3. DISTRIBUCIÓN DE CARGA EN PUNTO CUÁNTICO CON EXCITÓN ATRAPADO

Cuando un cristal semiconductor es excitado, térmica o lumínicamente, se pueden formar cuasi-partículas compuestas por un par electrón-hueco, los cuales están ligados entre si por una interacción Coulombiana de tipo atractiva, de forma similar a lo que sucede con el átomo de hidrógeno o con las donadoras neutras que se estudiaron en el capítulo anterior. Este estado ligado formado por el par electrón-hueco se denomina excitón.

Los excitones poseen características que los diferencian de los otros estados ligados que se acaban de mencionar. Por ejemplo, en el caso de las donadoras neutras, los electrones se localizan alrededor de la posición fija, mientras que el en el caso del excitón, éste puede trasladarse por todo el cristal sin que ello implique la generación de fotoconductividad, debido a que el par electrón-hueco se mueve conjuntamente con una carga neta igual a cero. No obstante, debe tenerse en cuenta que el electrón al ser menos inercial se encuentra orbitando alrededor del hueco, tal como si fuera un átomo hidrogenoide. Esto significa que la interacción Coulombiana sólo es capaz de afectar el movimiento relativo del par electrón-hueco, pero no el movimiento de su centro de masa, el cual debe ser descrito mediante funciones de onda completamente deslocalizadas. De acuerdo con lo que se acaba de mencionar y en analogía con el átomo de hidrógeno, la energía de ionización del par electrón-hueco se puede expresar como:

$$E_X = -\frac{\mu e^4}{8\hbar^2 \pi^2 \varepsilon^2 n^2} \tag{3.1}$$

El entero $n(n \geq 1)$ sirve para describir los diferentes niveles energéticos del excitón, $\mu^* = m_e^* m_h^* / m_e^* + m_h^*$ representa la masa reducida efectiva del sistema y ε la permitividad del material semiconductor.

No sobra recordar que la masa efectiva del núcleo del átomo impureza, es muchas veces más grande que la del electrón, razón por la cual la masa reducida efectiva es prácticamente igual a la del electrón. En el caso del excitón, la situación es bien diferente porque las masas efectivas del electrón y del hueco son comparables, haciendo que la masa reducida del sistema también sea del mismo orden de magnitud. Para sustentar lo que se acaba de mencionar, analicemos el caso del semiconductor ternario de $In_{0.55}Al_{0.45}As$ con el cual se fabrican los SAQDs que van a ser objeto de estudio del presente capítulo. En este caso los valores de las masas efectivas son $m_e^* = 0.076\, m_0$ y $m_h^* = 0.45\, m_0$, respectivamente, $\mu^* = 0.065\, m_0$ y $\varepsilon = 12.71$. Al reemplazar estos valores en la ecuación (3.1) se obtiene que

la energía de ionización del excitón es mucho menor que la que la energía de enlace del átomo de hidrógeno $(E_X \equiv E_H/2000)$. La debilidad de dicho enlace hace que las órbitas excitónicas abarquen varias celdillas del cristal. Para el caso particular del semiconductor ternario que se acaba de mencionar, el radio de Bohr efectivo es de 103.6Å. Este valor es casi 20 veces más grande que el parámetro de red del material y 200 veces más grande que el radio de Bohr para el átomo de hidrógeno, el cual es de tan solo de 0.5 Å.

La pequeñez de la energía del enlace excitónico, hace que el tiempo de vida de estos sistemas sea muy corto, lo cual conlleva a que su observación experimental en semiconductores en el bloque sólo sea posible a temperaturas extremadamente bajas. Debido a estas dificultades, los excitones en semiconductores en el bloque no revisten ningún interés tecnológico ni experimental. No obstante, cuando el par e-h es confinado en un punto cuántico, las dos partículas están obligadas a estar más cerca la una de la otra. Esto conlleva a que su energía de enlace se incremente notoriamente con relación al mismo sistema en semiconductores en el bloque, haciendo posible su observación a temperatura ambiente [135]. Este resultado ha generado grandes expectativas debido a que estos sistemas poseen propiedades imposibles de obtenerse en semiconductores en el bloque, lo que permite pensar en nuevas posibilidades de generar dispositivos de alto rendimiento a partir de la modificación del espectro energético y de la distribución espacial de carga, tanto del electrón(e) como del hueco(h).

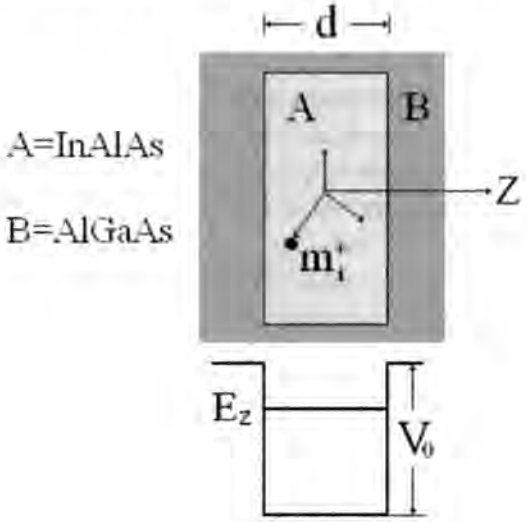

Figura 3.1 Representación esquemática del estado base de energía, E_z, para una partícula confinada en un QD de altura d. El punto se fabrica a partir de dos materiales A=InAlAs y B=AlGaAs.

Una de estas posibilidades está relacionada con la diferencia entre las masas efectivas del electrón y del hueco, que al estar confinadas en un QD, tienen diferente capacidad para tunelar hacia la región de la barrera. Para hacer más evidente este hecho, consideremos una partícula de masa efectiva

m_i^* $(i=e,h)$ dentro de un QD de altura d, así como se muestra esquemáticamente en la figura 3.1.
El QD se fabrica a partir de un material A (InAlAs) y se rodea de otro B (AlGaAs).

Con el propósito de hacer un estimativo simple de la energía del estado base para la partícula confinada en el QD, usaremos el principio de incertidumbre de Heisenberg. En la dirección de crecimiento Z del QD se tiene $\Delta p_z \approx \hbar/d$ y por lo tanto la energía de la partícula es aproximadamente igual a:

$$E_z = \left((\Delta p_z)^2 / 2m_i^*\right) = \hbar^2 / \left(2m_i^* d^2\right) \tag{3.2}$$

De este resultado se puede observar que la energía de la partícula depende tanto de su masa efectiva como del ancho del QD. En consecuencia, si la altura d se disminuye la función de onda de la partícula en el pozo se comprime, lo que genera un aumento de la energía y una disminución en el confinamiento experimentado por la partícula. Por lo tanto, se puede pensar que debe existir un valor $d = L$ para el cual el tunelamiento de la función de onda en la región de la barrera comienza a ser notable. Esto ocurre cuando la energía (3.2) se hace aproximadamente igual a la altura de la barrera V_0, lo cual nos permite encontrar una expresión para la longitud L, lo que en adelante denominaremos longitud de tunelamiento, asi:

$$L = \sqrt{\hbar^2 / \left(2m_i^* V_0\right)} \tag{3.3}$$

Nótese que L es un parámetro de suma importancia, ya que si la altura del QD se hace menor que la longitud de tunelamiento, entonces se pierden las propiedades adquiridas por efecto del confinamiento cuántico, debido a que la partícula recuperaría las propiedades correspondientes al semiconductor en el bloque. Al depender L de la masa efectiva de la partícula y del potencial de confinamiento, se pone de manifiesto que electrones y huecos tienen diferentes longitudes de tunelamiento. Para calcular los valores de L correspondientes al par e-h en QDs de $In_{0.55}Al_{0.45}As$-$Ga_{0.65}Al_{0.35}As$ debe tenerse en cuenta que los potenciales de confinamiento para el electrón (V_{0e}) y para el hueco (V_{0h}) son diferentes, siendo iguales a $258meV$ y $172meV$, respectivamente. Usando estos valores del potencial junto a los valores de las masas efectivas definidas anteriormente, se puede demostrar que $L_e/L_h = \sqrt{\hbar^2/\left(2m_e^* V_{0e}\right)} \Big/ \sqrt{\hbar^2/\left(2m_h^* V_{0h}\right)} \cong 2$. Este resultado indica que el electrón tiene más capacidad que el hueco para tunelar hacia la región de la barrera de potencial, a pesar de que el potencial de confinamiento para el electrón es mayor que para el hueco. Recientemente se ha demostrado [57]

3.1 ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CARGA EN DISCOS Y ANILLOS CUÁNTICOS

Del conjunto de SAQDs con diferente morfología que se pueden fabricar, los que tienen forma de anillo poseen una gran riqueza física, debido a la variedad de nuevos fenómenos que en ellos se pueden estudiar y además porque desde el punto de vista teórico permiten analizar ciertas variaciones topológicas que incluyen un sistema 2D, como es el caso de un disco cuántico plano y un anillo 1D, como los estudiados en el capitulo 1.. Debido a estas características singulares de los anillos cuánticos (QRs), se ha decidido comenzar este capítulo analizando el espectro energético y la distribución de carga de un excitón atrapado en un QR con potencial rectangular. En la figura 3.2 se ha hecho una representación esquemática del QR, y en él se muestran los factores geométricos que lo caracterizan; es decir, los radios exterior e interior, R_e y R_i, respectivamente, el espesor de la WL, d_b, y la altura del punto por encima de esta capa, d_0.

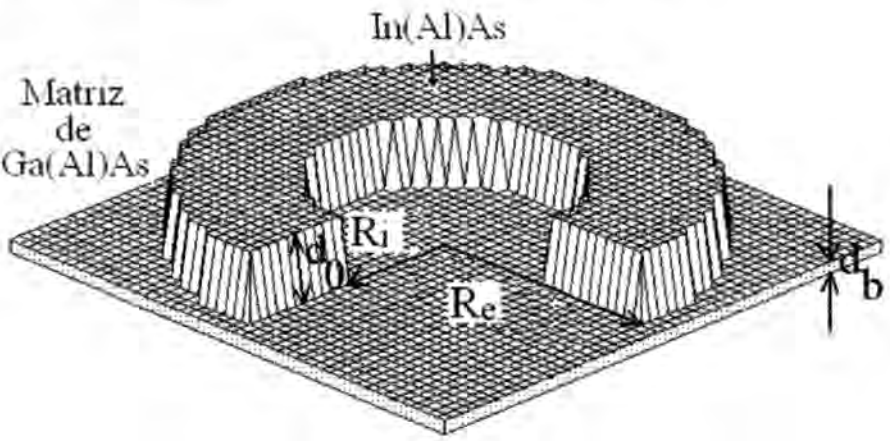

Figura 3.2 Representación esquemática en tres dimensiones para un anillo cuántico.

La forma geométrica del QR se puede describir mediante una función seccionalmente continua $d(\rho)$ dada por la siguiente expresión:

$$d(\rho)=\begin{cases}\sqrt{1-\left(\dfrac{\rho-R_i}{R_e-R_i}\right)^2}\,d_0+d_b\,, & R_i<\rho<R_e \\ d_b\,, & \rho<R_i U \rho>R_e\end{cases} \tag{3.4}$$

y el potencial de confinamiento rectangular al que se encuentra sometido cada partícula, se puede expresar en términos de $d(\rho)$ y de la función de Heaviside, así:

$$V_i(\rho,z)=V_i\cdot\left[\theta\left(z-d(\rho)\right)+\theta(-z)\right],\qquad i=e,h \tag{3.5}$$

Con el propósito de comparar nuestros resultados con los obtenidos para un par e-h en un disco cuántico 3D [57] fabricado a partir de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$, se asumirá que las masas efectivas del electrón en las regiones dentro y fuera del QD son $m_{ew}=0.076\,m_0$ y $m_{eb}=0.097\,m_0$, respectivamente, mientras que las del hueco son $m_{hw}=m_{hb}=0,45\,m_0$.

3.1.1 MODELO TEÓRICO

Tomando $\mathbf{r}_e$ y $\mathbf{r}_h$ como los vectores de posición del electrón y del hueco, respectivamente, la ecuación de Schrödinger para el par e-h en un QD axialmente simétrico, en presencia de un campo magnético uniforme orientado a lo largo del eje z, se puede escribir en coordenadas cilíndricas $\left(\mathbf{r}_p=\{\rho_p,\vartheta_p,z_p\};\ p=e,h\right)$ como:

$$\begin{aligned}
&H(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h,\tau)\Psi(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h,\tau)=E(\tau)\Psi(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h,\tau);\\
&H(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h,\tau)=H_e(\mathbf{r}_e)+H_h(\mathbf{r}_h)-2\tau/r_{eh};\ \tau=\tau_1\tau_2=0,1\\
&H_p(\mathbf{r}_p)=-\nabla_p\eta_p\nabla_p+\gamma^2\rho^2/4+V_p(\rho_p,z_p);\\
&\eta_p=\mu/m_p;\ \ p=e,h\ ,\ \mu=m_{ew}m_{hw}/(m_{ew}+m_{hw})\approx 0.065\,m_0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

El parámetro η_p para el electrón en el pozo es igual $\eta_{ew}=0.86$ y en la barrera es de $\eta_{eb}\approx 0.67$, mientras que para el hueco su valor es $\eta_{hw}=\eta_{hb}\approx 0.14$.

Para partículas neutras $(\tau=0)$, el Hamiltoniano (3.6) es separable y las energías $E=E_{m,m'}$ así como las funciones de onda $\Psi(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h,\tau=0)=\Psi^{(0)}_{m,m'}=\Psi_{m,m'}(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h,\tau=0)$ para las dos partículas con momento angular $m,m'=0,\pm1,\pm2,...$ se pueden obtener solucionando los siguientes dos problemas uni-particulares independientes:

$$H_p f_p^{(m)}(\mathbf{r}_p)=E_p^{(m)} f_p^{(m)}(\mathbf{r}_p);\ p=e,h \tag{3.7a}$$

$$\Psi^{(0)}_{m,m'}=\Psi_{m,m'}(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h,\tau=0)=f_e^{(m)}(\mathbf{r}_e)\,f_h^{(m')}(\mathbf{r}_h);\quad E^{(0)}_{m,m'}=E_e^{(m)}+E_h^{(m')} \tag{3.7b}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN
DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA "LUIS E. GÓMEZ"

Para obtener las soluciones de este par de ecuaciones de onda uni-particulares, se va a proceder como en el capítulo anterior; es decir, se va a asumir que la altura total del QR es mucho más pequeña que las dimensiones laterales, lo cual permitirá hacer uso de la aproximación adiabática [76,81,86-87,142] a fin de desacoplar el movimiento rápido a lo largo de la dirección z del movimiento lento en dirección radial. Por lo tanto, la función de onda uni-particular puede escribirse como:

$$f_p^{(m)}(\mathbf{r}_p) = e^{jm\vartheta} f_{zp}(z_p, \rho_p) f_{\rho p}^{(m)}(\rho_p); \quad p = e, h \tag{3.7c}$$

Acá la función $f_{zp}(z_p, \rho_p)$ describe la solución exacta para el estado base del movimiento una sola partícula en dirección z, cuando ésta se encuentra confinada en un pozo cuántico de altura V_{0p} y ancho igual al espesor $d(\rho_p)$de la capa de $In_{0.55}Al_{0.45}As$.

La correspondiente energía del estado base, $E_{z\rho}(\rho_p)$, para el movimiento a lo largo de la dirección z, depende de la distancia al eje de simetría y toma el valor $E_{zp}^{(w)}$ dentro del QR $(R_{\text{int}} < \rho_p < R_{ext})$ y el valor $E_{zp}^{(b)}$ fuera del QR $(\rho_p < R_{\text{int}} \ o \ \rho_p > R_{ext})$. Los valores $E_{zp}^{(w)}$ y $E_{zp}^{(b)}$ corresponden a los niveles de energía más bajos en pozos cuánticos con barrera de potencial V_{0p} y anchos d_0 y d_b, respectivamente. La parte radial de la función de onda uni-particular se obtiene solucionando el siguiente problema de campo central bi-dimensional:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\rho_p}\frac{\partial}{\partial \rho_p}\left[\eta_p \rho_p \frac{\partial f_{\rho p}^{(m)}(\rho_p)}{\partial \rho_p}\right] + \tilde{V}_p^{(m)}(\rho_p) f_{\rho p}^{(m)}(\rho_p) = E_p^{(m)} f_{\rho p}^{(m)}(\rho_p); \\ &\tilde{V}_p^{(m)}(\rho) = E_{z\rho}(\rho) + \eta_p\left(\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\gamma^2\rho^2}{4} + \gamma m\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Las autofunciones y los respectivos autovalores de la parte radial de la función de onda uni-particular (3.8), no se pueden obtener de forma exacta, razón por la cual se usará el método numérico de barrido trigonométrico [80].

