), AIP Conference Proceedings 1735 (1) (2016) 060010. arXiv:<http://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4949446>, doi:10.1063/1.4949446. URL <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4949446>
- [124] A. P. Szczepaniak, E. S. Swanson, [On the dirac structure of confinement](#), Phys. Rev. D 55 (1997) 3987–3993. doi:10.1103/PhysRevD.55.3987. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.3987>
- [125] D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin, [Properties of heavy quarkonia and \$B_c\$ mesons in the relativistic quark model](#), Phys. Rev. D 67 (2003) 014027. doi:10.1103/PhysRevD.67.014027. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.014027>
- [126] J.-B. Z. Claude Itzykson, [Quantum field theory](#), International series in pure and applied physics, McGraw-Hill International Book Co, 1987.
- [127] V. Freschi, S. Delpriori, E. Lattanzi, A. Bogliolo, [Bootstrap based uncertainty propagation for data quality estimation in crowdsensing systems](#), IEEE Access 5 (2017) 1146–1155. doi:10.1109/ACCESS.2017.2651942.
- [128] E. A. Blukacz, W. G. Sprules, J. Brunner, [Use of the bootstrap for error propagation in estimating zooplankton production](#), Ecology 86 (8) (2005) 2223–2231. doi:10.1890/04-0772. URL <http://dx.doi.org/10.1890/04-0772>
- [129] E. N. B. a. Robert E. Kass, Uri T. Eden, [Analysis of Neural Data](#), 1st Edition, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag New York, 2014. URL <http://www.springer.com/us/book/9781461496014>

- [130] H. L. L. M. F.M. Dekking, C. Kraaikamp, *A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding Why and How*, Springer Texts in Statistics, Springer, 2005.
URL <http://www.springer.com/gp/book/9781852338961>
- [131] C. Fernández-Ramírez, I. V. Danilkin, V. Mathieu, A. P. Szczepaniak, *Understanding the nature of $\Lambda(1405)$ through regge physics*, Phys. Rev. D 93 (2016) 074015. doi:10.1103/PhysRevD.93.074015.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.074015>
- [132] J. Landay, M. Döring, C. Fernández-Ramírez, B. Hu, R. Molina, *Model selection for pion photoproduction*, Phys. Rev. C 95 (2017) 015203. doi:10.1103/PhysRevC.95.015203.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.95.015203>
- [133] J. P. Chandler, Stepit: Finds local minima of a smooth function of several parameters, Behavioral Science 14 (6) (1969) 81 – 82.
- [134] H. J. W. George B. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th Edition, Elsevier, 2005.
- [135] A. R. Edmonds, *Angular momentum in quantum mechanics*, Investigations in Physics, Princeton University Press, 1996.
- [136] J. P. Lees *et al.*, *Study of radiative bottomonium transitions using converted photons*, Phys. Rev. D 84 (2011) 072002. doi:10.1103/PhysRevD.84.072002.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.072002>
- [137] S. Dobbs, Z. Metreveli, A. Tomaradze, T. Xiao, K. K. Seth, *Observation of the $\eta_b(2s)$ meson in $\Upsilon(2s) \rightarrow \gamma\eta_b(2s), \eta_b(2s)$ hadrons and confirmation of the $\eta_b(1s)$ meson*, Phys. Rev. Lett. 109 (2012) 082001. doi:10.1103/PhysRevLett.109.082001.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.082001>
- [138] S. Sandilya *et al.*, *Search for bottomonium states in exclusive radiative $\Upsilon(2s)$ decays*, Phys. Rev. Lett. 111 (2013) 112001. doi:10.1103/PhysRevLett.111.112001.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.112001>
- [139] C. Patrignani, P. D. Group, *Review of particle physics*, Chinese Physics C 40 (10) (2016) 100001.
