UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Ecuaciones para retículos distributivos con cuantificador

Nicolás José Ramírez Ramos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2023

Ecuaciones para retículos distributivos con cuantificador

Nicolás José Ramírez Ramos

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias - Matemáticas

Director:
Ph.D. Hernando Gaitan

Línea de Investigación:
Álgebra Universal

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2023

A Emmita.

Agradecimientos

A mis padres, les agradezco por creer en mí y acompañarme en cada paso.

A Emma, mi apoyo incondicional y mi fuente de motivación, gracias por estar a mi lado en cada desafío y celebrar juntos cada logro.

A la Universidad Nacional, por brindarme siempre oportunidades de crecimiento y aprendizaje, y a mis amigos y compañeros de maestría, por compartir tantos momentos conmigo y crear un espacio de fraternidad a lo largo de todos estos años.

Por último, agradezco de manera especial al profesor Hernando Gaitan, cuya guía paciente y experticia fueron fundamentales para el éxito de esta investigación.

A todos ustedes, mi más profundo agradecimiento.

Resumen

Ecuaciones para retículos distributivos con cuantificador

Este trabajo aborda el estudio de los Q-retículos distributivos, generalizaciones de las álgebras Booleanas monádicas. Mediante resultados de dualidad basados en el trabajo de Stone, Priestley y Halmos se muestra que las subvariedades de los Q-retículos distributivos forman una $\omega + 1$ cadena, donde cada subvariedad es generada por una única álgebra finita. El objetivo es encontrar nuevas ecuaciones que caractericen estas subvariedades, explorando la dualidad en el caso finito y analizando la estructura de sus álgebras generadoras.

Palabras clave: álgebra universal, retículos distributivos, dualidad, subvariedades, cuantificadores, ecuaciones.

Abstract

Equations for distributive lattices with quantifiers

This work addresses the study of Q-distributive lattices, which are generalizations of monadic Boolean algebras. Through duality results based on the work of Stone, Priestley, and Halmos, it is shown that the subvarieties of Q-distributive lattices form an $\omega + 1$ chain, where each subvariety is generated by a unique finite algebra. The objective is to find new equations that characterize these subvarieties, exploring duality in the finite case and analyzing the structure of their generating algebras.

Keywords: universal algebra, distributive lattices, duality, subvarieties, quantifiers, equations.

Índice

1. Introducción **1**

2. Nociones Básicas **2**

2.1. Álgebra Universal 2

2.2. Retículos 6

2.3. Topología y Orden 11

2.4. Categorías 13

3. Dualidad **20**

3.1. Dualidad de Priestley 20

3.2. Dualidad de Cignoli 27

3.3. Dualidad en el Caso Finito 31

4. Teorema Principal **35**

5. Otras Ecuaciones **45**

6. Conclusión **48**

1. Introducción

Uno de los problemas clásicos en Álgebra Universal es: dada una variedad estudiar el retículo de sus subvariedades. En [17] Monk muestra que las subvariedades de las álgebras Booleanas monádicas forman una $\omega + 1$ cadena

$$\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}_1 \subseteq \cdots \subseteq PA_1$$

donde $\mathcal{K}_n$ es la subvariedad generada por el álgebra Booleana $\mathbf{2}^n$ con cuantificador simple y PA_1 es la clase de todas las álgebras monádicas. Además, cada $\mathcal{K}_n$ está axiomatizada relativa a PA_1 por una ecuación. Para llegar a este Teorema, Monk hace uso de resultados expuestos en un articulo fundamental de Jónsson [12], donde se caracterizan las variedades de congruencias distributivas (inspirado en un teorema previo de Malcev [15]) y se dan condiciones para asegurar que el retículo de subvariedades de una variedad sea distributivo.

En la década de los noventa, Cignoli [6] introduce estructuras que generalizan a las álgebras monádicas; los Q-retículos distributivos. Cignoli muestra que al igual que antes, las subvariedades de Q-retículos distributivos forman una $\omega + 1$ cadena. Sin embargo, las técnicas utilizadas y las álgebras generadoras de las subvariedades resultan muy diferentes a las que aparecen en el artículo de Monk.

Cignoli desarrolla una dualidad utilizando el teorema de representación de Priestley y correspondencias entre cuantificadores y relaciones de equivalencia para estudiar el retículo de subvariedades de los Q-retículos distributivos. Para $p, q < \omega$, define $\mathbf{D}_{pq} := \mathbf{2}^p \times \mathbf{C}_q$, donde $\mathbf{C}_q := \mathbf{2}^q \oplus \mathbf{1}^*$ para $1 \leq q$ y $C_0 = \{0\}$. A este producto de retículos distributivos acotados lo dota del cuantificador simple y define la clase $\mathscr{Q}_{pq}$ como la variedad generada por $\mathbf{D}_{pq}$. Cignoli demuestra que los $\mathbf{D}_{pq}$ son precisamente las álgebras finitas subdirectamente irreducibles de $\mathscr{Q}$, la clase de Q-retículos distributivos, y con esto finalmente concluye que el retículo de subvariedades tiene la forma:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{Q}_{00} \subset \\
&\mathscr{Q}_{10} \subset \mathscr{Q}_{01} \subset \\
&\mathscr{Q}_{20} \subset \mathscr{Q}_{02} \subset \mathscr{Q}_{11} \subset \\
&\mathscr{Q}_{30} \subset \mathscr{Q}_{03} \subset \mathscr{Q}_{12} \subset \mathscr{Q}_{21} \subset \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \subset \mathscr{Q}.
\end{aligned}$$

Basado en este resultado, Petrovich [20] da ecuaciones para axiomatizar cada subvariedad haciendo uso del teorema de Birkhoff y propiedades internas de los retículos $\mathbf{D}_{pq}$. Para el caso de los Q-retículos distributivos finitos, Adams y Dziobiak [2] presentan una versión simplificada de la dualidad de Cignoli, usando el hecho de que la topología de los objetos duales en el caso de la representación de retículos finitos resulta ser la topología discreta.

2. Nociones Básicas

En esta sección se revisan los conceptos básicos y resultados relevantes al contenido de la tesis.

2.1. Álgebra Universal

Se comienza haciendo un recuento de algunas definiciones y teoremas de Álgebra Universal que pueden ser encontrados en [5].

Definición 2.1. Sea A un conjunto no vacío y $n \geq 0$. Una *operación n-aria* en A es una función $\alpha : A^n \to A$. Una operación n-aria en A es llamada *constante* si $n = 0$ y en ese caso se identifica a la operación con su imagen $\alpha(\emptyset) \in A$.

Definición 2.2. Un *tipo de álgebras* es un conjunto $\mathfrak{F}$ de símbolos de operación tal que a cada $f \in \mathfrak{F}$ se le asocia un entero no negativo n. Este entero es llamado la *aridad* de f.

Definición 2.3. Sea $\mathfrak{F}$ es un tipo de álgebras. Un *álgebra* $\mathbf{A}$ *de tipo* $\mathfrak{F}$ es una pareja ordenada (A, F), donde A es un conjunto no vacío llamado el *universo* del álgebra y F es una familia de operaciones en A indexada por el tipo $\mathfrak{F}$ de tal manera que a cada símbolo de operación $f \in \mathfrak{F}$ de aridad n le corresponde una operación n-aria $f^{\mathbf{A}} \in F$.

Si el tipo de álgebras $\mathfrak{F}$ es finito, $\mathfrak{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$, entonces se suele escribir $\mathbf{A} = (A, F) = (A, f_1^{\mathbf{A}}, \ldots, f_n^{\mathbf{A}})$ donde

$$\text{aridad de } f_1 \geq \text{aridad de } f_2 \geq \cdots \geq \text{aridad de } f_n.$$

Nota 2.4. Al tipo de álgebras también se le conoce por el nombre de lenguaje de álgebras. En adelante, cuando se dé un ejemplo concreto de un tipo de álgebras se hará por medio de la aridad de sus símbolos de operación. Por ejemplo un tipo de álgebras $\mathfrak{F} = (3, 1, 0)$ indica que $\mathfrak{F}$ tiene tres símbolos de operación de aridades $3, 1$ y 0 respectivamente.

Definición 2.5. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ álgebras de tipo $\mathfrak{F}$. $\mathbf{A}$ es subálgebra de $\mathbf{B}$ si $A \subseteq B$ y para cada símbolo de operación $f \in \mathfrak{F}$, $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{B}} \restriction_A$. En adelante se escribirá $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ para decir que $\mathbf{A}$ es subálgebra de $\mathbf{B}$. Se dice que $X \subseteq A$ es *subuniverso* de $\mathbf{A}$ si X es cerrado bajo las operaciones de A.

Observación 2.6. Note que un subuniverso X de $\mathbf{A}$ puede ser vacío. Por otro lado, si $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, entonces A es un subuniverso de $\mathbf{B}$.

Definición 2.7. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo $\mathfrak{F}$ y $X \subseteq A$. $Sg^{\mathbf{A}}(X) := \bigcap\{Z \mid Z \text{ es subuniverso de } \mathbf{A},\ X \subseteq Z\}$ es llamado el *subuniverso generado por* X. $\mathbf{A}$ se dice *finitamente generada* si existe $X \subseteq A$ finito tal que $Sg^{\mathbf{A}}(X) = A$. Además, $\mathbf{A}$ es *localmente finita* si para cada $\mathbf{S} \leq \mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ finitamente generada implica que su universo S es finito.

Observación 2.8. Si $\emptyset \neq X \subseteq A$, entonces $\emptyset \neq Sg^{\mathbf{A}}(X)$. Se puede definir de manera evidente un álgebra de tipo $\mathfrak{F}$ que tenga como universo a $Sg^{\mathbf{A}}(X)$ y que sea subálgebra de $\mathbf{A}$.

Definición 2.9. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ álgebras de tipo $\mathfrak{F}$. Se dice que una función $\alpha : A \to B$ es un *homomorfismo* si dado $f \in \mathfrak{F}$ de aridad n

$$\alpha(f^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \alpha(a_2), \ldots, \alpha(a_n))$$

para todo $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$. Si α es sobreyectiva, entonces se dice que $\mathbf{B}$ es *imagen homomorfa* de $\mathbf{A}$.

Definición 2.10. Sea $\{\mathbf{A}_i \mid i \in I\}$ una familia de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$. Se define el *producto (directo)* $\mathbf{B} = \left(\prod_{i\in I} A_i, F\right)$, donde para cada $f \in \mathfrak{F}$ de aridad n

$$f^{\mathbf{B}}((a_1^i)_{i\in I}, \ldots, (a_n^i)_{i\in I}) = \left(f^{\mathbf{A_i}}(a_1^i, \ldots, a_n^i)\right)_{i\in I}$$

$a_1^i \ldots, a_n^i \in A_i$, para todo $i \in I$. El producto de la familia de álgebras $\{\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}\}$ se suele escribir de la forma $\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}$.

La siguiente definición describe el objeto principal de estudio de esta tesis; las variedades de álgebras.

Definición 2.11. Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras del mismo tipo. Se definen tres operadores que actúan sobre $\mathcal{K}$ de la siguiente forma:

- $\mathbf{A} \in S(\mathcal{K})$ si y solo si $\mathbf{A}$ es subálgebra de algún elemento de $\mathcal{K}$.
- $\mathbf{A} \in H(\mathcal{K})$ si y solo si $\mathbf{A}$ es imagen homomorfa de algún elemento de $\mathcal{K}$.
- $\mathbf{A} \in P(\mathcal{K})$ si y solo si $\mathbf{A}$ es producto directo de alguna familia de miembros de $\mathcal{K}$.

Una clase de álgebras del mismo tipo $\mathcal{V}$ es una *variedad* si $\mathcal{V} = S(\mathcal{V}) = H(\mathcal{V}) = P(\mathcal{V})$. Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ que no necesariamente sea variedad. Se define $V(\mathcal{K})$ como la intersección de todas las variedades que contienen a $\mathcal{K}$. De esta forma, $V(\mathcal{K})$ resulta ser la variedad de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ más pequeña que contiene a $\mathcal{K}$. Tarski demuestra que $V(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K})$ y se llama a $V(\mathcal{K})$ la *variedad generada por* $\mathcal{K}$. Si $\mathcal{K} = \{\mathbf{A}\}$ se suele denotar con $V(\mathbf{A})$ a la variedad $V(\{\mathbf{A}\})$.

Sea $\mathcal{V}$ una variedad de álgebras. Se dice que $\mathcal{W}$ es una *subvariedad* de $\mathcal{V}$ si $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ es también una variedad del mismo tipo. Además, si $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subvariedades de $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_1 \vee \mathcal{W}_2 := V(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2)$ también son subvariedades de $\mathcal{V}$.

Definición 2.12. Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras del mismo tipo es llamada *localmente finita* si cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ es a su vez localmente finita.

El siguiente teorema sera de utilidad en la prueba del resultado principal de la tesis.

Teorema 2.13. ***[5, II§10.16.].*** *Si $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n}$ son álgebras finitas de tipo $\mathfrak{F}$, entonces $V(\{\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n}\})$ es localmente finita.*

A continuación se da la definición de conjunto de términos de un tipo de álgebras. Estos términos permiten construir ecuaciones que axiomatizan a las variedades.

Definición 2.14. Sea $\mathfrak{F}$ un tipo de álgebras y X un conjunto (usualmente infinito) de variables. Se denomina con $\mathfrak{F}_n$ a los símbolos de operación en $\mathfrak{F}$ de aridad n. Se define de forma inductiva el conjunto $T_{\mathfrak{F}}(X)$ por medio de las siguientes condiciones:

- $X \cup \mathfrak{F}_0 \subseteq T_{\mathfrak{F}}(X)$.
- Si $p_1, \ldots, p_n \in T_{\mathfrak{F}}(X)$, entonces $f(p_1, \ldots, p_n) \in T_{\mathfrak{F}}(X)$ para cada $f \in \mathfrak{F}_n$.

$T_{\mathfrak{F}}(X)$ es llamado *conjunto de términos de tipo* $\mathfrak{F}$ *sobre* X. A cada $p \in T_{\mathfrak{F}}(X)$ se le asocia un entero no negativo $l(p)$: el número de ocurrencias de símbolos de operación de aridad $n > 0$ en p. A $l(p)$ se le llama *longitud* de p.

Nota 2.15. Se escribe $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que las variables que ocurren en el termino $p \in T_{\mathfrak{F}}(X)$ están entre $x_1, \ldots, x_n$.

Definición 2.16. Sean $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo $\mathfrak{F}$, $p \in T_{\mathfrak{F}}(X)$, $p = p(x_1, \ldots, x_n)$. Se define la *función termino* $p^{\mathbf{A}} : A^n \to A$ de la siguiente forma:

- Si $p = x_i$, entonces $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$.
- Si $f \in \mathfrak{F}_k$ y $p = f(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n))$, entonces

$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_k^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n))$$

Lema 2.17. *Sean* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *álgebras de tipo* $\mathfrak{F}$, $p \in T_{\mathfrak{F}}(X)$, $p = p(x_1, \ldots, x_n)$.

1. *Si* $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, *entonces* $p^{\mathbf{A}} = p^{\mathbf{B}} \restriction_{A^n}$.
2. *Si* $\alpha : A \to B$ *es homomorfismo, entonces* $\alpha(p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = p^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))$ *para cada* $a_1, \ldots, a_n \in A$.
3. *Sea* $\{\mathbf{A_i} \mid i \in I\}$ *una familia de álgebras de tipo* $\mathfrak{F}$ *y* $\mathbf{B} = \prod_{i \in I} \mathbf{A_i}$, *entonces* $p^{\mathbf{B}}((a_1^i)_{i \in I}, \ldots, (a_n^i)_{i \in I}) = (p^{\mathbf{A_i}}(a_1^i, \ldots, a_n^i))_{i \in I}$, *para cada* $a_1^i, \ldots, a_n^i \in A_i$, $i \in I$.

Demostración. En los tres casos se realiza la demostración por inducción sobre la longitud de los términos.

1. Sean $a_1, \ldots, a_n \in A$. Si $l(p) = 0$, entonces $p \in X \cup \mathfrak{F}_0$ y la implicación es trivial. Suponga que la afirmación es cierta para todos los términos de longitud menor o igual a n. Si $l(p) = n + 1$, por definición de $T_{\mathfrak{F}}(X)$, p es de la forma $p = f(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n))$ para un $f \in \mathfrak{F}_k$, $k \geq 1$ y $p_i \in T_{\mathfrak{F}}(X)$ con $l(p_i) \leq n$ para cada $1 \leq i \leq k$. Luego

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) &= f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_k^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \\ &= f^{\mathbf{B}}(p_1^{\mathbf{B}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_k^{\mathbf{B}}(a_1, \ldots, a_n)) = p^{\mathbf{B}}(a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

2. Sean $a_1, \ldots, a_n \in A$. Si $p = x_i$, entonces $\alpha(p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = \alpha(a_i) = p^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))$. Si $p = f \in \mathfrak{F}_0$, entonces $\alpha(p^{\mathbf{A}}) = \alpha(f^{\mathbf{A}}(\emptyset)) = f^{\mathbf{B}}(\emptyset) = p^{\mathbf{B}}$. Por lo tanto la afirmación es verdadera cuando $l(p) = 0$. Nuevamente suponga que la afirmación es cierta para los términos de longitud menor o igual a n. Si $l(p) = n + 1$, al igual que antes $p = f(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n))$ donde $l(p_i) \leq n$. Así

$$\begin{aligned} \alpha(p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= \alpha(f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_k^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n))) \\ &= f^{\mathbf{B}}(\alpha(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)), \ldots, \alpha(p_k^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n))) \\ &= f^{\mathbf{B}}(p_1^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)), \ldots, p_k^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))) \\ &= p^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)). \end{aligned}$$

3. Sean $a_1^i, \ldots, a_n^i \in A_i$ para $i \in I$. Si $p = x_j$, entonces $p^{\mathbf{B}}((a_1^i)_{i\in I}, \ldots, (a_n^i)_{i\in I}) = (a_j^i)_{i\in I} = (p^{\mathbf{A_i}}(a_1^i, \ldots, a_n^i))_{i\in I}$. Si $p = f \in F_0$, entonces $p^{\mathbf{B}} = f^{\mathbf{B}}(\emptyset) = (f^{\mathbf{A_i}}(\emptyset))_{i\in I} = (p^{\mathbf{A_i}})_{i\in I}$. Una vez más se plantea la hipótesis de inducción y se supone que $l(p) = n+1$, por lo tanto $p = f(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n))$ con $l(p_i) \leq n$. De esta forma

$$\begin{aligned}
p^{\mathbf{B}}((a_1^i)_{i\in I}, \ldots, (a_n^i)_{i\in I}) &= f^{\mathbf{B}}(p_1^{\mathbf{B}}((a_1^i)_{i\in I}, \ldots, (a_n^i)_{i\in I}), \ldots, p_k^{\mathbf{B}}((a_1^i)_{i\in I}, \ldots, (a_n^i)_{i\in I})) \\
&= f^{\mathbf{B}}((p_1^{\mathbf{A_i}}(a_1^i, \ldots, a_n^i))_{i\in I}, \ldots, (p_k^{\mathbf{A_i}}(a_1^i, \ldots, a_n^i))_{i\in I}) \\
&= (f^{\mathbf{A_i}}(p_1^{\mathbf{A_i}}(a_1^i, \ldots, a_n^i), \ldots, p_k^{\mathbf{A_i}}(a_1^i, \ldots, a_n^i)))_{i\in I} \\
&= (p^{\mathbf{A_i}}(a_1^i, \ldots, a_n^i))_{i\in I}.
\end{aligned}$$

□

Definición 2.18. Considere $p, q \in T_{\mathfrak{F}}(X)$. Toda expresión de la forma $p \approx q$ recibe el nombre de *identidad*. Se denota con $Id(X) := \{p \approx q \,|\, p, q \in T_{\mathfrak{F}}(X)\}$ al conjunto de todas la identidades que se pueden construir con los términos en $T_{\mathfrak{F}}(X)$.

Un álgebra $\mathbf{A}$ de tipo $\mathfrak{F}$ *satisface* la identidad $p \approx q \in Id(X)$ si y solo si $p^{\mathbf{A}} = q^{\mathbf{A}}$, y en este caso se escribe $\mathbf{A} \models p \approx q$. Si $\mathcal{K}$ es una clase de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$, se dice que $\mathcal{K}$ satisface $p \approx q$ si y solo si $p^{\mathbf{A}} = q^{\mathbf{A}}$ para todo $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, en este caso se escribe $\mathcal{K} \models p \approx q$ y se define $Id_{\mathcal{K}}(X) := \{p \approx q \in Id(X) \,|\, \mathcal{K} \models p \approx q\}$ el conjunto de identidades que $\mathcal{K}$ satisface.

Teorema 2.19. *Sean $\mathcal{K}$ una clase de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ y X un conjunto de variables, entonces*

$$Id_{\mathcal{K}}(X) = Id_{P(\mathcal{K})}(X) = Id_{S(\mathcal{K})}(X) = Id_{H(\mathcal{K})}(X) = Id_{V(\mathcal{K})}(X)$$

Demostración. Por un lado, note que $\mathcal{K} \subseteq P(\mathcal{K}), S(\mathcal{K}), H(\mathcal{K})$. En efecto, si $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ entonces $\mathbf{A}$ es igual al producto de la familia $\{\mathbf{A}\}$, $\mathbf{A} \leq \mathbf{A}$ y $\mathbf{A}$ es imagen homomorfa de $\mathbf{A}$ por medio de la función identidad. Esto implica que $Id_{P(\mathcal{K})}(X), Id_{S(\mathcal{K})}(X), Id_{H(\mathcal{K})}(X) \subseteq Id_{\mathcal{K}}(X)$. Suponga que $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n) \in Id_{\mathcal{K}}(X)$.

Si $\mathbf{B} \in P(\mathcal{K})$, entonces existe una familia $\{\mathbf{A_i} \,|\, i \in I\} \subseteq \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{B} = \prod_{i\in I} \mathbf{A_i}$. Por la suposición, $\mathbf{A_i} \models p \approx q$ para $i \in I$. Sean $(a_1^i)_{i\in I}, \ldots, (a_n^i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, por el Lema 2.17

$$\begin{aligned}
p^{\mathbf{B}}((a_1^i)_{i\in I}, \ldots, (a_n^i)_{i\in I}) &= (p^{\mathbf{A_i}}(a_1^i, \ldots, a_n^i))_{i\in I} \\
&= (q^{\mathbf{A_i}}(a_1^i, \ldots, a_n^i))_{i\in I} \\
&= q^{\mathbf{B}}((a_1^i)_{i\in I}, \ldots, (a_n^i)_{i\in I})
\end{aligned}$$

es decir, $\mathbf{B} \models p \approx q$ y $p \approx q \in Id_{P(\mathcal{K})}(X)$. Por lo tanto $Id_{\mathcal{K}}(X) = Id_{P(\mathcal{K})}(X)$.

Si $\mathbf{B} \in S(\mathcal{K})$, entonces existe $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$. Sean $b_1, \ldots, b_n \in B \subseteq A$, como $\mathbf{A} \models p \approx q$ usando el Lema 2.17 se obtiene que

$$p^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n) = p^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n) = q^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n) = q^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Luego $\mathbf{B} \models p \approx q$ y $p \approx q \in Id_{S(\mathcal{K})}(X)$. Se concluye que $Id_{\mathcal{K}}(X) = Id_{S(\mathcal{K})}(X)$.

Por ultimo, si $\mathbf{B} \in H(\mathcal{K})$, existen $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $\alpha : A \to B$ homomorfismo sobreyectivo. Sean $b_1, \ldots, b_n \in B$, entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $\alpha(a_i) = b_i$ para $1 \leq i \leq n$. Aplicando una ultima vez el Lema 2.17

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n) &= p^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) \\ &= \alpha(p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \\ &= \alpha(q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \\ &= q^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) = q^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

Al igual que antes se tiene como consecuencia $Id_{\mathcal{K}}(X) = Id_{H(\mathcal{K})}(X)$. Finalmente note que todo lo anterior implica que $Id_{\mathcal{K}} = Id_{HSP(\mathcal{K})} = Id_{V(\mathcal{K})}$. □

Definición 2.20. Sea $\Sigma \subseteq Id(X)$ un conjunto de identidades. Se dice que $\mathbf{A}$ satisface a Σ (en símbolos $\mathbf{A} \models \Sigma$), si $\mathbf{A} \models p \approx q$ para cada $p \approx q \in \Sigma$. Adicionalmente, se define a $Mod(\Sigma)$ como la clase de todas las álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ que satisfacen a Σ. Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras del mismo tipo se dice una *clase ecuacional* si $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$ para algún $\Sigma \subseteq Id(X)$.

A continuación se enuncia un teorema de gran importancia en Álgebra Universal: el Teorema de Birkhoff.

Teorema 2.21. ***[5, II§11.9.].*** *Toda variedad es una clase ecuacional y toda clase ecuacional es una variedad.*

Una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente resultado.

Teorema 2.22. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$. Entonces $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ si y solo si cada subálgebra de $\mathbf{A}$ finitamente generada es un miembro de $\mathcal{V}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Suponga que $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y tome $\mathbf{S} \leq \mathbf{A}$ finitamente generada. Como $\mathcal{V}$ es una variedad, $\mathcal{V} = S(\mathcal{V})$ y por suposición $\mathbf{S} \in S(\mathcal{V})$, luego $\mathbf{S} \in \mathcal{V}$.