El problema bi-particular (3.6) para $\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h, \tau = 1)$ correspondiente al par e-h, no se puede resolver exactamente, por lo tanto se debe emplear un método aproximado para determinar su solución. En nuestro caso se usará el principio variacional, donde la función de prueba del tipo de Bastard se

tomará como el producto de funciones de partículas neutras, $\Psi^{(0)}_{m,m'}$ con una función envolvente desconocida $\Phi(r_{eh})$, así:

$$\Psi(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h,\tau=1)=\Psi^{(0)}_{m,m'}\,\Phi(r_{eh})=f_e^{(m)}(\mathbf{r}_e)\,f_h^{(m')}(\mathbf{r}_h)\Phi(r_{eh}) \tag{3.9}$$

Esta función de onda no tiene en cuenta los efectos relacionados con la mezcla de estados uni-particulares debidos a la atracción e-h. Esta deficiencia se podría solucionar reemplazando en (3.9) las funciones de onda uni-particulares por una combinación de funciones correspondientes a los estados de energía más bajos. Por razones de conveniencia matemática, en la función de onda (3.9) sólo se tomarán en cuenta los estados de energía más bajos. En cualquier disco estos niveles estarían dados por los números $m,m'=0$, pero en un QR debido al efecto Aharanov-Bohm [108] los números cuánticos m y m' incrementan cuando la intensidad del campo crece.

La energía del estado base para del excitón en un QD se encuentra minimizando el valor esperado de la energía respecto de la función envolvente:

$$E[\Phi]=\frac{\left\langle f_e^{(m)}(\mathbf{r}_e)f_h^{(m')}(\mathbf{r}_h)\Phi(r_{eh})\middle|H(r_e,r_h,\tau=1)\middle|f_e^{(m)}(\mathbf{r}_e)f_h^{(m')}(\mathbf{r}_h)\Phi(r_{eh})\right\rangle}{\left\langle f_e^{(m)}(\mathbf{r}_e)f_h^{(m')}(\mathbf{r}_h)\Phi(r_{eh})\middle|f_e^{(m)}(\mathbf{r}_e)f_h^{(m')}(\mathbf{r}_h)\Phi(r_{eh})\right\rangle} \tag{3.10}$$

Siguiendo el mismo procedimiento descrito en la sección (2.2), lo cual requiere de calcular la derivada funcional $\left(\delta E[\Phi]/\delta\Phi=0\right)$ para determinar la ecuación de onda que satisface $\Phi(r_{eh})$ se obtiene:

$$-\frac{1}{\mathrm{P}_0(r)}\frac{d}{dr}\mathrm{P}_1(r)\frac{d\Phi(r)}{dr}+\frac{2}{r}\Phi(r)=-E_b\Phi(r)\,; \tag{3.11}$$

$$E_b=E_e^{(m)}+E_h^{(m')}-E$$

Donde las funciones $\mathrm{P}_0(r)$ y $\mathrm{P}_1(r)$ están dadas por

$$\mathrm{P}_0(r)=\int d\mathbf{r}_e\int\left|f_e^{(m)}(\mathbf{r}_e)\right|^2\left|f_h^{(m')}(\mathbf{r}_h)\right|^2\delta\left(|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_h|-r\right)d\mathbf{r}_h \tag{3.12}$$

$$\mathrm{P}_1(r)=\int d\mathbf{r}_e\int\left(\eta_e(\mathbf{r}_e)+\eta_h(\mathbf{r}_h)\right)\left|f_e^{(m)}(\mathbf{r}_e)\right|\left|f_h^{(m')}(\mathbf{r}_h)\right|\delta\left(|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_h|-r\right)d\mathbf{r}_h \tag{3.13}$$

Cuando el tunelamiento de las partículas en región de la matriz que rodea al punto llega a ser muy pequeña, la diferencia entre las funciones $P_0(r)$ y $P_1(r)$ se pueden despreciar debido a que la condición $\eta_e(\mathbf{r}_e)+\eta_h(\mathbf{r}_h)=1$ se satisface al interior del QR y dentro de la WL. Bajo la condición, $P_1(r)\approx P_0(r)$, la ecuación de onda (3.11) toma la forma de un átomo de hidrógeno en un espacio efectivo con parte radial del Jacobiano igual a $P_0(r)$, es decir:

$$-\frac{1}{P_0(r)}\frac{d}{dr}P_0(r)\frac{d\Phi(r)}{dr}+\frac{2}{r}\Phi(r)=-E_b\Phi(r) \tag{3.14}$$

El Jacobiano $P_0(r)$ y la función envolvente $\Phi(r)$ están emparentadas con la función de correlación espacial del par e-h (SPCF) $P(r,\tau)$ cuya importancia física radica en el hecho de que esta función permite determinar la densidad de probabilidad de encontrar al electrón y al hueco, separados entre si por una distancia r. Su forma analítica se define como:

$$P(r,\tau)=\left\langle\delta\left(|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_h|-r\right)\right\rangle=\int d\mathbf{r}_e\int\delta\left(|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_h|-r\right)\left|\Psi(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h,\tau)\right|^2 d\mathbf{r}_h \tag{3.15}$$

Como resultado de comparar las ecuaciones (3.12) y (3.15), se puede ver que el Jacobiano es igual a la SPCF para dos partículas no interactuantes eléctricamente $(\tau=0)$ confinadas en nanoestructuras, así que $P_0(r)=P(r,\tau=0)$. Para el caso del excitón $(\tau=1)$ la SPCF, $P(r)=P(r,\tau=1)$ se puede expresar como:

$$\begin{aligned}&P(r)=\int f_e^2(\mathbf{r}_e)d\mathbf{r}_e\int\delta\left(|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_h|-r\right)f_h^2(\mathbf{r}_h)\Phi^2\left(|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_h|\right)d\mathbf{r}_h=\\&P_0(r)\Phi^2(r)=\chi^2(r)\end{aligned} \tag{3.16}$$

La función $\chi(r)=\sqrt{P(r)}=\Phi(r)\sqrt{P_0(r)}$ cuyo cuadrado coincide exactamente con la SPCF, se puede interpretar como una función de onda uniparticular que sólo depende de la coordenada generalizada que se usa para determinar la separación entre partículas. Por lo tanto, a partir de esta interpretación se puede pensar que $P_0(r)$ corresponde a una mediada de la probabilidad de encontrar al electrón y al hueco dentro del QD y separados entre si por una distancia r, cuando la interacción oulombiana se ignora. Nótese que el cuadrado de la función de correlación $\Phi(r)$ es exactamente igual a la razón entre la SPCF para estados acoplados (con interacción eléctrica) y la SPCF para los estados libres (sin interacción eléctrica), así:

$\Phi^2(r) = P(r,\tau=1)/P(r,\tau=0)$. Sustituyendo el valor de $\Phi(r) = \chi(r)/\sqrt{P_0(r)}$ en la ecuación (3.14) se obtiene la siguiente ecuación de onda para $\chi(r)$:

$$-\chi''(r,\tau) + V_{eff}(r,\tau)\chi(r,\tau) = (E - E_e - E_h)\chi(r,\tau); \quad P(r) = \chi^2(r,\tau=1) \tag{3.17a}$$

$$V_{eff}(r,\tau) = -\frac{2\tau}{r} + \frac{\left(\sqrt{P_0(r)}\right)''}{\sqrt{P_0(r)}} \tag{3.17b}$$

Una vez las funciones de onda para el electrón, $f_e(\mathbf{r}_e)$ y para el hueco, $f_h(\mathbf{r}_h)$ se hayan encontrado, el potencial efectivo $V_{eff}(r,\tau)$ presente en la ecuación (3.17) se puede calcular usando las relaciones dadas en la ecuación (3.12). La solución de la ecuación de onda uni-dimensional (3.17a) permitirá calcular la energía del excitón E y la SPCF, $P(r)$. La existencia del potencial efectivo no permite encontrar soluciones exactas de (3.17a) y por esta razón se debe implementar un método numérico, que en nuestro caso se usara el método de barrido trigonométrico [80].

3.1.2 ENERGÍA DE ENLACE DEL ESTADO BASE DE UN EXCITÓN ATRAPADO EN DISCOS Y ANILLOS

Con el propósito de determinar la precisión del método utilizado, lo primero que se hace es comparar los resultados de cálculo de la energía del estado base de un excitón en discos cuánticos de GaAs /$Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ y $In_{0.55}Al_{0.45}As/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$ $(R_{int} = 0,\ d_b = 0)$ con los resultados teóricos obtenidos previamente mediante un método variacional [21,116,143] (figura 3.3a), así como los obtenidos mediante un tratamiento completo para un sistema 3D [57] (figura 3.3b). Adicionalmente en la figura (3.3c) se hace una comparación entre nuestros resultados y algunos datos experimentales [144]. Para que la comparación sea válida, se tomaó la misma definición de energía de enlace presentada en estas referencias y la cual corresponde a la diferencia entre las energías del par e-h no ligado y ligado, así: $E_b = E(\tau=0) - E(\tau=1) = E_e + E_h - E$. En la figura 3.3a se muestra la energía de enlace del excitón confinado en un disco GaAs/$Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ como función del radio. La altura del QD es $d_0 = 7nm$ y el efecto del espesor de la WL se ignora a fin de comparar los resultados obtenidos en esta tesis (líneas sólidas) con los obtenidos previamente mediante el uso funciones de tipo hidrogenoide (triángulos sin rellenar [21]), funciones con

dos parámetros variacionales (círculos sin rellenar [116]) y método con separación se variables (rectángulos sin rellenar [143]).

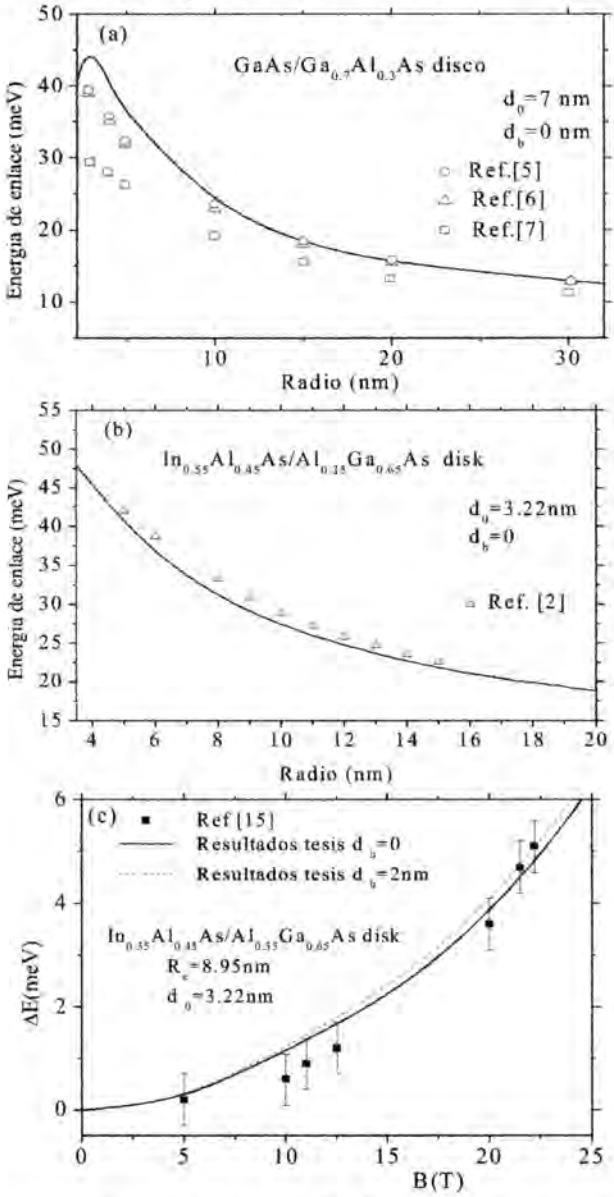

Figura 3.3 Comparación de los resultados de cálculo de la energía obtenidos en esta tesis para el estado base de un excitón en un disco de (a) $GaAs/Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ y (b, c) $In_{0.55}Al_{0.45}As/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$ con los resultados teóricos obtenidos previamente (a, b) y experimentalmente (c). Los resultados de esta tesis (líneas sólidas) para la energía de enlace del estado base de un excitón como función del radio del disco cuántico se compara con (a) los resultados variacionales (diferentes simbolos) y (b) tratamiento 3D(círculos abiertos). Los cálculos de esta tesis (líneas sólidas y a tramos) del desplazamiento diamagnético de la energía del excitón como función del campo magnético externo se compara con los resultados experimentales (cuadrados) en la figura (c).

Debido a que los cálculos variacionales siempre dan la estimación más baja de la energía de enlace, la comparación de los resultados de la figura 3.3a, demuestran que para discos de radios muy pequeños $\left(R \leq 1a_0^* = 10.4nm\right)$ los resultados obtenidos en esta investigación superan a los obtenidos por otros métodos variacionales. Pero para el caso de radios grandes, nuestros resultados son similares a los obtenidos con funciones de tipo hidrogenoide y a los que usan dos parámetros variacionales. Esto se debe a que la función de prueba que se propone en esta tesis, al no usar parámetros variacionales, resulta ser más flexible a la hora de tener en cuenta los cambios de simetría del sistema cuando el radio se hace menor que un radio de Bohr efectivo.

De otro lado, la comparación con los resultados para un tratamiento completo en sistemas 3D presentado en la figura 4.3b, demuestra que la energías de enlace obtenidas mediante el procedimiento propuesto en esta tesis, son ligeramente más pequeñas que las de la referencia [57]. No obstante, se puede afirmar que en general existe una gran coincidencia entre los dos conjuntos de resultados, pero vale pena destacar un punto a favor del método implementado en este trabajo, y este tiene que ver con la simplicidad de los cálculos matemáticos y de los programas de computación. Adicionalmente, este método también permite comparar los resultados de cálculo con los datos experimentales [144] obtenido para el desplazamiento diamagnético del excitón ΔE, el cual se define como $\Delta E = E(B) - E(B=0)$. En la figura 3.3c se ha graficado ΔE para discos cuánticos de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$ en función del campo magnético, donde las líneas continuas corresponden a los resultados de esta tesis y los cuadrados representan los escasos datos experimentales que se reportan en [144]. Se puede ver que existe una muy buena coincidencia entre nuestros resultados y los datos experimentales, especialmente para campos mayores de 20T. Si se tiene en cuenta la simplicidad de nuestro modelo teórico, se podría decir que en general existe un muy buen acuerdo entre los resultados de esta tesis y los resultados experimentales.

Ya que se ha garantizado la efectividad de nuestro método, de acá en adelante se presentarán resultados asociados con las propiedades del excitón confinado en nanoestructuras de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$. Las Características más relevantes del excitón en QR son la separación entre electrón y el hueco y los momentos multipolares debido al mayor confinamiento del hueco dentro del QD. Estas características se pueden expresar en términos de las densidades de probabilidad bi-dimensional de encontrar al electrón $\Pi_e(\rho,z)$ y al hueco, $\Pi_h(\rho,z)$ en el punto de coordenadas (ρ,z), lo cual de acuerdo con las ecuaciones (3.7c) y (3.8) se pueden calcular a partir de las siguientes expresiones

$$\Pi_e(\rho,z)=\rho f_{\rho e}^2(\rho) f_{ze}^2(z,\rho) C_h(z,\rho);$$
$$\Pi_h(\rho,z)=\rho f_{\rho h}^2(\rho) f_{zh}^2(z,\rho) C_e(z,\rho); \qquad (3.18a)$$

$$C_p(z,\rho)=\int_0^{\infty} f_{\rho p}^2(\rho_p)d\rho_p \int_{-\infty}^{+\infty} f_{zp}^2(z_p,\rho_p)dz_p \int_0^{2\pi} \Phi^2\left(\sqrt{\rho^2+\rho_p^2-2\rho\rho_p\cos\vartheta+(z-z_p)^2}\right)d\vartheta \qquad (3.18b)$$

En la figura 3.4 se presentan las curvas para las densidades de probabilidad de encontrar al electrón (líneas sólidas) y al hueco (líneas punteadas)) en puntos localizados sobre el plano de simetría $(z=d_0/2)$ en función de la distancia ρ, el cual se mede desde las posiciones de las partículas al eje del anillo. En el análisis se toman dos anillos con diferentes radios exteriores: $0.65a_0^*$ y $1.5a_0^*$. En ambos casos se puede observar que la carga positiva tiene mayor predominio en la parte interna del QR, mientras que la carga negativa predomina fuera del QR y en las regiones periféricas cercanas a las junturas. Esto es una consecuencia de un hecho anunciado al inicio de este capítulo y que tiene que ver con la menor inercia del electrón en comparación con el hueco, lo cual se traduce en una mayor capacidad del electrón para tunelar hacia las regiones de las barreras interna y exterior. Este resultado constituye una confirmación del estimativo simple realizado al inicio del capítulo sobre las diferencias en las longitudes de tunelamiento de este par de partículas. También se puede observar que al incrementar el radio interior, el tunelamiento del electrón hacia la región de la barrera más interna, se vuelve más significativo que el tunelamiento en la región exterior de la barrera.

