

Enlaces de tres puentes: Diagramas y reconocimiento.

por

Tomás Antonio Causil Pérez

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Directora: Margarita María Toro Villegas

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Agosto 2014

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS,
Contrato No. 521-10, Código 1118-521-28160.

Resumen

En este trabajo estudiaremos los enlaces de 3-puentes y sus diagramas. Construiremos una pequeña familia de nudos de 3-puentes, basandonos en una construcción hecha por O. Morikawa a partir de nudos de 2-puentes. Luego utilizaremos el concepto de 3-mariposa para clasificar esta familia. Además, como una subfamilia de enlaces de 3-puentes la constituye la familia de los enlaces de 2-puentes, estudiaremos la clasificación de esta familia por medio de la cubierta doble de S^3 ramificada sobre estos enlaces. También estudiaremos la clasificación de la familia de los enlaces racionales, a través de los tangles racionales y la fracción continua y mostraremos la equivalencia entre esta familia y la familia de los enlaces de 2-puentes.

Por último definiremos el concepto de presentación en rosetas para un enlace, con el cual intentamos generalizar para los enlaces de 3-puentes la presentación dada por Conway para los enlaces de 2-puentes.

Contenido

Introducción	vii
1 Presentación en puentes y mariposas	1
1.1 Conceptos básicos	1
1.2 Definición y propiedades de las m -mariposas	5
1.3 2-mariposas y 3-mariposas	7
1.3.1 Enlaces de 2-puentes como 2-mariposas	7
1.3.2 Enlaces de 3-puentes como 3-mariposas	8
2 Enlaces de 2-puentes	11
2.1 Distintas presentaciones para enlaces de 2-puentes	11
2.2 Tangles racionales (ovillos racionales)	16
2.2.1 Definición de tangles racionales	16
2.2.2 Aritmética de tangles racionales	19
2.2.3 Propiedades de tangles racionales	22
2.3 Teoremas de clasificación de los tangles racionales	30
2.4 Otra presentación de tangles racionales	35
2.5 De la presentación de Conway a la presentación de Schubert	37
2.6 Clasificación de enlaces de 2-puentes	38
3 Espacios lenticulares o espacios lente	40
3.1 Modelo 1	40
3.2 Modelo 2	42
3.3 Modelo 3	47
3.4 Modelo 4	51
3.5 La cubierta doble de S^3 ramificada sobre un enlace racional y sobre un enlace de 2-puentes $\frac{p}{q}$	52
3.5.1 $L(p, q)$ como la cubierta doble ramificada del enlace racional $\frac{p}{q}$	60

3.5.2	$L(p, q)$ como la cubierta doble ramificada del enlace de 2-puentes $\frac{p}{q}$	62
4	Enlaces de 3-puentes	64
4.1	Construcción de nudos de 3-puentes a partir de nudos de dos puentes	64
4.1.1	Construcción de O. Morikawa	64
4.1.2	Construcción basada en la de O. Morikawa y su presentación en mariposa	66
4.2	Cubierta doble de S^3 ramificada sobre el nudo $\widetilde{K}(p, q, r)$	75
4.3	Imagen espejo	79
4.4	Rosetas	81
A	Fraciones continuas	86
B	Topología	93
C	Acción de grupos sobre conjuntos	99
	Bibliografía	102

Agradecimientos

Quisiera agradecer primero que todo a Dios, por darme la fortaleza y sabiduría necesaria para cumplir con esta meta más, en mi proyecto de vida. A mis amados padres Damaris Pérez Bedolla y Manuel Causil Molina, por ese apoyo incondicional que me han brindado a lo largo de toda mi vida y que sólo ellos saben dar, por sus consejos, su paciencia y su amor infinito. A mis hermanos Carmen Inés, José Manuel y Yessica Paola, quienes han sido, además de hermanos, mis grandes amigos. Agradezco también, de manera muy especial, a mi novia y gran confidente Alma Rosa Naranjo Benavides, por brindarme su amor, paciencia, comprensión y apoyo incondicional, durante estos 5 años de relación.

Además, quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a la profesora Margarita María Toro Villegas, por tomar la decisión de dirigir mi tesis, aún sin conocerme, por su gran dedicación con éste trabajo y por sus buenos consejos a lo largo de mi formación como Magíster.

Agradezco a los profesores Carlos Mario Parra Londoño y José Gregorio Rodríguez Nieto jurados de esta tesis, por sus correcciones y valiosas sugerencias para el mejoramiento del trabajo.

A cada uno de los profesores que contribuyeron, de una u otra forma, en mi formación académica, en especial aquellos que además de ser mis profesores fueron también buenos amigos, en especial a José Gregorio.

Por último pero no menos importante, quiero agradecer a todos mis compañeros y amigos de la maestría, los cuales hicieron un ambiente de estudio agradable, en especial a Mauricio Rivera por su aporte y corrección a éste trabajo.

Introducción

La clasificación de los enlaces ha sido uno de los problemas centrales de la Teoría de Nudos; en particular la clasificación de los enlaces de 3-puentes ha constituido un reto después de haberse realizado la clasificación completa de los enlaces de 2-puentes, que se hizo en la década de 1950. Entre los artículos mas relevantes que estudian el problema de clasificación de enlaces de 3-puentes están [5], [15], [22], [23] y [35]. Motivados por el problema de la clasificación de los enlaces de 3-puentes realizamos el siguiente trabajo, en el cual daremos un pequeño aporte a este problema, construyendo una familia de nudos de 3-puentes y clasificándola a través del concepto de 3-mariposa.

