Programa Didáctico a Código Abierto de Análisis Dinámico de Estructuras
UNDIN 1.0

Tesis de Maestría presentada por

Ing. Francisco Leonardo Noy Hilarión

Dirigida por

Ing, MSc, PhD. Dorian Luis Linero Segrera

Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá
Facultad de Ingeniería
Maestría en Ingeniería – Estructuras
Bogotá D.C., Noviembre de 2013

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

NOTA DE ACEPTACIÓN

FIRMA DEL DIRECTOR DE TÉSIS
Ing, MSc, PhD. Dorian Luis Linero Segrera

FIRMA DEL JURADO
Ing, MSc, PhD. Maritzabel Molina Herrera

FIRMA DEL JURADO
Ing, MSc. José Ricardo Martínez Vargas

Bogotá D.C., Noviembre de 2013

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Dedicado a mis padres, hermanos y sobrinos
por apoyarme siempre en todo lo que he deseado realizar
y por enseñarme tantas cosas.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos a las siguientes personas e instituciones:

A mis padres Manuel Antonio y Maria Teresa, a mis hermanos Luz Patricia, Jorge, Armando, Juan y Mauricio, y a mis sobrinos mas cercanos Jenny y Sergio. A todos gracias por su compañia, su paciencia y por el apoyo brindado durante el tiempo que se destinó a la elaboración de este trabajo.

A la Universidad Nacional de Colombia y a los docentes del Posgrado en Estructuras, en especial a los profesores Fernando Spinel y Dorian Linero, este último director de tesis, por su motivación, por mostrarme las herramientas para llevar a cabo este trabajo y por despertar en mi el interés por el análisis dinámico y el análisis estructural.

A mis compañeros de estudio en la maestría, especialmente a los ingenieros Lucio Guillermo Lopez, Julian David Silva, Mauricio Aristizabal, Pedro Augusto Lopez y Jose Luis Rodriguez, quienes siempre se mostraron con gran interés por este trabajo y cuyas ideas y aportes a este también fueron invaluables, lo cual motivó aún más su desarrollo.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Resumen

La evaluación de la respuesta de una estructura sometida a un movimiento sismico es un problema de gran importancia para los profesionales que se desempeñan en el campo de las estructuras. En la mayoria de regiones del pais, el dimensionamiento de una estructura para que resista el efecto del sismo máximo esperado es uno de los principales problemas de diseño desde el punto de vista estructural. La dinámica estructural permite describir este fenómeno, así como evaluar de forma aproximada el efecto del sismo sobre una estructura.

En la presente tesis se desarrolla y documenta una primera versión del Programa Didáctico a Código Abierto de Análisis Dinámico de Estructuras UNDIN, cuyo fin es apoyar desde el punto de vista práctico el aprendizaje, la profundización y la investigación de los profesionales relacionados con la ingeniería estructural, haciendo visible, modificable y ampliable el proceso que implica el cálculo de la respuesta de una estructura sometida a un movimiento sísmico. Para su desarrollo se tomó como base el Programa de Elementos Finitos a Código Abierto PEFiCA desarrollado en la Universidad Nacional de Colombia.

Esta versión de UNDIN permite realizar el análisis dinámico elástico e inelástico de pórticos planos y espaciales conformados por barras, con ciertas características respecto a la idealización de la masa, la rigidez, el amortiguamiento natural y la no linealidad material debida a la formación de rótulas plásticas a flexión en los extremos de los elementos, y sometidos a una o varias componentes horizontales de aceleración en la base.

En el documento se presenta una descripción del fenómeno, las ecuaciones que lo describen y algunos de los métodos usados para la solución de las ecuaciones y para el cálculo de la respuesta estructural e implementados en el programa. Se describe la estructura del programa, sus posibilidades y limitaciones. Se realizan ejemplos completos de cálculo y se comparan los resultados obtenidos utilizando otros programas comerciales. Finalmente se presentan las conclusiones y las posibilidades de crecimiento de la herramienta.

Palabras Clave:
Dinámica estructural
Análisis matricial
Análisis dinámico elástico
Análisis dinámico inelástico
Programa didáctico a código abierto

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Abstract

The evaluation of the response of a structure submitted to a seismic motion is an important problem for professionals working in the structures field. In most regions of the country the sizing of a structure to withstand the effect of the maximun expected earthquake is one of the main desing problems from the structural viewpoint. Structural dynamics allows to describe this phenomenon and approximate the efect of the earthquake on a structure.

In the present thesis is developed and documented a first version of the Open Code Didactic Sofware UNDIN with the objective to support, from the practical viewpoint, the learning, deppening and research of the professionals related with structural engineering, doing visible, modifiable and expandable the process to implies to calculate the response of a structure submitted to a seismic motion. For this development has been taken as a basis the Open Code Finite Element software PEFiCA developed in the National University of Colombia.

With this UNDIN version is possible to perform the elastic and inelastic dynamic analysis of plane and space bar formed frames, with some chareacteristics about the idealization of the mass, stiffness, natural damping and material nonlinearity due to formation of flexure plastic hinges at the element ends, and submitted to one or varies base acceleration components.

This document presents a phenomenon description, the equations that describe it and some methods used for the solution of the equations and the calculation of the structural response implemented in UNDIN. It describes the software structure, posibilites and limitations. It is performed calculation complete examples and the results are compared with others obtained from commercial software. Finally is is presented the conclusions and growth posibilities of the tool.

Keywords:
Structural dynamics
Structural analysis
Linear dynamic analysis
Nonlinear dynamic analysis
Open code didactic software

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Índice

Capítulo 1 Introducción 47
1.1. Motivación 47
1.1.1. Importancia de la dinámica estructural 48
1.1.2. Programas a código abierto en la enseñanza de la ingeniería estructural 50
1.2. Antecedentes 50
1.2.1. PEFiCA 51
1.2.2. RUAUMOKO 3D 51
1.2.3. ESIDE 52
1.2.4. Portal de Pórticos (PDP) 53
1.2.5. DINAFACIL 53
1.2.6. Dinámica estructural con MATLAB 54
1.3. Objetivos 54
1.3.1. Objetivo general 54
1.3.2. Objetivos específicos 54
1.4. Justificación 55
1.5. Metodología 56
1.6. Contenido de la Tesis 57
Capítulo 2 Aplicación de la dinámica al análisis sísmico de estructuras 61
2.1. Cinemática de cuerpos rígidos en el plano 61
2.1.1. Traslación 62
2.1.2. Rotación alrededor a un eje fijo 63
2.1.3. Movimiento plano general 66
2.2. Cinética de cuerpos rígidos en el plano 68

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

2.2.1. Segunda ley de Newton 69
2.2.2. Ecuación de movimiento de un sistema de partículas 70
2.2.3. Momento de inercia de masa. Teorema de los ejes paralelos.....71
2.2.4. Ecuaciones de movimiento de traslación y rotación.....72

2.3. Idealización de la estructura y aceleración de la base.....75

2.3.1. Idealización de la estructura 75
2.3.2. Grados de libertad dinámicos y grados de libertad estáticos.....76
2.3.3. Aceleración de la base 78

2.4. Planteamiento de la ecuación matricial de movimiento.....80

2.4.1. Acciones equivalentes que actúan en cada diafragma rígido 81
2.4.2. Acciones de amortiguamiento que actúan en cada diafragma rígido 84
2.4.3. Ecuación matricial de movimiento 86
2.4.4. Acciones externas equivalentes a la aceleración de la base 91
2.4.5. Ecuación de movimiento para el caso elástico 92

2.5. Métodos de solución de la ecuación de movimiento 95

2.5.1. Sistemas elásticos con amortiguamiento clásico 95
2.5.2. Sistemas elásticos o inelásticos con o sin amortiguamiento clásico.....96

Capítulo 3 Matrices de masa, rigidez, amortiguamiento y acciones externas. Análisis modal.....97

3.1. Matriz de masa concentrada.....97

3.1.1. Masa y momento de inercia de cada diafragma rígido 98
3.1.2. Matriz de masa de pórticos planos y espaciales 98

3.2. Matriz de rigidez lateral 100

3.2.1. Descripción del elemento tipo pórtico espacial 101
3.2.2. Matriz de rigidez elemental en coordenadas locales 103
3.2.3. Matriz elemental de transformación de coordenadas 106
3.2.4. Matriz de rigidez elemental en coordenadas globales 109
3.2.5. Matriz de rigidez de la estructura 110
3.2.6. Matriz de rigidez condensada a los grados de libertad de interés.....110
3.2.7. Matriz de rigidez lateral.....113

3.3. Coordenadas de centros de rigidez de diafragmas 118

3.3.1. Posición del centro de rigidez en dirección Y 119
3.3.2. Posición del centro de rigidez en dirección X 120
3.3.3. Rotaciones unitarias a partir de la matriz de rigidez lateral.....122

3.4. Frecuencias, periodos y modos de vibración natural 122

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

3.4.1. Modos de vibración natural 123
3.4.2. Solución de las ecuaciones de movimiento para el caso de vibración libre no amortiguada 125
3.4.3. Solución analítica del problema de valores propios 126
3.4.4. Método de Jacobi generalizado 128

3.5. Acciones externas equivalentes a la aceleración de la base 132

3.5.1. Vector de aceleración de la base 133
3.5.2. Matriz de influencia 134
3.5.3. Acciones externas equivalentes a la aceleración de la base 136

3.6. Desacople de las ecuaciones de movimiento 137

3.6.1. Cambio de base 137
3.6.2. Matrices modales de masa y rigidez 138
3.6.3. Matriz modal de amortiguamiento 139
3.6.4. Matriz de factores de participación 140
3.6.5. Acciones modales externas equivalentes 140
3.6.6. Matrices de masa modal efectiva y masa total 141

3.7. Matriz de amortiguamiento clásico 142

3.7.1. Matriz de amortiguamiento de Rayleigh 143
3.7.2. Matriz de amortiguamiento por superposición de matrices modales ... 144

Capítulo 4 Análisis dinámico elástico 145

4.1. Análisis modal cronológico. Resumen del método 145

4.2. Métodos para calcular los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones generalizadas en cada instante de tiempo 147

4.2.1. Método de la aceleración lineal 147
4.2.2. Método basado en la linealización de la excitación 151
4.2.3. Método β de Newmark 154

4.3. Respuesta de la estructura en el análisis modal cronológico 157

4.3.1. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones de centros de masa 157
4.3.2. Desplazamientos de nudos 157
4.3.3. Derivas de centros de masa y por ejes de columnas 159
4.3.4. Acciones inerciales, acciones de amortiguamiento y acciones equivalentes 160
4.3.5. Balance de energía 160
4.3.6. Cortantes de piso y cortante basal 166
4.3.7. Acciones en los extremos de los elementos 167
4.3.8. Acciones internas en los elementos 168

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

4.4. Análisis modal espectral. Resumen del método.....169

4.5. Espectros elásticos de respuesta.....171

4.5.1. Concepto de espectro elástico de respuesta.....171
4.5.2. Espectros de respuesta de desplazamiento, pseudo-velocidad y pseudo-aceleración 172

4.6. Desplazamientos generalizados máximos.....175

4.7. Respuesta máxima por modo y por componente de aceleración de la base en el análisis modal espectral.....177

4.7.1. Desplazamientos de centros de masa.....177
4.7.2. Desplazamientos de nudos.....177
4.7.3. Derivas de centros de masa y por ejes de columnas.....178
4.7.4. Acciones equivalentes.....179
4.7.5. Cortantes de piso y cortante basal.....179
4.7.6. Acciones en los extremos de los elementos.....180
4.7.7. Acciones internas en los elementos.....180

4.8. Métodos de combinación modal.....181

4.8.1. Raíz cuadrada de la suma de cuadrados.....183
4.8.2. Combinación cuadrática completa.....183

4.9. Métodos de combinación direccional.....184

4.9.1. Regla 100/30.....186
4.9.2. Raíz cuadrada de la suma de cuadrados.....187

Capítulo 5 Análisis dinámico inelástico.....189

5.1. Resumen del método.....189

5.2. Análisis elástico para cargas iniciales.....190

5.2.1. Vector elemental de acciones fijas en coordenadas locales.....191
5.2.2. Vector general de acciones fijas en coordenadas globales.....198
5.2.3. Desplazamientos iniciales de centros de masa y de nudos utilizando condensación y asociación de grados de libertad.....198
5.2.4. Acciones en los extremos de los elementos.....200

5.3. Relación momento - rotación de los resortes rotacionales.....201

5.3.1. Modelo de Bouc – Wen.....201
5.3.2. Resortes rotacionales con rotaciones de fluencia iguales.....203
5.3.1. Resortes rotacionales con rotaciones de fluencia diferentes.....206

5.4. Métodos de Newmark y de Newton – Raphson modificado.....208

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

5.4.1. Ecuación de movimiento en forma incremental 208
5.4.2. Forma implícita del método de Newmark 210
5.4.3. Procedimiento general de solución de las ecuaciones de movimiento en forma incremental 212
5.4.4. Método de Newton Raphson modificado 213
5.4.5. Convergencia y estabilidad 219

5.5. Incremento de las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa 221

5.5.1. Consideraciones para el cálculo del incremento de acciones equivalentes en el intervalo y en la iteración actual 221
5.5.2. Descripción del procedimiento iterativo 224
5.5.3. Resumen del procedimiento iterativo 229
5.5.4. Ejemplo numérico 230

5.6. Respuesta de la estructura en cada instante de tiempo 241

5.6.1. Respuesta principal de la estructura 242
5.6.2. Balance de energía 243
5.6.3. Derivas, cortantes de piso y cortante basal 246
5.6.4. Acciones internas en los elementos 246

Capítulo 6 Implementación de UNDIN. Descripción de la subrutina principal 249

6.1. Descripción general del programa 249

6.1.1. Contenido del programa 249
6.1.2. Estructura de la subrutina principal 250
6.1.3. Acceso a la subrutina principal y a las subrutinas secundarias 256

6.2. Parte I: Declaración de variables 258

6.2.1. Declaración de variables escalares 258
6.2.2. Declaración de matrices 260
6.2.3. Escritura del encabezado y limpieza de hoja de resultados 265

6.3. Parte II: Lectura de datos de entrada y creación de matrices auxiliares 266

6.3.1. Lectura y definición de parámetros generales 266
6.3.2. Lectura de tablas de datos 271
6.3.3. Cantidad de grados de libertad por tipo 280
6.3.4. Creación de matrices auxiliares 280

6.4. Parte III: Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento. Análisis modal 284

6.4.1. Matriz de masa concentrada 285
6.4.2. Matriz de rigidez lateral 285
6.4.3. Frecuencias, periodos y modos de vibración natural 286
6.4.4. Matrices modales de masa, rigidez y amortiguamiento 287

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

6.4.5. Matriz de amortiguamiento por superposición de matrices modales 287
6.4.6. Factores de participación y masa modal efectiva 288

6.5. Parte IV: Análisis modal cronológico 289

6.5.1. Acciones modales externas equivalentes a la aceleración de la base 290
6.5.2. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones generalizadas.....291
6.5.3. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones de centros de masa 291
6.5.4. Verificación de la ecuación de movimiento 292
6.5.5. Balance de energía.....293
6.5.6. Desplazamientos de los nudos 294
6.5.7. Derivas de centros de masa.....295
6.5.8. Derivas en ejes de columnas.....295
6.5.9. Cortantes de piso.....296
6.5.10. Acciones en los extremos de los elementos.....297
6.5.11. Diagramas de acciones internas.....298

6.6. Parte V: Análisis modal espectral 299

6.6.1. Desplazamientos generalizados máximos 300
6.6.2. Matriz de coeficientes de correlación 300
6.6.3. Desplazamientos máximos probables de centros de masa 301
6.6.4. Desplazamientos máximos probables de los nudos.....302
6.6.5. Derivas máximas probables de centros de masa.....303
6.6.6. Derivas máximas probables en ejes de columnas.....303
6.6.7. Acciones equivalentes máximas probables trasladadas a los centros de masa 304
6.6.8. Cortantes de piso máximos probables 305
6.6.9. Acciones máximas en los extremos de los elementos 306
6.6.10. Diagramas de acciones internas.....307

6.7. Parte VI: Análisis dinámico inelástico.....308

6.7.1. Análisis elástico de la estructura para cargas iniciales 308
6.7.2. Matriz de acciones externas equivalentes a la aceleración de la base ...310
6.7.3. Inicialización de matrices de resultados 310
6.7.4. Respuesta de la estructura en cada instante de tiempo. Procedimiento principal 312
6.7.5. Verificación de la ecuación de movimiento 316
6.7.6. Balance de energía.....317
6.7.7. Desplazamientos de los nudos 318
6.7.8. Derivas de centros de masa y de ejes de columnas 318
6.7.9. Cortantes de piso.....319
6.7.10. Acciones en los extremos de los elementos.....319
6.7.11. Diagramas de acciones internas.....320

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

6.8. Parte VII: Escritura y almacenamiento de resultados 321
6.8.1. Tablas auxiliares 322
6.8.2. Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento 323
6.8.3. Análisis modal 323
6.8.4. Análisis modal cronológico y análisis dinámico inelástico 324
6.8.5. Análisis modal espectral 327

Capítulo 7 Descripción de las subrutinas desarrolladas 329
7.1. Instrucciones para análisis estructural 329
7.1.1. AEMPAE 329
7.1.2. AECRIG 330
7.1.3. AEDCON 330
7.1.4. AEMPRO 331
7.1.5. AEKGLT 331
7.1.6. AEKGLI 332
7.1.7. AEDESP 333
7.1.8. AEDECM 333
7.1.9. AEDERI 334
7.1.10. AECORP 335
7.1.11. AEDVPI 335
7.1.12. AENVOL 336
7.1.13. AEFELE 336
7.1.14. AETRFE 337
7.1.15. AETRDE 338
7.1.16. AEFFES 339
7.1.17. AEDESI 339
7.1.18. AEINIF 341
7.1.19. AEINIR 341
7.1.20. AEDIVC 342
7.1.21. AEAICD 344
7.1.22. AEDIEN 345
7.1.23. AEDFSJ 345
7.1.24. AEIROT 347
7.1.25. AEFFIN 348
7.1.26. AEAJFE 348
7.1.27. AEIDCN 349
7.1.28. AEVFRO 350
7.2. Instrucciones para análisis dinámico 350
7.2.1. ADMASA 350
7.2.2. ADPEFR 351

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

7.2.3. ADMMAM 351
7.2.4. ADAMRS 352
7.2.5. ADAMRY 352
7.2.6. ADGAMA 353
7.2.7. ADALFA 353
7.2.8. ADMASM 354
7.2.9. ADUGXY 354
7.2.10. ADACEL, ADWILS y ADNEWM 355
7.2.11. ADVMAX 357
7.2.12. ADESPT 357
7.2.13. ADCGEN 358
7.2.14. ADDESP 358
7.2.15. ADMCOR 359
7.2.16. ADCOMM 359
7.2.17. ADCOMD 360
7.2.18. ADTRAE 360
7.2.19. ADACCM 361
7.2.20. ADTRDI 362
7.2.21. ADACIN 362
7.2.22. ADCONS 363
7.2.23. ADMAAB 363
7.2.24. ADMARA 364
7.2.25. ADIEFE 364
7.2.26. ADINVA 365
7.2.27. ADREFI 365
7.2.28. ADERRN 366
7.2.29. ADERRD 367
7.2.30. ADFEQF 367
7.2.31. ADAMFI 368
7.2.32. ADENED 368
7.2.33. ADENIN 369
7.2.34. ADENSY 369
7.2.35. ADBAEN 370

7.3. Instrucciones para crear matrices de rigidez y vectores de acciones fijas elementales 371

7.3.1. KPOR3D 371
7.3.2. FFPO3D 372

7.4. Instrucciones para calcular modos de vibración 373

7.4.1. VPJACO 373

7.5. Instrucciones para realizar operaciones matriciales básicas 373

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

7.5.1. MTDIAV ... 373
7.5.2. MTADVM ... 374
7.5.3. MTREMV ... 374
7.5.4. MTREMP ... 375
7.5.5. MTCPCO ... 375

7.6. Instrucciones para numeración de grados de libertad ... 376

7.6.1. NGLNCD ... 376
7.6.2. NGLROT ... 376

7.7. Instrucciones para organización de matrices ... 377

7.7.1. ORNDIR ... 377
7.7.2. ORECOL ... 377
7.7.3. ORDIRE ... 378
7.7.4. ORMPRO ... 378
7.7.5. ORVAPR ... 379

7.8. Instrucciones para cambios de base ... 379

7.8.1. TRPO3D ... 379
7.8.2. TRDIRZ ... 380

7.9. Instrucciones para importar y exportar matrices ... 380

7.9.1. IOIMPR ... 380
7.9.2. IOEXMR ... 381
7.9.3. IOEXDI ... 381

7.10. Instrucciones internas de uso común ... 382

7.10.1. PBELRP ... 382
7.10.2. PBRKRO ... 382

Capítulo 8 Validación del programa ... 383

8.1. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano ... 384

8.1.1. Descripción de la estructura ... 384
8.1.2. Párametros de análisis ... 387
8.1.3. Datos de entrada ... 390
8.1.4. Resultados del análisis modal ... 397
8.1.5. Resultados del análisis modal cronológico ... 404
8.1.6. Resultados del análisis modal espectral ... 419

8.2. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial ... 429

8.2.1. Descripción de la estructura ... 429
8.2.2. Parámetros de análisis ... 437

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

8.2.3. Datos de entrada 439
8.2.4. Resultados del análisis modal 446
8.2.5. Resultados del análisis modal cronológico 454
8.2.6. Resultados del análisis modal espectral 471

8.3. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano 486

8.3.1. Descripción de la estructura 487
8.3.2. Párametros de análisis 492
8.3.3. Datos de entrada 495
8.3.4. Resultados del análisis dinámico inelástico 502

8.4. Comentarios sobre los resultados de los pórticos analizados 518

Capítulo 9 Conclusiones y recomendaciones 521

9.1. Conclusiones 521

9.2. Recomendaciones 524

Referencias 527

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Lista de Figuras

Figura 2.1. Movimiento de traslación rectilínea y curvilínea (Hibbeler, 2010)..... 62
Figura 2.2. Cuerpo rígido con movimiento de traslación (Hibbeler, 2010)..... 62
Figura 2.3. Cuerpo rígido con rotación alrededor de un eje fijo (Hibbeler, 2010) 63
Figura 2.4. Cuerpo rígido con rotación alrededor de un eje fijo (Hibbeler, 2010) 64
Figura 2.5. Movimiento del punto *P* (Hibbeler, 2010) 65
Figura 2.6. Movimiento plano general (Hibbeler, 2010) 66
Figura 2.7. Posiciones absolutas y relativas (Hibbeler, 2010) 66
Figura 2.8. Componentes de traslación y rotación del movimiento plano general (Hibbeler, 2010) 67
Figura 2.9. Significado de la segunda ley de Newton del movimiento (Hibbeler, 2010)... 69
Figura 2.10. Ecuación de movimiento aplicada a un sistema de partículas (Hibbeler, 2010) 70
Figura 2.11. Definición de momento de inercia de masa (Hibbeler, 2010)..... 71
Figura 2.12. Diagrama de cuerpo libre de una de las partículas de un cuerpo rígido (Hibbeler, 2010) 72
Figura 2.13. Aplicación de las ecuaciones de movimiento a un cuerpo rígido (Hibbeler, 2010) 74
Figura 2.14. Grados de libertad de un diafragma de un pórtico plano y de un pórtico espacial..... 77
Figura 2.15. Idealización, grados de libertad y componentes de aceleración de la base consideradas en el análisis dinámico de un pórtico espacial..... 79
Figura 2.16. Idealización, grados de libertad y componentes de aceleración de la base consideradas en el análisis dinámico de un pórtico plano..... 80

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Figura 2.17. Configuración deformada de un elemento pórtico espacial y acciones en los extremos en coordenadas globales 81

Figura 2.18. Acciones resultantes en cada nudo asociado a un diafragma rígido, producidas por la deformación de la estructura 82

Figura 2.19. Acciones resultantes en los nudos del mismo diafragma rígido 83

Figura 2.20. Acciones aplicadas en un nudo del diafragma trasladadas al centro de masa .83

Figura 2.21. Acciones equivalentes trasladadas al centro de masa 84

Figura 2.22. Amortiguadores viscosos equivalentes. Adaptada de Chopra (2001) 85

Figura 2.23. Acciones de amortiguamiento viscoso trasladadas al centro de masa 86

Figura 2.24. Acciones equivalentes y de amortiguamiento trasladadas al centro de masa de cada diafragma 87

Figura 2.25. Movimiento absoluto y relativo a la base de cada diafragma rígido 88

Figura 2.26. Relación entre la aceleración de la base y las acciones externas equivalentes92

Figura 2.27. Significado físico de los coeficientes de la matriz de rigidez lateral 93

Figura 3.1. Numeración recomendada de los grados de libertad dinámicos de una estructura espacial 99

Figura 3.2. Numeración recomendada de los grados de libertad dinámicos de una estructura plana 100

Figura 3.3. Elemento estructural tipo pórtico espacial. Adaptada de Linero (2012) 101

Figura 3.4. Relación momento – rotación en los resortes rotacionales. Adaptada de Linero (2012) 102

Figura 3.5. Grados de libertad del elemento en coordenadas locales. Adaptada de Linero (2012) 102

Figura 3.6. Acciones en los extremos del elemento en coordenadas locales. Adaptada de Linero (2012) 102

Figura 3.7. Vectores unitarios que definen la orientación de los ejes locales y globales del elemento. Adaptada de Linero (2012) 107

Figura 3.8. Definición de los ejes locales utilizando un punto auxiliar. Adaptada de Linero (2012) 108

Figura 3.9. Definición de ejes locales utilizando la forma predeterminada de programas comerciales 109

Figura 3.10. Ejemplo de numeración de los grados de libertad estáticos de un pórtico plano 111

Figura 3.11. Ejemplo de numeración recomendada de los grados de libertad 112

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Figura 3.12. Relación entre desplazamientos del nudo j y desplazamientos del centro de masa i 114

Figura 3.13. Estructura tomada como ejemplo para mostrar la formación de la matriz de asociación de desplazamientos de la estructura 116

Figura 3.14. Acciones correspondientes a los grados de libertad de interés del nudo *j* trasladadas al centro de masa del diafragma respectivo..... 117

Figura 3.15. Posición del centro de rigidez en dirección y 119

Figura 3.16. Posición del centro de rigidez en dirección x 121

Figura 3.17. Vibración libre no amortiguada de un sistema elástico en su primer modo de vibración. Adaptada de Chopra (2001) 124

Figura 3.18. Modos de vibración de una estructura plana de 3 grados de libertad dinámicos 124

Figura 3.19. Sistema dinámico utilizado como ejemplo 127

Figura 3.20. Modos de vibración natural del sistema dinámico utilizado como ejemplo. 128

Figura 3.21. Diagrama de flujo del método de Jacobi generalizado 132

Figura 3.22. Sismo de Kobe de 1995 registrado por la estación Kakogawa en Japón (PEER) 133

Figura 3.23. Grados de libertad dinámicos y componentes de aceleración de la base de los pórticos tomados como ejemplo 135

Figura 3.24. Variación de la fracción de amortiguamiento modal con la frecuencia (Chopra, 2001) 143

Figura 4.1. Aceleración lineal asumida de la masa en cada intervalo..... 148

Figura 4.2. Diagrama de flujo del método de la aceleración lineal..... 150

Figura 4.3. Variación asumida de la excitación externa en cada intervalo de tiempo (Wilson, 2002) 151

Figura 4.4. Diagrama de flujo del método basado en la interpolación de la excitación ... 153

Figura 4.5. Diagrama de flujo del método de Newmark..... 156

Figura 4.6. Energía de deformación almacenada en cada grado de libertad y en cada instante de tiempo 162

Figura 4.7. Incremento en la energía disipada aportado por cada grado de libertad al sistema..... 164

Figura 4.8. Cortantes de piso y del cortante basal en función de acciones elásticas 167

Figura 4.9. Diagrama de cuerpo libre para el cálculo de las acciones internas..... 168

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Figura 4.10. Construcción del espectro de deformación para el sismo de El Centro (Chopra, 2001) 173

Figura 4.11. Posibles direcciones de aplicación de los movimientos sísmicos (Wilson, 2002) 185

Figura 5.1. Acciones fijas en los extremos del elemento pórtico espacial.....192

Figura 5.2. Acciones fijas sin considerar conexiones parcialmente rígidas, para diferentes tipos de carga distribuida en el elemento. Adaptada de Linero (2012).....194

Figura 5.3. Fuerzas cortantes fijas en los extremos del elemento tipo pórtico espacial para diferentes tipos de carga distribuida. Adaptada de Linero (2012) 197

Figura 5.4. Relación fuerza – desplazamiento utilizando el modelo de Bouc – Wen (Saavedra, 2005) 202

Figura 5.5. Influencia del parámetro *n* en la forma de la curva (Saavedra, 2005).....202

Figura 5.6. Relación M-θ de un resorte rotacional con rotaciones de fluencia iguales en cada dirección. Adaptada de Wilson (2002) 203

Figura 5.7. Relación M-θ de un resorte rotacional con rotaciones de fluencia diferentes en cada dirección. Adaptada de Wilson (2002) 207

Figura 5.8. Rigidez secante y rigidez tangente en un sistema de 1GLD (Chopra, 2001) ..214

Figura 5.9. Error por el uso de la rigidez tangente al comienzo del intervalo (Chopra, 2001) 214

Figura 5.10. Error en detección de punto de velocidad cero (Chopra, 2001) 215

Figura 5.11. Método de Newton-Raphson aplicado a un sistema de 1GLD (Chopra, 2001) 218

Figura 5.12. Error al estimar los momentos en los resortes rotacionales utilizando la rigidez tangente 223

Figura 5.13. Corrección de los incrementos en las acciones en los extremos de un elemento 226

Figura 5.14. Pórtico plano tomado como ejemplo para calcular el incremento en las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa 231

Figura 5.15. Numeración de nudos, elementos y grados de libertad estáticos 231

Figura 5.16. Relación momento – rotación de los resortes rotacionales de la estructura tomada como ejemplo 232

Figura 5.17. Incremento supuesto de las acciones en los extremos para la primera iteración interna.....233

Figura 5.18. Incremento real de las acciones en los extremos para la primera iteración interna.....234

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Figura 5.19. Incremento real de acciones equivalentes en los nudos para la primera iteración interna 235

Figura 5.20. Incremento supuesto de las acciones en los extremos para la segunda iteración interna 236

Figura 5.21. Incremento real de las acciones en los extremos para la segunda iteración interna 237

Figura 5.22. Incremento real de acciones equivalentes en los nudos para la segunda iteración interna 238

Figura 5.23. Verificación del equilibrio entre acciones equivalentes externas e internas 241

Figura 5.24. Disipación de energía en una rótula plástica a partir de la relación M-θ del resorte rotacional no lineal correspondiente. Adaptada de García (1998) 244

Figura 5.25. Incremento aproximado del área bajo la curva $M - \theta$ de un resorte rotacional 244

Figura 5.26. Disipación de energía por histéresis 245

Figura 5.27. Acciones internas en una sección de un elemento tipo pórtico espacial considerando las cargas distribuidas iniciales 247

Figura 5.28. Acciones internas en una sección de un elemento pórtico espacial para diferentes tipos de carga distribuida 248

Figura 6.1. Estructura general del programa 250

Figura 6.2. Parte I – declaración de variables 251

Figura 6.3. Parte II – lectura de datos de entrada y creación de matrices auxiliares 251

Figura 6.4. Parte III – Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento & Análisis modal . 252

Figura 6.5. Parte IV – Análisis modal cronológico 253

Figura 6.6. Parte V – Análisis modal espectral 254

Figura 6.7. Parte VI –Análisis dinámico inelástico 255

Figura 6.8. Parte VII – escritura y almacenamiento de resultados 256

Figura 6.9. Acceso al editor de Visual Basic 257

Figura 6.10. Acceso a las subrutinas 257

Figura 6.11. Declaración de variables escalares 259

Figura 6.12. Declaración de matrices 264

Figura 6.13. Escritura de encabezado y limpieza de hoja de resultados 266

Figura 6.14. Escritura del encabezado en la ventana de inmediato 266

Figura 6.15. Ejemplo de datos de entrada de la hoja "*TB_GEN*" 269

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Figura 6.16. Lectura de parámetros generales desde la hoja "*TB_GEN*" 270
Figura 6.17. Parámetros generales fijados 271
Figura 6.18. Ejemplo de tabla *XYZ()*.....271
Figura 6.19. Ejemplo de tablas *MAT()* y *SEC()* 272
Figura 6.20. Ejemplo de tablas *ELE(), PAU(), AMS(), RIG()* y *CTS()* 273
Figura 6.21. Ejemplo de tabla *JRS()* 273
Figura 6.22. Ejemplo de las tablas *MRE()* y *MDC()*.....274
Figura 6.23. Ejemplo de las tablas *DRX()* y *MAS()* 275
Figura 6.24. Ejemplo de las tablas *ROT()* y *ARE()*.....276
Figura 6.25. Ejemplo de las tablas *TWE()* y *WEL()*.....276
Figura 6.26. Ejemplo de las tablas *CXY()* y *VIG()*.....277
Figura 6.27. Ejemplo de las tablas *UGX()* y *UGY()*.....277
Figura 6.28. Ejemplo de las tabla *ESP()* 278
Figura 6.29. Lectura de tablas de datos.....279
Figura 6.30. Cantidad de grados de libertad por tipo.....280
Figura 6.31. Creación de matrices auxiliares.....284
Figura 6.32. Matriz de masa concentrada 285
Figura 6.33. Matriz de rigidez lateral.....286
Figura 6.34. Frecuencias, periodos y modos de vibración natural.....287
Figura 6.35. Matrices modales de masa, rigidez y amortiguamiento 287
Figura 6.36. Matriz de amortiguamiento por superposición de matrices modales 288
Figura 6.37. Factores de participación y masa modal efectiva 289
Figura 6.38. Acciones modales externas equivalentes a la aceleración de la base 290
Figura 6.39. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones generalizadas.....291
Figura 6.40. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones de centros de masa 292
Figura 6.41. Verificación de la ecuación de movimiento 293
Figura 6.42. Balance de energía.....294
Figura 6.43. Desplazamientos relativos a la base y en coordenadas globales de los nudos 295
Figura 6.44. Derivas de centros de masa 295
Figura 6.45. Derivas en ejes de columnas.....296

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Figura 6.46. Cortantes de piso 297
Figura 6.47. Acciones en coordenadas locales en los extremos de los elementos 298
Figura 6.48. Diagramas de acciones internas 299
Figura 6.49. Desplazamientos generalizados máximos 300
Figura 6.50. Matriz de coeficientes de correlación de método *CCC* 301
Figura 6.51. Desplazamientos máximos probables de centros de masa 302
Figura 6.52. Desplazamientos máximos probables en coordenadas globales de los nudos 302
Figura 6.53. Derivas máximas probables de centros de masa 303
Figura 6.54. Derivas máximas probables en ejes de columnas 304
Figura 6.55. Acciones equivalentes máximas probables trasladadas a centros de masa .. 305
Figura 6.56. Cortantes de piso máximos probables 305
Figura 6.57. Acciones máximas probables en los extremos de los elementos 306
Figura 6.58. Diagramas de acciones internas 307
Figura 6.59. Análisis elástico de la estructura para cargas iniciales 309
Figura 6.60. Acciones externas equivalentes a la aceleración de la base 310
Figura 6.61. Inicialización de matrices de resultados 311
Figura 6.62. Respuesta principal de la estructura – instrucciones antes del ciclo iterativo principal 314
Figura 6.63. Respuesta principal de la estructura – instrucciones del ciclo iterativo principal 315
Figura 6.64. Respuesta principal de la estructura – instrucciones posteriores al ciclo iterativo principal 316
Figura 6.65. Verificación de la ecuación de movimiento 317
Figura 6.66. Balance de energía 317
Figura 6.67. Desplazamientos relativos a la base y en coordenadas globales de los nudos 318
Figura 6.68. Derivas de centros de masa 318
Figura 6.69. Derivas en ejes de columnas 319
Figura 6.70. Cortantes de piso 319
Figura 6.71. Acciones en coordenadas locales en los extremos de los elementos 320
Figura 6.72. Diagramas de acciones internas 321

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Figura 6.73. Tablas auxiliares 322

Figura 6.74. Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento 323

Figura 6.75. Matrices de análisis modal 323

Figura 6.76. Tablas de aceleración de la base y coordenadas generalizadas 324

Figura 6.77. Tablas de aceleración de la base y coordenadas generalizadas 325

Figura 6.78. Tablas adicionales de análisis modal cronológico y análisis dinámico inelástico 326

Figura 6.79. Tablas de análisis modal espectral (*cont.*) 327

Figura 6.80. Tablas de análisis modal espectral 328

Figura 8.1. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Geometría y secciones de elementos 385

Figura 8.2. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Numeración de nudos, de elementos y de centros de masa 386

Figura 8.3. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Numeración de ejes de vigas y de columnas 386

Figura 8.4. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Espectro de pseudo-aceleraciones de la Microzonificación Sísmica de Bogotá. 388

Figura 8.5. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Idealización del pórtico plano para el análisis dinámico 390

Figura 8.6. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Parámetros generales para realizar el análisis modal cronológico del pórtico (hoja *TB_GEN*) 391

Figura 8.7. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Parámetros generales para realizar el análisis modal espectral del pórtico (hoja *TB_GEN*) 392

Figura 8.8. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Tabla de coordenadas de los nudos y de puntos auxiliares (hoja *TB_XYZ*) 393

Figura 8.9. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Tablas de materiales y secciones tipo (hoja *TB_PRO*) 393

Figura 8.10. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Tablas de conectividades y asignación de materiales, secciones, rigidez y cortes a elementos (hoja *TB_ELE*) 394

Figura 8.11. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Tablas de clasificación de grados de libertad y de desplazamientos conocidos por nudo (hoja *TB_RES*) 395

Figura 8.12. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Tabla de diafragmas rígidos (hoja *TB_DIR*) 395

Figura 8.13. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Tablas de coordenadas de ejes de columnas y de elementos asociados a ejes de vigas (hoja *TB_EJE*) 396

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Figura 8.14. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Tablas de aceleración de la base (hoja *TB_ACE*) 396

Figura 8.15. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Espectro de pseudo-aceleraciones (hoja *TB_ESP*) 397

Figura 8.16. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Análisis del pórtico plano en SAP2000 397

Figura 8.17. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Verificación de la matriz *KDP()* 398

Figura 8.18. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Modos de vibración natural obtenidos con SAP2000 402

Figura 8.19. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Tiempos de cálculo utilizando el método de análisis modal cronológico 419

Figura 8.20. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamientos máximos probables de centros de masa obtenidos con SAP2000© 422

Figura 8.21. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Verificación de acciones internas en Viga V-01 428

Figura 8.22. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Tiempos de cálculo obtenidos por el método de análisis modal espectral 429

Figura 8.23. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Secciones de columnas 430

Figura 8.24. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Planta estructural de niveles 2 y 3 (*Z=5.00m y Z=9.00m*) 431

Figura 8.25. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Planta estructural de cubierta (*Z=13.00*) 431

Figura 8.26. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Posición de los centros de gravedad de los diafragmas 432

Figura 8.27. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos de la base (*Z=0.00m*) 433

Figura 8.28. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos de la planta de 2° nivel (Z=5.00m) 433

Figura 8.29. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos de la planta de 3° nivel (*Z=9.00m*) 433

Figura 8.30. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos de la planta de cubierta (*Z=13.00*) 434

Figura 8.31. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos del pórtico A (*Y=0.00*) 434

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Figura 8.32. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos del pórtico B (*Y=7.00*) 434

Figura 8.33. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos del pórtico C (*Y=14.00*) 435

Figura 8.34. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de nudos y de elementos del pórtico D (*Y=22.00*) 435

Figura 8.35. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de vigas de segundo nivel 435

Figura 8.36. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de vigas de tercer nivel 436

Figura 8.37. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de vigas de cubierta 436

Figura 8.38. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Numeración de ejes de columnas 436

Figura 8.39. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Idealización dinámica del pórtico espacial 438

Figura 8.40. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Parámetros generales para utilizar el método de análisis modal cronológico (hoja *TB_GEN*) 440

Figura 8.41. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Parámetros generales para utilizar el método de análisis modal espectral (hoja *TB_GEN*) 441

Figura 8.42. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tabla de coordenadas de nudos y de puntos auxiliares (hoja *TB_XYZ*) 441

Figura 8.43. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de materiales y secciones tipo (hoja *TB_PRO*) 442

Figura 8.44. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de conectividades y asignación de materiales, secciones, rigidez y cortes a elementos (hoja *TB_ELE*) 442

Figura 8.45. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de clasificación de grados de libertad y de desplazamientos conocidos por nudo (hoja *TB_RES*) 443

Figura 8.46. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tabla de diafragmas rígidos (hoja *TB_DIR*) 444

Figura 8.47. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de coordenadas de ejes de columnas y de elementos asociados a ejes de vigas (hoja *TB_EJE*) 445

Figura 8.48. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tablas de aceleración de la base (hoja *TB_ACE*) 445

Figura 8.49. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Espectro de pseudo-aceleraciones (hoja *TB_ESP*) 446