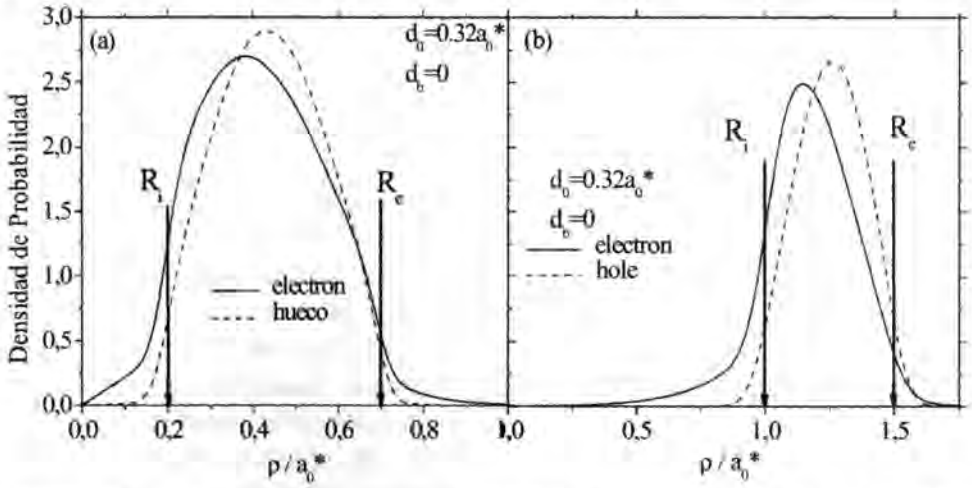

Figura 3.4. Densidad de probabilidad de encontrar al electrón (línea continua) y al hueco (línea punteada) sobre el plano de simetría, en función de la distancia desde la posición de la particular al eje del QR, para dos casos radios exteriores diferentes: 0.7 a_0^* (a) y 1.5 a_0^* (b). En ambos casos el espesor del QR es de 0.5 a_0^*. Las líneas verticales representan las posiciones de las junturas del QR.

La diferencia entre las distribuciones de carga para el electrón y el hueco, dentro y fuera del QR, hacen presumir el predominio de la carga positiva dentro del QR y de la carga negativa en las regiones cercanas a las junturas. La correspondiente densidad de distribución de carga $Q(\rho,z)$ para el excitón se pueden calcular como:

$$Q(\rho,z)=\Pi_h(\rho,z)-\Pi_e(\rho,z) \qquad (3.18c)$$

En la figura 3.5 se muestran las curvas de nivel para la densidad de carga del excitón asociada a la distribución radial a lo largo de sección transversal en el centro de dos discos (a,b) y de dos anillos(c,d), las cuales se han calculado usando las relaciones (3.18) para nanoestructuras sin WL (a,c) y con WL(b,d).

Las zonas sombreadas de las figuras, indican las partes de la sección transversal de las estructuras que se hallan cargadas positivamente debido a la presencia del excitón. Se ve de las figuras 3.5(a,c) que la densidad de la distribución radial de carga dentro del disco y del anillo es positiva y se vuelve negativa en las partes de encima, abajo y en los bordes del disco y del anillo. Distribuciones similares de carga han sido encontradas previamente para excitones en QDs de tipo II [145-146].

Al comparar las figuras 3.5a y 3.5c, también se puede ver que en el disco la mayor parte de la carga negativa se localiza abajo y arriba de la estructura, mientras que en el anillo esta carga se desplazada hacia la región central, es decir hacia el hueco del anillo. Debido a la simetría axial de la de la estructura, el momento dipolar para las dos distribuciones mostradas en las figuras 3.5(a, c) es igual acero y la distribución de carga se caracteriza por el momento cuadrupolar, el cual es positivo para el caso del disco figura 3.5 (a) y negativo para el QR mostrado en la figura 3.5 (c). Cuando el espesor del QD disminuye y se hace comparable con el espesor de la WL, el tunelamiento del electrón se favorece y el valor absoluto del momento cuadrupolar se incrementa. Debido a que en los dos tipos de QD que se están analizando, no posibilitan el tunelamiento del electrón en la misma forma, resulta interesante analizar la relación entre el momento cuadrupolar y con la transformación morfológica del QD inicialmente tienen la forma de una lente (aproximadamente 20 nm de diámetro y 7 nm de altura) y posteriormente adquieren la forma de un volcán con un tamaño lateral aumentado (entre 60nm y 140 nm en el diámetro exterior) y una altura reducida (alrededor de 2nm), mientras que el cráter central tiene un diámetro muy bien definido de aproximadamente 20 nm.

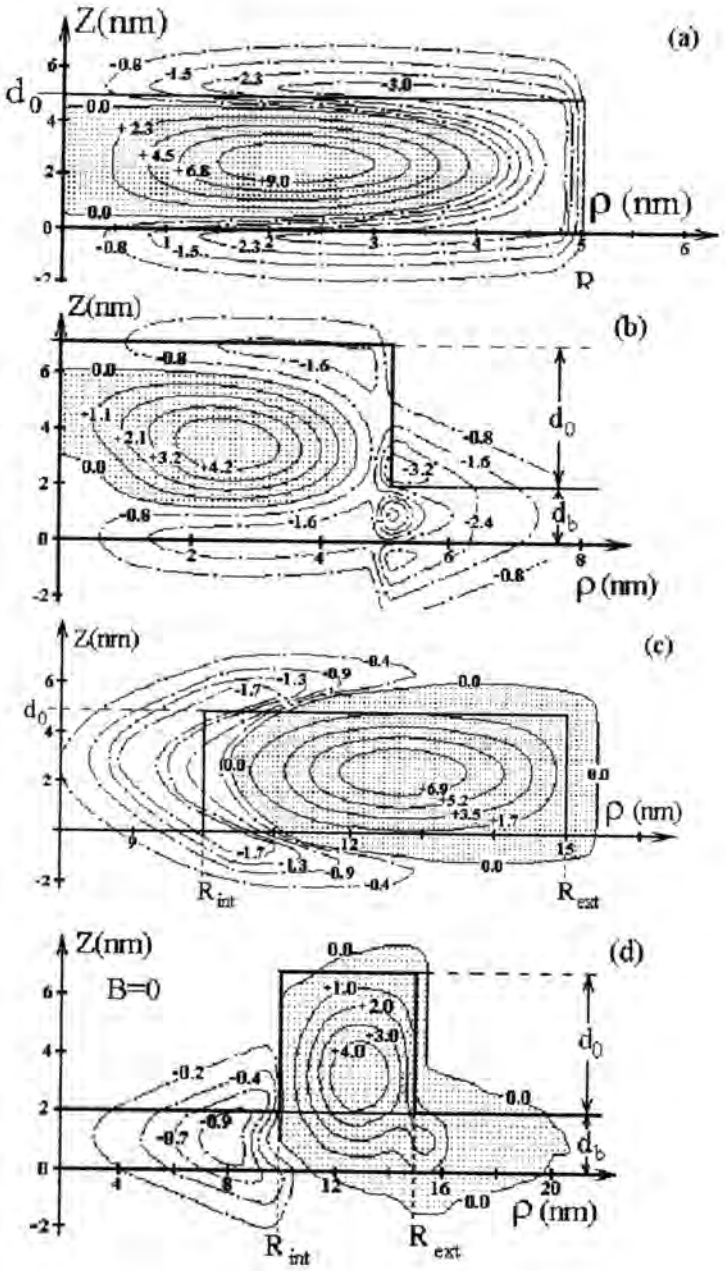

Figura 3.5 Curvas de nivel para la densidad radial de la distribución de carga en un plano que pasa a través del eje de simetría del disco cuántico (a, b) de radio 5nm y espesor de 5nm y también para un QR (c, d) con radio interior y exterior de 10 y 15nm, respectivamente, espesor de 5nm. Las diferentes nanoestructuras se toman sin WL (a y c) y con WL (b y d). Las líneas sólidas corresponden a la carga positiva y las líneas a tramos son los niveles con densidad de carga negativa.

Como se ha establecido experimentalmente [50], la morfología del SAQD de InAs sufren un cambio notorio durante su proceso de crecimiento, ya que De acuerdo con los resultados mostrados en la figura 3.5, el momento cuadrupolar tiene que invertir su dirección a medida que la lente se transforma en un volcán y su valor absoluto debería incrementar significativamente debido a la drástica reducción en la altura del QD y al aumento del radio exterior.

En las figuras 3.5 (b, d) se muestra una distribución de carga similar en un disco y en QR, los cuales tienen un espesor de capa húmeda igual a $2nm$, mientras que la altura del QD por encima de esta capa es $5nm$. La existencia de la WL permite una reducción significativa de la altura de la barrera en la juntura lateral, lo que incrementa la probabilidad de tunelamiento desde el QD hacia la WL.

Nótese que existe una diferencia bien marcada entre las distribuciones de carga correspondientes a los QDs con y sin capa húmeda. Por ejemplo, en los QDs sin WL (figuras 3.5 a,c) el tunelamiento del electrón se produce sólo hacia las regiones de la barrera, mientras que en los QDs con WL, este comportamiento se transforma parcialmente en un desbordamiento hacia la parte externa de la WL, como es el caso del disco (figura 3.5 b) y hacia la parte interna de la WL en el caso del QR (figura 3.5d). Por lo tanto, la existencia de la WL hace que se produzca una fuerte separación entre el electrón y el hueco, no sólo en dirección en dirección radial sino también en dirección z, lo que conlleva a que adicional al momento cuadrupolar en dirección ρ, ahora también aparezca un momento bipolar orientado a lo largo del eje z..

Se debe anotar que los resultados anteriores se basan sobre la suposición de que el potencial de confinamiento en las junturas esté dado por una función de paso. Como se ha demostrado previamente para el caso de SAQDs de tipo II, los esfuerzos a los que de manera inherente se encuentran sometidos los SAQDs durante su fase de crecimiento, pueden cambiar significativamente la forma del potencial de confinamiento [86]. No obstante, se asume que nuestros resultados para la distribución de carga en discos y anillos con excitón atrapado son cualitativamente aceptables, a pesar de que nuestro modelo simple desprecia el campo de esfuerzos al está sometido la heteroestructura.

La separación entre las partículas debido al mayor tunelamiento del electrón en el interior de la WL del QR se puede reforzar o debilitar mediante la aplicación de un campo magnético en la dirección de crecimiento. De un lado, el campo magnetico posibilita un confinamiento adicional al desplazar ambas partículas hacia el eje de simetría, lo cual conlleva a un mayor acercamiento de las partículas al interior del anillo. De otro lado, los niveles de energía suben, lo cual incrementa la posibilidad de tunelamiento hacia el

interior de la WL, aun para campos muy pequeños. Este efecto se produce primero en el electrón que es más liviano y luego, para un campo más intenso, se produce el desbordamiento del hueco.. Cuando el electrón desborda se produce un aumneto en la separción entre las partículas, pero esta separación posteriormente disminuye cuando ocurre el desbordamiento del hueco.

En la figura 3.6 se muestra la energía de enlace del excitón en función del campo magnético cuando el par e-h está confinado en QDs de dos diferentes morfologías, como discos de espesor 5nm y radio 30nm (línea a tramos) y para QRs con diferentes espesores de la WL (línea continua). En todos los casos el espesor de los QDs son iguales a 5nm, mientras que los radios interior y exterior, son iguales 20nm y 30nm, respectivamente.

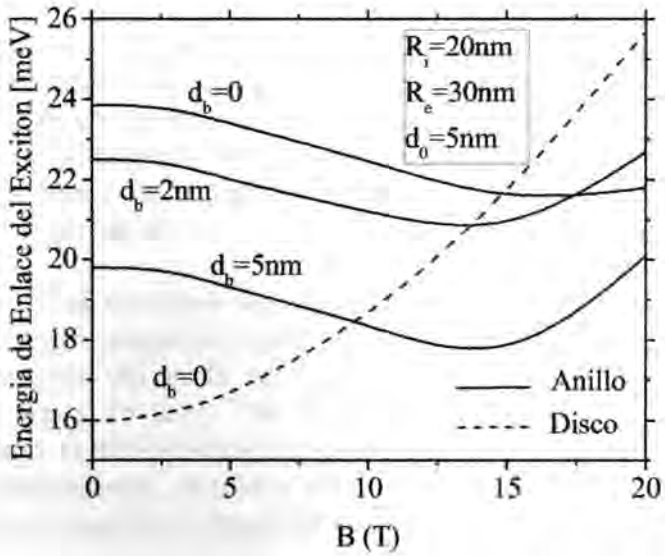

Figura 3.6 Energía de enlace del excitón en función del campo magnético en un disco de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$ (línea a tramos) y en varios anillos de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$ con diferentes espesores de capa húmeda (líneas continuas)

A partir de la figura 3.6 resulta evidente la existencia de una fuerte correlación entre la morfología y la dependencia de la energía del excitón con el campo magnético. Por ejemplo, en el caso del disco la energía de enlace del excitón crece monótonamente al incrementar el campo magnético. Esto se debe a que las partículas son haladas hacia el eje del disco, produciéndose un mayor acercamiento entre ellas. La morfología del anillo se caracteriza por la presencia de un orificio central en la estructura y por la existencia de dos junturas laterales, una exterior y otra interior. Esta es la razón por la cual las curvas en la figura 3.6 para QRs son absolutamente diferentes en comparación con el disco. En el anillo, cuando el campo magnético crece, la energía de enlace primero comienza a caer

hasta que alcanza un mínimo. Esto se debe a que bajo un campo relativamente débil, la partícula más masiva permanece dentro del anillo mientras la más liviana comienza a penetrar la región del orificio central, lo que conlleva a un incremento en la separación promedio del par e-h. Cuando la intensidad del campo magnético tiene un incremento adicional, el hueco comienza a penetrar en la región central, haciendo que la separación electrón-hueco vuelva a decrecer. Este hecho conlleva a que la energía de enlace comience a crecer. En la figura 3.6 se puede ver que la posición de los mínimos en las curvas para el QR son dependientes del espesor de la WL, de tal manera que cuanto más grande sea el espesor de la WL, más pequeña será la intensidad del campo magnético correspondiente a la posición del mínimo. Esta dependencia de la posición del mínimo está relacionada con la disminución en la altura de la barrera en las junturas laterales cuando el espesor de la WL crece.

Un aspecto que se debe resaltar en relación a la dependencia de la energía con el campo magnético, es que ésta cambia esencialmente cuando los espesores del QR crecen y las alturas de la WL disminuyen. Esto se debe a la significativa diferencia entre las probabilidades de tunelamiento del electrón y del hueco en la región central del anillo y a la elevación en la altura de la barrera lateral.

En la figura 3.7 se muestran los resultados de la energía de enlace, como función del campo magnético, para QRs con altura de 7nm, espesor de la WL, 1nm, espesor del anillo de 5nm y tres valores diferentes del radio exterior, 10, 15 y 25 nm. Las alturas laterales de la barrera en estas estructuras son significativamente más elevadas que en el caso que se consideró anteriormente, ya que la penetración de la partículas en la región central llega a ser posible únicamente bajo campos magnéticos muy fuertes.