$\Leftarrow$) Suponga que cada subálgebra de $\mathbf{A}$ finitamente generada pertenece a $\mathcal{V}$. Por el Teorema de Birkhoff existe $\Sigma \subseteq Id(X)$ tal que $\mathcal{V} = Mod(\Sigma)$. Sean $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ una n-tupla cualquiera. Considere la subálgebra de $\mathbf{A}$ que tiene como universo a $Sg^{\mathbf{A}}(\{a_1, \ldots, a_n\})$ y llámela $\mathbf{S}$. Como $\mathbf{S}$ es finitamente generada, entonces $\mathbf{S} \in \mathcal{V}$, es decir, $\mathbf{S} \models \Sigma$. Por lo tanto $p^{\mathbf{S}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{S}}(a_1, \ldots, a_n)$ y como $\mathbf{S} \leq \mathbf{A}$ entonces $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$. En conclusión $p^{\mathbf{A}} = q^{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{A} \models p \approx q$. Así queda demostrado que $\mathbf{A} \models \Sigma$ y por lo tanto $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$. □

2.2. Retículos

Definición 2.23. Un álgebra $(L, \vee, \wedge)$ de tipo $(2, 2)$ es un retículo si satisface las siguientes identidades:

- $x \wedge y \approx y \wedge x$, $x \vee y \approx y \vee x$ (conmutatividad).
- $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$ (asociatividad).
- $x \wedge x \approx x$, $x \vee x \approx x$ (idempotencia).

- $x \wedge (x \vee y) \approx x$, $x \vee (x \wedge y) \approx x$ (absorción).

Ahora bien, $(L, \vee, \wedge)$ es un retículo distributivo si además satisface:

- $x \wedge (y \vee z) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (distributividad).

Un álgebra $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$ se dice retículo distributivo acotado si $(L, \vee, \wedge)$ es retículo distributivo y existen elementos $0, 1 \in L$ tales que, $\mathbf{L} \models \{x \wedge 1 \approx x, x \vee 0 \approx x\}$. Más aún, un álgebra $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ es un álgebra Booleana si $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\mathbf{L}$ satisface:

- $x \wedge x' \approx 0$, $x \vee x' \approx 1$ (complementariedad).

Observación 2.24. A partir de las operaciones de un retículo L se puede definir una relación de orden sobre L de la siguiente forma: $x \leq y$ si y solo si $x \wedge y = x$ o $x \vee y = y$. (Por absorción ambas condiciones son equivalentes). Recíprocamente, si $(L, \leq)$ es un Poset tal que para todos sus subconjuntos de la forma $\{x, y\}$, existen ínfimos y supremos, se pueden definir operaciones binarias $x \wedge y := inf\{x, y\}$ y $x \vee y := sup\{x, y\}$, y de esta forma se dota a L de estructura de retículo.

Teorema 2.25. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$. Llame $L_{\mathcal{V}}$ a la clase de subvariedades de $\mathcal{V}$. Entonces $(L_{\mathcal{V}}, \vee, \wedge)$ es un retículo, donde $\mathcal{W}_1 \wedge \mathcal{W}_2 := \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_1 \vee \mathcal{W}_2 := V(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2)$.*

Demostración. Para empezar, note que si $\{\mathcal{W}_i \,|\, i \in I\}$ es una familia de subvariedades de $\mathcal{V}$, entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{V}$ es de nuevo una subvariedad. En efecto, si $\mathbf{A}$ es un álgebra de tipo $\mathfrak{F}$ y $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ para algún $\mathbf{B} \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$, entonces para cualquier $i \in I$, $\mathbf{B} \in \mathcal{W}_i$ y como $S(\mathcal{W}_i) = \mathcal{W}_i$ se concluye que $\mathbf{A} \in \mathcal{W}_i$, es decir, $\mathbf{A} \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$ y así $S(\bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$. Recuerde que para cualquier clase de álgebras del mismo tipo $\mathcal{K}$ se tiene que $\mathcal{K} \subseteq S(\mathcal{K})$, por lo tanto $\bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i = S(\bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i)$. De forma similar se prueba que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$ es cerrada para los operadores H y P, como consecuencia $\bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i \in L_{\mathcal{V}}$.

Sean $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \in L_{\mathcal{V}}$. Por definición $V(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2) = \bigcap \{\mathcal{W} \in L_{\mathcal{V}} \,|\, \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}\}$, y por lo hecho antes $V(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2) \in L_{\mathcal{V}}$. Considere el Poset $(L_{\mathcal{V}}, \subseteq)$ donde $\subseteq$ es la inclusión entre subvariedades. Note que $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = inf\{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\}$ y $V(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2) = sup\{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\}$. En conclusión $(L, \vee, \wedge)$ es un retículo por la observación hecha anteriormente. □

Observación 2.26. Es posible que $L_{\mathcal{V}}$ no sea un conjunto. En ese caso el contenido del teorema anterior sugiere que en $L_{\mathcal{V}}$ las operaciones $\cap$ y $\vee$ se comportan como las de un retículo.

Definición 2.27. Si $\mathbf{L}$ es un retículo distributivo acotado y $a \in L$, se dice que a es $\vee$-irreducible si se cumple lo siguiente:

- $a \neq 0$.
- $a = x \vee y$ implica $a = x$, o $a = y$.

Se denota con $Irr(L)$ al conjunto de todos los elementos $\vee$-irreducibles de $\mathbf{L}$.

Lema 2.28. *Sean $\mathbf{L}$ un retículo distributivo acotado y $a \in L$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *a es $\vee$-irreducible.*

2. $a \leq x \vee y$ *implica* $a \leq x$ *o* $a \leq y$.

3. $a \leq x_1 \vee \cdots \vee x_n$ *implica* $a \leq x_i$ *para algún* $i \leq n$.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ *2.* Suponga que $a \in Irr(L)$. Si $a \leq x \vee y$, entonces $a \wedge (x \vee y) = a$. Por distributividad esto es $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) = a$, y por hipótesis $a \wedge x = a$ o $a \wedge y = a$, esto ultimo significa que $a \leq x$ o $a \leq y$.

2. $\Rightarrow$ *3.* Por inducción sobre n. Si $n = 1$, es trivial. Suponga que la afirmación *3.* es cierta para un $n \geq 1$. Si $a \leq x_1 \vee \cdots \vee x_{n+1}$, defina $y := x_2 \vee \cdots \vee x_{n+1}$, de allí $a \leq x_1 \vee y$ y por *2.* se tiene que $a \leq x_1$ o $a \leq y$. Se aplica la hipótesis de inducción al caso $a \leq y$ para concluir que $a \leq x_i$ para algún $i \leq n+1$. Por lo tanto la afirmación *3.* es verdadera para cualquier n.

3. $\Rightarrow$ *1.* Si $a = x \vee y$, entonces $a \leq x \vee y$ y por la afirmación *3.* $a \leq x$ o $a \leq y$. En el primer caso $a \leq x$ implica que $a = x \wedge a = x \wedge (x \vee y) = x$. En el segundo caso se muestra de manera similar que $a \leq y$ implica $a = y$. Se concluye que $a \in Irr(L)$. □

Teorema 2.29. *Sea* $\mathbf{L}$ *un retículo distributivo finito. Si* $a \in L$ *y* $a \neq 0$ *entonces*

$$a = \bigvee \{x \in Irr(L) \,|\, x \leq a\}.$$

Demostración. Sea $A = \{x \in Irr(L) \,|\, x \leq a\}$, entonces $sup(A) = \bigvee A \leq a$. Suponga que $a \not\leq \bigvee A$ y considere el conjunto $B = \{x \in L \,|\, x \leq a, x \not\leq \bigvee A\}$; note que $B \neq \emptyset$ pues $a \in B$. Como B es finito, existe $x \in B$ minimal. Suponga que $x = r \vee s$ con $r < x$ y $s < x$ para algunos $r, s \in L$. Ya que $x \leq a$, entonces $r \leq a$ y $s \leq a$, luego por minimalidad de x, $r \leq \bigvee A$ y $s \leq \bigvee A$, es decir, $x = r \vee s \leq \bigvee A$, lo cual es una contradicción. Se deduce que $r = x$ o $s = x$, por consiguiente $x \in Irr(L)$. De esta forma $x \in A$, pero como $x \in B$, $x \not\leq \bigvee A$, lo cual es una contradicción que resulta de suponer que $a \not\leq \bigvee A$. Se concluye que $a \leq \bigvee A$, y así $a = \bigvee A$. □

Definición 2.30. Sean $\mathbf{L}$ un álgebra Booleana y $a \in L$. Si $0 < a$ y para cada $x \in L$ tal que $0 \leq x \leq a$ necesariamente $0 = x$ o $x = a$, entonces a es llamado átomo de $\mathbf{L}$.

Las álgebras Booleanas finitas no triviales necesariamente tienen átomos y el álgebra queda determinada salvo isomorfismo por la cantidad de átomos que contiene. De ahora en adelante se denotará con $\mathbf{2}^p$ al álgebra Booleana finita con p átomos. En este caso 2^p es isomorfo al álgebra conformada por las partes de un conjunto de p elementos con las operaciones de unión, intersección y complemento entre conjuntos.

Proposición 2.31. *Si* $\mathbf{L}$ *es un álgebra Booleana, entonces los átomos de* $\mathbf{L}$ *coinciden con los elementos* $\vee$*-irreducibles de* $\mathbf{L}$.

Demostración. Sea $a \in L$ un átomo. Suponga que $a \leq x \vee y$. Como $a \wedge x \leq a$ y $a \wedge y \leq a$, se tienen las siguientes posibilidades; $a \wedge x = 0$ y $a \wedge y = 0$, o $a \wedge x = a$ o $a \wedge y = a$. En el primer caso se deduce que $a = a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y) = 0 \vee 0 = 0$, lo que contradice que a sea un átomo. Por lo tanto $a \wedge x = a$ o $a \wedge y = a$, es decir, $a \leq x$ o $a \leq y$ y por el Lema 2.28 se concluye que $a \in Irr(L)$. Ahora considere $a \in Irr(L)$. Por definición $0 < a$. Suponga que $0 \leq x \leq a$ para algún $x \in L$, entonces $a = x \vee a = (x \vee a) \wedge 1 = (x \vee a) \wedge (x \vee x') = x \vee (a \wedge x')$ y esto implica que $a = x$ o $a = a \wedge x'$. Para terminar observe que si $a = a \wedge x'$, entonces $x = x \wedge a = x \wedge (a \wedge x') = (x \wedge x') \wedge a = 0 \wedge a = 0$. De esta forma $x = a$ o $0 = x$, luego a es átomo. □

Definición 2.32. Sea $\mathbf{L}$ un álgebra Booleana finita cualquiera y $\mathbf{1}^*$ un álgebra Booleana trivial (su universo tiene un solo elemento). Llame 1^* al único elemento en $\mathbf{1}^*$ y suponga que $1^* \notin L$. Se define $\mathbf{L} \oplus \mathbf{1}^*$ como el retículo distributivo acotado $(L \cup \{1^*\}, \vee, \wedge, 0, 1^*)$ donde $\vee$ y $\wedge$ se comportan como las operaciones de $\mathbf{L}$ para los elementos de L y además $a \vee 1^* = 1^*$, $a \wedge 1^* = a$ para cualquier $a \in L$.

Sea $\mathbf{2}^q$ el álgebra Booleana finita con $q \geq 1$ átomos. Se denotara con $\mathbf{C}_q$ al retículo distributivo acotado $\mathbf{2}^q \oplus \mathbf{1}^*$. Note que $\mathbf{C}_q$ no puede ser un álgebra Booleana pues 1^* no tiene complemento. Por otro lado, resulta inmediato que $1^* \in Irr(C_q)$, pues para cualesquiera $a, b \in 2^q$, $a \vee b \leq 1 < 1^*$, donde 1 es el máximo de 2^q. Los demás $\vee$-irreducibles de $\mathbf{C}_q$ corresponden a los átomos de $\mathbf{2}^q$.

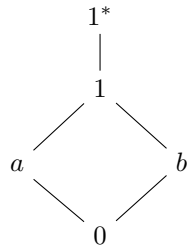

Figura 1: $\mathbf{C}_2$

Proposición 2.33. *Si* $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$ *son retículos distributivos acotados, entonces* $Irr(L_1 \times L_2) = \{(a, 0) \,|\, a \in Irr(L_1)\} \cup \{(0, b) \,|\, b \in Irr(L_2)\}$.

Demostración. Sea $a \in Irr(L_1)$ y considere el elemento $(a, 0) \in L_1 \times L_2$. Suponga que $(a, 0) = (x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$, entonces $a = x_1 \vee x_2$ y $0 = y_1 \vee y_2$. Necesariamente $y_1 = y_2 = 0$ y por hipótesis $x_1 = a$ o $x_2 = a$, es decir, $(a, 0) = (x_1, y_1)$ o $(a, 0) = (x_2, y_2)$. Por lo tanto $(a, 0) \in Irr(L_1 \times L_2)$ y $\{(a, 0) \,|\, a \in Irr(L_1)\} \subseteq Irr(L_1 \times L_2)$. De manera similar se prueba que $\{(0, b) \,|\, b \in Irr(L_2)\} \subseteq Irr(L_1 \times L_2)$. Para la otra contenencia suponga que $(a, b) \in Irr(L_1 \times L_2)$. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(a, b) = (a, 0) \vee (0, b)$, pero $(a, b) \neq (a, 0)$ y $(a, b) \neq (0, b)$, lo que resulta en una contradicción. Por consiguiente $a = 0$ ó $b = 0$. Suponga que $a = 0$, es decir, $(a, b) = (0, b)$. Si $b = y_1 \vee y_2$, entonces $(0, b) = (0, y_1) \vee (0, y_2)$ y por hipótesis $b = y_1$ o $b = y_2$. Se concluye que $b \in Irr(L_2)$. Así mismo, en el caso en que $b = 0$ se puede deducir que $a \in Irr(L_1)$. Finalmente se obtiene que $Irr(L_1 \times L_2) = \{(a, 0) \,|\, a \in Irr(L_1)\} \cup \{(0, b) \,|\, b \in Irr(L_2)\}$. $\square$

Definición 2.34. Sea $\mathbf{L}$ un retículo. Un subconjunto $F \subseteq L$ no vacío es un *filtro* de L si:

- Para todo $x, y \in F$, $x \wedge y \in F$.
- Si $x \in F$, $y \in L$ y $x \leq y$, entonces $y \in F$.

Por otro lado, un subconjunto $I \subseteq L$ no vacío es un *ideal* de L si:

- Para todo $x, y \in I$, $x \vee y \in I$.
- Si $x \in I$, $y \in L$ y $x \geq y$, entonces $y \in I$.

Si $A \subseteq L$, entonces $[A) := \bigcap\{F \subseteq L \,|\, F$ es filtro y $A \subseteq F\}$ es el filtro más pequeño que contiene a A y se le llama filtro generado por A. Similarmente, $(A] := \bigcap\{I \subseteq L \,|\, I$ es ideal y $A \subseteq I\}$ es el ideal más pequeño que contiene A. Cuando $A = \{a\}$ se escribe $[A) = [a) = \{x \in L \,|\, a \leq x\}$ y $(A] = (a] = \{x \in L \,|\, x \leq a\}$, en

este caso a $[A)$ y $(A]$ se les conoce como filtro principal e ideal principal respectivamente. Un filtro P se dice *primo* si $P \subsetneq L$ y para cualesquiera $x, y \in L$, $x \vee y \in P$ implica $x \in P$ o $y \in P$.

Observación 2.35. Se puede mostrar que si $A \neq \emptyset$, $[A) = \{x \in L \mid \bigwedge_{i=1}^{n} a_i \leq x,\, a_i \in A,\, 1 \leq i \leq n\}$ y $(A] = \{x \in L \mid x \leq \bigvee_{i=1}^{n} a_i,\, a_i \in A,\, 1 \leq i \leq n,\}$. Además, si $\mathbf{L}$ es un retículo distributivo acotado, $[\emptyset) = \{1\}$ y $(\emptyset] = \{0\}$.

Teorema 2.36. *Sea $\mathbf{L}$ un retículo distributivo finito. Si a es un elemento $\vee$-irreducible de L, entonces $[a)$ es un filtro primo de L. Recíprocamente, si P es un filtro primo de L, entonces P tiene un elemento mínimo a, el cual es $\vee$-irreducible, y además $P = [a)$.*

Demostración. Suponga que $a \in Irr(L)$, y considere el conjunto $[a)$. Si $x, y \in [a)$, entonces $a \leq x$ y $a \leq y$, por lo tanto $a \leq x \wedge y$, es decir, $x \wedge y \in [a)$. Ahora, si $x \in [a)$ y $x \leq y$, entonces $a \leq x$, por transitividad $a \leq y$ y esto implica que $y \in [a)$. Note que $0 \notin [a)$, luego $[a) \neq L$. Tome $x, y \in L$, suponga que $x \vee y \in [a)$, por definición $a \leq x \vee y$ y como consecuencia del Lema 2.28, $a \leq x$ o $a \leq y$, es decir, $x \in [a)$ o $y \in [a)$. Concluimos que $[a)$ es un filtro primo.

Recíprocamente, suponga que P es un filtro primo de L. Como P es finito, se puede considerar el elemento $a = \bigwedge P$. Claramente a es mínimo en P. Si $a = x \vee y$, entonces $x \in P$ o $y \in P$ y por minimalidad $x = a$ o $y = a$, luego a es $\vee$-irreducible. Finalmente, como P es filtro $[a) \subseteq P$, por otro lado, si $x \in P$, entonces $a \leq x$ por definición de a y $x \in [a)$. Por lo tanto $P = [a)$. □

Observación 2.37. El resultado anterior permite definir una correspondencia biunívoca para cada $\mathbf{L}$, retículo distributivo finito,

$$\theta_L : Irr(L) \to \{P \subset L \mid P \text{ es filtro primo de } L\} : a \mapsto [a).$$

El *Teorema del Filtro Primo* resulta una herramienta indispensable en la comprobaciones que se harán más adelante.

Teorema 2.38. *[4]. Sea $\mathbf{L}$ un retículo distributivo, $F \subset L$ un filtro y $I \subset L$ un ideal, si $F \cap I = \emptyset$ entonces existe un filtro primo P de L que contiene a F tal que $P \cap I = \emptyset$.*

Definición 2.39. Sea $\mathbf{L}$ un retículo distributivo acotado. Un *cuantificador* en L es una operación unaria (o de aridad 1) $\triangledown$ tal que $(L, \vee, \wedge, \triangledown, 0, 1)$ satisface las identidades:

- $\triangledown 0 \approx 0$.
- $x \wedge \triangledown x \approx x$.
- $\triangledown(x \wedge \triangledown y) \approx \triangledown x \wedge \triangledown y$.
- $\triangledown(x \vee y) \approx \triangledown x \vee \triangledown y$.

Bajo esas condiciones se dice que $(L, \vee, \wedge, \triangledown, 0, 1)$ es un *Q-retículo distributivo*. Si además $\mathbf{L}$ es álgebra Booleana, entonces $(L, \vee, \wedge, ', \triangledown, 0, 1)$ es llamada *álgebra Booleana monádica*.

Observación 2.40. Como consecuencia del Teorema de Birkhoff todas las clases de retículos previamente definidas forman variedades. En particular, la clase de Q-retículos distributivos es una variedad.

Ejemplo 2.41. Si **L** retículo acotado, existen dos cuantificadores especiales que se pueden definir en L:

- *Cuantificador Discreto*: Dado por la formula $\nabla a = a$ para todo $a \in L$.
- *Cuantificador Simple*: Si $a = 0$, entonces $\nabla a = 0$, en otro caso $\nabla a = 1$.

Nota 2.42. Si $(L, \vee, \wedge, \nabla, 0, 1)$ es un Q-retículo distributivo, en los casos en que no haya ambigüedad sobre cuáles son las operaciones se denotara al álgebra simplemente con L o con (L, ∇) cuando se quiera especificar el cuantificador.

En este punto se revisan algunas propiedades de los cuantificadores que serán de utilidad más adelante.

Proposición 2.43. *Sea (L, ∇) un Q-retículo distributivo. Considere la función $\nabla : L \to L : a \mapsto \nabla a$ y llame $\nabla(L)$ a la imagen de ∇, entonces:*

1. *Para todo $b \in \nabla(L)$, $b = \nabla b$.*
2. *$\nabla(L)$ es subuniverso de L.*
3. *Si $a \in A$, $b \in \nabla(L)$, $a \leq b \Rightarrow \nabla a \leq b$.*

Demostración. *1.* Sea $b \in \nabla(L)$. Primero observe que $b = \nabla b \wedge b$. Por definición, existe $a \in L$ tal que $\nabla a = b$, como resultado $b = \nabla b \wedge b = \nabla(\nabla a) \wedge \nabla a = \nabla(\nabla a \wedge \nabla a) = \nabla(\nabla a) = \nabla b$.

2. Como $\nabla 0 = 0$ y $\nabla 1 = 1 \wedge \nabla 1 = 1$, se deduce que $0, 1 \in \nabla(L)$. Sean $a, b \in \nabla(L)$, entonces $\nabla(a \vee b) = \nabla(a) \vee \nabla(b) = a \vee b$, es decir, $a \vee b \in \nabla(L)$. Por otro lado, $\nabla(a \wedge \nabla b) = \nabla a \wedge \nabla b = a \wedge b$, luego $a \wedge b \in \nabla(L)$. Por último, es claro que $\nabla a \in \nabla(L)$.

3. Suponga que $a \leq b$. Se tiene que $\nabla a \wedge b = \nabla a \wedge \nabla b = \nabla(a \wedge \nabla b) = \nabla(a \wedge b) = \nabla(a)$. En resumen $\nabla a \leq b$. □

Definición 2.44. Sean $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$ dos retículos distributivos acotados. Un homomorfismo entre ellos es una función $h : L_1 \to L_2$ tal que para todo par de elementos $a, b \in L$:

- $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$ y $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$.
- $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$.

Si además L_1 y L_2 están dotados de cuantificadores ∇_1, ∇_2 respectivamente, decimos que h es homomorfismo entre Q-retículos distributivos si también se cumple:

- $h(\nabla_1 a) = \nabla_2 h(a)$.

2.3. Topología y Orden

A continuación se encuentran las definiciones que describen a los objetos duales de los retículos distributivos acotados y algunos resultados relevantes.

Definición 2.45. Sea $(X, \leq)$ un poset, y $D \subseteq X$. D es un conjunto *creciente* (*decreciente*) si para cada $x \in D$, $x \leq y$ ($y \leq x$) implica $y \in D$.

Definición 2.46. Sea $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Se define la relación $\leq_*$ sobre X de este modo; para todo $x, y \in X$, $x \leq_* y \iff y \leq x$. $(X, \leq_*)$ resulta ser un poset y a $\leq_*$ se le llama *orden dual* de $\leq$.

Definición 2.47. Sean $(X_1, \leq_1)$ y $(X_2, \leq_2)$ posets y $f : X_1 \to X_2$. Se dice que f es una *inmersión de orden* si $a \leq_1 b \iff f(a) \leq_2 f(b)$. Además, una inmersión de orden sobreyectiva f se denomina *isomorfismo de orden.*

Definición 2.48. Un *espacio topológico ordenado* es una tripla $(X, \tau, \leq)$ tal que (X, τ) es un espacio topológico y $(X, \leq)$ es un poset. Se dice que $(X, \tau, \leq)$ es *totalmente orden-disconexo* si dados $x, y \in X$ tales que $x \not\leq y$ existe $U \in \tau$ clopen (abierto y cerrado a la vez) creciente tal que $x \in U$ pero $y \notin U$. Un *espacio de Priestley* es un espacio topológico ordenado totalmente orden-disconexo y compacto.

Nota 2.49. De ahora en adelante nos referimos a un espacio de Priestley $(X, \tau, \leq)$ simplemente por X siempre que no haya duda sobre cuales son el orden y la topología del espacio.

Definición 2.50. Un *espacio de Stone* es un espacio topológico (X, τ) Hausdorff, compacto y totalmente disconexo.

Proposición 2.51. *Si $(X, \tau, \leq)$ es un espacio de Priestley, entonces (X, τ) es Hausdorff y totalmente disconexo.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad suponga que $x \not\leq y$. Como $(X, \tau, \leq)$ es totalmente orden-disconexo, existen $U \in \tau$ clopen creciente tal que $x \in U$ pero $y \notin U$. Por consiguiente $y \in X \setminus U$ abierto y $U \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Además, para cualquier $A \subseteq X$ tal que $x, y \in A$, $A \cap U$ y $A \cap (X \setminus U)$ conforman una disconexión de A. Por lo tanto las componentes conexas de X son singletons. Todo lo anterior garantiza que (X, τ) es Hausdorff y totalmente disconexo. □

Observación 2.52. Un espacio de Priestley donde $x \leq y$ si y solo si $x = y$, no es más que un espacio de Stone y si un espacio de Priestley es finito, por ser Hausdorff su topología necesariamente es la discreta.

Definición 2.53. Sea $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Su *suma topológica* es el espacio topológico $(\coprod_{i \in I} X_i, \tau)$, donde $\coprod_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} \{(x, i) \mid x \in X_i\}$ es la unión disjunta de conjuntos y τ es la topología más fina sobre $\coprod_{i \in I} X_i$ que hace continuas a las funciones $\mu_i : X_i \to \coprod_{i \in I} X_i : x \mapsto (x, i)$.

Observación 2.54. Se puede expresar explícitamente al τ de la definición anterior de la siguiente forma

$$\tau = \{A \subseteq \coprod_{i \in I} X_i \mid \mu_i^{-1}(A) \in \tau_i, i \in I\} = \{A \subseteq \coprod_{i \in I} X_i \mid A = \bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\}) \text{ donde } A_i \in \tau_i, i \in I\}.$$

El Teorema de la Subbase de Alexander es útil para comprobar la dualidad de Priestley.