URL <http://stacks.iop.org/1674-1137/40/i=10/a=100001>
- [140] X. Liu, S.-L. Zhu, *$Y(4143)$ is probably a molecular partner of $Y(3930)$* , Phys. Rev. D 80 (2009) 017502. doi:10.1103/PhysRevD.80.017502.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.017502>
- [141] P. del Amo Sanchez *et al.*, *Evidence for the decay $X(3872) \rightarrow J/\psi\omega$* , Phys. Rev. D 82 (2010) 011101. doi:10.1103/PhysRevD.82.011101.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.011101>
- [142] D. Acosta *et al.*, *Observation of the narrow state $x(3872) \rightarrow j/\psi\pi^+\pi^-$ in $\bar{p}p$ collisions at $\sqrt{s} = 1,96$ TeV*, Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 072001. doi:10.1103/PhysRevLett.93.072001.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.072001>
- [143] K. Terasaki, *A new tetra-quark interpretation of $X(3872)$* , Progress of Theoretical Physics 118 (4) (2007) 821–826. doi:10.1143/PTP.118.821.
URL <http://dx.doi.org/10.1143/PTP.118.821>
- [144] L. Maiani, F. Piccinini, A. D. Polosa, V. Riquer, *Diquark-antidiquark states with hidden or open charm and the nature of $X(3872)$* , Phys. Rev. D 71 (2005) 014028. doi:10.1103/PhysRevD.71.014028.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.71.014028>
- [145] C.-Y. Wong, *Molecular states of heavy quark mesons*, Phys. Rev. C 69 (2004) 055202. doi:10.1103/PhysRevC.69.055202.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.69.055202>

- [146] V. Baru, E. Epelbaum, A. Filin, C. Hanhart, U.-G. Meißner, A. Nefediev, [Heavy-quark spin symmetry partners of the \$x\(3872\)\$ revisited](#), Physics Letters B 763 (Supplement C) (2016) 20 – 28. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.10.008>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269316305792>
- [147] P. G. Ortega, J. Segovia, D. R. Entem, F. Fernández, [Coupled channel approach to the structure of the \$x\(3872\)\$](#) , Phys. Rev. D 81 (2010) 054023. doi:[10.1103/PhysRevD.81.054023](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.054023). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.054023>
- [148] M. T. AlFiky, F. Gabbiani, A. A. Petrov, [\$X\(3872\)\$: Hadronic molecules in effective field theory](#), Physics Letters B 640 (5) (2006) 238 – 245. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.07.069>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269306008975>
- [149] M. Takizawa, S. Takeuchi, [\$X\(3872\)\$ as a hybrid state of charmonium and the hadronic molecule](#), Progress of Theoretical and Experimental Physics 2013 (9) (2013) 093D01. arXiv:[oup/backfile/content_public/journal/ptep/2013/9/10.1093_ptep_ptt063/2/ptt063.pdf](https://arxiv.org/abs/1309.1093), doi:[10.1093/ptep/ptt063](https://doi.org/10.1093/ptep/ptt063). URL [+http://dx.doi.org/10.1093/ptep/ptt063](http://dx.doi.org/10.1093/ptep/ptt063)
- [150] M. De Sanctis, P. Quintero, [On a possible interpretation of the \$x\(3872\)\$ as a \$11d_2\$ state in a constituent-quark model based on a generalized fermi-breit equation](#), The European Physical Journal A 47 (4) (2011) 54. doi:[10.1140/epja/i2011-11054-y](https://doi.org/10.1140/epja/i2011-11054-y). URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2011-11054-y>
- [151] B.-Q. Li, K.-T. Chao, [Higher charmonia and \$x\$, \$y\$, \$z\$ states with screened potential](#), Phys. Rev. D 79 (2009) 094004. doi:[10.1103/PhysRevD.79.094004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.094004). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.094004>
- [152] X. Liu, Z.-G. Luo, Z.-F. Sun, [\$x\(3915\)\$ and \$X\(4350\)\$ as new members in the p-wave charmonium family](#), Phys. Rev. Lett. 104 (2010) 122001. doi:[10.1103/PhysRevLett.104.122001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.122001). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.122001>
- [153] X. Li, M. B. Voloshin, [\$X\(3915\)\$ as a \$D_s\bar{D}_s\$](#) , Phys. Rev. D 91 (2015) 114014. doi:[10.1103/PhysRevD.91.114014](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.114014). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.114014>