En este trabajo se estudian los enlaces de 3-puentes, haciendo énfasis en construcciones que dependen de diagramas particulares, usando el concepto de 3-mariposa, el cual se ha estudiado en una serie de artículos, ver por ejemplo, [14], [13], [15], [34] y [35].

Como una subfamilia de los enlaces de 3-puentes la constituye la familia de los enlaces de 2-puentes, y la familia de los enlaces racionales, como veremos en los capítulos 2 y 3, entonces estudiaremos de forma general los diagramas de estos enlaces.

Estas dos familias de enlaces están completamente clasificadas. Los enlaces de 2-puentes fueron clasificados completamente por Schubert, ver [29], utilizando la clasificación de los espacios lentes y considerando a estos como la cubierta ramificada doble de S^3 sobre dichos enlaces. Posteriormente, Conway definió el concepto de tangles racionales y varias operaciones algebraicas relacionadas para crear una nueva familia de enlaces, a los cuales llamó enlaces racionales. Para representar esta familia de enlaces utilizó el concepto de fracción continua. Utilizando la unicidad de los espacios lentes, como cubierta doble de S^3 ramificada sobre enlaces de 2-puentes, se probó que los enlaces racionales son enlaces de 2-puentes. Más adelante, utilizando esta idea de Conway, Kauffman y Lambropoulou clasificaron de manera netamente algebraica los enlaces racionales, ver [17] y [18]. En este trabajo mostraremos que ambas familias son equivalentes y, más aún, veremos que la fracción continua que representa el enlace racional, es igual al número racional que representa al enlace de 2-puentes.

La idea de estudiar los enlaces racionales y de 2-puentes es porque queremos extender algunas de sus propiedades a los enlaces de 3-puentes, de tal manera que podamos contribuir de forma parcial a su clasificación. Es importante resaltar que hay diferencias esenciales entre los enlaces de 3-puentes y los de 2-puentes. La principal es la falta de unicidad en los diagramas que los representan. Mientras que para un enlace de 2-puentes hay básicamente un único diagrama reducido de 2-puentes, para los enlaces de 3-puentes existen infinitos diagramas de 3-puentes que lo representan. Esta falta de unicidad en la presentación en puentes es una muestra de la gran dificultad que se tiene al enfrentar el problema de la clasificación.

En este trabajo presentamos una construcción de nudos de 3-puentes a partir de los nudos de 2-puentes, usando tres enteros, basada en una construcción de Morikawa, ver [22] y [23]. Además, pensando en la clasificación de los enlaces de 3-puentes, daremos una presentación de todos estos nudos como 3-mariposa.

Para nuestro trabajo utilizamos herramientas topológicas, algebraicas y de fracciones continuas, las cuales hemos anexado en tres apéndices, con el fin de que nuestra presentación sea autocontenida y completa. También usaremos herramientas como el polinomio de Alexander, el grupo fundamental y el primer grupo de homología, entre otras.

Para garantizar que la mayoría de los nudos construidos son de 3-puentes pero no de 2-puentes, calcularemos el polinomio de Alexander de uno de ellos, con lo cual garantizaremos que no es el nudo trivial. Luego, como por [1] y [33] tenemos que la cubierta doble de estos nudos es una 3-variedad, la cual tiene un diagrama de Heegaard de género dos, calcularemos el primer grupo de homología de la 3-variedad y con esto mostraremos que siempre es posible encontrar dos nudos construidos de esta forma, cuya homología de su cubierta doble es trivial, de modo que no son nudos de 2-puentes.

Describimos ahora explícitamente el desarrollo del trabajo por capítulos.

En el primer capítulo, hablaremos sobre la presentación en puentes de un enlace y su presentación en mariposa, dando algunos resultados importantes que relacionan el número de mariposa y el número de puentes de un enlace, ver [35]. Luego, como nuestro interés está centrado en el estudio de los enlaces de 2 y 3 puentes, nos centraremos en los casos particulares de 2 y 3 mariposas y veremos su relación con los enlaces de 2 y 3 puentes, respectivamente.

En el caso de los enlaces de 2-puentes, Schubert da una clasificación de estos enlaces por medio de dos enteros, y una extensión de esta idea se hace para los enlaces de 3-puentes a los cuales asignamos seis enteros, usando el concepto de 3-mariposas, ver [13], [14], [15] y [35]. Estos seis enteros asignados a los enlaces de 3-puentes no son únicos, ya que dado un enlace de 3-puentes éste puede tener muchos diagramas de 3-puentes que lo representen, y para cada uno de estos diagramas podemos asignar una única 6-tupla, es decir, dado un enlace de 3-puentes podemos encontrar muchas 6-tuplas que lo representen, dependiendo del diagrama que se utilice para representarlo.

Otro problema que surge con la presentación como 3-mariposa para enlaces de 3-puentes es de existencia, ya que dada una 6-tupla cualquiera ésta no necesariamente representa un enlace de 3-puentes, sin embargo siempre es posible construir un diagrama a partir de la 6-tupla. Para ver las condiciones necesarias para que una 6-tupla represente un enlace de 3-puentes, enunciaremos el teorema de clasificación de las 3-mariposas.