Teorema 2.55. *(Alexander). Sea (X, τ) un espacio topológico con subbase $\mathcal{B}$. Si para cada cubrimiento abierto $\mathcal{D} = \{B_i \mid i \in I\}$ de X por elementos de $\mathcal{B}$ existe un subcubrimiento finito $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_n}\}$, entonces X es compacto.*

Demostración. Suponga buscando una contradicción que X no es compacto. Considere la familia

$$\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ es un cubrimiento abierto de } X \text{ que no tiene un subcubrimiento finito}\}.$$

Esta familia es no vacía y está ordenada por la inclusión, además cada cadena tiene una cota superior (la unión de todos los cubrimientos en la cadena). Usando Lema de Zorn se puede concluir que existe un cubrimiento abierto maximal $\mathcal{C}$ en la familia. Considere la colección $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}$, note que esta colección no puede ser un cubrimiento abierto de X pues por la hipótesis del teorema sería posible hallar un subcubrimiento finito de X contenido en $\mathcal{C}$. Sea $x \in X \setminus (\bigcup \mathcal{C} \cap \mathcal{B})$. Ya que $\mathcal{C}$ es un cubrimiento abierto de X, existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $x \in A$ y como $\mathcal{B}$ es subbase, existen $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{B}$ tales que $x \in \bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq A$. Si $B_i \in \mathcal{C}$ para algún $1 \leq i \leq n$, se tendría que $B_i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{B}$ y $x \in \bigcup \mathcal{C} \cap \mathcal{B}$, lo cuál es falso. De aquí que $B_i \notin \mathcal{C}$ para todo $i \in \{1, \ldots n\}$. Ahora considere los cubrimientos abiertos $\mathcal{C} \cup \{B_i\}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Por maximalidad de $\mathcal{C}$ existen $\{C_1^i, \ldots, C_{k_i}^i\} \cup \{B_i\} \subset \mathcal{C} \cup \{B_i\}$ subcubrimientos finitos para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. A partir de estos subcubrimientos se construye el cubrimiento finito $(\bigcup_{i=1}^n \{C_1^i, \ldots, C_{k_i}^i\}) \cup \{\bigcap_{i=1}^n B_i\}$ y usando que $\bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq A$ se obtiene que $(\bigcup_{i=1}^n \{C_1^i, \ldots, C_{k_i}^i\}) \cup \{A\} \subset \mathcal{C}$ es un subcubrimiento finito lo cuál es una contradicción. Se concluye que X es compacto. $\square$

2.4. Categorías

La dualidad es un concepto que se expresa a través de la Teoría de Categorías. En este espacio se expondrán algunos conceptos básicos de esa teoría y ejemplos con espacios de Priestley y clases de álgebras.

Definición 2.56. Una *categoría* $\mathscr{C}$ esta conformada por una clase $Obj(\mathscr{C})$, conjuntos $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ para cada par de elementos $X, Y \in Obj(\mathscr{C})$ disjuntos dos a dos, y una ley de composición parcialmente definida. A la clase $Obj(\mathscr{C})$ se le denomina como los *objetos* de la categoría y $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ es llamado el conjunto de los *morfismos* del objeto X en el objeto Y.

La ley de composición es tal que para cualesquiera $X, Y, Z, W \in Obj(\mathscr{C})$

1. Si $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ y $g \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, Z)$ entonces $g \circ f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Z)$.
2. Existe $i_X \in Hom_{\mathscr{C}}(X, X)$ tal que si $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ entonces $f \circ i_X = f$ y si $g \in Hom_{\mathscr{C}}(Z, X)$ entonces $i_X \circ g = g$.
3. Si $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, Z)$ y $h \in Hom_{\mathscr{C}}(Z, W)$, entonces $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Ejemplo 2.57. Se denota con $\mathscr{L}$ a la categoría de los retículos distributivos acotados y sus homomorfismos y con $\mathscr{T}$ a la categoría de los espacios de Priestley y las funciones continuas que preservan el orden.

Dada una categoría $\mathscr{C}$ se puede construir su *categoría opuesta* $\mathscr{C}^{op}$ tomando los mismos objetos de $\mathscr{C}$ pero reversando la dirección de los morfismos, es decir, si $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$, entonces se asocia biunívocamente el morfismo $f^{op} \in Hom_{\mathscr{C}^{op}}(Y, X)$. En esta categoría la composición de morfismos viene dada por la fórmula $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$.

Definición 2.58. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Una función $\mathcal{F}$ de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$ es un *funtor (covariante)* si envía objetos de $\mathscr{C}$ en objetos de $\mathscr{D}$ y morfismos de $\mathscr{C}$ en morfismos de $\mathscr{D}$. Además para $X, Y \in Obj(\mathscr{C})$, si $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$, entonces $\mathcal{F}(f) \in Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$. Por último se pide que $\mathcal{F}$ respete composición de morfismos e identidades. Gráficamente esto se representa por

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{F}(X) \arrow[dl, "\mathcal{F}(f)"'] \arrow[dr, "\mathcal{F}(g)\circ\mathcal{F}(f)"] & \\
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr] \arrow[rr, bend left] & \mathcal{F}(Y) \arrow[rr, "\mathcal{F}(g)"'] & & \mathcal{F}(Z) \\
Y \arrow[urr, "g\circ f"] \arrow[rr, "g"'] & & Z \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, se dice que $\mathcal{F}$ es un *funtor contravariante* si se satisfacen las condiciones anteriores con la diferencia que para $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$, se tiene que $\mathcal{F}(f) \in Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}(Y),\mathcal{F}(X))$. En este caso $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$. También se puede ver a $\mathcal{F}$ como un funtor covariante de la categoría $\mathscr{C}^{op}$ y a la categoría $\mathscr{D}$, o equivalentemente un funtor de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}^{op}$.

Sea $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Si para cualquier par $X, Y \in Obj(\mathscr{C})$ la función $Hom_{\mathscr{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y))$ definida por el funtor resulta inyectiva (sobreyectiva) entonces a $\mathcal{F}$ se le conoce como un *funtor fiel (pleno)*.

Ejemplo 2.59. Para cada categoría $\mathscr{C}$ se define el *funtor identidad* $Id_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, que envía a los objetos y a los morfismos en sí mismos.

Observación 2.60. Es posible componer funtores. Si $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $\mathcal{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$, se define $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ como el funtor que a cada objeto $X \in Obj(\mathscr{C})$ lo envía en $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(X) := \mathcal{F}(\mathcal{G}(X)) \in Obj(\mathscr{E})$ y a cada morfismo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ lo envía en $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(f) := \mathcal{F}(\mathcal{G}(f)) \in Hom_{\mathscr{E}}(\mathcal{F}(\mathcal{G}(X)),\mathcal{F}(\mathcal{G}(Y)))$. Se usará la notación $\mathcal{F}\mathcal{G}(X)$ o $\mathcal{F}\mathcal{G}(f)$ para disminuir el uso de paréntesis cuando se haga composición de funtores. Note que la composición de dos funtores contravariantes resulta ser un funtor covariante.

Definición 2.61. Se dice que $\mathscr{S}$ es una *subcategoría* de una categoría $\mathscr{C}$ si $\mathscr{S}$ es a su vez una categoría y los objetos y morfismos de $\mathscr{S}$ se encuentran entre los objetos y morfismos de $\mathscr{C}$ respectivamente. En este caso se puede definir un funtor inclusión $\mathcal{I} : \mathscr{S} \to \mathscr{C}$ que envía objetos y morfismos en sí mismos. Si el funtor inclusión es pleno, a la subcategoría se le llama *plena*.

Definición 2.62. Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $X, Y \in Obj(\mathscr{C})$ y $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$. Se dice que f es un *isomorfismo* si existe $f^{-1} \in Hom_{\mathscr{C}}(Y,X)$ tal que $f \circ f^{-1} = i_Y$, $f^{-1} \circ f = i_X$. En ese caso se dice que X y Y son isomorfos y se denota con $X \cong Y$.

Observación 2.63. Si f es un isomorfismo de $\mathscr{C}$, f^{-1} es único. Adicionalmente, si $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor, entonces $\mathcal{F}(f)$ es un isomorfismo de $\mathscr{D}$ y $\mathcal{F}(f^{-1}) = \mathcal{F}(f)^{-1}$. Aún más, si f, g son isomorfismos y $f \circ g$ está definida, entonces $f \circ g$ es isomorfismo y $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Ejemplo 2.64. Si $\mathscr{C}$ es una categoría cuyos objetos son una clase de álgebras del mismo tipo y sus morfismos son todos los homomorfismos entre las álgebras de la clase, entonces los isomorfismos de la categoría corresponden a los homomorfismos biyectivos. Para la categoría $\mathscr{T}$ de los espacios de Priestley, la noción de isomorfismo coincide con la de homeomorfismo e isomorfismo de orden.

Definición 2.65. Sean $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ un par de categorías y $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores. Se dice que $\alpha : \mathcal{F} \dot{\to} \mathcal{G}$ es una *transformación natural* si $\alpha = (\alpha_Z)_{Z \in Obj(\mathscr{C})}$ con $\alpha_Z \in Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}(Z),\mathcal{G}(Z))$ y para cualesquiera $X, Y \in Obj(\mathscr{C})$, $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\
\mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & \mathcal{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

es decir, $\mathcal{G}(f) \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ \mathcal{F}(f)$. En caso que cada α_Z sea un isomorfismo en la categoría $\mathscr{D}$, se dice que α es un *isomorfismo natural* y se denota $\alpha : \mathcal{F} \cong \mathcal{G}$.

Observación 2.66. Es posible componer transformaciones naturales. Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ son funtores y $\alpha : \mathcal{F} \dot{\to} \mathcal{G}$, $\beta : \mathcal{G} \dot{\to} \mathcal{H}$ son transformaciones naturales, entonces $\beta \circ \alpha : \mathcal{F} \dot{\to} \mathcal{H}$ es la transformación natural determinada por las componentes $(\beta_Z \circ \alpha_Z)_{Z \in Obj(\mathscr{C})}$. La conmutatividad del diagrama correspondiente se sigue inmediatamente de la conmutatividad de los rectángulos que lo componen. Además, composición de isomorfismos naturales resulta nuevamente un isomorfismo natural. También se puede mostrar que si α es un isomorfismo natural, entonces $\alpha^{-1} := (\alpha_Z^{-1})_{Z \in Obj(\mathscr{C})}$ es a su vez un isomorfismo natural.

Definición 2.67. Sean $\mathscr{C} \underset{\mathcal{G}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ un par de funtores (contravariantes). Se dice que $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ son categorías *(dualmente) equivalentes* si existen isomorfismos naturales $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \cong Id_{\mathscr{D}}$, $Id_{\mathscr{C}} \cong \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$.

Observación 2.68. Si $\mathscr{C} \underset{\mathcal{G}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$, $\epsilon : \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \cong Id_{\mathscr{D}}$, $\eta : Id_{\mathscr{C}} \cong \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ es una equivalencia de categorías, inmediatamente $\mathscr{D} \underset{\mathcal{F}}{\overset{\mathcal{G}}{\rightleftarrows}} \mathscr{C}$ con los isomorfismos naturales $\eta^{-1} : \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \cong Id_{\mathscr{C}}$, $\epsilon^{-1} : Id_{\mathscr{D}} \cong \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ también es una equivalencia de categorías.

Teorema 2.69. *Si* $\mathscr{C} \underset{\mathcal{G}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ *es una equivalencia de categorías, entonces los funtores* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{G}$ *son fieles y plenos.*

Demostración. Sean $X, Y \in Obj(\mathscr{C})$ y considere $f_1, f_2 \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$. Llame η al isomorfismo natural entre $Id_{\mathscr{C}}$ y $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$. Suponga que $\mathcal{F}(f_1) = \mathcal{F}(f_2)$, entonces $\mathcal{G}\mathcal{F}(f_1) = \mathcal{G}\mathcal{F}(f_2)$. Por hipótesis los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}\mathcal{F}(f_1)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f_2"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}\mathcal{F}(f_2)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}(Y) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto

$$f_1 = \eta_Y^{-1} \circ \mathcal{G}\mathcal{F}(f_1) \circ \eta_X = \eta_Y^{-1} \circ \mathcal{G}\mathcal{F}(f_2) \circ \eta_X = f_2.$$

Se concluye que $\mathcal{F}$ es fiel. De manera similar se puede probar que $\mathcal{G}$ es fiel. Para mostrar que $\mathcal{F}$ es pleno considere $g \in Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$, entonces $\mathcal{G}(g) \in Hom_{\mathscr{C}}(\mathcal{G}\mathcal{F}(X), \mathcal{G}\mathcal{F}(Y))$ y se puede construir el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}(g)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}(Y) \end{tikzcd}$$

donde $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$. Para que el diagrama conmute es necesario que $f = \eta_Y^{-1} \circ \mathcal{G}(g) \circ \eta_X$, por lo tanto se define a f de esa forma. Note que $\mathcal{G}\mathcal{F}(f) = \mathcal{G}\mathcal{F}(\eta_Y)^{-1} \circ \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}\mathcal{F}(\eta_X)$. Se puede extender el diagrama anterior aplicando el funtor $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ al morfismo $\mathcal{G}(g)$ y usando nuevamente el isomorfismo natural

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{G}\mathcal{F}(X)}"] \arrow[d, "\mathcal{G}(g)"] & \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}(g)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{G}\mathcal{F}(Y)}"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}(Y) \end{tikzcd}$$

La conmutatividad del rectángulo derecho implica que $\mathcal{G}(g) = \eta^{-1}_{\mathcal{GF}(Y)} \circ \mathcal{GFG}(g) \circ \eta_{\mathcal{GF}(X)}$. Ahora observe la siguiente propiedad; si $Z \in Ob(\mathscr{C})$, haciendo uso una vez más del isomorfismo natural se puede concluir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\eta_Z"] \arrow[d, "\eta_Z"'] & \mathcal{GF}(Z) \arrow[d, "\mathcal{GF}(\eta_Z)"] \\ \mathcal{GF}(Z) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{GF}(Z)}"'] & \mathcal{GFGF}(Z) \end{tikzcd}$$

De esto se deduce que $\mathcal{GF}(\eta_Z) = \eta_{\mathcal{GF}(Z)}$ para cualquier $Z \in Obj(\mathscr{C})$. Con todo lo anterior se concluye que

$$\mathcal{GF}(f) = \mathcal{GF}(\eta_Y)^{-1} \circ \mathcal{GFG}(g) \circ \mathcal{GF}(\eta_X) = \eta^{-1}_{\mathcal{GF}(Y)} \circ \mathcal{GFG}(g) \circ \eta_{\mathcal{GF}(X)} = \mathcal{G}(g).$$

De aquí se llega a $\mathcal{F}(f) = g$, pues $\mathcal{G}$ es un funtor fiel. Por consiguiente $\mathcal{F}$ es un funtor pleno. De manera similar se prueba que $\mathcal{G}$ es pleno. □

Definición 2.70. Sea $\{X_i \mid i \in I\}$ una familia de objetos de una categoría $\mathscr{C}$. Se dice que $\prod_{i\in I} X_i \in Obj(\mathscr{C})$ equipado con morfismos $\{\pi_i \mid i \in I\}$, donde $\pi_i \in Hom_{\mathscr{C}}(\prod_{i\in I} X_i, X_i)$ es el *producto* de la familia si para todo $Y \in Obj(\mathscr{C})$ y morfismos $\{g_i \mid i \in I\}$ con $g_i \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, X_i)$ existe un único morfismo $h \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, \prod_{i\in I} X_i)$ tal que para cualquier $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ \prod_{i\in I} X_i \arrow[r, "\pi_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.71. Sea $\mathscr{C}$ una categoría cuyos objetos son las álgebras de una variedad $\mathcal{V}$ y sus morfismos son los homomorfismos entre dichas álgebras. El producto en el sentido de Teoría de Categorías de la familia $\{\mathbf{A}_i \mid i \in I\}$ coincide con la noción de producto directo como ha sido definida en Álgebra Universal. En efecto, considere las funciones

$$\pi_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i : (a_i)_{i\in I} \mapsto a_i.$$

Para probar que π_i es un homomorfismo de álgebras tome $f \in \mathfrak{F}$ de aridad n, $(a_1^i)_{i\in I}, \ldots, (a_n^i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ y llame $\mathbf{B} = \prod_{i\in I} \mathbf{A_i}$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_i(f^{\mathbf{B}}((a_1^i)_{i\in I}, \ldots, (a_n^i)_{i\in I})) &= \pi_i((f^{\mathbf{A_i}}(a_1^i, \ldots, a_n^i))_{i\in I}) \\ &= f^{\mathbf{A_i}}(a_1^i, \ldots, a_n^i) \\ &= f^{\mathbf{A_i}}(\pi_i((a_1^i)_{i\in I}), \ldots, \pi_i((a_n^i)_{i\in I})). \end{aligned}$$

Ahora, si $\mathbf{C} \in \mathcal{V}$ y $\{g_i : C \to A_i \mid i \in I\}$ es una familia de homomorfismos se define

$$h : C \to \prod_{i\in I} A_i : a \mapsto (g_i(a))_{i\in I}.$$

Nuevamente tome $f \in \mathfrak{F}$ de aridad n y $a_1, \ldots, a_n \in C$, de esta forma

$$\begin{aligned} h(f^{\mathbf{C}}(a_1, \ldots, a_n)) &= (g_i(f^{\mathbf{C}}(a_1, \ldots, a_n)))_{i \in I} \\ &= (f^{\mathbf{A_i}}(g_i(a_1), \ldots, g_i(a_n)))_{i \in I} \\ &= f^{\mathbf{B}}((g_i(a_1))_{i \in I}, \ldots, (g_i(a_n))_{i \in I}) \\ &= f^{\mathbf{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)). \end{aligned}$$

Por lo tanto h también es homomorfismo de álgebras y se sigue de su definición que $g_i = \pi_i \circ h$ para todo $i \in I$. Observe que h es el único homomorfismo con esta propiedad.

Lema 2.72. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $\{X_i \,|\, i \in I\}$ una familia de objetos en ella. Si existe el producto de la familia entonces este es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Suponga que $\prod_{i \in I} X_i$ equipado con morfismos adecuados $\{\pi_i \,|\, i \in I\}$ es un producto de la familia $\{X_i \,|\, i \in I\}$. Si existe otro $P \in Obj(\mathscr{C})$ con morfismos $\{\pi'_i \,|\, i \in I\}$ donde $\pi'_i \in Hom_{\mathscr{C}}(P, X_i)$ que también satisface las condiciones para ser producto, es posible construir el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\pi'_i"] & \\ \prod_{i \in I} X_i \arrow[r, "\pi_i"'] \arrow[d, "h'"'] & X_i \\ P \arrow[ur, "\pi'_i"'] & \end{tikzcd}$$

donde h y h' son los únicos morfismos con la propiedad $\pi'_i = \pi_i \circ h$ y $\pi_i = \pi'_i \circ h'$ respectivamente. Note que $\pi'_i = \pi'_i \circ (h' \circ h) = \pi'_i \circ i_P$, entonces el siguiente diagrama conmuta para ambos morfismos:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, shift right, "h' \circ h"'] \arrow[d, shift left, "i_P"] \arrow[dr, "\pi'_i"] & \\ P \arrow[r, "\pi'_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

Por hipótesis P es producto, por lo tanto $h' \circ h = i_P$. De forma similar se muestra que $h \circ h' = i_{\prod_{i \in I} X_i}$ y con esto se asegura que P y $\prod_{i \in I} X_i$ son isomorfos. $\square$

Teorema 2.73. *Sea $\mathscr{C} \underset{\mathcal{G}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ una equivalencia de categorías donde $\eta : Id_{\mathscr{C}} \cong \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, $\epsilon : \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \cong Id_{\mathscr{D}}$ son los isomorfismos naturales asociados. Si $\{Z_i \,|\, i \in I\}$ es una familia de objetos en $\mathscr{D}$ y $\prod_{i \in I} Z_i$ equipado con los morfismos $\{\pi_i \,|\, i \in I\}$ donde $\pi_i \in Hom_{\mathscr{D}}(\prod_{\imath \in I} Z_i, Z_i)$ es el producto de la familia, entonces*

$$\mathcal{G}\left(\prod_{i \in I} Z_i\right) \cong \prod_{i \in I} \mathcal{G}(Z_i).$$

Demostración. Para simplificar un poco la notación llame $P = \prod_{i \in I} Z_i \in Obj(\mathscr{D})$. La idea es mostrar que $\mathcal{G}(P)$ equipado con los morfismos $\{\mathcal{G}(\pi_i) \,|\, i \in I\}$ donde $\mathcal{G}(\pi_i) \in Hom_{\mathscr{C}}(\mathcal{G}(P), \mathcal{G}(Z_i))$ es producto de la familia $\{\mathcal{G}(Z_i) \,|\, i \in I\}$ para luego utilizar la unicidad del producto. Sean $Y \in Obj(\mathscr{C})$ y $\{g_i \,|\, i \in I\}$ donde $g_i \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, \mathcal{G}(Z_i))$. Note que $\{\eta_{Z_i}^{-1} \circ \mathcal{F}(g_i) \,|\, i \in I\}$ es una familia de morfismos que van respectivamente de

$\mathcal{F}(Y)$ a Z_i. Por la definición del producto existe un único $d \in Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}(Y), P)$ tal que $\eta_{Z_i}^{-1} \circ \mathcal{F}(g_i) = \pi_i \circ d$, es decir, $\mathcal{F}(g_i) = \eta_{Z_i} \circ \pi_i \circ d$ para cada $i \in I$. El siguiente diagrama describe la situación:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(Y) \arrow[dr, "\eta_P \circ d"] \arrow[drr, bend left, "\mathcal{F}(g_i)"] \arrow[ddr, bend right, "d"'] & & \\
& \mathcal{F}\mathcal{G}(P) \arrow[r, "\mathcal{F}\mathcal{G}(\pi_i)"] & \mathcal{F}\mathcal{G}(Z_i) \arrow[d, "\eta_{Z_i}^{-1}"] \\
& P \arrow[u, "\eta_P"] \arrow[r, "\pi_i"'] & Z_i
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{F}$ es un funtor fiel y pleno, existe un único $h \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, \mathcal{G}(P))$ tal que $\mathcal{F}(h) = \eta_P \circ d$. Por hipótesis η es transformación natural y por ende $\mathcal{F}\mathcal{G}(\pi_i) \circ \eta_p = \eta_{Z_i} \circ \pi_i$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{G}(\pi_i) \circ h) &= \mathcal{F}\mathcal{G}(\pi_i) \circ \mathcal{F}(h) \\
&= \mathcal{F}\mathcal{G}(\pi_i) \circ \eta_P \circ d \\
&= \eta_{Z_i} \circ \pi_i \circ d \\
&= \mathcal{F}(g_i).
\end{aligned}$$

Nuevamente, como $\mathcal{F}$ es un funtor fiel, $g_i = \mathcal{G}(\pi_i) \circ h$ para todo $i \in I$. Para verificar que h es único para esta propiedad considere h' tal que $g_i = \mathcal{G}(\pi_i) \circ h'$, así

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g_i) = \mathcal{F}\mathcal{G}(\pi_i) \circ \mathcal{F}(h') \quad &\Rightarrow \quad \eta_{Z_i}^{-1} \circ \mathcal{F}(g_i) = \eta_{Z_i}^{-1} \circ \mathcal{F}\mathcal{G}(\pi_i) \circ \mathcal{F}(h') \\
&\Rightarrow \quad \pi_i \circ d = \pi_i \circ \eta_P^{-1} \circ \mathcal{F}(h') \\
&\Rightarrow \quad d = \eta_P^{-1} \circ \mathcal{F}(h') \\
&\Rightarrow \quad \eta_P \circ d = \mathcal{F}(h') \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(h') \\
&\Rightarrow \quad h = h'.
\end{aligned}$$

Observe que en la tercera implicación se hace uso de la unicidad de d. □

Definición 2.74. Sea $\{X_i \mid i \in I\}$ una familia de objetos de una categoría $\mathscr{C}$. Se dice que $\coprod_{i \in I} X_i \in Obj(\mathscr{C})$ equipado con morfismos $\{\mu_i \mid i \in I\}$, donde $\mu_i \in Hom_{\mathscr{C}}(X_i, \coprod_{i \in I} X_i)$ es el *coproducto* de la familia, si $\coprod_{i \in I} X_i$ y $\{\mu_i^{op} \mid i \in I\}$ forman el producto para $\{X_i \mid i \in I\}$ en la categoría $\mathscr{C}^{op}$. Es decir, si para todo $Y \in Obj(\mathscr{C})$ y morfismos $\{f_i \mid i \in I\}$ con $f_i \in Hom_{\mathscr{C}}(X_i, Y)$ existe un único morfismo $d \in Hom_{\mathscr{C}}(\coprod_{i \in I} X_i, Y)$ tal que para cualquier $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Y & \\
\coprod_{i \in I} X_i \arrow[u, "d"] & X_i \arrow[l, "\mu_i"] \arrow[ul, "f_i"']
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.75. Sea $\{(X_i, \tau_i, \leq_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ una familia finita de objetos en $\mathscr{T}$ la categoría de los espacios de Priestley y las funciones continuas que preservan el orden. Considere la suma topológica $(\coprod_{i=1}^{n} X_i, \tau)$ de

la familia $\{(X_i, \tau_i) \,|\, 1 \leq i \leq n\}$. Se define un relación de orden sobre $\coprod_{i=1}^n X_i$ de la siguiente forma

$$(x, i) \leq (y, j) \iff i = j \text{ y } x \leq_i y.$$

Con estas definiciones se va a mostrar que $(\coprod_{i=1}^n X_i, \tau, \leq)$ equipado con los morfismos $\mu_i : X_i \to \coprod_{i=1}^n X_i : x \mapsto (x, i)$ es el coproducto de la familia. Lo primero sera verificar que $\coprod_{i=1}^n X_i \in Obj(\mathscr{T})$; para eso tome $(x, i), (y, j) \in \coprod_{i=1}^n X_i$ tales que $(x, i) \not\leq (y, j)$, por definición $i \neq j$ ó $i = j$ pero $x \not\leq_i y$. En el primer caso considere el abierto $X_i \times \{i\} \in \tau$ y note que se trata de un clopen creciente tal que $(x, i) \in X_i \times \{i\}$ pero $(y, j) \notin X_i \times \{i\}$. En el otro caso, como X_i es espacio de Priestley, existe $U_i \in \tau_i$ clopen creciente tal que $x \in U_i$ pero $y \notin U_i$. De esta forma se puede comprobar que $U_i \times \{i\} \in \tau$ es clopen creciente y claramente $(x, i) \in U_i \times \{i\}$ pero $(y, j) \notin U_i \times \{i\}$. Ahora, considere $\{B_j \,|\, j \in J\}$ un cubrimiento abierto de $\coprod_{i=1}^n X_i$. Como $\{\mu_i^{-1}(B_j) \,|\, j \in J\}$ es un cubrimiento abierto de X_i y X_i es compacto, existe un subcubrimiento finito $\{\mu_i^{-1}(B_{i_1}), \ldots, \mu_i^{-1}(B_{i_{k_i}})\}$ de X_i donde $\{i_1, \ldots, i_{k_i}\} \subseteq J$. Se sigue que $X_i \times \{i\} \subseteq B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_{k_i}}$ para cada $1 \leq i \leq n$, entonces $\bigcup_{i=1}^n \{B_{i_1} \ldots B_{i_{k_i}}\} \subseteq \{B_j \,|\, j \in J\}$ es un subcubrimiento finito de $\coprod_{i=1}^n X_i$. Lo anterior confirma que $\coprod_{i=1}^n X_i$ es un espacio de Priestley. Por definición cada μ_i es una función continua, además si $x, y \in X_i$ y $x \leq_i y$, entonces $\mu_i(x) = (x, i) \leq (y, i) = \mu_i(y)$, lo que quiere decir que μ_i preserva el orden.