A partir de esta figura se puede ver que la dependencia de la energía de enlace del excitón en los anillos con radio exterior de 10 y 15 nm es más bien similar, pero esta dependencia es absolutamente diferente en el anillo con radio exterior de 25 nm. En el primero de los casos mencionados, la energía de enlace crece monótonamente a medida que el campo magnético aumenta hasta alcanzar el valor de 25 T, en tanto que para el caso del QR con radio exterior de 25nm, la energía primero crece lentamente hasta alcanzar un valor máximo para B=10T y a partir de este punto un incremento adicional del campo magnético hace que la energía comience a caer. Para facilitar la interpretación de este resultado, se presenta en el recuadro de la figura 3.7 la dependencia de la separación promedio entre el electrón y el hueco con el campo magnético, el cual se calcula mediante la SPCF dada por la ecuación (3.16). Comparando las curvas de la figura principal y las del recuadro, se puede observar una simetría de tipo especular en estas curvas, ya que cuanto más pequeña es la energía de enlace más grande es la separación electrón-hueco. Es preciso anotar que las

separaciones promedio correspondiente a los estados ligados del excitón en materiales de $In_{0.55}Al_{0.45}As$ en el bloque, tanto en sistemas 2D como 3D, son iguales a medio ($\approx 5.2nm$) y a un ($\approx 10.4nm$) radio de Bohr efectivo, respectivamente. Por lo tanto, dadas las separaciones promedio para el par e-h en QDs, se podría pensar como si estos sistemas estuvieran inmersos un espacio isotrópico cuya dimensión es fraccionaria y la cual varía entre 2 y 3. Esto se debe a que el confinamiento en la dirección de crecimiento de cualquier QD de altura finita resulta ser muy fuerte pero incompleto. También es claro que el incremento del radio del anillo hace que la estructura del excitón sea más lineal, produciendo una disminución adicional en la dimensión efectiva del espacio. Esta es la razón por la cual la separación e-h en anillos de radio exterior de 15 y 25nm es apreciablemente más pequeña que en anillo con radio de 10nm. La curvatura de la estructura en el último caso es más grande, haciendo que la configuración para el excitón tenga un carácter más 2D que 1D y de manera contraria ocurre en el primer caso. La reducción de la altura de la barrera lateral efectiva más interna, en la presencia del campo magnético, es proporcional al valor $\gamma^2 R_{\text{int}}^2$.

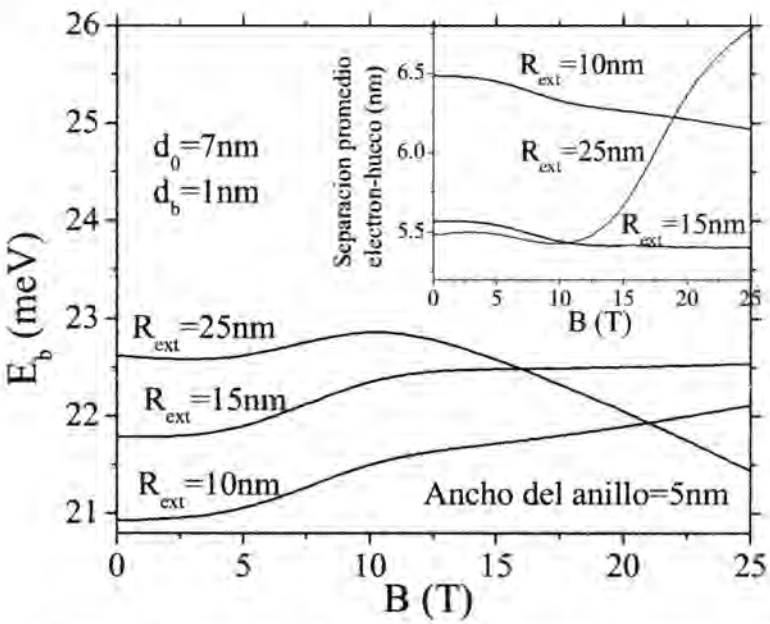

Figura 3.7 Energía de enlace del excitón en función del campo magnético en anillos de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$ con diferentes radios exteriores, 10, 15 y 25 nm. En el recuadro se presenta la variación de la distancia promedio entre el electrón y el hueco en función del campo magnético. Se utilizan las mismas convenciones empleadas en el la figura principal.

Para las estructuras consideradas, esta disminución es insuficiente para producir un incremento significativo de la probabilidad de tunelamiento del hueco en la región central, pero si es suficiente para hacer significativa la

probabilidad de tunelamiento de los electrones en QR con $R_1 = 20nm$ y campos magnéticos de intensidades mayores de 10T. En consecuencia, se puede observar en el recuadro de la figura 3.7, que en estas condiciones la separación promedio del par e-h se incrementa abruptamente, mientras la energía de enlace en la figura principal decrece. Este efecto de un incremento drástico de la separación e-h y el correspondiente decrecimiento de la energía de enlace del excitón, se puede llevar a cabo mediante la aplicación de un campo magnético significativamente más débil en un QR con radio interior más grande, lo cual abre alguna posibilidad adicional para el manejo del espectro del excitón. Como la disminución de la altura de la barrera más interna en presencia del campo magnético externo depende también del radio del QR, entonces se podría esperar que la separación e-h y la energía de enlace del excitón deberían ser muy sensibles a la variación del tamaño lateral del QR. De tal manera que cuanto más grande es el radio interior del QR y más ligera es la partícula, más alta es la probabilidad de tunelamiento de la partícula en la región central de la barrera. Por lo tanto, la variación del radio del anillo define otra posibilidad para incrementar abruptamente la separación e-h.

En la figura 3.8 se muestran los resultados de cálculo de la energía de enlace del excitón en función del radio exterior del QR de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$, para el cual se ha dado un valor fijo del espesor igual a 5nm y se toman valores diferentes de las intensidades del campo magnético, 0, 10 y 20T. En el recuadro de esta figura se exhibe la correspondiente variación de la separación promedio para el e-h.

A partir del recuadro se puede que cuando el radio exterior, R_{ext} incrementa desde 7.5nm (bajo la condición de que el espesor del anillo permanezca fijo), las funciones de onda del electrón y del hueco inicialmente se comprimen en los lados opuestos del anillo, haciendo que la separación e-h suba hasta alcanzar un valor máximo cuando R_{ext} llega a ser aproximadamente igual a un radio de Bohr efectivo (alrededor de 10nm). Para un incremento adicional de R_e, el electrón y el hueco saltan sobre el mismo lado del anillo, haciendo que la separación promedio se reduzca de manera rápida. En presencia de campos magnéticos intermedios o débiles, la altura de la barrera interior decrece lentamente cuando el radio interior crece, haciendo posible el tunelamiento del electrón en la región de la barrera central. En consecuencia, la separación e-h una vez más se incrementa. Se puede observar a partir del recuadro que este incremento se presenta a partir de $R_e \approx 17nm$ cuando el campo magnético se hace igual a 20T y para $R_e \approx 22nm$ cuando B=10T. También se puede observar que existe una total concordancia entre las curvas del recuadro y las que se muestran en la figura principal, ya que cuanto más grande es la separación e-h, más pequeña es la energía de enlace del excitón y viceversa.

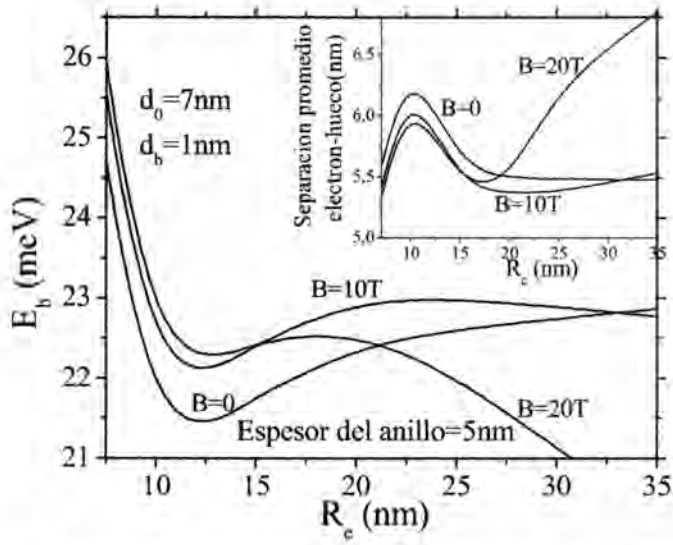

Figura 3.8 Energia de enlace del excitón en un anillo de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$ en función del radio exterior para un espesor fijo del anillo y para diferentes intensidades del campo magnético. En el recuadro se presenta la variación de la distancia promedio entre el electrón y el hueco en función del radio exterior. Se utilizan las mismas convenciones empleadas en el la figura principal.

3.2 EFECTO DE LA MORFOLOGÍA SOBRE LA DISTRIBUCIÓN DE CARGADE UN EXCITÓN EN SAQDs

En la sección anterior se estudió la forma como se distribuía la carga de un excitón confinado en un QD en forma de anillo y de disco. Los resultados demuestran que el campo magnético y el tamaño del QD tienen gran incidencia sobre la manera heterogénea como se distribuye la carga eléctrica. Como es bien conocido, no sólo el tamaño del QD afecta el espectro energético de las diferentes partículas confinadas dentro de él sino también su morfología. Por lo tanto, resulta lícito pensar en la forma como se distribuye la carga del par e-h en SAQDs de formas diferentes y en particular en QDs que posean morfologías más puntiagudas que los anillos, tal como la pirámide cónica y la lente. En estos dos casos se espera que al estar las partículas más confinadas, se presente una distribución de carga diferente a la observada en anillos y discos. Estas razones han motivado un estudio que permita determinar como la morfología del QD afecta la energía de enlace y la distribución de carga del excitón confinado en pirámides cónicas, lentes y discos (ver figura I.5). La altura variable del QD, d, la cual depende de la distancia ρ al eje de simetría, se define a través de una sencilla y versátil expresión unificada para los tres sistemas:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLIN
DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA "EFE" GÓMEZ

$$d(\rho)=d_b+d_0\left[1-(\rho/R_e)^n\right]^{1/n}\vartheta(R_0-\rho) \tag{3.19}$$

Acá R_e representa el radio de la base, d_b es el espesor de la WL, d_0 es la máxima altura del QD por encima de la WL y $\vartheta(x)$ es la la función escalón de Heaviside. La morfología del QD se controla por medio del parámetro generatriz de forma n, el cual corresponde a un entero que toma los valores 1 y 2 para QDs en forma de pirámides cónicas y lentes, respectivamente, mientras que el disco se genera cuando $n\to\infty$.

En el análisis que se va a realizar a continuación para la energía de enlace y la distribución de carga del par e-h confinado en QDs de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$, se hacen dos suposiciones. Lo primero, es que por razones de conveniencia matemática y en correspondencia con los datos experimentales, se asumirá que el cociente entre la altura máxima del SAQD y del radio de la base es muy pequeña $\left[(d_0+d_b)/R_e\ll 1\right]$. Esta condición permitirá desacoplar el movimiento rápido en dirección z del movimiento lento en el plano. La segunda condición tiene que ver con la omisión intencional de los efectos asociados con los campos de deformación que inherentemente se crean en el QD durante su fase de crecimiento y los cuales pueden llegar a tener un impacto significativo [147] en la estructura electrónica de los sistemas de pocas partículas confinadas en QDs.

Para solucionar la ecuación adimensional de Schrödinger (3.6), correspondiente a un excitón en un QD con simetría axial, se usará el mismo método de dimensión fractal con el que se hizo el análisis en la sección anterior para el excitón en discos y anillos. Grosso modo, en este método se requiere realizar dos pasos fundamentales. Lo primero es determinar las autofunciones y los respectivos autovalores de la ecuación de Schrödinger uni-particular y lo segundo es determinar y solucionar la ecuación que satisface la función de correlación $\Phi(r_{eh})$.

En la solución la ecuación uni-particular de schrödinger (3.7a) para el estado base $(m=0)$, se utiliza la aproximación adiabática que se describió en la sección 1.4, con fin de desacoplar el movimiento rápido del lento. La ecuación de onda para el movimiento rápido a lo largo del eje z esta dado por:

$$-\frac{\partial}{\partial z_p}\eta_p\frac{\partial f_p(\rho_p,z_p)}{\partial z_p}-V_p(\rho_p,z_p)f_{zp}(\rho_p,z_p)= \tag{3.20a}$$
$$E_{zp}(\rho_p)f_{zp}(\rho_p,z_p);\quad p=e,h$$

donde ρ_p se debe tratar como un parámetro. El potencial de confinamiento $V_p(\rho_p, z_p)$ se define a través de la ecuación (3.5), donde el espesor $d(\rho)$ del QD está definido por la ecuación (3.19). Los autovalores $E_{zp}(\rho_p)$ que se encuentran al resolver la ecuación de onda (3.20), representan los potenciales de confinamiento para el movimiento lento del electrón o del hueco en el plano perpendicular a z. La ecuación de onda uni-particular en el plano se puede escribir como:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\eta_p \rho \frac{d f_{\rho p}(\rho)}{d\rho}\right] + E_{zp}(\rho) f_{\rho p}(\rho) = E_p f_{\rho p}(\rho);\ \ p = e,h \qquad (3.20b)$$

Claramente se puede ver que la función de onda uni-particular completa se puede escribir como:

$$f_p(\mathbf{r}_p) = f_{zp}(z_p, \rho_p) f_{\rho p}(\rho_p);\ \ p = e,h \qquad (3.21)$$

Una vez se obtienen las curvas de potencial $E_{zp}(\rho_p)$, las funciones de onda para el estado base $f_{\rho p}(\rho_p)$, correspondientes al movimiento plano de la partícula y las energías uni-particulares para el estado base del electron E_e y del hueco E_h, se pueden encontrar resolviendo numéricamente la ecuacion (3.20b) con condiciones de frontera $f'_{\rho p}(0) = 0$ y $f_{\rho p}(\infty) = 0$. En nuestro caso se usa nuevamente el método de barrido trigonométrico [87-80].

En la figura 3.9 se puede ver que la forma del potencial de confinamiento en el plano $E_{zc}(\rho_c)$, es fuertemente dependiente de la morfología del QD siendo casi una imagen especular de los perfiles de los QD. En nuestro modelo con altura del QD dado por la ecuación (3.19), las curvas de potencial para el movimiento de las partículas en el plano tienen la forma casi triangular para el caso de la pirámide cónica (n=1), forma casi parabólica para la lente(n=2) y rectangular para el disco ($n \to \infty$). La expresiones analíticas aproximadas para la depencia del potencial con la distancia, se pueden escribir como:

$$V_p(\rho_p) \approx \begin{cases} E_{layer}^{(p)} + 0.4 \cdot V_{0p}\left(\rho_p / R_e\right)^n;\ \ 0 < \rho_p < R_e; \\ E_{layer}^{(p)} + 0.4 \cdot V_{0p};\ \ \rho_p > R_e; \end{cases} \qquad p = e,h \qquad (3.22)$$

En esta ecuación $E_{layer}^{(p)}$ y $E_{layer}^{(p)} + 0.4 \cdot V_{0p}$ representan las energías del estado base de las partículas en la capa de InAs con espesores de 5 y 2 nm, respectivamente.

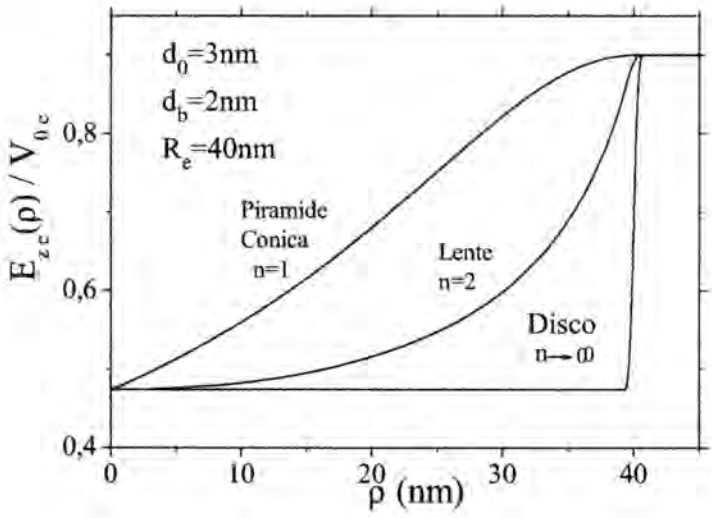

Figura 3.9. Curvas de potencial efectivo para el movimiento del electrón en el plano en puntos cuánticos en forma de disco, lente y pirámide cónica.