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Figura 8.50. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Posición de los centros de masa y de rigidez de los diafragmas 447

Figura 8.51. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Análisis del pórtico espacial en SAP2000 450

Figura 8.52. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Modos de vibración natural obtenidos con SAP2000 451

Figura 8.53. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de acciones internas en la Viga V-03 468

Figura 8.54. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de acciones internas en la Columna C-07 470

Figura 8.55. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tiempos de cálculo obtenidos por el método de análisis modal cronológico 470

Figura 8.56. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de acciones internas en la viga V-03 485

Figura 8.57. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tiempos de cálculo obtenidos por el método de análisis modal espectral 486

Figura 8.58. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Zonas rígidas en la intersección de vigas y columnas 487

Figura 8.59. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Secciones transversales y refuerzo de elementos estructurales en zonas de rótulas plásticas 488

Figura 8.60. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Localización de zonas rígidas y de resortes rotacionales 489

Figura 8.61. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Numeración de nudos y numeración de centros de masa 490

Figura 8.62. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano Numeración de elementos verticales y numeración de ejes de columnas 491

Figura 8.63. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Numeración de elementos horizontales y numeración de ejes de vigas 492

Figura 8.64. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Parámetros generales (hoja *TB_GEN*) 495

Figura 8.65. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Tabla de coordenadas de los nudos y de puntos auxiliares (hoja *TB_XYZ*) 496

Figura 8.66. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Tablas de materiales y de secciones tipo (hoja *TB_PRO*) 496

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Figura 8.67. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Tablas de conectividades y asignación de materiales, secciones, rigidez y número de cortes a elementos (hoja *TB_ELE*).....497

Figura 8.68. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Tabla de rigidez inicial de conexiones elásticas (hoja *TB_ELE*).....498

Figura 8.69. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Tablas de clasificación de grados de libertad y de desplazamientos conocidos por nudo (hoja *TB_RES*).....499

Figura 8.70. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Tablas de definición y asignación de rótulas plásticas (hoja *TB_ROT*).....500

Figura 8.71. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Momentos de fluencia de la rótula plástica tipo de las columnas.....500

Figura 8.72. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Momentos de fluencia de las rótulas plásticas tipo de las vigas.....501

Figura 8.73. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Tablas cargas iniciales aplicadas a elementos (hoja *TB_WEL*).....501

Figura 8.74. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Tablas de ejes de vigas y de columnas (hoja *TB_EJE*).....502

Figura 8.75. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Acciones internas de la Viga V-03 obtenidas con SAP2000.....515

Figura 8.76. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Acciones internas en la Columna C-01 obtenidas con SAP2000.....516

Figura 8.77. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Tiempos de cálculo obtenidos por análisis dinámico inelástico.....517

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Lista de Gráficas

Gráfica 8.1. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Aceleración aplicada en la base del pórtico 387

Gráfica 8.2. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Espectro de pseudo-aceleraciones utilizado en el análisis..... 389

Gráfica 8.3. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Modos de vibración natural obtenidos con UNDIN..... 401

Gráfica 8.4. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamiento, velocidad y aceleración generalizada del primer modo de vibración..... 404

Gráfica 8.5. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamientos generalizados de los modos 1, 2 y 3..... 405

Gráfica 8.6. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamiento, velocidad y aceleración relativa a la base del centro de masa del Diafragma 1..... 406

Gráfica 8.7. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamientos relativos a la base de los centros de masa de los diafragmas 406

Gráfica 8.8. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Verificación del desplazamiento relativo a la base del centro de masa del Diafragma 1 (*cubierta*) y del Diafragma 6 (*segundo piso*)..... 407

Gráfica 8.9. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Acciones inercial, de amortiguamiento, equivalente y externa que actúan en el centro de masa del Diafragma 1..... 408

Gráfica 8.10. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Verificación de la ecuación de movimiento del Grado de Libertad Dinámico 1..... 409

Gráfica 8.11. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Componentes de la ecuación de balance de energía 410

Gráfica 8.12. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Verificación de la ecuación de balance de energía 411

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Gráfica 8.13. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Verificación del desplazamiento en dirección x del Nudo 25 de cubierta 412

Gráfica 8.14. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Derivas en dirección x en los centros de masa de los Diafragmas 413

Gráfica 8.15. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Cortantes de piso en dirección x 414

Gráfica 8.16. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Diagramas de cortantes de piso en dirección x 414

Gráfica 8.17. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Acciones en coordenadas locales en los extremos del Elemento 26 415

Gráfica 8.18. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Verificación de acciones en los extremos del Elemento 26 416

Gráfica 8.19. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Diagramas y envolventes de acciones internas de la Viga V-01 obtenidos con UNDIN 417

Gráfica 8.20. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Diagramas y envolventes de acciones internas en la viga V-01 obtenidos con SAP2000© 417

Gráfica 8.21. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Diagramas y envolventes de acciones internas de la Columna C-01 obtenidos con UNDIN 418

Gráfica 8.22. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Diagramas y envolventes de momento flector de la Columna C-01 obtenidos con SAP2000© 418

Gráfica 8.23. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Espectro y pseudo-aceleraciones correspondientes a modos de vibración 420

Gráfica 8.24. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamientos máximos probables de los centros de masa 422

Gráfica 8.25. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamientos máximos de los Nudos 5 y 25 423

Gráfica 8.26. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Derivas máximas de los centros de masa 424

Gráfica 8.27. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Acciones equivalentes máximas 425

Gráfica 8.28. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Cortantes de piso máximos 426

Gráfica 8.29. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Acciones máximas en los extremos del Elemento 1 427

Gráfica 8.30. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Diagramas de acciones internas máximas de la viga V-01 427

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Gráfica 8.31. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Diagramas de acciones internas máximas de la columna C-01 428

Gráfica 8.32. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Aceleración de la base en direcciones x e y 437

Gráfica 8.33. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos generalizados 454

Gráfica 8.34. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Velocidades generalizadas 454

Gráfica 8.35. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Aceleraciones generalizadas 455

Gráfica 8.36. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos relativos a la base de centros de masa 456

Gráfica 8.37. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Velocidades relativas a la base de centros de masa 456

Gráfica 8.38. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Aceleraciones relativas a la base de centros de masa 457

Gráfica 8.39. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones del centro de masa de cubierta, obtenidas con UNDIN y SAP2000 458

Gráfica 8.40. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones inercial, de amortiguamiento, equivalente y externa en dirección x, que actúan en el centro de masa del Diafragma 1 458

Gráfica 8.41. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de la ecuación de movimiento del grado de libertad dinámico 1 460

Gráfica 8.42. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Componentes de la ecuación de balance de energía 460

Gráfica 8.43. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de la ecuación de balance de energía 461

Gráfica 8.44. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de los desplazamientos de los nudos 462

Gráfica 8.45. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas en direcciones x e y de los centros de masa 463

Gráfica 8.46. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas totales del Eje de Columna 10 464

Gráfica 8.47. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Cortantes de piso en direcciones x e y 465

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Gráfica 8.48. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Diagramas de cortantes de piso en direcciones x e y 465

Gráfica 8.49. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Variación de las acciones en coordenadas locales en los extremos del Elemento 1 466

Gráfica 8.50. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de acciones en los extremos.....467

Gráfica 8.51. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Diagramas de acciones internas de la Viga V-03 468

Gráfica 8.52. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Diagramas de acciones internas de la Columna C-07.....469

Gráfica 8.53. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Pseudo-aceleraciones asociadas a modos de vibración 472

Gráfica 8.54. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos y rotaciones máximas de los centros de masa.....474

Gráfica 8.55. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos y rotaciones máximas de los centros de masa obtenidos con SAP2000 475

Gráfica 8.56. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Verificación de los desplazamientos y rotaciones máximas del Nudo 60.....476

Gráfica 8.57. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas máximas de centros de masa 477

Gráfica 8.58. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas máximas del Eje de Columnas 16.....478

Gráfica 8.59. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones equivalentes trasladadas a centros de masa.....480

Gráfica 8.60. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Cortantes de piso en direcciones x e y.....481

Gráfica 8.61. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones máximas en el extremo inicial del Elemento 1 482

Gráfica 8.62. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Diagramas de momento flector en z local de la Viga V-22 483

Gráfica 8.63. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Envolventes de acciones internas máximas probables de la Viga V-03 484

Gráfica 8.64. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Envolventes de acciones máximas de la Columna C-08.....484

Gráfica 8.65. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Parámetros del Resorte Rotacional RR1.....493

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Gráfica 8.66. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Parámetros del Resorte Rotacional RR2 493

Gráfica 8.67. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Parámetros del Resorte Rotacional RR3 494

Gráfica 8.68. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Desplazamientos relativos a la base de centros de masa 503

Gráfica 8.69. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Velocidades relativas a la base de centros de masa 503

Gráfica 8.70. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Aceleraciones relativas a la base de centros de masa 504

Gráfica 8.71. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones de centros de masa calculadas con UNDIN y con SAP2000 505

Gráfica 8.72. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Acciones inercial, de amortiguamiento, equivalente y externa que actúan en dirección x en el Diafragma de cubierta 506

Gráfica 8.73. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Verificación de la ecuación de movimiento del Grado de Libertad Dinámico 1 506

Gráfica 8.74. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Ecuación de balance de energía 507

Gráfica 8.75. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Verificación de la energía de entrada 507

Gráfica 8.76. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Número máximo de iteraciones y error máximo en cada intervalo de tiempo obtenidos en el ciclo interno 508

Gráfica 8.77. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Número máximo de iteraciones y error máximo en cada intervalo de tiempo obtenidos en el ciclo externo 508

Gráfica 8.78. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Curvas de histéresis de algunos de los resortes rotacionales no lineales del pórtico 511

Gráfica 8.79. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Desplazamientos de los nudos obtenidos con UNDIN y con SAP2000 512

Gráfica 8.80. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Derivas de los diafragmas en dirección x 512

Gráfica 8.81. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Cortantes de piso en dirección x 513

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Gráfica 8.82. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Diagramas de cortantes de piso en x 513

Gráfica 8.83. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Acciones en coordenadas locales en los extremos del Elemento 100 514

Gráfica 8.84. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Momento en el extremo final del Elemento 100, obtenido con UNDIN y SAP2000 514

Gráfica 8.85. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Acciones internas en la Viga V-03 obtenidas con UNDIN.....515

Gráfica 8.86. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Acciones internas en la Columna C-01 obtenidas con UNDIN 516

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Lista de Tablas

Tabla 4.1. Respuesta máxima por modo y respuesta máxima probable obtenida por combinación modal 182
Tabla 4.2. Respuesta máxima probable por combinación direccional 186
Tabla 5.1. Resumen de cálculo de desplazamientos de nudos 239
Tabla 5.2. Resumen de cálculo de acciones equivalentes aplicadas en los nudos 239
Tabla 5.3. Resumen de cálculo de acciones en los extremos de los elemento 240
Tabla 6.1. Descripción de las variables escalares declaradas 258
Tabla 6.2. Descripción de las matrices declaradas 260
Tabla 6.3. Parámetros generales leídos de la hoja "*TB_GEN*" 268
Tabla 6.4. Parámetros generales fijos 270
Tabla 6.5. Tablas leídas de las diferentes hojas de datos 279
Tabla 6.6. Matrices auxiliares 283
Tabla 7.1. Módulos de almacenamiento de subrutinas nuevas 329
Tabla 7.2. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEMPAE 330
Tabla 7.3. Sintaxis y argumentos de la instrucción AECRIG 330
Tabla 7.4. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEDCON 331
Tabla 7.5. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEMPRO 331
Tabla 7.6. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEKGLT 332
Tabla 7.7. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEKGLI 332
Tabla 7.8. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEDESP 333
Tabla 7.9. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEDECM 334
Tabla 7.10. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEDERI 334
Tabla 7.11. Sintaxis y argumentos de la instrucción AECORP 335

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Tabla 7.12. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEDVPI 335
Tabla 7.13. Sintaxis y argumentos de la instrucción AENVOL 336
Tabla 7.14. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEFELE.....336
Tabla 7.15. Sintaxis y argumentos de la instrucción AETRFE 337
Tabla 7.16. Sintaxis y argumentos de la instrucción AETRDE.....338
Tabla 7.17. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEFFES 339
Tabla 7.18. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEDESI 340
Tabla 7.19. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEINIF 341
Tabla 7.20. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEINIR 342
Tabla 7.21. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEDIVC 343
Tabla 7.22. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEAICD 344
Tabla 7.23. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEDIEN.....345
Tabla 7.24. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEDFSJ 346
Tabla 7.25. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEIROT.....348
Tabla 7.26. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEFFIN.....348
Tabla 7.27. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEAJFE 349
Tabla 7.28. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEIDCN 349
Tabla 7.29. Sintaxis y argumentos de la instrucción AEVFRO.....350
Tabla 7.30. Sintaxis y argumentos de la instrucción ADMASA 351
Tabla 7.31. Sintaxis y argumentos de la instrucción ADPEFR 351
Tabla 7.32. Sintaxis y argumentos de la instrucción ADMMAM 351
Tabla 7.33. Sintaxis y argumentos de la instrucción ADAMRS 352
Tabla 7.34. Sintaxis y argumentos de la instrucción ADAMRY.....352
Tabla 7.35. Sintaxis y argumentos de la instrucción ADGAMA.....353
Tabla 7.36. Sintaxis y argumentos de la instrucción ADALFA 353
Tabla 7.37. Sintaxis y argumentos de la instrucción ADMASM.....354
Tabla 7.38. Sintaxis y argumentos de la instrucción ADUGXY 355
Tabla 7.39. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADACEL, ADWILS y ADNEWM 356
Tabla 7.40. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADVMAX.....357
Tabla 7.41. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADESPT.....357

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Tabla 7.42. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADCGEN 358
Tabla 7.43. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADDESP 358
Tabla 7.44. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADMCOR 359
Tabla 7.45. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADCOMM 359
Tabla 7.46. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADCOMD 360
Tabla 7.47. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADTRAE 360
Tabla 7.48. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADACCM 361
Tabla 7.49. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADTRDI..... 362
Tabla 7.50. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADACIN 362
Tabla 7.51. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADCONS 363
Tabla 7.52. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADMAAB 363
Tabla 7.53. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADMARA 364
Tabla 7.54. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADIEFE 364
Tabla 7.55. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADINVA 365
Tabla 7.56. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADREFI 366
Tabla 7.57. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADERRN 366
Tabla 7.58. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADERRD 367
Tabla 7.59. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADFEQF 367
Tabla 7.60. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADAMFI 368
Tabla 7.61. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADENED 368
Tabla 7.62. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADENIN 369
Tabla 7.63. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADENSY 370
Tabla 7.64. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ADBAEN 370
Tabla 7.65. Sintaxis y argumentos de las instrucciones KPOR3D 371
Tabla 7.66. Sintaxis y argumentos de las instrucciones FFPO3D 372
Tabla 7.67. Sintaxis y argumentos de las instrucciones VPJACO..... 373
Tabla 7.68. Sintaxis y argumentos de las instrucciones MTDIAV 373
Tabla 7.69. Sintaxis y argumentos de las instrucciones MTADVM 374
Tabla 7.70. Sintaxis y argumentos de las instrucciones MTREMV 374
Tabla 7.71. Sintaxis y argumentos de las instrucciones MTREMP 375
Tabla 7.72. Sintaxis y argumentos de las instrucciones MTCPCO 375

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Tabla 7.73. Sintaxis y argumentos de las instrucciones NGLNCO 376
Tabla 7.74. Sintaxis y argumentos de las instrucciones NGLROT 376
Tabla 7.75. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ORNDIR 377
Tabla 7.76. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ORECOL.....377
Tabla 7.77. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ORDIRE.....378
Tabla 7.78. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ORMPRO.....378
Tabla 7.79. Sintaxis y argumentos de las instrucciones ORVAPR 379
Tabla 7.80. Sintaxis y argumentos de las instrucciones TRPO3D.....379
Tabla 7.81. Sintaxis y argumentos de las instrucciones TRDIRZ 380
Tabla 7.82. Sintaxis y argumentos de las instrucciones IOIMPR.....380
Tabla 7.83. Sintaxis y argumentos de las instrucciones IOEXPR 381
Tabla 7.84. Sintaxis y argumentos de las instrucciones IOEXDI.....381
Tabla 7.85. Sintaxis y argumentos de las instrucciones PBELRP 382
Tabla 7.86. Sintaxis y argumentos de las instrucciones PBRKRO.....382
Tabla 8.1. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Parámetros para la construcción del espectro de pseudo-aceleraciones 388
Tabla 8.2. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Matriz de rigidez lateral *KDP()* 398
Tabla 8.3. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Matriz de masa *MDR()* 399
Tabla 8.4. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Matriz de amortiguamiento *AMR()*.....400
Tabla 8.5. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Matriz de modos de vibración ortonormalizados *MOV()* 400
Tabla 8.6. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Frecuencias de vibración *FRN()* y modos de vibración natural *PER()*. 400
Tabla 8.7. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Matriz de influencia *GAM()*.403
Tabla 8.8. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Matriz de coeficientes de participación *ALF()* 403
Tabla 8.9. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Matrices de masa modal efectiva *MME()* y *MMP()* 403
Tabla 8.10. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones generalizadas máximas y tiempos correspondientes 405

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Tabla 8.11. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones máximas de centros de masa e instantes de tiempo 408

Tabla 8.12. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Acciones máximas aplicadas en los centros de masa e instantes de tiempo correspondientes 410

Tabla 8.13. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamientos máximos del Nudo 25 412

Tabla 8.14. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Derivas máximas en dirección x de los centros de masa de los Diafragmas 413

Tabla 8.15. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Cortantes de piso máximos e instantes de tiempo correspondientes 415

Tabla 8.16. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Acciones máximas en los extremos del Elemento 26 y tiempos correspondientes 416

Tabla 8.17. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Pseudo-aceleraciones correspondientes a cada modo de vibración del pórtico 420

Tabla 8.18. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamientos generalizados máximos por modo 421

Tabla 8.19. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamientos máximos de los centros de masa 421

Tabla 8.20. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamientos máximos de los Nudos 5 y 25 423

Tabla 8.21. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Desplazamientos máximos probables de los Nudos 5 y 25 tomados de la matriz *DEM()* 423

Tabla 8.22. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Derivas máximas de los centros de masa 424

Tabla 8.23. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Acciones equivalentes máximas 425

Tabla 8.24. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Cortantes de piso máximos 425

Tabla 8.25. Análisis dinámico elástico de un pórtico plano. Acciones máximas probables en los extremos del Elemento 1 426

Tabla 8.26. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de rigidez lateral *KDP()* 447

Tabla 8.27. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Tabla de coordenadas de centros de masa y de rigidez *DRX()* 447

Tabla 8.28. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de masa *MDR()* . 448

Tabla 8.29. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de amortiguamiento *AMR()* 449

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Tabla 8.30. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de modos de vibración ortonormalizados *MOV()* 449

Tabla 8.31. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Frecuencias de vibración *FRN()* y modos de vibración natural *PER()* 450

Tabla 8.32. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de influencia *GAM()* 452

Tabla 8.33. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de coeficientes de participación *ALF()* 452

Tabla 8.34. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matrices de masa modal efectiva *MME()* y *MMP()* 453

Tabla 8.35. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de masa total de la estructura *MTE()* 453

Tabla 8.36. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Coordenadas generalizadas máximas e instantes de tiempo correspondientes 455

Tabla 8.37. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones máximas de los centros de masa de los diafragmas, e instantes de tiempo correspondientes 457

Tabla 8.38. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones máximas aplicadas en los centros de masa e instantes de tiempo correspondientes 459

Tabla 8.39. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos máximos del nudo 60 de cubierta 462

Tabla 8.40. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas máximas en direcciones x e y de los centros de masa 463

Tabla 8.41. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas máximas del Eje de Columna 10 464

Tabla 8.42. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Cortantes de piso máximos e instantes de tiempo correspondientes 466

Tabla 8.43. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones máximas en los extremos del Elemento 1 467

Tabla 8.44. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Pseudo-aceleraciones correspondientes a cada modo de vibración del pórtico 471

Tabla 8.45. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos generalizados máximos por modo 472

Tabla 8.46. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Matriz de coeficientes de correlación *COR()* 473

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Tabla 8.47. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos y rotaciones máximas probables de los centros de masa 473

Tabla 8.48. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Desplazamientos y rotaciones máximas probables del nudo 60 476

Tabla 8.49. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas máximas de centros de masa..... 477

Tabla 8.50. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Derivas máximas del Eje de Columnas 6 478

Tabla 8.51. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones equivalentes trasladadas a centros de masa..... 479

Tabla 8.52. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Cortantes de piso en direcciones x e y..... 481

Tabla 8.53. Análisis dinámico elástico de un pórtico espacial. Acciones máximas en los extremos del Elemento 1..... 482

Tabla 8.54. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones máximas de centros de masa e instantes de tiempo correspondientes..... 504

Tabla 8.55. Análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. Desplazamientos, velocidades y aceleraciones máximas de centros de masa e instantes de tiempo correspondientes..... 505

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Capítulo 1
Introducción

En este capítulo se presenta un esquema general del problema de investigación. Se enuncian las razones que motivaron la creación del Programa Didáctico a Código Abierto de Análisis Dinámico de Estructuras UNDIN, producto principal de la tesis. Se mencionan algunos antecedentes relacionados con la creación de programas de análisis dinámico de estructuras, se enuncian los objetivos generales y específicos de la tesis, la metodología utilizada para su desarrollo y finalmente se describe la estructura general del documento y el contenido de cada capítulo.

1.1. Motivación

Son varias las razones que despertaron el interés en el tema y que motivaron la elaboración de la presente tesis. Tales razones están relacionadas con la forma en que los conceptos de la dinámica se aplican en la ingeniería estructural para describir el efecto de un movimiento sísmico sobre una estructura, y con la importancia del tema en el campo de la ingeniería sísmica y el diseño sismoresistente. Este problema es de gran importancia en países como Colombia, en el que un gran porcentaje de la población vive en zonas de amenaza sísmica intermedia y alta (AIS, 2010), donde se requiere diseñar y construir estructuras seguras, estéticas y económicas.

La formación en dinámica y en su aplicacion al análisis sísmico comienza en la etapa de estudiante y se va complementando durante la práctica profesional. Sin embargo, se observa la necesidad de complementar la formación que se recibe en los cursos de Dinámica Estructural con un componente práctico apoyado en un programa a código abierto. Esto se ha realizado satisfactoriamente en otros cursos de la Maestría en Ingeniería – Estructuras de la Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá, tales como Análisis Matricial Avanzado y Análisis Estructural por Elementos Finitos.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

1.1.1. Importancia de la dinámica estructural

El análisis dinámico permite estimar con cierto grado de certeza la respuesta de una estructura sometida a un conjunto de acciones externas variables en el tiempo (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998; Wilson, 2002). El término *acciones* representa a un conjunto de fuerzas y momentos (Spinel, 2002). El término *respuesta* representa cantidades como los desplazamientos, las velocidades o las aceleraciones de los nudos y de los puntos donde para facilitar el análisis se concentra la masa de la estructura o a las acciones internas inducidas en los elementos estructurales (Chopra, 2001). Las acciones dinámicas externas son causadas por equipos mecánicos, impacto, explosiones, viento, olas o movimientos sísmicos (García, 1998). En el caso de los sismos, las acciones dinámicas son acciones equivalentes que producen el mismo efecto sobre una estructura de base fija, puesto que el fenómeno real corresponde al movimiento acelerado de la base.

La dinámica estructural es indispensable en el análisis y diseño sismoresistente de puentes y edificaciones de diferentes tipologías y con diferentes sistemas estructurales sometidas a una o varias componentes de aceleración de la base, así como para el diseño de otro tipo de obras de infraestructura de mayor complejidad como presas, centrales hidroeléctricas o centrales nucleares.

La respuesta de una estructura sometida a un movimiento sísmico se puede obtener aplicando los conceptos de dinámica estructural y considerando comportamiento lineal. Aunque la respuesta obtenida haciendo esta última consideración es una solución preliminar, puesto que el comportamiento real de una estructura es altamente no lineal y depende de factores como el comportamiento de los materiales, la cinemática o el amortiguamiento (entre otros), su entendimiento es clave para resolver el problema con mayor exactitud.

La respuesta de una estructura que se deforma en el rango inelástico durante un movimiento sísmico fuerte es un problema de especial importancia en ingeniería sísmica (Chopra, 2001). En la mayoría de los casos no es viable, desde el punto de vista económico, diseñar y construir estructuras para que se mantengan elásticas durante un sismo fuerte. En estos casos se incluye la capacidad de deformación en el rango inelástico para reducir las acciones internas que se inducen en los elementos estructurales por el movimiento sísmico. Tales acciones son bastante inferiores en relación a las que se inducirían si la estructura se mantuviera siempre elástica.

En cada caso existe un sistema de ecuaciones que rige el movimiento de la estructura sometida a un movimiento acelerado en la base, cuyo planteamiento obedece a la aplicación de la segunda ley de Newton. Su solución es compleja puesto que se trata de un sistema de ecuaciones simultáneas, acopladas por variables como la masa, la rigidez y el amortiguamiento de la estructura.

Para calcular la respuesta de una estructura en el rango elástico de deformaciones y con amortiguamiento clásico, sometida a una o varias componentes de aceleración de la base se utilizan los métodos de *Análisis Dinámico Elástico*. En la bibliografía se mencionan los

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

métodos de *Análisis Modal Cronológico* y de *Análisis Modal Espectral* (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998; Paz, 1992). El primer método permite calcular la variación en el tiempo de la respuesta de la estructura mientras que el segundo método permite estimar el valor máximo probable de la respuesta de la estructura, pero no permite conocer los instantes en que se presentan las máximas respuestas y el sentido que estas poseen. Los dos métodos aprovechan las propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración natural, con el fin de desacoplar las ecuaciones de movimiento y solucionarlas cada una de forma independiente. Los modos de vibración establecen la configuración deformada de la estructura en condiciones de vibración libre, es decir, sin que actúen acciones externas.

Para el cálculo de la respuesta de una estructura en el rango inelástico no son aplicables los métodos de análisis dinámico elástico mencionados previamente, dado que no es posible desacoplar las ecuaciones de movimiento, y por lo tanto estas deben resolverse en su forma básica, sin ninguna transformación. En la bibliografía se describen métodos que se basan en la linealización de las ecuaciones de movimiento en un intervalo de tiempo (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; Wilson, 2002), como por ejemplo la familia de métodos de Newmark, el método θ de Wilson, el método α de Hilbert, Hughes y Taylor, etc. Estos métodos generalmente se combinan con el Método de Newton Raphson modificado para reducir el error generado por la linealización de las ecuaciones de movimiento.

Los conceptos de dinámica estructural y los métodos de solución de las ecuaciones de movimiento son importantes para calcular la respuesta de una estructura sometida a un movimiento sísmico. Por ejemplo, muchas de las estructuras que se diseñan y construyen actualmente poseen un grado de complejidad y de irregularidad tanto en planta como en alzado (*en el caso de las estructuras para edificaciones*) o un nivel de importancia (*en el caso de los puentes y de cierto tipo de edificaciones*) haciendo necesario que la respuesta estructural se calcule usando algún método de análisis dinámico elástico o inelástico. El Reglamento Colombiano de Construcción Sismo – Resistente NSR-10 (AIS, 2010) y el Código Colombiano de Diseño Sísmico de Puentes (AIS, 2007) permiten el uso de procedimientos de análisis dinámico elástico e inelástico para evaluar la respuesta estructural, aunque con ciertas restricciones para los procedimientos de análisis inelástico.

Los conceptos de dinámica estructural también son aplicables a la solución de problemas de aislamiento de la base y de movimiento diferencial de los apoyos. En general la dinámica estructural permite la solución del problema mecánico en el que las acciones dinámicas externas inducen desplazamientos, velocidades y aceleraciones en todos los grados de libertad de la estructura, incluyendo los de la base.

El trabajo en este tema hace que también se aplique el conocimiento obtenido en otras áreas relacionadas como por ejemplo el análisis matricial, los elementos finitos y el comportamiento inelástico de los elementos de concreto, acero, mampostería y madera que componen las estructuras. El tema integra varias de las áreas estudiadas por el especialista en estructuras, de ahí su importancia.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

1.1.2. Programas a código abierto en la enseñanza de la ingeniería estructural

El uso de programas a código abierto en los que sea visible el proceso de cálculo a un nivel detallado, que sea modificable y que permita la adición de nuevos procedimientos, puede ser una forma adecuada de complementar el aprendizaje adquirido en los cursos de Análisis Dinámico de Estructuras, de relacionar tales conceptos con los adquiridos en otras áreas de la ingeniería estructural como el análisis matricial y el analisis inelástico y de profundizar en el estudio de problemas más avanzados relacionados con el tema.

Como precedentes, en las asignaturas *Análisis Matricial Avanzado* y *Análisis Estructural por Elementos Finitos* impartidas en el programa de Maestría en Ingeniería – Estructuras de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, se ha utilizado el Programa de Elementos Finitos a Código Abierto PEFiCA (Linero, 2008; Linero & Garzón, 2012), con el cual los estudiantes aplican los conceptos adquiridos en clase y desarrollan ejercicios, estimulando de forma importante su aprendizaje de los temas tratados en cada curso.

Aunque PEFiCA es un programa orientado a la solución de estructuras por el método de los elementos finitos, su uso ha permitido (por ejemplo) que en el curso de Análisis Matricial Avanzado los estudiantes lleguen a implementar análisis estáticos lineales de estructuras incluyendo consideraciones especiales en la rigidez de los elementos, tales como deformaciones por cortante, extremos infinitamente rígidos, conexiones parcialmente rígidas en los extremos y discontinuidades, características especiales que se incluyen en programas comerciales. Dicho programa ha contribuido a que los estudiantes comprendan la formulación y las suposiciones en la que se basan programas comerciales más elaborados y con mayores posibilidades como SAP2000© y ETABS©.

De la experiencia adquirida en los cursos de Análisis Maricial Avanzado y Análisis Estructural por Elementos Finitos se plantea la posibilidad de elaborar un programa a código abierto para análisis dinámico de estructuras planas y espaciales conformadas por barras. Se espera que el nuevo programa conserve características de PEFiCA relacionadas con la visibilidad del código y a la posibilidad de modificación y creación de nuevas subrutinas y procedimientos generales.

1.2. Antecedentes

Para el análisis dinámico de estructuras, en la actualidad se cuenta con un gran número de programas de elementos finitos como *ABACUS*, *ANSYS*, *COSMOS* o *ADINA (Linero, 2008)*, usados generalmente para fines de investigación, o como *SAP200* y *ETABS* para la práctica de la ingeniería estructural. Al tratarse de programas en los cuales sus subrutinas no son visibles ni modificables, estos actúan como una caja negra para el usuario.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Por otro lado en diferentes universidades y centros de investigación se han desarrollado programas a código abierto que permiten analizar estructuras por el método de los elementos finitos. Como ejemplos se encuentran los programas FEAP, COMET, FEMLAB (*ejecutables de MATLAB*) y CALFEM, entre otros. Estos programas se caracterizan por poseer subrutinas observables y modificables, a diferencia de los programas comerciales en los que el usuario pierde el control del proceso de cálculo (Linero, 2008).

A continuación se describen brevemente algunos de los programas comerciales y a código abierto, que han sido desarrollados recientemente para el análisis de estructuras.

1.2.1. PEFiCA

PEFiCA (*Programa de Elementos Finitos a Código Abierto*) es un programa a código abierto desarrollado en la Universidad Nacional de Colombia – Sede Bogotá por el profesor Dorian Linero. Tiene como objetivo principal el de motivar, estimular y facilitar el aprendizaje del método de los elementos finitos en el campo de la Ingeniería Civil a través del uso de subrutinas preestablecidas para resolver un problema especifico (Linero, 2008).

El estudiante debe programar el procedimiento principal a partir de las subrutinas proporcionadas por el programa mediante nuevas subrutinas creadas por el mismo. Con lo anterior el programa busca que el usuario participe activamente del proceso de aprendizaje en el tema, observando, entendiendo y desarrollando progresivamente cada una de las etapas de cálculo.

Dentro de las opciones que tiene implementadas PEFiCA se encuentra un conjunto de subrutinas que ordenadas o relacionadas adecuadamente, permiten realizar el análisis lineal estático de cualquier tipo de estructura formada por barras, pasando por la construcción de las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas de cada elemento y de la estructura en general, hasta llegar a la determinación de los desplazamientos de los nudos y de las acciones los extremos de los elementos que componen la estructura.

Este programa evita que los estudiantes ocupen demasiado tiempo realizando cálculos numéricos manualmente, que resultan bastante dispendiosos y conducen fácilmente a errores. Asimismo facilita a los estudiantes el entendimiento de los conceptos adquiridos en clase mediante la práctica. De esta forma expone el proceso asociado al análisis de una estructura, oculto por la mayoria de programas de uso común en la práctica.

1.2.2. RUAUMOKO 3D

Ruaumoko3D es un programa desarrollado en la Universidad de Canterbury (*Nueva Zelanda*) desde 1982 bajo la dirección del Dr. Athol J. Carr. Este programa permite el analisis elástico e inelástico de estructuras planas o espaciales sujetas a movimientos sísmicos o a otros tipos de carga estática o dinámica (Carr, 2007).

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

El programa incluye un gran número de opciones para el análisis de estructuras, como por ejemplo más de 40 tipos de reglas de histéresis (*varias consideran la degradación de rigidez y de resistencia de los miembros*), asi como diferentes criterios para considerar el amortiguamiento natural (*Rayleigh, Caughey, Wilson & Penzien, amortiguadores traslacionales y rotacionales, etc.*) y para definir la rigidez de los elementos (*deformaciones por cortante, conexiones parcialmente rígidas, extremos rígidos, etc.*). El programa también dispone de varios procedimientos de análisis estático o dinámico.

De acuerdo con el autor, Ruaumoko ha sido empleado tanto en investigación como en la práctica profesional. Se ha usado en el estudio del comportamiento dinámico de estructuras de concreto, acero y madera tales como puentes y edificios, también se ha usado en la evaluación de sistemas de aislamiento sísmico y en investigaciones relacionadas con el golpetéo de estructuras sometidas a movimientos sismicos.

El programa contiene una gran cantidad de documentación, que incluye el marco teorico utilizado para su construcción, un manual para el usuario y ejemplos de aplicación. Sin embargo no es a código abierto.

1.2.3. ESIDE

El programa ESIDE (*Educación con Simulación Interactiva para Dinámica Estructural*) desarrollado por la Universidad del Valle, permite simular la respuesta dinámica de varios tipos de sistemas mecánicos y estructuras idealizadas como un sistema de un grado de libertad, bajo la acción de diferentes tipos de excitaciones (Valencia, Ramírez, Gómez, & Thompson, 2011).

El programa fue creado para apoyar el aprendizaje de los estudiantes de ingeniería de los cursos de dinámica estructural, quienes encuentran dificultades para la interpretación y comprensión de los conceptos matemáticos de esta área y para su integración con las aplicaciones reales. Tiene como base la utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (*TIC*) dando como resultado una aplicación gratuita que integra simulaciones, animaciones y formulaciones matemáticas que integran al estudiante en el proceso de aprendizaje.

Los tipos de estructuras simuladas como sistemas elásticos de un grado de libertad son: pórtico plano, pórtico espacial, tanque y sistema masa – resorte – amortiguador. Los tipos de excitación que se permiten son: desplazamiento armónico en el suelo y fuerzas armónicas sobre la estructura, excitación pulso triangular y rectangular en el suelo y en la estructura, excitación sísmica (*sismos de Armenia, el Centro, Loma Prieta, México y Northridge*) y vibración libre. Para cada sistema mecánico o tipo de estructura se cuenta con un programa independiente.

En general es un programa de fácil manejo en el cual la solución de cada problema requiere de pocos parámetros de entrada, y cuenta con un módulo gráfico importante para

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

mostrar la respuesta de la estructura al ser sometida a cada tipo de acción externa. Sin embargo el código no es visible para el estudiante y por lo tanto no es modificable.

1.2.4. Portal de Pórticos (PDP)

El programa Portal de Pórticos PDP permite la simulación numérica de pórticos planos de concreto reforzado bajo solicitaciones sísmicas u otro tipo de acciones externas mediante análisis no lineal por el método de los elementos finitos. (Jaramillo, Uzcátegui, Vera, & Florez, 2009). Por medio de estas simulaciones se obtienen estimados cuantitativos de la densidad de agrietamiento de los diferentes componentes de la estructura, una medida de la fluencia del refuerzo y la posibilidad o no de colapso estructural. Se utiliza la Teoría del Daño Concentrado para describir el comportamiento no lineal de los elementos que componen el pórtico.

Es posible acceder a la interfaz gráfica a través de un navegador comercial de internet, permitiendo establecer una comunicación entre el usuario y un servidor remoto de alto rendimiento.

La estructura del portal en internet está conformada por 3 módulos principales: Preprocesador, Procesador y Postprocesador. En el preprocesador se describe la geometría del pórtico, las solicitaciones, las propiedades de las secciones transversales y del concreto y el acero utilizado. El Procesador es una interfaz con el programa de elementos finitos que se ejecuta en un centro de cómputo de alto rendimiento. Este programa de elementos finitos permite el análisis inelástico, estático o dinámico de la estructura. Por último el Postprocesador permite visualizar los resultados del análisis mediante gráficas de variable contra variable, variables contra tiempo y mapas de distribución de daños en cualquier instante del análisis.

En el desarrollo del programa han participado diferentes entidades de Venezuela tales como la Universidad de los Andes, el parque Tecnológico de Mérida, Fundacite Mérida, Universidad de Carabobo, Universidad de Zulia y Universidad Centro – Occidental. PDP se encuentra disponible en *http://portaldeporticos.ula.ve.*

1.2.5. DINAFACIL

Dinafacil es un programa desarrollado por el profesor Demetrio Curiel (*México*) que permite realizar análisis estáticos y dinámicos de estructuras planas en el rango lineal. Está documentado en el libro *Dinámica Estructural Simplificada* del mismo autor, en el cual se muestra el código del programa. Sin embargo, el programa no permite observar ni modificar sus subrutinas.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

1.2.6. Dinámica estructural con MATLAB

El libro *Dinámica Estructural con Matlab* del profesor Roberto Aguiar Falconi (Aguiar, 2006) contiene un número importante de programas escritos en Matlab que permiten realizar tareas específicas, como por ejemplo calcular la respuesta de un sistema de un grado de libertad en vibración libre o forzada, construir espectros elásticos de respuesta y de diseño, construir las matrices de masa, rigidez, amortiguamiento, de modos de vibración o calcular la respuesta en el tiempo de un sistema de varios grados de libertad por el método de Newmark.

El documento explica la formulación matemática involucrada en la creación de cada programa. Todos los programas desarrollados están orientados a problemas que involucren sistemas elásticos.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

El objetivo general de esta tesis es desarrollar y documentar un Programa Didáctico a Código Abierto de Análisis Dinámico de Estructuras UNDIN 1.0, que resulte útil a los estudiantes y/o a los ingenieros que deseen complementar desde el punto de vista práctico su conocimiento del tema, asi como para quienes deseen profundizar e investigar sobre temas más avanzados relacionados con el comportamiento dinámico de estructuras sometidas a movimientos sísmicos u otro tipo de acciones externas variables en el tiempo.

El programa propuesto utiliza la estructura básica de PEFiCA y permite el análisis dinámico elástico e inelástico de estructuras planas y espaciales conformadas por barras, sometidas a una o varias componentes de aceleración traslacional en la base. En la estructura todos los nudos (*exceptuando los de la base*) se asocian a diafragmas rígidos, y se hacen consideraciones especiales respecto a la distribución de la masa, de la rigidez y del amortiguamiento natural e histerético.

1.3.2. Objetivos específicos

Se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Recopilar la información existente del Programa de Elementos Finitos a Código Abierto PEFiCA y adaptarla para que pueda usarse como base del programa didáctico de análisis dinámico UNDIN.
- Desarrollar, validar y documentar un procedimiento general y sus subrutinas para realizar el análisis dinámico elástico por el método de análisis modal cronológico de

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

estructuras planas y espaciales conformadas por barras, idealizadas como sistemas de varios grados de libertad dinámicos.

- Desarrollar, validar y documentar un procedimiento general y sus subrutinas para realizar el análisis dinámico elástico por el método de análisis modal espectral de estructuras planas y espaciales conformadas por barras, idealizadas como sistemas de varios grados de libertad dinámicos.
- Desarrollar, validar y documentar un procedimiento general y sus subrutinas para realizar el análisis dinámico inelástico de estructuras planas utilizando la familia de Métodos de Newmark y el método de Newton – Raphson Modificado. Las estructuras se idealizan como sistemas de varios grados de libertad dinámicos. La fuente de no linealidad se produce por el comportamiento de los materiales y se representa mediante rótulas plásticas a flexión en los extremos de los elementos, idealizadas como resortes rotacionales no lineales.
- Elaborar un documento que describa el fenómeno físico analizado, las simplificaciones impuestas y el origen de las ecuaciones que rigen la solución del problema y los métodos utilizados para su solución. Asimismo, el documento incluirá la formulación matemática utilizada en los diferentes procedimientos de cálculo implementados en UNDIN, el funcionamiento del código principal y de cada subrutina especifica y varios ejemplos completos que muestren las posibilidades y las limitaciones del programa desarrollado.