Sean $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ espacio de Priestley y $\{f_i : X_i \to Y \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ funciones continuas que preservan el orden. Defina $d : \coprod_{i=1}^n X_i \to Y : (x, i) \mapsto f_i(x)$. Claramente $f_i = d \circ \mu_i$, además $(x, i) \leq (y, i)$ implica $x \leq_i y$ y así $f_i(x) \leq_Y f_i(y)$. Si $A \in \tau_Y$, entonces

$$d^{-1}(A) = \{(x, i) \in \coprod_{i=1}^n X_i \,|\, f_i(x) \in A\} = \{(x, i) \in \coprod_{i=1}^n X_i \,|\, x \in f_i^{-1}(A)\} = \bigcup_{i=1}^n (f_i^{-1}(A) \times \{i\})$$

de aquí que $d^{-1}(A) \in \tau$, es decir, d es continua. Por definición d es la única función que satisface $f_i = d \circ \mu_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Finalmente se ha comprobado que $\coprod_{i=1}^n X_i$ es el coproducto de la familia $\{X_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ en la categoría $\mathscr{T}$.

3. Dualidad

En la década de los treintas Stone [23] desarrolla uno de los primeros ejemplos no triviales de equivalencia entre categorías al establecer una correspondencia entre álgebras de Boole y ciertos espacios topológicos que en adelante recibirían el nombre de espacios de Stone. A un álgebra Booleana se le asignaba el espacio de los homomorfismos del álgebra en **2**, mientras que a un espacio de Stone le correspondía el subretículo de clopens de su conjunto de partes. Esta primera equivalencia abrió las puertas a un gran número de generalizaciones que se expresan a través de dualidades entre categorías de estructuras algebraicas y categorías de espacios topológicos. En esta sección se expondrán tres dualidades diferentes cada una construida a partir de la anterior.

3.1. Dualidad de Priestley

Para el caso de los retículos distributivos acotados, Stone [24] construye una dualidad por medio de los llamados espacios bitopológicos (espacios dotados de dos topologías). Priestley [21] muestra que es posible obtener una dualidad para retículos distributivos acotados análoga a la establecida por Stone para las álgebras de Boole por medio de espacios topológicos ordenados, en particular, Priestley muestra que $\mathscr{L}$ y $\mathscr{T}$ son categorías dualmente equivalentes por medio de los siguientes funtores contravariantes:

$$\mathcal{X} : \mathscr{L} \to \mathscr{T}$$
$$\mathcal{D} : \mathscr{T} \to \mathscr{L}$$

Estos funtores están definidos en objetos de la siguiente forma. Para $(L, \vee, \wedge, 0, 1) \in Obj(\mathscr{L})$,

$$\mathcal{X}(L) := (\{P \subset L \,|\, P \text{ es filtro primo}\}, \tau_L, \subseteq).$$

El orden $\subseteq$ es la inclusión entre conjuntos y la topología τ_L es la generada por la subbase dada por los conjuntos $\{\mathcal{X}_a \,|\, a \in L\} \cup \{\mathcal{X}(L) \setminus \mathcal{X}_a \,|\, a \in L\}$, donde $\mathcal{X}_a := \{P \in \mathcal{X}(L) \,|\, a \in P\}$. Por otro lado, si $(X, \tau, \leq) \in Obj(\mathscr{T})$, entonces

$$\mathcal{D}(X) := (\{U \subseteq X \,|\, U \text{ es clopen creciente}\}, \cup, \cap, \emptyset, X)$$

donde $\cup, \cap$ son respectivamente unión e intersección usuales entre conjuntos. De esta forma $\mathcal{D}(X)$ es un retículo distributivo acotado para el cuál $0 = \emptyset$ y $1 = X$. Si $f \in Hom_{\mathscr{T}}((X_1, \tau_1, \leq_1), (X_2, \tau_2, \leq_2))$, para $U_2 \in \mathcal{D}(X_2)$ se define $\mathcal{D}(f)(U_2) := f^{-1}(U_2)$ y se obtiene el morfismo

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T} \arrow[r, "\mathcal{D}"] & \mathscr{L} \\
X_1 \arrow[d, "f"'] & \mathcal{D}(X_1) \\
X_2 & \mathcal{D}(X_2) \arrow[u, "\mathcal{D}(f)"']
\end{tikzcd}$$

Similarmente, si $h \in Hom_{\mathscr{L}}(L_1, L_2)$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L} \arrow[r, "\mathcal{X}"] & \mathscr{T} \\ L_1 \arrow[d, "h"'] & \mathcal{X}(L_1) \\ L_2 & \mathcal{X}(L_2) \arrow[u, "\mathcal{X}(h)"'] \end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{X}(h)(P_2) := h^{-1}(P_2)$, para $P_2 \in \mathcal{X}(L_2)$.

Para verificar que los funtores $\mathcal{X}$ y $\mathcal{D}$ están bien definidos, se comienza por mostrar que $\mathcal{X}(L)$ y $\mathcal{D}(X)$ son un espacio de Priestley y un retículo distributivo acotado respectivamente.

Nota 3.1. En adelante se denotará con $\mathcal{X}'_a$ al conjunto $\mathcal{X}(L) \setminus \mathcal{X}_a$.

Proposición 3.2. *Si $L \in Obj(\mathscr{L})$, entonces $\mathcal{X}(L) \in Obj(\mathscr{T})$.*

Demostración. Sea $(L, \vee, \wedge, 0, 1) \in Obj(\mathscr{L})$. Claramente $\mathcal{X}(L)$ definido como antes es un espacio topológico ordenado. Ahora se comprueba que $\mathcal{X}(L)$ es compacto por medio del Teorema de Alexander. Sea $\mathcal{C} = \{\mathcal{X}_a \,|\, a \in A_0\} \cup \{\mathcal{X}'_b \,|\, b \in A_1\}$ un cubrimiento de $\mathcal{X}(L)$ por elementos de la subbase donde $A_0, A_1 \subseteq L$. Considere el ideal $(A_0]$ y el filtro $[A_1)$. Suponga que $(A_0] \cap [A_1) = \emptyset$, se sigue del Teorema 2.38 que existe $P \in \mathcal{X}(L)$ tal que $(A_0] \cap P = \emptyset$ y $[A_1) \subseteq P$. Necesariamente $A_0 \cup A_1 \neq \emptyset$. Si $a \in A_0$, entonces $a \notin P$, es decir, $P \notin \mathcal{X}_a$. Por otro lado, si $b \in A_1$, entonces $b \in P$ y $P \notin \mathcal{X}'_b$, por lo tanto $\mathcal{C}$ no es un cubrimiento de $\mathcal{X}(L)$ pues P no hace parte de ningún conjunto de la familia $\mathcal{C}$, una contradicción. A partir de esto se concluye que existe $x \in (A_0] \cap [A_1)$, luego

$$b_1 \wedge \cdots \wedge b_m \leq x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n$$

para algunos $a_1, \ldots, a_n \in A_0$ y $b_1, \ldots b_m \in A_1$ en el caso en que A_0 y A_1 sean diferentes de vacío.

Afirmación: $\mathcal{X}(L) = \mathcal{X}_{a_1} \cup \cdots \cup \mathcal{X}_{a_n} \cup \mathcal{X}'_{b_1} \cup \cdots \cup \mathcal{X}'_{b_m}$.

Es claro que $\mathcal{X}_{a_1} \cup \cdots \cup \mathcal{X}_{a_n} \cup \mathcal{X}'_{b_1} \cup \cdots \cup \mathcal{X}'_{b_m} \subseteq \mathcal{X}(L)$. Para la otra contenencia, suponga buscando una contradicción que existe $P \in \mathcal{X}(L)$ tal que $P \notin \mathcal{X}_{a_1} \cup \cdots \cup \mathcal{X}_{a_n} \cup \mathcal{X}'_{b_1} \cup \cdots \cup \mathcal{X}'_{b_m}$. Por ende, $a_1, \ldots, a_n \notin P$ y $b_1, \ldots, b_m \in P$. Ya que P es un filtro primo, se sigue que $a_1 \vee \cdots \vee a_n \notin P$ y $b_1 \wedge \cdots \wedge b_m \in P$, lo cual es imposible pues P es un conjunto creciente. Por lo tanto la afirmación resulta verdadera.

Si $A_0 = \emptyset$, entonces $(A_0] = \{0\}$, por tal razón $x = 0$ y $b_1 \wedge \cdots \wedge b_m = 0$. En este caso se tiene que $\mathcal{X}(L) = \mathcal{X}'_{b_1} \cup \cdots \cup \mathcal{X}'_{b_m}$: al igual que antes, suponga buscando una contradicción que existe $P \in \mathcal{X}(L)$ tal que $P \notin \mathcal{X}'_{b_1} \cup \cdots \cup \mathcal{X}'_{b_m}$. Entonces $b_1, \ldots, b_m \in P$ y $0 = b_1 \wedge \cdots \wedge b_m \in P$, lo cual contradice que $P \neq L$. Como consecuencia $\mathcal{X}(L) \subseteq \mathcal{X}'_{b_1} \cup \cdots \cup \mathcal{X}'_{b_m}$. La otra contenencia es directa y se obtiene la igualdad buscada. De manera similar se muestra que si $A_1 = \emptyset$, entonces $\mathcal{X}(L) = \mathcal{X}_{a_1} \cup \cdots \cup \mathcal{X}_{a_n}$.

En los tres casos se llega a que $\mathcal{C}$ tiene un subcubrimiento finito. Por el Teorema 2.55 se concluye que $\mathcal{X}(L)$ es compacto. Para continuar se verifica que $\mathcal{X}(L)$ es totalmente orden-disconexo. Para eso tome $P, Q \in \mathcal{X}(L)$ tales que $P \not\subseteq Q$, por lo cual existe $a \in P \setminus Q$. Note que $P \in \mathcal{X}_a$ y $Q \notin \mathcal{X}_a$. Por definición de τ_L, $\mathcal{X}_a$ es clopen. Para probar que $\mathcal{X}_a$ es creciente, suponga que $P_1 \in \mathcal{X}_a$ y $P_1 \subseteq Q_1$, en consecuencia $a \in Q_1$ y esto

significa que $Q_1 \in \mathcal{X}_a$. Se concluye que $\mathcal{X}_a$ es clopen creciente y $\mathcal{X}(L)$ es totalmente orden-disconexo, pero como ya se probó que $\mathcal{X}(L)$ es compacto, se puede asegurar que $\mathcal{X}(L)$ es espacio de Priestley. $\square$

Proposición 3.3. *Si $X \in Obj(\mathscr{T})$, entonces $\mathcal{D}(X) \in Obj(\mathscr{L})$.*

Demostración. Sea $(X, \tau, \leq) \in Obj(\mathscr{T})$. Considere el álgebra $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \emptyset, X)$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$, donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de partes de X. Claramente $\mathcal{P}(X)$ es un retículo distributivo acotado. Para comprobar que $\mathcal{D}(X) \in Obj(\mathscr{L})$ se muestra que $\mathcal{D}(X)$ es subálgebra de $\mathcal{P}(X)$. Sean $U, V \in \mathcal{D}(X)$, ya que U, V son abiertos y cerrados entonces $U \cup V$ resulta simultáneamente abierto y cerrado, es decir, clopen. Además, si $y \in X$ es tal que $x \leq y$ para algún $x \in U \cup V$, entonces $x \in U$ o $x \in V$, en el primer caso $y \in U$ y por consiguiente $y \in U \cup V$, para el otro caso $y \in V$ y de igual forma $y \in U \cup V$. Como resultado $U \cup V$ es creciente y $U \cup V \in \mathcal{D}(X)$. De manera similar se muestra que $U \cap V \in \mathcal{D}(X)$. Por otra parte, es evidente que $\emptyset, X \in \mathcal{D}(X)$. Así $\mathcal{D}(X) \leq \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{D}(X)$ satisface las mismas identidades que $\mathcal{P}(X)$. Esto implica que $\mathcal{D}(X)$ es un retículo distributivo acotado. $\square$

En este punto se muestra que $\mathcal{D}(f)$ es homomorfismo de retículos acotados y que $\mathcal{X}(h)$ es una función continua que preserva el orden.

Proposición 3.4. *Si $f \in Hom_{\mathscr{T}}(X_1, X_2)$, entonces $\mathcal{D}(f) \in Hom_{\mathscr{L}}(\mathcal{D}(X_2), \mathcal{D}(X_1))$.*

Demostración. Sea $f \in Hom_{\mathscr{T}}((X_1, \tau_1, \leq_1), (X_2, \tau_2, \leq_2))$. Para ver que $\mathcal{D}(f)$ está bien definida tome $U_2 \in \mathcal{D}(X_2)$. Dado que f es continua, $\mathcal{D}(f)(U_2) = f^{-1}(U_2)$ es clopen. Sea $y \in X_1$, tal que $x \leq_1 y$ para algún $x \in f^{-1}(U_2)$. Como f preserva el orden, $f(x) \leq_2 f(y)$, y debido a que U_2 es creciente $f(y) \in U_2$; esto implica que $y \in f^{-1}(U_2)$, es decir, $\mathcal{D}(f)(U_2) \in \mathcal{D}(X_1)$. Si $U_2, V_2 \in \mathcal{D}(X_2)$, entonces $\mathcal{D}(f)(U_2 \cup V_2) = f^{-1}(U_2 \cup V_2) = f^{-1}(U_2) \cup f^{-1}(V_2) = \mathcal{D}(f)(U_2) \cup \mathcal{D}(f)(V_2)$. De forma similar $\mathcal{D}(f)(U_2 \cap V_2) = \mathcal{D}(f)(U_2) \cap \mathcal{D}(f)(V_2)$. Adicionalmente $\mathcal{D}(f)(X_2) = X_1$ y $\mathcal{D}(f)(\emptyset) = \emptyset$. Esto muestra que $\mathcal{D}(f)$ es homomorfismo de retículos distributivos acotados. $\square$

Proposición 3.5. *Si $h \in Hom_{\mathscr{L}}(L_1, L_2)$, entonces $\mathcal{X}(h) \in Hom_{\mathscr{T}}(\mathcal{X}(L_2), \mathcal{X}(L_1))$.*

Demostración. Sea $h \in Hom_{\mathscr{L}}(L_1, L_2)$, $\mathcal{X}(h)$ definida como antes y $P_2 \in \mathcal{X}(L_2)$. Note que $\emptyset \neq \mathcal{X}(h)(P_2) \subsetneq L_1$ pues $1 \in P_2$ y $0 \notin P_2$. Si $x, y \in \mathcal{X}(h)(P_2)$, entonces $h(x), h(y) \in P_2$ por definición y $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y) \in P_2$, pues P_2 es filtro, es decir, $x \wedge y \in \mathcal{X}(h)(P_2)$. Por otro lado, si $x \in \mathcal{X}(h)(P_2)$ y $x \leq y$ para algún $y \in L_1$, se tiene que $h(x) \leq h(y)$, luego $h(y) \in P_2$ ya que P_2 es creciente, y esto implica que $y \in \mathcal{X}(h)(P_2)$. Hasta aquí se ha mostrado que $\mathcal{X}(h)(P_2)$ es un filtro de L_1. Si $x \vee y \in \mathcal{X}(h)(P_2)$, entonces $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y) \in P_2$; esto quiere decir $h(x) \in P_2$ o $h(y) \in P_2$ ya que P_2 es filtro primo. Equivalentemente, $x \in \mathcal{X}(h)(P_2)$ o $y \in \mathcal{X}(h)(P_2)$. En resumen, $\mathcal{X}(h)(P_2) \in \mathcal{X}(L_1)$. Ahora, sean $P_2, Q_2 \in \mathcal{X}(L_2)$ tales que $P_2 \subseteq Q_2$; claramente $h^{-1}(P_2) \subseteq h^{-1}(Q_2)$ y esto significa que $\mathcal{X}(h)(P_2) \subseteq \mathcal{X}(h)(Q_2)$, de aquí se sigue que $\mathcal{X}(h)$ preserva el orden.

Por último, hace falta verificar que $\mathcal{X}(h)$ es continua; para eso tome $\mathcal{X}_a \subseteq \mathcal{X}(L_1)$ elemento de la subbase de la topología τ_{L_1}. Considere el conjunto $\mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}_a)$. Note que

$$P_2 \in \mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}_a) \iff \mathcal{X}(h)(P_2) \in \mathcal{X}_a \iff a \in \mathcal{X}(h)(P_2) \iff h(a) \in P_2 \iff P_2 \in \mathcal{X}_{h(a)}$$

es decir, $\mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}_a) = \mathcal{X}_{h(a)} \in \tau_{L_2}$. Como la preimagen de un complemento es el complemento de la preimagen, se deduce que $\mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}'_a) = \mathcal{X}'_{h(a)} \in \tau_{L_2}$. Debido a que cada abierto en τ_{L_1} es una unión

arbitraria de intersecciones finitas de elementos de la forma $\mathcal{X}_a$ o $\mathcal{X}'_a$, se concluye que $\mathcal{X}(h)$ es continua y por lo anterior $\mathcal{X}(h)$ es morfismo entre espacios de Priestley. $\square$

Observación 3.6. Sean $L \in Obj(\mathscr{L})$, $X \in Obj(\mathscr{T})$. Si $i_L : L \to L$ es el homomorfismo identidad de L, claramente por definición $\mathcal{X}(i_L) = i_{\mathcal{X}(L)}$, además si $i_X : X \to X$ es función identidad para el espacio de Priestley X, nuevamente por definición $\mathcal{D}(i_X) = i_{\mathcal{D}(X)}$. Por otro lado, si $L, M, N \in Obj(\mathscr{L})$, $h \in Hom_{\mathscr{L}}(L, M)$ y $g \in Hom_{\mathscr{L}}(M, N)$, se comprueba que $\mathcal{D}(g \circ h) = \mathcal{D}(h) \circ \mathcal{D}(g)$, en efecto, si $U \in \mathcal{D}(N)$, entonces

$$x \in \mathcal{D}(g \circ h)(U) \iff x \in (g \circ h)^{-1}(U) \iff x \in h^{-1}(g^{-1}(U)) \iff x \in \mathcal{D}(h)(\mathcal{D}(g)(U)),$$

esto es, $\mathcal{D}(g \circ h)(U) = \mathcal{D}(h)(\mathcal{D}(g)(U))$. Por lo tanto, $\mathcal{D}(g \circ h) = \mathcal{D}(h) \circ \mathcal{D}(g)$. Similarmente se comprueba que el funtor $\mathcal{X}$ respeta composiciones.

Tal y como se buscaba, todo lo anterior verifica que $\mathcal{X}$ y $\mathcal{D}$ están bien definidos. Para continuar, Priestley define los isomorfismos naturales $\eta : Id_{\mathscr{L}} \dot{\to} \mathcal{D} \circ \mathcal{X}$ y $\epsilon : Id_{\mathscr{T}} \dot{\to} \mathcal{X} \circ \mathcal{D}$. Si $L \in Obj(\mathscr{L})$, $X \in Obj(\mathscr{T})$ sus componentes son respectivamente

$$\begin{aligned} \eta_L : L &\to \mathcal{D}\mathcal{X}(L) \\ a &\mapsto \mathcal{X}_a \end{aligned}$$

isomorfismo de retículos, y

$$\begin{aligned} \epsilon_X : X &\to \mathcal{X}\mathcal{D}(X) \\ x &\mapsto \{U \in \mathcal{D}(X) \mid x \in U\} \end{aligned}$$

homeomorfismo e isomorfismo de orden.

Proposición 3.7. *Si $L \in Obj(\mathscr{L})$, entonces η_L es isomorfismo de retículos.*

Demostración. En la demostración de la Proposición 3.2 se muestra que para $a \in L$, $\mathcal{X}_a \in \mathcal{D}\mathcal{X}(L)$. Sean $a, b \in L$; entonces $\eta_L(a \vee b) = \mathcal{X}_{a \vee b}$. Suponga que $P \in \mathcal{X}_{a \vee b}$, de manera que $a \vee b \in P$ y esto implica que $a \in P$ o $b \in P$, es decir, $P \in \mathcal{X}_a \cup \mathcal{X}_b$. Recíprocamente, si $P \in \mathcal{X}_a \cup \mathcal{X}_b$, $a \in P$ o $b \in P$ y en ambos casos se deduce que $a \vee b \in P$ pues P es creciente; luego $P \in \mathcal{X}_{a \vee b}$. A partir de lo anterior $\mathcal{X}_{a \vee b} = \mathcal{X}_a \cup \mathcal{X}_b$, como consecuencia $\eta_L(a \vee b) = \eta_L(a) \cup \eta_L(b)$. Por definición $\eta_L(a \wedge b) = \mathcal{X}_{a \wedge b}$. Sea $P \in \mathcal{X}(L)$, $P \in \mathcal{X}_{a \wedge b}$ implica $a \wedge b \in P$, nuevamente como P es creciente $a \in P$ y $b \in P$, esto es $P \in \mathcal{X}_a \cap \mathcal{X}_b$. En la otra dirección, si $P \in \mathcal{X}_a \cap \mathcal{X}_b$, entonces $a, b \in P$ y $a \wedge b \in P$ por definición de filtro, de aquí se tiene que $P \in \mathcal{X}_{a \wedge b}$. En resumen, $\mathcal{X}_{a \wedge b} = \mathcal{X}_a \cap \mathcal{X}_b$, es decir, $\eta_L(a \wedge b) = \eta_L(a) \cap \eta_L(b)$. Adicionalmente, $\eta_L(0) = \emptyset$ pues ningún filtro primo de L tiene a 0 como elemento. Para cada $P \in \mathcal{X}(L)$, P es no vacío, luego existe $x \in P$, note que $x \leq 1$ y como P es creciente $1 \in P$ o, $P \in \mathcal{X}_1 = \eta_L(1)$. De esta forma $\eta_L(1) = \mathcal{X}(L)$.

Para ver que η_L es inyectiva suponga que $a \neq b$, $a, b \in L$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $a \not\leq b$ y considere el ideal $(b]$ y el filtro $[a)$. Note que $(b] \cap [a) = \emptyset$, en efecto, si $x \in (b] \cap [a)$, entonces $a \leq x \leq b$ y por transitividad $a \leq b$, una contradicción. Por el Teorema 2.38 existe $P \in \mathcal{X}(L)$ tal que $(b] \cap P = \emptyset$ y $[a) \subseteq P$,

luego $P \notin \mathcal{X}_b$ y $P \in \mathcal{X}_a$. Esto implica que $\mathcal{X}_a \neq \mathcal{X}_b$ y se deduce que $\eta_L(a) \neq \eta_L(b)$.

Para mostrar que η_L es sobreyectiva tome $U \in \mathcal{DX}(L)$ no vacío. Fije $P \in U$. Para cada $Q \notin U$, existe $a_Q \in P \backslash Q$ pues de lo contrario $P \subseteq Q$ y $Q \in U$ ya que U es creciente. Observe que $Q \in \mathcal{X}'_{a_Q}$ y así $\mathcal{C} = \{\mathcal{X}'_{a_Q} \,|\, Q \notin U\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathcal{X}(L) \backslash U$. Como U es clopen, $\mathcal{X}(L) \backslash U$ es un subconjunto cerrado de un espacio compacto y por consiguiente es también compacto. A partir de lo anterior, $\mathcal{C}$ tiene un subcubrimiento finito $\{\mathcal{X}'_{a_1}, \ldots, \mathcal{X}'_{a_n}\}$, es decir, $\mathcal{X}(L) \setminus U \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{X}'_{a_i}$ y por leyes de De Morgan $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{X}_{a_i} \subseteq U$. Por definición de $\mathcal{C}$ se obtiene que $a_1, \ldots, a_n \in P$, luego $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \in P$ y por tanto $P \in \mathcal{X}_{a_1 \wedge \cdots \wedge a_n} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{X}_{a_i} \subseteq U$. Llame $a_P = a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$; entonces $U = \bigcup_{P \in U} \mathcal{X}_{a_P}$ y $\{\mathcal{X}_{a_P} \,|\, P \in U\}$ es un cubrimiento abierto de U. Como $U \subseteq \mathcal{X}(L)$ es cerrado, U es compacto y así se garantiza que existe una familia finita $\{\mathcal{X}_{b_1}, \ldots, \mathcal{X}_{b_k}\}$ donde cada b_i es de la forma a_P para algún $P \in U$, de tal manera que $U = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{X}_{b_i} = \mathcal{X}_{b_1 \vee \cdots \vee b_k}$. En resumen, $\eta_L(b_1 \vee \cdots \vee b_k) = U$. □

Proposición 3.8. *Si $X \in Obj(\mathscr{T})$, entonces ϵ_X es homeomorfismo e isomorfismo de orden.*

Demostración. Primero se verifica que ϵ_X está bien definida. Para eso hay que mostrar que dado $x \in X$, $\epsilon_X(x)$ es un filtro primo de $\mathcal{D}(X)$. Note que $X \in \epsilon_X(x)$, así $\emptyset \neq \epsilon_X(x)$. Además $\emptyset \notin \epsilon_X(x)$, por lo tanto $\epsilon_X(x)$ es un subconjunto propio de $\mathcal{D}(X)$. Si $U, V \in \epsilon_X(x)$, claramente $U \cap V \in \epsilon_X(x)$. Si $U \subseteq V$, y $U \in \epsilon_X(x)$, entonces $x \in V$, luego $V \in \epsilon_X(x)$. Finalmente, si $U \cup V \in \epsilon_X(x)$, se tiene $x \in U \cup V$ y equivalentemente $U \in \epsilon_X(x)$ o $V \in \epsilon_X(x)$. De aquí que $\epsilon_X(x) \in \mathcal{XD}(X)$.