En el segundo capítulo hablaremos sobre los enlaces de 2-puentes y el por qué se les llama también enlaces racionales. Se estudiarán sus distintos diagramas y la equivalencia entre ellos. Posteriormente estudiaremos la presentación en tangles de un enlace racional, así como la clasificación algebraica de los enlaces racionales por medio de tangles y de la fracción continua de un número racional, la cual aparece en [17] y [18]. Estudiaremos también la equivalencia entre los enlaces racionales y los enlaces de 2-puentes, por medio de la cual garantizamos la clasificación algebraica de los enlaces de 2-puentes, y por último enunciaremos los teoremas de

clasificación de los enlaces de 2-puentes.

Este capítulo es de gran interés para nuestro resultado principal, ya que usaremos la presentación de Schubert para nudos de 2-puentes a partir de dos enteros, para construir nudos de 3-puentes, los cuales representaremos por medio tres enteros. Para estos nudos de 3-puentes que construiremos, usaremos para su representación, los dos enteros del nudo de 2-puentes del que se derivan.

En trabajos posteriores trataremos de extender algunos de los resultados que se conocen para enlaces de 2-puentes a enlaces de 3-puentes, como por ejemplo sus diagramas y presentación en tangles, entre otras.

En el tercer capítulo hablaremos de los espacios lente, los cuales son de gran importancia en el estudio de los enlaces de 2-puentes y los enlaces racionales. En este capítulo mostraremos cuatro formas de construir o de definir los espacios lente. Además los clasificaremos por medio de dos enteros primos relativos y, lo más importante, veremos que los espacios lente son la cubierta doble ramificada sobre un enlace de 2-puentes y sobre un enlace racional, y ambos nudos serán denotados con los mismos 2 enteros del espacio lente. Este resultado permite dar una clasificación completa de enlaces de 2-puentes, y por consiguiente, de los enlaces racionales. Además, como por [21, pág. 434] tenemos que los espacios lente tienen representación única como espacio cubierta doble de S^3 ramificada sobre un enlace, se sigue la equivalencia entre estas dos familias de enlaces.

En el cuarto capítulo o capítulo principal de este trabajo explicaremos la construcción de nudos de 3-puentes usando tres enteros, partiendo de un nudo de 2-puentes, la cual fue presentada por Morikawa en [22] y [23]. Además, a partir de la construcción anterior haremos una construcción más natural de un nudo de 3-puentes usando los mismos tres enteros. Esta construcción, a diferencia de la anterior, permite asociarle una 6-tupla de enteros a todos estos nudos usando la representación como 3-mariposa, dando así una clasificación de dichos nudos.

En este capítulo también construimos la 3-mariposa que representa esta pequeña subfamilia de nudos de 3-puentes, definiendo ciertas regiones en el diagrama de Schubert del nudo de 2-puentes del cual partimos. Posteriormente enunciamos y demostramos los dos resultados principales, en forma de lemas, que nos permiten hallar la presentación como 3-mariposa. Luego, por medio de esta 6-tupla y de [35] asociaremos una 6-tupla a la imagen espejo de estos nudos. Ambas construcciones generan nudos diferentes en la mayoría de los casos. Para mostrar esto tomaremos dos nudos contruidos de ambas formas usando los mismos tres enteros, asociaremos una 6-tupla a cada nudo y calcularemos su polinomio de Alexander. Con el fin de garantizar que estos nudos en realidad dan nudos de 3-puentes, en su mayoría, calcularemos el primer grupo de homología de la cubierta doble de S^3 ramificada sobre el nudo.

Por último introducimos una nueva forma de representar enlaces de tres puentes, la cual hemos llamado presentación en rosetas. La idea de este nombre es proviene de [3, pág. 266] donde se utiliza para representar diagramas simétricos de enlaces; con esta presentación pretendemos más adelante generalizar y extender la presentación de Conway, para enlaces de 3-puentes.

Capítulo 1

Presentación en puentes y mariposas

En este capítulo daremos algunas definiciones básicas relacionadas con nudos, ver [25], [19], [3], [28] y [7]. También hablaremos de la presentación en m -puentes de un enlace, de la definición de m -mariposas y su equivalencia con los enlaces de m -puentes y por último nos concentraremos en la relación de los casos particulares de 2 y 3 mariposas con enlaces de 2 y 3 puentes, respectivamente. Para el caso de los enlaces de 3-puentes asociaremos una 6-tupla obtenida de la 3-mariposa y enunciaremos el Teorema de clasificación de las 3-mariposas.

1.1 Conceptos básicos

Sean X y Y espacios de Hausdorff. Una función $f : X \rightarrow Y$ se llama un *embebimiento* si $f : X \rightarrow f(X)$ es un homeomorfismo.

Definición 1.1.1 *Un subconjunto K de \mathbb{R}^3 es un nudo, si existe un embebimiento $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(S^1) = K$. Un subconjunto L de \mathbb{R}^3 es un enlace, si existe un embebimiento γ de una unión disjunta de n copias de S^1 en \mathbb{R}^3 tal que su imagen es L , esto es, L es una unión finita de nudos disjuntos. En este caso se dice que L es un enlace de n componentes.*

Es equivalente considerar enlaces en S^3 y en este trabajo utilizaremos tanto los enlaces en S^3 como en \mathbb{R}^3 .

Por la definición de enlace podemos decir que los nudos son enlaces de una componente.

En adelante usaremos el término enlace para referirnos a nudos o enlaces y usaremos el término nudo sólo para resultados que se cumplen exclusivamente para nudos.