1.4. Justificación

La necesidad de una herramienta computacional que apoye el aprendizaje del análisis dinámico de estructuras se basa en que se requiere de una cantidad importante de trabajo autónomo y práctico por parte del estudiante. Una parte importante del trabajo que permite afianzar los conceptos está relacionado con la solución de problemas numéricos, ya que las soluciones analíticas, aunque sirven para entender el fenómeno, están limitadas a casos ideales. Un ejemplo de este tipo de problemas corresponde al de una estructura en vibración libre o en vibración forzada sometida a cargas armónicas externas, con máximo dos grados de libertad dinámicos.

Los programas en los que se apoya el estudiante para el aprendizaje de los temas impartidos en el curso son las herramientas que se usan en la práctica profesional, las cuales no permiten observar el proceso de cálculo. En estas herramientas el estudiante se limita a ingresar los parámetros de entrada de la estructura, algunas veces sin tener claridad total sobre ellos, y a interpretar los resultados, perdiendo de vista el detalle del procedimiento de cálculo.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

De acuerdo con lo anterior, resulta adecuado contar con una herramienta computacional didáctica que sirva para estimular, complementar y profundizar en el aprendizaje del Análisis Dinámico de Estructuras, de forma similar a como se ha hecho en otras asignaturas del programa de Maestría en Ingeniería – Estructuras de la Universidad Nacional de Colombia como Análisis Matricial Avanzado y Análisis Estructural por Elementos Finitos, donde se ha utilizado satisfactoriamente un programa didáctico a código abierto.

Con la herramienta propuesta se espera que el estudiante (*y en general el usuario*) pueda profundizar en el planteamiento y la solución de problemas más avanzados que también se solucionan aplicando los conceptos de la dinámica estructural. Por ejemplo, estructuras con excitación independiente en cada apoyo (*multiple support excitation*), estructuras aisladas en la base o estructuras con otros tipos de no linealidades (*no linealidad debida a otros tipos de rótulas plásticas, no linealidad geométrica, etc*).

1.5. Metodología

El desarrollo de esta tesis comienza por una revisión bibliográfica de los principios y de la formulación matemática de los métodos de análisis dinámico elástico e inelástico disponibles en la bibliografía. De igual forma se revisan los conceptos del método de los desplazamientos, también conocido como método de la rigidez, incluyendo las diferentes consideraciones especiales relacionadas con las deformaciones por cortante y las conexiones parcialmente rígidas a flexión en los extremos de los elementos.

Se espera aprovechar las subrutinas que se encuentran construidas y documentadas en PEFiCA, y se construirán nuevas subrutinas necesarias para que el estudiante pueda realizar el análisis dinámico completo de cierto tipo de estructuras, conservando el enfoque didáctico de PEFiCA.

Se complementan y documentan las subrutinas que no se hayan documentado en el manual original de PEFiCA y que pueden ser utilizadas en UNDIN. También se hace una revisión sobre el tema de programación en Visual Basic para Aplicaciones (*VBA*), lenguaje base de PEFiCA.

De forma paralela a la revisión bibliográfica se plantean e implementan los procedimientos generales para realizar el análisis modal y para obtener la respuesta estructural utilizando los métodos de análisis modal cronológico, análisis modal espectral y análisis dinámico no lineal, métodos incluidos en el programa. La programación de cada método se hace en el orden enunciado previamente y con la formulación general para estructuras espaciales, de forma que el mismo procedimiento funcione también para estructuras planas.

El planteamiento e implementación de cada procedimiento principal incluye el planteamiento e implementación de las subrutinas correspondientes. En cada caso se hace una

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

validación de los procedimientos programados mediante ejemplos numéricos que permitan comparar los resultados obtenidos con otros programas.

Durante el proceso es necesario la construcción de subrutinas especiales para la creación de matrices auxiliares, las cuales facilitan la ejecución de las demás subrutinas de cálculo y del procedimiento principal.

El marco teórico y la documentación del procedimiento principal y de todas las subrutinas se presenta en el documento final, lo cual permite que los futuros usuarios tengan acceso a la formulación matemática y a una descripción de los procedimientos programados en UNDIN.

En el documento se incluyen ejemplos completos de estructuras planas y espaciales analizadas por cada uno de los métodos disponibles en el programa. Cada ejemplo cuenta con una verificación de resultados mediante comparación con otros programas de análisis estructural como SAP2000©.

1.6. Contenido de la Tesis

La presente tesis esta dividida en 9 capítulos, el primero de ellos correspondiente a la introducción que se acaba de presentar.

En el Capítulo 2 se presentan los conceptos de dinámica necesarios para plantear las ecuaciones que rigen el fenómeno físico de la acción del sismo sobre las estructuras. Aquí se presentan los conceptos básicos de cinemática y cinética de cuerpos rígidos en el plano, en donde se describen las ecuaciones de movimiento de traslación y rotación de un cuerpo rígido basadas en la segunda ley de Newton del movimiento. En este capitulo también se describe la forma en que se idealiza la masa, la rigidez y el amortiguamiento de la estructura tipo, y se especifican las componentes de aceleración de la base y los grados de libertad que se consideran para realizar el análisis dinámico. Al final se plantea en forma matricial el sistema de ecuaciones simultáneas que rigen el movimiento de la estructura en cada instante de tiempo y se mencionan algunos de los métodos disponibles en la bibliografía para solucionar tal sistema de ecuaciones (*y que se implementaron en UNDIN*), dependiendo si se considera o no comportamiento inelástico.

En la primera parte del Capítulo 3 se describe el significado y la formulación matemática utilizada de las matrices de masa, rigidez, amortiguamiento y acciones externas equivalentes a la aceleración de la base, que intervienen en el planteamiento y la solución del sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas por cualquiera de los métodos de analisis dinámico elástico o inelástico. En la segunda parte del capítulo se describe el concepto de modos de vibración natural y se describen dos de los métodos utilizados en la práctica para su obtención, el método directo y el método de Jacobi generalizado. En esta parte también

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

se describe como se conforman las ecuaciones modales desacopladas aprovechando las propiedades de ortogonalidad de la matriz de modos de vibración natural, y se describen otras matrices de interés como la matriz de factores de participación y de masa modal efectiva.

En el Capítulo 4 se describe la formulación matemática del método de *análisis modal cronológico* que permite calcular la respuesta de la estructura en cada instante de tiempo cuando esta se somete a una o varias componentes de aceleración en la base. Asimismo se presenta la formulación matemática del metodo de *análisis modal espectral*, que permite estimar la respuesta máxima probable de una estructura, también sometida a una o varias componentes de aceleración de la base, pero a partir de un *espectro de pseudo – aceleraciones*. Estos dos métodos están restringidos a sistemas elásticos y con amortiguamiento clásico, se basan en el desacople de las ecuaciones de movimiento descrito en el Capítulo 3 y fueron implementados en UNDIN. Además, se describe la forma de calcular algunos de los parámetros más relevantes de respuesta de la estructura al utilizar cada uno de los métodos, tales como desplazamientos, derivas, cortantes de piso, acciones internas, etc.

En el Capítulo 5 se presenta una formulación matemática y el procedimiento correspondiente para el análisis dinámico de una estructura sometida a una o varias componentes de aceleración de la base, considerando la formación de rótulas plásticas a flexión en los extremos de los elementos. Especificamente se describe la forma de realizar el análisis para las cargas iniciales, presentes antes de la acción de la aceleración de la base, la forma en que se utiliza el modelo de Bouc – Wen para representar la relación momento – rotación de los resortes rotacionales no lineales utilizados para idealizar las rótulas plásticas y se describe la formulación matemática de la familia de métodos de Newmark junto con el método de Newton – Raphson modificado. Respecto a este último, se detalla el cálculo del incremento de las acciones estáticas equivalentes trasladadas a los centros de masa a partir del incremento en los desplazamientos de estos mismos puntos, lo cual involucra relacionar el efecto de las rótulas plásticas en el equilibrio y la compatibilidad de desplazamientos en cada instante de tiempo. Asimismo se describe la forma de calcular los desplazamientos de los centros de masa y de los nudos, las derivas, los cortantes de piso, las acciones internas en los elementos, entre otros parámetros.

En el Capítulo 6 se describe la estructura general del programa desarrollado, se muestra la forma en que se encuentra organizado y cómo acceder al código principal y a las subrutinas. Posteriormente se describe con mayor profundidad cada una de las etapas de cálculo de la subrutina principal, las cuales incluyen la declaración de variables, la lectura de los datos de entrada (*escalares y matrices*), la creación de matrices auxiliares, el cálculo de las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento, de modos de vibración, de factores de participación y de masa modal efectiva (*entre otras*), la ejecución del análisis modal cronológico, del análisis modal espectral o del análisis dinámico inelástico de la estructura, y finalmente la escritura y el almacenamiento de los resultados.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

En el Capítulo 7 se describe cada una de las subrutinas específicas desarrolladas, diferentes a la subrutina principal y a las existentes en PEFiCA. Para cada subrutina se menciona la tarea que realiza dentro del procedimiento principal, se indican los parámetros de entrada y de salida involucrados y se describe brevemente el proceso interno que se lleva a cabo durante su ejecución.

En el Capítulo 8 se presentan los resultados del análisis dinámico de varios pórticos planos y espaciales, llevados a cabo utilizando los diferentes métodos implementados en UNDIN. En cada caso se presenta una descripción de la estructura y de los parámetros de análisis, una descripción de los datos de entrada requeridos por el programa, coordinados con los parámetros de análisis, y la interpretación de los resultados. Estos resultados fueron comparados y validados realizando el mismo análisis con el programa de análisis estructural SAP2000©.

Finalmente en el Capítulo 9 se presentan las conclusiones y las recomendaciones derivadas de la ejecución de esta tesis, relacionadas con la finalidad, las capacidades, las limitaciones y las posibilidades de nuevas implementaciones dentro del programa.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Capítulo 2
Aplicación de la dinámica al análisis sísmico de estructuras

En el presente capítulo se describe el problema estudiado en esta tesis, el cual consiste en predecir la respuesta de una estructura plana o espacial sometida a una o varias componentes de aceleración de la base, iguales en todos los apoyos. La idealización analítica de la estructura (Spinel, 1993) consiste en un conjunto de cuerpos rígidos denominados *diafragmas*, vinculados a la estructura a través de los nudos. Los elementos estructurales son flexibles y experimentan comportamiento elástico o inelástico dependiendo si se considera o no la presencia de rótulas plásticas.

Inicialmente se presentan algunos conceptos básicos relacionados con la cinemática y la cinética de cuerpos rígidos en el plano, mostrando la procedencia de las ecuaciones de movimiento de los diafragmas rígidos. Posteriormente se describe la forma en que se idealiza la distribución de la masa y la rigidez de la estructura, y se indican los grados de libertad y las componentes de aceleración de la base que se consideran en el análisis dinámico.

En cuanto a la idealización matemática (Spinel, 1993) se describe la forma como se plantea la *Ecuación de Movimiento*, también conocida como *Ecuación de Equilibrio Dinámico*, considerando las fuerzas y momentos que actúan en cada diafragma rígido y las componentes de aceleración de la base. Finalmente se mencionan los métodos de análisis dinámico que permiten la solución de la ecuación de movimiento para los casos lineal y no lineal. Estos métodos se describen con mayor detalle en los capítulos posteriores.

2.1. Cinemática de cuerpos rígidos en el plano

La cinemática es la rama de la dinámica que estudia la geometría del movimiento de los cuerpos sin tener en cuenta las causas que lo provocan (Hibbeler, 2010). La cinemática en

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

el plano se refiere específicamente a los cuerpos cuyas partículas se desplazan a lo largo de trayectorias rectilíneas o curvilíneas equidistantes de un plano fijo.

Existen tres tipos de movimiento que experimenta un cuerpo rígido en el plano, estos son *traslación*, *rotación alrededor de un eje fijo* y *movimiento plano general*. Para su descripción se utilizan las siguientes relaciones cinemáticas entre los vectores de posición $\vec{r}$, velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.1}$$

2.1.1. Traslación

La traslación ocurre cuando una línea recta que une dos puntos cualesquiera en el cuerpo permanece paralela a su orientación original durante todo el movimiento (Hibbeler, 2010).

Cuando las trayectorias de los dos puntos de referencia son líneas rectas paralelas el movimiento es *rectilíneo*, mientras que sí las trayectorias son curvas equidistantes el movimiento de traslación es *curvilíneo*. La Figura 2.1 muestra un cuerpo rígido que experimenta traslación rectilínea y curvilínea.

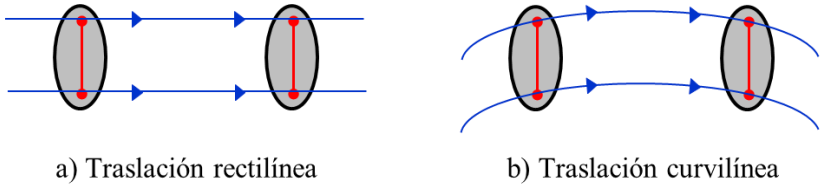


Figura 2.1. Movimiento de traslación rectilínea y curvilínea (Hibbeler, 2010)

La forma en que se describe este tipo de movimiento a través de las cantidades cinemáticas de posición, velocidad y aceleración se muestra a continuación. Considerando el cuerpo rígido de la Figura 2.2 sobre el que se han seleccionado dos puntos de referencia denominados *A* y *B*.

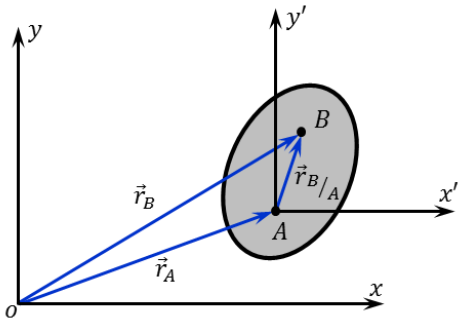


Figura 2.2. Cuerpo rígido con movimiento de traslación (Hibbeler, 2010)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La *posición absoluta* de los puntos A y B la representan los vectores $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$, medidas desde el origen o del sistema de coordenadas fijo xy. La posición del punto B también se puede medir desde el punto A utilizando un sistema de coordenadas auxiliar $x'y'$ cuyo origen está en A y que se traslada con el cuerpo, manteniéndose siempre paralelo al sistema xy. A la posición de B respecto a A $\vec{r}_{B/A}$ se le denomina *posición relativa,* ya que esta medida respecto a un sistema de coordenadas en movimiento.

Los vectores $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ y $\vec{r}_{B/A}$ cumplen la siguiente igualdad:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \tag{2.2}$$

Si cada término de la anterior ecuación se deriva respecto al tiempo, teniendo en cuenta que $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, se llega a la siguiente ecuación de velocidades:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \tag{2.3}$$

Donde $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ son las velocidades absolutas de los puntos A y B, y $\vec{v}_{B/A}$ es la velocidad relativa de B respecto a A. Esta última es cero ya que ni la magnitud ni la orientación del vector $\vec{r}_{B/A}$ cambian en el tiempo. Por lo tanto:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A \tag{2.4}$$

Derivando la Ecuación (2.4) respecto al tiempo, teniendo en cuenta que $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, se llega a la siguiente ecuación de aceleraciones:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A \tag{2.5}$$

Las ecuaciones (2.4) y (2.5) indican que en un cuerpo rígido con movimiento de traslación todos los puntos se mueven con la misma velocidad y con la misma aceleración.

2.1.2. Rotación alrededor a un eje fijo

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, todas sus partículas, excepto las que quedan sobre el eje de rotación, describen trayectorias circulares equidistantes a un plano normal al eje de rotación (Figura 2.3).

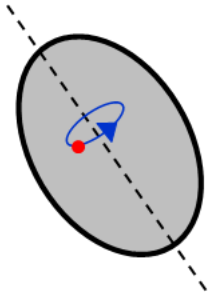


Figura 2.3. Cuerpo rígido con rotación alrededor de un eje fijo (Hibbeler, 2010)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Dado que un punto no tiene dimensiones, tampoco tiene movimiento angular. Solamente las líneas y los cuerpos experimentan movimiento angular (Hibbeler, 2010). A continuación se describe el movimiento angular de la línea r del cuerpo de la Figura 2.4. La línea está localizada en un plano ortogonal al eje de rotación del cuerpo.

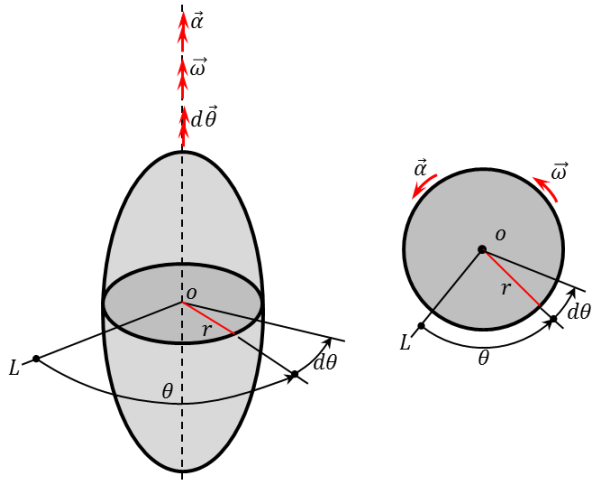


Figura 2.4. Cuerpo rígido con rotación alrededor de un eje fijo (Hibbeler, 2010)

La *posición angular* de la línea r esta dada por el ángulo θ medido desde una línea de referencia fija hasta r. El desplazamiento angular representa el cambio en la posición angular y está dado por el vector $d\vec{\theta}$, cuya magnitud es $d\theta$ y su dirección va a lo largo del eje de rotación. Esta se determina aplicando la regla de la mano derecha.

La *velocidad angular* $\vec{\omega}$, medida en rad/s, es por definición el cambio de la posición angular respecto al tiempo:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \tag{2.6}$$

La *aceleración angular* $\vec{\alpha}$, medida en rad/s^2 es por definición el cambio de la velocidad angular respecto al tiempo:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2} \tag{2.7}$$

Las direcciones de los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ también van a lo largo del eje de rotación, pero su sentido depende de si $\vec{\theta}$ y $\vec{\omega}$ crecen o decrecen.

El movimiento de cualquier punto P localizado dentro del cuerpo se describe a partir de las cantidades $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ como se indica a continuación.

Según la Figura 2.5 a medida que el cuerpo gira, el punto P sigue una trayectoria circular de radio r y centro en O. La posición de P esta dada por el vector $\vec{r}$ que va de O a P.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Cuando el cuerpo gira un ángulo $d\theta$, el punto se desplaza una cantidad $ds = rd\theta$ siendo r la magnitud del vector $\vec{r}$.

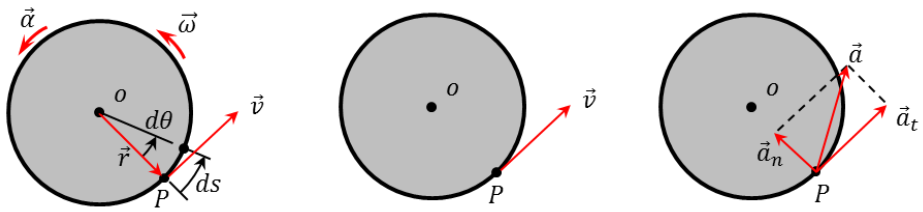


Figura 2.5. Movimiento del punto P (Hibbeler, 2010)

La magnitud de la velocidad instantánea de P estará dada por la siguiente expresión:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(rd\theta)}{dt} = \omega r \tag{2.8}$$

El vector de velocidad es tangente a la trayectoria circular del punto P. Si se conoce la velocidad angular $\vec{\omega}$, el vector $\vec{v}$ se obtiene con el siguiente producto vectorial:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{2.9}$$

Al utilizar componentes normal y tangencial, el vector $\vec{a}$ de aceleración instantánea de P se descompone en dos componentes ortogonales, una componente $\vec{a}_t$ tangencial a la trayectoria, y una componente $\vec{a}_n$ normal a la trayectoria y que apunta hacia el centro del círculo de radio r. Las magnitudes de $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ están dadas por las siguientes expresiones:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = \alpha r \qquad\qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r \tag{2.10}$$

El vector $\vec{a}$ de aceleración del punto P, que equivale a la derivada de la velocidad respecto al tiempo, también se obtiene con la siguiente expresión vectorial:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.11}$$

La cual se simplifica a la siguiente expresión:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \tag{2.12}$$

En la expresión (2.12) el término $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ corresponde a la componente de aceleración en dirección tangencial $\vec{a}_t$ y el término $-\omega^2 \vec{r}$ a la componente de aceleración en dirección normal $\vec{a}_n$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

2.1.3. Movimiento plano general

El movimiento plano general es una combinación de los movimientos de traslación y rotación respecto a un eje. La traslación se presenta en un plano de referencia y la rotación respecto a un eje ortogonal al plano de referencia. Las trayectorias de los puntos dentro de un cuerpo con movimiento plano general dejan de ser equidistantes o circulares como en los otros tipos de movimiento. La Figura 2.6 muestra un cuerpo rígido con movimiento plano general.

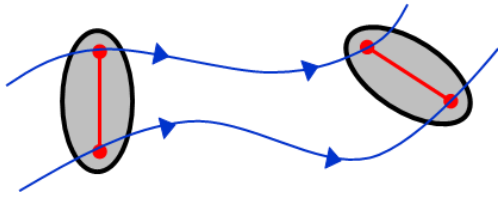


Figura 2.6. Movimiento plano general (Hibbeler, 2010)

El análisis de movimiento relativo se utiliza para describir el movimiento plano general de un cuerpo, entendiéndolo como la combinación de los movimientos básicos de traslación y rotación. En este tipo de análisis se utilizan dos sistemas de referencia semejantes a los que se utilizaron en la descripción del movimiento de traslación. El sistema xy esta fijo y mide la posición absoluta de cualquier punto en el cuerpo. El sistema auxiliar $x'y'$ tiene como origen un punto dentro del elemento, denominado *punto base*, y por lo tanto es móvil, aunque permanece siempre paralelo al sistema xy fijo.

La Figura 2.7 muestra los sistemas de coordenadas xy y $x'y'$ utilizados para describir el movimiento de una barra rígida, sobre la cual se han escogido los puntos de referencia A y B. El sistema de coordenadas $x'y'$ tiene como origen el punto A.

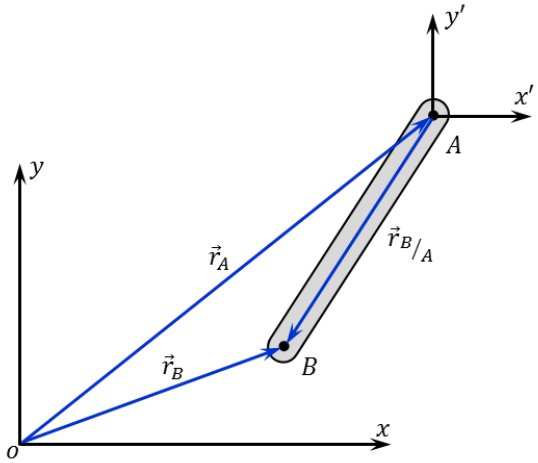


Figura 2.7. Posiciones absolutas y relativas (Hibbeler, 2010)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Como en el movimiento de traslación, los vectores $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$ miden las posiciones absolutas de los puntos *A* y *B*, mientras que el vector $\vec{r}_{B/A}$ mide la posición relativa de *B* respecto al punto base *A*, y nuevamente los tres vectores se relacionan mediante la expresión $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$ (*Ecuación (2.2)*).

Cuando la barra se mueve durante un intervalo de tiempo diferencial dt, los puntos *A* y *B* experimentan los desplazamientos $d\vec{r}_A$ y $d\vec{r}_B$ como se muestra en la Figura 2.8. El movimiento de la barra se descompone en un movimiento de traslación, en el que todos los puntos experimentan el mismo desplazamiento $d\vec{r}_A$, y en un posterior movimiento de rotación respecto a un eje ortogonal al plano y que pasa el punto base *A*.

Durante la traslación el punto *A* llega a su posición final, mientras que el punto *B* pasa a una posición intermedia *B'*. En la segunda etapa, en la que todo el cuerpo gira respecto al punto *A* un ángulo $d\theta$, el punto *B* experimenta un desplazamiento adicional desde *B'* hasta *B* denominado $d\vec{r}_{B/A}$.

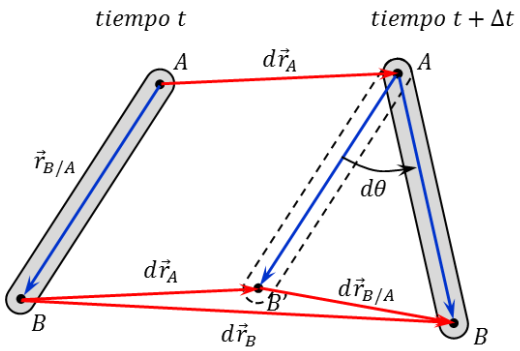


Figura 2.8. Componentes de traslación y rotación del movimiento plano general (Hibbeler, 2010)

En la misma figura se observa que los desplazamientos $d\vec{r}_A$, $d\vec{r}_B$ y $d\vec{r}_{B/A}$ están relacionados por la siguiente expresión vectorial:

$$d\vec{r}_B = d\vec{r}_A + d\vec{r}_{B/A} \tag{2.13}$$

Si cada término de la anterior expresión se deriva respecto al tiempo, se llega a la siguiente ecuación de velocidades:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \tag{2.14}$$

donde $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ son las velocidades absolutas de los puntos *A* y *B*, mientras que $\vec{v}_{B/A}$ es la velocidad relativa del punto *B*, medida por un observador parado en *A*. Cuando el cuerpo gira el ángulo $d\theta$ respecto al punto *A*, lo hace con una velocidad angular $\vec{\omega}$.

En la segunda etapa del movimiento, en la que el cuerpo gira respecto a un eje fijo en *A*, el punto *B* sigue una trayectoria circular. De acuerdo con la Ecuación (2.9), la velocidad $\vec{v}_{B/A}$ equivale al producto vectorial $\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$. Reemplazando esta expresión para $\vec{v}_{B/A}$ se

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

llega a la Ecuación (2.15) que relaciona las velocidades absolutas de dos puntos dentro del cuerpo con la velocidad angular del mismo cuerpo:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A} \tag{2.15}$$

Derivando la Ecuación (2.14) respecto al tiempo, se obtiene una expresión vectorial que relaciona las aceleraciones de los puntos *A* y *B* dentro del cuerpo rígido:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \tag{2.16}$$

donde $\vec{a}_A$ y $\vec{a}_B$ son las aceleraciones absolutas de los puntos *A* y *B*, mientras que $\vec{a}_{B/A}$ es la aceleración relativa del punto *B* respecto al punto *A*, esta última producida por la trayectoria circular que experimenta *B* respecto al punto *A*.

La aceleración $\vec{a}_{B/A}$ posee dos componentes ortogonales, una componente tangencial a la trayectoria circular denominada $(\vec{a}_{B/A})_t$ y una componente normal a la trayectoria y que apunta hacia el centro de curvatura (*punto A*) denominada $(\vec{a}_{B/A})_n$. Por lo tanto:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_t + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_n \tag{2.17}$$

En la Ecuación (2.12) se indicó que la aceleración de un punto *P* localizado dentro del cuerpo se evalúa con la expresión $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$, donde $\vec{\alpha}$ es la aceleración angular del cuerpo rígido, $\vec{r}$ es el vector de posición que va de *O* a *P* y ω es la magnitud del vector de velocidad angular $\vec{\omega}$ del cuerpo. En este caso $\vec{a}$ coincide con la aceleración $\vec{a}_{B/A}$ y $\vec{r}$ corresponde al vector $\vec{r}_{B/A}$. Por lo tanto al reemplazar $\left(\vec{a}_{B/A}\right)_t + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_n$ en la Ecuación (2.17):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A} \tag{2.18}$$

La anterior ecuación relaciona las aceleraciones absolutas de dos puntos cualquiera dentro de un cuerpo rígido, con la velocidad y la aceleración angular del mismo cuerpo. Posteriormente, en la parte de cinética de cuerpos rígidos en el plano, se utiliza en la deducción de la ecuación de movimiento de rotación.

2.2. Cinética de cuerpos rígidos en el plano

La cinética es la rama de la dinámica que estudia las causas del movimiento, el cual es provocado por las fuerzas y los momentos externos que actúan sobre una partícula o cuerpo. Esta rama tiene como base la segunda ley de Newton del movimiento.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

A continuación se indica la forma en que la segunda ley de Newton se utiliza para describir el movimiento plano general de un cuerpo rígido sometido a un conjunto determinado de acciones externas.

2.2.1. Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton del movimiento establece que si sobre una partícula actúa una fuerza desbalanceada, el cuerpo experimentará una aceleración proporcional a su masa, en la misma dirección de la fuerza desbalanceada (Hibbeler, 2010). La segunda ley de Newton no es demostrable, pero puede verificarse experimentalmente aplicando una fuerza a una partícula y midiendo su aceleración. La relación entre la fuerza aplicada F y la aceleración medida a es constante y corresponde a la *masa* m de la partícula, es decir $m = F/a$. La masa es una medida de la oposición de la partícula a ser acelerada o desacelerada.

Dado que en realidad la fuerza y la aceleración son vectores, la segunda ley de Newton es la siguiente:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.19}$$

Si actúa más de una fuerza sobre la partícula, la fuerza desbalanceada (*o resultante*) se calcula como la suma vectorial $\Sigma\vec{F}$ de todas las fuerzas externas que actúan sobre la partícula. En este caso la segunda ley de Newton se escribe como se muestra a continuación:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.20}$$

La Figura 2.9 muestra una interpretación física de la Ecuación (2.20). En ella se muestran las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que actúan sobre una partícula, cuya resultante, el vector $\Sigma\vec{F}$, es diferente de cero y por lo tanto tiene la misma magnitud, dirección y sentido del vector $m\vec{a}$.

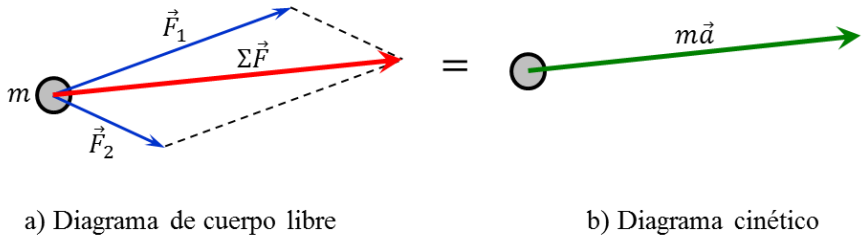


Figura 2.9. Significado de la segunda ley de Newton del movimiento (Hibbeler, 2010)

Cuando se aplica la segunda ley de Newton la aceleración debe medirse respecto a un *marco de referencia inercial o Newtoniano,* que este fijo o se traslade a velocidad constante para que la medición de la aceleración sea la misma en cualquier marco de referencia (Hibbeler, 2010). Por lo tanto $\vec{a}$ es una cantidad vectorial absoluta.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

2.2.2. Ecuación de movimiento de un sistema de partículas

La segunda ley de Newton también se utiliza para estudiar el movimiento de un conjunto de partículas conectadas o no, aisladas dentro de una región cerrada. En la Figura 2.10 se muestra un sistema de partículas cuyo centro de gravedad o centro de masa está localizado en el punto G. El vector $\vec{r}_G$ indica la posición de G mientras que el vector $\vec{r}_i$ indica la posición de la partícula i, posiciones medidas respecto a un sistema de coordenadas xyz fijo.

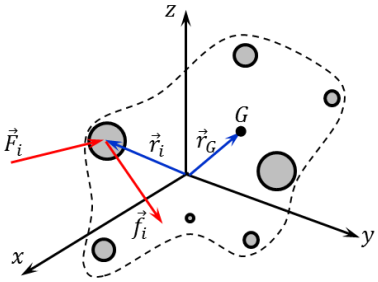


Figura 2.10. Ecuación de movimiento aplicada a un sistema de partículas (Hibbeler, 2010)

En un instante de tiempo determinado, sobre la partícula i actúan las fuerzas resultantes $\vec{F}_i$ y $\vec{f}_i$ que representan respectivamente el efecto de la interacción de la partícula con el entorno y con las demás partículas del sistema. Si se aplica la segunda ley de Newton solamente a la partícula i, se tiene lo siguiente:

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i \tag{2.21}$$

Al aplicar la misma ley a las demás partículas del sistema, sumar y simplificar, se llega a la siguiente expresión:

$$\Sigma \vec{F}_i + \Sigma \vec{f}_i = \Sigma m_i \vec{a}_i \tag{2.22}$$

donde $\Sigma \vec{F}_i$ corresponde a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema y $\Sigma \vec{f}_i$ es la suma de las fuerzas internas, la cual es igual a cero ya que las fuerzas internas entre dos partículas se presentan en pares colineales iguales pero opuestos, por lo que se terminan anulando.

Partiendo de la expresión (2.23) que permite obtener la posición del centro de gravedad G de sistema de partículas, en la que m es la masa total del sistema y $\vec{r}_G$ es el vector de posición del centro de gravedad, como se indica en la Figura 2.10:

$$\Sigma m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_G \tag{2.23}$$

Si ésta se deriva dos veces respecto al tiempo, teniendo en cuenta que $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$ y que m y m_i son constantes, se llega a la siguiente expresión:

$$\Sigma m_i \vec{a}_i = m \vec{a}_G \tag{2.24}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Donde $\vec{a}_G$ es el vector de aceleración del centro de masa del sistema. Si la Ecuación (2.24) se reemplaza en la Ecuación (2.22) y como las únicas fuerzas que intervienen en la sumatoria son las fuerzas externas, ahora denominadas $\Sigma\vec{F}$, la expresión (2.24) queda:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_G \tag{2.25}$$

La ecuación anterior indica que la fuerza externa resultante $\Sigma\vec{F}$ que actúa sobre un sistema de partículas, es igual al producto de la masa total del sistema m y de la aceleración absoluta del centro de masa $\vec{a}_G$. Esta expresión también se utiliza para describir el movimiento de traslación de un cuerpo rígido, asemejando el cuerpo a una sola partícula.

2.2.3. Momento de inercia de masa. Teorema de los ejes paralelos

A continuación se describe el concepto de momento de inercia de masa y se menciona brevemente el teorema de ejes paralelos, que relaciona los momentos de inercia de masa calculados respecto a un eje centroidal y a un eje paralelo. El momento de inercia y el teorema de ejes paralelos se utilizan en la deducción y en la aplicación de la ecuación de movimiento de rotación como se describe más adelante.

El momento de inercia de masa I es una cantidad que se calcula como la integral del segundo momento alrededor de un eje, de todos los elementos de masa dm que componen el cuerpo.

$$I = \int_m r^2 dm \tag{2.26}$$

El brazo r asociado al momento es la distancia perpendicular desde el elemento de masa dm hasta el eje respecto al cual se calcula la integral, como lo muestra la Figura 2.11.

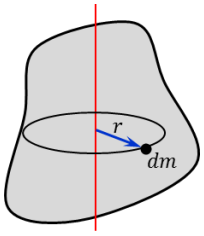


Figura 2.11. Definición de momento de inercia de masa (Hibbeler, 2010)

El momento de inercia mide la resistencia del cuerpo a la aceleración angular (Hibbeler, 2010) así como la masa mide la inercia del cuerpo a la aceleración (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998; Hibbeler, 2010).

El teorema de ejes paralelos relaciona los momentos de inercia de masa de un cuerpo, calculados respecto a un eje centroidal y respecto a un eje paralelo. La expresión básica del teorema es la siguiente:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$I = I_G + md^2 \tag{2.27}$$

donde I_G es el momento de inercia de masa calculado respecto a un eje centroidal, I es el momento de inercia de masa calculado respecto a un eje paralelo al eje centroidal, m es la masa total del cuerpo y d es la distancia perpendicular entre los ejes centroidal y paralelo. Dado que el producto md^2 siempre es positivo, el momento de inercia de masa respecto a un eje centroidal siempre es el menor momento de inercia que posee un cuerpo.

2.2.4. Ecuaciones de movimiento de traslación y rotación

La Ecuación (2.25) de movimiento de traslación puede aplicarse a un cuerpo rígido representado como una partícula única, sometida a un sistema de fuerzas externas cuya resultante es $\Sigma\vec{F}$ y cuyo centro de gravedad o de masa se acelera una cantidad $\vec{a}_G$.

Para un cuerpo que se mueve en el plano xy, esta ecuación vectorial se divide en dos ecuaciones escalares independientes como las siguientes:

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x \qquad \Sigma F_y = m(a_G)_y \tag{2.28}$$

A continuación se muestra la deducción de la ecuación de movimiento de rotación de un cuerpo rígido aplicando la segunda ley de Newton a cada partícula del cuerpo.

En la Figura 2.12 se muestra un cuerpo rígido referido a un sistema de coordenadas xy cuyo origen está en el punto P. En la figura se indican las fuerzas resultantes externa e interna $\vec{F}_i$ y $\vec{f}_i$ que actúan sobre la partícula i, y el vector $\vec{r}$ que indica la posición de la misma partícula.

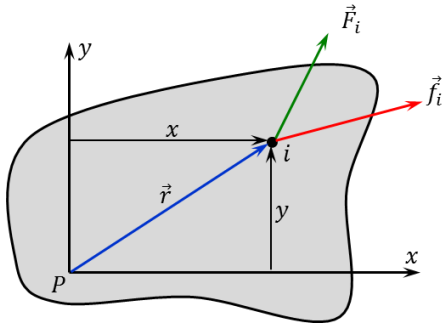


Figura 2.12. Diagrama de cuerpo libre de una de las partículas de un cuerpo rígido (Hibbeler, 2010)

Partiendo de la segunda ley de Newton aplicada a la partícula i, la cual se acelera una cantidad $\vec{a}_i$:

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i\vec{a}_i \tag{2.29}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

El momento $(\vec{M}_P)_i$ que producen las fuerzas $\vec{F}_i$ y $\vec{f}_i$ respecto a un eje ortogonal al plano del movimiento y que pasa por el punto P sería el siguiente:

$$\left(\vec{M}_P\right)_i = \vec{r} \times \left(\vec{F}_i + \vec{f}_i\right) = m_i(\vec{r} \times \vec{a}_i) \tag{2.30}$$

La aceleración $\vec{a}_i$ se expresa en función de la aceleración del punto P $\vec{a}_P$, utilizando la Ecuación $\vec{a}_i = \vec{a}_P + \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2\vec{r}$, en la que ω y $\vec{\alpha}$ son la velocidad y la aceleración angular del cuerpo:

$$\left(\vec{M}_P\right)_i = m_i\vec{r} \times (\vec{a}_P + \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2\vec{r}) \tag{2.31}$$

Los vectores $\vec{r}$, $\vec{a}_P$ y $\vec{\alpha}$ escritos en componentes rectangulares son los siguientes:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \qquad \vec{a}_P = (a_P)_x\vec{\imath} + (a_P)_y\vec{\jmath} \qquad \vec{\alpha} = \alpha\vec{k} \tag{2.32}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.32) en la Ecuación (2.31) se obtiene:

$$\left(\vec{M}_P\right)_i = (M_P)_i\vec{k} = m_i\left(x(a_P)_y - y(a_P)_x + \alpha r^2\right)\vec{k} \tag{2.33}$$

El momento $(M_P)_i$ es producido solamente por las fuerzas que actúan sobre la partícula i del cuerpo. Al calcular los momentos producidos por las fuerzas que actúan sobre las demás partículas del cuerpo y sumar, lo que equivale a calcular una integral en la que $m_i = dm$, se obtiene el momento total $\Sigma\vec{M}_P$ producido por las fuerzas externas aplicadas al cuerpo (*las fuerzas internas producen un momento total igual a cero)*. La ecuación de la magnitud del momento resultante ΣM_P es la siguiente:

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = (a_P)_y \int xdm - (a_P)_x \int ydm + \alpha \int r^2 dm \tag{2.34}$$

Dado que la integral $\int r^2 dm$ corresponde a I_P, momento de inercia de masa del cuerpo respecto al eje paralelo a z y que pasa por P, y utilizando las ecuaciones que permiten calcular las coordenadas $\bar{x}, \bar{y}$ del centro de masas del cuerpo, las cuales se muestran a continuación:

$$\int xdm = \bar{x}m \qquad \int ydm = \bar{y}m \tag{2.35}$$

Al reemplazar las integrales que aparecen en la Ecuación (2.34) por expresiones más sencillas, la expresión del momento resultante se simplifica a:

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = \bar{x}m(a_P)_y - \bar{y}m(a_P)_x + I_P\alpha \tag{2.36}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Cuando el punto P coincide con el punto G, es decir, cuando el origen del sistema de coordenadas se coloca en el punto G, de forma que $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sean cero, la ecuación de momento resultante o *ecuación de movimiento de rotación*, es:

$$\circlearrowleft \Sigma M_G = I_G \alpha \tag{2.37}$$

Esta última establece que el momento resultante ΣM_G, producido por las fuerzas externas y calculado respecto al centro de masa del cuerpo, es igual al momento de inercia de masa I_G calculado respecto a un eje que pase por G, multiplicado por la aceleración angular absoluta α del cuerpo.