- [154] Molina, R., Gamermann, D., Oset, E., [Molecular interpretation of the xyz states](#), EPJ Web of Conferences 37 (2012) 01014. doi:[10.1051/epjconf/20123701014](https://doi.org/10.1051/epjconf/20123701014). URL <https://doi.org/10.1051/epjconf/20123701014>
- [155] Z.-Y. Zhou, Z. Xiao, H.-Q. Zhou, [Could the \$x\(3915\)\$ and the \$x\(3930\)\$ be the same tensor state?](#), Phys. Rev. Lett. 115 (2015) 022001. doi:[10.1103/PhysRevLett.115.022001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.022001). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.022001>
- [156] V. Baru, C. Hanhart, A. V. Nefediev, [Can \$x\(3915\)\$ be the tensor partner of the \$x\(3872\)\$?](#), Journal of High Energy Physics 2017 (6) (2017) 10. doi:[10.1007/JHEP06\(2017\)010](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2017)010). URL [https://doi.org/10.1007/JHEP06\(2017\)010](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2017)010)
- [157] Y.-c. Yang, Z. Xia, J. Ping, [Are the \$x\(4160\)\$ and \$x\(3915\)\$ charmonium states?](#), Phys. Rev. D 81 (2010) 094003. doi:[10.1103/PhysRevD.81.094003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.094003). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.094003>
- [158] J. Vijande, G. Krein, A. Valcarce, [Screened potential and quarkonia properties at high temperatures](#), The European Physical Journal A 40 (1) (2009) 89–97. doi:[10.1140/epja/i2008-10736-9](https://doi.org/10.1140/epja/i2008-10736-9). URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2008-10736-9>
- [159] F. Close, P. Page, [Do \$\psi\(4040\), \psi\(4160\)\$ signal hybrid charmonium?](#), Physics Letters B 366 (1) (1996) 323 – 328. doi:[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(95\)01265-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)01265-6). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269395012656>

- [160] G. Rong, D.-H. Zhang, Chapter 8 lineshapes of charmonium resonances, International Journal of Modern Physics A 24 (supp01) (2009) 145–155. arXiv:<http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217751X09046497>, doi:10.1142/S0217751X09046497. URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217751X09046497>
- [161] P. Pakhlov *et al.*, Production of new charmoniumlike states in $e^+e^- \rightarrow j/\psi D^{(*)}\bar{d}^{(*)}$ at $\sqrt{s} \approx 10,6$ GeV, Phys. Rev. Lett. 100 (2008) 202001. doi:10.1103/PhysRevLett.100.202001. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.202001>
- [162] B. Aubert *et al.*, Observation of a broad structure in the $\pi^+\pi^-j/\psi$ mass spectrum around $4,26$ GeV/ c^2 , Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 142001. doi:10.1103/PhysRevLett.95.142001. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.142001>
- [163] C. Z. Yuan *et al.*, Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-j/\psi$ cross section via initial-state radiation at belle, Phys. Rev. Lett. 99 (2007) 182004. doi:10.1103/PhysRevLett.99.182004. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.182004>
- [164] X. L. Wang *et al.*, Observation of two resonant structures in $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\psi(2s)$ via initial-state radiation at belle, Phys. Rev. Lett. 99 (2007) 142002. doi:10.1103/PhysRevLett.99.142002. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.142002>
- [165] Z. Q. Liu, X. S. Qin, C. Z. Yuan, Combined fit to babar and belle data on $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\psi(2s)$, Phys. Rev. D 78 (2008) 014032. doi:10.1103/PhysRevD.78.014032. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.014032>
- [166] S.-L. Zhu, The possible interpretations of $y(4260)$, Physics Letters B 625 (3) (2005) 212 – 216. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.08.068>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269305011883>
- [167] Z.-G. Wang, Tetraquark state candidates: $Y(4260)$, $y(4360)$, $y(4660)$, and $z_c(4020/4025)$, The European Physical Journal C 76 (7) (2016) 387. doi:10.1140/epjc/s10052-016-4238-y. URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4238-y>