Sean $x, y \in X$. Suponga que $x \leq y$. Si $U \in \epsilon_X(x)$, entonces $x \in U$ y como U es creciente $y \in U$ y $U \in \epsilon_X(y)$. Por lo tanto, $\epsilon_X(x) \subseteq \epsilon_X(y)$. Para el recíproco, suponga que $\epsilon_X(x) \subseteq \epsilon_X(y)$. Ya que X es totalmente orden-disconexo, $x \not\leq y$ implica que existe $U \in \mathcal{D}(X)$ tal que $U \in \epsilon_X(x) \setminus \epsilon_X(y)$, pero esto no es posible. Se deduce que $x \leq y$. En resumen $x \leq y \iff \epsilon_X(x) \subseteq \epsilon_X(y)$ y ϵ_X es inmersión de orden.

Sea $U \in \mathcal{D}(X)$, considere el conjunto $\epsilon_X^{-1}(\mathcal{X}_U)$ donde $\mathcal{X}_U = \{P \in \mathcal{XD}(X) \,|\, U \in P\}$. Note que

$$x \in \epsilon_X^{-1}(\mathcal{X}_U) \iff \epsilon_X(x) \in \mathcal{X}_U \iff U \in \epsilon_X(x) \iff x \in U,$$

es decir, $\epsilon_X^{-1}(\mathcal{X}_U) = U$. Similarmente $\epsilon_X^{-1}(\mathcal{X}'_U) = U'$. En ambos casos la preimagen bajo ϵ_X de un elemento de la subbase de $\tau_{\mathcal{D}(X)}$ es un abierto de X. Esto es suficiente para asegurar que ϵ_X es continua.

Sea $U \subseteq X$ un conjunto cerrado. Como X es compacto y ϵ_X continua, entonces $\epsilon_X(U)$ es compacto. Por otro lado, ser un espacio totalmente orden-disconexo implica ser un espacio de Hausdorff, por esta razón $\mathcal{XD}(X)$ es Hausdorff y como $\epsilon_X(U) \subseteq \mathcal{XD}(X)$ se deduce que $\epsilon_X(U)$ es cerrado. De esta forma se tiene que ϵ_X es una aplicación cerrada.

Con el razonamiento anterior se puede mostrar que $\epsilon_X(X)$ es cerrado. Considere el conjunto abierto $\mathcal{XD}(X) \setminus \epsilon_X(X)$. Suponga que existe $P \in \mathcal{XD}(X) \setminus \epsilon_X(X)$, entonces existe un abierto básico $A \in \tau_{\mathcal{D}(X)}$ tal que $P \in A$ y $A \cap \epsilon_X(X) = \emptyset$. Recuerde que $\{\mathcal{X}_U \,|\, U \in \mathcal{D}(X)\} \cup \{\mathcal{X}'_U \,|\, U \in \mathcal{D}(X)\}$ es la subbase de la topología en

$\mathcal{XD}(X)$, de esta forma existen $U_1, \ldots, U_n, V_1 \ldots, V_m \in \mathcal{D}(X)$ tales que

$$\begin{aligned} A &= \bigcap \{\mathcal{X}_{U_1}, \ldots, \mathcal{X}_{U_n}, \mathcal{X}'_{V_1} \ldots, \mathcal{X}'_{V_m}\} \\ &= (\mathcal{X}_{U_1} \cap \cdots \cap \mathcal{X}_{U_n}) \cap (\mathcal{X}'_{V_1} \cap \cdots \cap \mathcal{X}'_{V_m}) \\ &= (\mathcal{X}_{U_1} \cap \cdots \cap \mathcal{X}_{U_n}) \cap (\mathcal{X}_{V_1} \cup \cdots \cup \mathcal{X}_{V_m})' \\ &= \mathcal{X}_{U_1 \cap \cdots \cap U_n} \cap \mathcal{X}'_{V_1 \cup \cdots \cup V_m}. \end{aligned}$$

Llame $U = U_1 \cap \cdots U_n$ y $V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$, así $A = \mathcal{X}_U \cap \mathcal{X}'_V$. Note que

$$\emptyset = \epsilon_X^{-1}(A) = \epsilon_X^{-1}(\mathcal{X}_U \cap \mathcal{X}'_V) = \epsilon_X^{-1}(\mathcal{X}_U) \cap \epsilon_X^{-1}(\mathcal{X}'_V) = U \cap V'.$$

Como resultado $U \subseteq V$, pero $P \in A = \mathcal{X}_U \cap \mathcal{X}'_V$, es decir, $U \in P$ y $V \notin P$ lo que contradice que P sea creciente. Se concluye que no existe $P \in \mathcal{XD}(X) \setminus \epsilon_X(X)$, por tanto $\epsilon_X(X) = \mathcal{XD}(X)$. En resumen, ϵ_X es sobreyectiva y por lo anterior también resulta homeomorfismo e isomorfismo de orden. □

Solo resta comprobar que η y ϵ son transformaciones naturales.

Proposición 3.9. *Si $h \in Hom_{\mathscr{L}}(L_1, L_2)$, entonces el siguiente diagrama en $\mathscr{L}$ conmuta:*

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "\eta_{L_1}"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{DX}(L_1) \arrow[d, "\mathcal{DX}(h)"] \\ L_2 \arrow[r, "\eta_{L_2}"'] & \mathcal{DX}(L_2) \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $a \in L_1$. Por un lado $\eta_{L_2}(h(a)) = \mathcal{X}_{h(a)}$. En la prueba de la Proposición 3.5 se mostró que $\mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}_a) = \mathcal{X}_{h(a)}$, haciendo uso de esto se demuestra que

$$\mathcal{DX}(h)(\eta_{L_1}(a)) = \mathcal{DX}(h)(\mathcal{X}_a) = \mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}_a) = \mathcal{X}_{h(a)}.$$

Como consecuencia $\mathcal{DX}(h) \circ \eta_{L_1} = \eta_{L_2} \circ h$. □

Proposición 3.10. *Si $f \in Hom_{\mathscr{T}}(X_1, X_2)$, entonces el siguiente diagrama en $\mathscr{T}$ conmuta:*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\epsilon_{X_1}"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{XD}(X_1) \arrow[d, "\mathcal{XD}(f)"] \\ X_2 \arrow[r, "\epsilon_{X_2}"'] & \mathcal{XD}(X_2) \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $x \in X_1$. Por definición $\epsilon_{X_2}(f(x)) = \{U_2 \in \mathcal{D}(X_2) \mid f(x) \in U_2\}$, además $\mathcal{XD}(f)(\epsilon_{X_1}(x)) = \mathcal{D}(f)^{-1}(\{U_1 \in \mathcal{D}(X_1) \mid x \in U_1\})$. Si $U_2 \in \mathcal{D}(X_2)$, entonces:

$$\begin{aligned} U_2 \in \mathcal{D}(f)^{-1}(\{U_1 \in \mathcal{D}(X_1) \mid x \in U_1\}) &\iff \mathcal{D}(f)(U_2) \in \{U_1 \in \mathcal{D}(X_1) \mid x \in U_1\} \\ &\iff x \in \mathcal{D}(f)(U_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(U_2) \\ &\iff f(x) \in U_2 \\ &\iff U_2 \in \{U_2 \in \mathcal{D}(X_2) \mid f(x) \in U_2\}. \end{aligned}$$

Se concluye que $\epsilon_{X_2}(f(x)) = \mathcal{XD}(f)(\epsilon_{X_1}(x))$ y por consiguiente $\epsilon_{X_2} \circ f = \mathcal{XD}(f) \circ \epsilon_{X_1}$. □

Como resultado $\mathscr{L}$ y $\mathscr{T}$ son categorías dualmente equivalentes, es decir, desde un punto de vista categórico $\mathscr{L}$ y $\mathscr{T}^{op}$ son esencialmente iguales. A partir de esto es posible traducir propiedades de morfismos y objetos de una categoría en la otra. Los siguientes corolarios son entonces una consecuencia de la dualidad.

Corolario 3.11. *Sean $h : L_1 \to L_2$ un morfismo de retículos distributivos acotados y $f : X_1 \to X_2$ un morfismo entre espacios de Priestley, entonces:*

- *h es inyectiva si y solo si $\mathcal{X}(h)$ es sobreyectiva.*
- *f es sobreyectiva si y solo si $\mathcal{D}(f)$ es inyectiva.*

Demostración. Para la primera parte, suponga que h es inyectiva y considere el morfismo $\mathcal{X}(h) : \mathcal{X}(L_2) \to \mathcal{X}(L_1)$. Por contradicción, si $\mathcal{X}(L_1) \setminus \mathcal{X}(h)(\mathcal{X}(L_2)) \neq \emptyset$, usando el mismo argumento que se encuentra al final de la prueba de la Proposición 3.8 se puede demostrar que existe $\emptyset \neq A$ abierto básico de la topología τ_{L_1} de la forma $\mathcal{X}_a \cap \mathcal{X}'_b$ para algunos elementos $a, b \in L_1$ tal que $\emptyset = \mathcal{X}(h)^{-1}(A)$, es decir:

$$\emptyset = \mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}_a \cap \mathcal{X}'_b) = \mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}_a) \cap \mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}_b)' = \mathcal{X}_{h(a)} \cap \mathcal{X}'_{h(b)}.$$

Por lo tanto $\mathcal{X}_{h(a)} \subseteq \mathcal{X}_{h(b)}$ y $\mathcal{X}_{h(a)} \cup \mathcal{X}_{h(b)} = \mathcal{X}_{h(b)}$. Por otro lado:

$$\mathcal{X}_{h(a \vee b)} = \mathcal{X}_{h(a) \vee h(b)} = \mathcal{X}_{h(a)} \cup \mathcal{X}_{h(b)}$$

y se concluye que $\mathcal{X}_{h(a \vee b)} = \mathcal{X}_{h(b)}$. Esto último se puede reescribir de la forma $(\eta_{L_2} \circ h)(a \vee b) = (\eta_{L_2} \circ h)(b)$. Ya que η_{L_2} es isomorfismo de retículos y h es inyectiva, se tiene $a \vee b = b$ y $a \leq b$, sin embargo esto implica que $\emptyset = A$, pues $P_1 \in A$ quiere decir que $P_1 \in \mathcal{X}_a \cap \mathcal{X}'_b$, luego $a \in P_1$ y $b \notin P_1$, lo cual es imposible pues P_1 es creciente. Se ha llegado a una contradicción y por ende $\mathcal{X}(h)(\mathcal{X}(L_2)) = \mathcal{X}(L_1)$.

Recíprocamente, suponga que $\mathcal{X}(h)$ es sobreyectiva y tome $a, b \in L_1$ tales que $a \neq b$. Sin pérdida de generalidad, $a \not\leq b$ y por lo tanto $(b] \cap [a) = \emptyset$. Por el Teorema 2.38 existe un $P_1 \in \mathcal{X}(L_1)$ tal que $a \in P_1$ pero $b \notin P_1$. Por hipótesis existe $P_2 \in \mathcal{X}(L_2)$ tal que $\mathcal{X}(h)(P_2) = P_1$, es decir, $h^{-1}(P_2) = P_1$, entonces $h(a) \in P_2$ y $h(b) \notin P_2$; luego $h(a) \neq h(b)$.

La segunda parte del corolario es consecuencia de la primera. En efecto, si $f : X_1 \to X_2$ es sobreyectiva, entonces por la Proposición 3.10 $\mathcal{X}\mathcal{D}(f) = \epsilon_{X_1}^{-1} \circ f \circ \epsilon_{X_2}$ y de esta forma $\mathcal{X}\mathcal{D}(f)$ es sobreyectiva, luego $\mathcal{D}(f)$ es inyectiva. El recíproco es similar. $\square$

Corolario 3.12. *Sean $h \in Hom_{\mathscr{L}}(L_1, L_2)$ y $f \in Hom_{\mathscr{T}}(X_1, X_2)$, entonces:*

- *h es sobreyectiva si y solo si $\mathcal{X}(h)$ es inmersión de orden.*
- *f es inmersión de orden si y solo si $\mathcal{D}(f)$ es sobreyectiva.*

Demostración. Se comienza mostrando la primera equivalencia. Para eso, suponga que h es sobreyectiva y considere el morfismo $\mathcal{X}(h) : \mathcal{X}(L_2) \to \mathcal{X}(L_1)$, como se ha mostrado en la Proposición 3.5 $\mathcal{X}(h)$ preserva el orden. Tome $P_2, Q_2 \in \mathcal{X}(L_2)$, si $P_2 \not\subseteq Q_2$, existe $b \in L_2$ tal que $b \in P_2$ pero $b \notin Q_2$. Por hipótesis existe $a \in L_1$ tal que $h(a) = b$ y esto implica que $a \in h^{-1}(P_2) \setminus h^{-1}(Q_2)$, de aquí se concluye que $\mathcal{X}(h)(P_2) \not\subseteq \mathcal{X}(h)(Q_2)$. En resumen $P_2 \subseteq Q_2 \iff \mathcal{X}(h)(P_2) \subseteq \mathcal{X}(h)(Q_2)$ para cualesquiera $P_2, Q_2 \in \mathcal{X}(L_2)$.

Para la otra dirección, suponga que $\mathcal{X}(h) : \mathcal{X}(L_2) \to \mathcal{X}(L_1)$ es inmersión de orden y aplique el funtor $\mathcal{D}$ para obtener $\mathcal{DX}(h) : \mathcal{DX}(L_1) \to \mathcal{DX}(L_2)$. La idea es mostrar que $\mathcal{DX}(h)$ es sobreyectiva para concluir que h es sobreyectiva. Sean $U_2 \in \mathcal{DX}(L_2)$ y fije $P_2 \in U_2$. Tome $Q_2 \notin U_2$ y note que $P_2 \not\subseteq Q_2$ pues U_2 es creciente. Por hipótesis $\mathcal{X}(h)(P_2) \not\subseteq \mathcal{X}(h)(Q_2)$ y ya que $\mathcal{X}(L_1)$ es totalmente orden-disconexo, existe $U_1 \in \mathcal{DX}(L_1)$ tal que $\mathcal{X}(h)(P_2) \in U_1$ y $\mathcal{X}(h)(Q_2) \notin U_1$. Por la Proposición 3.7 existe $a \in L_1$ tal que $U_1 = \mathcal{X}_a$, por lo tanto $P_2 \in \mathcal{X}_{h(a)}$ y $Q_2 \in \mathcal{X}'_{h(a)}$ (pues $\mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}_a) = \mathcal{X}_{h(a)}$). Muy similar a lo visto en la prueba de esa proposición, se construye un cubrimiento abierto de $\mathcal{X}(L_2) \setminus U_2$ con los $\mathcal{X}'_{h(a)}$ que se obtienen del procedimiento anterior y usando compacidad se comprueba que existen $a_1, \ldots, a_n \in L_1$ tales que $P_2 \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{X}_{h(a_i)} \subseteq U_2$, y se deduce que $P_2 \in \mathcal{X}_{h(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n)} \subseteq U_2$. A partir de esto se construye un cubrimiento abierto para U_2 con clopens de la forma $\mathcal{X}_{h(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n)}$ y nuevamente por compacidad se concluye que existen $b_1, \ldots, b_k \in L_1$ tales que $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{X}_{h(b_i)} = \mathcal{X}_{h(b_1 \vee \cdots \vee b_k)} = U_2$. Por lo tanto

$$U_2 = \mathcal{X}_{h(b_1 \vee \cdots \vee b_k)} = \mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}_{b_1 \vee \cdots \vee b_k}) = \mathcal{DX}(h)(\mathcal{X}_{b_1 \vee \cdots \vee b_k}).$$

Se concluye que $\mathcal{DX}(h)$ es sobreyectiva y por la Proposición 3.9 se obtiene $h = \eta_{L_2}^{-1} \circ \mathcal{DX}(h) \circ \eta_{L_1}$, luego h es sobreyectiva por ser composición de funciones sobreyectivas.

Así como en el corolario anterior, la segunda equivalencia es consecuencia de la primera y de la Proposición 3.10. Para esto observe que la composición de inmersiones de orden es nuevamente una inmersión de orden. Por ejemplo para una dirección, si se supone que $\mathcal{D}(f)$ es sobreyectiva entonces $\mathcal{XD}(f)$ es inmersión de orden y $f = \epsilon_{X_2}^{-1} \circ \mathcal{XD}(f) \circ \epsilon_{X_1}$ es también una inmersión de orden. □

Otra de las consecuencias de esta dualidad es la correspondencia entre productos de retículos distributivos acotados y coproductos de espacios de Priestley.

Teorema 3.13. *Sean $\{L_i \mid i \in I\}$ una familia de retículos distributivos acotados, $\{X_i \mid i \in I\}$ una familia de espacios de Priestley. Se tiene que:*

- $\mathcal{X}\left(\prod_{i \in I} L_i\right) \cong \coprod_{i \in I} \mathcal{X}(L_i)$.
- $\mathcal{D}\left(\coprod_{i \in I} X_i\right) \cong \prod_{i \in I} \mathcal{D}(X_i)$.

Demostración. Como los funtores $\mathscr{L} \underset{\mathcal{D}}{\overset{\mathcal{X}}{\rightleftarrows}} \mathscr{T}^{op}$ definen una equivalencia, entonces por el Teorema 2.73 $\mathcal{X}$ envía productos de $\mathscr{L}$ en productos de la categoría $\mathscr{T}^{op}$ y estos últimos coinciden con los coproductos de $\mathscr{T}$. Una justificación similar es posible para la segunda parte del teorema. □

3.2. Dualidad de Cignoli

Las álgebras Booleanas fueron desarrolladas por Boole en el siglo XIX con el fin de estudiar las leyes del pensamiento lógico. A partir de ellas, Boole consigue construir una semántica para el cálculo proposicional clásico. Siguiendo esta dirección, Halmos [9] propone definir operadores unarios para las álgebras Booleanas con el objetivo de obtener contrapartes algebraicas a la noción de cuantificador existencial en lógica de primer orden. Las álgebras Booleanas con estos operadores reciben el nombre de álgebras Booleanas monádicas. Más

adelante, Cignoli [6] generaliza esta clase de estructuras al considerar retículos distributivos con cuantificador (Q-retículos distributivos).

Definición 3.14. Se denota con $\mathscr{Q}$ a la categoría de Q-retículos distributivos con sus homomorfismos. Abusando de la notación también se hará referencia a la variedad de Q-retículos distributivos por medio de $\mathscr{Q}$.

Ahora se va a presentar la forma en que Cignoli elevó la dualidad de Priestley a Q-retículos distributivos. Todos los resultados sin demostración pueden ser consultados en [6]. Primero se enuncia un ejemplo relevante debido a Halmos y Varsavsky [25].

Ejemplo 3.15. Sea X un conjunto con una relación de equivalencia E. Se puede asociar naturalmente un cuantificador $\mathbf{E}$ al álgebra Booleana $\mathbf{2}^X$ dado por la siguiente formula:

$$\text{Para cada } U \subseteq X,\ \mathbf{E}(U) = \bigcup_{x \in U} [x]_E.$$

Se verifican las condiciones para que $\mathbf{E}$ sea un cuantificador:

1. Claramente $\mathbf{E}(\emptyset) = \emptyset$.
2. Note que $U \subseteq \mathbf{E}(U)$, luego $U \cap \mathbf{E}(U) = U$.
3. Si $a \in \mathbf{E}(U \cap \mathbf{E}(V))$, entonces $a \in [x]_E$ para algún $x \in U \cap \mathbf{E}(V)$, es decir, $x \in [y]_E$ para algún $y \in V$. Por transitividad $a \in [y]_E$, entonces $a \in \mathbf{E}(V)$, además como $x \in U$, $a \in \mathbf{E}(U)$ y así $a \in \mathbf{E}(U) \cap \mathbf{E}(V)$. Por otro lado, si $a \in \mathbf{E}(U) \cap \mathbf{E}(V)$, existen $x \in U$, $y \in V$ tales que $a \in [x]_E$, $a \in [y]_E$. Nuevamente por transitividad $x \in [y]_E$, es decir, $x \in \mathbf{E}(V)$, por lo tanto $x \in U \cap \mathbf{E}(V)$ y $a \in \mathbf{E}(U \cap \mathbf{E}(V))$. Se concluye que $\mathbf{E}(U \cap \mathbf{E}(V)) = \mathbf{E}(U) \cap \mathbf{E}(V)$.
4. $a \in \mathbf{E}(U \cup V)$ si y solo si existe $x \in U \cup V$ tal que $a \in [x]_E$ si y solo si $a \in \mathbf{E}(U) \cup \mathbf{E}(V)$. Por lo tanto $\mathbf{E}(U \cup V) = \mathbf{E}(U) \cup \mathbf{E}(V)$.

Se empieza por definir los objetos duales a los Q-retículos distributivos.

Definición 3.16. Sea X un espacio de Priestley y E una relación de equivalencia en X. Decimos que (X, E) es un *Q-espacio* si:

- $\mathbf{E}(U) \in \mathcal{D}(X)$ para cada $U \in \mathcal{D}(X)$.
- Las clases de equivalencia para E son conjuntos cerrados en X.

Note que la primera condición indica que la restricción de $\mathbf{E}$ a la subálgebra $\mathcal{D}(X) \leq \mathbf{2}^X$ sigue siendo un cuantificador. Por lo tanto $(\mathcal{D}(X), \mathbf{E}) \in Obj(\mathscr{Q})$. A continuación se definen los morfismos entre Q-espacios.

Definición 3.17. Sean (X_1, E_1), (X_2, E_2) Q-espacios. Un *Q-mapeo* es una función $f : X_1 \to X_2$ continua, que preserva orden, tal que $\mathbf{E_1}(f^{-1}(U_2)) = f^{-1}(\mathbf{E_2}(U_2))$ para cada $U_2 \in \mathcal{D}(X_2)$. Se denota con $\mathscr{Q}^*$ a la categoría de Q-espacios y Q-mapeos.

De esta definición se sigue inmediatamente que si $f \in Hom_{\mathscr{Q}^*}((X_1, E_1), (X_2, E_2))$, entonces $\mathcal{D}(f)$ respeta cuantificadores y por lo tanto $\mathcal{D}(f) \in Hom_{\mathscr{Q}}((\mathcal{D}(X_2), \mathbf{E_2}), (\mathcal{D}(X_1), \mathbf{E_1}))$. Por otro lado, para $(L, \triangledown) \in Obj(\mathscr{Q})$ Cignoli define la relación de equivalencia

$$E(\triangledown) = \{(P, Q) \in \mathcal{X}(L) \times \mathcal{X}(L) \mid P \cap \triangledown(L) = Q \cap \triangledown(L)\}$$

donde $\triangledown(L) = \{\triangledown a \,|\, a \in L\}$. Con esas definiciones él demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3.18. ***[6, Theorem 2.2.].*** *Sea $(L, \triangledown)$ un objeto de $\mathscr{Q}$ y $E(\triangledown)$ como antes. Entonces $E(\triangledown)$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{X}(L)$ y sus clases de equivalencia son conjuntos cerrados. Además:*

- *Si $P \in \mathcal{X}(L)$, $a \in L$ y $\triangledown a \in P$, entonces existe $Q \in \mathcal{X}(L)$ tal que $(Q, P) \in E(\triangledown)$ y $a \in Q$.*
- *Para todo $a \in L$, $\eta_L(\triangledown a) = \mathbf{E}(\triangledown)(\eta_L(a))$.*

Observe que si $U \in \mathcal{DX}(L)$ existe $a \in L$ tal que $U = \mathcal{X}_a = \eta_L(a)$, entonces $\mathbf{E}(\triangledown)(U) = \eta_L(\triangledown a) = \mathcal{X}_{\triangledown a} \in \mathcal{DX}(L)$. Esto es suficiente para asegurar que $(\mathcal{X}(L), E(\triangledown)) \in Obj(\mathscr{Q}^*)$. Adicionalmente, el teorema dice que η_L respeta cuantificadores y por lo tanto es un isomorfismo entre Q-retículos distributivos. Sea $h \in Hom_{\mathscr{Q}}((L_1, \triangledown_1), (L_2, \triangledown_2))$, por la dualidad de Priestley $\mathcal{X}(h) : \mathcal{X}(L_2) \to \mathcal{X}(L_1)$ es una función continua que preserva orden. Si $U_1 \in \mathcal{DX}(L_1)$, al igual que antes, existe $a \in L_1$ tal que $U_1 = \mathcal{X}_a$, por lo tanto

$$\mathbf{E}(\triangledown_{\mathbf{2}})(\mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}_a)) = \mathbf{E}(\triangledown_{\mathbf{2}})(\mathcal{X}_{h(a)}) = \mathcal{X}_{\triangledown_2 h(a)} = \mathcal{X}_{h(\triangledown_1 a)} = \mathcal{X}(h)^{-1}(\mathcal{X}_{\triangledown_1 a}) = \mathcal{X}(h)^{-1}(\mathbf{E}(\triangledown_{\mathbf{1}})(\mathcal{X}_a)).$$

Esto significa que $\mathcal{X}(h)$ es un Q-mapeo. Posteriormente, Cignoli utiliza el siguiente lema para caracterizar a los isomorfismos en la categoría $\mathscr{Q}^*$:

Lema 3.19. ***[6, Lemma 2.8.].*** *Sean (X_1, E_1), (X_2, E_2) Q-espacios. Si $f : X_1 \to X_2$ es continua y monótona, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *Si $(x, y) \in E_1$, entonces $(f(x), f(y)) \in E_2$.*
- *$\mathbf{E_1}(f^{-1}(\mathbf{E_2}(S))) = f^{-1}(\mathbf{E_2}(S))$ para cada $S \subseteq X_2$.*
- *$\mathbf{E_1}(f^{-1}(U_2)) \subseteq f^{-1}(\mathbf{E_2}(U_2))$ para cada $U_2 \in \mathcal{D}(X_2)$.*

Corolario 3.20. ***[6, Corollary 2.9.].*** *Sean $(X_1, E_1), (X_2, E_2) \in Obj(\mathscr{Q}^*)$. $f : X_1 \to X_2$ es un isomorfismo en $\mathscr{Q}^*$ si y solo si f es homeomorfismo, isomorfismo de orden y para todos $x, y \in X_1$: $(x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$.*

Por medio de esta caracterización, Cignoli comprueba que para cada $(X, E) \in Obj(\mathscr{Q}^*)$, el morfismo $\epsilon_X : X \to \mathcal{XD}(X)$ es un isomorfismo en la categoría $\mathscr{Q}^*$ al verificar que $(x, y) \in E \iff (\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \in E(\mathbf{E})$.