La Ecuación (2.36) queda en función de la aceleración del centro de masa $\vec{a}_G$ y del momento de inercia calculado respecto a un eje que pase por el centro de masa I_G, al utilizar la Ecuación (2.18) para relacionar $\vec{a}_G$ con $\vec{a}_P$ y el teorema de ejes paralelos para relacionar I_P con I_G:

$$I_P = I_G + mr_G^2 \qquad \vec{a}_G = \vec{a}_P + \vec{\alpha} \times \vec{r}_G - \omega^2 \vec{r}_G \tag{2.38}$$

En las anteriores expresiones $\vec{r}_G = \bar{x}\vec{\imath} + \bar{y}\vec{\jmath}$ y $r_G^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$. Al realizar las sustituciones respectivas y simplificar, la Ecuación (2.36) toma la siguiente forma:

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = \bar{x} m (a_G)_y - \bar{y} m (a_G)_x + I_G \alpha \tag{2.39}$$

En la anterior expresión $(a_G)_x$ y $(a_G)_y$ son las componentes en x e y de la aceleración del centro de masa. Nuevamente si $P = G$ se llega a la Ecuación (2.37).

En resumen, las tres ecuaciones escalares de (2.40) describen el movimiento plano general de un cuerpo rígido restringido a moverse en el plano xy y a rotar respecto al eje z, sometido a un conjunto de fuerzas y momentos externos como el de la Figura 2.13.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma M_G &= I_G \alpha \end{aligned} \tag{2.40}$$

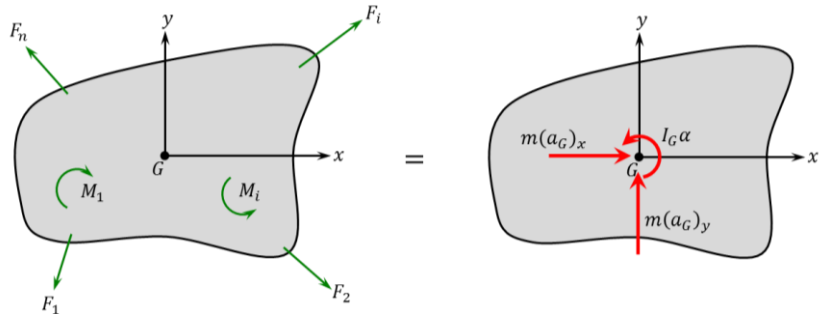


Figura 2.13. Aplicación de las ecuaciones de movimiento a un cuerpo rígido (Hibbeler, 2010)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

2.3. Idealización de la estructura y aceleración de la base

En esta sección se describe la forma como se idealizan las estructuras estudiadas en la tesis en términos de la masa, la rigidez y las restricciones geométricas. Se describen y justifican los grados de libertad y las componentes de aceleración de la base que se consideran en el análisis dinámico, dependiendo si se trata de una estructura plana o espacial.

2.3.1. Idealización de la estructura

Las estructuras hacia las que se enfoca UNDIN corresponden a edificios cuyo sistema estructural principal, resistente a fuerzas laterales, es de tipo pórtico plano o espacial, compuesta por barras prismáticas con secciones de doble simetría, conectadas entre sí mediante conexiones total o parcialmente rígidas en los extremos, y con parte de los desplazamientos de los nudos restringidos para garantizar la estabilidad del sistema ante cargas gravitacionales y horizontales. La rigidez de la estructura se obtiene a partir de las propiedades de cada elemento relacionadas con el tipo de material, la longitud, la geometría de la sección transversal y la rigidez de las conexiones.

Para simplificar el análisis se asume que la totalidad de la masa, la cual incluye la masa propia de las placas de entrepiso de los elementos de la estructura principal, así como la masa de los acabados y de los muros divisorios y de fachada, se encuentra concentrada en los niveles de entrepiso y de cubierta. Esta suposición es válida para el tipo de estructuras estudiadas en esta tesis, en las cuales las columnas corresponden a elementos cuya masa es significativamente menor en relación a la masa concentrada en los niveles de piso.

Una gran simplificación consiste en asumir que en cada nivel de piso existe un diafragma rígido (Chopra, 2001; García, 1998; Linero, 2012; Wilson, 2002) que asocia parcialmente el movimiento de los nudos de la estructura. El diafragma rígido corresponde a un cuerpo indeformable en el plano horizontal, pero deformable en dirección ortogonal. Esta suposición es válida para edificios en los que en cada nivel de piso se cuenta con una placa de concreto o de un material de rigidez similar, la cual hace que los nudos localizados al mismo nivel experimenten movimiento de cuerpo rígido (*traslación y rotación*) en el plano horizontal. Sin embargo el movimiento de los nudos en direcciones ortogonales al plano horizontal es independiente del movimiento de los diafragmas rígidos.

Las simplificaciones impuestas previamente, relacionadas con la concentración de la masa y la existencia de un diafragma rígido en cada nivel de entrepiso y de cubierta, hacen que este tipo de estructuras puedan entenderse como un conjunto de cuerpos rígidos en cada plano horizontal, vinculados entre sí mediante elementos flexibles. Cada cuerpo o diafragma rígido posee una masa y un centro de gravedad o centro de masa definido, y cada elemento flexible corresponde a cada elemento de la estructura principal como vigas, columnas, riostras, etc., los cuales se asumen de masa despreciable pero con una rigidez definida.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Aunque físicamente es imposible concentrar la masa de un cuerpo en un solo punto, dado que la masa se encuentra distribuida en la totalidad del cuerpo, para el análisis suele llamarse a estos sistemas como de *masa concentrada* (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998) y se suele afirmar que la masa de cada diafragma se "concentra" en el respectivo centro de masa. Esta afirmación está relacionada con la selección del centro de masa para plantear las ecuaciones que describen el movimiento de cada diafragma, las cuales dependen de la masa y del momento de inercia respecto al centro de masa del respectivo diafragma.

Estas simplificaciones permiten reducir el número de grados de libertad dinámicos, y por lo tanto, el número de ecuaciones de movimiento que deben resolverse de forma simultánea para obtener la respuesta de la estructura.

El programa desarrollado en esta tesis no permite considerar en forma general sistemas compuestos por muros estructurales para los que se requieren consideraciones adicionales para realizar una idealización más precisa de la rigidez y de la masa. Tampoco permite considerar estructuras tales como puentes de gran longitud en los que la suposición de diafragma rígido al nivel del tablero no es válida, por lo que en estos casos la distribución de masa debe ser menos simplificada, siendo mejor idealizar la estructura como un sistema de masa consistente (García, 1998).

2.3.2. Grados de libertad dinámicos y grados de libertad estáticos

El número de posibles desplazamientos independientes necesarios para definir la posición de todas las masas de la estructura respecto a su posición de equilibrio, corresponde al número total de grados de libertad dinámicos de la estructura (Chopra, 2001).

En el análisis dinámico se supone que cada diafragma experimenta un movimiento plano general (*traslación y rotación simultáneas*) en el plano horizontal, de forma que este se traslada en el plano xy y gira respecto al eje z, asumiendo un sistema de coordenadas global en el que el eje z es vertical y los ejes x e y están en el plano horizontal.

El movimiento plano general de cada diafragma se describe completamente conociendo el movimiento de traslación de un punto fijo y la rotación de una línea de referencia fija en el cuerpo (Hibbeler, 2010). Los desplazamientos del punto fijo y la rotación de la línea de referencia fija, que equivale a la rotación del diafragma, se denominan *grados de libertad del diafragma*.

Los grados de libertad del diafragma i para el análisis dinámico de un pórtico espacial corresponden a los desplazamientos en x e y del centro de masa $(u_\phi)_x^{(i)}$, $(u_\phi)_y^{(i)}$ y a la rotación en z $(\theta_\phi)_z^{(i)}$. En particular un pórtico plano representado en el plano xz, los grados de libertad dinámicos corresponden a los desplazamientos de los centros de masa de cada diafragma $(u_\phi)_x^{(i)}$en dirección x.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Los grados de libertad dinámicos se denominan en el documento *desplazamientos de centros de masa*, haciendo referencia en el caso plano a los desplazamientos $(u_\phi)_x^{(i)}$ y en el caso espacial a los desplazamientos $(u_\phi)_x^{(i)}$ y $(u_\phi)_y^{(i)}$ y a la rotación $(\theta_\phi)_z^{(i)}$. La Figura 2.14 muestra los grados de libertad de un diafragma perteneciente a un pórtico plano y a un pórtico espacial.

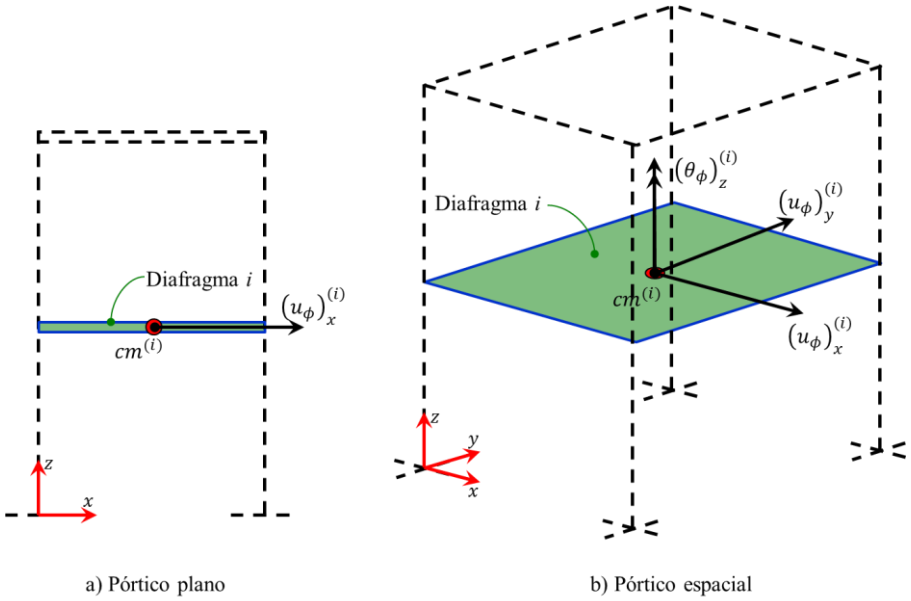


Figura 2.14. Grados de libertad de un diafragma de un pórtico plano y de un pórtico espacial

Un pórtico plano con un diafragma por piso posee un número de grados de libertad que coincide con el número de diafragmas, puesto que cada uno de ellos posee un solo grado de libertad dinámico. De forma similar, un pórtico espacial posee un número total de grados de libertad dinámicos igual a tres veces el número diafragmas rígidos.

Aunque se había podido seleccionar cualquier otro punto dentro de cada diafragma para escoger los grados de libertad dinámicos, se selecciona el centro de masa de cada diafragma para describir su movimiento. Esta elección simplifica la formulación matemática requerida para calcular algunas cantidades de interés, como se muestra más adelante.

Por otro lado el número de grados de libertad estáticos, aquellos que se requieren para realizar el análisis estático de la estructura, corresponden al número de posibles desplazamientos independientes necesarios para definir la posición de todos los nudos de la estructura respecto a su posición de equilibrio.

En un pórtico espacial cada nudo j posee seis grados de libertad estáticos, tres desplazamientos $u_x^{(j)}$, $u_y^{(j)}$ y $u_z^{(j)}$ y tres rotaciones $\theta_x^{(j)}$, $\theta_y^{(j)}$ y $\theta_z^{(j)}$. Respecto a estas últimas, sucede algo similar con las rotaciones de los centros de masa dado que los nudos no rotan, las que rotan son las tangentes de los elementos conectados en los nudos. Sin embargo por

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

simplicidad se hace referencia a las rotaciones de los nudos. En un pórtico plano representado en el plano xz el desplazamiento $u_y^{(j)}$ y las rotaciones $\theta_x^{(j)}$ y $\theta_z^{(j)}$ valen cero.

Los grados de libertad estáticos no se consideran en el análisis dinámico puesto que no poseen masas traslacionales y rotacionales asociadas, teniendo en cuenta que, para el análisis, la masa de la estructura se ha concentrado en los centros de masa de los diafragmas.

Para el caso elástico los desplazamientos $u_x^{(j)}$, $u_y^{(j)}$ y $\theta_z^{(j)}$ del nudo j asociado al diafragma rígido i se calculan a partir de los grados de libertad dinámicos $(u_\phi)_x^{(i)}$, $(u_\phi)_y^{(i)}$ y $(\theta_\phi)_z^{(i)}$ y de la geometría del diafragma. Los desplazamientos restantes $u_z^{(j)}$, $\theta_x^{(j)}$ y $\theta_y^{(j)}$ del nudo se calculan a partir de los desplazamientos $u_x^{(j)}$, $u_y^{(j)}$ y $\theta_z^{(j)}$ y de la matriz de rigidez. En el Capítulo 3 se describen los procedimientos de asociación y condensación de grados de libertad que permiten calcular los desplazamientos de los nudos a partir de los desplazamientos de los centros de masa de los diafragmas.

El número de grados de libertad que se requieren para realizar el análisis dinámico de una estructura, idealizada de la forma previamente mencionada, es considerablemente menor que el número de grados de libertad que se requieren para realizar un análisis estático. Mientras en una estructura el número de grados de libertad dinámicos equivale máximo a tres veces el número de diafragmas rígidos, el número de grados de libertad estáticos de la misma estructura equivale a seis veces el número de nudos. Adicionalmente hay que tener en cuenta que un diafragma rígido generalmente vincula un número de nudos importante.

Así como en el análisis estático el número de grados de libertad estáticos coincide con el número de ecuaciones de equilibrio cuya solución simultánea da como resultado los desplazamientos de los nudos, el número de grados de libertad dinámicos coincide con el número de ecuaciones de movimiento, cuya solución corresponde, en este caso, a los desplazamientos de los diafragmas.

2.3.3. Aceleración de la base

En términos generales se puede decir que sobre una estructura cualquiera actúan seis componentes de aceleración en la base, tres aceleraciones traslacionales en direcciones x, y e z denominadas $\ddot{u}_{gx}$, $\ddot{u}_{gy}$ y $\ddot{u}_{gz}$, y tres aceleraciones angulares en las mismas direcciones, denominadas $\ddot{\theta}_{gx}$, $\ddot{\theta}_{gy}$ y $\ddot{\theta}_{gz}$.

La aceleración de la base se toma de registros acelerográficos, de los cuales es posible conocer solamente las componentes de aceleración traslacional $\ddot{u}_{gx}$, $\ddot{u}_{gy}$ y $\ddot{u}_{gz}$. La componente $\ddot{u}_{gz}$ no se considera en este trabajo puesto que dejaría de ser válida la idealización planteada previamente para la estructura, siendo necesaria una idealización menos simplificada en cuanto a la distribución de la masa, la cual implica considerar un mayor número de grados de libertad dinámicos. Además las componentes de aceleración angular de la base generalmente se asumen igual a cero dado que no hay forma de medirlas con los equipos

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

existentes, aunque hay forma de estimar $\ddot{\theta}_{gz}$ usando varios registros de aceleración traslacional (Chopra, 2001).

En el análisis dinámico solamente se consideran las componentes de aceleración correspondientes a los grados de libertad dinámicos de la estructura. Para el caso espacial se consideran las componentes de aceleración traslacional $\ddot{u}_{gx}$ y $\ddot{u}_{gy}$ y la componente de aceleración angular $\ddot{\theta}_{gz}$, correspondientes a $(u_\phi)_x^{(i)}$, $(u_\phi)_y^{(i)}$ y $(\theta_\phi)_z^{(i)}$, aunque por simplicidad la componente de aceleración angular $\ddot{\theta}_{gz}$ se desprecia. En el caso plano solo se considera la componente de aceleración $\ddot{u}_{gx}$, correspondiente al grado de libertad $(u_\phi)_x^{(i)}$, siempre y cuando el pórtico se represente en el plano xz. El concepto de correspondencia entre acciones y desplazamientos se encuentra en Spinel (2002).

La Figura 2.15 y la Figura 2.16 esquematizan los anteriores planteamientos para estructuras planas y espaciales, relacionados con la presencia de diafragmas rígidos, la concentración de la masa en los diafragmas, la selección de los grados de libertad y la selección de las componentes de aceleración de la base consideradas en el análisis dinámico.

La Figura 2.15 muestra un pórtico espacial de tres niveles, con un diafragma rígido por nivel. Cada diafragma posee su respectivo centro de masa, y todos los diafragmas están vinculados entre sí por los elementos que componen el sistema estructural principal. La masa traslacional y la masa rotacional de cada diafragma, necesarias para el análisis dinámico, corresponden respectivamente a la masa m_i asociada al diafragma y al momento de inercia de masa del diafragma $I_z^{(i)}$ calculado respecto a un eje vertical que pasa por el respectivo centro de masa. En la figura también se indican los grados de libertad dinámicos de la estructura y las componentes de aceleración en la base que se consideran en el análisis.

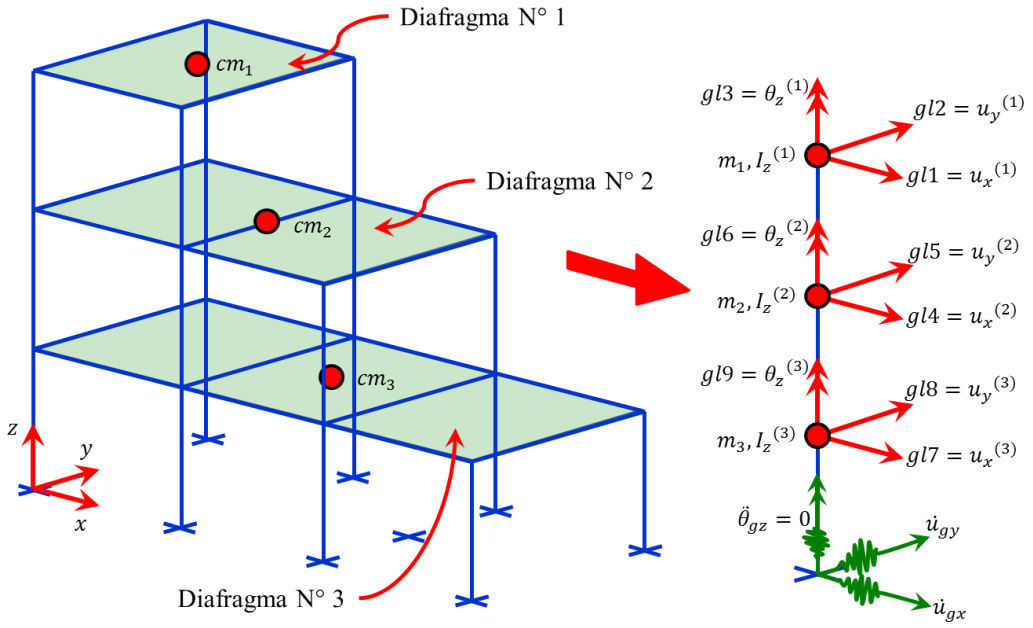


Figura 2.15. Idealización, grados de libertad y componentes de aceleración de la base consideradas en el análisis dinámico de un pórtico espacial

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

En la Figura 2.16 se ha tomado uno de los pórticos planos de la estructura de la Figura 2.15 representado en el plano xz con el fin de indicar las masas, los grados de libertad y las componentes de aceleración de la base que se considerarían en el análisis dinámico de un pórtico que está restringido a moverse solamente dentro de su plano.

La masa asociada a cada diafragma necesaria para el análisis corresponde (*de forma simplificada*) a la masa aferente en cada nivel. El pórtico tomado como ejemplo posee solamente tres grados de libertad dinámicos y en el análisis se considera solamente la componente de aceleración de la base $\ddot{u}_{gx}$.

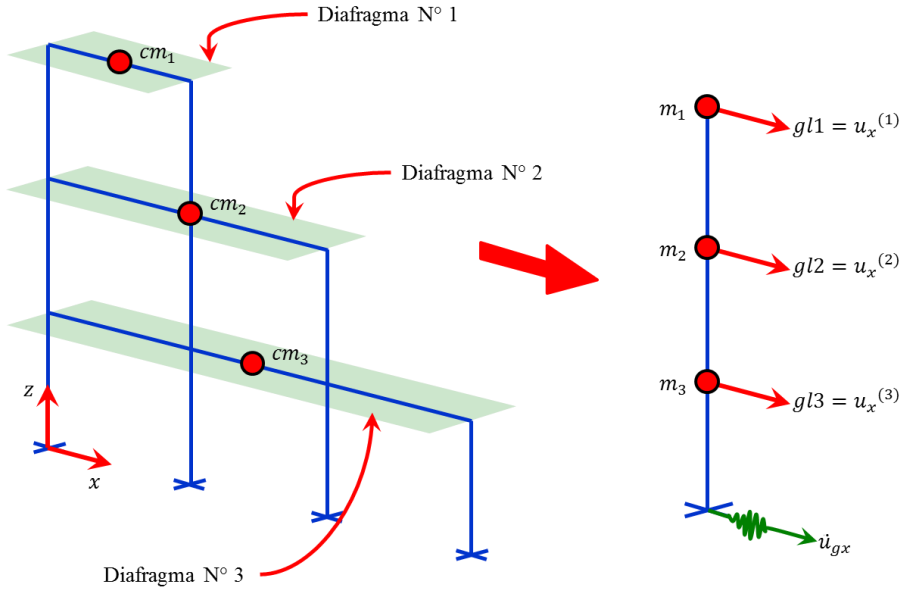


Figura 2.16. Idealización, grados de libertad y componentes de aceleración de la base consideradas en el análisis dinámico de un pórtico plano

Respecto a las componentes de aceleración de la base, se aclara que en esta versión de UNDIN se asume que la misma aceleración actúa en todos los apoyos de la estructura. El programa no permite considerar el caso de excitación multiple en los apoyos (*multiple support excitation*) descrito por Chopra (2001), que se presenta en estructuras de gran longitud en las que el movimiento de la base cambia apreciablemente de un punto de apoyo a otro y por lo tanto, cada experimenta componentes de aceleración diferentes.

2.4. Planteamiento de la ecuación matricial de movimiento

A continuación se describen las acciones de amortiguamiento y las acciones equivalentes a los esfuerzos internos que actúan sobre cada diafragma y que se oponen a su movimiento.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

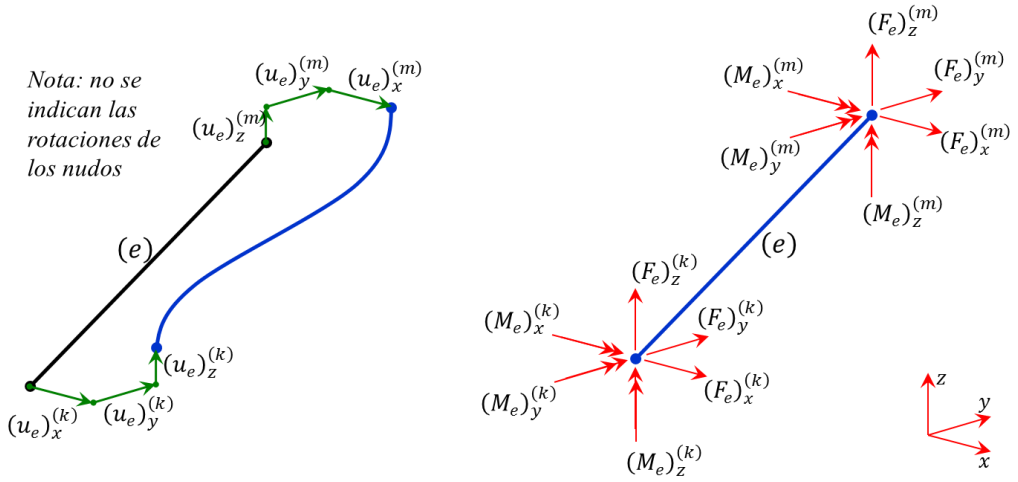
Posteriormente se aplica la segunda ley de Newton en cada dirección en la que los diafragmas están restringidos a moverse, involucrando las componentes de aceleración de la base consideradas, para llegar finalmente a la ecuación matricial de movimiento que rige la respuesta de la estructura en rango elástico o inelástico. Al final se muestra la ecuación matricial de movimiento especial para estructuras en el rango elástico, la cual se deriva de la expresión general.

2.4.1. Acciones equivalentes que actúan en cada diafragma rígido

Cuando los diafragmas rígidos de la estructura se desplazan con respecto a la base, cada elemento estructural se deforma por los desplazamientos y las rotaciones que se le imponen en sus nudos, lo que hace que aparezcan fuerzas y momentos en los extremos que deben mantener la configuración deformada del elemento. Bajo comportamiento inelástico estas acciones dependen de la historia de deformación en las zonas donde se forman las rótulas plásticas.

De acuerdo con la tercera ley de Newton, las acciones que aparecen en los extremos de cada elemento corresponden al efecto que genera el resto de la estructura sobre el elemento, puesto que son acciones internas que se presentan por pares.

La Figura 2.17 muestra la deformada de un elemento tipo pórtico espacial arbitrariamente orientado, y las acciones en coordenadas globales que aparecen en los extremos para mantener su configuración deformada.



a) Desplazamientos de los nudos b) Acciones en los extremos

Figura 2.17. Configuración deformada de un elemento pórtico espacial y acciones en los extremos en coordenadas globales

Las acciones en coordenadas globales en los extremos de los elementos se transmiten a los nudos de los diafragmas aplicando la tercera ley de Newton (*es decir, con el mismo va-*

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

lor pero en sentido contrario) para conocer el efecto que genera cada elemento sobre cada nudo del diafragma. De la suma vectorial de las acciones transmitidas a cada nudo se obtienen las acciones resultantes en coordenadas globales transmitidas por los elementos estructurales a los nudos de los diafragmas.

Teniendo en cuenta la suposición hecha respecto a la concentración de la masa y las componentes de aceleración de la base consideradas en el análisis, la fuerza resultante en dirección z y los momentos resultantes en direcciones x e y transmitidos por los elementos a los nudos asociados a diafragmas deben ser cero, es decir, deben estar en equilibrio. Ya que se considera que los grados de libertad $u_z^{(j)}$, $\theta_x^{(j)}$ y $\theta_y^{(j)}$ no tienen masas traslacionales ni rotacionales asociadas y además no se están teniendo en cuenta las componentes de aceleración de la base $\ddot{u}_{gz}$, $\ddot{\theta}_{gx}$ y $\ddot{\theta}_{gy}$, no se imponen fuerzas ni momentos inerciales en estos grados de libertad (Chopra, 2001; García, 1998).

Sin embargo las fuerzas resultantes en direcciones x e y y el momento resultante en dirección z transmitidos a los nudos asociados a diafragmas generalmente son diferentes de cero. La razón está en que los diafragmas empujan a la estructura cuando se desplazan respecto a la base y la estructura reacciona contra el movimiento de los diafragmas aplicando fuerzas y momentos en las mismas direcciones en las que cada diafragma está restringido a moverse. Las fuerzas y los momentos que la estructura aplica a los nudos de los diafragmas actúan sobre los grados de libertad $u_x^{(j)}$, $u_y^{(j)}$ y $\theta_z^{(j)}$ de cada nudo, específicamente en la dirección contraria al movimiento relativo a la base de los diafragmas.

La Figura 2.18 muestra las acciones resultantes en un nudo j cualquiera, mientras que la Figura 2.19 muestra las acciones que actúan en todos los nudos que pertenecen a un diafragma rígido, producidas por la deformación de los elementos estructurales. Tales acciones actúan en dirección contraria a los desplazamientos relativos a la base de los diafragmas, los cuales se han supuesto en las direcciones positivas de los ejes x, y e z globales.

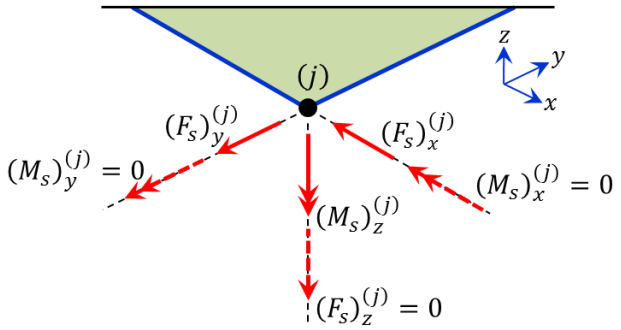


Figura 2.18. Acciones resultantes en cada nudo asociado a un diafragma rígido, producidas por la deformación de la estructura

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

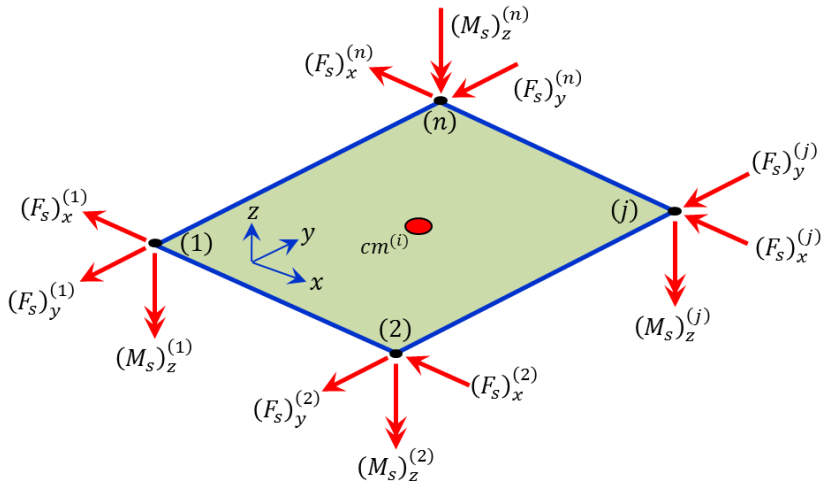


Figura 2.19. Acciones resultantes en los nudos del mismo diafragma rígido

Las fuerzas y los momentos aplicados en los nudos de cada diafragma se trasladan al respectivo centro de masa siguiendo los principios de la estática de cuerpos rígidos.

Cada fuerza $(F_s)_x^{(j)}$ o $(F_s)_y^{(j)}$ aplicada en un nudo debe trasladarse acompañada del momento que produce la fuerza sin trasladar respecto al centro de masa, mientras que cada momento $(M_s)_z^{(j)}$, al ser el momento de un par de fuerzas, es un vector libre de ser aplicado en cualquier punto (Beer & Johnston, 2002), por ejemplo en el centro de masa. A modo de ejemplo la Figura 2.20 muestra la forma de trasladar las acciones aplicadas en un nudo al centro de masa del diafragma respectivo.

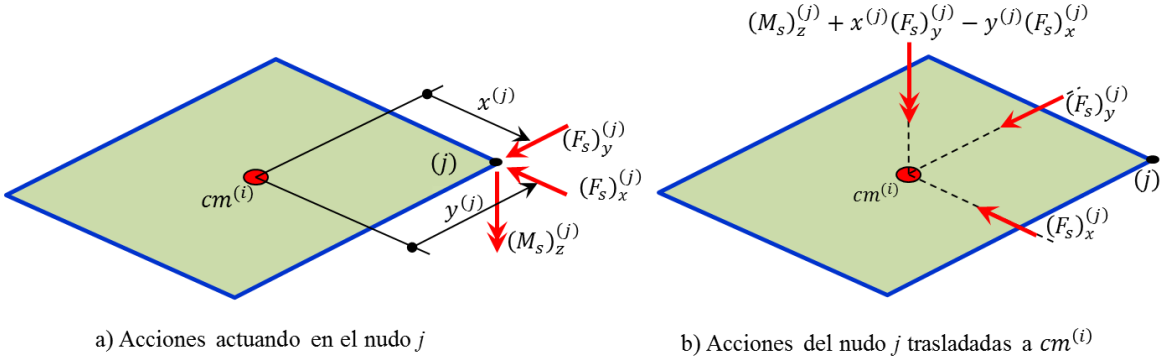


Figura 2.20. Acciones aplicadas en un nudo del diafragma trasladadas al centro de masa

Las acciones trasladadas de los nudos a los centros de masa de cada diafragma se suman vectorialmente, dando como resultado dos fuerzas resultantes en direcciones x e y denominadas $(F_{s\phi})_x^{(i)}$ y $(F_{s\phi})_y^{(i)}$ y un momento resultante en dirección z denominado $(M_{s\phi})_z^{(i)}$ por cada diafragma rígido, como lo muestra la Figura 2.21. A estas tres acciones resultantes se les denomina en el documento *acciones equivalentes trasladadas al centro de masa*, puesto que equivalen a la suma de las acciones internas producidas por la deformación de la es-

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

tructura, que se transmiten a cada diafragma rígido y que para el análisis se han trasladado al centro de masa respectivo.

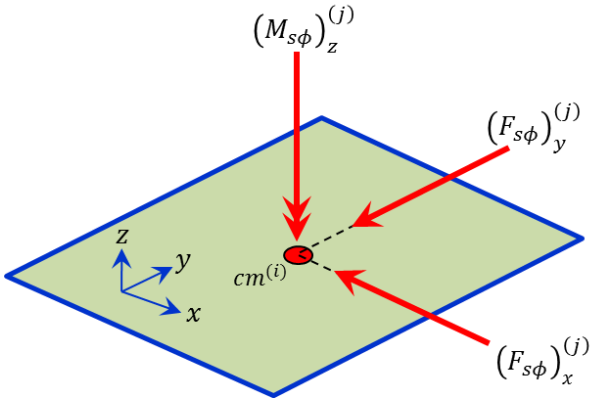


Figura 2.21. Acciones equivalentes trasladadas al centro de masa

Las acciones resultantes $(F_{s\phi})_x^{(i)}$, $(F_{s\phi})_y^{(i)}$ y $(M_{s\phi})_z^{(i)}$ se calculan con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} (F_{s\phi})_x^{(i)} &= \sum_{j=1}^{n} (F_s)_x^{(j)} \\ (F_{s\phi})_y^{(i)} &= \sum_{j=1}^{n} (F_s)_y^{(j)} \\ (M_{s\phi})_x^{(i)} &= \sum_{j=1}^{n} \left[(M_s)_x^{(j)} + x^{(j)} (F_s)_y^{(j)} - y^{(j)} (F_s)_x^{(j)} \right] \end{aligned} \tag{2.41}$$

En ellas n es el número de nudos asociados al diafragma i, mientras que $x^{(j)}$ e $y^{(j)}$ son las coordenadas del nudo j medidas desde el centro de masa del mismo diafragma.

2.4.2. Acciones de amortiguamiento que actúan en cada diafragma rígido

Las acciones de amortiguamiento son las encargadas de disipar la energía introducida por las acciones externas, en este caso por la aceleración de la base, mientras la estructura permanece en el rango lineal. Estas no incluyen la energía disipada en el rango no lineal, puesto que esta energía se tiene en cuenta de forma separada a través de las relaciones fuerza – deformación (Chopra, 2001).

El amortiguamiento se encarga de reducir gradualmente la amplitud del movimiento en un sistema que se encuentra en vibración libre, luego que dejan de actuar las acciones externas.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Los mecanismos por los cuales se disipa la energía durante la vibración de una estructura son complejos y su representación matemática no es práctica para estructuras reales, por lo que generalmente este fenómeno suele representarse de una manera simplificada (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998; Paz, 1992).

La disipación de energía en estructuras solicitadas por acciones dinámicas es considerada mediante dos mecanismos. El amortiguamiento viscoso equivalente (*o amortiguamiento elástico*) en el que se supone que las acciones de amortiguamiento son proporcionales a la velocidad, y el amortiguamiento histerético debido al comportamiento no lineal del material (Moller, Rubinstein, & Ascheri, 2011).

El amortiguamiento histerético se tiene en cuenta con las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa, con la relación fuerza – desplazamiento (*o momento - rotación*) de cada zona donde se produce una rótula plástica. Este tipo de amortiguamiento es cero para estructuras en el rango elástico. El amortiguamiento elástico se considera a través de *amortiguadores viscosos* como los indicados en la Figura 2.22, cuyos extremos se conectan a dos diafragmas consecutivos. Las acciones que transmite cada amortiguador a los diafragmas que conecta dependen de la velocidad relativa de sus extremos, es decir, de las velocidades relativas a la base de los diafragmas.

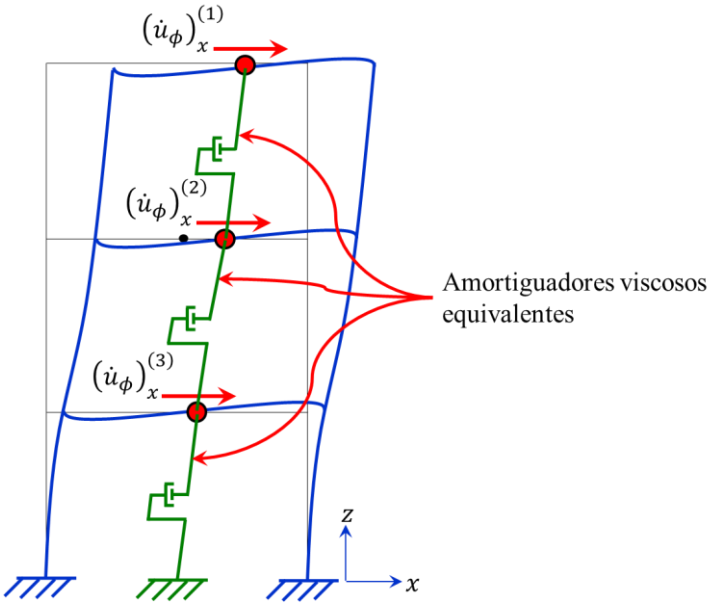


Figura 2.22. Amortiguadores viscosos equivalentes. Adaptada de Chopra (2001)

Se suponen que los amortiguadores transmiten a cada diafragma un conjunto de *acciones de amortiguamiento* compuesto de dos fuerzas $(F_{a\phi})_x^{(i)}$ y $(F_{a\phi})_y^{(i)}$ en direcciones x e y respectivamente, y un momento $(M_{a\phi})_z^{(i)}$ en dirección z, similares a las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa $(F_{s\phi})_x^{(i)}$, $(F_{s\phi})_y^{(i)}$ y $(M_{s\phi})_z^{(i)}$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La Figura 2.23 muestra las acciones de amortiguamiento viscoso que actúan sobre el diafragma i, trasladadas al respectivo centro de masa. Intencionalmente se han dibujado en dirección negativa a los ejes x, y e z global para indicar que las acciones de amortiguamiento también se oponen al desplazamiento relativo de los diafragmas.

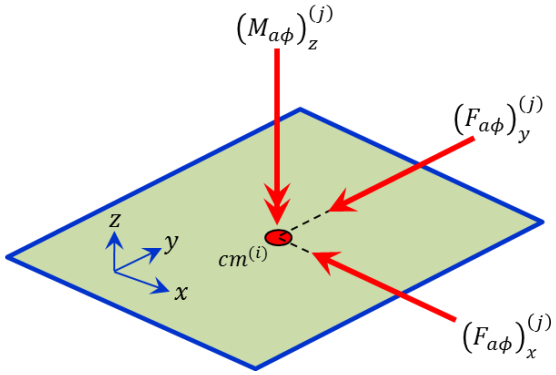


Figura 2.23. Acciones de amortiguamiento viscoso trasladadas al centro de masa

2.4.3. Ecuación matricial de movimiento

Las tres ecuaciones escalares que rigen el movimiento plano general de un cuerpo rígido, cuando la sumatoria de momentos se calcula respecto a un eje ortogonal al plano del movimiento que pasa por el centro de masa cm o centro de gravedad G del cuerpo, y que se obtuvieron a partir de la aplicación de la segunda ley de Newton del movimiento se repiten a continuación:

$$\begin{aligned} \rightarrow^{(+)} \sum F_x &= m(a_G)_x \\ \uparrow^{(+)} \sum F_y &= m(a_G)_y \\ \circlearrowleft^{(+)} \sum M_{z,cm} &= I_{cm}\alpha \end{aligned} \tag{2.42}$$

En las anteriores ecuaciones los términos $(a_G)_x$, $(a_G)_x$ y α son cantidades absolutas, medidas respecto a un sistema de coordenadas inercial o fijo. En la Figura 2.24 $(\ddot{u}_\phi^t)_x^{(i)}$ y $(\ddot{u}_\phi^t)_x^{(i)}$ son las aceleraciones traslacionales absolutas del centro de masa del diafragma i en las direcciones x e y, mientras que $(\ddot{\theta}_\phi^t)_z^{(i)}$ es la aceleración angular absoluta en dirección z del mismo diafragma. Las acciones resultantes transmitidas al diafragma por la estructura corresponden a las acciones equivalentes $(F_{s\phi})_x^{(i)}$, $(F_{s\phi})_y^{(i)}$ y $(M_{s\phi})_z^{(i)}$ y a las acciones resultantes de amortiguamiento viscoso $(F_{a\phi})_x^{(i)}$, $(F_{a\phi})_y^{(i)}$ y $(M_{a\phi})_z^{(i)}$ trasladadas al centro de masa, actuando en dirección contraria a la deformación de la estructura.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

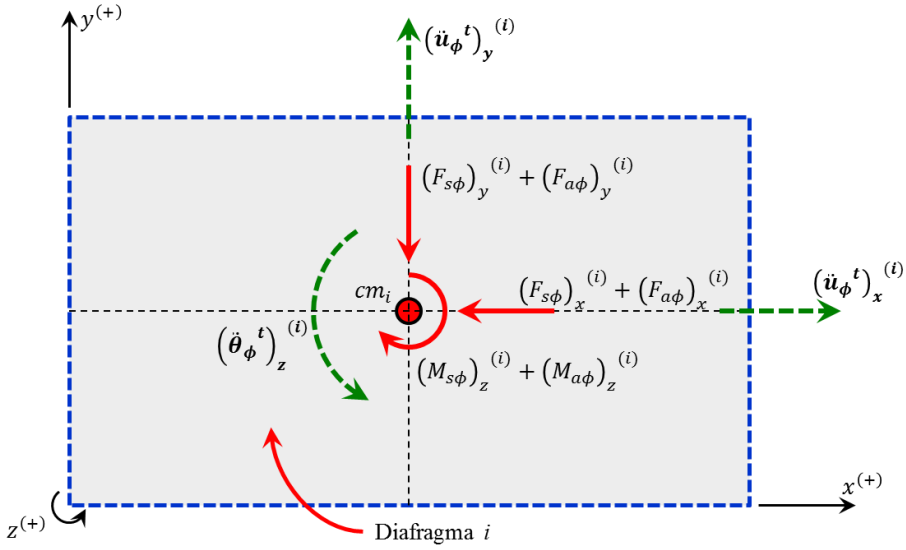


Figura 2.24. Acciones equivalentes y de amortiguamiento trasladadas al centro de masa de cada diafragma

De acuerdo con lo anterior y aplicando las ecuaciones (2.42), las ecuaciones de movimiento del diafragma i son:

$$
\begin{aligned}
-(F_{s\phi})_x^{(i)} - (F_{a\phi})_x^{(i)} &= m^{(i)}(\ddot{u}_\phi^t)_x^{(i)} \\
-(F_{s\phi})_y^{(i)} - (F_{a\phi})_y^{(i)} &= m^{(i)}(\ddot{u}_\phi^t)_y^{(i)} \\
-(M_{s\phi})_z^{(i)} - (M_{a\phi})_z^{(i)} &= I_{cm}^{(i)}(\ddot{\theta}_\phi^t)_z^{(i)}
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

donde $m^{(i)}$ e $I_{cm}^{(i)}$ corresponden a la masa y al momento de inercia de masa del diafragma, este último calculado respecto a un eje paralelo a z que pasa por el centro de masa.