Dos enlaces L_1 y L_2 son llamados *isotópicos*, si existe una isotopía $h : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $h(L_1, 0) = h_0(L_1) = L_1$ y $h(L_1, 1) = h_1(L_1) = L_2$. La isotopía define una relación de equivalencia en el conjunto de enlaces, cuyas clases de equivalencia se llaman *tipos de enlace*. Así, diremos que dos enlaces son *equivalentes* o *iguales* si pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Un *enlace toroidal* es un enlace que puede ser embebido en la superficie de un toro estándar T en S^3 . Además, un enlace toroidal es llamado de *tipo* (p, q) y denotado $T(p, q)$, con $\gcd(p, q) = 1$, si éste es isotópico al conjunto de puntos $pm + ql$ en T , donde (m, l) es un sistema de meridianos y longitudes de T , ver Apéndice B.

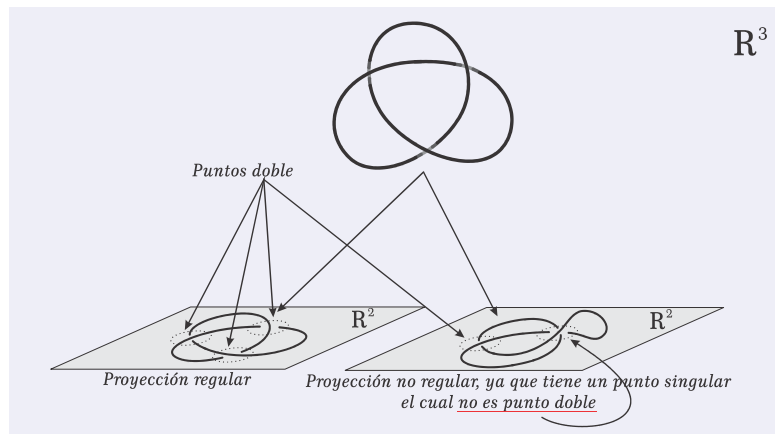


Figura 1-1: Proyección regular de un enlace y cruces

Definición 1.1.2 Sea $L \subset \mathbb{R}^3$ un enlace y sea $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función proyección. Un punto $x \in \rho(L)$ es llamado **regular** si $\rho^{-1}(x)$ es un único punto, y es **singular** en otro caso. Además, si el número de elementos en $\rho^{-1}(x)$ es 2 entonces x es llamado un **punto doble**.

De la definición anterior tenemos que $\rho(L)$ es la proyección de L , además si $\rho(L)$ tiene un número finito de puntos singulares y todos ellos son puntos dobles, entonces la proyección se denomina *regular*, ver Figura 1-1. En general, cuando trabajamos con enlaces acostumbramos a usar una proyección regular de éste, donde se especifica información necesaria acerca del enlace, tal proyección se denomina un *diagrama del enlace*. La convención es hacer saltos en la línea correspondiente a la cuerda que pasa por debajo en las imágenes de los puntos dobles, que llamaremos *cruces*, ver Figura 1-1. De esta forma el diagrama de un enlace está formado por una colección disjunta de curvas, que llamaremos *arcos*. Así un *arco* del diagrama de un enlace es la porción de cuerda entre dos cruces por debajo, ver Figura 1-4a.

Como uno de los objetivos fundamentales de la teoría de nudos es el problema de clasificación, surge la necesidad de saber cuándo dos enlaces son iguales. Afortunadamente, en la década de los cuarenta, Reidemeister definió tres movimientos locales en los diagramas de un enlace; o sea que sólo se modifica cierta parte del diagrama y el resto del enlace permanece igual. Estos movimientos se muestran en la Figura 1-2 y se denominan los *movimientos de Reidemeister*. Así tenemos que, dos diagramas D_1 y D_2 representan el mismo enlace L , si es posible pasar de D_1 a D_2 , o viceversa, por medio de una sucesión finita de movimientos de Reidemeister.

Un nudo L se denomina *orientado*, si asignamos una orientación para recorrer el nudo, del mismo modo diremos que un enlace L es *orientado*, si asignamos una orientación a cada

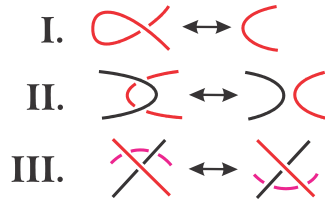


Figura 1-2: Movimientos de Reidemeister

componente; de lo anterior tenemos que un nudo puede tener dos orientaciones, pero un enlace con $n \geq 2$ componentes puede tener varias orientaciones.

Si L es un enlace con una orientación asignada, denotaremos por \overleftarrow{L} al enlace que obtenemos al orientar todas las componentes de L con sentido opuesto. Además, si L es tal que L y \overleftarrow{L} son equivalentes, entonces L es llamado un enlace *invertible*.

La *imagen espejo* de un enlace L , denotada por $-L$, se obtiene al intercambiar todos los cruces de L , ver Figura 1-3. Además, si L es tal que L y $-L$ son equivalentes, entonces L es llamado *anfiquiral*.