Finalmente, se definen los funtores contravariantes:

$$\mathcal{Q} : \mathscr{Q}^* \to \mathscr{Q}$$
$$\mathcal{Q}^* : \mathscr{Q} \to \mathscr{Q}^*$$

Para $(X, E) \in Obj(\mathscr{Q}^*)$, $\mathcal{Q}(X, E) := (\mathcal{D}(X), \mathbf{E})$. Si f es un Q-mapeo, $\mathcal{Q}(f) := \mathcal{D}(f)$. Para $(L, \triangledown) \in Obj(\mathscr{Q})$, se define $\mathcal{Q}^*(L, \triangledown) := (\mathcal{X}(L), E(\triangledown))$, y si h es homomorfismo de Q-retículos distributivos $\mathcal{Q}^*(h) := \mathcal{X}(h)$. De este modo queda demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.21. ***[6, Theorem 2.10.].*** *Las categorías $\mathscr{Q}^*$ y $\mathscr{Q}$ son dualmente equivalentes por medio de los funtores contravariantes $\mathscr{Q}^* \underset{\mathcal{Q}^*}{\overset{\mathcal{Q}}{\rightleftarrows}} \mathscr{Q}$ y los isomorfismos naturales η y ϵ.*

Ya que $\mathcal{Q}(f) = \mathcal{D}(f)$ y $\mathcal{Q}^*(h) = \mathcal{X}(h)$, a los homomorfismos inyectivos (sobreyectivos) de $\mathscr{Q}$ le corresponden morfismos sobreyectivos (inmersiones de orden) en $\mathscr{Q}^*$. Ahora se estudiarán los coproductos de familias finitas en $\mathscr{Q}^*$. Esta nueva construcción se basa en la realizada en el Ejemplo 2.75.

Lema 3.22. *Sea $\{(X_i, \tau_i, \leq_i, E_i) \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ una familia finita de Q-espacios. Considere $(\coprod_{i=1}^n X_i, \tau, \leq)$ equipado con morfismos $\{\mu_i : X_i \to \coprod_{i=1}^n X_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$, el coproducto de la familia de espacios de Priestley asociados. Se define una relación de equivalencia E sobre $\coprod_{i=1}^n X_i$ de la siguiente manera; $((x,i),(y,j)) \in E$ si y solo si $i = j$ y $(x,y) \in E_i$. Para cada $U \in \mathcal{D}(\coprod_{i=1}^n X_i)$,*

$$\mathbf{E}(U) = \bigcup_{i=1}^n (\mathbf{E_i}(\mu_i^{-1}(U)) \times \{i\}).$$

Demostración. Primero observe lo siguiente; si $(x,i) \in \coprod_{i=1}^n X_i$, entonces $[(x,i)]_E = [x]_{E_i} \times \{i\}$. Por otro lado, recuerde que $U = \bigcup_{i \in I}^n (\mu_i^{-1}(U) \times \{i\})$ y así

$$\mathbf{E}(U) = \bigcup_{(x,i) \in U} [(x,i)]_E = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup_{x \in \mu_i^{-1}(U)} [(x,i)]_E \right) = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup_{x \in \mu_i^{-1}(U)} ([x]_{E_i} \times \{i\}) \right) = \bigcup_{i=1}^n (\mathbf{E_i}(\mu_i^{-1}(U)) \times \{i\}).$$

□

Teorema 3.23. *Sea $\{(X_i, \tau_i, \leq_i, E_i) \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ una familia finita de Q-espacios. Entonces $(\coprod_{i=1}^n X_i, \tau, \leq, E)$ con los morfismos $\{\mu_i : X_i \to \coprod_{i=1}^n X_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ es el coproducto de la familia en la categoría $\mathscr{Q}^*$.*

Demostración. Se comienza verificando que $(\coprod_{i=1}^n X_i, \tau, \leq, E) \in Obj(\mathscr{Q}^*)$. Sea $U \in \mathcal{D}(\coprod_{i=1}^n X_i)$, como μ_i es una función continua que preserva el orden, entonces $\mu_i^{-1}(U) \in \mathcal{D}(X_i)$. Ahora, usando que cada (X_i, E) es Q-espacio se puede asegurar que $\mathbf{E_i}(\mu_i^{-1}(U)) \in \mathcal{D}(X_i)$ y esto implica que $\mathbf{E_i}(\mu_i^{-1}(U)) \times \{i\}$ es clopen creciente para cada $1 \leq i \leq n$. De aquí se concluye que $\mathbf{E}(U) = \bigcup_{i=1}^n (\mathbf{E_i}(\mu_i^{-1}(U)) \times \{i\}) \in \mathcal{D}(\coprod_{i=1}^n X_i)$. Por otro lado, si $(x,i) \in \coprod_{i=1}^n X_i$, se tiene que $[(x,i)]_E = [x]_{E_i} \times \{i\}$ resulta cerrado pues $[x]_{E_i}$ es cerrado en X_i.

Para que μ_i sea un Q-mapeo es necesario mostrar que $\mathbf{E_i}(\mu_i^{-1}(U)) = \mu_i^{-1}(\mathbf{E}(U))$ para cada $U \in \mathcal{D}(\coprod_{i=1}^n X_i)$, pero esto no es más que una consecuencia directa del lema anterior. Lo siguiente es considerar (Y, E_Y) Q-espacio y $\{f_i : X_i \to Y \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ Q-mapeos, se define $d : \coprod_{i=1}^n X_i \to Y : (x,i) \mapsto f_i(x)$. En el Ejemplo 2.75 se demostró que d es continua, preserva el orden y que $d^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^n (f_i^{-1}(A) \times \{i\})$ para $A \in \tau_Y$. Sea $A \in \mathcal{D}(Y)$, dado que cada f_i es Q-mapeo $\mathbf{E_i}(f_i^{-1}(A)) = f_i^{-1}(\mathbf{E_Y}(A))$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(d^{-1}(A)) &= \bigcup_{i=1}^n (\mathbf{E_i}(\mu_i^{-1}(d^{-1}(A))) \times \{i\}) \\
&= \bigcup_{i=1}^n (\mathbf{E_i}(f_i^{-1}(A)) \times \{i\}) \\
&= \bigcup_{i=1}^n (f_i^{-1}(\mathbf{E_Y}(A)) \times \{i\}) \\
&= d^{-1}(\mathbf{E_Y}(A)).
\end{aligned}$$

Para terminar, observe que $f_i = d \circ \mu_i$ para cada $1 \leq i \leq n$ y d es el único Q-mapeo con esta propiedad. □

Por medio de la dualidad, Cignoli describe las álgebras subdirectamente irreducibles de $\mathscr{Q}$ y así llega al teorema de estructura del retículo de subvariedades.

Teorema 3.24. *El retículo de subvariedades de $\mathscr{Q}$ es una cadena de tipo $\omega + 1$*

$$\begin{aligned}
&\mathscr{Q}_{00} \subset \\
&\mathscr{Q}_{10} \subset \mathscr{Q}_{01} \subset \\
&\mathscr{Q}_{20} \subset \mathscr{Q}_{02} \subset \mathscr{Q}_{11} \subset \\
&\mathscr{Q}_{30} \subset \mathscr{Q}_{03} \subset \mathscr{Q}_{12} \subset \mathscr{Q}_{21} \subset \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \subset \mathscr{Q}
\end{aligned}$$

donde $\mathscr{Q}_{pq} = V(\mathbf{D}_{pq})$, $\mathbf{D}_{pq} := \mathbf{2}^p \times \mathbf{C}_q$, $\mathbf{2}^p$ es el retículo Booleano finito con p átomos y $\mathbf{C}_q := \mathbf{2}^q \oplus \mathbf{1}^*$ para $1 \geq q$, $C_0 = \{0\}$. $\mathbf{D}_{pq}$ dotado del cuantificador simple.

El hecho de que cada $\mathbf{D}_{pq}$ tenga el cuantificador simple resultará muy importante en la siguiente sección cuando se enuncien ecuaciones que caractericen a estas subvariedades.

Observación 3.25. Sean $r, s, p, q \in \omega$. Si $r + s < p + q$, entonces $\mathscr{Q}_{rs} \subset \mathscr{Q}_{pq}$. Suponga que $r + s = p + q$, entonces $\mathscr{Q}_{rs} \subseteq \mathscr{Q}_{pq}$ si y solo si $q < s$ ó $s = 0$.

3.3. Dualidad en el Caso Finito

Cignoli muestra que cada subvariedad de Q-retículos distributivos es generada por un álgebra finita. Es por esta razón que vale la pena considerar con especial atención a los Q-retículos distributivos finitos; se denota con $\mathscr{Q}_{fin}$ a la subcategoría plena de estos objetos y con $\mathscr{Q}^*_{fin}$ a la subcategoría plena de los Q-espacios finitos. En este contexto la correspondencia 2.36 entre elementos $\vee$-irreducibles y filtros primos resulta muy importante. Una primera consecuencia de la correspondencia es la siguiente reescritura de un parte del Teorema 3.18.

Teorema 3.26. *Sea $(L, \triangledown)$ un objeto de $\mathscr{Q}_{fin}$. Si $p \in L$ es $\vee$-irreducible y $a \in L$ es tal que $\triangledown a \geq p$, entonces existe un elemento $q \in L$ $\vee$-irreducible tal que $\triangledown p = \triangledown q$ y $a \geq q$.*

Demostración. Sean $p \in L$ un elemento $\vee$-irreducible y $a \in L$ tal que $\triangledown a \geq p$. Considere el filtro primo $[p) := \{x \in L \mid x \wedge p = p\}$, entonces $[p) \in \mathcal{X}(L)$ y $\triangledown a \in [p)$, por el Teorema 3.18, existe $Q \in \mathcal{X}(L)$ tal que $a \in Q$ y $[p) \cap \triangledown(L) = Q \cap \triangledown(L)$. Por el Teorema 2.36 existe $q \in L$ $\vee$-irreducible tal que $Q = [q)$, luego $a \geq q$. Además $\triangledown q \in [p)$ y $\triangledown p \in [q)$, es decir, $p \leq \triangledown q$ y $q \leq \triangledown p$, por lo que al aplicar la Proposición 2.43 se llega a que $\triangledown p = \triangledown q$. □

Adams y Dziobiak establecieron definiciones equivalentes para los conceptos de Q-espacios y Q-mapeos las cuales permiten obtener una versión simplificada de la dualidad en el caso finito.

Lema 3.27. ***[3, Lemma 2.2.].*** *Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley y E una relación de equivalencia sobre X. Entonces $(X, \tau, \leq, E)$ es un Q-espacio si y solamente si:*

- *Para cada $x, p, a \in X$, si $(x, a) \in E$ y $x \leq p$, existe $q \in X$ tal que $a \leq q$ y $(p, q) \in E$.*
- *Las clases de equivalencia para E son conjuntos cerrados en X.*

- *Si $U \in \mathcal{D}(X)$, entonces $\mathbf{E}(U)$ es clopen.*

Una función continua que preserva el orden $\phi : X_1 \to X_2$ es un Q-mapeo si y solamente si:

- *Si $(x, y) \in E_1$, entonces $(\phi(x), \phi(y)) \in E_2$.*
- *Para cada z maximal en $[\phi(x)]_{E_2}$ se tiene que $z \in \phi([x]_{E_1})$, es decir, $z = \phi(y)$ para algún $y \in [x]_{E_1}$.*

Observe que en esta caracterización de los Q-espacios la primera condición implica que $\mathbf{E}(U)$ es creciente para cada $U \in \mathcal{D}(X)$ y junto a las demás condiciones se llega a la Definición 3.16. Recuerde que si $(X, \tau, \leq, E)$ es un Q-espacio finito, su topología necesariamente es la discreta y por lo tanto las dos últimas condiciones para la clase de equivalencia en la definición resultan triviales. Es por este motivo que en el caso finito es suficiente considerar únicamente la primera condición. Esto inspira la siguiente definición.

Definición 3.28. Un *Q-poset* $(P, \leq, E)$ está conformado por un conjunto finito parcialmente ordenado $(P, \leq)$ y una relación de equivalencia E sobre P que cumple lo siguiente:

- Para cada $x, p, a \in P$, si $(x, a) \in E$ y $x \leq p$, existe $q \in P$ tal que $a \leq q$ y $(p, q) \in E$.

Un morfismo entre los Q-posets $(P_1, \leq_1, E_1)$, $(P_2, \leq_2, E_2)$ es una función $\phi : P_1 \to P_2$ que preserva el orden y satisface, las siguientes condiciones:

- Si $(x, y) \in E_1$, entonces $(\phi(x), \phi(y)) \in E_2$.
- Para cada z maximal en $[\phi(x)]_{E_2}$ se tiene que $z \in \phi([x]_{E_1})$, es decir, $z = \phi(y)$ para algún $y \in [x]_{E_1}$.

Con $\mathscr{S}_{fin}$ se hace referencia a la categoría de Q-posets con sus morfismos.

De esta forma, a cada Q-espacio finito $(P, \tau, \leq, E)$ le corresponde el Q-poset $(P, \leq, E)$ y recíprocamente, al dotar un Q-poset con la topología discreta se obtiene un Q-espacio finito. Por otro lado, Q-mapeos entre espacios finitos y morfismos entre Q-posets coinciden claramente. Esto garantiza que a un coproducto finito de Q-espacios finitos $(\coprod_{i=1}^{n} P_i, \tau, \leq, E)$ le corresponde $(\coprod_{i=1}^{n} P_i, \leq, E)$ y que este ultimo coincide con el coproducto en $\mathscr{S}_{fin}$ de los Q-posets asociados. Cuando no haya ambigüedad se hará referencia al Q-poset $(P, \leq, E)$ simplemente con P.

Adams y Dziobiak [2] plantean una dualidad entre $\mathscr{S}_{fin}$ y $\mathscr{Q}_{fin}$ como un caso particular de la dualidad dada por Cignoli del siguiente modo. Si $(L, \triangledown)$ es un Q-retículo distributivo finito a este se asocia el objeto

$$\mathcal{S}(L) = (Irr(L), \leq_*, E_\triangledown)$$

donde $\leq_*$ es el orden dual de L restringido a $Irr(L)$ y $(a, b) \in E_\triangledown$ si y solo si $\triangledown a = \triangledown b$. Es sencillo mostrar que $E_\triangledown$ es una relación de equivalencia y de manera inmediata $\mathcal{S}(L)$ resulta ser un Q-poset como consecuencia del Teorema 3.26: dados $x, p, a \in Irr(L)$, si $(x, a) \in E_\triangledown$ y $x \leq_* p$, entonces $\triangledown x = \triangledown a$ y $\triangledown x \geq x \geq p$, es decir, $\triangledown a \geq p$. Por lo tanto existe $q \in Irr(L)$ tal que $a \leq_* q$ y $(p, q) \in E$.

Lema 3.29. *Sea $(L, \triangledown) \in Obj(\mathscr{Q}_{fin})$. Entonces $\mathcal{S}(L)$ es isomorfo a $(\mathcal{X}(L), \subseteq, E(\triangledown))$.*

Demostración. Considere la biyección $\theta_L : Irr(L) \to \mathcal{X}(L)$ establecida en la Observación 2.37. Sean $a, b \in Irr(L)$,

$$a \leq^* b \iff b \leq a \iff [a) \subseteq [b) \iff \theta_L(a) \subseteq \theta_L(b).$$

Por otro lado, si $(a,b) \in E_\nabla$, entonces $\nabla a = \nabla b$. Suponga que $d \in [a) \cap \nabla(L)$, entonces $a \leq d$ y usando la Proposición 2.43 se deduce que $\nabla a \leq d$, luego $\nabla b \leq d$ y por consiguiente $d \in [b) \cap \nabla(L)$. Similarmente se muestra que $[b) \cap \nabla(L) \subseteq [a) \cap \nabla(L)$ y de ello se concluye que $(\theta_L(a), \theta_L(b)) \in E(\nabla)$. Para el recíproco, suponga que $(\theta_L(a), \theta_L(b)) \in E(\nabla)$, entonces $[a) \cap \nabla(L) = [b) \cap \nabla(L)$. Por un lado $\nabla a \in [b)$ y $b \leq \nabla a$, esto implica que $\nabla b \leq \nabla a$, por otro lado $\nabla b \in [a)$ y de manera similar se muestra que $\nabla a \leq \nabla b$. Como resultado $\nabla a = \nabla b$ y $(a,b) \in E_\nabla$. Note que al dotar ambos espacios con la topología discreta θ_L es un homeomorfismo y por el Corolario 3.20 es isomorfismo entre Q-espacios finitos, esto implica que θ_L es isomorfismo entre Q-posets. □

A cada homomorfismo $h : (L_1, \nabla_1) \to (L_2, \nabla_2)$ se le asigna la función $\mathcal{S}(h) : Irr(L_2) \to Irr(L_1)$ dada por la fórmula

$$\mathcal{S}(h)(a) = \bigwedge\{x \in Irr(L_1) \,|\, h(x) \geq a\}.$$

Lema 3.30. *Sea $h \in Hom_{\mathscr{Q}_{fin}}((L_1, \nabla_1), (L_2, \nabla_2))$, entonces $\mathcal{S}(h) = \theta_{L_1}^{-1} \circ \mathcal{Q}^*(h) \circ \theta_{L_2}$.*

Demostración. Sea $a \in Irr(L_2)$; se demuestra que $\mathcal{S}(h)(a) = \bigwedge\{x \in L_1 \,|\, h(x) \geq a\}$. Claramente $\mathcal{S}(h)(a) \geq \bigwedge\{x \in L_1 \,|\, h(x) \geq a\}$, además como $\{x \in L_1 \,|\, h(x) \geq a\}$ es no vacío (1 le pertenece) y finito es posible escribir una lista con sus elementos

$$\{x \in L_1 \,|\, h(x) \geq a\} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Sea $\bigvee_{k=1}^{n_i} u_k^i$ la descomposición en $\vee$-irreducibles de x_i. Por definición $h(x_i) \geq a$, entonces $\bigvee_{k=1}^{n_i} h(u_k^i) \geq a$. Como $a \in Irr(L_2)$, existe $1 \leq t_i \leq n_i$ tal que $h(u_{t_i}^i) \geq a$, donde $u_{t_i}^i \in Irr(L_1)$, luego $u_{t_i}^i \geq S(h)(a)$ y $x_i \geq S(h)(a)$ pues $x_i \geq u_{t_i}^i$. Por lo tanto $\bigwedge\{x \in L_1 \,|\, h(x) \geq a\} \geq S(h)(a)$. Note que $\{x \in L_1 \,|\, h(x) \geq a\} = h^{-1}([a)) = \mathcal{Q}^*(h)(\theta_{L_2}(a))$ y a partir de esto se concluye que $\mathcal{S}(h)(a) = \bigwedge \mathcal{Q}^*(h)(\theta_{L_2}(a)) = \theta_{L_1}^{-1}(\mathcal{Q}^*(h)(\theta_{L_2}(a)))$. □

Como $\theta_{L_1}^{-1} \circ \mathcal{Q}^*(h) \circ \theta_{L_2}$ es una composición de morfismos entre Q-espacios finitos, $\mathcal{S}(h)$ resulta un morfismo entre Q-posets.

Ahora, a un Q-poset $(P, \leq, E)$ se asocia el Q-retículo distributivo finito

$$\mathcal{R}(P) := (\{I \subseteq P \,|\, I \text{ es creciente}\}, \cup, \cap, \mathbf{E}, \emptyset, P)$$

donde el cuantificador para $\mathcal{R}(P)$ se define igual que antes, es decir, $\mathbf{E}(I) := \bigcup_{x \in I} [x]_E$ para $I \subseteq P$ creciente. Si a P se le da la topología discreta entonces $\{I \subseteq P \,|\, I \text{ es creciente}\} = \{I \subseteq P \,|\, I \text{ es clopen creciente}\}$ y $\mathcal{R}(P) = \mathcal{Q}(P) \in Obj(\mathscr{Q}_{fin})$. Por último, a un morfismo $\phi : (P_1, \leq_1, E_1) \to (P_2, \leq_2, E_2)$ entre Q-posets se le asigna la función $\mathcal{R}(\phi) : \{I_2 \subseteq P_2 \,|\, I_2 \text{ es creciente}\} \to \{I_1 \subseteq P_1 \,|\, I_1 \text{ es creciente}\} : I_2 \mapsto \phi^{-1}(I_2)$, como $\mathcal{R}(\phi) = \mathcal{Q}(\phi)$, se obtiene inmediatamente por el Lema 3.27 que $\mathcal{R}(\phi)$ es un morfismo entre Q-posets.

Todo lo anterior comprueba que $\mathcal{R} : \mathscr{S}_{fin} \to \mathscr{Q}_{fin}$ y $\mathcal{S} : \mathscr{Q}_{fin} \to \mathscr{S}_{fin}$ son funtores. Sean $(P, \leq, E) \in Obj(\mathscr{S}_{fin})$, $(L, \nabla) \in Obj(\mathscr{Q}_{fin})$. Se define:

$$\xi_P : P \to \mathcal{SR}(P) : x \mapsto [x);$$
$$\kappa_L : L \to \mathcal{RS}(L) : a \mapsto \{x \in \mathcal{S}(L) \,|\, x \leq a\}.$$

Es fácil probar que $\xi_P = \theta^{-1}_{\mathcal{R}(P)} \circ \epsilon_P$ y $\kappa_L = \mathcal{R}(\theta_L) \circ \eta_L$. De esto se deduce que ξ y κ son isomorfismos naturales y se obtiene el siguiente resultado debido a Adams, Dziobiak y Cignoli.

Teorema 3.31. *[2, **Proposition 2.1.**]. Las categorías $\mathcal{S}_{fin}$ y $\mathcal{Q}_{fin}$ son dualmente equivalentes por medio de los funtores $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ y los isomorfismos naturales $\kappa : \boldsymbol{I}_{\mathcal{Q}_{fin}} \to QS$, $\xi : \boldsymbol{I}_{\mathcal{S}_{fin}} \to SQ$.*

Este teorema indica que en el caso finito las consideraciones topológicas se trivializan, pues la topología de los objetos duales a los Q-retículos distributivos finitos es discreta. Note que en general resulta más sencillo trabajar con los Q-espacios, pues sus estructuras son menos complejas que las de sus contrapartes reticulares. En particular, resulta de interés estudiar los duales de los retículos $\mathbf{D}_{pq}$, pues como Cignoli demostró, ellos generan a las subvariedades de $\mathcal{Q}$.

Recuerde que $\mathbf{D}_{pq} = (\mathbf{2}^p \times \mathbf{C}_q, \triangledown)$, donde $C_q = 2^q \oplus 1^*$ y $\triangledown$ es el cuantificador simple. Defina $P_{pq} := \mathcal{S}(D_{pq})$, entonces $P_{pq} = (Irr(D_{pq}), \leq_*, E_{pq})$. Aplicando la Proposiciones 2.31 y 2.33 se puede concluir que $Irr(D_{pq}) = \{(r_1, 0), \ldots, (r_p, 0), (0, s_1), \ldots, (0, s_q), (0, 1^*)\}$ donde los r_i, $1 \leq i \leq p$ son los átomos de $\mathbf{2}^p$, los s_j, $1 \leq j \leq q$ son los átomos de $\mathbf{2}^q$ y 1^* es el máximo de $\mathbf{C}_q$. Observe que los r_i y s_j no son comparables entre si y que con el orden dual $(0, 1^*) \leq_* (0, s_j)$ para cada $1 \leq j \leq q$. Adicionalmente, como $\mathbf{D}_{pq}$ tiene cuantificador simple, la relación de equivalencia sobre P_{pq} no es más que $E_{pq} = P_{pq} \times P_{pq}$.

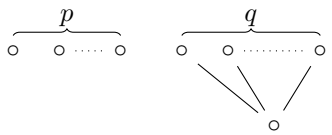

Figura 2: P_{pq}

Usando los Corolarios 3.11, 3.12 y el Lema 3.30 se obtienen los siguientes resultados.

Corolario 3.32. *Sea $h : L_1 \to L_2$ homomorfismo de Q-retículos distributivos finitos y $\phi : P_1 \to P_2$ morfismo entre Q-posets, entonces:*

- *h es inyectiva si y solo si $\mathcal{S}(h)$ es sobreyectiva.*
- *ϕ es sobreyectiva si y solo si $\mathcal{R}(\phi)$ es inyectiva.*

Corolario 3.33. *Sean h y ϕ como antes, entonces:*

- *h es sobreyectiva si y solo si $\mathcal{S}(h)$ es inmersión de orden.*
- *ϕ es inmersión de orden si y solo si $\mathcal{R}(\phi)$ sobreyectiva.*

4. Teorema Principal

Observación 4.1. Si $(P, \leq, E)$ es un Q-poset y C es una clase de equivalencia de E, entonces $(C, \leq\restriction_C, C \times C)$ donde $\leq\restriction_C$, es la restricción del orden a C, forma un Q-poset y la inclusión $i : C \to P$ es un morfismo entre Q-posets. En este caso el retículo dual de $(C, \leq\restriction_C, C \times C)$ es $(\{I \subseteq C \mid I \text{ es creciente}\}, \cup, \cap, \mathbf{E}, \emptyset, C)$ donde por definición $\mathbf{E}$ es el cuantificador simple.