En la Figura 2.25 se ha dividido el movimiento absoluto del diafragma i en dos componentes básicos. La primer componente que representa el movimiento como cuerpo rígido de toda la estructura cuando la base se desplaza en direcciones x e y las cantidades u_{gx} y u_{gy}, y cuando gira una cantidad θ_{gz}. La segunda componente representa el movimiento del diafragma cuando la estructura se deforma, de manera que el centro de masa del diafragma se desplaza en las direcciones x e y las cantidades adicionales $(u_\phi)_x^{(i)}$ y $(u_\phi)_x^{(i)}$ respectivamente, y además el diafragma rota un ángulo adicional $(\theta_\phi)_z^{(i)}$.

Los desplazamientos $(u_\phi)_x^{(i)}$ y $(u_\phi)_x^{(i)}$ se conocen como *desplazamientos relativos a la base del centro de masa* y la rotación $(\theta_\phi)_z^{(i)}$ se conoce como *rotación relativa a la base del diafragma i*. Por otro lado los desplazamientos u_{gx} y u_{gy} son *desplazamientos absolutos de la base* y la rotación θ_{gz} es la *rotación absoluta de la base*.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

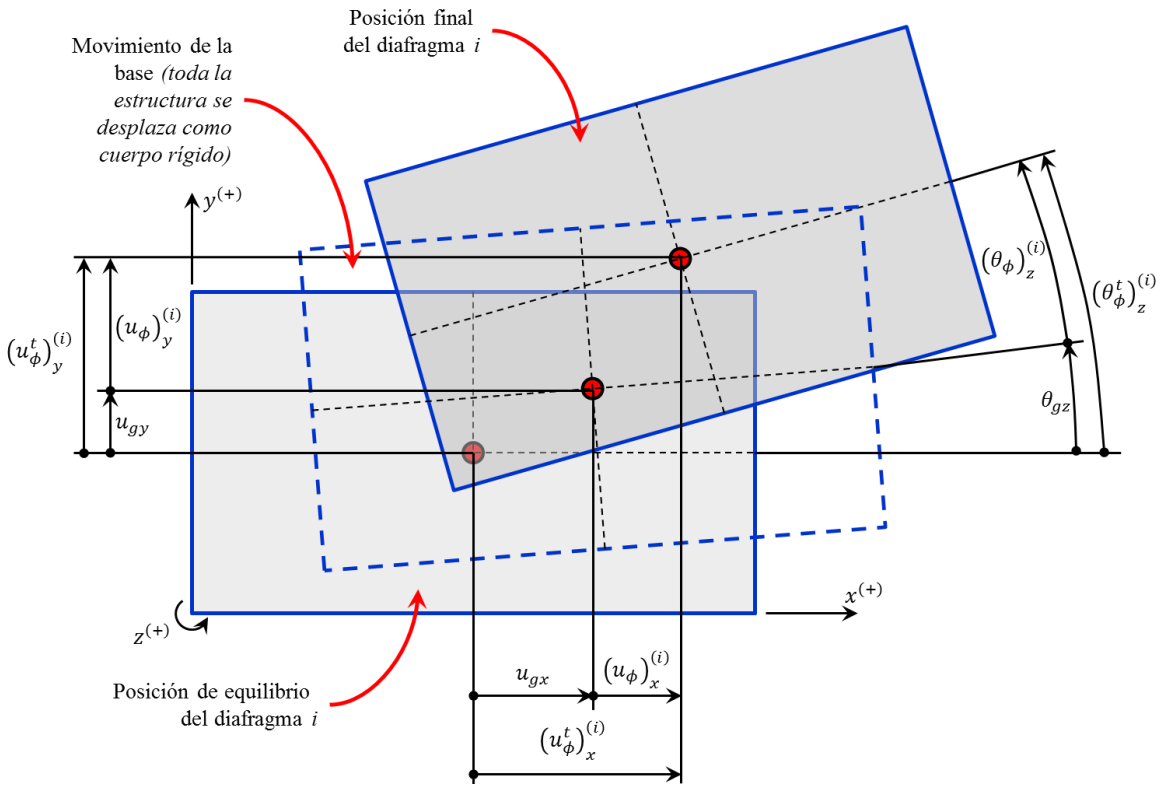


Figura 2.25. Movimiento absoluto y relativo a la base de cada diafragma rígido

En la misma figura se observa que los desplazamientos totales en direcciones x e y del centro de masa del diafragma i, denominados $(u_\phi^t)_x^{(i)}$ y $(u_\phi^t)_x^{(i)}$ respectivamente, son el resultado de sumar los desplazamientos relativos a la base del centro de masa del diafragma $(u_\phi)_x^{(i)}$ y $(u_\phi)_x^{(i)}$ con los desplazamientos absolutos de la base u_{gx} y u_{gy}. De igual forma la rotación total del diafragma $(\theta_\phi^t)_z^{(i)}$ es igual a la rotación absoluta de la base θ_{gz} más la rotación relativa a la base del diafragma $(\theta_\phi)_z^{(i)}$. Las ecuaciones (2.44) resumen dichas relaciones.

$$
\begin{aligned}
(u_\phi^t)_x^{(i)} &= (u_\phi)_x^{(i)} + u_{gx} \\
(u_\phi^t)_y^{(i)} &= (u_\phi)_y^{(i)} + u_{gy} \\
(\theta_\phi^t)_z^{(i)} &= (\theta_\phi)_z^{(i)} + \theta_{gz}
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Las expresiones anteriores se denominan en el documento *ecuaciones de desplazamiento relativo*. Al derivar cada ecuación dos veces respecto al tiempo, se obtiene un conjunto de *ecuaciones de aceleración relativa* como el que se muestra a continuación:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$
\begin{aligned}
\left(\ddot{u}_{\phi}^{t}\right)_{x}^{(i)} &= \left(\ddot{u}_{\phi}\right)_{x}^{(i)} + \ddot{u}_{gx} \\
\left(\ddot{u}_{\phi}^{t}\right)_{y}^{(i)} &= \left(\ddot{u}_{\phi}\right)_{y}^{(i)} + \ddot{u}_{gy} \\
\left(\ddot{\theta}_{\phi}^{t}\right)_{z}^{(i)} &= \left(\ddot{\theta}_{\phi}\right)_{z}^{(i)} + \ddot{\theta}_{gz}
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Las dos primeras ecuaciones de (2.45) relacionan las aceleraciones absolutas $\left[(\ddot{u}_{\phi}^{t})_{x}^{(i)}, (\ddot{u}_{\phi}^{t})_{y}^{(i)}\right]$ con las aceleraciones absolutas de la base $\left[\ddot{u}_{gx}, \ddot{u}_{gy}\right]$ y las aceleraciones relativas a la base $\left[(\ddot{u}_{\phi})_{x}^{(i)}, (\ddot{u}_{\phi})_{y}^{(i)}\right]$ del centro de masa del diafragma i, La tercera ecuación relaciona la aceleración angular absoluta $(\ddot{\theta}_{\phi}^{t})_{z}^{(i)}$ con la aceleración angular absoluta de la base $\ddot{\theta}_{gz}$ y la aceleración angular relativa a la base $(\ddot{\theta}_{\phi})_{z}^{(i)}$ del diafragma i.

Al reemplazar las ecuaciones (2.45) en las ecuaciones (2.43) se obtienen las siguientes expresiones, las cuales no dependen de $(\ddot{u}_{\phi}^{t})_{x}^{(i)}$, $(\ddot{u}_{\phi}^{t})_{y}^{(i)}$ y $(\ddot{\theta}_{\phi}^{t})_{z}^{(i)}$:

$$
\begin{aligned}
-\left(F_{s\phi}\right)_{x}^{(i)} - \left(F_{a\phi}\right)_{x}^{(i)} &= m^{(i)}\left(\ddot{u}_{\phi}\right)_{x}^{(i)} + m^{(i)}\ddot{u}_{gx} \\
-\left(F_{s\phi}\right)_{y}^{(i)} - \left(F_{a\phi}\right)_{y}^{(i)} &= m^{(i)}\left(\ddot{u}_{\phi}\right)_{y}^{(i)} + m^{(i)}\ddot{u}_{gy} \\
-\left(M_{s\phi}\right)_{z}^{(i)} - \left(M_{a\phi}\right)_{z}^{(i)} &= I_{cm}^{(i)}\left(\ddot{\theta}_{\phi}\right)_{z}^{(i)} + I_{cm}^{(i)}\ddot{\theta}_{gz}
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

La cual al reorganizarse toman la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
m^{(i)}\left(\ddot{u}_{\phi}\right)_{x}^{(i)} + \left(F_{a\phi}\right)_{x}^{(i)} + \left(F_{s\phi}\right)_{x}^{(i)} &= -m^{(i)}\ddot{u}_{gx} \\
m^{(i)}\left(\ddot{u}_{\phi}\right)_{y}^{(i)} + \left(F_{a\phi}\right)_{y}^{(i)} + \left(F_{s\phi}\right)_{y}^{(i)} &= -m^{(i)}\ddot{u}_{gy} \\
I_{cm}^{(i)}\left(\ddot{\theta}_{\phi}\right)_{z}^{(i)} + \left(M_{a\phi}\right)_{z}^{(i)} + \left(M_{s\phi}\right)_{z}^{(i)} &= -I_{cm}^{(i)}\ddot{\theta}_{gz}
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Las anteriores ecuaciones se escriben en forma matricial u ordenada, como se muestra a continuación:

$$
\begin{bmatrix} m^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & m^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{cm}^{(i)} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \left(\ddot{u}_{\phi}\right)_{x}^{(i)} \\ \left(\ddot{u}_{\phi}\right)_{y}^{(i)} \\ \left(\ddot{\theta}_{\phi}\right)_{z}^{(i)} \end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix} \left(F_{a\phi}\right)_{x}^{(i)} \\ \left(F_{a\phi}\right)_{y}^{(i)} \\ \left(M_{a\phi}\right)_{z}^{(i)} \end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix} \left(F_{s\phi}\right)_{x}^{(i)} \\ \left(F_{s\phi}\right)_{y}^{(i)} \\ \left(M_{s\phi}\right)_{z}^{(i)} \end{Bmatrix}
= -
\begin{bmatrix} m^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & m^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{cm}^{(i)} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \ddot{u}_{gx} \\ \ddot{u}_{gy} \\ \ddot{\theta}_{gz} \end{Bmatrix}
\tag{2.48}
$$

Que escrita en forma más compacta:

$$
[m]^{(i)}\left\{\ddot{u}_{\phi}\right\}^{(i)} + \left\{F_{a\phi}\right\}^{(i)} + \left\{F_{s\phi}\right\}^{(i)} = -[m]^{(i)}\left\{\ddot{u}_{g}\right\}
\tag{2.49}
$$

Esta ecuación matricial rige el movimiento del diafragma i. La matriz $[m]^{(i)}$ es la matriz de masa del diafragma, $\{\ddot{u}_{\phi}\}^{(i)}$ es el vector de aceleraciones relativas a la base del dia-

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

fragma, $\{F_{a\phi}\}^{(i)}$ y $\{F_{s\phi}\}^{(i)}$ son respectivamente los vectores de acciones de amortiguamiento viscoso y de acciones equivalentes que actúan sobre el diafragma y $\{\ddot{u}_g\}$ es el vector de aceleración absoluta de la base. Todos los vectores previamente enunciados corresponden a un mismo instante de tiempo.

Para una estructura con una cantidad n de diafragmas, la siguiente ecuacion matricial describe el movimiento simultáneo de todos los diafragmas:

$$[m]\{\ddot{u}_\phi\} + \{F_{a\phi}\} + \{F_{s\phi}\} = -[m][\gamma]\{\ddot{u}_g\} \tag{2.50}$$

La anterior ecuación corresponde a la *ecuación matricial de movimiento*, también llamada *ecuación de equilibrio dinámico* (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998), la cual rige el movimiento de todos los diafragmas de una estructura en el rango elástico o inelástico de deformaciones, sometida a las componentes de aceleración de la base almacenadas en $\{\ddot{u}_g\}$ variables en el tiempo. La ecuación tiene como incógnitas las aceleraciones de los centros de masa $\{\ddot{u}_\phi\}$, las acciones de amortiguamiento $\{F_{a\phi}\}$ y las acciones equivalentes $\{F_{s\phi}\}$ en cada instante de tiempo.

En este caso $[m]$ es la matriz de masa de la estructura, la cual almacena las submatrices de masa de cada diafragma $[m]^{(i)}$ como lo muestra la Ecuación (2.51). Dado que $[m]^{(i)}$ es diagonal, $[m]$ también es diagonal.

$$[m] = \begin{bmatrix} [m]^{(1)} & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [m]^{(2)} & & [0] \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [m]^{(n)} \end{bmatrix}_{(3nx3n)} \tag{2.51}$$

Los vectores $\{\ddot{u}_\phi\}$, $\{F_{a\phi}\}$ y $\{F_{s\phi}\}$ almacenan respectivamente a los subvectores $\{\ddot{u}_\phi\}^{(i)}$, $\{F_{a\phi}\}^{(i)}$ y $\{F_{s\phi}\}^{(i)}$ de cada diafragma, como lo muestran las ecuaciones (2.52).

$$\{\ddot{u}_\phi\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_\phi\}^{(1)} \\ \{\ddot{u}_\phi\}^{(2)} \\ \vdots \\ \{\ddot{u}_\phi\}^{(n)} \end{Bmatrix}_{(3nx1)} \qquad \{F_{a\phi}\} = \begin{Bmatrix} \{F_{a\phi}\}^{(1)} \\ \{F_{a\phi}\}^{(2)} \\ \vdots \\ \{F_{a\phi}\}^{(n)} \end{Bmatrix}_{(3nx1)} \qquad \{F_{s\phi}\} = \begin{Bmatrix} \{F_{s\phi}\}^{(1)} \\ \{F_{s\phi}\}^{(2)} \\ \vdots \\ \{F_{s\phi}\}^{(n)} \end{Bmatrix}_{(3nx1)} \tag{2.52}$$

La matriz $[\gamma]$ es una matriz auxiliar denominada *matriz de influencia* (Chopra, 2001) que sirve para realizar adecuadamente los productos $m^{(i)}\ddot{u}_{gx}$, $m^{(i)}\ddot{u}_{gy}$ y $I_{cm}^{(i)}\ddot{\theta}_{gz}$ en forma matricial. La forma de la matriz $[\gamma]$ se indica en la Ecuación (2.53):

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} [I]^{(1)} \\ [I]^{(2)} \\ \vdots \\ [I]^{(n)} \end{bmatrix}_{(3nx3)} \tag{2.53}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

donde la submatriz $[I]^{(i)}$ es una matriz identidad de tamaño $3X3$.

Las anteriores expresiones se han deducido para una estructura espacial de tres grados de libertad dinámicos por diafragma. En el caso de un pórtico plano con n diafragmas representado en el plano xz, en la ecuación matricial $[m]\{\ddot{u}_\phi\} + \{F_{a\phi}\} + \{F_{s\phi}\} = -[m][\gamma]\{\ddot{u}_g\}$ deben suprimirse las filas correspondientes a la sumatoria de fuerzas y de momentos en direcciones y e z respectivamrnte, con lo que la matriz $[m]$ y los res$\{\ddot{u}_\phi\}$, $\{F_{a\phi}\}$ y $\{F_{s\phi}\}$ toman la siguiente forma:

$$[m] = \begin{bmatrix} m^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m^{(2)} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m^{(n)} \end{bmatrix}_{(nxn)} \tag{2.54}$$

$$\{\ddot{u}_\phi\} = \begin{Bmatrix} (\ddot{u}_\phi)_x^{(1)} \\ (\ddot{u}_\phi)_x^{(2)} \\ \vdots \\ (\ddot{u}_\phi)_x^{(n)} \end{Bmatrix}_{(nx1)} \qquad \{F_{a\phi}\} = \begin{Bmatrix} (F_{a\phi})_x^{(1)} \\ (F_{a\phi})_x^{(2)} \\ \vdots \\ (F_{a\phi})_x^{(n)} \end{Bmatrix}_{(nx1)} \qquad \{F_{s\phi}\} = \begin{Bmatrix} (F_{s\phi})_x^{(1)} \\ (F_{s\phi})_x^{(2)} \\ \vdots \\ (F_{s\phi})_x^{(n)} \end{Bmatrix}_{(nx1)} \tag{2.55}$$

La matriz de influencia $[\gamma]$ también se simplifica dado que no hay que considerar las componentes de aceleración de la base $\ddot{u}_{gy}$ y $\ddot{\theta}_{gz}$, lo que permite suprimir también las dos últimas columnas, con lo que $[\gamma]$ se convierte en un vector columna como el que se muestra a continuación.

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{(nx3)} \tag{2.56}$$

En todas las matrices y vectores el número de filas coincide con el número de ecuaciones de movimiento, el cual a su vez coincide con el número de grados de libertad dinámicos de la estructura. Para pórticos espaciales el número de ecuaciones es tres veces el número de diafragmas, mientras que para pórticos planos el número de ecuaciones es igual al número de diafragmas.

2.4.4. Acciones externas equivalentes a la aceleración de la base

El término a la derecha del igual en la Ecuación (2.50) se conoce como el *vector de acciones externas equivalentes al movimiento acelerado de la base* $\{F_{ext}\}$.

$$\{F_{ext}\} = -[m][\gamma]\{\ddot{u}_g\} \tag{2.57}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La expresión (2.57) sugiere que el efecto que produce la aceleración de la base sobre una estructura de base móvil es el mismo efecto que producen las acciones $\{F_{ext}\} = -[m][\gamma]\{\ddot{u}_g\}$ aplicadas en los centros de masa de los diafragmas de una estructura con la base fija.

En la Figura 2.26 se muestra, para un pórtico plano que la deformación de la estructura es la misma cuando esta se somete a la aceleración de la base, considerando que la estructura tiene una base móvil, y cuando se somete a las acciones externas equivalentes dadas por la Ecuación (2.57). La deformación está representada en los desplazamientos de los centros de masa $(u_\phi)_x^{(1)}$, $(u_\phi)_x^{(2)}$ y $(u_\phi)_x^{(3)}$, los cuales para el caso de base móvil son desplazamientos relativos a la base, mientras que en el caso de la base fija son desplazamientos absolutos, como sí $u_{gx} = 0$.

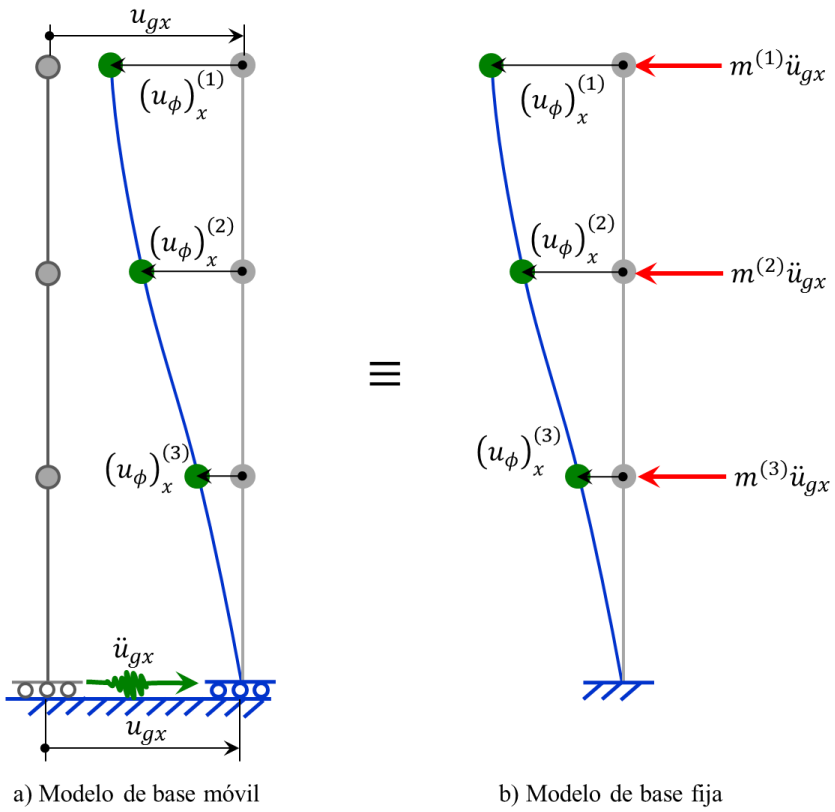


Figura 2.26. Relación entre la aceleración de la base y las acciones externas equivalentes

2.4.5. Ecuación de movimiento para el caso elástico

Cuando la estructura se mantiene dentro del rango elástico de deformaciones, las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa de los diafragmas $\{F_{s\phi}\}$ son una función lineal de la deformación de la estructura, es decir, de los desplazamientos relativos a la base de los centros de masa $\{u_\phi\}$, correspondientes a las acciones $\{F_{s\phi}\}$. Las dos variables están

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

relacionadas por la matriz de rigidez lateral $[k_\phi]$ a través de la siguiente expresión (Azar, 1972; McGuire, Gallaguer, & Ziemian, 2000):

$$\{F_{s\phi}\} = [k_\phi]\{u_\phi\} \tag{2.58}$$

La matriz $[k_\phi]$ es cuadrada y tiene la forma que se indica en la Ecuación (2.59). Su tamaño n coincide con el número total de grados de libertad dinámicos de la estructura.

$$[k_\phi] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nj} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

Cada columna de $[k_\phi]$ almacena las acciones que deben aplicarse a la estructura para generar un desplazamiento unitario en cada uno de los grados de libertad dinámicos, es decir, en los desplazamientos de los centros de masa y en las rotaciones de los diafragmas. Se aclara que en este caso los desplazamientos unitarios son relativos a la base. La Figura 2.27 muestra el significado físico de los coeficientes de la matriz de rigidez lateral de una estructura espacial de dos diafragmas y seis grados de libertad dinámicos. Se indican solo las acciones que deben aplicarse para que se produzcan desplazamientos unitarios en los grados de libertad 1, 2 y 6.

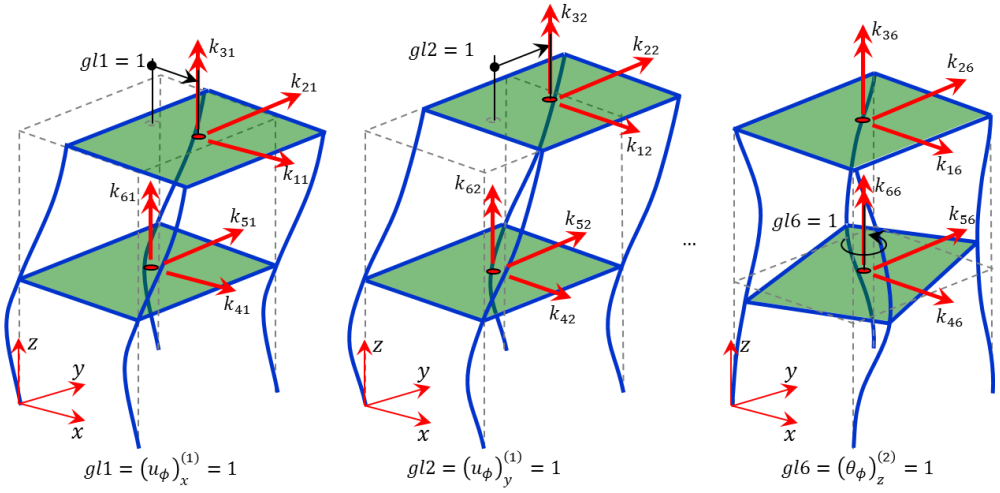


Figura 2.27. Significado físico de los coeficientes de la matriz de rigidez lateral

La matriz de rigidez lateral se construye a partir de la geometría, de las propiedades de la sección transversal, de las propiedades mecánicas del material y de las rigideces de las conexiones asociadas a cada elemento estructural. El procedimiento para construir $[k_\phi]$ se describe en detalle en el Capítulo 3.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Si el material tiene un comportamiento elástico, las acciones de amortiguamiento viscoso $\{F_{a\phi}\}$ se asumen como una función lineal de las velocidades relativas a la base de los centros de masa $\{\dot{u}_\phi\}$. En este caso las dos variables están relacionadas por la matriz de amortiguamiento $[c]$ a través de la siguiente expresión:

$$\{F_{a\phi}\} = [c]\{\dot{u}_\phi\} \tag{2.60}$$

Similar a la matriz $[k_\phi]$, cada columna de la matriz $[c]$ almacena las acciones que se deben aplicarse en los centros de masa de la estructura para inducir una velocidad unitaria en uno de los grados de libertad, mientras las velocidades en los grados de libertad restantes son igual a cero. Nuevamente las velocidades unitarias son relativas a la base.

No es posible construir la matriz de amortiguamiento a partir de la geometría y de las propiedades de cada elemento, como se hace con la matriz de rigidez (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998; Paz, 1992) ya que los mecanismos reales por los cuales se disipa la energía en la estructura son mucho más complejos. En la práctica el modelo analítico es una simplificación que facilita la solución de la ecuación de movimiento. En el Capítulo 3 se plantean varias alternativas para evaluar la matriz $[c]$.

Al remplazar las ecuaciones (2.58) y (2.60) en la Ecuación (2.50) se llega a la siguiente expresión:

$$[m]\{\ddot{u}_\phi\} + [c]\{\dot{u}_\phi\} + [k_\phi]\{u_\phi\} = -[m][\gamma]\{\ddot{u}_g\} \tag{2.61}$$

la cual corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneas de coeficientes constantes. Las ecuaciones se encuentran acopladas por las matrices de rigidez y de amortiguamiento, puesto que estas por lo general no son diagonales. La Ecuación (2.61) corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas cuya solución corresponde a los vectores $\{u_\phi\}$, $\{\dot{u}_\phi\}$ y $\{\ddot{u}_\phi\}$.

Para una estructura plana representada en el plano xz los vectores $\{u_\phi\}$ y $\{\dot{u}_\phi\}$ contienen los desplazamientos y las velocidades relativas a la base de los centros de masa en dirección x en cada instante de tiempo, como se muestra a continuación:

$$\{u_\phi\} = \begin{Bmatrix} (u_\phi)_x^{(1)} \\ (u_\phi)_x^{(2)} \\ \vdots \\ (u_\phi)_x^{(n)} \end{Bmatrix} \qquad \{\dot{u}_\phi\} = \begin{Bmatrix} (\dot{u}_\phi)_x^{(1)} \\ (\dot{u}_\phi)_x^{(2)} \\ \vdots \\ (\dot{u}_\phi)_x^{(n)} \end{Bmatrix} \tag{2.62}$$

Para una estructura espacial el vector $\{u_\phi\}$ contiene los subvectores $\{u_\phi\}^{(i)}$ en los que se almacena en forma ordenada para cada diafragma i $(1,2,\dots,n)$ los desplazamientos en x e y de su centro de masa y la rotación en dirección z. De forma similar el vector $\{\dot{u}_\phi\}$ contiene los subvectores $\{\dot{u}_\phi\}^{(i)}$ en los que se almacena para cada diafragma las velocidades en x e y del centro de masa y la rotación en dirección z. Las ecuaciones (2.63) muestran la

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

forma de los vectores $\{u_\phi\}$ y $\{\dot{u}_\phi\}$ y las ecuaciones (2.64) muestran la forma de los subvectores $\{u_\phi\}^{(i)}$ y $\{\dot{u}_\phi\}^{(i)}$ de un pórtico espacial.

$$\{u_\phi\} = \begin{Bmatrix} \{u_\phi\}^{(1)} \\ \{u_\phi\}^{(2)} \\ \vdots \\ \{u_\phi\}^{(n)} \end{Bmatrix}_{(3nx1)} \qquad \{\dot{u}_\phi\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{u}_\phi\}^{(1)} \\ \{\dot{u}_\phi\}^{(2)} \\ \vdots \\ \{\dot{u}_\phi\}^{(n)} \end{Bmatrix}_{(3nx1)} \tag{2.63}$$

$$\{u_\phi\}^{(i)} = \begin{Bmatrix} (u_\phi)_x^{(i)} \\ (u_\phi)_y^{(i)} \\ (\theta_\phi)_z^{(i)} \end{Bmatrix}_{(3x1)} \qquad \{\dot{u}_\phi\}^{(i)} = \begin{Bmatrix} (\dot{u}_\phi)_x^{(i)} \\ (\dot{u}_\phi)_y^{(i)} \\ (\dot{\theta}_\phi)_z^{(i)} \end{Bmatrix}_{(3x1)} \tag{2.64}$$

Todas las cantidades almacenadas en $\{u_\phi\}$ y $\{\dot{u}_\phi\}$ son relativas a la base y están ordenadas de acuerdo a la numeración de los grados de libertad.

2.5. Métodos de solución de la ecuación de movimiento

A continuación se da una breve descripción de algunos de los métodos disponibles de análisis dinámico para resolver la Ecuación de movimiento (2.50) en sistemas elásticos o inelásticos, y los métodos para resolver la Ecuación (2.61) aplicada a sistemas elásticos.

En los Capítulos 3, 4 y 5 se describe con más detalle las consideraciones y la formulación matemática de los métodos, teniendo en cuenta que estos fueron implementados en el programa UNDIN.

2.5.1. Sistemas elásticos con amortiguamiento clásico

La Ecuación (2.61) rige el movimiento de una estructura en el rango elástico sometida a una o varias componentes de aceleración en la base. Su solución se obtiene utilizando algún procedimiento de *análisis dinámico elástico*.

Los procedimientos de análisis dinámico elástico existentes en la bibliografía son: el método de *análisis modal cronológico* que permite obtener la respuesta de la estructura en cada instante de tiempo y el método de *análisis modal espectral* que permite estimar la respuesta máxima probable de una estructura en la que el efecto máximo de la aceleración de la base se obtiene a partir del *espectro de pseudo – aceleraciones.* Cabe anotar que estos

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

dos métodos están restringidos a sistemas elásticos con amortiguamiento clásico. En el Capítulo 3 se aclara el concepto de amortiguamiento clásico.

Estos métodos de análisis dinámico elástico se basan en el desacople del sistema de ecuaciones simultaneas planteado en la Ecuación (2.61), utilizando las propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración, como se describe en el Capítulo 3. En el Capítulo 4 se presenta la forma de calcular la respuesta de la estructura utilizando los métodos previamente mencionados.

2.5.2. Sistemas elásticos o inelásticos con o sin amortiguamiento clásico

La Ecuación (2.50) rige el movimiento de una estructura en el rango elástico o inelástico, con o sin amortiguamiento clásico, sometida a una o varias componentes de aceleración en la base. Esta expresión es más general que la Ecuación (2.61) y permite considerar sistemas con no linealidades geométricas o de material. Su solución se obtiene utilizando métodos de *análisis dinámico inelástico*.

En el Capítulo 5 se escribe un método que permite solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas en su forma básica, es decir, sin ninguna transformación que las desacople como lo hacen los métodos de análisis dinámico elástico. Para su solución, la Ecuación (2.50) se plantea en forma incremental para un intervalo de tiempo Δt, utilizando las aproximaciones (2.65) para los incrementos de las acciones de amortiguamiento y de las acciones equivalentes en el intervalo:

$$\{\Delta F_{a\phi}\} \approx [c_{(t)}]\{\Delta \dot{u}_{\phi}\} \qquad \{\Delta F_{s\phi}\} \approx [k_{\phi(t)}]\{\Delta u_{\phi}\} \tag{2.65}$$

En las anteriores expresiones $[c_{(t)}]$ y $[k_{\phi(t)}]$ son las matrices tangentes de amortiguamiento y rigidez lateral, evaluadas en el instante t, al comienzo del intervalo. La ecuación de movimiento en forma incremental tiene la siguiente forma:

$$[m]\{\Delta \ddot{u}_{\phi}\} + [c_{(t)}]\{\Delta \dot{u}_{\phi}\} + [k_{\phi(t)}]\{\Delta u_{\phi}\} = -[m][\gamma]\{\Delta \ddot{u}_{g}\} \tag{2.66}$$

El método utilizado para la solución de la Ecuación (2.66) es un procedimiento iterativo que se basa en la familia de métodos de Newmark, combinado con el método de Newton – Raphson modificado para reducir el error producido en la respuesta al utilizar las aproximaciones dadas en las ecuaciones (2.65). La única no linealidad considerada en la formulación descrita en el Capítulo 5 es la producida por la formación de rótulas plásticas a flexión, idealizadas como resortes rotacionales no lineales.

El método descrito en el Capítulo 5 también permite el análisis de estructuras en el rango elástico. La solución de la Ecuación (2.61) calculada por este método resulta igual a la solución calculada por el método de análisis modal cronológico, aunque desde el punto de vista computacional resulta más eficiente utilizar este último método.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Capítulo 3
Matrices de masa, rigidez, amortiguamiento y acciones externas. Análisis modal

A continuación se describe el significado y la formulación matemática de cada uno de los términos que intervienen en el planteamiento de las ecuaciones matriciales de movimiento (2.50), (2.61) y (2.66), siendo la primera de ellas aproximada para sistemas inelásticos. Asimismo se describen las matrices de masa, rigidez, amortiguamiento y acciones externas equivalentes al movimiento de la base.

También se presentan los procedimientos existentes para calcular las frecuencias, los periodos y los modos de vibración natural, propiedades dinámicas de la estructura de gran importancia para el análisis de sistemas elásticos con amortiguamiento clásico.

Finalmente se indica el procedimiento mediante el cual se realiza el desacople de las ecuaciones de movimiento (2.61), como punto de partida de los métodos de análisis dinámico elástico descritos en el Capítulo 4.

3.1. Matriz de masa concentrada

La matriz $[m]$ de masa concentrada almacena la masa m y el momento de inercia de masa I_{cm} de todos los diafragmas rígidos de la estructura, ordenadas de acuerdo a la numeración de los grados de libertad dinámicos.

Cuando la sumatoria de momentos en cada diafragma se plantea en el respectivo centro de masa, la matriz de masa es diagonal. Si se escoge un punto diferente al centro de masa, en la matriz de masa aparecen términos diferentes a cero fuera de la diagonal principal.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

3.1.1. Masa y momento de inercia de cada diafragma rígido

En edificios aporticados la masa m de cada diafragma equivale a la carga muerta actuante sobre este, dividida en la aceleración de la gravedad g.

Generalmente en un edificio la carga muerta incluye el peso propio de los elementos estructurales de la placa (*vigas, viguetas, placas, etc.*) y la carga muerta sobreimpuesta (*acabados, muros divisorios, fachadas, etc.*). En la práctica el peso de las columnas se desprecia o se suma al peso de cada placa de acuerdo a su aferencia.

La masa m de cada diafragma se evalúa con la expresión (3.1) a partir del área A del diafragma, de la carga muerta por metro cuadrado actuante q_{cm} y de la aceleración de la gravedad g:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{q_{cm} * A}{g} \tag{3.1}$$

Si se utiliza el sistema internacional SI de unidades, para cargas distribuidas dadas en kN/m^2, áreas en m^2 y la aceleración de la gravedad como $g = 9.81 m/s^2$, la masa estará dada en kkg o Mg, siendo $1Mg = 10^3 kg$.

El momento de inercia de masa I_{cm} calculado respecto a un eje paralelo al eje Z global que pasa por el centro de masa del diafragma, se calcula con la siguiente expresión:

$$I_{cm} = \int_m r^2 dm \tag{3.2}$$

Si se utiliza el sistema internacional SI, para masas en Mg y dimensiones del diafragma en m, las unidades del momento de inercia son $Mg \cdot m^2$.

Alternativamente si se conoce la masa m, el área A y los momentos de inercia de área $I_{\bar{x}}$ e $I_{\bar{y}}$ respecto a los ejes centroidales de la región geométrica que delimita el diafragma, y además se asume una distribución de masa uniforme de tal manera que el centro de masa coincide con el centroide de la región geométrica, el momento de inercia de masa I_{cm} se calcula directamente con la siguiente expresión:

$$I_{cm} = \frac{m}{A}\left(I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}}\right) \tag{3.3}$$

3.1.2. Matriz de masa de pórticos planos y espaciales

La forma de la matriz de masa depende si el pórtico en estudio es plano o espacial. En el caso de pórticos espaciales, depende adicionalmente del punto maestro escogido para calcular la sumatoria de momentos de las acciones resultantes en cada diafragma. El punto maestro es el lugar geométrico sobre el cual actúan los desplazamientos del diafragma rigido, es decir, donde se imponen los grados de libertad dinámicos del diafragma. Por lo ge-

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

neral este punto esta ubicado en el centro de masa y no coincide con ningún nudo de la estructura.

Cuando se analiza una estructura plana, la matriz de masa siempre es diagonal y contiene únicamente la masa asociada a cada diafragma. No se consideran momentos de inercia dado que todas las acciones resultantes en cada nivel están en el plano del pórtico y por lo tanto la sumatoria de momentos es cero.

Para la construcción de la matriz de masa, en la que cada fila y cada columna corresponde a un grado de libertad dinámico, se debe tener en cuenta la forma como están numerados los grados de libertad de los diafragmas.