La ecuación de Schrödinger (3.6) para el excitón, no es posible resolverla exactamente y por lo tanto se debe emplear un método aproximado a fin de encontrar la función de onda, $\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h, \tau = 1)$ y la energia, $E(\tau = 1)$ para el estado base. En nuestro caso se usará el principio variacional y para ello se propone una función de prueba de la forma:

$$\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h, \tau = 1) = \Psi^{(0)}(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h, \tau = 0)\Phi(r_{eh}) = f_e(\mathbf{r}_e) f_h(\mathbf{r}_h)\Phi(r_{eh}) \qquad (3.23)$$

donde $\Phi(r_{eh})$ es una función que tiene en cuenta los efectos de correlación del par e-h.

Mediante el principio variacional de Schrödinger se puede encontrar la mejor aproximación de $\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h, \tau = 1)$ a través de la minimización de la funcional $F[\Phi] = \langle f_e f_h \Phi | H - E | f_e f_h \Phi \rangle$. Tomando la derivada funcional con respecto a $\Phi(r)$ y después de algunas manipulaciones matemáticas se obtiene la ecuación de onda (3.14)

$$-\frac{1}{\mathrm{P}_0(r)}\frac{d}{dr}\mathrm{P}_0(r)\frac{d\Phi(r)}{dr}+\frac{2}{r}\Phi(r)=-E_b\Phi(r); \tag{3.24}$$
$$E_b=E(\tau=0)-E(\tau=1)=E_e+E_h-E$$

donde E_b es la energía de enlace del excitón y $\mathrm{P}_0(r)$ es una función dada por:

$$\mathrm{P}_0(r)=\int d\mathbf{r}_e\int\left|f_e(\mathbf{r}_e)\right|^2\left|f_h(\mathbf{r}_h)\right|^2\delta(|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_h|-r)d\mathbf{r}_h \tag{3.25}$$

La ecuación de onda (3.24) que satisface $\Phi(r)$ es similar a un átomo de hidrógeno en un espacio isotrópico efectivo donde la parte radial del Jacobiano está dada por $\mathrm{P}_0(r)$. Las propiedades del espacio, generalmente asociadas con la dependencia del Jacobiano sobre r, que de acuerdo con (3.25), estas propiedades deben definirse por la geometría de la heterostructura. Si para cualquier heterostrura esta dependencia fuera una ley de potencias, $\mathrm{P}_0(r)=Cr^{D-1}$, entonces el parámetro de escalamiento D en esta dependencia se podría considerar como la dimensión del espacio efectivo y la ecuación (3.14) tendría que coincidir con el problema de autovalores para un átomo de tipo hidrogenoide en un espacio D-dimensional, donde D puede ser un parámetro entero o fraccionario [87].

Para pequeñas distancias de r y partiendo de la ecuación (3.25), se puede obtener una expresión aproximada de la dependencia del Jacobiano sobre r, solo basta tener en cuenta que en este caso los vectores $\mathbf{r}_e$ y $\mathbf{r}_h$ son casi coincidentes, haciendo que

$$\mathrm{P}_0(r)=4\pi Cr^2;\ C=\int f_e^2(\mathbf{r})f_h^2(\mathbf{r}) \tag{3.26}$$

Estas relaciones evidencian el carácter tri-dimensional del excitón para separaciones muy pequeñas del electrón-hueco independientemente de la geometría de confinamiento.

La ecuación de onda (3.24) se debe complementar por dos condiciones de frontera, una en el punto $r=0$ y la otra para r tendiendo a infinito. La primera de ellas surge de la condición de "cusp" [148] y de la relación (3.25):

$$\Phi'(0)/\Phi(0)=\lim_{r\to 0}\left[-2P_0(r)/rP_0'(r)\right]=-1 \tag{3.27}$$

La segunda condición de frontera se puede obtener tomando en cuenta que para grandes separaciones del par e-h, las funciones de onda $\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h, \tau = 1)$ y $\Psi^{(0)}(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h, \tau = 0)$ son similares y por lo tanto, la función $\Phi(r)$, de acuerdo a la expresión (3.23) debería ser casi constante. En consecuencia se tiene:

$$\lim_{r \to \infty} \Phi'(r) = 0 \tag{3.28}$$

Los cálculos numéricos que se deben realizar a fin determinar la energía de enlace del excitón y la función de onda, con la cual se determine posteriormente la distribución de carga del par e-h en el QD, consiste fundamentalmente de tres pasos. Lo primero que se debe hacer es determinar las funciones de onda uni-dimensionales, $f_e(\mathbf{r}_e)$ y $f_h(\mathbf{r}_h)$ por medio de la aproximación adiabática, luego el cálculo numérico de la integral (3.26) y por último se debe encontrar la función de onda y la correspondiente energía más baja del problema de autovalores (3.24). Nosotros hemos calculado la integral (3.25) en 100 puntos sobre una malla uniforme y su resultado se usa después para determinar el Jacobiano $P_0(r)$ para una separación arbitraria del elecetrón-hueco mediante la técnica de Spline cúbico. Las ecuaciones de onda (3.24) con condiciones de frontera (3.27) y (3.28) se resuelven usando el método de barrido trigonométrico.

Una de las características más relevantes del par electrón-hueco en SAQDs, tiene que ver con la distribución heterogénea de carga, dentro y alrededor del QD, debido a las capacidades tan diferentes que tienen el electrón y el hueco para tutelar tanto hacia la región de la barrera como hacia la WL. Este hecho, tal como se demostró en la sección anterior, puede generar momentos multipolares de diferente orden, los cuales se pueden expresar en términos de las densidades de probabilidad de encontrar al electrón, $\Pi_e(\rho, z)$ y al hueco $\Pi_h(\rho, z)$ en el punto en el cual las coordenadas cilíndricas son (ρ, z). La diferencia entre estas densidades de probabilidad del electrón y del hueco, permite determinar la densidad de distribución de carga $Q(\rho, z)$ en SAQDs con excitón atrapado, es decir: $Q(\rho, z) = \Pi_e(\rho, z) - \Pi_h(\rho, z)$

En la figura 3.10 se muestran las curvas de contorno, las cuales corresponden a las líneas de nivel de las distribuciones de la densidad de carga a lo largo de sección transversal de un QD de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Ga_{0.65}Al_{0.35}As$ en forma de disco, lente y pirámide cónica con excitón atrapado.

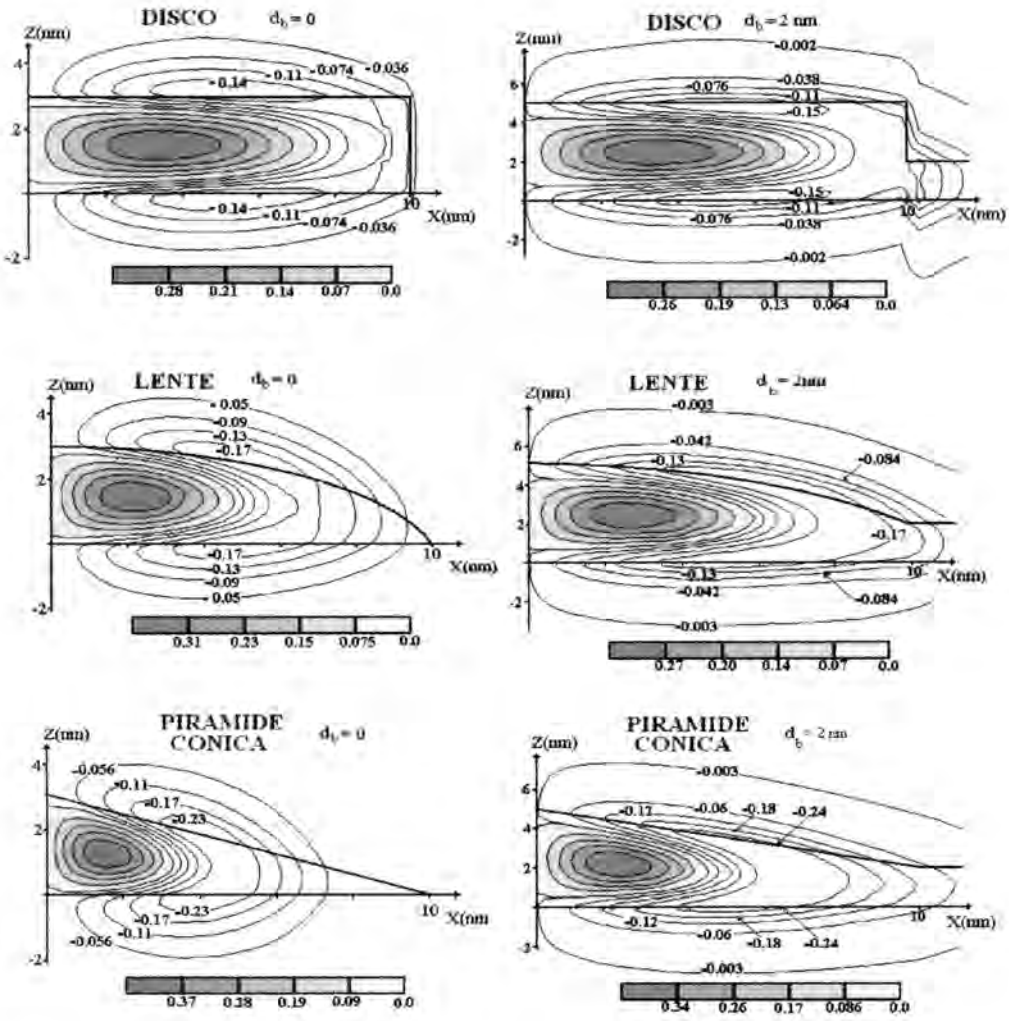

Figura 3.10. Curvas de contorno de la distribución de carga radial inducida por excitón en un plano que pasa a través del eje de simetría de un QD de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$ cuyas formas corresponden a un disco, una lente y una pirámide cónica. Para las tres morfologías se toma un radio de la base igual a 20nm y la altura máxima para los QDs de la izquierda sin capa húmeda es de 3nm y para los de la derecha la máxima altura por encima de la con húmeda es de 3nm y el espesor de esta capa es de 2nm. Las partes sombreadas de estas figuras indican las regiones que se cargan positivamente dentro del $In_{0.55}Al_{0.45}As$. Las líneas gruesas muestran los perfiles de los QDs

En la figura se ha hecho una comparación entre puntos sin capa húmeda (lado izquierdo) y puntos con capa húmeda (lado derecho), lo cual permitirá observar el efecto de la WL en la distribución de carga del par e-h. Las partes sombreadas de la figura indican las regiones dentro del material $In_{0.55}Al_{0.45}As$ que están cargadas positivamente. Se puede ver que la

densidad de distribución de carga radial dentro de los QDs y cerca al eje es positiva, mientras que en las partes superior e inferior, vecinas a las junturas del QD, la carga es negativa. También se puede ver que el tunelamiento del electrón en el plano de la capa, en las curvas del lado izquierdo para QDs sin WL, es despreciable. En este caso ambas partículas permanecen principalmente dentro del QD, pero el hueco por ser más masivo se sitúa más cerca del eje. Para el movimiento de las partículas en el plano, la existencia de la WL conduce a una disminución de la altura de la barrera, lo cual refuerza significativamente su tunelamiento en la dirección lateral. Este hecho conlleva a que las zonas periféricas cercanas a las junturas del QD estén mucho más cargadas que en los QDs sin WL.

Comparando en esta figura 3.10 las curvas de nivel para el disco, la lente, y la pirámide cónica, se puede observar también la variación de la distribución de carga, dentro y alrededor de las capas de InAs, la cual es similar a una distribución de carga de una superficie metálica, cuando las geometrías del QD varían desde un punto cuántico plano, como el disco, a otro más puntiagudo como la pirámide cónica. Esta variación en la distribución de carga, es una consecuencia del mayor confinamiento que se produce en las geometrías puntiagudas, lo cual se manifiesta en la figura 3.10 a través de un desplazamiento, tanto del centro de la carga positiva dentro del QD como de la nube de carga negativa, hacia el eje de simetría, conservando casi invariable la distribución de carga en la dirección vertical a medida que la geometría del QD se hace más puntiaguda.
Debido a la simetría axial e independientemente de morfología, la componente del momento dipolar en el es igual a cero y la distribución de carga en estos QDs, inducida por la captura del excitón, se caracteriza por tener un momento dipolar diferente de cero en la dirección de crecimiento del cristal y un momento cuadrupolar en el plano perpendicular al eje de simetría. Para aclarar la naturaleza de la componente vertical del momento dipolar inducido por el confinamiento del excitón en el QD y para explicar el porque este momento dipolar es más grande en estructuras con geometrías puntiagudas, se muestra en la figura 3.11 la distribuciones de carga en dos pirámides cónicas de alturas diferentes.

Las flechas en estas figuras muestran la dirección del momento dipolar a lo largo de las secciones transversales correspondientes. Se puede ver que cuanto más alta es la estructura más grande es la componente del momento dipolar en la dirección de crecimiento cristalino. Esto se debe al hecho de que el electrón se sitúa con mayor probabilidad en la región periférica del QD que está más cerca de la base, gracias a que el menor espesor le ofrece al electrón condiciones de mayor confinamiento. Contrariamente, el hueco se sitúa en la vecindad del eje de simetría y sobre el plano intermedio que está entre la base y la parte más alta del QD. Por lo tanto, la existencia de un momento dipolar diferente de cero en la dirección de crecimiento del

cristal, se puede atribuir al confinamiento no homogéneo en la dirección vertical de los QDs con morfología en forma de cuña.

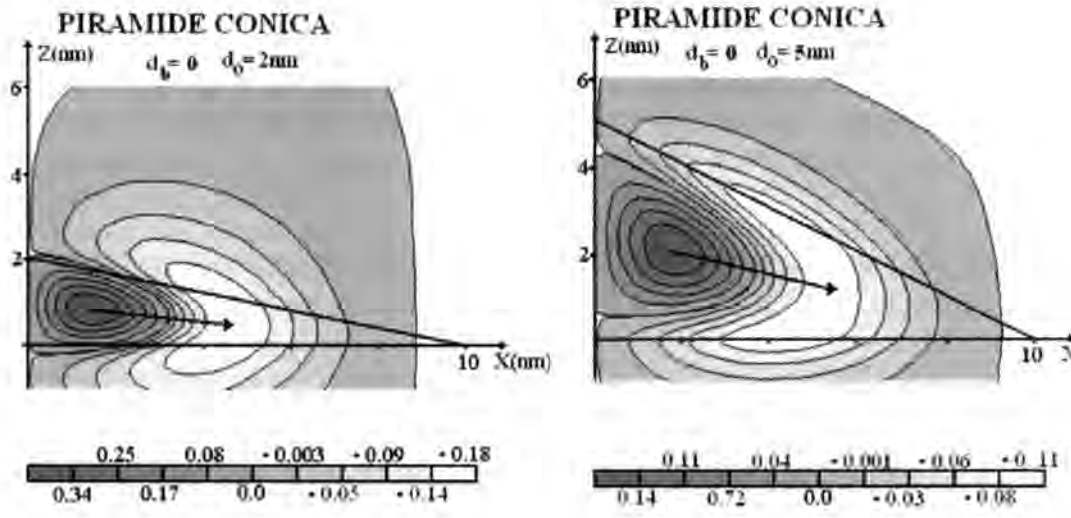

Figura 3.11. Lo mismo que en la figura 3.10, solo que aquí se tienen dos pirámides cónicas con alturas de 2nm y 5nm, respectivamente.

En contraste al momento dipolar paralelo al eje de simetría, el momento cuadrupolar en el plano se puede atribuir a la diferencia entre el tunelamiento promedio de las partículas hacia la WL y el cual, como se ve a partir de la figura 3.10, aumenta significativamente cuando el espesor de la WL crece y se hace comparable con el valor de la altura del punto que está por encima de la WL.. El valor del momento cuadrupolar también es sensible a la alteración en la morfología del QD. Se puede ver de la figura 3.10 que la separación e-h en la dirección lateral es más fuerte en QDs con forma puntiaguda y esta separación se incrementa cuando la morfología de los QDs cambia su forma desde un disco a una lente y después a una pirámide cónica. Así, los momentos, dipolar y cuadrupolar de los QDs con excitón atrapado, constituyen características importantes relacionadas con su morfología y donde los valores de estos momentos sufren un cambio considerable cuando la forma del QD se modifica.