- [168] D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin, Relativistic description of heavy tetraquarks, Physics of Atomic Nuclei 72 (1) (2009) 184–188. doi:10.1134/S1063778809010220. URL <https://doi.org/10.1134/S1063778809010220>
- [169] F. Close, C. Downum, Possibility of deeply bound hadronic molecules from single pion exchange, Phys. Rev. Lett. 102 (2009) 242003. doi:10.1103/PhysRevLett.102.242003. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.242003>
- [170] G.-J. Ding, J.-J. Zhu, M.-L. Yan, Canonical charmonium interpretation for $y(4360)$ and $y(4660)$, Phys. Rev. D 77 (2008) 014033. doi:10.1103/PhysRevD.77.014033. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.014033>
- [171] D.-Y. Chen, J. He, X. Liu, Nonresonant explanation for the $y(4260)$ structure observed in the $e^+e^- \rightarrow j/\psi\pi^+\pi^-$ process, Phys. Rev. D 83 (2011) 054021. doi:10.1103/PhysRevD.83.054021. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.054021>
- [172] D.-Y. Chen, J. He, X. Liu, Novel explanation of charmoniumlike structure in $e^+e^- \rightarrow \psi(2s)\pi^+\pi^-$, Phys. Rev. D 83 (2011) 074012. doi:10.1103/PhysRevD.83.074012. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.074012>
- [173] D.-Y. Chen, X. Liu, X.-Q. Li, H.-W. Ke, Unified fano-like interference picture for charmoniumlike states $y(4008)$, $y(4260)$ and $y(4360)$, Phys. Rev. D 93 (2016) 014011. doi:10.1103/PhysRevD.93.014011. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.014011>

- [174] L.-P. He, D.-Y. Chen, X. Liu, T. Matsuki, Prediction of a missing higher charmonium around 4,26 gev in J/ψ family, The European Physical Journal C 74 (12) (2014) 3208. doi:10.1140/epjc/s10052-014-3208-5. URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-3208-5>
- [175] K. Abe *et al.*, Observation of a charmoniumlike state produced in association with a j/ψ in e^+e^- annihilation at $\sqrt{s} \approx 10,6$ GeV, Phys. Rev. Lett. 98 (2007) 082001. doi:10.1103/PhysRevLett.98.082001. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.082001>
- [176] C. P. Shen, Evidence for a new resonance and search for the $y(4140)$ in the $\gamma\gamma \rightarrow \phi j/\psi$ process, Phys. Rev. Lett. 104 (2010) 112004. doi:10.1103/PhysRevLett.104.112004. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.112004>
- [177] A. A. Petrov, $X(3872), X(3940)$ as hybrid charmonium states?, Journal of Physics: Conference Series 9 (1) (2005) 83. URL <http://stacks.iop.org/1742-6596/9/i=1/a=013>
- [178] R. Molina, E. Oset, $Y(3940), Z(3930)$, and the $X(4160)$ as dynamically generated resonances from the vector-vector interaction, Phys. Rev. D 80 (2009) 114013. doi:10.1103/PhysRevD.80.114013. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.114013>
- [179] F. Fernandez, P. G. Ortega, D. R. Entem, Molecular charmonium. a new spectroscopy?, AIP Conference Proceedings 1606 (1) (2014) 168–173. arXiv:<http://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4891129>, doi:10.1063/1.4891129. URL <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4891129>
- [180] K.-T. Chao, Interpretations for the $X(4160)$ observed in the double charm production at b factories, Physics Letters B 661 (5) (2008) 348 – 353. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.02.039>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269308002475>
- [181] E. J. Eichten, K. Lane, C. Quigg, New states above charm threshold, Phys. Rev. D 73 (2006) 014014. doi:10.1103/PhysRevD.73.014014. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.014014>
- [182] H. Wang, Z. Yan, J. Ping, Radially excited states of η_c , The European Physical Journal C 75 (5) (2015) 196. doi:10.1140/epjc/s10052-015-3418-5. URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3418-5>
- [183] T. Aaltonen *at al.*, Evidence for a narrow near-threshold structure in the $j/\psi\phi$ mass spectrum in $B^+ \rightarrow j/\psi\phi K^+$ decays, Phys. Rev. Lett. 102 (2009) 242002. doi:10.1103/PhysRevLett.102.242002. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.242002>