Si se trata de una estructura espacial como la mostrada en la Figura 3.1 en la que se han tomado como puntos maestros los centros de masa de los diafragmas, la matriz $[m]$ mostrada en la Ecuación (3.4) es diagonal y sus coeficientes coinciden con las masas y los momentos de inercia de masa ordenados de acuerdo a la numeración de los grados de libertad de los diafragmas, la cual también se sugiere en la misma figura.

$$[m] = \begin{bmatrix} [m]^{(1)} & [0] & [0] \\ [0] & [m]^{(2)} & [0] \\ [0] & [0] & [m]^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} gld_1 & gld_2 & gld_3 & gld_4 & gld_5 & gld_6 & gld_7 & gld_8 & gld_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} m^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{cm}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{cm}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{cm}^{(3)} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ gld_1 \\ gld_2 \\ gld_3 \\ gld_4 \\ gld_5 \\ gld_6 \\ gld_7 \\ gld_8 \\ gld_9 \end{array} \tag{3.4}$$

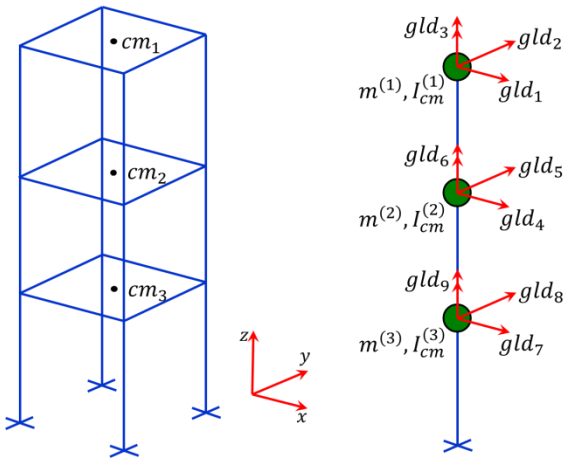


Figura 3.1. Numeración recomendada de los grados de libertad dinámicos de una estructura espacial

Si se trata de un pórtico plano como el de la Figura 3.2, en la que también se sugiere una forma de numerar los grados de libertad dinámicos, la Ecuación (3.5) muestra la matriz de

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

masa respectiva. En este caso $[m]$ es diagonal y sus coeficientes corresponden a las masas de cada diafragma.

$$[m] = \begin{array}{c} \begin{matrix} gld_1 & gld_2 & gld_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} m^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & m^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & m^{(3)} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ gld_1 \\ gld_2 \\ gld_3 \end{matrix} \tag{3.5}$$

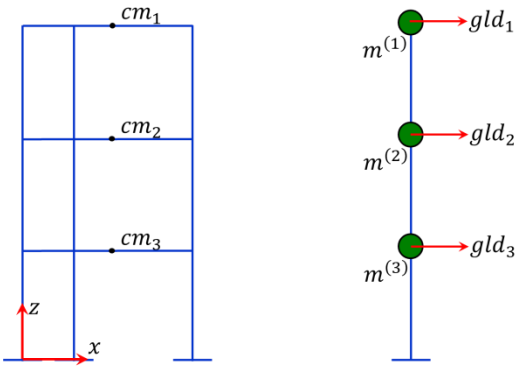


Figura 3.2. Numeración recomendada de los grados de libertad dinámicos de una estructura plana

3.2. Matriz de rigidez lateral

Como se indicó en el Capítulo 2 bajo comportamiento elástico del material, la matriz de rigidez lateral $[K_\phi]$ relaciona las acciones equivalentes $\{F_{s\phi}\}$ con los desplazamientos correspondientes $\{u_\phi\}$ de los centros de masa, de la forma:

$$\{F_{s\phi}\} = [K_\phi]\{u_\phi\} \tag{3.6}$$

En general, si existe comportamiento inelastico del material, la matriz tangente de rigidez lateral $[K_{\phi(t)}]$ evaluada al comienzo del intervalo Δt aproxima el incremento en las acciones equivalentes $\{\Delta F_{s\phi}\}$ con el incremento en los desplazamientos de los centros de masa $\{\Delta u_\phi\}$ así:

$$\{\Delta F_{s\phi}\} = [K_{\phi(t)}]\{\Delta u_\phi\} \tag{3.7}$$

Tanto acciones como desplazamientos deben estar referidas al sistema coordenado global o de la estructura.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Las matrices $[K_\phi]$ y $[K_{\phi(t)}]$ consideran solamente los grados de libertad dinámicos. Si se trata de una estructura plana se considera un solo desplazamientos por diafragma, y si la estructura es espacial se consideran dos desplazamientos y una rotación por diafragma.

A continuación se describe un procedimiento mediante el cual se construyen las matrices $[K_\phi]$ y $[K_{\phi(t)}]$ partiendo de la matriz de rigidez general de la estructura, que considera todos los grados de libertad estáticos. En esta sección se utilizan los procedimientos de condensación y asociación de grados de libertad.

El procedimiento descrito a continuación implica la construcción de las matrices elementales de rigidez y de transformación de coordenadas del elemento tipo pórtico espacial, la construcción de la matriz de rigidez general a partir del ensamblaje de las matrices de rigidez elementales, la construcción de la matriz de rigidez condensada a los grados de libertad de interés para el análisis dinámico y la construcción de la matriz de asociación de desplazamientos o *matriz geométrica*, para obtener finalmente a la rigidez lateral utilizada en el análisis dinámico.

3.2.1. Descripción del elemento tipo pórtico espacial

El elemento tipo pórtico espacial de dos nudos y seis grados de libertad por nudo (*tres desplazamientos y tres rotaciones*) que se muestra en la Figura 3.3 es un elemento de sección prismática y de doble simetría, cuya formulación matematica permite considerar simultáneamente deformaciones por cortante y conexiones parcialmente rígidas a momento en los dos planos principales xy (Figura 3.3(a)) e xz (Figura 3.3(b)) local.

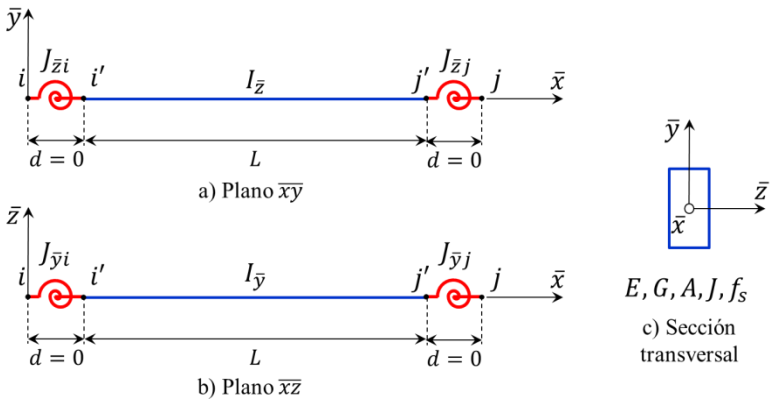


Figura 3.3. Elemento estructural tipo pórtico espacial. Adaptada de Linero (2012)

Las conexiones parcialmente rígidas se representan como resortes rotacionales de longitud nula, localizados en cada extremo i y j del elemento y en los dos planos de flexión principales. Los momentos actuantes y las rotaciones correspondientes de los resortes se relacionan a través de la rigidez J de cada resorte, como lo muestran la Figura 3.4 y las ecuaciones (3.8):

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

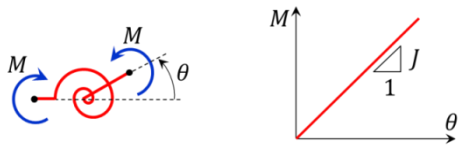


Figura 3.4. Relación momento – rotación en los resortes rotacionales. Adaptada de Linero (2012)

$$M_{\bar{y}i} = J_{\bar{y}i}\theta_{\bar{y}}^{i-i'} \qquad M_{\bar{y}j} = J_{\bar{y}j}\theta_{\bar{y}}^{j'-j}$$
$$M_{\bar{z}i} = J_{\bar{z}i}\theta_{\bar{z}}^{i-i'} \qquad M_{\bar{z}j} = J_{\bar{z}j}\theta_{\bar{z}}^{j'-j} \tag{3.8}$$

Los ejes locales se orientan de forma que el eje $\bar{x}$ coincida con el eje longitudinal del elemento y su dirección coincida con la de un vector que va del nudo inicial i al nudo final j. En la Figura 3.3 también se indica la orientación de los ejes locales del elemento.

Los grados de libertad del elemento corresponden a los desplazamientos de los nudos inicial y final i, j. Estos se encuentran ordenados comenzando por los desplazamientos del nudo inicial $u_{\bar{x}}^{(i)}$, $u_{\bar{y}}^{(i)}$ y $u_{\bar{z}}^{(i)}$, siguiendo con las rotaciones del nudo inicial $\theta_{\bar{x}}^{(i)}$, $\theta_{\bar{y}}^{(i)}, \theta_{\bar{z}}^{(i)}$, luego los desplazamientos del nudo final $u_{\bar{x}}^{(j)}$, $u_{\bar{y}}^{(j)}, u_{\bar{z}}^{(j)}$ y finalmente las rotaciones del nudo final $\theta_{\bar{x}}^{(j)}$, $\theta_{\bar{y}}^{(j)}, \theta_{\bar{z}}^{(j)}$ como lo muestra la Figura 3.5.

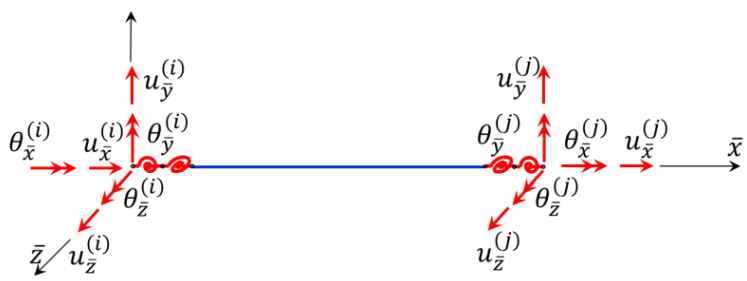


Figura 3.5. Grados de libertad del elemento en coordenadas locales. Adaptada de Linero (2012)

Las acciones en los extremos (*fuerzas y momentos*) se organizan de forma similar a los grados de libertad, comenzando por las acciones aplicadas en el nudo inicial y terminando por las acciones aplicadas en el nudo final. La Figura 3.6 muestra las acciones en los extremos del elemento. No se dibujan los resortes rotacionales para mayor claridad.

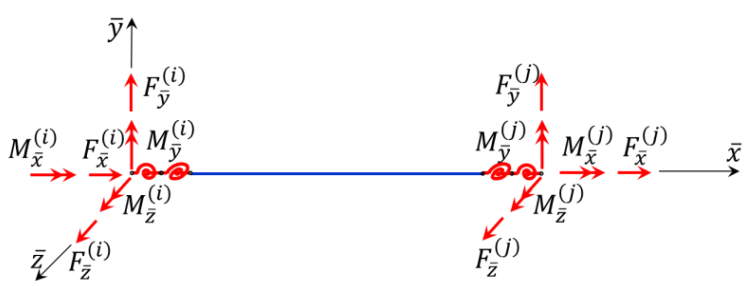


Figura 3.6. Acciones en los extremos del elemento en coordenadas locales. Adaptada de Linero (2012)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

3.2.2. Matriz de rigidez elemental en coordenadas locales

La matriz de rigidez elemental en coordenadas locales relaciona los desplazamientos de los nudos con las acciones correspondientes aplicadas en los extremos. Estas acciones y desplazamientos están referidos al sistema de coordenadas local del elemento. A continuación se presenta la formulación matemática respectiva (Linero, 2012).

La ecuación matricial que relaciona las acciones en los extremos y los desplazamientos de los nudos del elemento es el siguiente:

$$\{\bar{f}_e\} = [\bar{k}_e]\{\bar{u}_e\} \tag{3.9}$$

donde $\{\bar{f}_e\}$ es el vector de acciones en los extremos, $[\bar{k}_e]$ es la matriz de rigidez elemental y $\{\bar{u}_e\}$ es el vector de desplazamientos de los nudos, todas las cantidades en coordenadas locales.

La Ecuación (3.10) corresponde a la matriz de rigidez elemental en coordenadas locales del elemento tipo pórtico espacial previamente descrito. La formulación mostrada está limitada a elementos de sección transversal constante y simétrica respecto a los ejes centroidales, de tal manera que la deformación en uno de los planos no cause deformaciones ni acciones internas en el otro plano (McGuire et al., 2000). Por otro lado en la formulación se asume que la fuerza axial y la flexión son independientes, es decir, que la fuerza axial no genera flexión.

Las variables que intervienen en la construcción de la matriz $[\bar{k}_e]$ son:

E: Módulo de elasticidad

G: Módulo de cortante

L: Longitud del elemento

A: Área de la sección transversal

J: Constante de torsión

$I_{\bar{y}}$: Momento de inercia de área respecto al eje y local

$I_{\bar{z}}$: Momento de inercia de área respecto al eje z local

f_s: Factor de forma de la sección

$J_{\bar{y}i}$: Rigidez del resorte rotacional del nudo inicial en el plano $\bar{x}\bar{z}$

$J_{\bar{z}i}$: Rigidez del resorte rotacional del nudo inicial en el plano $\bar{x}\bar{y}$

$J_{\bar{y}j}$: Rigidez del resorte rotacional del nudo final en el plano $\bar{x}\bar{z}$

$J_{\bar{z}j}$: Rigidez del resorte rotacional del nudo final en el plano $\bar{x}\bar{y}$

α_s: Coeficiente de forma para deformaciones por cortante

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$
[\bar{k}_e] = \begin{array}{c}
\left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{EA}{L} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI_{\bar{z}}e_{\bar{z}1}}{L^3} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI_{\bar{y}}e_{\bar{y}1}}{L^3} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & & & & \text{S I M} & & & \\
0 & 0 & -\frac{6EI_{\bar{y}}e_{\bar{y}3}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{\bar{y}}e_{\bar{y}6}}{L} & & & & & & & \\
0 & \frac{6EI_{\bar{z}}e_{\bar{z}3}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{\bar{z}}e_{\bar{z}6}}{L} & & & & & & \\
\hline
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & & & & \\
0 & -\frac{12EI_{\bar{z}}e_{\bar{z}}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{\bar{z}}e_{\bar{z}3}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{\bar{z}}e_{\bar{z}4}}{L^3} & & & & \\
0 & 0 & -\frac{12EI_{\bar{y}}e_{\bar{y}}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{\bar{y}}e_{\bar{y}3}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{\bar{y}}e_{\bar{y}4}}{L^3} & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & \\
0 & 0 & -\frac{6EI_{\bar{y}}e_{\bar{y}2}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{\bar{y}}e_{y7}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{\bar{y}}e_{\bar{y}2}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{\bar{y}}e_{\bar{y}5}}{L} & \\
0 & \frac{6EI_{\bar{z}}e_{\bar{z}2}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{\bar{z}}e_{\bar{z}7}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{\bar{z}}e_{\bar{z}2}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{\bar{z}}e_{\bar{z}5}}{L}
\end{array}\right| \\
\begin{array}{cccccccccccc}
u_{\bar{x}}^{(i)} & u_{\bar{y}}^{(i)} & u_{\bar{z}}^{(i)} & \theta_{\bar{x}}^{(i)} & \theta_{\bar{y}}^{(i)} & \theta_{\bar{z}}^{(i)} & u_{\bar{x}}^{(j)} & u_{\bar{y}}^{(j)} & u_{\bar{z}}^{(j)} & \theta_{\bar{x}}^{(j)} & \theta_{\bar{y}}^{(j)} & \theta_{\bar{z}}^{(j)}
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
u_{\bar{x}}^{(i)} \\ u_{\bar{y}}^{(i)} \\ u_{\bar{z}}^{(i)} \\ \theta_{\bar{x}}^{(i)} \\ \theta_{\bar{y}}^{(i)} \\ \theta_{\bar{z}}^{(i)} \\ u_{\bar{x}}^{(j)} \\ u_{\bar{y}}^{(j)} \\ u_{\bar{z}}^{(j)} \\ \theta_{\bar{x}}^{(j)} \\ \theta_{\bar{y}}^{(j)} \\ \theta_{\bar{z}}^{(j)}
\end{array}
\qquad (3.10)
$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Los valores de la columna *i* de la matriz $\left[\bar{k}_e\right]$ coinciden con las acciones que deben aplicarse en los extremos del elemento cuando se da un desplazamiento unitario positivo al grado de libertad *i* mientras los grados de libertad restantes permanecen fijos (McGuire et al., 2000).

Las constantes $e_{\bar{y}j}$ de reducción de rigidez a flexión en el plano $\bar{x}\bar{z}$ por la presencia de conexiones parcialmente rígidas son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
e_{\bar{y}1} &= \frac{1}{1+4j_{\bar{y}i}+4j_{\bar{y}j}+12j_{\bar{y}i}j_{\bar{y}j}+2\beta_{s\bar{y}}(1+j_{\bar{y}i}+j_{\bar{y}j})} \\
e_{\bar{y}2} &= \left(1+2j_{\bar{y}i}\right)e_{\bar{y}1} \\
e_{\bar{y}3} &= \left(1+2j_{\bar{y}j}\right)e_{\bar{y}1} \\
e_{\bar{y}4} &= \left(1+j_{\bar{y}i}+j_{\bar{y}j}\right)e_{\bar{y}1} \\
e_{\bar{y}5} &= \left(1+3j_{\bar{y}i}+\frac{1}{2}\beta_{s\bar{y}}\right)e_{\bar{y}1} \\
e_{\bar{y}6} &= \left(1+3j_{\bar{y}j}+\frac{1}{2}\beta_{s\bar{y}}\right)e_{\bar{y}1} \\
e_{\bar{y}7} &= \left(1-\beta_{s\bar{y}}\right)e_{\bar{y}1}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
j_{\bar{y}i} &= \frac{EI_{\bar{y}}}{LJ_{\bar{y}i}} \\
j_{\bar{y}j} &= \frac{EI_{\bar{y}}}{LJ_{\bar{y}j}} \\
\beta_{s\bar{y}} &= \frac{6EI_{\bar{y}}\alpha_s}{GAL^2}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Las constantes $e_{\bar{z}j}$ de reducción de rigidez a flexión en el plano $\bar{x}\bar{y}$ son:

$$
\begin{aligned}
e_{\bar{z}1} &= \frac{1}{1+4j_{zi}+4j_{zj}+12j_{\bar{z}i}j_{\bar{z}j}+2\beta_{s\bar{z}}(1+j_{\bar{z}i}+j_{\bar{z}j})} \\
e_{\bar{z}2} &= (1+2j_{\bar{z}i})e_{\bar{z}1} \\
e_{\bar{z}3} &= \left(1+2j_{\bar{z}j}\right)e_{\bar{z}1} \\
e_{\bar{z}4} &= \left(1+j_{\bar{z}i}+j_{\bar{z}j}\right)e_{\bar{z}1} \\
e_{\bar{z}5} &= \left(1+3j_{\bar{z}i}+\frac{1}{2}\beta_{s\bar{z}}\right)e_{\bar{z}1} \\
e_{\bar{z}6} &= \left(1+3j_{\bar{z}j}+\frac{1}{2}\beta_{s\bar{z}}\right)e_{\bar{z}1} \\
e_{\bar{z}7} &= (1-\beta_{s\bar{z}})e_{\bar{z}1}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
j_{\bar{z}i} &= \frac{EI_{\bar{z}}}{LJ_{\bar{z}i}} \\
j_{\bar{z}j} &= \frac{EI_{\bar{z}}}{LJ_{\bar{z}j}} \\
\beta_{s\bar{z}} &= \frac{6EI_{\bar{z}}\alpha_s}{GAL^2}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Esta formulación es general y permite considerar casos en los cuales se forma una articulación en alguno o en los dos extremos del elemento simultáneamente. A continuación se muestran las constantes de reducción de rigidez a flexión en el plano $\bar{x}\bar{z}$ cuando en particular $J_{\bar{y}i}$ o $J_{\bar{y}j}$ son cero de forma independiente y de forma simultánea:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$si\ J_{\bar{y}i} \to 0\ y\ J_{\bar{y}j} \neq 0$	$si\ J_{\bar{y}i} \neq 0\ y\ J_{\bar{y}j} \to 0$	$si\ J_{\bar{y}i} \to 0\ y\ J_{\bar{y}j} \to 0$	
$e_{\bar{y}1} = \dfrac{1}{1 + 12j_{\bar{y}j} + 2\beta_{s\bar{y}}}$	$e_{\bar{y}1} = \dfrac{1}{1 + 12j_{\bar{y}i} + 2\beta_{sy}}$	$e_{\bar{y}1} = 0$	
$e_{\bar{y}2} = 2e_{\bar{y}1}$	$e_{\bar{y}2} = 0$	$e_{\bar{y}2} = 0$	
$e_{\bar{y}3} = 0$	$e_{\bar{y}3} = 2e_{\bar{y}1}$	$e_{\bar{y}3} = 0$	
$e_{\bar{y}4} = e_{\bar{y}1}$	$e_{\bar{y}4} = e_{\bar{y}1}$	$e_{\bar{y}4} = 0$	(3.13)
$e_{\bar{y}5} = 3e_{\bar{y}1}$	$e_{\bar{y}5} = 0$	$e_{\bar{y}5} = 0$	
$e_{\bar{y}6} = 0$	$e_{\bar{y}6} = 3e_{\bar{y}1}$	$e_{\bar{y}6} = 0$	
$e_{\bar{y}7} = 0$	$e_{\bar{y}7} = 0$	$e_{\bar{y}7} = 0$	

Las constantes de reducción de rigidez a flexión en el plano $\bar{x}\bar{y}$ cuando alguna de las rigideces $J_{\bar{z}i}$ o $J_{\bar{z}j}$ son cero de forma independiente y de forma simultánea son:

$si\ J_{\bar{z}i} \to 0\ y\ J_{\bar{z}j} \neq 0$	$si\ J_{\bar{z}i} \neq 0\ y\ J_{\bar{z}j} \to 0$	$si\ J_{\bar{z}i} \to 0\ y\ J_{\bar{z}j} \to 0$	
$e_{\bar{z}1} = \dfrac{1}{1 + 12j_{\bar{z}j} + 2\beta_{s\bar{z}}}$	$e_{\bar{z}1} = \dfrac{1}{1 + 12j_{\bar{z}i} + 2\beta_{s\bar{z}}}$	$e_{\bar{z}1} = 0$	
$e_{\bar{z}2} = 2e_{\bar{z}1}$	$e_{\bar{z}2} = 0$	$e_{\bar{z}2} = 0$	
$e_{\bar{z}3} = 0$	$e_{\bar{z}3} = 2e_{\bar{z}1}$	$e_{\bar{z}3} = 0$	
$e_{\bar{z}4} = e_{\bar{z}1}$	$e_{\bar{z}4} = e_{\bar{z}1}$	$e_{\bar{z}4} = 0$	(3.14)
$e_{\bar{z}5} = 3e_{\bar{z}1}$	$e_{\bar{z}5} = 0$	$e_{\bar{z}5} = 0$	
$e_{\bar{z}6} = 0$	$e_{\bar{z}6} = 3e_{\bar{z}1}$	$e_{\bar{z}6} = 0$	
$e_{\bar{z}7} = 0$	$e_{\bar{z}7} = 0$	$e_{\bar{z}7} = 0$	

3.2.3. Matriz elemental de transformación de coordenadas

La matriz de transformación de coordenadas permite convertir las acciones y los desplazamientos en los extremos del elemento, del sistema local de coordenadas al sistema global de coordenadas, y viceversa.

La relación entre las acciones en los extremos del elemento tipo pórtico espacial en coordenadas locales y en coordenadas globales es la siguiente:

$$\{\bar{f}_e\} = [T]\{f_e\} \tag{3.15}$$

Donde $\{\bar{f}_e\}$ es el vector de acciones en sistema local, $\{f_e\}$ es el vector de acciones en sistema global y $[T]$ es la matriz elemental de transformación de coordenadas.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La Ecuación (3.15) permite plantear una relación entre los desplazamientos de los nudos en sistema local y global de coordenadas como la siguiente:

$$\{\overline{u}_e\} = [T]\{u_e\} \tag{3.16}$$

donde $\{\overline{u}_e\}$ es el vector de desplazamientos de los nudos en coordenadas locales y $\{u_e\}$ es el vector de desplazamientos de los nudos en coordenadas globales.

La matriz elemental de transformación de coordenadas de un elemento tipo pórtico espacial tiene la siguiente forma:

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_v] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [T_v] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [T_v] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [T_v] \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

La submatriz $[T_v]$ es de tamaño $3X3$ y contiene las componentes x, y, z de los vectores unitarios $\underline{\overline{i}}$, $\underline{\overline{j}}$ y $\underline{\overline{k}}$, que definen la orientación del sistema local de coordenadas del elemento, como lo muestra la Figura 3.7.

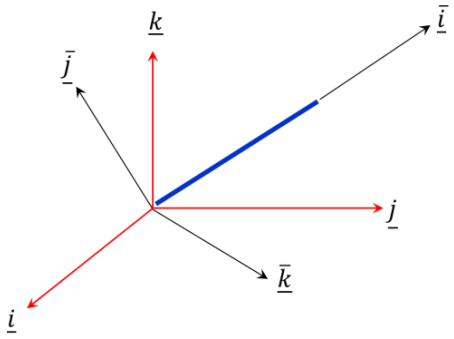


Figura 3.7. Vectores unitarios que definen la orientación de los ejes locales y globales del elemento. Adaptada de Linero (2012)

Si los vectores unitarios $\underline{\overline{i}}$, $\underline{\overline{j}}$ y $\underline{\overline{k}}$ se escriben en función de los vectores $\underline{i}$, $\underline{j}$ y $\underline{k}$ del sistema global de coordenadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \underline{\overline{i}} &= \overline{i}_x\underline{i} + \overline{i}_y\underline{j} + \overline{i}_z\underline{k} \\ \underline{\overline{j}} &= \overline{j}_x\underline{i} + \overline{j}_y\underline{j} + \overline{j}_z\underline{k} \\ \underline{\overline{k}} &= \overline{k}_x\underline{i} + \overline{k}_y\underline{j} + \overline{k}_z\underline{k} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Entonces la submatriz $[T_v]$ toma la siguiente forma:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$[T_v] = \begin{bmatrix} \bar{i}_x & \bar{i}_y & \bar{i}_z \\ \bar{j}_x & \bar{j}_y & \bar{j}_z \\ \bar{k}_x & \bar{k}_y & \bar{k}_z \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

La submatriz $[T_v]$ es ortogonal, tiene la propiedad de que su inversa es igual a su transpuesta. La matriz $[T]$ también posee esta propiedad.

$$\begin{aligned} [T_v]^{-1} &= [T_v]^T \\ [T]^{-1} &= [T]^T \end{aligned} \tag{3.20}$$

- *Definición de los ejes locales del elemento*

El eje local $\bar{x}$, que coincide con el eje longitudinal del elemento, queda definido con el vector unitario $\underline{\bar{i}}$, que se calcula como la diferencia entre las coordenadas del nudo final y las coordenadas del nudo inicial, dividida entre la longitud del elemento.

Para calcular los vectores unitarios $\underline{\bar{j}}$ y $\underline{\bar{k}}$ que definen la orientación de los ejes locales $\bar{y}$ e $\bar{z}$ hay varias posibilidades. Una primera opción consiste en usar las coordenadas de un punto auxiliar y las coordenadas del nudo inicial del elemento para definir un vector auxiliar denominado $\underline{\bar{j}}^*$ de forma que el vector $\underline{\bar{k}}$ resulte perpendicular a los vectores $\underline{\bar{i}}$ y $\underline{\bar{j}}^*$.

En este caso el vector auxiliar $\underline{\bar{j}}^*$ se calcula como la diferencia entre las coordenadas del punto auxiliar y las coordenadas del nudo inicial del elemento, dividida entre la distancia entre los dos puntos. El punto auxiliar debe escogerse de tal forma que el vector resultante no sea paralelo al vector unitario $\underline{\bar{i}}$.

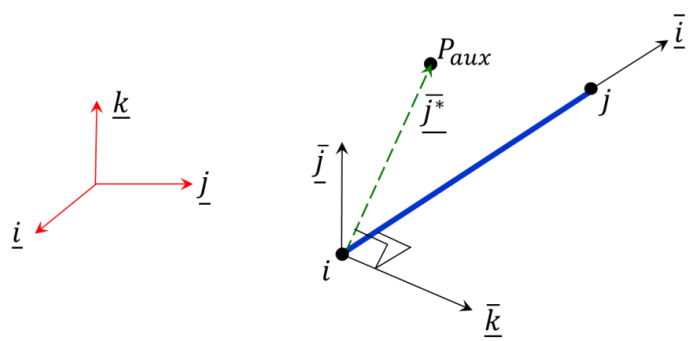


Figura 3.8. Definición de los ejes locales utilizando un punto auxiliar. Adaptada de Linero (2012)

Otra opción consiste en establecer los ejes locales del elemento de forma similar a como lo hacen programas comerciales como SAP2000 y ETABS (Wilson, 2002). En este caso el vector auxiliar $\underline{\bar{j}}^*$ se asume igual al eje global z de la estructura. Cuando el elemento es paralelo al eje z global, como en el caso de una columna, se adopta un vector auxiliar unitario paralelo al eje global x negativo. La Figura 3.9 muestra esta forma por defecto de definir los ejes locales.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

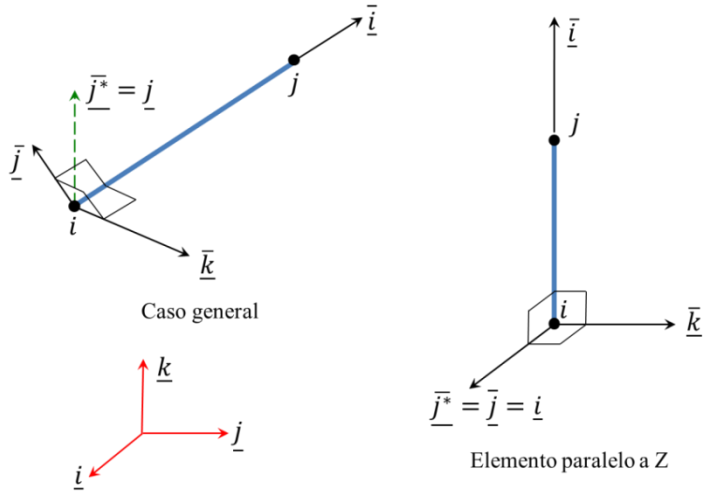


Figura 3.9. Definición de ejes locales utilizando la forma predeterminada de programas comerciales

En las dos opciones anteriores los vectores unitarios $\bar{j}$ y $\bar{k}$ se calculan con los siguientes productos vectoriales:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \bar{i} \times \bar{j}^* \\ \bar{j} &= \bar{k} \times \bar{i} \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.2.4. Matriz de rigidez elemental en coordenadas globales

Usando la relación (3.15) entre acciones en los extremos en coordenadas locales y globales, y la relación (3.16) entre desplazamientos en coordenadas locales y globales, y tenindo en cuenta la propiedad de la matriz $[T]$ cuya inversa es igual a su transpuesta, se llega a la expresión (3.22) que relaciona las acciones en coordenadas globales en los extremos del elemento $\{f_e\}$ con los desplazamientos en coordenadas globales de los nudos $\{u_e\}$.

$$\begin{gathered} \{\bar{f}_e\} = [T]\{f_e\} = [\bar{k}_e]\{\bar{u}_e\} = [\bar{k}_e][T]\{u_e\} \\ [T]\{f_e\} = [\bar{k}_e][T]\{u_e\} \\ \{f_e\} = [T]^T[\bar{k}_e][T]\{u_e\} \\ \{f_e\} = [k_e]\{u_e\} \end{gathered} \tag{3.22}$$

donde $[k_e]$ es la matriz de rigidez elemental en coordenadas globales, la cual se calcula con el siguiente triple producto matricial:

$$[k_e] = [T]^T[\bar{k}_e][T] \tag{3.23}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

3.2.5. Matriz de rigidez de la estructura

La matriz de rigidez general relaciona las acciones equivalentes (*fuerzas y momentos*) trasladadas a los nudos de la estructura con sus desplazamientos correspondientes. Tanto acciones como desplazamientos están referidos a un sistema global de coordenadas. La ecuación matricial que relaciona estas dos cantidades es la siguiente:

$$\{F_s\} = [K]\{u\} \tag{3.24}$$

donde $\{F_s\}$ es el vector de acciones equivalentes, $[K]$ es la matriz de rigidez general de la estructura y $\{u\}$ es el vector de desplazamientos de los nudos. Esta igualdad relaciona todos los grados de libertad estáticos de la estructura y se cumple solamente si hay linealidad entre acciones y desplazamientos.

La matriz $[K]$ se obtiene sumando adecuadamente los coeficientes de las matrices de rigidez elementales en coordenadas globales $[k_e]$ asociados a cada grado de libertad de la estructura en un proceso denominado *ensamblaje* (McGuire et al., 2000). En este caso el coeficiente K_{ij} de $[K]$ corresponde a la suma de los coeficientes k_{ij} de todas las matrices elementales en coordenadas globales $[k_e]^{ext}$ extendidas al total de grados de libertad de la estructura (Linero, 2012), es decir:

$$[K] = \bigwedge_{e=1}^{ne} [k_e] = \sum_{e=1}^{ne} [k_e]^{ext} \tag{3.25}$$

3.2.6. Matriz de rigidez condensada a los grados de libertad de interés

La matriz de rigidez condensada relaciona las acciones aplicadas en los nudos, en las direcciones de los grados de libertad de interés para el análisis dinámico, con los desplazamientos correspondientes en coordenadas globales.

Para construir la matriz de rigidez condensada, los grados de libertad estáticos de la estructura deben agruparse en 3 tipos de subvectores:

- Grados de libertad desconocidos de interés: $\{u_\alpha\}$
- Grados de libertad desconocidos condensados: $\{u_\gamma\}$
- Grados de libertad conocidos: $\{u_\beta\}$

En un pórtico espacial en el que cada nudo posee los seis grados de libertad u_x, u_y, u_z, θ_x, θ_y y θ_z, el subvector de los grados de libertad $\{u_\alpha\}$ corresponde a los desplazamientos desconocidos en las direcciones x e y globales u_x, u_y y a las rotaciones desconocidas respecto al eje z global θ_z de los nudos de la estructura. El subvector $\{u_\gamma\}$ contiene los desplazamientos desconocidos en dirección z global u_z y a las rotaciones desconocidas en direcciones x e y globales θ_x y θ_y, es decir, a los tres grados de libertad restantes de cada

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

nudo. Finalmente el subvector $\{u_\beta\}$ contiene desplazamientos conocidos en los apoyos, que generalmente son nulos.

En una estructura plana representada en el plano xz los grados de libertad $\{u_\alpha\}$ corresponden a los desplazamientos desconocidos u_x de los nudos de la estructura. Los grados de libertad $\{u_\gamma\}$ corresponden a los desplazamientos desconocidos u_z y a las rotaciones desconocidas θ_y de los nudos. Finalmente los grados de libertad $\{u_\beta\}$ corresponden a los desplazamientos conocidos en los apoyos.

A modo de ejemplo la Figura 3.10 muestra la numeración de los grados de libertad estáticos de un pórtico plano de 4 nudos y tres grados de libertad por nudo, siguiendo el criterio expuesto anteriormente. En este caso los grados de libertad de interés son el gl_1 y el gl_2, los grados de libertad condensados están numerados del gl_3 al gl_8 y los grados de libertad conocidos van del gl_9 al gl_{12}. En consecuencia:

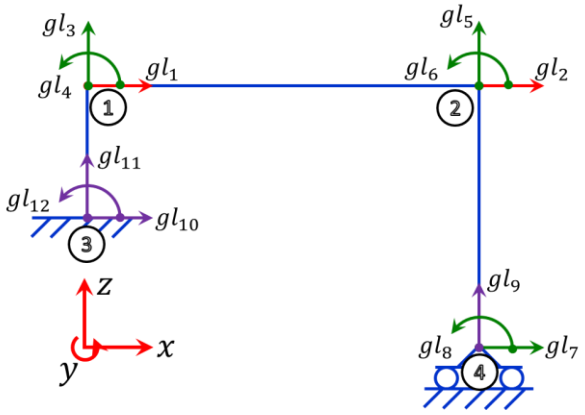


Figura 3.10. Ejemplo de numeración de los grados de libertad estáticos de un pórtico plano

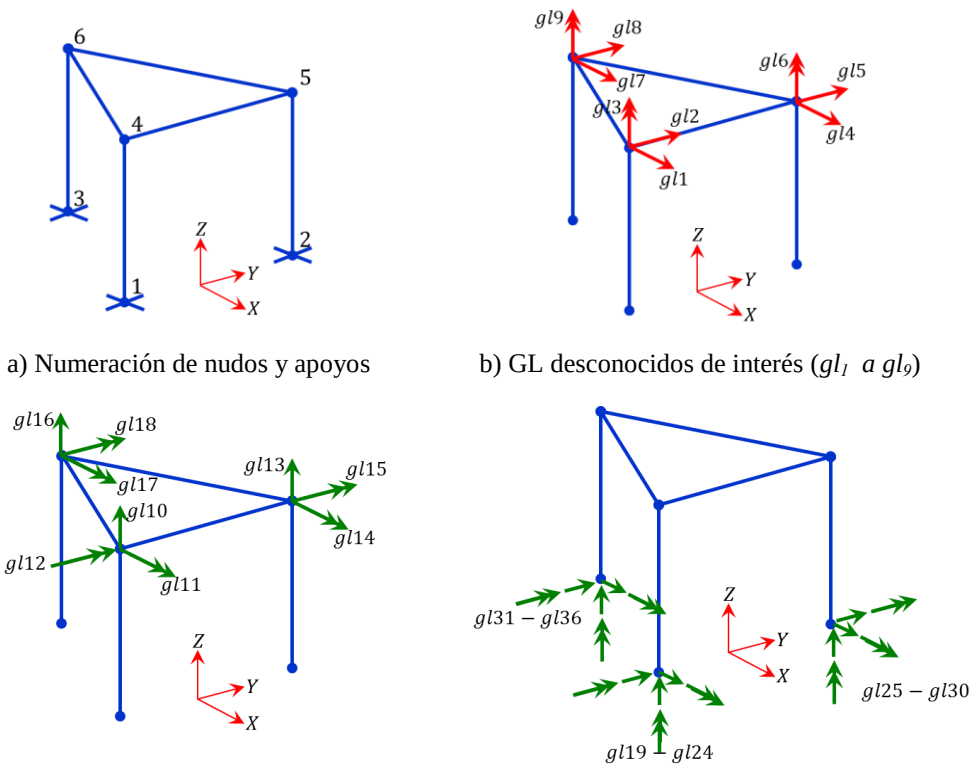
En consecuencia:

$$\{u_\alpha\} = \begin{bmatrix} u_x^{(1)} \\ u_x^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} gl_1 \\ gl_2 \end{matrix} \qquad \{u_\gamma\} = \begin{bmatrix} u_z^{(1)} \\ \theta_y^{(1)} \\ u_z^{(2)} \\ \theta_y^{(2)} \\ u_x^{(4)} \\ \theta_y^{(4)} \end{bmatrix} \begin{matrix} gl_3 \\ gl_4 \\ gl_5 \\ gl_6 \\ gl_7 \\ gl_8 \end{matrix} \qquad \{u_\beta\} = \begin{bmatrix} u_z^{(4)} \\ u_x^{(3)} \\ u_z^{(3)} \\ \theta_y^{(3)} \end{bmatrix} \begin{matrix} gl_9 \\ gl_{10} \\ gl_{11} \\ gl_{12} \end{matrix}$$

La Figura 3.11 muestra un pórtico espacial de un piso, de seis nudos y seis grados de libertad por nudo, es decir, con 36 grados de libertad estáticos en total. Los desplazamientos y rotaciones de los nudos de la base están totalmente restringidos. En ella se indica la numeración de los grados de libertad escogida según la recomendación mencionada previa-

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

mente. Se observa que de los 36 grados de libertad total, solo 9 son de interés para el análisis dinámico.



a) Numeración de nudos y apoyos

b) GL desconocidos de interés (gl_1 a gl_9)

c) GL desconocidos condensados (gl_{10} a gl_{18})

d) GL conocidos (gl_{19} a gl_{36})

Figura 3.11. Ejemplo de numeración recomendada de los grados de libertad

En particular se tiene que:

$$\{u_\alpha\} = \begin{bmatrix} u_x^{(4)} \\ u_y^{(4)} \\ \vdots \\ \theta_z^{(6)} \end{bmatrix} \begin{matrix} gl_1 \\ gl_2 \\ \vdots \\ gl_9 \end{matrix} \qquad \{u_\gamma\} = \begin{bmatrix} u_z^{(4)} \\ \theta_x^{(4)} \\ \vdots \\ \theta_y^{(6)} \end{bmatrix} \begin{matrix} gl_{10} \\ gl_{11} \\ \vdots \\ gl_{18} \end{matrix} \qquad \{u_\beta\} = \begin{bmatrix} u_x^{(1)} \\ u_y^{(1)} \\ \vdots \\ \theta_y^{(3)} \end{bmatrix} \begin{matrix} gl_{19} \\ gl_{20} \\ \vdots \\ gl_{36} \end{matrix}$$

Las acciones correspondientes a los grados de libertad también se clasifican en 3 tipos, organizadas en los siguientes subvectores:

- Acciones asociadas a grados de libertad desconocidos de interés: $\{F_\alpha\}$
- Acciones asociadas a grados de libertad desconocidos condensados: $\{F_\gamma\}$
- Acciones asociadas a grados de libertad conocidos: $\{F_\beta\}$

Si los grados de libertad estáticos de la estructura se han numerado y agrupado de la forma descrita previamente, en la ecuación matricial $\{F_s\} = [K]\{u\}$ se puede hacer la siguiente partición (Linero, 2012):

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\begin{bmatrix}\{F_\alpha\}\\ \{F_\gamma\}\\ \{F_\beta\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[K_{\propto\propto}] & [K_{\propto\gamma}] & [K_{\propto\beta}]\\ [K_{\gamma\propto}] & [K_{\gamma\gamma}] & [K_{\gamma\beta}]\\ [K_{\beta\propto}] & [K_{\beta\gamma}] & [K_{\beta\beta}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{u_\alpha\}\\ \{u_\gamma\}\\ \{u_\beta\}\end{bmatrix} \tag{3.26}$$

De la anterior igualdad se extraen las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\{F_\alpha\}=[K_{\propto\propto}]\{u_\alpha\}+[K_{\propto\gamma}]\{u_\gamma\}+[K_{\propto\beta}]\{u_\beta\} \tag{3.27}$$

$$\{F_\gamma\}=[K_{\gamma\propto}]\{u_\alpha\}+[K_{\gamma\gamma}]\{u_\gamma\}+[K_{\gamma\beta}]\{u_\beta\} \tag{3.28}$$

Si sobre la estructura solo actúan acciones asociadas a los grados de libertad desconocidos de interés, el subvector $\{F_\alpha\}$ será diferente de cero, mientras que $\{F_\gamma\}$ será igual a cero. Asimismo, en ausencia de desplazamientos relativos a la base en los apoyos, el subvector de desplazamientos $\{u_\beta\}$ también es cero.