Otra característica importante, la cual junto a la separación e-h puede llegar a sufrir una variación considerable debido a los cambios en la morfología del QD, es la energía de correlación del excitón: $E_b = E(\tau = 0) - E(\tau = 1) = E_e + E_h - E$. En la figura 3.12 se muestra la dependencia de la energía de correlación del excitón con el radio de la base del SAQD, el cual tiene una altura de 3nm sobre la WL y ésta a su vez tiene un espesor de 2nm. La gráfica se realiza para SAQDs con tres morfologías diferentes: disco, lente y pirámide cónica.

A partir de esta figura se puede ver que la dependencia de la energía de correlación con el radio de la base del QD es similar para las tres morfologías que se analizan, obteniéndose los valores más altos en la pirámide cónica ($n=1$), seguido por la lente ($n=2$) y el disco ($n\to\infty$). En otras palabras, cuanto más pequeño es el parámetro generatriz de forma n en la ecuación (3.19), más grande es la energía de correlación del excitón. En todos los casos, al incrementar el radio de la base se hace más débil el confinamiento y las energías de correlación caen y se aproximándose lentamente al valor límite de 4Ry*, el cual corresponde a la energía de correlación de un excitón en 2D. Para explicar esta tendencia vamos a establecer la dependencia de la energía de enlace del excitón con el parámetro generatriz de forma y para ello se hará uso de la relación de incertidumbre.

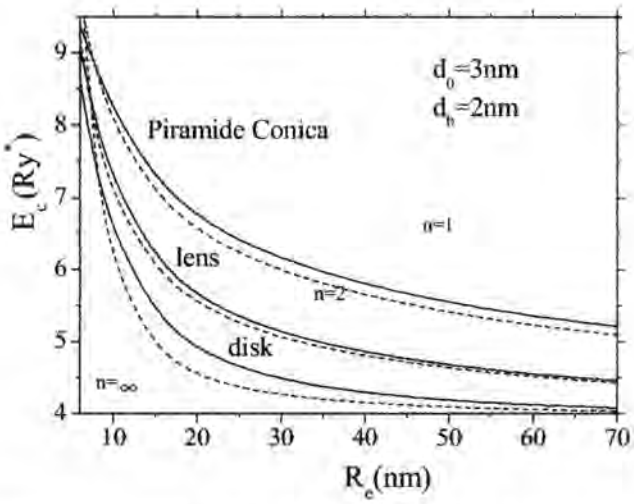

Figura 3.12. Energía de correlación del excitón como función del radio de la base para QDs con diferentes perfiles obtenidos con (3.14)(líneas continuas) y usando principio de incertidumbre (líneas a tramos).

Las energías uni-particulares para el estado base en un campo central de 2D con potencial dado por (3.23), se pueden obtener a partir de la relación de incertidumbre como:

$$E_p \approx E_{capa}^{(p)} + Ry^*\left(0.4\cdot V_{0p}/Ry^*\right)^{2/(n+2)}\left(\mu/4m_{pw}\right)^{n/(n+2)}\left(a_0^*/R_e\right)^{2n/(n+2)};\ p=e,h \quad (3.29)$$

El primer término de esta ecuación da la energía potencial de la partícula localizada cerca del eje y el segundo término corresponde a la energía cinética para el movimiento en el plano. Cuando la base del radio crece, la energía cinética cae y tiende a cero, pero la rapidez de la convergencia a cero, depende del parámetro generatriz de forma n. Por ejemplo, en la pirámide cónica este término en la ecuación (3.29) decrece como $\approx 1/\sqrt[3]{R_e^2}$, en lentes como $\approx 1/R_e$ y en discos como $\approx 1/R_e^2$. Para estimar la energía

del par e-h, se debería tener en cuenta que la energía cinética de este sistema es aproximadamente igual a la energía del solo hueco más el término generado por la atracción entre particulas. La energía de interacción del par e-h en QDs con radio más grande que 10nm es de alrededor de -4Ry*, igual al valor de la energía de correlación del excitón bi-dimensional no confinado (la separación promedio entre el electrón y el hueco en dos dimensiones es de alrededor de 5nm). Por lo tanto, la energía estimada para el excitón es: $E_p \approx E_{capa}^{(p)} + E_h - 4R_y{}^*$. Finalmente, de acuerdo a la definición dada para la energía de correlación, se puede obtener la siguiente expresión semi-empírica para la energía de correlación del excitón como función del radio de la base R_e del QD con diferente parámetro generatriz de forma n:

$$E_b \approx \left[4+(2+2/n)(a_0{}^*/R_e)^{2n/(n+2)}\right]\cdot Ry^*;\ n=1,2,\infty \qquad (3.30)$$

Los resultados correspondientes a las energías de correlación del excitón estimadas usando esta relación, se muestran en la figura 3.12 con líneas a tramos. El buen acuerdo con el método variacional es muy gratificante si se considera la simplicidad de la estimación.

Para analizar el efecto de la variación de la altura del QD sobre las propiedades del excitón, se ha calculado la dependencia de la energía de correlación con el radio de la base de una pirámide cónica para tres valores diferentes de la altura d_0 sobre la WL, la cual tiene un espesor de 2nm. Los resultados se muestran en la figura 3.13.

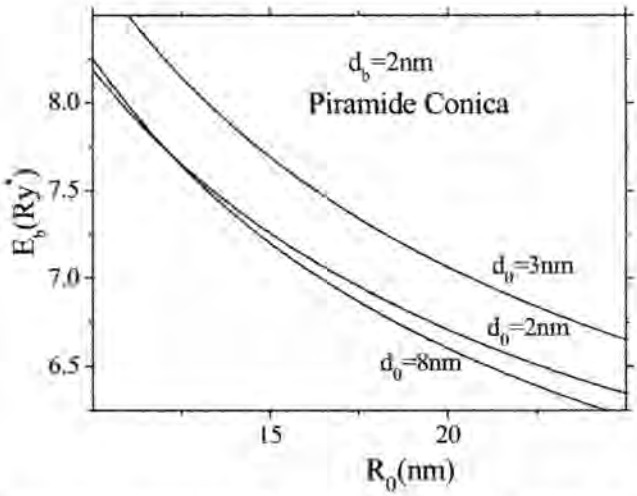

Figura 3.13 Energía de correlación del excitón en función del radio del QD de forma piramidal para tres diferentes alturas

En primera instancia uno estaría tentado a pensar que una disminución de la altura d_0 del QD debería siempre producir una reducción de la separación entre el electrón y el hueco y en consecuencia, la energía de correlación del excitón debería subir. No obstante, se puede observar en la figura 3.13 que las energías de correlación del excitón en QDs con alturas de 2nm, son más bajas que las energías de enlace en QDs con altura de 3nm independientemente del valor del radio del QD. La razón de este comportamiento inusual de la energía correlación del excitón, se debe a que cuando la altura del QD se reduce desde 3nm a 2nm, la energía cinética del electrón se incrementa y se hace comparable con la altura de la barrera del potencial de confinamiento. Bajo estas circunstancias se produce un desbordamiento de la función de onda del electrón hacia la región de la barrera, principalmente a lo largo de la dirección z. Esto hace que la separación entre el electrón y el hueco se incremente, llegando a ser tan grande como la separación entre partículas débilmente confinadas en QDs de 8nm de altura. Como ha sido estimado anteriormente, usando la relación de incertidumbre, el valor umbral para el ancho del pozo correspondiente al desbordamiento de la función de onda del electrón en la región de la barrera es de alrededor de 1nm. Esta es la razón del inusual comportamiento de la energía de enlace del excitón en QDs cuyas alturas son más bajas de 3nm.

Otra característica interesante de las dependencias presentadas en la figura 3.13 está relacionada con la intersección de las curvas correspondientes a QDs con alturas de 2 y 8nm cuando sus radios son de alrededor de 12nm. Este comportamiento solamente puede explicarse por un menor confinamiento del electrón en QDs con altura de 2nm que en QDs con altura de 8nm. En consecuencia, podemos concluir que una disminución de la altura del QD por debajo de un cierto valor crítico, siempre estará acompanado del desbordamiento de la función de onada del electrón, no solo en dirección z sino también en dirección lateral.

3.3 DISTRIBUCIÓN DE CARGA EN PUNTOS CUÁNTICOS ACOPLADOS VERTICALMENTE CON EXCITÓN

En las secciones anteriores se demostró que los electrones y los huecos confinados en SAQD tienen probabilidades diferentes para tunelar hacia la región de la matriz que rodea al QD. Este hecho hace que al confinar un excitón en un QD, se formen densidades de carga opuestas entre la parte central del QD, la cual se carga positivamente, y la periferia del QD que se carga negativamente.

Recientemente se ha establecido la existencia de sistemas compuestos por dos SAQDs que se pueden disponerse vertical o lateralmente. Estos sistemas acoplados han generado grandes expectativas debido a sus

potenciales aplicaciones en opto electrónica y computación cuántica [112, 149].

En esta sección vamos a extender el método de dimensión fractal usado en el estudio de los excitones en un solo QD, al caso de excitones confinados en dos puntos cuánticos acoplados verticalmente. Para lograr este propósito, se consideran dos QDs de $In_{0.55}Al_{0.45}As$/ $Al_{0.35}Ga_{0.65}As$ en forma de lente (parámetro generatriz de forma $n = 2$), altura máxima sobre la WL d_0, espesor de la WL, d_b y separación entre puntos h. La representación esquemática en 3D para este sistema de dos puntos apilados verticalmente se muestra en la figura 3.14.

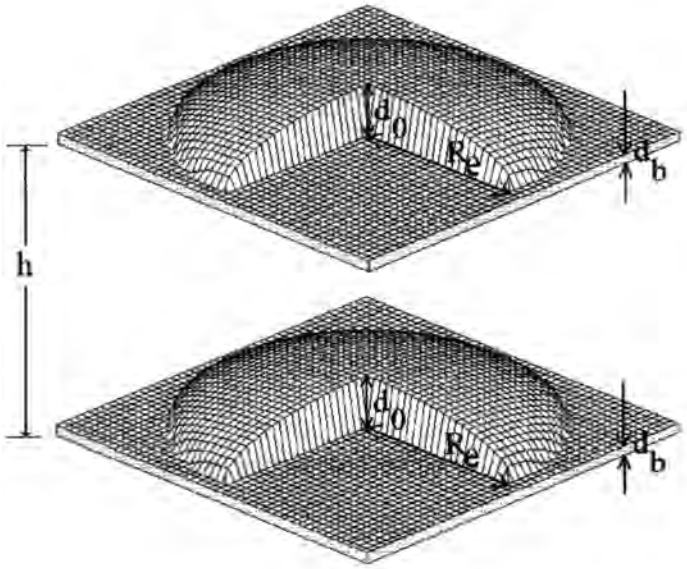

Figura 3.14. Representación esquemática de un sistema de dos punto cuánticos acoplados verticalmente

La ecuación adimensional de Schrödinger en la aproximación de masa efectiva para el excitón en presencia de campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ puede escribirse en coordenadas cilíndricas como:

$$H(\boldsymbol{r}_e,\boldsymbol{r}_h,\tau)\Psi(\boldsymbol{r}_e,\boldsymbol{r}_h,\tau) = E(\tau)\Psi(\boldsymbol{r}_e,\boldsymbol{r}_h,\tau);$$
$$H(\boldsymbol{r}_e,\boldsymbol{r}_h,\tau) = H_e(\boldsymbol{r}_e) + H_h(\boldsymbol{r}_h) - 2\tau/r_{eh} \qquad (3.31a)$$

$$H_p(\mathbf{r}_p) = -\nabla_p \eta_p \nabla + V_p(\rho_p, z_p) + \eta_p \gamma^2 \rho_p^2/4 + i\eta_p \gamma \partial/\partial\varphi_p;$$
$$\eta_p = \mu/m_p;\ p = e,h \qquad (3.31b)$$

$$V_p(\rho,z) = V_p - V_p\vartheta(z)\vartheta[d(\rho)-z] - V_p\vartheta(z-h)\vartheta[h+d(\rho)-z] \qquad (3.31c)$$

donde r_e y r_h son los vectores de posición del electrón y el hueco, $\left(\mathbf{r}_p = \{\rho_p, \varphi_p, z_p\},\ p = e,h\right)$ y $r_{eh} = |r_e - r_h|$ es la separación entre partículas. El parámetro τ en el Hamiltoniano (3.31) es igual a cero para el caso uni-particular y uno para el problema real con interacción Coulombiana entre el electrón y el hueco.

Para resolver el problema de autovalores 3.31a mediante el método de dimensión fractal, se deben realizar varios pasos. Lo primero que se debe hacer es resolver el problema uni-particular con Hamiltoniano (3.31b), tanto para el electrón (e) como para el hueco (h). Esto permitira determinar autofunciones $f_e(\mathbf{r}_e)$ y $f_h(\mathbf{r}_h)$, así como sus respectivos autovalores E_e y E_h. Este objetivo se puede lograr mediante la aproximación adiabática, la cual se puede implementar garantizando que $(d_0 + d_b) >> R_e$. Una vez conocidas estas autofunciones se propone una función de prueba $\Psi(r_e, r_h, \tau = 1)$ como el producto de las funciones de onda uni-particulares y una función de correlación, esto es: $\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h, \tau = 1) = f_e(\mathbf{r}_e) f_h(\mathbf{r}_h) \Phi(r_{eh})$. Mediante el método variacional de Schrödinger se puede obtener la ecuación de onda que satisface la función de correlación $\Phi(r_{eh})$ y las respectivas condiciones de frontera que se deben cumplir. La solución de esta ecuación de onda (3.24) se debe hacer por métodos numéricos, que en el caso presente se usa una vez más el método de barrido trigonométrico.

Los resultados de cálculo para las distribuciones de carga y para la energía del excitón en puntos acoplados verticalmente, se muestran en tres diferentes figuras. Las distribuciones de carga para el excitón, calculadas sobre un plano que contiene al eje de simetría, se presentan a manera de curvas de nivel en las figuras 3.15(a-d). La densidad de carga se calcula como la diferencia entre las distribuciones de densidad de probabilidad entre el electrón y el hueco, lo cual se hace usando las funciones bi-particulares dadas por la ecuación (3.23). Los parámetros geométricos de las estructuras y la intensidad del campo magnético γ se dan en las figuras.

El perfil de la sección transversal del QD se describe a través de las líneas sólidas más gruesas. Las partes oscuras de las figuras indican las zonas dentro del material de $In_{0.55}Al_{0.45}As$ que se hallan cargadas positivamente, mientras las partes más claras corresponden a las regiones periféricas que se encuentran cargadas negativamente. Debido a la diferencia de masas entre el electrón y el hueco, se puede ver como el tunelamiento del electrón se hace significativo cuando la máxima altura de la lente esta entre 3-5nm, mientras que el hueco permanece mas fuertemente restringido a la parte central del QD. Esta es la razón por la cual el interior de cada punto, con excitón confinado, se carga positivamente, mientras que las regiones periféricas alrededor de las junturas de cada punto se cargan negativamente.