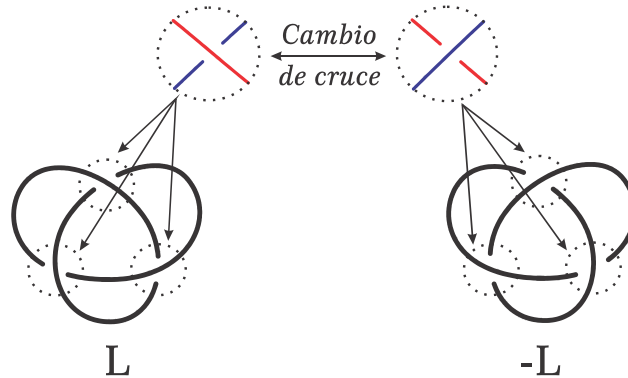


Figura 1-3: Enlace L y su imagen espejo $-L$

Definición 1.1.3 Un diagrama de un enlace es llamado **alternante** si los cruces por encima y por debajo aparecen alternadamente a medida que recorremos cada componente. Un enlace es llamado **alternante** si éste posee un diagrama alternante.

Presentación en puentes

Dado un diagrama de un enlace, llamaremos *puente* del enlace al arco entre dos cruces por debajo y que pasa por al menos un cruce por encima, esto es, es un arco del enlace que no pasa por debajo de otra parte del enlace, ver Figura 1-4a, b, c y e.

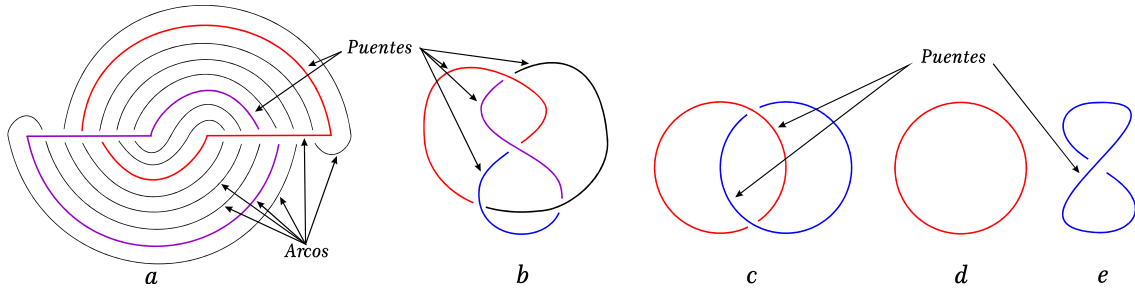


Figura 1-4: Presentación de nudos en 2, 4 y 1 puentes

Supongamos que D es un diagrama del enlace L , $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección regular. Decimos que el número de puentes de D es n si podemos dividir L en $2n$ curvas poligonales $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y β_1, \dots, β_n tales que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $L = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n \cup \beta_1 \cup \dots \cup \beta_n$.
2. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son arcos simples, mutuamente disjuntos.
3. β_1, \dots, β_n son arcos simples, mutuamente disjuntos.
4. En los cruces de D , $\rho(\alpha_1), \dots, \rho(\alpha_n)$ son segmentos que pasan sobre los cruces, y cada uno de ellos es un arco que contiene al menos un cruce; mientras que $\rho(\beta_1), \dots, \rho(\beta_n)$ son segmentos que pasan por debajo de los cruces. Las intersecciones de los arcos $\rho(\alpha_i)$ y $\rho(\beta_j)$ son transversales, es decir, solo van a generar un número finito de puntos dobles, para todo $i, j = 1, \dots, n$.

Todo enlace tiene un diagrama con una presentación en m -puentes, para algún $m \in \mathbb{N}$, ver Figura 1-4a, b, c y e. Ahora, si tomamos el mínimo m entre todos los diagramas de un enlace, obtenemos un invariante de enlaces al cual llamaremos *número de puentes* del enlace.

Definición 1.1.4 *El número de puentes de un enlace L , denotado $b(L)$, es el mínimo m entre todas las presentaciones de m -puentes de los diagramas de L .*

Un nudo como el de la Figura 1-4d, es llamado un *nudo trivial*. Para el nudo trivial L definimos $b(L) = 1$, ver Figura 1-4e.

Nota 1.1.1 *Si un enlace admite una presentación en m -puentes, entonces éste admite una presentación en $(m + k)$ -puentes, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Por otro lado, si dado un nudo L se tiene que $b(L) = 1$, entonces se cumple que L es el nudo trivial. Pero si L es un enlace con $n \geq 2$ componentes y $b(L) = n$, no necesariamente se cumple que el enlace es trivial, ver Figura 1-4c.

1.2 Definición y propiedades de las m -mariposas

A continuación definiremos lo que es una m -mariposa y enunciaremos algunos resultados de estas. Para un estudio riguroso ver por ejemplo, [35].

Intuitivamente, una m -mariposa es una 3-bola B^3 con $m > 0$ caras poligonales en su frontera $S^2 = \partial B^3$, tal que cada cara P , denominada *1-mariposa*, está subdividida por un arco t_P , al cual llamaremos *tronco* de la 1-mariposa, en dos subcaras, con el mismo número de vértices, que son identificadas por una reflexión a lo largo de t_P . Una vez hechas las identificaciones de cada 1-mariposa a través de la reflexión, los troncos quedan formando un enlace L y se dice que la m -mariposa representa al enlace L . En las Figuras 1-5b y 1-6c, mostramos ejemplos gráficos de 2 y 3 mariposas.

Con el fin de precisar el concepto de m -mariposas, daremos una definición formal.