Al despejar los desplazamientos desconocidos condensados $\{u_\gamma\}$ en función de los desplazamientos desconocidos de interés en la Ecuación (3.28):

$$\{u_\gamma\}=-[K_{\gamma\gamma}]^{-1}[K_{\gamma\alpha}]\{u_\alpha\} \tag{3.29}$$

Y al remplazar la anterior expresión en la Ecuación (3.27) se llega a una expresión que relaciona las acciones aplicadas en los grados de libertad de interés con sus desplazamientos correspondientes:

$$\begin{gathered}\{F_\alpha\}=\left([K_{\propto\propto}]-[K_{\propto\gamma}][K_{\gamma\gamma}]^{-1}[K_{\gamma\alpha}]\right)\{u_\alpha\}\\ \{F_\alpha\}=[\widetilde{K}_{\propto\propto}]\{U_\alpha\}\end{gathered} \tag{3.30}$$

donde la matriz de rigidez condensada a los grados de libertad de interés $[\widetilde{K}_{\propto\propto}]$ esta dada por la siguiente expresión:

$$[\widetilde{K}_{\alpha\alpha}]=[K_{\propto\propto}]-[K_{\propto\gamma}][K_{\gamma\gamma}]^{-1}[K_{\gamma\alpha}] \tag{3.31}$$

3.2.7. Matriz de rigidez lateral

A continuación se describe la forma en que se calcula la matriz de rigidez lateral a partir de la matriz de rigidez condensada $[\widetilde{K}_{\propto\propto}]$ y de la matriz de asociación de desplazamientos o matriz geométrica $[A]$.

La matriz geométrica relaciona los desplazamientos desconocidos de interés $\{u_\alpha\}$ de los nudos de la estructura con los desplazamientos de los puntos maestros de los diafragmas rígidos, en este caso con los desplazamientos de los centros de masa $\{u_\phi\}$. Para su deduc-

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

ción se parte de suponer que todos los nudos asociados a un mismo diafragma se desplazan horizontalmente y giran como cuerpo rígido.

De la cinemática plana de cuerpo rígido se sabe que el movimiento de cualquier punto dentro del cuerpo se obtiene a partir del movimiento de otro punto de referencia localizado dentro del cuerpo (Hibbeler, 2010). Por lo tanto, los desplazamientos desconocidos de interés se calculan a partir de los desplazamientos del nudo maestro de cada diafragma al cual están asociados los nudos.

Cuando el centro de masa del diafragma i se desplaza las cantidades $(u_\phi)_x^{(i)}, (u_\phi)_y^{(i)}$ y $(\theta_\phi)_z^{(i)}$, el nudo j asociado al mismo diafragma se desplaza y gira en el plano horizontal las cantidades $u_x^{(i)}, u_y^{(i)}$ y $\theta_z^{(i)}$. Las relaciones entre los desplazamientos del nudo j y los desplazamientos del centro de masa i considerando rotaciones pequeñas son las siguientes (Wilson, 2002):

$$
\begin{aligned}
u_x^{(j)} &= (u_\phi)_x^{(i)} - y^{(j)}(\theta_\phi)_z^{(i)} \\
u_y^{(j)} &= (u_\phi)_y^{(i)} + x^{(j)}(\theta_\phi)_z^{(i)} \\
\theta_z^{(j)} &= (\theta_\phi)_z^{(i)}
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Se observa que los desplazamientos $u_x^{(j)}$ y $u_y^{(j)}$ del nudo j dependen de los desplazamientos del centro de masa $(u_\phi)_x^{(i)}$ y $(u_\phi)_y^{(i)}$, asi como de las coordenadas $x^{(j)}$ e $y^{(j)}$ del nudo respecto al centro de masa, como lo muestra la Figura 3.12.

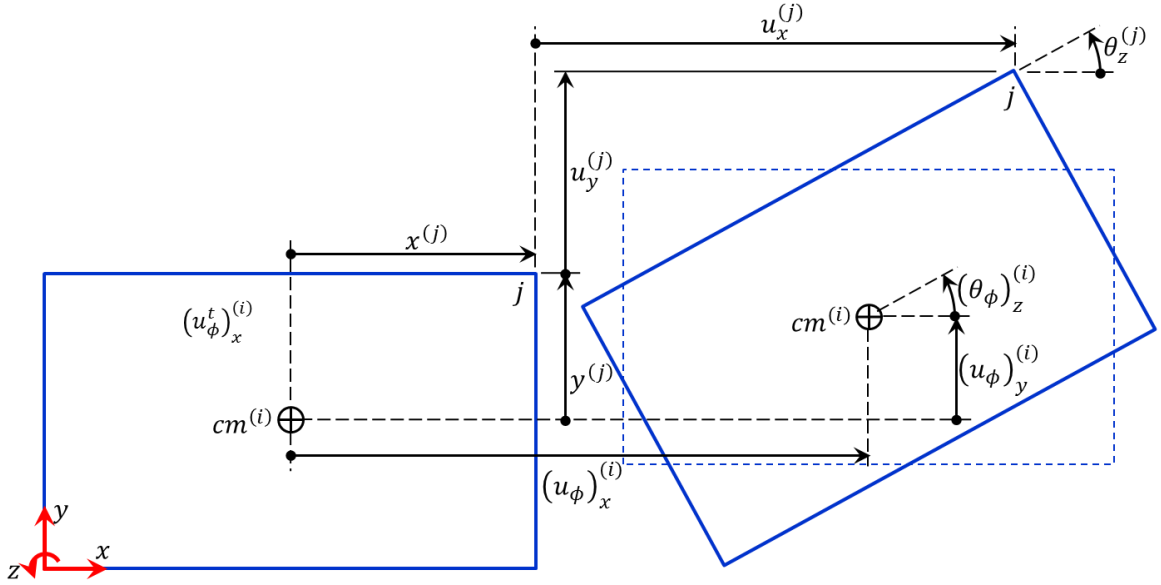


Figura 3.12. Relación entre desplazamientos del nudo j y desplazamientos del centro de masa i

Las anteriores relaciones se escriben en forma matricial de la siguiente manera:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\{u^{(j)}\} = [A^{(j)}]\{u_\phi^{(i)}\} \qquad \begin{Bmatrix} u_x^{(j)} \\ u_y^{(j)} \\ \theta_z^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y^{(j)} \\ 0 & 1 & x^{(j)} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_\phi)_x^{(i)} \\ (u_\phi)_y^{(i)} \\ (\theta_\phi)_z^{(i)} \end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

Donde el vector $\{u^{(j)}\}$ contiene los desplazamientos desconocidos de interés del nudo j, $[A^{(j)}]$ es la matriz de asociación de desplazamientos del mismo nudo y $\{u_\phi^{(i)}\}$ son los desplazamientos del centro de masa del diafragma i.

La siguiente expresión relaciona los desplazamientos de interés $\{u_\alpha\}$ de todos los nudos, y los desplazamientos de los centros de masa $\{u_\phi\}$ de todos los diafragmas rígidos:

$$\{u_\alpha\} = [A]\{u_\phi\} \tag{3.34}$$

La expresión (3.34) se conoce como la *ecuación de asociación de desplazamientos*. En esta $[A]$ es la matriz de asociación de desplazamientos de la estructura. En esta matriz el número de filas coincide con el número de grados de libertad de interés y el número de columnas coincide con el número de grados de libertad dinámicos de la estructura.

A modo de ejemplo, para una estructura espacial de 2 diafragmas rígidos, 3 grados de libertad por diafragma y 6 nudos de 3 grados de libertad de interés cada uno, el tamaño de la matriz $[A]$ de asociación de desplazamientos sería:

$$mxn = (6nudos\ x\ 3\ GL\ interés/nudo)x(2\ diafragmas\ x\ 3\ GL/diafragma) = 18x6$$

La forma de la matriz $[A]$ depende de cómo se numeren los diafragmas rígidos. Para aclarar este punto a continuación se muestran dos posibles formas de plantear la ecuación de asociación de desplazamientos para la estructura mostrada en la Figura 3.13 de dos niveles con todos sus nudos (*exceptuando los nudos de la base*) asociados a dos diafragmas rígidos, de los cuales 6 nudos pertenecen al diafragma del segundo nivel y 4 nudos pertenecen al diafragma de cubierta. En este caso los nudos 10 y 16 son los centros de masa de segundo piso y de cubierta respectivamente y $[A^{(j)}]$ es la matriz de asociación de desplazamientos del nudo j.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

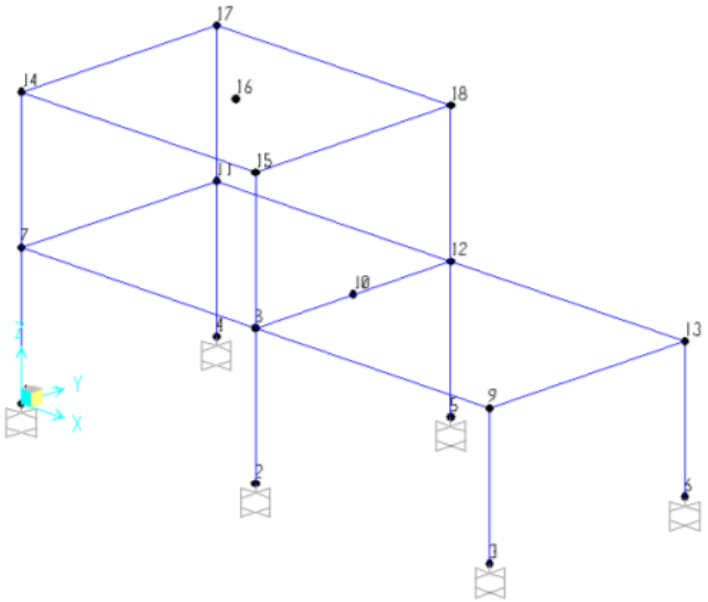


Figura 3.13. Estructura tomada como ejemplo para mostrar la formación de la matriz de asociación de desplazamientos de la estructura

$$\begin{bmatrix} \{u_\alpha{}^{(7)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(8)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(9)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(11)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(12)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(13)}\} \\ \hline \{u_\alpha{}^{(14)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(15)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(17)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(18)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^7] & [0] \\ [A^8] & [0] \\ [A^9] & [0] \\ [A^{11}] & [0] \\ [A^{12}] & [0] \\ [A^{13}] & [0] \\ \hline [0] & [A^{14}] \\ [0] & [A^{15}] \\ [0] & [A^{17}] \\ [0] & [A^{18}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_\phi{}^{(10)}\} \\ \hline \{u_\phi{}^{(16)}\} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \{u_\alpha{}^{(14)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(15)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(17)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(18)}\} \\ \hline \{u_\alpha{}^{(7)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(8)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(9)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(11)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(12)}\} \\ \{u_\alpha{}^{(13)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^{14}] & [0] \\ [A^{15}] & [0] \\ [A^{17}] & [0] \\ [A^{18}] & [0] \\ \hline [0] & [A^7] \\ [0] & [A^8] \\ [0] & [A^9] \\ [0] & [A^{11}] \\ [0] & [A^{12}] \\ [0] & [A^{13}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_\phi{}^{(16)}\} \\ \hline \{u_\phi{}^{(10)}\} \end{bmatrix}$$

Las anteriores expresiones muestran las diferencias en la matriz $[A]$ dependiendo de la forma como se numeren los desplazamientos de los centros de masa.

El diafragma es un cuerpo rígido en el plano horizontal, sobre el que actúan las acciones correspondientes a los grados de libertad de interés $\{F_\alpha\}$ en los nudos. Las acciones en los nudos se reemplazan por acciones resultantes actuando en los centros de masa $\{F_{s\phi}\}$ trasladando por estática cada una las fuerzas y los momentos aplicados en los nudos a los centros de masa de los diafragmas, como lo muestra la Figura 3.14 para el nudo j del diafragma i.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

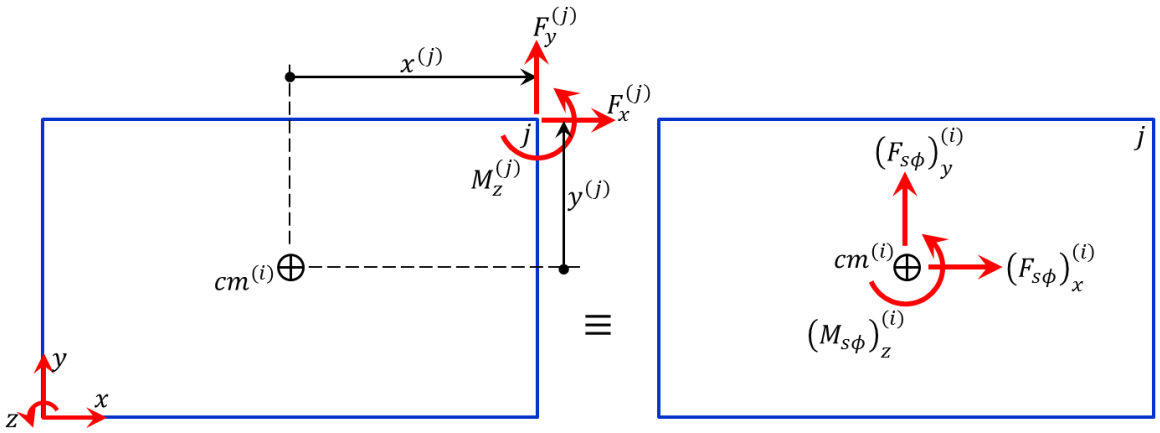


Figura 3.14. Acciones correspondientes a los grados de libertad de interés del nudo j trasladadas al centro de masa del diafragma respectivo

Las acciones aplicadas en el nudo j trasladadas al centro de masa del diafragma i serían:

$$\begin{aligned} (F_{s\phi})_x^{(i)} &= F_x^{(j)} \\ (F_{s\phi})_y^{(i)} &= F_y^{(j)} \\ (M_{s\phi})_z^{(i)} &= -y^{(j)}F_x^{(j)} + x^{(j)}F_y^{(j)} + M_z^{(j)} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Las anteriores ecuaciones se escriben matricialmente de la siguiente manera:

$$\{F_{s\phi}\} = [B^{(j)}]\{F^{(j)}\} \qquad \begin{Bmatrix} (F_{s\phi})_x^{(i)} \\ (F_{s\phi})_y^{(i)} \\ (M_{s\phi})_z^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y^{(j)} & x^{(j)} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x^{(j)} \\ F_y^{(j)} \\ M_z^{(j)} \end{Bmatrix} \tag{3.36}$$

Al comparar la matriz $[B^{(j)}]$ de la Ecuación (3.36) con la matriz $[A^{(j)}]$ de la Ecuación (3.33) se observa que la primera coincide con la transpuesta de la segunda y por lo tanto:

$$[B^{(j)}] = [A^{(j)}]^T \tag{3.37}$$

Y por lo tanto:

$$[B] = [A]^T \tag{3.38}$$

Trasladando las acciones aplicadas en todos los nudos a los centros de masa de los respectivos diafragmas se obtiene la siguiente *ecuación de asociación de acciones equivalentes*, que relaciona las acciones equivalentes trasladadas a los centros de masa $\{F_{s\phi}\}$ con las acciones aplicadas en los nudos, correspondientes a los grados de libertad de interés $\{F_\alpha\}$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\{F_{s\phi}\} = [B]\{F_\alpha\} = [A]^T\{F_\alpha\} \tag{3.39}$$

Para el edificio de la Figura 3.13, en el que se numera primero el diafragma de segundo piso (*nudo 10*) y luego el de cubierta (*nudo 16*), la ecuación que asocia acciones equivalentes aplicadas en centros de masa con acciones aplicadas en los grados de libertad de interés quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \{F_{s\phi}^{(10)}\} \\ \hline \{F_{s\phi}^{(16)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B^{(7)}] & [B^{(8)}] & [B^{(9)}] & [B^{(11)}] & [B^{(12)}] & [B^{(13)}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [B^{(14)}] & [B^{(15)}] & [B^{(17)}] & [B^{(18)}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{F^{(7)}\} \\ \{F^{(8)}\} \\ \{F^{(9)}\} \\ \{F^{(11)}\} \\ \{F^{(12)}\} \\ \{F^{(13)}\} \\ \hline \{F^{(14)}\} \\ \{F^{(15)}\} \\ \{F^{(17)}\} \\ \{F^{(18)}\} \end{bmatrix}$$

Las acciones equivalentes aplicadas en los centros de masa $\{F_{s\phi}\}$ se relacionan con los desplazamientos $\{u_\phi\}$ correspondientes de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} \{F_{s\phi}\} = [A]^T\{F_\alpha\} = [A]^T[\widetilde{K}_{\propto\propto}]\{U_\alpha\} = ([A]^T[\widetilde{K}_{\propto\propto}][A])\{u_\phi\} \\ \{F_{s\phi}\} = [K_\phi]\{u_\phi\} \end{gathered} \tag{3.40}$$

donde $[K_\phi]$ es la matriz de rigidez lateral de la estructura, necesaria para el análisis dinámico. Esta matriz se obtiene con el siguiente triple producto matricial:

$$[K_\phi] = [A]^T[\widetilde{K}_{\propto\propto}][A] \tag{3.41}$$

3.3. Coordenadas de centros de rigidez de diafragmas

El centro de rigidez corresponde al punto dentro de un diafragma rígido plano donde se centraliza la rigidez de la estructura (CSI, 2012).

Cuando se aplican fuerzas laterales en el centro de rigidez de uno de los diafragmas rígidos de una estructura, este solamente experimenta movimientos de traslación, aunque los diafragmas restantes experimenten traslación y rotación de manera simultánea debido al acoplamiento en planta y en altura de la estructura.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Por otro lado la posición del centro de rigidez es independiente de las cargas aplicadas. Solamente es función de las propiedades de la estructura. A continuación se describe un procedimiento que permite calcular las coordenadas del centro de rigidez de cada diafragma de una estructura espacial, con base en los coeficientes de la matriz de rigidez lateral invertida $[K_\phi]^{-1}$ o de la *matriz de flexibilidad lateral*.

3.3.1. Posición del centro de rigidez en dirección Y

Sí se aplica una fuerza F_x en el centro de masa de un diafragma, en él se producen desplazamientos en direcciones x e y, así como una rotación θ_{zx} en dirección z. Si esta fuerza se traslada al centro de rigidez, para que genere el mismo efecto sobre el diafragma se debe adicionar el momento que produce la fuerza respecto al centro de rigidez, es decir $M_{zx} = F_x * e_y$ positivo.

Si al diafragma se le aplica un momento M_z, se producirá una rotación denominada θ_{zz}. La relación M_z/θ_{zz} corresponde a la rigidez torsional del diafragma.

Para obtener una rotación de igual magnitud pero de sentido contrario a θ_{zx}, hay que aplicar en el diafragma un momento proporcional a M_z que debe ser igual a:

$$M'_z = -\frac{M_z}{\theta_{zz}}\theta_{zx} \tag{3.42}$$

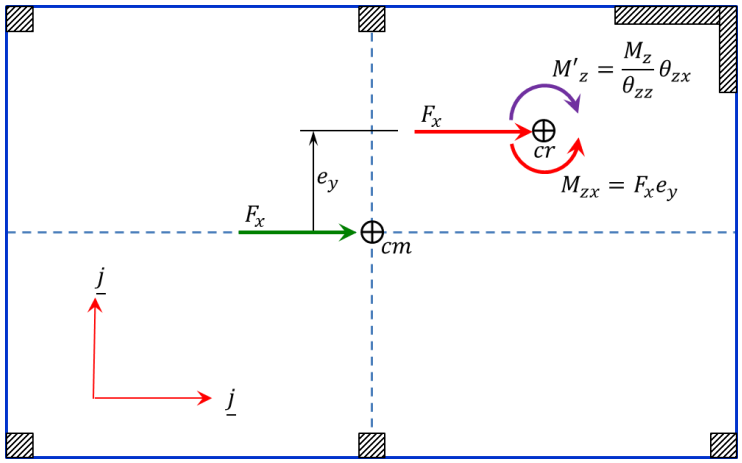


Figura 3.15. Posición del centro de rigidez en dirección y

Al calcular la suma de momentos respecto al centro de rigidez del diafragma, este debe ser igual a cero para que solo haya desplazamiento en dirección x por la fuerza trasladada. Por lo tanto:

$$F_x e_y - \frac{M_z}{\theta_{zz}}\theta_{zx} = 0 \rightarrow F_x e_y = \frac{M_z}{\theta_{zz}}\theta_{zx} \tag{3.43}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Si F_x y M_z son unitarios, entonces la posición en dirección y del centro de rigidez respecto al centro de masa se calcula con la siguiente expresión:

$$e_y = \frac{M_z}{\theta_{zz}} \frac{\theta_{zx}}{F_x} = \frac{\theta_{zx}}{\theta_{zz}} \tag{3.44}$$

El signo positivo de la Ecuación (3.44) indica que si la rotación que produce la fuerza F_x aplicada en el centro de masa es positiva, la excentricidad e_y también es positiva, es decir, el centro de rigidez esta arriba del centro de masa. La coordenada en dirección y del centro de rigidez es entonces (Y_{cm} *es la coordenada en direccción* y *del centro de masa*):

$$Y_{cr} = Y_{cm} + e_y \tag{3.45}$$

3.3.2. Posición del centro de rigidez en dirección X

El cálculo de la coordenada en dirección x global de cada centro de rigidez se realiza de forma similar a como se realiza para la dirección y.

Sí se aplica una fuerza F_y en el centro de masa de un diafragma, en él se producen desplazamientos en direcciones x e y, así como una rotación θ_{zy} en dirección z. Si esta fuerza se traslada al centro de rigidez, para que genere el mismo efecto sobre el diafragma se debe adicionar el momento que produce la fuerza respecto al centro de rigidez, en este caso $M_{zy} = -F_y * e_x$ negativo.

Nuevamente si al diafragma se le aplica un momento M_z, se producirá una rotación denominada θ_{zz}. La relación M_z/θ_{zz} corresponde a la rigidez torsional del diafragma.

Como en el caso anterior, para obtener una rotación de igual magnitud pero de sentido contrario a θ_{zy}, hay que aplicar en el diafragma un momento proporcional a M_z que debe ser igual a:

$$M'_z = -\frac{M_z}{\theta_{zz}} \theta_{zy} \tag{3.46}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

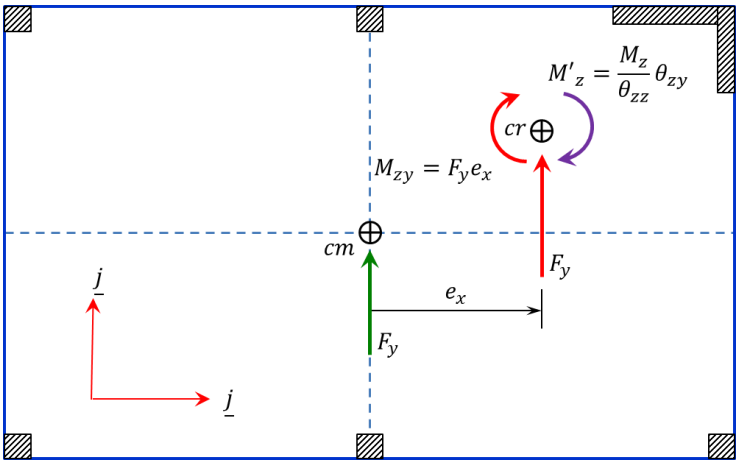


Figura 3.16. Posición del centro de rigidez en dirección x

En este caso el signo negativo tiene que ver con que la rotación θ_{zy} va a ser negativa cuando se aplique la fuerza F_y en dirección positiva, y suponiendo que el centro de rigidez está a la derecha del centro de masa.

Al calcular la suma de momentos respecto al centro de rigidez del diafragma, este debe ser igual a cero para que solo haya desplazamiento en dirección y por la fuerza trasladada. Por lo tanto:

$$-F_y e_x - \frac{M_z}{\theta_{zz}}\theta_{zy} = 0 \rightarrow F_y e_x = -\frac{M_z}{\theta_{zz}}\theta_{zy} \tag{3.47}$$

Si F_y y M_z son unitarios, entonces la posición en dirección x del centro de rigidez respecto al centro de masa se calcula con la siguiente expresión:

$$e_x = -\frac{M_z}{\theta_{zz}}\frac{\theta_{zy}}{F_y} = -\frac{\theta_{zy}}{\theta_{zz}} \tag{3.48}$$

El signo negativo de la expresión (3.48) indica que si la rotación que produce la fuerza F_y es positiva, la excentricidad e_x es negativa, es decir, el centro de rigidez esta a la izquierda del centro de masa y viceversa. La coordenada en dirección x del centro de rigidez es entonces (X_{cm} *es la coordenada en direccción X del centro de masa*):

$$X_{cr} = X_{cm} + e_x \tag{3.49}$$

El procedimiento para calcular las coordenadas de los centros de rigidez se resume en los siguientes pasos:

- Calcular las rotaciones unitarias θ_{zz}, θ_{zx} y θ_{zy} de cada diafragma rígido.
- Calcular las excentricidades e_x y e_y entre el centro de masa y de rigidez de cada diafragma.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

- Calcular las coordenadas de los centros de rigidez sumando a las coordenadas de los centros de masa las excentricidades e_x y e_y.

3.3.3. Rotaciones unitarias a partir de la matriz de rigidez lateral

Las rotaciones θ_{zz}, θ_{zx} y θ_{zy} de cada diafragma se obtienen de la matriz de rigidez lateral invertida $[K_\phi]^{-1}$ o matriz de flexibilidad lateral $[D_\phi]$. La ecuación que relaciona desplazamientos con acciones en el diafragma se muestra a continuación:

$$\{u_\phi\} = [K_\phi]^{-1}\{F_\phi\} \; o \; \{u_\phi\} = [D_\phi]\{F_\phi\} \tag{3.50}$$

Cada coeficiente D_{ij} de la matriz de flexibilidad lateral corresponde al desplazamiento o rotación de determinado centro de masa en dirección i cuando se aplica una acción unitaria en el grado de libertad j, mientras las acciones aplicadas en el resto de grados de libertad son cero.

Las rotaciones θ_{zz}, θ_{zx} y θ_{zy} del centro de masa i están localizadas en la fila correspondiente al grado de libertad θ_{cm} y en las columnas correspondientes a los grados de libertad $u_{\phi x}^{(i)}, u_{\phi y}^{(i)}$ y $\theta_{\phi z}^{(i)}$ del diafragma i.

A modo de ejemplo la Ecuación (3.51) muestra la matriz de flexibilidad de una estructura con dos diafragmas rígidos, donde los grados de libertad de cada diafragma se ordenaron como $u_{\phi x}^{(1)}, u_{\phi y}^{(1)}$ y $\theta_{\phi z}^{(1)}$ del primer diafragma y $u_{\phi x}^{(2)}, u_{\phi y}^{(2)}$ y $\theta_{\phi z}^{(2)}$ del segundo diafragma.

En este caso las rotaciones θ_{zz}, θ_{zx} y θ_{zy} del Diafragma 1 corresponden a los coeficientes D_{31}, D_{32} y D_{33} y las rotaciones θ_{zz}, θ_{zx} y θ_{zy} del Diafragma 2 corresponden a los coeficientes D_{64}, D_{65} y D_{66} respectivamente.

$$[D_\phi] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

3.4. Frecuencias, periodos y modos de vibración natural

A continuación se describen los modos, las frecuencias y los periodos de vibración natural como propiedades dinámicas de la estructura en condiciones de vibración libre no amortiguada que se utilizan en los métodos de análisis dinámico elástico por superposición modal. Asimismo se describen dos métodos para su obtención, basados en las matrices de masa concentrada y de rigidez lateral.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

3.4.1. Modos de vibración natural

Cuando a las masas de un sistema sin amortiguamiento de varios grados de libertad dinámicos se le imponen unas condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad denominadas $\{u(0)\} = \{u_0\}$ y $\{\dot{u}(0)\} = \{\dot{u}_0\}$ respectivamente, y no se aplican acciones externas de forma que $\{F_{ext}(t)\} = \{0\}$, el sistema queda sometido a vibración libre no amortiguada.

El desplazamiento de cada masa sigue un comportamiento cíclico, aunque algo diferente al de un sistema de un solo grado de libertad dinámico en vibración libre, en el que el desplazamiento de la única masa del sistema describe un movimiento armónico simple. En un sistema de varios grados de libertad dinámicos cada masa se desplaza siguiendo un patrón más complejo, pero que mantiene su carácter periódico.

Adicionalmente la relación entre los desplazamientos de dos masas i y j cualquiera, es decir, u_i/u_j es diferente en cada instante de tiempo y los desplazamientos máximos de las masas también se dan en instantes de tiempo diferentes (Chopra, 2001).

Si a la misma estructura se le imponen unas distribuciones apropiadas de desplazamientos $\{u(0)\}$ y se permite su vibración libre, todas las masas del sistema se desplazarán describiendo un movimiento armónico simple con las siguientes características:

- Todas las masas pasan simultáneamente por su posición de equilibrio ($u_i = 0$), en el mismo instante de tiempo.
- Todas las masas experimentan simultáneamente su desplazamiento máximo en el mismo instante de tiempo.
- La forma de la estructura deflectada será la misma en cada instante de tiempo porque la relación entre los desplazamientos u_i/u_j será constante.

Cada conjunto especial de desplazamientos iniciales corresponde a un modo de vibración natural $\{\phi_i\}$ y el tiempo en el que las masas completan un ciclo en su movimiento, pasando dos veces por la posición de equilibrio, se denomina periodo de vibración T_i.

Las frecuencias y los modos de vibración natural representan las propiedades de vibración natural de la estructura cuando se somete a vibración libre, y dependen solamente de la distribución de masa y rigidez de la estructura (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998).

Por definición la relación entre frecuencia y periodo de vibración es la siguiente:

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \tag{3.52}$$

donde T_i es el periodo de vibración en segundos y ω_i es la frecuencia natural de vibración, en rad/s, asociadas al modo de vibración $\{\phi_i\}$.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

La Figura 3.17 muestra esquemáticamente el desplazamiento de las masas de una estructura plana de tres grados de libertad, cuando se dan desplazamientos iniciales a las masas proporcionales al primer modo de vibración natural.

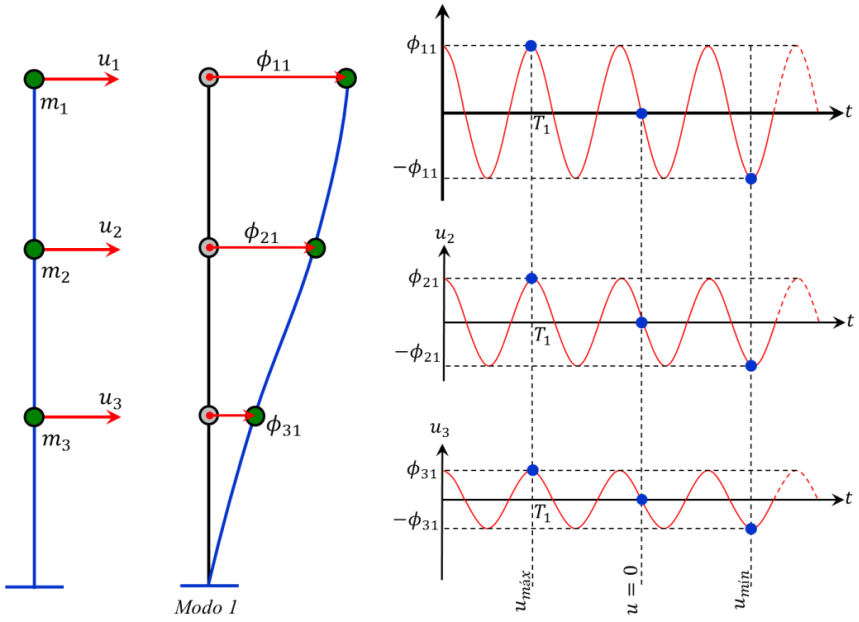


Figura 3.17. Vibración libre no amortiguada de un sistema elástico en su primer modo de vibración. Adaptada de Chopra (2001)

El número total de modos de vibración coincide con el número de grados de libertad dinámicos del sistema. La Figura 3.18 esquematiza las formas de los tres posibles modos de vibración natural de una estructura plana de tres grados de libertad dinámicos.

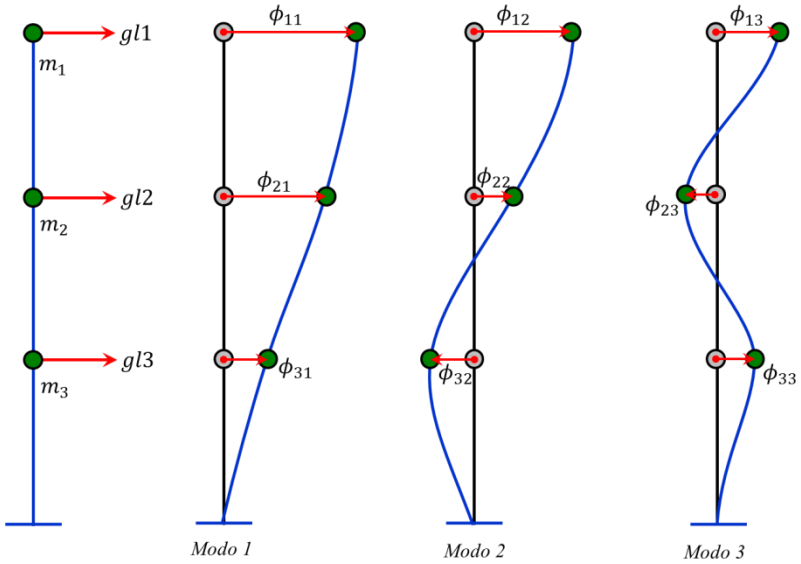


Figura 3.18. Modos de vibración de una estructura plana de 3 grados de libertad dinámicos

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Para el tipo de estructuras estudiadas en esta tesis, el número de modos de vibración coincide con el número de grados de libertad de los diafragmas. Además por lo general los modos de vibración se ordenan de forma descendente, es decir, al primer modo le corresponde el mayor periodo de vibración o la menor frecuencia, mientras que al último modo le corresponde el menor periodo de vibración o la mayor frecuencia.

3.4.2. Solución de las ecuaciones de movimiento para el caso de vibración libre no amortiguada

La ecuación diferencial que rige el movimiento de un sistema de varios grados de libertad sometido a vibración libre no amortiguada es la siguiente (Bathe, 1996a; Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998):

$$[m]\{\ddot{u}_\phi(t)\} + [k_\phi]\{u_\phi(t)\} = \{0\} \tag{3.53}$$

donde $[m]$ es la matriz de masa, $[k_\phi]$ es la matriz de rigidez lateral, $\{\ddot{u}_\phi(t)\}$ es el vector de aceleraciones y $\{u_\phi(t)\}$ es el vector de desplazamientos de los grados de libertad dinámicos de la estructura en cada instante de tiempo.

La anterior expresión es una forma particular de la Ecuación (2.61) que describe el movimiento de sistemas elásticos de varios grados de libertad cuando no hay acciones externas aplicadas, es decir, cuando $\{F_{ext}(t)\} = -[m][\gamma]\{\ddot{u}_g(t)\} = 0$, y además no se consideran acciones de amortiguamiento viscoso, es decir, cuando $[c]\{\dot{u}_\phi(t)\} = 0$. Solamente se imponen condiciones iniciales de movimiento en $t = 0$.

La Ecuación (3.53) también representa un sistema de N ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden y de coeficientes constantes, que generalmente están acopladas por la matriz de rigidez lateral, teniendo en cuenta que la matriz de masa es diagonal cuando las ecuaciones de movimiento se plantean en los centros de masa de los diafragmas.

La solución de la Ecuación (3.53) corresponde al vector $\{u_\phi(t)\}$ de desplazamientos de los centros de masa en función del tiempo. Se asume que el vector de desplazamientos $\{u_\phi\}$ del modo de vibración i equivale al producto de una función $\{\phi_i\}$ constante en el tiempo, y una función $\eta_i(t)$ variable en el tiempo (Chopra, 2001), es decir:

$$\{u_\phi\} = \{\phi_i\}\eta_i(t) \tag{3.54}$$

La solución de la parte variable del desplazamiento $\{u_\phi\}$ tiene la siguiente forma, por tratarse de un movimiento armónico simple:

$$\eta_i(t) = A_i cos(\omega_i t) + B_i sen(\omega_i t) \tag{3.55}$$

Donde A_i y B_i son constantes que se obtienen aplicando condiciones iniciales en $t = 0$. Por lo tanto:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\{u_\phi\} = \{\phi_i\}\eta_i(t) = \{\phi_i\}\big(A_i cos(\omega_i t) + B_i sen(\omega_i t)\big) \tag{3.56}$$

La segunda derivada de $\{u_\phi\}$ sería:

$$\begin{gathered}\{\ddot{u}_\phi\} = \{\phi_i\}\ddot{\eta}_i(t) = -\omega_i^2\{\phi_i\}\big(A_i cos(\omega_i t) + B_i sen(\omega_i t)\big) \\ \{\ddot{u}_\phi\} = -\omega_i^2\{\phi_i\}\eta_i(t)\end{gathered} \tag{3.57}$$

Al sustituir $\{u_\phi\}$ y $\{\ddot{u}_\phi\}$ en la Ecuación (3.53) y reorganizando, se llega a la siguiente expresión:

$$\Big[[k_\phi]\{\phi_i\} - \omega_i^2[m]\{\phi_i\}\Big]\eta_i(t) = \{0\} \tag{3.58}$$

La solución no trivial de la anterior ecuación, cuando $\eta_i(t)$ es diferente de cero, corresponde a los valores de ω_i^2 y $\{\phi_i\}$ que satisfacen la siguiente igualdad:

$$[k_\phi]\{\phi_i\} = \omega_i^2[m]\{\phi_i\} \tag{3.59}$$

La anterior igualdad corresponde al *problema de valores propios* (Bathe, 1996a; Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998). De su solución se obtienen los *valores propios* o frecuencias de vibración natural al cuadrado ω_i^2 y los *vectores propios* o modos de vibración natural $\{\phi_i\}$ de la estructura.

3.4.3. Solución analítica del problema de valores propios

Si el sistema analizado posee pocos grados de libertad dinámicos, los modos y las frecuencias naturales de vibración se obtienen igualando el determinante de la matriz $[[k_\phi] - \omega_i^2[m]]$ a cero, con lo que se llega al denominado *polinomio característico* en el que las incógnitas son los valores de ω_i^2. Estas incognitas se resuelven para luego remplazarlas una a una en la ecuación $[[k_\phi] - \omega_i^2[m]]\{\phi_i\} = 0$ y así obtener cada modo de vibración $\{\phi_i\}$.

A modo de ejemplo se presenta el cálculo de las frecuencias y de los modos de vibración natural del sistema de dos grados de libertad dinámicos mostrado en la Figura 3.19.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

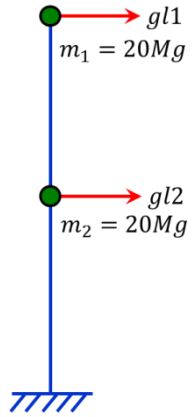


Figura 3.19. Sistema dinámico utilizado como ejemplo

Las matrices de masa y rigidez lateral del sistema son las siguientes (*masas en* Mg, *rigideces en* kN/m):

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1550 & -3857 \\ -3857 & 12330 \end{bmatrix} \qquad [m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

La matriz $[k_\phi] - \omega_i^2[m]$ tiene la siguiente forma:

$$[k_\phi] - \omega_i^2[m] = \begin{bmatrix} k_{11} - \omega_i^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega_i^2 m_2 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico o determinante de la anterior matriz igualado a cero es:

$$(k_{11} - \omega_i^2 m_1)(k_{22} - \omega_i^2 m_2) - k_{21}k_{12} = 0$$

$$m_1 m_2 (\omega_i^2)^2 - (k_{11}m_2 - k_{22}m_1)\omega_i^2 + (k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12}) = 0$$

Las dos raíces del polinomio característico serían:

$$\omega_i^2 = \frac{(k_{11}m_2 + k_{22}m_1) \pm \sqrt{(k_{11}m_2 + k_{22}m_1)^2 - 4m_1m_2(k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12})}}{2m_1m_2}$$

Remplazando los valores numéricos las frecuencias de vibración natural son:

$$\omega_1 = 3.95 rad/s \qquad \omega_2 = 26.05 rad/s$$

Para obtener los modos de vibración se remplaza cada frecuencia de vibración obtenida anteriormente en la ecuación $[[k_\phi] - \omega_i^2[m]]\{\phi_i\} = 0$. Para el primer modo de vibración al que le corresponde la frecuencia más pequeña:

$$([k] - \omega_1^2[m])\{\phi_i\} = \begin{bmatrix} k_{11} - \omega_1^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega_1^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La anterior ecuación matricial se compone de dos ecuaciones lineales homogéneas donde las incógnitas son ϕ_{11} y ϕ_{21}. Para que exista una solución no trivial ($\phi_{11} \neq 0$ y $\phi_{21} \neq$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

0) se debe dar un valor cualquiera a una de las dos incógnitas para poder calcular la otra. Si se supone ϕ_{11} conocido entonces:

$$\phi_{21} = -\frac{k_{11} - \omega_1^2 m_1}{k_{12}} \phi_{11}$$

Y en general, para cualquier otro modo *i*:

$$\phi_{2i} = -\frac{k_{11} - \omega_i^2 m_1}{k_{12}} \phi_{1i}$$

Al suponer $\phi_{11} = \phi_{12} = 1.0$ se calculan $\phi_{21} y\ \phi_{22}$ dando como resultado:

$$\phi_{21} = 0.321 \qquad\qquad \phi_{21} = -3.116$$

Finalmente los modos de vibración natural del sistema son los siguientes. La Figura 3.20 los muestra esquemáticamente.