El objetivo ahora es encontrar ecuaciones que caracterizan a cada una de las subvariedades $\mathscr{Q}_{pq}$. Para eso, el siguiente lema será de utilidad. La idea detrás del lema es utilizar la partición del Q-poset dual de un Q-retículo distributivo L dada por sus clases de equivalencia para definir morfismos entre Q-posets que permitan establecer la subvariedad de $\mathscr{Q}$ a la que pertenece L.

Lema 4.2. *Sea $(L, \triangledown)$ un Q-retículo distributivo finito con Q-poset dual $\mathcal{S}(L) = (Irr(L), \leq_*, E_\triangledown)$. Llame $P = Irr(L)$.*

- *Caso $q = 0$: $L \in \mathscr{Q}_{p0}$ si y solo si para cada $x \in P$, $[x]_{E_\triangledown}$ tiene a lo sumo $p - 1$ elementos maximales ó tiene exactamente p elementos todos ellos maximales.*
- *Caso $q \geq 1$: $L \in \mathscr{Q}_{pq}$ si y solo si para cada $x \in P$, $[x]_{E_\triangledown}$ tiene a lo sumo $p+q-1$ elementos maximales ó tiene $p+q$ elementos maximales y cada elemento no-maximal es acotado superiormente por al menos q elementos maximales.*

Demostración. Caso $q = 0$:

$\Rightarrow$) Suponga que $L \in \mathscr{Q}_{p0}$, $x \in P$ y $C = [x]_{E_\triangledown}$. Suponga buscando una contradicción que C tiene p elementos maximales y existe $y \in C$ no maximal, considere m_y el número de elementos maximales de C que son cota superior de y. Claramente $0 < m_y \leq p$. Recuerde que el Q-poset $P_{(p-m_y)m_y}$ tiene $p + 1$ elementos, de los cuales $p - m_y$ elementos forman una anticadena, $a_1, \ldots, a_{p-m_y}$, y m_y elementos, $y_1, \ldots, y_{m_y}$, que son cotas superiores de otro elemento u_y. Se define una función

$$\psi : P_{(p-m_y)m_y} \to P$$

tal que $\psi(u_y) = y$, y a los p elementos restantes de $P_{(p-m_y)m_y}$ los corresponde biunívocamente con los p elementos maximales de C de tal manera que $\psi(y_1), \ldots, \psi(y_{m_y})$ son cotas superiores de y. Note que por definición ψ es inmersión de orden. Por otro lado, como $\psi(P_{(p-m_y)m_y}) \subseteq C$, entonces $(a, b) \in E_{(p-m_y)m_y}$ implica $\psi(a), \psi(b) \in C = [x]_{E_\triangledown}$, es decir, $(\psi(a), \psi(b)) \in E_\triangledown$. Sean $a \in P_{(p-m_y)m_y}$ y $z \in [\psi(a)]_{E_\triangledown} = C$ maximal, nuevamente por definición de ψ, existe $y \in P_{(p-m_y)m_y} = [a]_{E_{(p-m_y)m_y}}$ tal que $z = \psi(y)$. Se concluye que ψ es morfismo entre Q-posets e inmersión de orden, luego por el Corolario 3.33

$$\mathcal{R}(\psi) : \mathcal{R}(P) \to \mathcal{R}(P_{(p-m_y)m_y})$$

es un homomorfismo sobreyectivo de Q-retículos distributivos. Por dualidad $\mathcal{R}(P) \cong L$ y $\mathcal{R}(P_{(p-m_y)m_y}) \cong D_{(p-m_y)m_y}$, entonces existe $h : L \to D_{(p-m_y)m_y}$ homomorfismo sobreyectivo de Q-retículos distributivos, es decir, $D_{(p-m_y)m_y}$ es imagen homomorfa de L. Como $L \in \mathscr{Q}_{p0}$ entonces $D_{(p-m_y)m_y} \in \mathscr{Q}_{p0}$, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, suponiendo que C tiene $m > p$ elementos maximales considere el Q-poset P_{m0} (anticadena de m elementos) y construya la función

$$\psi : P_{m0} \to P$$

que envía a los m elementos de P_{m0} de manera biunívoca a los m elementos maximales de C. Al igual que antes, esta función resulta inmersión de orden y morfismo de Q-posets y por lo tanto existe $h : L \to D_{m0}$ morfismo sobreyectivo de Q-retículos distributivos, es decir, $D_{m0} \in \mathscr{Q}_{p0}$ una contradicción. De ambos casos concluimos que $[x]_{E_\triangledown}$ tiene a lo sumo $p-1$ elementos maximales ó tiene exactamente p elementos todos ellos maximales.

$\Leftarrow$) Sean $C_1, \ldots, C_n$ las clases de equivalencia de $E_\triangledown$. Por hipótesis, para cada C_i, $1 \leq i \leq n$, hay dos posibles casos:

1. C_i tiene m_i elementos maximales, $m_i < p$.
2. C_i tiene p elementos y todos ellos son maximales.

Suponga que C_i cae en el caso 1. Si todos los elementos de C_i son maximales y no hay elementos no maximales, defina $\psi_i : P_{m_i 0} \to C_i$ como una biyección cualquiera. Si existen elementos no maximales en C_i entonces por cada $y \in C_i$ no maximal considere $0 < m_y \leq m_i$ el número de elementos maximales que acotan superiormente a y y defina similar a la función de la prueba anterior $\psi_y : P_{(m_i - m_y)m_y} \to C_i$ inmersión de orden y morfismo entre Q-espacios. Note que $y \in \psi_y(P_{(m_i-m_y)m_y})$. Ahora usando la propiedad del coproducto se obtiene la función

$$\psi_i : \coprod_{y \in C_i \text{ no maximal}} P_{(m_i - m_y)m_y} \to C_i : (a, y) \mapsto \psi_y(a).$$

Recuerde que ψ_i es morfismo entre Q-posets. Adicionalmente ψ_i es sobreyectiva, pues cada elemento maximal de C_i está en la imagen de todos los ψ_y y si $y \in C_i$ es no maximal, entonces y está en la imagen de ψ_y.

Suponga ahora que C_i cae en el caso 2. En este caso se define $\psi_i : P_{p0} \to C_i$ como una biyección cualquiera. De esta forma se ha construido una familia de morfismos $\{\psi_i : P_i \to C_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ donde $P_i = Dom(\psi_i)$. Como la inclusión de cada C_i a P es un morfismo entre Q-posets se puede considerar una nueva familia de morfismos $\{\psi_i' : P_i \to P \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ donde $\psi_i'(a) = \psi_i(a)$. Aplicando otra vez la propiedad del coproducto se produce la función

$$\psi : \coprod_{i=1}^{n} P_i \to P : (a, i) \mapsto \psi_i(a).$$

Como los C_i forman una partición de P, entonces ψ es un morfismo entre Q-posets sobreyectivo. Por dualidad $\mathcal{R}(\psi) : \mathcal{R}(P) \to \mathcal{R}\left(\coprod_{i=1}^{n} P_i\right)$ es homomorfismo inyectivo entre Q-retículos distributivo. Sin embargo, $\mathcal{R}(P) \cong L$ y $\mathcal{R}\left(\coprod_{i=1}^{n} P_i\right) \cong \prod_{i=1}^{n} \mathcal{R}(P_i) \cong \prod_{i=1}^{n} D_i$, por lo tanto existe $h : L \to \prod_{i=1}^{n} D_i$ homomorfismo inyectivo. Por la construcción cada D_i es de la forma $D_{m_i 0}$ donde $m_i < p$ ó de la forma D_{p0} ó es producto de una familia $\{D_{rs}\}$ donde $r + s = m_i < p$. En todos los casos $D_i \in \mathscr{Q}_{p0}$ por el Teorema 3.24. No es difícil probar que $h(L)$ es subálgebra de $\prod_{i=1}^{n} D_i$ y claramente L es imagen homomorfa de $h(L)$, por lo tanto L es

imagen homomorfa de una subálgebra del producto de elementos de $\mathscr{Q}_{p0}$, entonces $L \in \mathscr{Q}_{p0}$.

Caso $q \geq 1$: Similar al caso $q = 0$. En efecto:

$\Rightarrow$) Suponga que $L \in \mathscr{Q}_{pq}$, $x \in P$ y sea $C = [x]_{E_\triangledown}$. Por contradicción, suponga C tiene $p+q$ elementos maximales y existe $y \in C$ no maximal acotado superiormente por m_y elementos maximales con $0 < m_y < q$. Considere el Q-poset $P_{(p+q-m_y)m_y}$. Recuerde que $P_{(p+q-m_y)m_y}$ consiste de una anticadena de $p+q-m_y$ elementos y otros m_y elementos maximales que acotan superiormente a un único elemento u_y. Con esta información se define

$$\psi : P_{(p+q-m_y)m_y} \to P$$

tal que $\psi(u_y) = y$ y los $p+q$ elementos maximales de $P_{(p+q-m_y)m_y}$ son enviados biunívocamente a los $p+q$ elementos maximales de C de forma tal que si $a \in P_{(p+q-m_y)m_y}$ es maximal y $u_y \leq a$, entonces $y \leq \psi(a)$. Claramente ψ es inmersión de orden además de morfismo entre Q-posets y por dualidad se obtiene $h : L \to D_{(p+q-m_y)m_y}$ homomorfismo sobreyectivo de Q-retículos distributivos. Luego $D_{(p+q-m_y)m_y} \in \mathscr{Q}_{pq}$, lo que contradice el Teorema 3.24, pues $0 < m_y < q$. Ahora, si se supone que C tiene m elementos maximales con $m > p+q$, se define la función $\psi : P_{m0} \to P$ de manera que al restringir el codominio a los elementos maximales de C, ψ resulte biyección. De aquí se obtiene por dualidad que D_{m0} es imagen homomorfa de L, es decir, $D_{m0} \in \mathscr{Q}_{pq}$. De nuevo una contradicción. Se concluye que C tiene a lo sumo $p+q-1$ elementos maximales ó tiene $p+q$ elementos maximales, donde cada no maximal es acotado superiormente por al menos q elementos maximales.

$\Leftarrow$) Sean $C_1, \ldots, C_n$ las clases de equivalencia de P. Para C_i, $1 \leq i \leq n$ hay dos posibles casos:

1. C_i tiene m_i elementos maximales, $m_i < p+q$.
2. C_i tiene $p+q$ elementos maximales y cada elemento no maximal es acotado superiormente por al menos q elementos maximales.

Suponga que C_i cae en el caso 1. Si todos los elementos de C_i son maximales, entonces defina $\psi_i : P_{m_i 0} \to C_i$ como una biyección cualquiera. Si por el contrario existen elementos no maximales en C_i, para cada $y \in C_i$ no maximal, considere $0 < m_y \leq m_i$ el número de elementos maximales de C_i que acotan superiormente a y. Así como se ha mostrado antes, defina $\psi_y : P_{(m_i - m_y)m_y} \to C_i$ morfismo entre Q-posets y con ellos construya la función

$$\psi_i : \coprod_{y \in C_i \text{ no maximal}} P_{(m_i - m_y)m_y} \to C_i : (a, y) \mapsto \psi_y(a).$$

De nuevo ψ_i es morfismo entre Q-posets y es sobreyectiva.

Suponga ahora que C_i está en el caso 2. Sea $y \in C_i$ no maximal (si no existe tal y defina $\psi_i : P_{(p+q)0} \to C_i$ como una biyección cualquiera). Considere m_y la cantidad de elementos maximales de C_i que acotan superiormente a y, por hipótesis $m_y \geq q$. Se define $\psi_y : P_{(p+q-m_y)m_y} \to C_i$ de la manera usual, y así ψ_y es morfismo sobreyectivo de Q-posets. También se define $\psi_i : \coprod_{y \in C_i \text{ no maximal}} P_{(p+q-m_y)m_y} \to C_i$ a partir de las

ψ_y de la misma manera que en el caso 1.

Note que se ha construido una familia de morfismos $\{\psi_i : P_i \to C_i\}_{i=1}^n$ donde P_i es el dominio de ψ_i y en todos los casos ψ_i es sobreyectiva. Considere el morfismo

$$\psi : \coprod_{i=1}^{n} P_i \to P : (a, i) \mapsto \psi_i(a).$$

Una vez más ψ es un morfismo sobreyectivo entre Q-posets y por lo tanto existe $h : L \to \prod_{i=1}^n D_i$ homomorfismo inyectivo de Q-retículos distributivos donde $D_i = Q(P_i)$. Por esta nueva construcción cada D_i es de la forma D_{r0} con $r \leq p+q$ ó es producto de una familia $\{D_{rs}\}$ donde $r+s < p+q$ ó $r+s = p+q$ con $s \geq q$. En cualquier caso $D_i \in \mathscr{Q}_{pq}$ y por lo tanto $L \in \mathscr{Q}_{pq}$. □

Finalmente se van a enunciar las identidades que axiomatizan cada una de las subvariedades de $\mathscr{Q}$. Al igual que en el Lema anterior se van a considerar los casos $q = 0$ y $q \geq 1$. Considere la familia de identidades:

$$(\sigma_{pq}) \quad x \wedge \bigwedge_{i=1}^{p+q} \nabla x_i \approx x \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{p+q} \left(x_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \nabla x_j \right) \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p+q \\ i \neq j}} \left(\nabla(x_i \wedge x_j) \wedge \bigwedge_{k \notin \{i,j\}} \nabla x_k \right) \right.$$
$$\left. \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J \subseteq \{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j \in J} \nabla(x \wedge x_j) \wedge \bigwedge_{k \notin J} \nabla x_k \right) \right]$$

para $p \geq 0$ y $q \geq 1$.

Teorema 4.3. *Sean $p \geq 0$ y $q \geq 1$. $L \in \mathscr{Q}_{pq}$ si y solo si $L \models \sigma_{pq}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Como consecuencia del Teorema 2.19 se sigue que $Id_{\mathscr{Q}_{pq}}(X) = Id_{V(\mathbf{D}_{pq})}(X) = Id_{\{\mathbf{D}_{pq}\}}(X)$. Por lo tanto, si se consigue mostrar que $\mathbf{D}_{pq} \models \sigma_{pq}$, entonces para cualquier $L \in \mathscr{Q}_{pq}$ necesariamente $L \models \sigma_{pq}$. Recuerde que $\mathbf{D}_{pq} = \mathbf{2}^p \times (\mathbf{2}^q \oplus \mathbf{1}^*)$ está equipado con el cuantificador simple. Sean $a, a_1, \ldots, a_{p+q} \in D_{pq}$. Se realiza la prueba considerando varios casos. Para empezar, suponga que $a_l = (0,0)$ para algún $1 \leq l \leq p+q$, entonces $\nabla a_l = (0,0)$ y se puede verificar fácilmente que

$$\bigwedge_{i=1}^{p+q} \nabla a_i = (0,0),$$
$$\bigvee_{i=1}^{p+q} \left(a_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \nabla a_j \right) = \bigvee_{i=1}^{p+q} (0,0) = (0,0),$$
$$\bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p+q \\ i \neq j}} \left(\nabla(a_i \wedge a_j) \wedge \bigwedge_{k \notin \{i,j\}} \nabla a_k \right) = \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p+q \\ i \neq j}} (0,0) = (0,0),$$
$$\bigvee_{\substack{|J|=q \\ J \subseteq \{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j \in J} \nabla(a \wedge a_j) \wedge \bigwedge_{k \notin J} \nabla a_k \right) = \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J \subseteq \{1,\ldots,p+q\}}} (0,0) = (0,0).$$

Al evaluar σ_{pq} se obtiene que $a \wedge (0,0) = (0,0) = a \wedge ((0,0) \vee (0,0) \vee (0,0))$ y la identidad es válida.

Ahora suponga que $a_l \neq (0,0)$ para todo $1 \leq l \leq p+q$, entonces $\nabla a_l = (1,1^*)$ y $a \wedge \bigwedge_{i=1}^{p+q} \nabla a_i = a \wedge (1,1^*) = a$, además

$$a \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{p+q} \left(a_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \nabla a_j \right) \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p+q \\ i \neq j}} \left(\nabla(a_i \wedge a_j) \wedge \bigwedge_{k \notin \{i,j\}} \nabla a_k \right) \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J \subseteq \{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j \in J} \nabla(a \wedge a_j) \wedge \bigwedge_{k \notin J} \nabla a_k \right) \right]$$
$$= a \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{p+q} a_i \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p+q \\ i \neq j}} \nabla(a_i \wedge a_j) \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J \subseteq \{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j \in J} \nabla(a \wedge a_j) \right) \right].$$

Note que si $a_i \wedge a_j \neq (0,0)$ para algunos $1 \leq i < j \leq p+q$, necesariamente $\nabla(a_i \wedge a_j) = (1,1^*)$ y se puede decir que

$$a \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{p+q} a_i \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p+q \\ i \neq j}} \nabla(a_i \wedge a_j) \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J \subseteq \{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j \in J} \nabla(a \wedge a_j) \right) \right] = a \wedge (1,1^*) = a.$$

Por lo tanto la identidad es válida nuevamente. En caso contrario $a_i \wedge a_j = (0,0)$ para todos $1 \leq i,j \leq p+q$, $i \neq j$. De aquí que $\nabla(a_i \wedge a_j) = (0,0)$ y

$$a \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{p+q} a_i \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p+q \\ i \neq j}} \nabla(a_i \wedge a_j) \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J \subseteq \{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j \in J} \nabla(a \wedge a_j) \right) \right]$$
$$= a \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{p+q} a_i \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J \subseteq \{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j \in J} \nabla(a \wedge a_j) \right) \right].$$

Recuerde que $Irr(D_{pq}) = \{(r_1,0),\ldots,(r_p,0),(0,s_1),\ldots,(0,s_q),(0,1^*)\}$ donde los r_i son los átomos de $\mathbf{2}^p$, los s_j átomos de $\mathbf{2}^q$ y 1^* es el máximo de $\mathbf{C}_q$. Para cada $1 \leq i \leq p+q$ considere el conjunto

$$A_i = \{x \in Irr(D_{pq}) \,|\, x \leq a_i\}.$$

Como $a_i \neq (0,0)$, por el Teorema 2.29 se tiene que $a_i = \bigvee A_i$ y claramente $A_i \neq \emptyset$. Por hipótesis $a_i \wedge a_j = (0,0)$ para todos i,j distintos; esto implica que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos i,j distintos. Suponga que $q = 1$ y que $(0,1^*) \in A_i$ para algún $1 \leq i \leq p+1$. Entonces $A_i = \{(0,s_1),(0,1^*)\}$, $a_i = (0,1^*)$ y $|A_j| = 1$ para $j \neq i$.

Note que $\bigvee_{j\neq i} a_j = (1,0)$ y de allí $\bigvee_{i=1}^{p+q} a_i = (1,1^*)$, luego

$$a \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{p+q} a_i \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J\subseteq\{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j\in J} \nabla(a\wedge a_j) \right) \right] = a \wedge \left[(1,1^*) \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J\subseteq\{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j\in J} \nabla(a\wedge a_j) \right) \right] = a \wedge (1,1^*) = a.$$

De esta forma la identidad es válida una vez más.

Si $q \geq 2$ y $(0,1^*) \in A_i$ para algún $1 \leq i \leq p+q$, entonces $A_i = \{(0,s_1),\ldots,(0,s_q),(0,1^*)\}$ y $|\,A_i\,| \geq 3$, pero no es posible tener $p+q$ subconjuntos disyuntos no vacíos de un conjunto de $p+q+1$ elementos donde uno de los subconjuntos tenga más de dos elementos.

Resta estudiar el caso en que $(0,1^*) \notin A_i$ para cada i, caso en el cuál $|A_i| = 1$ para todo $1 \leq i \leq p+q$. Observe que $\bigvee_{i=1}^{p+q} a_i = (1,1)$ y así

$$a \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{p+q} a_i \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J\subseteq\{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j\in J} \nabla(a\wedge a_j) \right) \right] = a \wedge \left[(1,1) \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J\subseteq\{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j\in J} \nabla(a\wedge a_j) \right) \right].$$

Si existe $J \subseteq \{1,\ldots,p+q\}$ con $|J| \geq q$, tal que $a \geq a_j$ para $j \in J$, entonces $a \wedge a_j = a_j$ y $\bigwedge_{j\in J} \nabla(a\wedge a_j) = (1,1^*)$, luego

$$a \wedge \left[(1,1) \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J\subseteq\{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j\in J} \nabla(a\wedge a_j) \right) \right] = a \wedge \big[(1,1) \vee (1,1^*)\big] = a \wedge (1,1^*) = a.$$

Por ultimo, suponga que a acota superiormente a lo sumo $q-1$ elementos en $\{a_1,\ldots,a_{p+q}\}$, entonces para cualquier $J \subseteq \{1,\ldots,p+q\}$, $|J| = q$, existe $j \in J$ tal que $a \wedge a_j = (0,0)$ (pues los a_j son los átomos de $\mathbf{D}_{pq}$) y como resultado $\nabla(a\wedge a_j) = (0,0)$ y $\bigwedge_{j\in J} \nabla(a\wedge a_j) = (0,0)$, por lo tanto

$$a \wedge \left[(1,1) \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J\subseteq\{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j\in J} \nabla(a\wedge a_j) \right) \right] = a \wedge \big[(1,1) \vee (0,0)\big] = a \wedge (1,1).$$

Ahora note que $a \wedge (1,1) \neq a$ implica $a = (x,1^*)$ para algún $x \in 2^p$. En efecto, si $a = (x,y)$ con $y \neq 1^*$, entonces $y \wedge 1 = y$ y $a \wedge (1,1) = a$. Claramente $(x,1^*)$ es cota superior de $\{(0,s_1),\ldots,(0,s_q)\} \subseteq \{a_1,\ldots,a_{p+q}\}$, pero se está suponiendo que a acota a lo sumo $q-1$ elementos de $\{a_1,\ldots,a_{p+q}\}$, una contradicción. Se concluye que $a \wedge (1,1) = a$ y finalmente se ha mostrado que $\mathbf{D}_{pq}$ satisface la identidad para cualquier posible

escogencia de $a, a_1, \dots a_{p+q} \in D_{pq}$, es decir, $\mathbf{D}_{pq} \models \sigma_{pq}$ y por la observación al inicio de la prueba se llega al resultado deseado.

$\Leftarrow$) Suponga que $L \models \sigma_{pq}$. Sea Σ el conjunto de identidades que definen a los Q-retículos distributivos. Por el Teorema 2.21 la clase $Mod(\Sigma \cup \{\sigma_{pq}\}) \subsetneq \mathscr{Q}$ es una subvariedad de $\mathscr{Q}$. Claramente $L \in Mod(\Sigma \cup \{\sigma_{pq}\})$ y por el Teorema 3.24 existen $r, s \in \omega \times \omega$ tales que $\mathscr{Q}_{rs} = Mod(\Sigma \cup \{\sigma_{pq}\})$. Recuerde que por definición $\mathscr{Q}_{rs} = V(\mathbf{D}_{rs})$ y de esta forma al aplicar el Teorema 2.13 se obtiene que $\mathscr{Q}_{rs}$ es localmente finita y como $L \in \mathscr{Q}_{rs}$ entonces L es a su vez localmente finita. El Teorema 2.22 indica que para verificar que $L \in \mathscr{Q}_{pq}$ es suficiente mostrar que las subálgebras finitamente generadas de L pertenecen a $\mathscr{Q}_{pq}$. Sea $(A, \triangledown) \leq L$ finitamente generada, entonces $(A, \triangledown) \models \sigma_{pq}$ y $(A, \triangledown)$ es un Q-retículo distributivo finito. Por contradicción, si $(A, \triangledown) \notin \mathscr{Q}_{pq}$ por el Lema 4.2 existen $a, a_1, \dots, a_{p+q} \in A$ elementos $\vee$-irreducibles distintos tales que:

- $a_i \in [a]_E$, es decir, $\triangledown a_i = \triangledown a$ para $1 \leq i \leq p+q$, .
- $a_1, \dots, a_{p+q}$ son maximales en $[a]_E$ con el orden dual $\leq_*$, es decir, si $b \in [a]_E$ y $b \leq a_i$, entonces $b = a_i$.
- a acota superiormente a lo sumo $q-1$ elementos de $\{a_1, \dots, a_{p+q}\}$ con el orden $\leq$.

Como $(A, \triangledown) \models \sigma_{pq}$ entonces

$$a \wedge \bigwedge_{i=1}^{p+q} \triangledown a_i = a \wedge \left[\bigvee_{i=1}^{p+q} \left(a_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \triangledown a_j \right) \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p+q \\ i \neq j}} \left(\triangledown(a_i \wedge a_j) \wedge \bigwedge_{k \notin \{i,j\}} \triangledown a_k \right) \right.$$
$$\left. \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J \subseteq \{1,\dots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j \in J} \triangledown(a \wedge a_j) \wedge \bigwedge_{k \notin J} \triangledown a_k \right) \right].$$

Esta expresión se puede simplificar bastante gracias a la escogencia de los $a, a_1, \dots, a_{p+q}$. Por un lado, como para todo $i \in \{1, \dots, p+q\}$, $\triangledown a = \triangledown a_i$,

$$a \wedge \bigwedge_{i=1}^{p+q} \triangledown a_i = a \wedge \triangledown a = a,$$
$$\bigvee_{i=1}^{p+q} \left(a_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \triangledown a_j \right) = \bigvee_{i=1}^{p+q} (a_i \wedge \triangledown a_i) = \bigvee_{i=1}^{p+q} a_i.$$

Por otro lado, por la definición de cuantificador, si $x, y \in A$, entonces $\triangledown(x \wedge y) \wedge \triangledown x = \triangledown(x \wedge y \wedge \triangledown x) = \triangledown(x \wedge y)$, luego

$$\bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p+q \\ i \neq j}} \left(\triangledown(a_i \wedge a_j) \wedge \bigwedge_{k \notin \{i,j\}} \triangledown a_k \right) = \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p+q \\ i \neq j}} \left(\triangledown(a_i \wedge a_j) \wedge \triangledown a_i \right) = \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p+q \\ i \neq j}} \triangledown(a_i \wedge a_j),$$
$$\bigvee_{\substack{|J|=q \\ J \subseteq \{1,\dots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j \in J} \triangledown(a \wedge a_j) \wedge \bigwedge_{k \notin J} \triangledown a_k \right) = \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J \subseteq \{1,\dots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j \in J} \triangledown(a \wedge a_j) \wedge \triangledown a \right) = \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J \subseteq \{1,\dots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j \in J} \triangledown(a \wedge a_j) \right).$$

Haciendo la sustituciones respectivas se obtiene

$$a \leq \bigvee_{i=1}^{p+q} a_i \vee \bigvee_{\substack{1\leq i,j\leq p+q \\ i\neq j}} \triangledown(a_i \wedge a_j) \vee \bigvee_{\substack{|J|=q \\ J\subseteq\{1,\ldots,p+q\}}} \left(\bigwedge_{j\in J} \triangledown(a \wedge a_j) \right).$$

Como a es $\vee$-irreducible se puede aplicar el Lema 2.28 y se tienen tres posibilidades:

1. $a \leq a_i$ para algún $1 \leq i \leq p+q$.
2. $a \leq \triangledown(a_i \wedge a_j)$ para algunos $1 \leq i, j \leq p+q$, $i \neq j$.
3. $a \leq \bigwedge_{j\in J} \triangledown(a \wedge a_j)$ para un $J \subseteq \{1, \ldots, p+q\}$, $|J| = q$.