Sea R un grafo conexo embebido en $S^2 = \partial B^3$, donde B^3 es una 3-celda cerrada, así que $S^2 \setminus R$ es una unión disjunta de 2-celdas abiertas. Ahora, denotaremos por P cada una de las 2-celdas determinadas por R , de modo que ∂P es un subgrafo de R .

Sea P_{2n} el polígono regular en el plano que es la clausura convexa de las raíces $2n$ -ésimas de la unidad. Denotamos por \mathring{P}_{2n} al interior de P_{2n} y por \overline{P} a la clausura de P . Definimos una parametrización de P como una función $f : P_{2n} \longrightarrow \overline{P}$ con las siguientes propiedades:

1. $f|_{\mathring{P}_{2n}}$ es un homeomorfismo de \mathring{P}_{2n} a P .
2. La restricción de f a una arista de P_{2n} es un homeomorfismo lineal de dicha arista en una arista del grafo R .
3. f restringido a las aristas de P_{2n} es una función a los más dos a uno.

Ahora, supongamos que R es tal que cada P tiene una parametrización f_P . Luego definamos, para A y B puntos de \overline{P} , la siguiente relación de equivalencia, la cual se deriva de la conjugación compleja τ restringida a P_{2n} o a la frontera de P_{2n} :

$$A \sim B \quad \text{si y sólo si} \quad -f_P^{-1}(A) = f_P^{-1}(B) \quad \text{o} \quad f_P^{-1}(A) = \overline{f_P^{-1}(B)},$$

donde $\overline{f_P^{-1}(B)} = \{\bar{z} : z \in f_P^{-1}(B)\}$.

Cada P_{2n} contiene el segmento $[-1, 1]$, que es el conjunto de puntos fijos de la conjugación compleja τ restringida a P_{2n} . En cada P definimos como *tronco* t de P a $f_P([-1, 1])$. Luego, una pareja del tipo (P, t) se denomina una *mariposa* con tronco t , ver Figura 1-6c.

Si ahora definimos a T como la unión de los troncos t sobre todos los P de R , tenemos:

Para $m \geq 1$ una *m -poligonalización* es una pareja (R, T) donde T tiene m componentes.

La relación de equivalencia \sim definida en \overline{P} induce una relación de equivalencia en el grafo R , la cual denotaremos por \simeq . Si v es un vértice de R , su clase de equivalencia bajo la relación

de equivalencia \simeq está compuesta sólo de vértices. Sea $M(R, T)$ el espacio B^3 / \simeq con la topología de la función identificación $p : B^3 \longrightarrow M(R, T)$.

Definición 1.2.1 *Un elemento de $R \cap T$ se llamará un A -vértice. Un elemento de $p^{-1}(p(v))$, $v \in R \cap T$, el cual no es un A -vértice, será llamado un E -vértice. Un vértice de R que se encuentre en la misma clase de equivalencia de un vértice no bivalente de R será llamado un B -vértice. Los otros vértices se llaman vértices redundantes.*

Definición 1.2.2 *Para $m \geq 1$ un diagrama de m -mariposa, con número de mariposas m , es una pareja (R, T) tal que:*

1. *Los A -vértices y los E -vértices son bivalentes en R , y*
2. *el tronco T tiene m componentes.*

Si una m -mariposa tiene sólo vértices del tipo A , E o B diremos que es una m -mariposa reducida. Como consecuencia de la definición de m -mariposa también tenemos que los troncos de las distintas mariposas son disjuntos y que ningún vértice del tipo A puede ser extremo de dos troncos diferentes.

Dos m -mariposas (R, T) , (R', T') se llaman *equivalentes* si existe un homeomorfismo f de S^2 en si mismo que envía (R, T) sobre (R', T') y que preserva la estructura de grafo de R y R' .

Los siguientes son resultados centrales, cuyas pruebas se encuentran en [14].

Proposición 1.2.1 *Para cada m -mariposa (R, T) , el espacio $M(R, T)$ es una 3-variedad homeomorfa a S^3 y la imagen del tronco $p(T)$ es un enlace, donde $p : B^3 \longrightarrow M(R, T)$ es la función identificación.*

Definición 1.2.3 *Si K es un enlace con un diagrama que se obtiene a partir de una m -mariposa (R, T) , decimos que K tiene una representación como mariposa (R, T) con número de mariposas m , o que la m -mariposa (R, T) representa a K .*

Proposición 1.2.2 *Todo enlace puede ser representado por una m -mariposa, para algún $m \geq 1$. Más aún, la m -mariposa puede ser escogida de tal forma que sea reducida y no tenga E -vértices.*

Definición 1.2.4 *Definimos el **número de mariposas de un enlace** L , denotado $m(L)$, como el mínimo entre todos los m tales que L admite una representación como una m -mariposa.*

En las Figuras 1-5 y 1-6 vemos ejemplos de 2 y 3 mariposas, respectivamente y los respectivos enlaces que representan.

A continuación tenemos uno de los resultados más importantes acerca de mariposas, el cual nos da la relación entre el número de mariposas y el número de puentes de un enlace dado.

Proposición 1.2.3 *Para todo enlace L , $b(L) = m(L)$.*

Como en este trabajo estamos interesados en estudiar enlaces de 2 y 3 puentes, y gracias al resultado anterior, sólo nos centraremos en el caso particular de las 2 y 3 mariposas.