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.321 \end{Bmatrix} \qquad\qquad \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3.116 \end{Bmatrix}$$

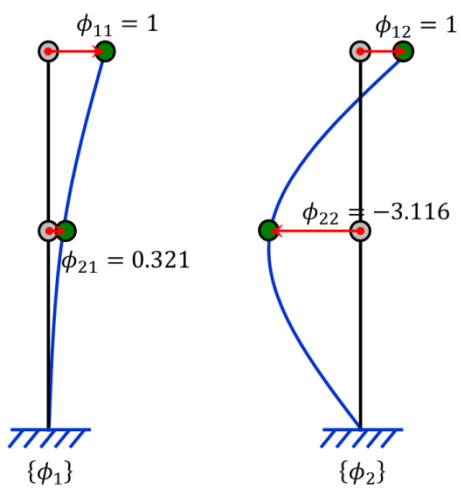


Figura 3.20. Modos de vibración natural del sistema dinámico utilizado como ejemplo

Si el sistema tiene más de 3 grados de libertad este método no es práctico y hay que recurrir a procedimientos numéricos como el *método de Jacobi generalizado* que se describe a continuación.

3.4.4. Método de Jacobi generalizado

El método de Jacobi generalizado se utiliza para resolver el problema de valores propios planteado de la siguiente manera:

$$[k_\phi][\Phi] = [m][\Phi][\Omega^2] \tag{3.60}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Donde $[\Phi]$ es la matriz de modos de vibración (*vectores propios*) y $[\Omega^2]$ es una matriz diagonal que contiene las frecuencias de vibración al cuadrado (*valores propios*). En la matriz $[\Phi]$ cada columna corresponde a un modo de vibración. De igual forma, a cada valor de la diagonal de la matriz $[\Omega^2]$ le corresponde un modo de vibración, o una columna de la matriz $[\Phi]$.

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\} \quad \cdots \quad \{\phi_N\}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

El método de Jacobi generalizado consiste en encontrar una serie de matrices de transformación que diagonalicen las matrices de masa y de rigidez, reduciendo a cero los términos fuera de la diagonal (Cheng, 2001).

El método es iterativo, en una primera etapa se calculan los valores propios en un ciclo en el que se reducen a cero, al menos una vez, todos los coeficientes de las matrices $[k_\phi]$ y $[m]$ localizados fuera de la diagonal principal. Una vez se han calculado los valores propios en un ciclo, su diferencia respecto a los valores propios calculados en un ciclo anterior se compara con una tolerancia especificada. Si la diferencia es menor a la tolerancia se asumen estos valores propios como correctos, de lo contrario se vuelve a iterar hasta que el error sea aceptable.

Para cada iteración r se define una matriz de transformación denominada $[p]^{(r)}$ que consiste en una matriz identidad a la que se le adicionan los coeficientes α y γ en las posiciones p_{ij} y p_{ji} respectivamente.

$$[\mathrm{p}]^{(r)} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \gamma & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

Los coeficientes α y γ se calculan de la siguiente manera:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\alpha = \frac{D_{jj}}{D_x} \qquad \gamma = -\frac{D_{ii}}{D_x} \; donde:$$

$$D_{ii} = k_{ii}m_{ij} - k_{ij}m_{ii} \qquad D_{jj} = k_{jj}m_{ij} - k_{ij}m_{jj}$$

$$D = k_{ii}m_{jj} - k_{jj}m_{ii}$$

$$si\ D = 0 \ \rightarrow D_x = \frac{D}{2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + D_{ii}D_{jj}} \tag{3.64}$$

$$si\ D \neq 0 \ \rightarrow D_x = \frac{D}{2} + signo(D)\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + D_{ii}D_{jj}}$$

Con la matriz de transformación $[p]^{(r)}$ definida, se realizan los siguientes triples productos matriciales volviendo cero los coeficientes $k_{ij}, k_{ji}, m_{ij}\ y\ m_{ji}$:

$$[k]^{(r+1)} = [p]^{(r)t}[k]^{(r)}[p]^{(r)}$$

$$[m]^{(r+1)} = [p]^{(r)t}[m]^{(r)}[p]^{(r)} \tag{3.65}$$

La anterior transformación se realiza a todos los coeficientes fuera de la diagonal de las matrices $[k_\phi]\ y\ [m]$, con lo que se completa un ciclo *v*. Al final de cada ciclo se calculan los valores propios de la siguiente manera:

$$[\Omega^2]^{(v)} = \begin{bmatrix} \omega_1^{2[v]} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_N^{2[v]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_{11}^{(v)}}{m_{11}^{(l)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{k_{NN}^{(v)}}{m_{NN}^{(l)}} \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

La matriz de modos de vibración se recalcula en cada transformación con el siguiente producto (*para la primera transformación, r=1, la matriz* $[p]^{(r-1)}$ *es la matriz identidad*):

$$[\Phi] = [p]^{(r-1)}[p]^{(r)} \tag{3.67}$$

Finalmente se verifica la convergencia del método, comparando los valores propios calculados al final de un ciclo *v* con los calculados al final del ciclo anterior $(v-1)$. La convergencia se da si se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{\left|\omega_i^{2[v]} - \omega_i^{2[v-1]}\right|}{\omega_i^{2[v-1]}} \leq \epsilon \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{3.68}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Si la anterior desigualdad no se cumple para alguno de los valores propios, se realiza otro ciclo transformando a cero los coeficientes fuera de la diagonal principal de las matrices $[k_\phi]$ y $[m]$ y recalculando los valores propios hasta que se cumpla con el criterio de convergencia.

La matriz de modos de vibración $[\Phi]$ se ha venido calculando como el producto de las matrices de transformación. Al final del procedimiento tendrá la siguiente forma:

$$[\Phi] = [p]^{(1)}[p]^{(2)}[p]^{(3)} \dots [p]^{(l)} \tag{3.69}$$

Donde *l* es la última transformación realizada. Es usual normalizar los modos de vibración respecto a la matriz de masa de forma que:

$$[\Phi]^T[m][\Phi] = [I] \tag{3.70}$$

Los modos de vibración normalizados de esta forma se denominan *modos ortonormales*. La normalización se realiza dividiendo las amplitudes de cada modo $\{\phi^{(i)}\}$ entre la raíz cuadrada de la masa m_i correspondiente, tomada de la última matriz de masa transformada:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{11}}{\sqrt{m_1^{(l)}}} & \frac{\phi_{12}}{\sqrt{m_2^{(l)}}} & \cdots & \frac{\phi_{1N}}{\sqrt{m_N^{(l)}}} \\ \frac{\phi_{21}}{\sqrt{m_1^{(l)}}} & \frac{\phi_{22}}{\sqrt{m_2^{(l)}}} & \cdots & \frac{\phi_{2N}}{\sqrt{m_N^{(l)}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\phi_{N1}}{\sqrt{m_1^{(l)}}} & \frac{\phi_{N2}}{\sqrt{m_2^{(l)}}} & \cdots & \frac{\phi_{NN}}{\sqrt{m_N^{(l)}}} \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

Al final del procedimiento las frecuencias y los modos de vibración obtenidos por este procedimiento no siempre quedan organizados de menor a mayor (Cheng, 2001) por lo que es necesario organizarlos de forma que el primer modo (*la primera columna de la matriz* $[\Phi]$) coincida con la frecuencia de vibración más pequeña y que el último modo coincida con la frecuencia de vibración más grande.

El diagrama de flujo de la Figura 3.21 muestra de forma gráfica el procedimiento descrito previamente.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

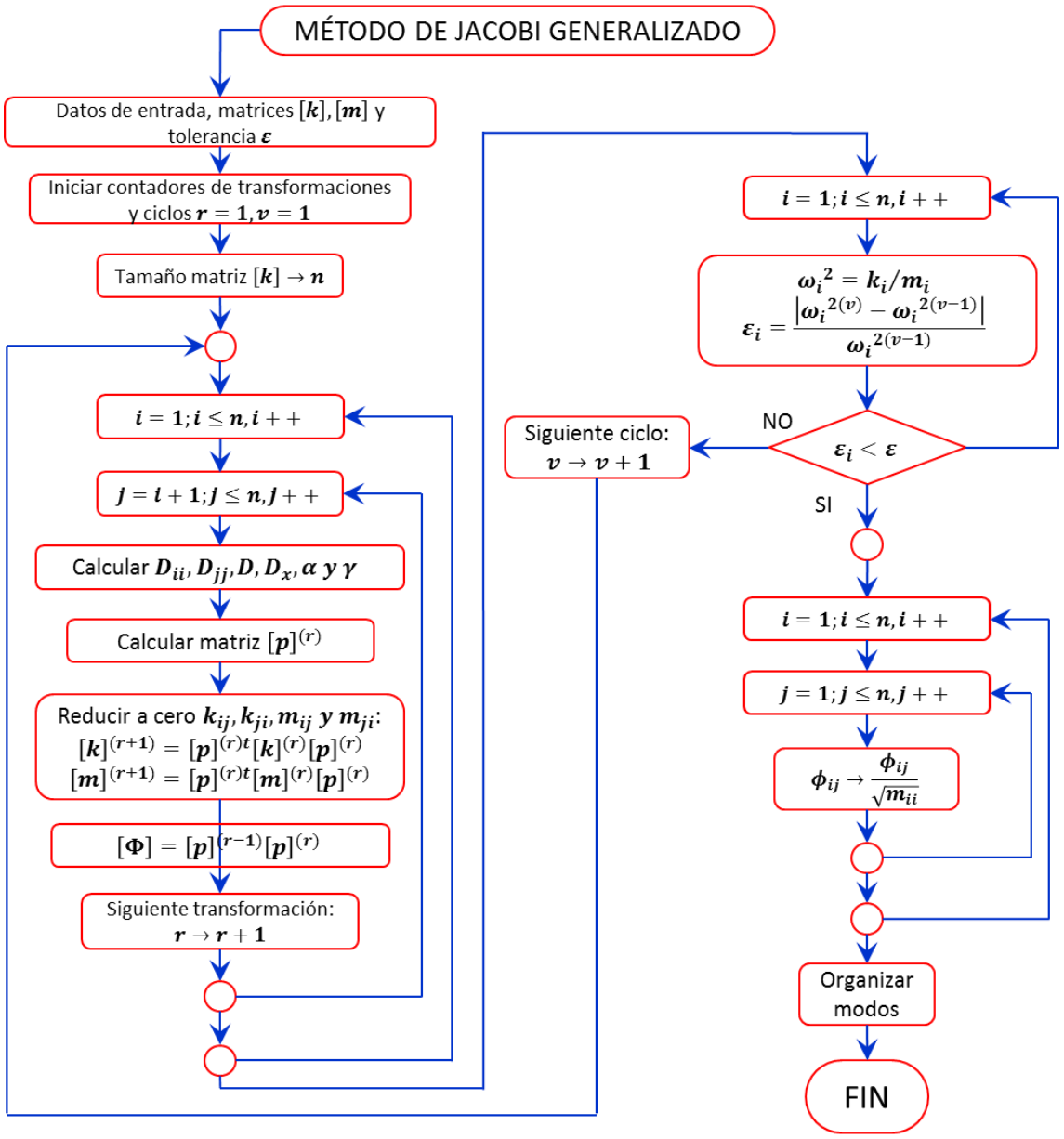


Figura 3.21. Diagrama de flujo del método de Jacobi generalizado

3.5. Acciones externas equivalentes a la aceleración de la base

A continuación se describe como construir el vector de acciones externas equivalentes a la aceleración de la base $\{F_{ext}(t)\}$ a partir de las matrices de masa $[m]$ y de influencia $[\gamma]$ y de la aceleración aplicada a la base de la estructura $\{\ddot{u}_g(t)\}$ en cada instante de tiempo.

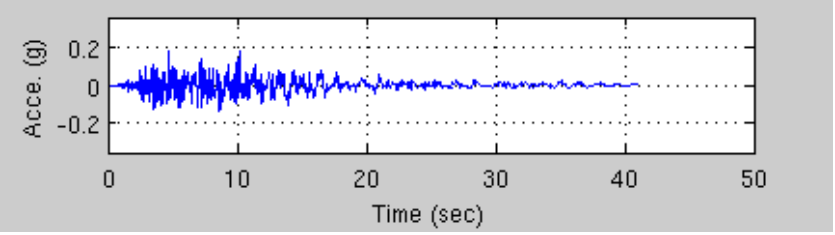
© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

3.5.1. Vector de aceleración de la base

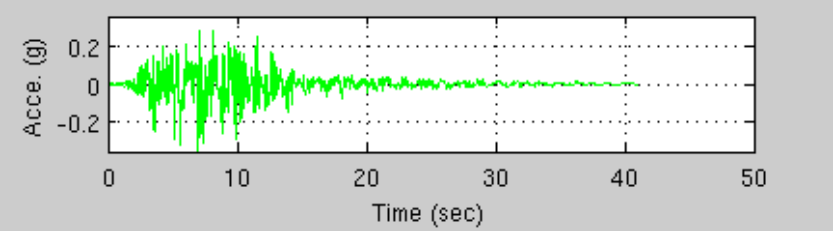
La aceleración de la base es registrada generalmente en las direcciones norte – sur, este – oeste y vertical mediante un acelerógrafo de movimiento fuerte (Chopra, 2001) o mediante un acelerómetro digital, como los que posee la red de acelerógrafos de Bogotá (SIRE).

La aceleración en cada dirección se registra normalmente como fracción de la aceleración de la gravedad y a intervalos de tiempo constantes del orden de $0.01s$ a $0.02s$ para describir de una forma más aproximada su variación en el tiempo.

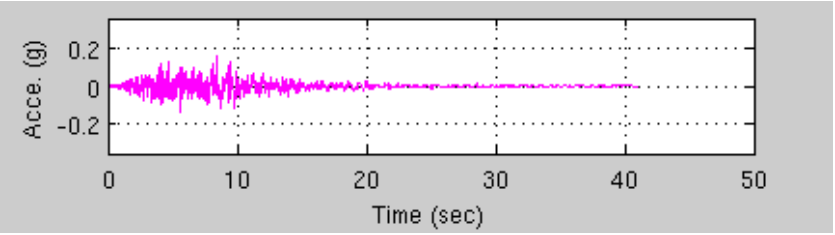
Como ejemplo a continuación se muestran los registros acelerográficos obtenidos de la estación *Kakogawa*, del sismo de Kobe del 16 de Enero de 1995, tomados de la base de datos de *Pacific Earthquake Engineering research Center* de la Universidad de Berkeley (PEER).



a) Dirección N-S (paralelo a la falla)



b) Dirección E-W (perpendicular a la falla)



c) Dirección Vertical

Figura 3.22. Sismo de Kobe de 1995 registrado por la estación Kakogawa en Japón (PEER)

El vector de aceleración de la base en cada instante de tiempo $\{\ddot{u}_g(t)\}$ se construye a partir de los registros acelerográficos. Si la estructura es plana y esta representada en el plano xz, solamente se aplica la aceleración en una dirección x. Entonces el vector de aceleración de la base es de la siguiente forma:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\{\ddot{u}_g(t)\} = \{\ddot{u}_{gx}(t)\} \tag{3.72}$$

Si la estructura es espacial, la aceleración de la base se aplica en las direcciones x e y solamente. Teniendo en cuenta que aún no se cuenta con equipos que registren la componente de aceleración angular $\{\ddot{\theta}_{gz}\}$ de un movimiento sísmico, por simplicidad esta se desprecia. Por lo tanto, el vector $\{\ddot{u}_g(t)\}$ de aceleración de la base para pórticos espaciales esta dado por la siguiente expresión:

$$\{\ddot{u}_g(t)\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_{gx}(t)\} \\ \{\ddot{u}_{gy}(t)\} \\ \{\ddot{\theta}_{gz}(t)\} = 0 \end{Bmatrix} \tag{3.73}$$

3.5.2. Matriz de influencia

La *matriz de influencia* $[\gamma]$ tiene como fin convertir a $\{\ddot{u}_g(t)\}$ en un vector colineal con los grados de libertad dinámicos de la estructura (García, 1998), en este caso con los grados de libertad de los diafragmas rígidos $\{u_\phi\}$.

El número de filas de $[\gamma]$ es igual al número de grados de libertad dinámicos de la estructura y el número de columnas es igual al número de componentes de aceleración aplicadas en la base. A cada fila le corresponde un grado de libertad y a cada columna le corresponde una dirección de análisis.

La matriz $[\gamma]$ de un pórtico plano tiene una sola columna ya que solo se considera una componente de aceleración en la base paralela al plano del pórtico (*si el pórtico se representa en el plano xz la componente de aceleración de la base es* $\ddot{u}_{gx}$). Si el pórtico es espacial la matriz $[\gamma]$ posee tres columnas, cada una asociada a las componentes de aceleración de la base $\ddot{u}_{gx}, \ddot{u}_{gy}$ y $\ddot{\theta}_{gz}$.

Los coeficientes de la matriz $[\gamma]$ toman en valor de uno (1) donde un grado de libertad dinámico es colineal con una componente de aceleración de la base, y toman el valor de cero (0) en los demás casos.

A modo de ejemplo a continuación se muestran las matrices de influencia de un pórtico plano y de un pórtico espacial de tres niveles, el primero con 3 grados de libertad dinámicos (*uno por cada nivel*) y el segundo con 9 grados de libertad dinámicos (*tres por cada nivel*). La Figura 3.23 muestra la numeración de los grados de libertad y las componentes de aceleración consideradas para cada pórtico.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

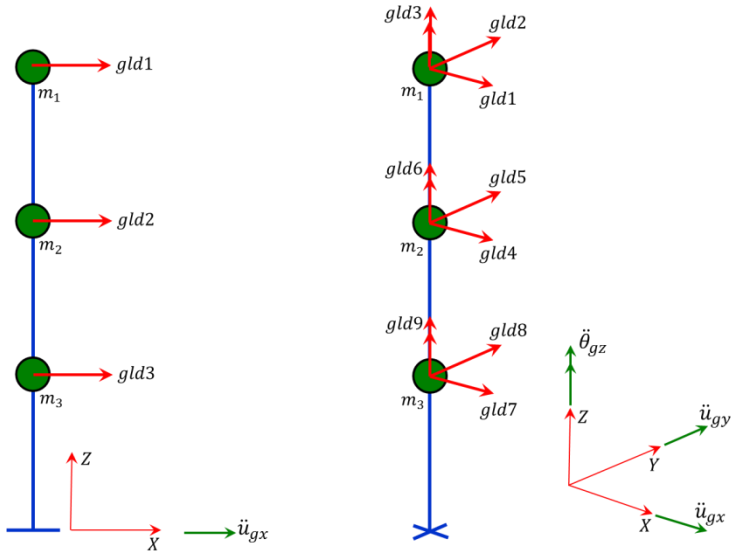


Figura 3.23. Grados de libertad dinámicos y componentes de aceleración de la base de los pórticos tomados como ejemplo

Para el pórtico plano $[\gamma]$ es un vector columna de tamaño $3X1$ lleno de unos, indicando que todos los grados de libertad dinámicos son colineales con el la componente de aceleración $\{\ddot{u}_{gx}\}$:

$$[\gamma]_{3x1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \ddot{u}_{gx} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{3.74}$$

Para el pórtico espacial, la matriz $[\gamma]$ es de tamaño $9X3$ indicando que los grados de libertad 1, 4 y 7 (*desplazamientos en dirección* x) son colineales con la componente de la aceleración de la base $\{\ddot{u}_{gx}\}$, que los grados de libertad 2, 5 y 8 (*desplazamientos en dirección* y) son colineales con la componente de la aceleración de la base $\{\ddot{u}_{gy}\}$ y que los grados de libertad 3, 6 y 9 (*rotaciones en dirección* z) son colineales con la aceleración angular de la base $\{\ddot{\theta}_{gz}\}$.

$$[\gamma]_{9x3} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \ddot{u}_{gx} & \ddot{u}_{gy} & \ddot{\theta}_{gz} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \tag{3.75}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Una interpretación alternativa de la matriz de influencia indica que $[\gamma]$ contiene los desplazamientos de los grados de libertad cuando se aplica de forma estática o lenta un desplazamiento unitario a la base en cada dirección en que esta se mueve (Chopra, 2001). En este caso toda la estructura se desplaza como un cuerpo rígido y los desplazamientos de los diafragmas van a ser iguales al desplazamiento de la base, el cual es unitario.

Para el caso del pórtico plano tomado como ejemplo, los tres diafragmas experimentan un desplazamiento unitario en dirección x si se le aplica un desplazamiento unitario a la base de forma lenta y en la misma dirección.

Para caso del pórtico espacial se observa que al aplicar un desplazamiento unitario y estático a la base en dirección x, los diafragmas se desplazan solo en esa dirección la misma cantidad unitaria, por lo que los grados de libertad 1, 4 y 7 valen 1 mientras los grados de libertad restante valen cero. Lo anterior coincide con los valores de la primera columna de la respectiva matriz $[\gamma]$. Algo similar se observa cuando se aplica un desplazamiento unitario a la base en dirección y o una rotación unitaria en dirección z.

3.5.3. Acciones externas equivalentes a la aceleración de la base

La ecuación diferencial que rige el movimiento de un sistema elástico de varios grados de libertad en vibración forzada amortiguada sometido a un conjunto de acciones externas variables en el tiempo es la siguiente:

$$[m]\{\ddot{u}_\phi(t)\} + [c]\{\dot{u}_\phi(t)\} + [k_\phi]\{u_\phi(t)\} = \{F_{ext}(t)\} \tag{3.76}$$

Mientras que la ecuación diferencial que rige el movimiento del mismo sistema cuando se le aplica una aceleración en la base es la siguiente:

$$[m]\{\ddot{u}_\phi(t)\} + [c]\{\dot{u}_\phi(t)\} + [k_\phi]\{u_\phi(t)\} = -[m][\gamma]\{\ddot{u}_g(t)\} \tag{3.77}$$

El primer caso corresponde a un sistema de base fija por lo que los vectores $\{u_\phi(t)\}, \{\dot{u}_\phi(t)\}$ y $\{\ddot{u}_\phi(t)\}$, la respuesta que se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones, es absoluta (*medida por un observador estático*). En cambio, el segundo caso corresponde a un sistema de base móvil y la respuesta que se obtiene es relativa a la base (*medida por un observador que se mueve con la base*).

Las expresiones (3.76) y (3.77) son idénticas, excepto por los términos a la derecha de la igualdad. Esto supone que para obtener la respuesta del sistema, el fenómeno real de la aceleración de la base en el sistema de base móvil se puede estudiar como un fenómeno de vibración forzada en el que al mismo sistema, ahora con la base fija, se le aplican unas acciones externas equivalentes $\{F_{ext}(t)\}$ evaluadas con la siguiente expresión:

$$\{F_{ext}(t)\} = -[m][\gamma]\{\ddot{u}_g(t)\} \tag{3.78}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

3.6. Desacople de las ecuaciones de movimiento

A continuación se describe la forma en que se desacoplan las ecuaciones de movimiento aprovechando las propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración.

3.6.1. Cambio de base

El sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas que describen el movimiento de un sistema de varios grados de libertad sometido a un movimiento uniforme en la base se indica en la Ecuación (3.77). Dado que los modos de vibración poseen propiedades de ortogonalidad de forma que para dos modos diferentes *n y r* se cumplen las siguientes igualdades:

$$\{\phi_n\}\left[k_\phi\right]\{\phi_r\} = 0 \qquad \{\phi_n\}[m]\{\phi_r\} = 0 \tag{3.79}$$

Las propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración permiten expresar los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración de los grados de libertad dinámicos $\left\{u_\phi(t)\right\}, \left\{\dot{u}_\phi(t)\right\}$ y $\left\{\ddot{u}_\phi(t)\right\}$ en función de la matriz $[\Phi]$ de modos de vibración y de los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración en coordenadas generalizadas $\{\eta(t)\}, \{\dot{\eta}(t)\}$ y $\{\ddot{\eta}(t)\}$. Este proceso se denomina *cambio de base* y se expresa como:

$$\begin{aligned} \left\{u_\phi(t)\right\} &= [\Phi]\{\eta(t)\} \\ \left\{\dot{u}_\phi(t)\right\} &= [\Phi]\left\{\dot{\eta(t)}\right\} \\ \left\{\ddot{u}_\phi(t)\right\} &= [\Phi]\{\ddot{\eta}(t)\} \end{aligned} \tag{3.80}$$

Al remplazar las anteriores expresiones en la ecuación de movimiento, esta toma la siguiente forma:

$$[m][\Phi]\{\ddot{\eta}(t)\} + [c][\Phi]\{\dot{\eta}(t)\} + \left[k_\phi\right][\Phi]\{\eta(t)\} = -[m][\gamma]\left\{\ddot{u}_g(t)\right\} \tag{3.81}$$

Al premultiplicar todos los términos de la ecuación por la matriz transpuesta de modos de vibración $[\Phi]^T$:

$$([\Phi]^T[m][\Phi])\{\ddot{\eta}\} + ([\Phi]^T[c][\Phi])\{\dot{\eta}\} + \left([\Phi]^T\left[k_\phi\right][\Phi]\right)\{\eta\} = -([\Phi]^T[m][\gamma])\left\{\ddot{u}_g\right\} \tag{3.82}$$

En consecuencia, se define la matriz modal de masa $[\mathrm{M}]$, la matriz modal de amortiguamiento $[\mathrm{C}]$ y la matriz modal de rigidez $[\mathrm{K}]$ como:

$$\begin{aligned} [M] &= [\Phi]^T[m][\Phi] \\ [C] &= [\Phi]^T[c][\Phi] \\ [K] &= [\Phi]^T\left[k_\phi\right][\Phi] \end{aligned} \tag{3.83}$$

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Al remplazar las ecuaciones anteriores en la expresión (3.82) se llega al siguiente sistema de ecuaciones en coordenadas generalizadas, denominado *ecuaciones modales desacopladas*:

$$[M]\{\ddot{\eta}(t)\} + [C]\{\dot{\eta}(t)\} + [K]\{\eta(t)\} = -([\Phi]^T[m][\gamma])\{\ddot{u}_g(t)\} \tag{3.84}$$

Si los modos de vibración son ortonormalizados o normalizados respecto a la matriz de masa, se tiene que:

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [C^*]\{\dot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = -([\Phi]^T[m][\gamma])\{\ddot{u}_g(t)\} \tag{3.85}$$

De esta forma se llega a un sistema de ecuaciones desacoplado en el que, para cada ecuación i existe una sola incógnita $\eta_i(t)$. Por lo tanto cada ecuación se resuelve de forma independiente.

En resumen, los modos de vibración permiten desacoplar las ecuaciones de movimiento, de forma que el problema de resolver un sistema de varios grados de libertad se cambia por un problema equivalente en el que se resuelven varios sistemas de un solo grado de libertad y posteriormente se combina la solución obtenida para cada sistema, para finalmente obtener la solución total.

3.6.2. Matrices modales de masa y rigidez

La ortogonalidad de los modos implica que las siguientes matrices sean diagonales:

$$[K] = [\Phi]^T[k_\phi][\Phi] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_N \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

$$[M] = [\Phi]^T[m][\Phi] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_N \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

La relación que existe entre los términos de las matrices $[K]$ y $[M]$ es la siguiente:

$$K_i = \omega_i^2 M_i \tag{3.88}$$

Si los modos de vibración son ortonormalizados la matriz modal de masa es igual a la matriz identidad y la matriz modal de rigidez es una matriz diagonal donde cada coeficiente corresponde a cada frecuencia de vibración natural elevada al cuadrado, como lo muestra la siguiente expresión:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

3.6.3. Matriz modal de amortiguamiento

La matriz de amortiguamiento $[c]$ de la estructura depende de la distribución del amortiguamiento en el sistema (Chopra, 2001).

Para que puedan ser usados los métodos de análisis dinámico elástico basados en la combinación modal, es necesario que se considere amortiguamiento clásico en el cual cada término de la matriz modal de amortiguamiento $[C]$ es de la siguiente forma:

$$C_i = 2M_i\xi_i\omega_i \tag{3.90}$$

donde la constante ξ_i es igual a la fracción de amortiguamiento respecto al amortiguamiento crítico del modo i.

Los coeficientes de amortiguamiento ξ_i por lo general se suponen iguales a 0.05 (5%) para todos los modos, dado que no existen grandes diferencias de este parámetro entre un modo y otro (Chopra, 2001). Además los espectros de pseudo-aceleración de los códigos de diseño y construcción sismoresistente generalmente consideran una fracción de amortiguamiento del 5% respecto al crítico. En particular, Hewitt (2005) menciona resultados de ensayos dinámicos sobre puentes de luces largas para los que la fracción de amortiguamiento medida varía entre el 1 y el 4%.

Existen metodologías como las de Rayleigh o Caughey que permiten estimar una fracción de amortiguamiento ξ diferente para cada modo de vibración, aunque se debe conocer el coeficiente de amortiguamiento de dos o mas modos de vibración diferentes.

La matriz modal de amortiguamiento se supone entonces de la siguiente forma:

$$[C] = [\Phi]^T[c][\Phi] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2M_1\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2M_2\xi_2\omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2M_N\xi_N\omega_N \end{bmatrix} \tag{3.91}$$

Si los modos de vibración son ortonormalizados, el término M_i es igual a la unidad y los términos de la matriz modal de amortiguamiento se convierten en:

$$C_i = 2\xi_i\omega_i \tag{3.92}$$

Por lo que la matriz modal de amortiguamiento toma la siguiente forma:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$[C] = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\xi_N\omega_N \end{bmatrix} \tag{3.93}$$

3.6.4. Matriz de factores de participación

La matriz de factores de participación $[\alpha]$ se calcula con la siguiente expresión:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \{\alpha_1\} \\ \vdots \\ \{\alpha_i\} \\ \vdots \\ \{\alpha_N\} \end{bmatrix} = [\Phi]^T[m][\gamma] \tag{3.94}$$

donde $[\Phi]^T$es la matriz transpuesta de modos de vibración, $[m]$ es la matriz de masa y $[\gamma]$ es la matriz de influencia de la estructura.

El tamaño de la matriz $[\alpha]$ coincide con del tamaño de la matriz de influencia $[\gamma]$. Cada fila $\{\alpha_i\}$ contiene los factores de participación que multiplican las componentes de la aceleración de la base $\{\ddot{u}_g\}$.

Los coeficientes de participación dependen de la forma en que se hayan normalizado los modos de vibración natural, por lo que no constituyen una medida clara del grado de participación de cada modo en la respuesta de la estructura.

3.6.5. Acciones modales externas equivalentes

Las acciones modales externas equivalentes al movimiento de la base $\{\bar{F}_{ext}(t)\}$ son los términos independientes de las ecuaciones modales desacopladas y se obtienen con la siguiente expresión:

$$\{\bar{F}_{ext}(t)\} = -([\Phi]^T[m][\gamma])\{\ddot{u}_g(t)\} = -[\alpha]\{\ddot{u}_g(t)\} \tag{3.95}$$

donde $[\alpha]$ es la matriz de coeficientes de participación modal y $\{\ddot{u}_g\}$ es el vector de aceleración de la base.

Cuando se analiza una estructura plana considerando solamente la componente de aceleración en la base $\ddot{u}_{gx}(t)$, la ecuación modal correspondiente al sistema de un grado de libertad número *i* tiene la siguiente forma:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = -\{\alpha_i\}\{\ddot{u}_g(t)\} = -\alpha_{ix} \cdot \ddot{u}_{gx}(t) \tag{3.96}$$

Por lo que la acción modal externa de la ecuación i es:

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

$$\left(\bar{F}_{ext}(t)\right)_i = -\alpha_{ix}\ddot{u}_{gx}(t) \tag{3.97}$$

Sí se analiza una estructura espacial considerando tres componentes de aceleración en la base $\ddot{u}_{gx}(t), \ddot{u}_{gy}(t)\ y\ \ddot{\theta}_{gz}(t)$, la ecuación modal correspondiente al sistema de un grado de libertad número i tiene la siguiente forma:

$$\begin{gathered}\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = -\{\alpha_i\}\{\ddot{u}_g(t)\} \\ \ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = -(\alpha_{ix}\ddot{u}_{gx}(t) + \alpha_{iy}\ddot{u}_{gy}(t) + \alpha_{iz}\ddot{\theta}_{gz}(t))\end{gathered} \tag{3.98}$$

Por lo que la acción modal externa de la ecuación i es:

$$\left(\bar{F}_{ext}(t)\right)_i = -(\alpha_{ix}\ddot{u}_{gx}(t) + \alpha_{iy}\ddot{u}_{gy}(t) + \alpha_{iz}\ddot{\theta}_{gz}(t)) \tag{3.99}$$

3.6.6. Matrices de masa modal efectiva y masa total

El uso de la masa modal efectiva es una forma más adecuada de indicar el grado de participación de cada modo de vibración natural en la respuesta total de la estructura ya que, a diferencia de los factores de participación, la masas modales efectivas son cantidades que no dependen de la forma en que se hallan normalizado los modos de vibración.

El concepto de masa modal efectiva se emplea para definir el número mínimo de modos de vibración a considerar en el análisis de sistemas con una cantidad considerable de grados de libertad dinámicos, casos en los que se permite calcular la respuesta de la estructura teniendo en cuenta solamente el aporte de los modos de vibración de mayor masa modal efectiva, que generalmente son los modos de mayor periodo de vibración, y despreciando el aporte de los modos restantes.

La matriz de masa modal efectiva $[\bar{m}]$ tiene un tamaño igual al de la matriz de coeficientes de participación $[\alpha]$. A cada fila le corresponde un modo de vibración y a cada columna le corresponde una componente de aceleración de la base. Si se analiza una estructura plana, la matriz $[\bar{m}]$ tiene una sola columna y si se analiza una estructura espacial la matriz $[\bar{m}]$ tiene tres columnas.

Los coeficientes $\bar{m}_{ij}$ de $[\bar{m}]$ se calculan con la siguiente expresión siempre y cuando $[\alpha]$ se haya obtenido utilizando modos de vibración ortonormalizados:

$$\bar{m}_{ij} = \alpha_{ij}^2 \tag{3.100}$$

El coeficiente $\bar{m}_{ij}$ representa la fracción de masa traslacional o rotacional de la estructura que se activa en el modo *i* cuando se aplica la componente de la aceleración de la base que es paralela a la dirección *j* (García, 1998).

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

Para el caso de estructuras espaciales, las masas modales efectivas permiten identificar cuando un modo de vibración es principalmente traslacional o cuando es principalmente torsional, dependiendo de la magnitud relativa de la masa que se activa en cada modo. Adicionalmente permite identificar si hay acoplamiento o combinación de traslación y rotación en los diafragmas, dando una idea conceptual del comportamiento de la estructura.

La matriz de masa total $[M_T]$, diferente a la matriz de masa de la estructura $[m]$, se calcula con la siguiente expresión:

$$[M_T] = [\alpha]^T[\alpha] \tag{3.101}$$

Para una estructura plana, la matriz de masa total da como resultado un escalar igual a la suma de las masas traslacionales contenidas en la matriz de masa de la estructura. Para una estructura espacial, si la matriz de masa es diagonal, la matriz de masa total también es una matriz diagonal de $3X3$ con la siguiente forma:

$$[M_T] = \begin{bmatrix} \Sigma m_x & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma m_y & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma I_{cm} \end{bmatrix} \tag{3.102}$$

Los valores de la diagonal de la matriz de masa total $[M_T]$ son iguales a la suma de las masas modales efectivas en cada dirección de análisis. Es decir, al sumar los coeficientes de la matriz $[\overline{m}]$ por columnas, los resultados coinciden con los coeficientes de $[M_T]$.

3.7. Matriz de amortiguamiento clásico

La matriz de amortiguamiento clásico $[c]$ no tiene ninguna utilidad en la solución de las ecuaciones de movimiento cuando se utilizan los métodos de análisis dinámico elástico basados en la combinación modal. Esta matriz se requiere para calcular las acciones resultantes de amortiguamiento, para calcular la energía disipada por amortiguamiento natural en cada instante de tiempo o cuando el método de la combinación modal no es aplicable y la solución de las ecuaciones de movimiento se realiza por métodos más generales.

En los casos en que se requiera la matriz de amortiguamiento clásico, se utilizan los procedimientos de Rayleigh o de superposición de matrices modales que se describen a continuación. Con estos procedimientos se construye la matriz de amortiguamiento de la estructura a partir de las fracciones de amortiguamiento modal ξ.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

3.7.1. Matriz de amortiguamiento de Rayleigh

El amortiguamiento de Rayleigh o amortiguamiento proporcional a la masa y a la rigidez, es una forma de amortiguamiento consistente con los datos experimentales, en los cuales se evidencia que las fracciones de amortiguamiento modal son similares para casi todos los modos de vibración (Chopra, 2001).

La matriz de amortiguamiento clásico tiene la siguiente forma:

$$[c] = a_0[m] + a_1[k_\phi] \tag{3.103}$$

La fracción de amortiguamiento de cualquier modo *n* es:

$$\xi_n = \frac{a_0}{2}\left(\frac{1}{\omega_n}\right) + \frac{a_1}{2}\omega_n \tag{3.104}$$

Para la determinación de las constantes a_0 y a_1 generalmente se supone que dos modos i y j poseen la misma fracción de amortiguamiento modal ξ. En este caso, los coeficientes a_0 y a_1 se calculan con las siguientes expresiones:

$$a_0 = \xi\frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} = a_1\omega_i\omega_j \qquad a_1 = \xi\frac{2}{\omega_i + \omega_j} \tag{3.105}$$

La Figura 3.24 muestra la variación de la fracción de amortiguamiento modal asociada a cualquier otro modo de vibración con su frecuencia natural, al considerar la forma de amortiguamiento de Rayleigh.

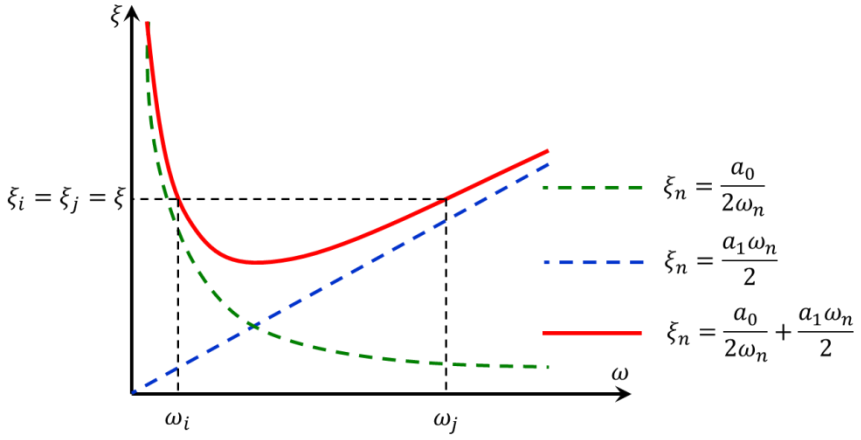


Figura 3.24. Variación de la fracción de amortiguamiento modal con la frecuencia (Chopra, 2001)

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013

3.7.2. Matriz de amortiguamiento por superposición de matrices modales

Partiendo de la definición de matriz modal de amortiguamiento (Ecuación (3.83)) se plantea la siguiente igualdad despejando $[c]$:

$$\begin{aligned} [C] &= [\Phi]^T[c][\Phi] \\ ([\Phi]^T)^{-1}[C] &= [c][\Phi] \\ [c] &= ([\Phi]^T)^{-1}[C][\Phi]^{-1} \end{aligned} \tag{3.106}$$

El cálculo de la matriz $[c]$ aplicando la anterior expresión implica el cálculo de las matrices $([\Phi]^{\mathrm{T}})^{-1}$ y $[\Phi]^{-1}$, que en el caso de sistemas con bastantes grados de libertad representa un trabajo computacional importante.

Las matrices $([\Phi]^{\mathrm{T}})^{-1}$ y $[\Phi]^{-1}$ también se pueden evaluar partiendo de la definición de matriz modal de masa $[M]$, dada en la Ecuación (3.83). En el caso de $[\Phi]^{-1}$:

$$\begin{aligned} [M] &= [\Phi]^T[m][\Phi] \\ [M][\Phi]^{-1} &= [\Phi]^T[m] \\ [\Phi]^{-1} &= [M]^{-1}[\Phi]^T[m] \end{aligned} \tag{3.107}$$

Y en el caso de la matriz $([\Phi]^T)^{-1}$:

$$\begin{aligned} [M] &= [\Phi]^T[m][\Phi] \\ ([\Phi]^T)^{-1}[M] &= [m][\Phi] \\ ([\Phi]^T)^{-1} &= [m][\Phi][M]^{-1} \end{aligned} \tag{3.108}$$

Las matrices $[m]$ y $[\Phi]$ son conocidas. Asimismo $[M]^{-1}$ es una matriz diagonal cuyos coeficientes son iguales a $1/M_i$ dado que $[M]$ es diagonal.

© Francisco Leonardo Noy Hilarión – Universidad Nacional de Colombia, 2013