Suponga que ocurre 1. Por la maximalidad de a_i, $a = a_i$ una contradicción. Suponga que ocurre 2. Por el Teorema 3.26 existe $b \in [a]_E$ tal que $b \leq a_i \wedge a_j$, pero esto implica que $a_i = b = a_j$, nuevamente una contradicción. Suponga que ocurre 3. Por la escogencia del a existe $k \in J$ tal que $a_k \not\leq a$, pero $a \leq \triangledown(a \wedge a_k)$. Usando una vez más el Teorema 3.26 se obtiene un $b \in [a]_E$ tal que $b \leq a \wedge a_k \leq a_k$ y como consecuencia $b = a_k$, es decir, $a_k \leq a \wedge a_k \leq a$, lo cuál contradice que $a_k \not\leq a$. Ya que ninguna opción es posible se puede concluir que $(A, \triangledown) \in \mathscr{Q}_{pq}$ y esto conlleva a que $L \in \mathscr{Q}_{pq}$. □

Para terminar esta sección se plantearán las identidades para el caso $q = 0$ y se probará un teorema análogo al anterior.

$$(\sigma_{p0}) \quad \bigwedge_{i=1}^{p} \triangledown x_i \approx \bigvee_{i=1}^{p} \left(x_i \wedge \bigwedge_{j\neq i} \triangledown x_j \right) \vee \bigvee_{\substack{1\leq i,j\leq p \\ i\neq j}} \left(\triangledown(x_i \wedge x_j) \wedge \bigwedge_{k\notin\{i,j\}} \triangledown x_k \right)$$

Teorema 4.4. *Sea $p \geq 0$. $L \in \mathscr{Q}_{p0}$ si y solo si $L \models \sigma_{p0}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Al igual que en la prueba del teorema anterior solamente es necesario mostrar que $\sigma_{p0} \in Id_{\{\mathbf{D}_{p0}\}}(X) = Id_{\mathscr{Q}_{p0}}(X)$. Sean $a_1, \ldots, a_p \in D_{p0}$. Recuerde que $\mathbf{D}_{p0} = \mathbf{2}^p \times \mathbf{C}_0$, $C_0 = \{0\}$ y $\mathbf{D}_{p0}$ está equipado con el cuantificador simple. Se realiza la prueba considerando varios casos. Primero, suponga que $a_l = (0,0)$ para algún $1 \leq l \leq p$, entonces $\triangledown a_l = (0,0)$ y adicionalmente

$$\bigwedge_{i=1}^{p} \triangledown a_i = (0,0),$$

$$\bigvee_{i=1}^{p} \left(a_i \wedge \bigwedge_{j\neq i} \triangledown a_j \right) = \bigvee_{i=1}^{p} (0,0) = (0,0),$$

$$\bigvee_{\substack{1\leq i,j\leq p \\ i\neq j}} \left(\triangledown(a_i \wedge a_j) \wedge \bigwedge_{k\notin\{i,j\}} \triangledown a_k \right) = \bigvee_{\substack{1\leq i,j\leq p \\ i\neq j}} (0,0) = (0,0).$$

Como $(0,0) = (0,0) \vee (0,0)$ la identidad es válida para tales a_i‘s. Por otro lado, suponga que $a_l \neq (0,0)$ para

todo $1 \leq l \leq p$. Por definición del cuantificador $\nabla a_l = (1,0)$ para cada l entre 1 y p, luego $\bigwedge_{i=1}^{p} \nabla a_i = (1,0)$ y

$$\bigvee_{i=1}^{p} \left(a_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \nabla a_j \right) \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p+q \\ i \neq j}} \left(\nabla(a_i \wedge a_j) \wedge \bigwedge_{k \notin \{i,j\}} \nabla a_k \right) = \bigvee_{i=1}^{p} a_i \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p \\ i \neq j}} \nabla(a_i \wedge a_j).$$

Si existen $1 \leq i < j \leq p$ tales que $a_i \wedge a_j \neq (0,0)$, entonces $\nabla(a_i \wedge a_j) = (1,0)$ y

$$\bigvee_{i=1}^{p} a_i \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p \\ i \neq j}} \nabla(a_i \wedge a_j) = \bigvee_{i=1}^{p} a_i \vee (1,0) = (1,0).$$

Esto quiere decir que la identidad es válida en este caso. Si por el contrario $a_i \wedge a_j = (0,0)$ para cualesquiera $1 \leq i, j \leq p$, $i \neq j$, entonces

$$\bigvee_{i=1}^{p} a_i \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p \\ i \neq j}} \nabla(a_i \wedge a_j) = \bigvee_{i=1}^{p} a_i \vee (0,0) = \bigvee_{i=1}^{p} a_i.$$

Bajo estas hipótesis se puede probar que los a_i son los p átomos de $\mathbf{D}_{p0} \cong \mathbf{2}^p$ y por lo tanto $\bigvee_{i=1}^{p} a_i = (1,0)$. En todos los casos las funciones correspondientes a los términos que componen la identidad coinciden. Eso demuestra que $\sigma_{p0} \in Id_{\mathscr{Q}_{p0}}(X)$, es decir, si $L \in \mathscr{Q}_{p0}$ entonces $L \models \sigma_{p0}$.

$\Leftarrow$) Como se vio en la prueba del teorema anterior es suficiente mostrar que para cualquier Q-retículo distributivo finito (A, ∇), si $(A, \nabla) \models \sigma_{p0}$, entonces $(A, \nabla) \in \mathscr{Q}_{p0}$. Por contradicción. Suponga que$(A, \nabla) \notin \mathscr{Q}_{p0}$, por el Lema 4.2 existen $a, a_1, \ldots, a_p \in A$ elementos $\vee$-irreducibles distintos tales que:

- $a_i \in [a]_E$, es decir, $\nabla a_i = \nabla a$ para $1 \leq i \leq p$.
- $a_1, \ldots, a_p$ son maximales en $[a]_E$ con el orden $\leq_*$, es decir, si $b \in [a]_E$ y $b \leq a_i$ entonces $b = a_i$.

Para estos elementos se puede verificar fácilmente que

$$\bigwedge_{i=1}^{p} \nabla a_i = \nabla a,$$

$$\bigvee_{i=1}^{p} \left(a_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \nabla a_j \right) = \bigvee_{i=1}^{p} a_i,$$

$$\bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p \\ i \neq j}} \left(\nabla(a_i \wedge a_j) \wedge \bigwedge_{k \notin \{i,j\}} \nabla a_k \right) = \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p \\ i \neq j}} \nabla(a_i \wedge a_j).$$

Ya que $(A, \triangledown) \models \sigma_{p0}$, se obtiene que $\triangledown a = \bigvee_{i=1}^{p} a_i \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p \\ i \neq j}} \triangledown(a_i \wedge a_j)$ y por lo tanto

$$a \leq \bigvee_{i=1}^{p} a_i \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq p \\ i \neq j}} \triangledown(a_i \wedge a_j).$$

Aplicando el Lema 2.28 debe ocurrir alguna de las siguientes opciones:

1. $a \leq a_i$ para algún $1 \leq i \leq p$.
2. $a \leq \triangledown(a_i \wedge a_j)$ para algunos $1 \leq i < j \leq p$.

El primer caso no es posible pues implica $a = a_i$ y por hipótesis a y a_i son distintos. Para el segundo caso se utiliza el Teorema 3.26 para garantizar la existencia de un $b \in [a]_E$ tal que $b \leq a_i \wedge a_j$, pero de aquí $a_i = b = a_j$, una contradicción. Como consecuencia $(A, \triangledown) \in \mathscr{Q}_{p0}$. $\square$

5. Otras Ecuaciones

Ahora se enuncia el teorema de Petrovich [20] que da identidades para las subvariedades de $\mathscr{Q}$.

Teorema 5.1. *Para cada natural $p \neq 0$, la variedad $\mathscr{Q}_{p0}$ es caracterizada por la ecuación:*

$$(I_p) : \left(\bigwedge_{k=1}^{p} \nabla x_k\right) \wedge \left[\left(\bigvee_{1\leq i<j\leq p} \nabla(x_i \wedge x_j)\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{p} x_i\right)\right] = \bigwedge_{k=1}^{p} \nabla x_k.$$

Para cada natural p, la variedad $\mathscr{Q}_{p1}$ es caracterizada por la ecuación:

$$(I_{p1}) : \left(\bigwedge_{k=1}^{p+2} \nabla x_k\right) \wedge \left(\bigvee_{1\leq i<j\leq p+2} \nabla(x_i \wedge x_j)\right) = \bigwedge_{k=1}^{p+2} \nabla x_k.$$

Para cualesquiera naturales p y $q \geq 2$, la variedad $\mathscr{Q}_{pq}$ es caracterizada por la ecuación:

$$(I_{pq}) : \left(\bigwedge_{k=1}^{p+q} \nabla x_k\right) \wedge [t(x_1, x_2, \ldots x_{p+q+1}) \vee x_{p+q+1}] =$$
$$\left(\bigwedge_{k=1}^{p+q} \nabla x_k\right) \wedge \left[t(x_1, x_2, \ldots x_{p+q+1}) \vee \left(x_{p+q+1} \wedge \left(\bigvee_{k=p+2}^{p+q} x_k\right)\right)\right].$$

donde

$$t(x_1, x_2, \ldots, x_{p+q+1}) = \left(\bigvee_{1\leq i<j\leq p+q} \nabla(x_i \wedge x_j)\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{p+1} \nabla(x_{p+q+1} \wedge x_i)\right).$$

Antes de revisar la demostración que hace Petrovich de este resultado se probará el siguiente lema.

Lema 5.2. *Sea $(L, \nabla) \in Obj(\mathscr{Q}_{fin})$ donde ∇ es el cuantificador simple.*

1. *$L \models I_p$ si y solo si para cada $\{a_1, \ldots, a_p\} \subseteq L$ con $a_i \neq 0$ y $a_i \wedge a_j = 0$ para $1 \leq i, j \leq p$, $i \neq j$, entonces $a_1 \vee \cdots \vee a_p = 1$.*

2. *$L \models I_{p1}$ si y solo si no existe $\{a_1, \ldots, a_{p+2}\} \subseteq L$ donde $a_i \neq 0$ y $a_i \wedge a_j = 0$ para $1 \leq i, j \leq p+2$, $i \neq j$.*

3. *$L \models I_{pq}$ si y solo si para cada $\{a_1, \ldots, a_{p+q}\} \subseteq L$ con $a_i \neq 0$, $a_i \wedge a_j = 0$ para $1 \leq i, j \leq p+q$, $i \neq j$, y $b \wedge a_i = 0$ para $1 \leq i \leq p+1$, se tiene que $b \leq a_{p+2} \vee \cdots \vee a_{p+q}$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$) Suponga que $L \models I_p$ y sea $\{a_1, \ldots, a_p\}$ como en el enunciado. Primero observe que $\nabla a_i = 1$ y $\nabla(a_i \wedge a_j) = 0$ para $1 \leq i, j \leq p$, $i \neq j$. Luego

$$\bigvee_{i=1}^{p} a_i = 1 \wedge \left[0 \vee \left(\bigvee_{i=1}^{p} a_i\right)\right] = \left(\bigwedge_{k=1}^{p} \nabla a_k\right) \wedge \left[\left(\bigvee_{1\leq i<j\leq p} \nabla(a_i \wedge a_j)\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{p} a_i\right)\right] = \bigwedge_{k=1}^{p} \nabla a_k = 1.$$

$\Leftarrow$) Sean $a_1, \ldots, a_p \in L$. Por casos. Si $a_k = 0$ para algún $a_k \in \{a_1, \ldots, a_p\}$, entonces $\bigwedge_{k=1}^{p} \nabla a_k = 0$ y

$$\left(\bigwedge_{k=1}^{p} \nabla a_k\right) \wedge \left[\left(\bigvee_{1\leq i<j\leq p} \nabla(a_i \wedge a_j)\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{p} a_i\right)\right] = 0 = \bigwedge_{k=1}^{p} \nabla a_k.$$

Suponga que $a_k \neq 0$, $1 \leq k \leq p$. Si $a_i \wedge a_j \neq 0$ para algunos $1 \leq i < j \leq p$, entonces $\bigvee_{1\leq i<j\leq p} \nabla(a_i \wedge a_j) = 1$, luego

$$\left(\bigwedge_{k=1}^{p} \nabla a_k\right) \wedge \left[\left(\bigvee_{1\leq i<j\leq p} \nabla(a_i \wedge a_j)\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{p} a_i\right)\right] = \left(\bigwedge_{k=1}^{p} \nabla a_k\right) \wedge 1 = \bigwedge_{k=1}^{p} \nabla a_k.$$

Suponga que $a_1 \wedge a_j = 0$ para todo $1 \leq i < j \leq p$. Por hipótesis $\bigvee_{i=1}^{p} a_i = 1$, por lo tanto

$$\left(\bigwedge_{k=1}^{p} \nabla a_k\right) \wedge \left[\left(\bigvee_{1\leq i<j\leq p} \nabla(a_i \wedge a_j)\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{p} a_i\right)\right] = \left(\bigwedge_{k=1}^{p} \nabla a_k\right) \wedge 1 = \bigwedge_{k=1}^{p} \nabla a_k.$$

Se concluye que para todas las posibles p-tuplas $a_1, \ldots, a_p$ la identidad se mantiene, es decir, $L \models I_p$.

2. $\Rightarrow$) Por reducción al absurdo. Si existiera tal subconjunto $\{a_1, \ldots, a_{p+2}\} \subseteq L$, necesariamente $\bigwedge_{k=1}^{p+2} \nabla a_k = 1$ y $\bigvee_{1\leq i<j\leq p+2} \nabla(a_i \wedge a_j) = 0$ pero como $L \models I_{p1}$

$$0 = 1 \wedge 0 = \left(\bigwedge_{k=1}^{p+2} \nabla a_k\right) \wedge \left(\bigvee_{1\leq i<j\leq p+2} \nabla(a_i \wedge a_j)\right) = \bigwedge_{k=1}^{p+2} \nabla a_k = 1.$$

$\Leftarrow$) Sean $a_1, \ldots, a_{p+2} \in L$. Si $a_k = 0$ para algún $k \in \{1, \ldots, p+2\}$, se puede afirmar que $\bigwedge_{k=1}^{p+2} \nabla a_k = 0$ y reemplazando se verifica que la ecuación es cierta para esta escogencia. Suponga que $a_k \neq 0$ para cada $1 \leq k \leq p+2$, luego $\bigwedge_{k=1}^{p+2} \nabla a_k = 1$. Por hipótesis existen $1 \leq i < j \leq p+2$ tales que $a_i \wedge a_j \neq 0$, por consiguiente $\bigvee_{1\leq i<j\leq p+2} \nabla(a_i \wedge a_j) = 1$ y de ahí

$$\left(\bigwedge_{k=1}^{p+2} \nabla a_k\right) \wedge \left(\bigvee_{1\leq i<j\leq p+2} \nabla(a_i \wedge a_j)\right) = 1 \wedge 1 = 1 = \bigwedge_{k=1}^{p+2} \nabla a_k.$$

En resumen $L \models I_{p1}$.

3. $\Rightarrow$) Suponga que $L \models I_{pq}$. Sean $a_1, \ldots, a_{p+q}, b$ como en el enunciado. Entonces $\bigwedge_{k=1}^{p+q} \nabla a_k = 1$ y

$$t(a_1, a_2, \ldots, a_{p+q}, b) = \left(\bigvee_{1 \leq i < j \leq p+q} \nabla(a_i \wedge a_j) \right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{p+1} \nabla(b \wedge a_i) \right) = 0 \vee 0 = 0.$$

Reemplazando en I_{pq} se obtiene $b = b \wedge \left(\bigvee_{k=p+2}^{p+q} x_k \right)$, es decir, $b \leq \bigvee_{k=p+2}^{p+q} x_k$.

$\Leftarrow$) Sean $a_1, \ldots, a_{p+q}, b \in L$. Como es habitual la prueba se hará por casos. Para el primer caso, si $a_k = 0$ para algún $k \in \{1, \ldots, p+q\}$, entonces $\bigwedge_{k=1}^{p+q} \nabla a_k = 0$ e inmediatamente la ecuación es verdadera. Suponga que $a_k \neq 0$ para todo $1 \leq k \leq p+q$, así $\bigwedge_{k=1}^{p+q} \nabla a_k = 1$. Si existen $1 \leq i < j \leq p+q$ tales que $a_i \wedge a_j \neq 0$, se deduce que $t(a_1, a_2, \ldots, a_{p+q}, b) = 1$ y en este caso

$$1 \wedge [1 \vee b] = 1 = 1 \wedge \left[1 \vee \left(b \wedge \left(\bigvee_{k=p+2}^{p+q} a_k \right) \right) \right].$$

Suponga que $a_i \wedge a_j = 0$ para todo $1 \leq i < j \leq p+q$. Si $b \wedge a_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, \ldots, p+1\}$, observe que $t(a_1, a_2, \ldots, a_{p+q}, b) = \bigvee_{i=1}^{p+1} \nabla(b \wedge a_i) = 1$, y al igual que en el caso anterior la igualdad se mantiene.

Suponga ahora que $b \wedge a_i = 0$ para cada $1 \leq i \leq p+1$, de esta forma $t(a_1, a_2, \ldots, a_{p+q}, b) = 0$ y por hipótesis $b \leq \bigvee_{k=p+2}^{p+q} x_k$, es decir, $b = b \wedge \left(\bigvee_{k=p+2}^{p+q} x_k \right)$. Por lo tanto al reemplazar en la ecuación se llega a que

$$1 \wedge [0 \vee b] = b = 1 \wedge [0 \vee b] = 1 \wedge \left[0 \vee \left(b \wedge \left(\bigvee_{k=p+2}^{p+q} a_k \right) \right) \right].$$

En conclusión la ecuación se mantiene para cualquier $(p+q+1)$-tupla en L y como consecuencia $L \models I_{pq}$. $\square$

Llame Σ al conjunto de identidades que definen a los Q-retículos distributivos. Sea I alguna de las ecuaciones anteriores entonces $Mod(\Sigma \cup \{I\}) \subset \mathscr{Q}$ es una subvariedad por el Teorema 2.21. Por otra parte, el Teorema 3.24 dice que $Mod(\Sigma \cup \{I\}) = \mathscr{Q}_{rs}$ para algunos $r, s < \omega$. Usando el lema anterior, Petrovich muestra que $\mathbf{D}_{p0} \models I_p$, $\mathbf{D}_{0p} \not\models I_p$ ($\mathbf{D}_{0p}$ no satisface I_p), $\mathbf{D}_{p1} \models I_{p1}$, $\mathbf{D}_{p+20} \not\models I_{p1}$ y para $q \geq 2$, $\mathbf{D}_{pq} \models I_{pq}$ pero $\mathbf{D}_{p+1q-1} \not\models I_{pq}$. Esto es suficiente para obtener el teorema, dado que el retículo de subvariedades de $\mathscr{Q}$ es una cadena y cada subvariedad está generada por los $\mathbf{D}_{pq}$. Por ejemplo $\mathbf{D}_{p0} \in Mod(\Sigma \cup \{I_p\})$, luego $\mathscr{Q}_{p0} \subseteq Mod(\Sigma \cup \{I_p\})$, por otro lado $\mathbf{D}_{0p} \notin Mod(\Sigma \cup \{I_p\})$, es decir, $Mod(\Sigma \cup \{I_p\}) \subsetneq \mathscr{Q}_{0p}$ y como entre $\mathscr{Q}_{p0}$ y $\mathscr{Q}_{0p}$ no hay subvariedades se concluye que $Mod(\Sigma \cup \{I_p\}) = \mathscr{Q}_{p0}$. De forma similar $Mod(\Sigma \cup \{I_{p1}\}) = \mathscr{Q}_{p1}$ y $Mod(\Sigma \cup \{I_{pq}\}) = \mathscr{Q}_{pq}$.

6. Conclusión

La dualidad es una herramienta imprescindible en la demostración del Lema 4.2, el cual es a su vez utilizado para obtener los dos teoremas de la Sección 4 que establecen nuevas ecuaciones para las subvariedades de $\mathscr{Q}$. No obstante, tal y como había mostrado Petrovich, es posible analizar directamente las propiedades de los Q-retículos distributivos $\mathbf{D}_{pq}$, sin recurrir a la dualidad, para encontrar tales identidades.

Una comparación rápida entre las ecuaciones descritas por Petrovich y las establecidas en esta tesis revela que la cantidad de variables utilizadas para caracterizar a la misma subvariedad de $\mathscr{Q}$ coincide. A partir de esto resulta natural preguntar cuál es la menor cantidad de variables necesarias. En [20] Petrovich resuelve esta pregunta al demostrar que el mínimo número de variables para cualquiera de estas ecuaciones coincide con la mínima cantidad de generadores necesarios para generar el álgebra finita subdirectamente irreducible que genera al sucesor de la subvariedad, por tal motivo es posible encontrar para ciertas subvariedades ecuaciones que las caractericen con un número menor de variables que las que han sido presentadas antes.

Ahora bien, vale la pena observar que Petrovich considera tres familias diferentes de ecuaciones luego de dividir el caso más general $q \geq 1$ en los subcasos $q = 1$ y $q \geq 2$. Sin embargo, la familia de ecuaciones σ_{pq} no atiende esta distinción y consigue abarcar ambas posibilidades. Al revisar nuevamente la demostración del Teorema 4.3 el lector se dará cuenta que ambos subcasos son examinados para probar la primera implicación y que de esta forma las σ_{pq}, $q \geq 1$ funcionan en las dos situaciones. Esta diferencia radica en la aplicación del Lema 4.2, el cual nuevamente no diferencia entre $q = 1$ y $q \geq 2$.

Referencias

[1] L.M. Acosta, Temas de Teoría de Retículos, Universidad Nacional de Colombia (2016).

[2] M.E. Adams and W. Dziobiak, Quasivarieties of distributive lattices with a quantifier, Discrete Math. 135 (1994) 15-28.

[3] M.E. Adams and W. Dziobiak, Endomorphisms of distributive lattices with a quantifier, International Journal of Algebra and Computation, Vol. 17, No. 7 (2007) 1349-1376.

[4] R. Balbes and P. Dwinger, Distributive Lattices (University of Missouri Press, Columbia, MO, 1974).

[5] S. Burris and H.P. Sankappanavar, A course in Universal Algebra, Graduate Texts in Mathematics, Vol 78 (Springer, Berlin, 1981).

[6] R. Cignoli, Quantifiers on distributive lattices, Discrete Math. 96 (1991) 183-197.

[7] S. Givant, Duality Theories for Boolean Algebras with Operators, Springer Monographs in Mathematics, (Springer, Switzerland, 2014).

[8] P.R. Halmos, Algebraic Logic (Chelsea, New York, 1962).

[9] P.R. Halmos, Algebraic Logic, I. Monadic Boolean algebras, Compositio Math. 12 (1955) 217-249.

[10] P.R. Halmos, Lectures on Boolean Algebras, Van Nostrand Studies 1, Princenton, New Jersey (1963).

[11] P.T. Johnstone, Stone Spaces, Cambridge Univ. Press (1982).

[12] B. Jónsson, Algebras whose congruence lattices are distributive, Math. Scand. 21 (1967).

[13] B. Jónsson and Alfred Tarski, Boolean algebras with operators. Part I, American Journal of Math. Vol. 73, No. 4 (1951) 891-939.

[14] S. Mac lane, Categories for the Working Mathematician, 2nd ed, Graduate Texts in Mathematics, Vol 5, Springer, (1998).

[15] A. Malcev, On the general theory of algebraic systems, Mat. Sb. (77) 35 (1954) 3-20.

[16] G. Markowsky, Some combinatorial aspects of lattice theory, Lattice Theory Conf. Houston (1973).

[17] D. Monk, On equational classes of algebraic versions of logic I, Math. Scand. 27 (1970) 53-71.

[18] L. Monteiro, Algèbres de Boole monadiques libres, Algebra Universalis 8 (1978) 374-380.

[19] J.M. Munkres, Topology a first course, Prentice-Hall, Inc., New Jersey (1975).

[20] A. Petrovich, Equations in the theory of Q-distributive lattices, Discrete Math. 175 (1997) 211-219.

[21] H.A. Priestley, Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces, Bull. London Math. Soc. 2 (1970) 186-190.

[22] H.A. Priestley, Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices, Proc. London Math. Soc. 4 (3) (1972) 507-530.

[23] M.H. Stone, The theory of representations for Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 40, (1936) 37-111.

[24] M.H. Stone, Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics, Casopis. Pest. Math. 67 (1937) 1-25.

[25] O. Varsavsky, Quantifiers and equivalence relations, Revista matemática cuyana, Vol. 2 no. 1 (1956) 29–51.

[26] D. van der Zypen, Aspects of Priestley Duality, Phd Thesis, Mathematisches Institut der Universität Bern (2004).