1.3 2-mariposas y 3-mariposas

En esta sección veremos cómo representar enlaces de 2 y 3 puentes como 2 o 3 mariposas, respectivamente. Además, daremos una forma menos técnica para construir estas mariposas, pero que puede llevarse a la definición formal.

1.3.1 Enlaces de 2-puentes como 2-mariposas

Como por la Proposición 1.2.3 tenemos que todo enlace de 2-puentes se puede representar por medio de una 2-mariposa, es posible dar una presentación a cualquier enlace de 2-puentes, utilizando diagramas de 2-mariposas. Tal presentación es equivalente a la presentación de enlaces de 2-puentes hecha por Schubert. Este diagrama de 2-mariposa, al igual que el diagrama de Schubert queda completamente determinado por dos enteros p y q con $0 < q < p$ y $\gcd(p, q) = 1$.

A continuación mostraremos cómo construir este diagrama de la 2-mariposa. Por simplicidad no vamos a distinguir entre un enlace y su imagen espejo.

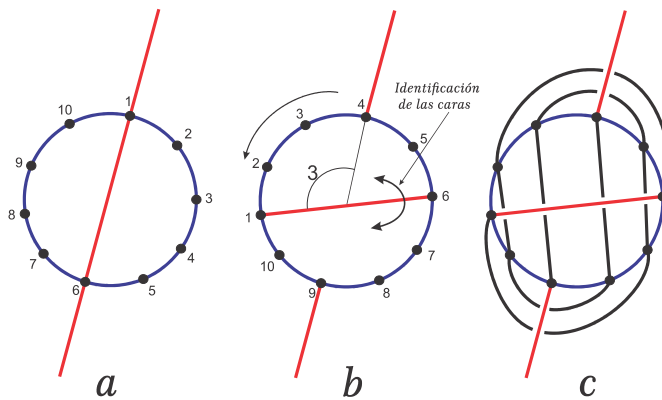


Figura 1-5: Presentación en 2-mariposa del nudo $\frac{5}{3}$

Para presentar el enlace de 2-puentes $\frac{p}{q}$ utilizando 2-mariposas procedemos de la siguiente forma. Primero dibujamos en el plano una circunferencia con $2p$ puntos, igualmente espaciados. Luego trazamos una recta que contenga un diámetro de la circunferencia e intersecte dos de dichos puntos, de tal manera que los $2p$ puntos queden divididos en $p - 1$ puntos a cada lado de la recta, sobre la circunferencia, ver Figura 1-5a.

Luego, giramos el círculo q posiciones, con respecto a los puntos, en sentido antihorario, dejando fija la parte de la recta fuera del círculo. Tanto el diámetro girado como la parte de la recta que queda por fuera del círculo forman los troncos de cada una de las 1-mariposas dadas por el círculo y su exterior, ver Figura 1-5b. Note que el tronco exterior pasa por ∞ . Este diagrama es la 2-mariposa del enlace de 2-puentes $\frac{p}{q}$, y el enlace se obtiene al hacer la identificación de las caras mediante las reflexiones alrededor de los troncos.

Para construir el diagrama del enlace representado por la 2-mariposa, unimos cada uno de los puntos opuestos a los troncos por medio de arcos que no se intersecten y que pasen por debajo de los troncos, ver Figura 1-5c. En esta construcción los troncos se convierten en los puentes del enlace.

Como veremos en la Sección 2.6, todos los enlaces de 2-puentes están completamente clasificados por la fracción, o número racional, $\frac{p}{q}$.

Nota 1.3.1 *Todo enlace de 2-puentes admite, prácticamente, un “único” diagrama de 2-puentes, salvo casos que están completamente estudiados, ver Sección 2.6.*

1.3.2 Enlaces de 3-puentes como 3-mariposas

Nuevamente por la Proposición 1.2.3, tenemos que todo enlace de 3-puentes se puede representar por una 3-mariposa; además, para este caso asociaremos a la 3-mariposa una 6-tupla de enteros, los cuales describen la 3-mariposa y el enlace que representa y como para cada diagrama de 3-puentes de un enlace se le asocia una 6-tupla obtenida de la 3-mariposa, tenemos que esta descripción del enlace no es única, ya que hay infinitos diagramas de 3 puentes para un mismo enlace de 3 puentes.

A continuación mostraremos una forma de construir la 3-mariposa que representa un enlace de 3-puentes, dado un diagrama de 3-puentes para el enlace, es decir, describimos cómo tomar la 6-tupla.

Dado un diagrama de 3-puentes para un enlace, en su representación como 3-mariposa cada uno de los troncos de las 1-mariposas corresponde a los puentes del enlace. Así, dado el diagrama de 3-puentes, ver Figura 1-6a, dibujamos elipses alrededor de cada puente, de modo que cada elipse contiene los puntos extremos de los puentes e intersecta al enlace en un número par de puntos, ver Figura 1-6b.