- [184] T. Aaltonen *et al.*, Observation of the $Y(4140)$ structure in the $J/\psi\phi$ mass spectrum in $B^\pm \rightarrow J/\psi\phi K^\pm$ decays, Modern Physics Letters A 32 (26) (2017) 1750139. arXiv:<http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217732317501395>, doi:10.1142/S0217732317501395. URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732317501395>
- [185] Q.-F. Lü, Y.-B. Dong, $X(4140), X(4274), X(4500)$, and $X(4700)$ in the relativized quark model, Phys. Rev. D 94 (2016) 074007. doi:10.1103/PhysRevD.94.074007. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.074007>
- [186] F. Stancu, Can $y(4140)$ be a $c\bar{c}s\bar{s}$ tetraquark?, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics 37 (7) (2010) 075017. URL <http://stacks.iop.org/0954-3899/37/i=7/a=075017>
- [187] Z.-G. Wang, Y.-F. Tian, Tetraquark state candidates: $Y(4140), Y(4274)$ and $X(4350)$, International Journal of Modern Physics A 30 (01) (2015) 1550004. arXiv:<http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217751X15500049>, doi:10.1142/S0217751X15500049. URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217751X15500049>

- [188] Z.-G. Wang, *Analysis of the $Y(4140)$ with qcd sum rules*, The European Physical Journal C 63 (1) (2009) 115–122. doi:10.1140/epjc/s10052-009-1097-9.
URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1097-9>
- [189] Z.-G. Wang, *Reanalysis of the $Y(3940)$, $Y(4140)$, $Z_c(4020)$, $Z_c(4025)$, and $Z_b(10650)$ as molecular states with qcd sum rules*, The European Physical Journal C 74 (7) (2014) 2963. doi:10.1140/epjc/s10052-014-2963-7.
URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-2963-7>
- [190] N. Mahajan, *$Y(4140)$: Possible options*, Physics Letters B 679 (3) (2009) 228 – 230. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2009.07.043>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269309008776>
- [191] D.-Y. Chen, *Where are $\chi_{cJ}(3P)$?*, The European Physical Journal C 76 (12) (2016) 671. doi:10.1140/epjc/s10052-016-4531-9.
URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4531-9>
- [192] L. Antoniazzi *et al.*, *Search for hidden charm states decaying into j/ψ or ψ' plus pions*, Phys. Rev. D 50 (1994) 4258–4264. doi:10.1103/PhysRevD.50.4258.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.50.4258>
- [193] V. Bhardwaj *et al.*, *Evidence of a new narrow resonance decaying to $\chi_{c1}\gamma$ in $b \rightarrow \chi_{c1}\gamma k$* , Phys. Rev. Lett. 111 (2013) 032001. doi:10.1103/PhysRevLett.111.032001.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.032001>
- [194] M. Ablikim *et al.*, *Observation of the $\psi(1^3D_2)$ state in $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\chi_{c1}$ at besiii*, Phys. Rev. Lett. 115 (2015) 011803. doi:10.1103/PhysRevLett.115.011803.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.011803>
- [195] D. Besson *et al.*, *Observation of new structure in the e^+e^- cross section above the $\Upsilon(4s)$* , Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 381–384. doi:10.1103/PhysRevLett.54.381.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.381>
- [196] D. M. J. Lovelock *et al.*, *Masses, widths, and leptonic widths of the higher upsilon resonances*, Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 377–380. doi:10.1103/PhysRevLett.54.377.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.377>
- [197] D. Santel *et al.*, *Measurements of the $\Upsilon(10860)$ and $\Upsilon(11020)$ resonances via $\sigma(e^+e^- \rightarrow \Upsilon(ns)\pi^+\pi^-)$* , Phys. Rev. D 93 (2016) 011101. doi:10.1103/PhysRevD.93.011101.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.011101>
- [198] J. Segovia, P. G. Ortega, D. R. Entem, F. Fernández, *Bottomonium spectrum revisited*, Phys. Rev. D 93 (2016) 074027. doi:10.1103/PhysRevD.93.074027.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.074027>
- [199] J.-F. Liu, G.-J. Ding, *Bottomonium spectrum with coupled-channel effects*, The European Physical Journal C 72 (4) (2012) 1981. doi:10.1140/epjc/s10052-012-1981-6.
URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-1981-6>
- [200] K.-F. Chen *et al.*, *Observation of anomalous $\Upsilon(1s)\pi^+\pi^-$ and $\Upsilon(2s)\pi^+\pi^-$ production near the $\Upsilon(5s)$ resonance*, Phys. Rev. Lett. 100 (2008) 112001. doi:10.1103/PhysRevLett.100.112001.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.112001>
- [201] J. Segovia, D. R. Entem, F. Fernández, *Puzzles in hadronic transitions of heavy quarkonium with two pion emission*, Phys. Rev. D 91 (2015) 014002. doi:10.1103/PhysRevD.91.014002.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.014002>
- [202] P. González, *Long-distance behavior of the quark-antiquark static potential. application to light-quark mesons and heavy quarkonia*, Phys. Rev. D 80 (2009) 054010. doi:10.1103/PhysRevD.80.054010.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.054010>

- [203] N. Akbar, M. A. Sultan, B. Masud, F. Akram, Higher hybrid bottomonia in an extended potential model, Phys. Rev. D 95 (2017) 074018. doi:10.1103/PhysRevD.95.074018.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.074018>
- [204] G. Aad *et al.*, Observation of a new χ_b state in radiative transitions to $\Upsilon(1S)$ and $\Upsilon(2S)$ at atlas, Phys. Rev. Lett. 108 (2012) 152001. doi:10.1103/PhysRevLett.108.152001.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.152001>
- [205] V. M. Abazov *et al.*, Observation of a narrow mass state decaying into $\Upsilon(1s) + \gamma$ in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1,96$ TeV, Phys. Rev. D 86 (2012) 031103. doi:10.1103/PhysRevD.86.031103.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.031103>
- [206] L. Bai-Qing, C. Kuang-Ta, Bottomonium spectrum with screened potential, Communications in Theoretical Physics 52 (4) (2009) 653.
URL <http://stacks.iop.org/0253-6102/52/i=4/a=20>
- [207] J. Eiglsperger, Quarkonium spectroscopy: Beyond one-gluon exchange.
URL <https://arxiv.org/abs/0707.1269>
- [208] C. O. Dib, N. A. Neill, $\chi_b(3P)$ splitting predictions in potential models, Phys. Rev. D 86 (2012) 094011. doi:10.1103/PhysRevD.86.094011.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.094011>
- [209] M. Karliner, J. L. Rosner, $X(3872)$, X_b , and the $\chi_{b1}(3P)$ state, Phys. Rev. D 91 (2015) 014014. doi:10.1103/PhysRevD.91.014014.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.014014>
- [210] S. Godfrey, K. Moats, Bottomonium mesons and strategies for their observation, Phys. Rev. D 92 (2015) 054034. doi:10.1103/PhysRevD.92.054034.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.054034>
- [211] J. J. Sakurai, Modern quantum mechanics, rev. ed Edition, Addison-Wesley Pub. Co, 1994.
URL <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=135C77B33B4D32D809C3E39335DD6AE2>