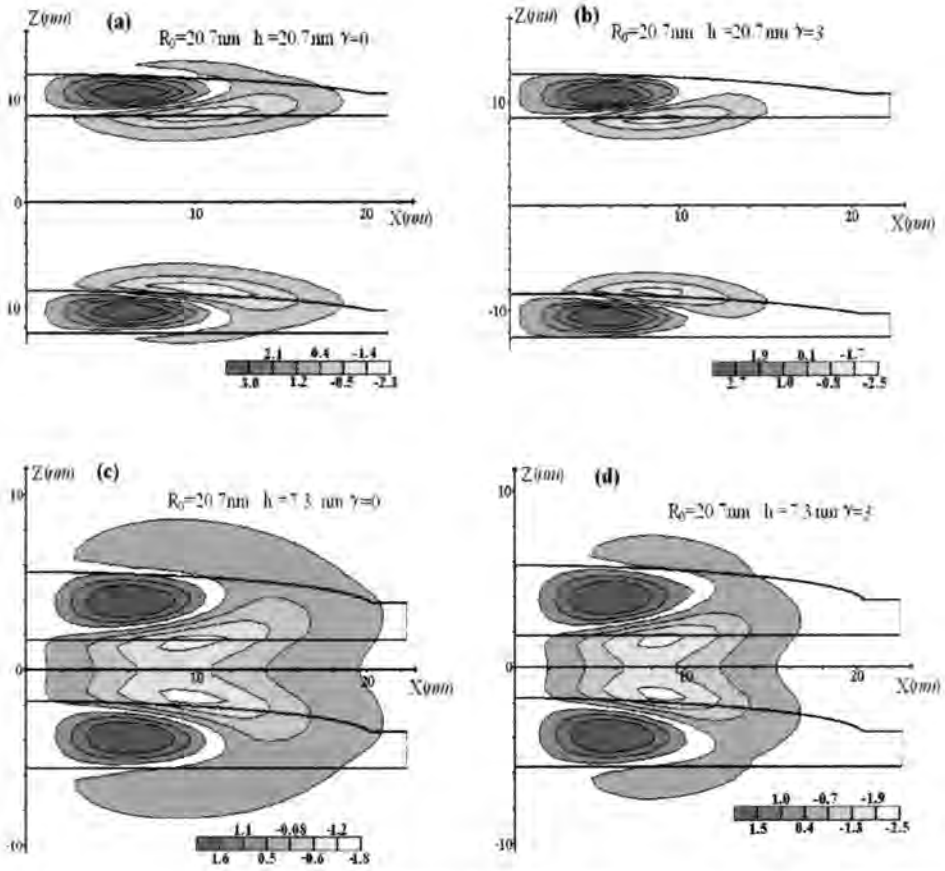

Fig. 3.15 lineas de nivel para densidad de distribución de carga a lo largo de una plano (x-z) para un sistema formado por dos lentes acopladas verticalmente y dentro de las cuales se confina un excitón bajo la presencia de un campo magnetico $\gamma = 0$ (figuars de la izquierda a,c) y $\gamma = 3$ (figures de la derecha b,d)

La parte izquierda de la figura corresponde al caso de cero campo magnético para grandes (a) y pequeñas (c) separaciones entre QDs. Se puede ver un cambio significativo en las distribuciones de carga cuando los puntos se aproximan uno al otro. Cuando la separación entre puntos es grande, la carga negativa de manera preferencial escapa en dirección lateral, mientras que para el caso de pequeñas separaciones, la carga negativa escapa en todas las direcciones alrededor de las junturas. También de puede ver que bajo la influencia del campo magnético externo, figuras 3.15 (b,d) se produce una disminución significativa del tunelamiento del electrón en dirección lateral, lo cual se debe al fuerte confinamiento de la distribución electrónica en dirección radial por acción del campo magnético. Comparando las

distribuciones de carga del lado izquierdo y derecho de la figura 3.15, se puede ver un considerable confinamiento de la distribución electrónica en dirección radial por la acción del campo magnético. Debido a la simetría de la geometría que se analiza, el momento dipolar para todas las distribuciones es casi cero, pero la distribución de carga se caracteriza por un momento cuadrupolar, el cual incrementa a medida que la separación entre puntos disminuye y la intensidad del campo crece.

En las figura 3.16 se muestra la dependencia de la energía de enlace para el estado base de un excitón en dos QDs en forma de lente que se hallan acoplados verticalmente. El estudio se hace para tres diferentes alturas, pero en cada caso separación entre puntos es la misma e igual a 20nm.

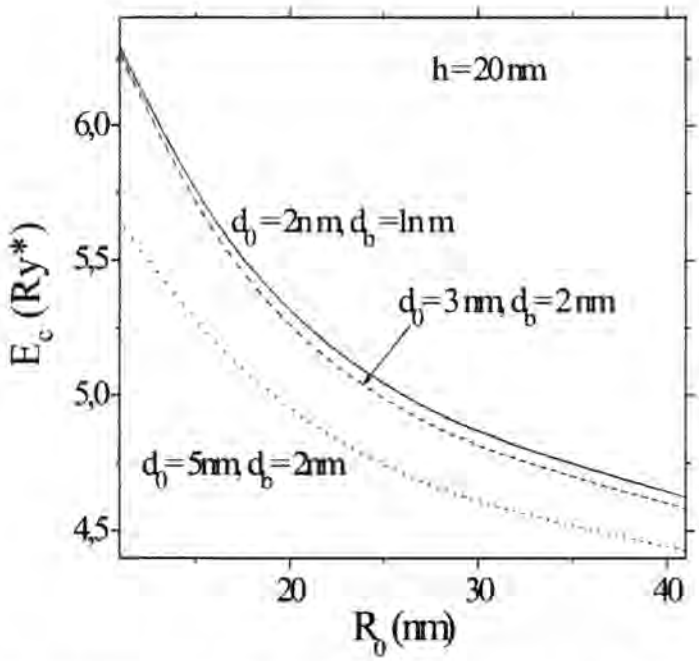

Fig. 3.16 Energía del estado base de un excitón, en lentes cuánticas de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Ga_{0.65}Al_{0.35}As$ acopladas verticalmente, como función del radio de la base

Se puede ver que la que las energías de correlación disminuye monótonamente a mediada que el radio de la base crece, y paulatinamente, en todos los casos, la energía se acerca al valor asintótico de 4Ry*, el cual corresponde a la energía correlación del excitón en sistemas bi-dimensionales, es decir en puntos para los cuales se cumple que la razón $d_0/R_e \to 0$. La dependencia de las energías de correlación con el radio de la base para los diferentes espesores de la WL y de la lente, en general tienen un comportamiento similar, donde los valores más altos de energía se

obtienen para las lentes de menor altura, debido al incremento adicional del confinamiento en la dirección de crecimiento.

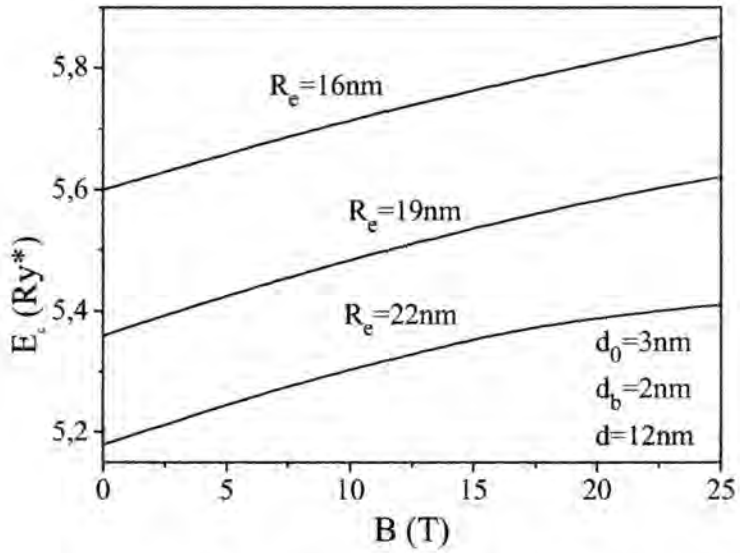

Fig. 3.17 Energia del estado base de un excitón, en lentes cuánticas de $In_{0.55}Al_{0.45}As/Ga_{0.65}Al_{0.35}As$ acopladas verticalmente, como función del campo magnético.

Finalmente, en la figura 3.17 se muestra a dependencia de la energía de correlación del excitón con le campo en heteroestructuras con diferente radio de la base. Se puede observar como la energía de correlación crece monótonamente al aumentar la intensidad del campo magnético, lo cual se debe a que el campo empuja a las partículas hacia el centro del anillo, produciéndose así un mayor acercamiento entre el electrón y el hueco, lo que finalmente se traduce en aumento de la interacción Coulombiana y por consiguiente de la energía.

CONCLUSIONES

- Se ha estudiado el espectro energético de los sistemas de pocas partículas, tanto del tipo móviles, formadas sólo por los portadores de carga como un par electrón-electrón (e-e), excitón (X), triones (X^+ y X^-), como del tipo inmóviles, correspondientes a los estados ligados de uno o dos electrones a un centro de carga positiva fija (D^0 y D^-). Se han considerado varios modelos de sistemas de pocas partículas exactamente solubles con el fin de establecer características generales de los puntos cuánticos auto ensamblados en los límites uní- y bidimensionales.

- El análisis de las soluciones exactas permitió establecer la existencia de una transformación del estado base, similar a la que se observa en una transicion de fase de un sistema de muchas partículas desde un estado gaseoso hacia una fase ordenada del tipo cristal de Wigner cuando se disminuye la concentración de las partículas. Una transformación de este tipo se observa en un anillo con pocos electrones a medida que el radio se incrementa desde valor muy pequeño, cuando el movimiento de los electrones está débilmente correlacionado, hasta un valor muy grande cuando los electrones se encuentran fuertemente correlacionados.

- Se estudió el efecto del campo magnético sobre sistemas de pocas partículas en anillos cuánticos acoplados verticalmente y se pudo establecer la existencia del efecto Aharanov-Bohm, similar al que tiene lugar para un solo anillo. Además se estableció que el período de oscilación del estado base en el efecto Aharonov-Bohm depende del radio del anillo, pero no de la distancia de separación entre ellos.

- Para extender los resultados anteriores a modelos con las secciones transversales y barreras de potencial finitas se aplicó la aproximación adiabática (AA). Se encontró que la disminución de la altura de los anillos hasta 2nm conlleva a un aumento de la probabilidad de tunelamiento electrónico fuera de los anillos y con mayor probabilidad hacia la región central. El tunelamiento se hace insignificante cuando la altura del anillo se duplica y los resultados se hacen similares a los obtenidos para anillos 1D con barrera infinita.

- La AA se utilizó también para analizar la influencia de la morfología y el tamaño de los SAQDs, ya que esta técnica permite separar el movimiento rápido de las partículas, en la dirección perpendicular a la base, del movimiento lento en la dirección lateral. Se demostró que el potencial efectivo que gobierna el movimiento lento de las partículas,

experimenta un descenso con relación al potencial original producido por la discontinuidad en las bandas de conducción de los materiales que constituyen la heteroestructura. Este descenso oscila entre el 40% y el 70% cuando la altura del QD disminuye desde 4nm a 2nm. Se encontró además que este potencial depende fuertemente de la morfología del SAQD, siendo su forma similar a una reflexión especular del perfil del punto en la sección axial respecto de la base.

- El estudio de los sistemas de pocas partículas en SAQDs realizado en el marco del método de dimensión fractal muestra que la energía del estado base es muy sensible también a los cambios del radio de la base, espesor de la capa húmeda, altura por encima de la capa húmeda y posición de las impurezas donadoras en el interior del QD.

- Se analizó el efecto de campo magnético sobre formación de donadores cargadas negativamente, D^- en SAQD. Se estableció que bajo influencia de campo magnético aplicado a lo largo de eje axial se aumenta esencialmente la probabilidad de formación de D^- cerca de eje de simetría a través de transferencia de un electrón desde una donadora neutra D^0 localizada en la región periférica hacia otra cercana al eje. De esta manera, la aplicación de campo magnético aumenta la población de las donadoras ionizadas lejos de eje de simetría y aumenta la población de D^- cerca de eje. El efecto se debe al confinamiento fuerte de los electrones y al aumento de probabilidad de encontrarlos cerca de eje bajo de influencia de campo magnético. Como lo mostraron los resultados de cálculo esto resulta en un aumento significativo de la energía de enlace de las impurezas centradas y en una disminución notable de esta energía para donadoras periféricas.

- Se estudió el efecto de morfología sobre las energías de enlace de las impurezas D^0 y D^-, así como del excitón en SAQDs. Se demostró que en condiciones de confinamiento moderado $(R_c \geq 20nm \; y \; d_0 \approx 4nm)$, la mayor energía de enlace se obtiene en QDs en forma de pirámide cónica, seguida por la pirámide truncada y la lente, mientras que el valor más pequeño siempre corresponde al QD en forma de disco. Esto se debe a que la distancia entre donador y electrón o entre electrón y hueco en los QDs con morfologías puntiagudas es menor que en los puntos con morfologías aplanadas u oblatas a consecuencia del mayor confinamiento que se logra en los QDs de tipo piramidal. El efecto contrario se presenta bajo condiciones de fuerte confinamiento $(R_c \leq 10nm \; y \; d_0 \approx 4nm)$, ya que el desbordamiento de la función de onda hacia la región de la barrera conlleva a que la distancia electrón-donador aumente, haciendo que el orden en las energías de correlación para las diferentes morfologías descrito anteriormente se

invierta totalmente y en este caso la máxima energía de correlación se presenta en discos mientras que la mínima se da en la pirámide cónica.

- Mediante el cálculo de la razón σ entre las energías de correlación de las impurezas D^- y D^0 respectivamente, se ha podido comprobar que en general los SAQDs no pueden considerarse como sistemas estrictamente bidimensionales, ya que al variar el radio de la base de los SAQDs, se puede evidenciar una evolución en la dimensionalidad de estas heteroestructuras. Cuando el radio de la base oscila entre 40 y 60 nm, el valor de σ se aproxima a 0.2 el cual es característico de sistemas 1D, pero para radios entre 10 y 30 nm, σ toma un valor cercano a 0.3 que es propio de los sistemas 0D, mientras que el valor de 0.13 característico de los sistemas 2D, sólo se logra para radios de la base mayores de 60 nm.

- Se comprobó que para los excitones atrapados en SAQDs la diferencia entre las masas efectivas del electrón y del hueco, tiene una gran incidencia sobre el espectro de energía del par electrón-hueco y la forma como se distribuye la carga en heteroestructura. La mayor longitud de tunelamiento del electrón, cuya masa efectiva es esencialmente menor de la del hueco, hace que exista un predominio de carga negativa en la región periférica cercana a las junturas, mientras que el interior del punto se carga positivamente a consecuencia de la mayor inercia del hueco. La separación espacial de cargas del electrón y del hueco da lugar a la formación de momentos cuadrupolares en las diferentes heteroestructuras . En anillos cuánticos este momento tiene una orientación contraria a la de los otros tipos de QDs que se analizaron debido a que el electrón tiene mayor probabilidad de tunelar hacia la zona central del anillo, mientras que en los otros casos tunela hacia el exterior de los QDs.

- Se demostró que la presencia de capa húmeda ("wetting layer") en los SAQDs conduce a formación de un momento dipolar a lo largo del eje z el cual es mayor cuanto más grande sea el espesor del QD y más puntiagudo sea su perfil

REFERENCIAS

[1]. M. L. Sadowski, M. Potenski, and M. Grynberg, Optical Properties of Semiconductor Nanostructures, Kluwer Academic Publishers, USA (1990)

[2]. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics, Pergamon Press, London, 1958

[3]. T. Ando, A. B. Fowler, and F. Stern, Rev. Mod. Phys. **54**, 437(1982)

[4]. E. Gerjouy, A. R. P. Rau, and L. Spruch, Rev. Mod. Phys. **55**, 725(1983)

[5]. S. L. Goff and B. Stébé, Phys. Rev. B 47, 1383 (1993)

[6]. I. D. Mikhailov, F. J. Betancur, and L. F. Garcia, Phys. Stat. Sol. (b) **224**, 757(2001)

[7]. I. D. Mikhailov and F. J. Betancur, Phys. Stat. Sol. (b) **213**, 325(1999)

[8]. P. A. Maksym and T. Chacraborty, Phys. Rev. Lett. **65**, 108 (1990)

[9]. J. J. S. De Groote, J. E. M. Hornos, and A. V. Chaplik, Phys. Rev. B **46**, 12773 (1992)

[10]. G. W. Pratt, Phys. Rev. 102, 1303(1956)

[11]. D. Pfannkuche, V. Gudmundsson, and P. A. Maksym, Phys. Rev. B **47**, 2244 (1993)

[12]. B. Szafran, S. Bednareck, J. Adamowski, M. B. Tavernier, E. Anisimovas and F. M. Peeters, The European Physical Journal D 373(2001)

[13]. R. O. Jones, and O. Gunnarsson, Rev. Mod. Phys. **61**, 689(1989)

[14]. W. Kohn, Rev. Mod. Phys. **71**, 1253(1999)

[15]. A. Wensaver, M. Korkusinski, and P. Hawrylak, Solid State Commun. **130**, 115 (2004)

[16]. M. A. Troparevsky and Franceshetti, J. Phys.: Condens. Matter **20**, 055211 (2008)

[17]. F. Bolton, Solid State Electron **37**, 1159 (1994)

[18]. T. Pang and S. G. Louie, Phys. Rev. Lett. **65**, 1635(1990)

[19]. G. Onido, L. Reining, and A. Rubin, Rev. Mod. Phys. **74**, 601(2002)

[20]. S. Doniach, and E. H. Sondheimer, Green's Functions for Solid State Physics, Academic Press, New York (2004)

[21]. R. Mattuck, Guide to Feynman Diagrams in Many-Body Problem, Dover Publication, New York (1974)

[22]. T. kawazu, T. Kousuke, and H. Sasaki, Physica E **32**, 226 (2006)

[23]. A. Fetter and J. D. Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems, Dover Publications, New York (2003)

[24]. Y-L Liu, Phys. Rev. B **71**, 014404 (2005)

[25]. M. A. Lampert, Phys. Rev. Lett. **1**, 450 (1958)

[26]. S. Huant, S. P. Najda, and Etienne, Phys. Rev. Lett. **65**,1486 (1990)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN
DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA "EFE" GÓMEZ

[27]. F. J. Betancur, I. D. Mikhailov, J. H. Marín, and L. E. Oliveira, J. Phys.: Condens. Matter **10,** 7283 (1998)
[28]. J. R. Haynes, Phys. Rev. Lett. **17**,866 (1966)
[29]. P.S. Kopev and N. N. Ledentsov, Sov. Phys. Semicond. 22, 1093(1988)
[30]. S. Gonda and Y. Matsushima, Jap. Appl. Phys. **15**, 2093(1976)
[31]. F. J. Manjon, A. R. Goñi, K. Syassen, F. Heinrichsdorff, and C. Thomsen, Phys. Stat. Solidi (b) **235,** 497 (2003).
[32]. B. Stébé and Ainame, Superlattices Microstructures **5**, 545 (1989)
[33]. R. J. Warburton, C. S. Durr, K. Karrai, J. P. Kotthaus, G. Madeiros-Ribero, and P. M. Petroff, Phys. Rev. Lett. **79**, 5282(1997)
[34]. E. Wigner, Phys.Rev. 46, 1002 (1934)
[35]. G. W. Bryant, Phys. Rev. Lett. 59, 1140(1987)
[36]. E. Rasanen, H. Saairikoski, M. J. Puska, and R. N. Neiminen, Phys. Rev. B **67**, 035326 (2003)
[37]. E. Anisimovas, M. B. Tavernier, and F. M. Peeters, Physica E 40, 1621(2008)
[38]. L. Jacak, P. Hawrylak, and A. Wójs, Quantum Dots, Berlin (1998)
[39]. T. Chakraborty, Quantum Dots, Elsevier, Amsterdam (1999)
[40]. M. Geller, C. Kapteyn, L. Muller-Kirsch, R. Heitz, and D. Bimberg, Phys. Stat. Sol. (b), **238**, 258 (2003)
[41]. A. Franceschetti, L. Wong, and A. Zunger, Phys. Rev. B **60**, 963 (2001)
[42]. J. Stangl, V. Holy, and G. Bauer, Rev. Mod. Phys. 76, 725 (2004)
[43]. Y. Nakamura, N. Ikeda, Y. Sugimoto, H. Nakamura, S. Ohkouchi, and K. Asakawa, Phys. Sat. Sol. (b) **238**, 237 (2003)
[44]. J. H. Zhu, K. Brunner, and G. Abstreiter, Appl. Phys. Lett. **72**, 424 (1998)
[45]. W. Wu, J. R. Tucker, G. S. Solomon, and J. S. Harris, Appl. Phys. Lett. **68**, 523 (1996)
[46]. Y. Nabetani, T. Ishikawa, S. Noda, and A. Sasaki, J. Appl. Phys. **76**, 347(1994)
[47]. J. Zou, X. Z. Liao, D. J. H. Cockayne, and R. Leon, Phys. Rev. B. **59**, 12279(1990)
[48]. M. Grundman, O. stier, and D. Bimberg, Phys. Rev. B. **52,** 11969(1995)
[49]. K. Gergsson, N. Carlsson, L. Samuelson, W. Seifert, and L. R. Wallenberg, Appl. Phys. Lett. **67**, 2981(1995)
[50]. A. Lorke, R. Luyken, A. Govorov, J. Kotthaus, J. M. García, and P. M. Petroff, Phys. Rev. Lett. **84**, 2223(2000)
[51]. E. Anisimovas and F. M. Peeters, Phys.Rev. B **68**, 115310(2003)
[52]. G. M. Huang, Y. M. Liu, and C. G. Bao, Few-Body Systems **37**,121(2005)
[53]. M. Helle, A. Harju, and R. M. Nieminen, Phys.Rev. B **72**, 205329(2005)
[54]. F. M. Peeters, Phys. Rev. B **42**, 1486 (1990)

[55]. B. Szafran, F. M. Peeters, and S. Bednarek, Phys. Rev. B **75**, 115303 (2007)
[56]. T. Garm, J. Phys.: Condens. Matter **8**, 5725(1996)
[57]. K. L. Janssens, F. M. Peeters, and V. A. Schweigert, Phys. Rev. B **63**, 205311(2000)
[58]. D. Xu, and J-L Zhu, Phys. Rev. B **72**, 075326(2005)
[59]. J-L Zhu, S. Hu, and Z. Dai, Phys. Rev. B **72**, 075411(2005)
[60]. A. Wójs and P. Hawrylak, Phys. Rev. B **51**, 10880(1995)
[61]. S. Bednarek, B. Szafran, T. Chwiej, and Adamowski, Phys. Rev. B **68**, 045328(2003)
[62]. F. M. Peeters and V. A. Schweigert, Phys. Rev. B **53**, 1468(1996)
[63]. L. Wendler and V. M. Fomin, Phys. Rev. B **51**, 17814 (1994)
[64]. J. M. Ferreyra and C. R. Proetto, Phys. Rev. B **57**, 9061 (1998)
[65]. P. G. Bolcatto and C. R. Proetto, Phys. Rev. B **57**, 9061 (1998)
[66]. R. Escorcia, R. Robayo, and I. D. Mikhailov, Phys. Stat. Sol. (b) **230**, 431(2002)
[67]. M. Ciurla, J. Adamowski, B. Szafran, S. Bednarek, Physica E **15**, 261 (2002)
[68]. J-L Zhu, J. Z. Yu, Z. Q. Li, and Y. Kawazoe, J. Phys.: Condens. Matter **8**, 7857 (1990)
[69]. M. El Said, J. Phys. I, France **5**, 1027 (1995)
[70]. A. Matulis and F. M. Peeters, J. Phys.: Condens. Matter **6** 7751 (1994)
[71]. B. Szafran, J. Adamowski, and S. Bednarek, Physica E **5**, 185 (2000)
[72]. A. Puente and Ll. Serra, Phys. Rev. B **63**, 125334 (2001)
[73]. J. Adamowski, M. Sobkowicz, B. Szafran, and S. Bednarek, Phys. Rev. B **62**, 4234(2000)
[74]. J-L Zhu, X. Yu, Z. Dai, and X. Hu, Phys. Rev. B **68**, 045324(2003)
[75]. B. Partoens and F. Peeters, Phys. Rev. Lett. **84**, 4433(2000)
[76]. B. Partoens, A. Matulis, F. Peeters, Phys. Rev. B **59**, 1617(1999)
[77]. S. Bednarek, T. Chwiej, J. Adamowski, and B. szafran, Phys. Rev. B **67**, 205316(2003)
[78]. X-F He, Phys. Rev. B **42**, 11751(1990)
[79]. I. D. Mikhailov, F. J. Betancur, R. A. Escorcia, and J. Sierra-Ortega, Phys. Stat. Sol. (b) **234**, 590 (2002)
[80]. F. J. Betancur, I. D. Mikhailov, and L. E. Oliveira, J. Appl. Phys. D **31**, 3391(1998)
[81]. M. Korkusinski and P. Hawrylak, Phys. Rev. B **63**, 195311(2001)
[82]. G. Pryer, Phys. Rev. Lett. **80**, 3579 (1998)
[83]. H. A. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of one- and two-Electron Atoms* (Berlin: Springer-Verlag) 1957
[84]. F. García, F. J. Betancur, I. D. Mikhailov, W. Gutiérrez, R. Robayo, and **J. H. Marín,** Phys. Stat. Sol.(c) **2**, 3626(2005)
[85]. F. García, **J. H. Marín**, H. Paredes-Gutiérrez, and I. D. Mikhailov, Phys. Stat. Sol.(c) **2**, 3630(2005)

[86]. I. D. Mikhailov, **J. H. Marín**, and F. García, Phys. Stat. Sol. (b) **242**, 1636(2005)
[87]. **J. H. Marín**, F. J. Betancur, and I. D. Mikhailov, J. Phys. : Condens. Matter **18**, 1005(2005)
[88]. **J. H. Marín**, F. García, and F. J. Betancur, Rev. Col. de Fís. **37**, 94 (2005)
[89]. W. Gutiérrez, **J. H. Marín**, F. García, and I. D. Mikhailov, Rev. Col. de Fís. **37**, 150 (2005)
[90]. L. F. García, **J. H. Marín**, and I. D. Mikhailov, Braz. Jour. of Phys. **36**, 878(2006)
[91]. **J. H. Marín**, L. F. García,, and I. D. Mikhailov, Braz. Jour. of Phys. **36**, 940 (2006)
[92]. I. D. Mikhailov, L. F. García, and **J. H. Marín**, J. Phys.: Condens. Matter **18**, 9493 (2006)
[93]. L. F. García, I. D. Mikhailov, and **J. H. Marín**, Rev. Col. de Fís. **38**, 1078 (2006)
[94]. **J. H. Marín**, I. D. Mikhailov, and L. F. García, Physica B Condensed Matter, **398**, 135(2007)
[95]. I. D. Mikhailov, F. J. Betancur, **J. H. Marín**, and Y. Orlik, Physics, Chemistry and Applications of Nanostructures, Proceedings of the International Conference Nano-Meeting 2007, pág. 125 (2007)
[96]. C. A. Gómez, vGarcía W. Gutiérrez and **J. H. Marín**, accepted to published in Microelectronics Journal
[97]. L. F. García, **J. H. Marín**, and, I. D. Mikhailov, Rev. Col. de Fís. **39**, 535 (2007)
[98]. I. D. Mikhailov, L. F. García, and **J. H. Marín**, J. Phys. : Condens. Matter **18**, 9493 (2006)
[99]. I. D. Mikhailov, L. F. García, and **J. H. Marín**, Physica E **40**, 805(2008)
[100]. I. D. Mikhailov, L. F. García, and **J. H. Marín**, Microelectronics Journal **39**, 378(2008)
[101]. P. A. Maksym, H. Imamura, G. P. Mallon, and H. Aoki, J. Phys.: Condens. Matter **12** R299 (2000)
[102]. L. P. Kouwenhoven, D. G. Austing, and S. Tarucha, Rep. Prog. Phys. **64**, 701(2001)
[103]. Y. Arakawa y Y. Yariv, IEEE J. Quantum Electrón. **22**, 1887(1986)
[104]. K. Imamura, Y. Sugiyama, Y. Nakata, S. Muto,and N. Yokohama, Japan. J. Appl. Phys. **34** L 1445 (1995)
[105]. X. Wen-Fang, Chinese Phys. Lett. **23**, 193 (2006).
[106]. M. El-Said, Phys. Rev. B **61**, 13026 (2000).
[107]. Y. Aharanov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959)
[108]. S. Bednarek, B. Szafran, J. Adamowski, Phys. Rev. B **64**, 195303(2001)
[109]. S. Bednarek, B. Szafran, J. Adamowski, J. Phys. Condens. Matter **14**, 73 (2002)

[110]. R. H. Blick, D. Pfannkuche, R. J. Haug, K. v Klitzing, and K. Eberl, Phys. Rev. Lett. **80**,4032 (1998)
[111]. T. Lundstrom, W. Schoenfeld, H. Lee, P. M. Petroff, Science **286**, 2312(1999)
[112]. C. Cohen-Tannodji, B. Diu, F. Laloë: Quantum Mechanics, John Wiley and Sons, Paris, France (1977).
[113]. R. Price, X. Zhu, S. Das Sarma, and P. M. Platzman, Phys. Rev. B **51**, 2017 (1995)
[114]. B. Szafran, B. Stébé, J. Adamowski, and S. Bednarek, Phys. Rev. B **66**, 165331 (2002)
[115]. T. S. Koh, Y. P. Feng, X. Xu, and H. N. Spector, J. Phys. Condens. Matter **13**, 1485 (2001)
[116]. J. Song and S. Ulloa, Phys. Rev. B **52**, 9015 (1995)
[117]. P. Pereyra and S. Ulloa, Phys. Rev. B **61**, 2128 (2000); Phys. Rev. B **63**, 1125302 (2001)
[118]. S. Glutsch, F. Bechstedt, W. Wegscheider, and F. Scheldelbeck, Phys. Rev. B **56**, 4108 (1997)
[119]. T. Uozumi and Y. Kayanuma, Phys. Rev. B **65**, 165318 (2002)
[120]. Dimensional Scaling, D. Herschbach, J. Avery, and O. Goscinski, Kluwer Academic Publishers, pág 14, Dordrecht, The Netherlands (1993).
[121]. B. B. Mandelbrot, The fractal Geometry of the Nature, W. H. Freeman & Co., San Francisco (1988).
[122]. D. M. Larsen and S. Y. McCann, Phys. Rev. B **45**, 3485(1992)
[123]. D. M. Larsen, Phys. Rev. B **47**, 16333(1992)
[124]. P. J. Dean, J. R. Hyanes, and W. F. Flood, Phys. Rev. B **161**, 711(1967)
[125]. J-L Zhu, Phys. Rev. B **39**, 8780(1989)
[126]. J-L Zhu, J-H Zhao, W. H. Duan, and G. L. Gu, Phys. Rev. B **39**, 8780(1989)
[127]. B. Szafran, J. Adamowski, and J. Stébé, J. Phys.: Condens. Matter **10**, 7575(1998)
[128]. F. J. Betancur, W. Gutiérrez, and J. C. Piña, Physica B **396**, 12 (2007)
[129]. I. D. Mikhailov, F. J. Betancur, R. Escorcia, J. Sierra-Ortega, Phys. Rev. B **67**, 156317(2003)
[130]. J-L. Zhu, Xi Chen, Phys. Rev. B **50** 4497 (1994)
[131]. J-L. Zhu, J-J. Xiong, and B-L. Gu, Phys. Rev. B **41** 6001(1990)
[132]. D. E. Phelps and K. K. Bajaj, Phys. Rev., B **27**, 4883 (1983)
[133]. D. E. Phelps and K. K. Bajaj, Phys. Rev., B **26**, 912 (1982).
[134]. S. Schmitt-Rink, D. S. Chemla, and D. A. B. Miller, Adv. Phys. **38**, 89 (1989)
[135]. I. D. Mikhailov, F. J. Betancur, R. A. Escorcia, and J. Sierra-Ortega, Physica B **355**, 255 (2005)
[136]. I. D. Mikhailov, F. J. Betancur, R. A. Escorcia, and J. Sierra-Ortega, Phys. Stat. Sol. (b) **230** (2002) 469

[137]. J. Song and S. E. Ulloa, Phys. Rev. B **63**, 125302 (2001)
[138]. X-F He, Phys. Rev. B **43**, 2063 (1991)
[139]. H. Mathieu, P. Lefebvre, and P. Christol, Phys. Rev. B **46**, 4092 (1992)
[140]. E. Reyes-Gómez, A. Matos-Abiague, C. A. Perdomo-Leiva, M. de Dios Leyva, and L. E. Oliveira, Phys. Rev. B **61** (2000) 13104
[141]. J. Palacios and P. Hawrylak, Phys. Rev. B **51** 1769(1995)
[142]. N. Susa , IEEE J. Quantum Electron. **32,** 1760(1996)
[143]. P. G. Wang, J. L. Merz, S. Favard, R. Leon, D. Leonard, G. Medeiros-Ribeiro, M. Oestreich, P. M. Petroff, K. Uchida, N. Miura, H. Akiyama, and H. Sasaki, Phys. Rev. B **53**, 16458(1996).
[144]. K. L. Janssens, B. Partoens, and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **64** 155324 (2001)
[145]. K. L. Janssens, B. Partoens, and F. M. Peeters, Phys. Rev.B **66** 075314(2002)
[146]. K. L. Janssens, B. Partoens, and F. M. Peeters, Phys. Rev.B **69** 235320(2004)
[147]. Computational Physics, Steven E. Koonin, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., California, USA (1985)
[148]. G. Burkard, G. Seeling, and D. Loss, Phys. Rev. B **62** (2000) 2581