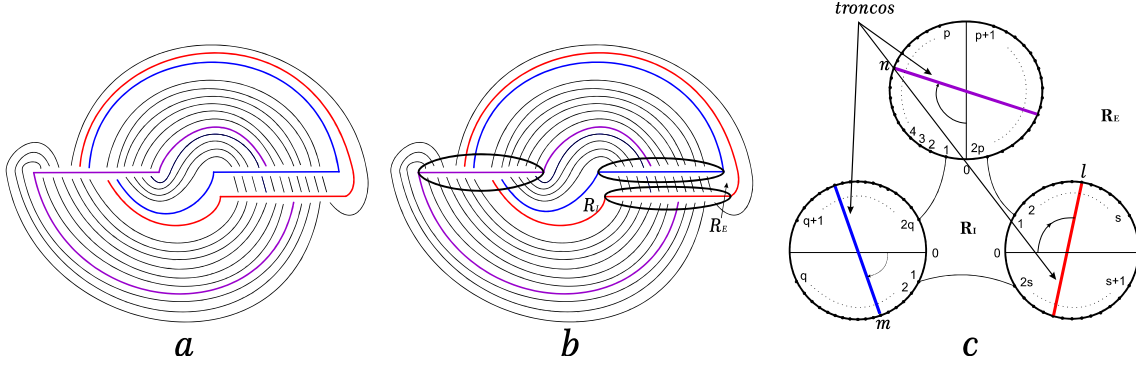


Figura 1-6: Diagrama de enlaces de 3-puentes y construcción de la 3-mariposa

El número de intersecciones de las elipses con cada uno de los puentes son de la forma $2p$, $2q$ y $2s$, los cuales podemos organizar de la forma $2 \leq s \leq q \leq p$, donde el número de puntos sobre la elipse a cada lado de los puentes, sin incluir los extremos de los puentes, es $p - 1$, $q - 1$ y $s - 1$, ver Figura 1-6b. Cada elipse con sus respectivos puntos y el puente, representarán una 1-mariposa con su respectivo tronco y la identificación de las caras en el interior de la elipse se deriva de la forma de pegado de los puntos en el enlace.

En el diagrama de 3-puentes del enlace definimos dos regiones, R_I y R_E , las cuales llamaremos región interior y región exterior, respectivamente, ver Figura 1-6b, cuyas fronteras intersectan los tres puentes del enlace; además, estas dos regiones en el diagrama del enlace de 3-puentes son las únicas que cumplen esa condición, pues la frontera de las otras regiones sólo intersecta dos de los puentes.

Por último, organizamos las 1-mariposas como en [35], de tal manera que la región interior del diagrama del enlace, R_I , contenga el punto 0 de cada 1-mariposa, ver Figura 1-6c. Este diagrama, junto con la identificaciones en cada 1-mariposa a través de los troncos, representa la 3-mariposa que representa al enlace de 3-puentes.

Ahora, para construir la 6-tupla procedemos de la siguiente forma: En cada mariposa partimos del punto 0 y contamos, en sentido antihorario, el número de puntos en la frontera de cada 1-mariposa hasta llegar por primera vez a un punto extremo del tronco. Dicho número de puntos, incluyendo el punto extremo del puente, se denotarán por n , m y l en las mariposas con $2p$, $2q$ y $2s$ puntos, respectivamente y cumplen que $1 \leq n \leq p$, $1 \leq m \leq q$ y $1 \leq l \leq s$, ver Figura 1-6c. Así, definimos la 6-tupla $\{p, n, q, m, s, l\}$ para la 3-mariposa y en general la denotaremos por $\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{m}, \frac{s}{l}\right)$.

Teorema de clasificación de las 3-mariposas

Con el propósito de formalizar la descripción anterior, enunciaremos el teorema de clasificación de las 3-mariposas, el cual a su vez garantiza la representación de toda 3-mariposa por

medio la 6-tupla de enteros. Para detalles de la demostración ver por ejemplo, [15].

Teorema 1.3.1 *Toda 3-mariposa define un único conjunto de seis enteros $\{p, n, q, m, s, l\}$ tal que*

$$\begin{aligned}
 p &\geq q \geq s \geq 2, \\
 1 &\leq n \leq p, \quad 1 \leq m \leq q, \quad 1 \leq l \leq s, \\
 n + m &\neq q + 1, \quad n + l \neq p + 1, \\
 n + m &\neq 2q + 1 \quad \text{y} \quad n + m \neq 2q - p + 1 \quad \text{si} \quad m > q + s - p, \\
 n + l &\neq p - s + 1 \quad \text{y} \quad l < p - s, \\
 m + l &\neq s + 1 \quad \text{si} \quad m < q + s - p.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Recíprocamente, cualquier conjunto de seis enteros $\{p, n, q, m, s, l\}$ que satisface las condiciones (1.1) define una 3-mariposa. Escribimos este conjunto como la tripleta $\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{m}, \frac{s}{l}\right)$ y la representaremos por el diagrama mostrado en la Figura 1-6c.

Lema 1.3.2 *Si la 3-mariposa $\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{m}, \frac{s}{l}\right)$ es reducida, el diagrama del enlace de 3-puentes que ésta representa tiene $p + q + s - 3$ cruces.*

Capítulo 2

Enlaces de 2-puentes

En este capítulo mostraremos diferentes tipos de diagramas de enlaces de 2-puentes: el diagrama de Schubert, ver [29], [19] y [3], de Conway, ver [19], [25] y [7], la presentación en 4-plats, ver [7], la presentación en 2-mariposa, ver [35], [14] y [15], la presentación en almohada, ver [7]. Mostraremos los teoremas de clasificación de este tipo de enlaces usando los espacios lente, los cuales estudiaremos en el siguiente capítulo y la clasificación de los tangles racionales, ver [17], [18], [25] y [7].

2.1 Distintas presentaciones para enlaces de 2-puentes

En esta sección mostraremos cómo construir algunos diagramas usuales para representar los enlaces de 2-puentes y veremos la equivalencia entre estos diagramas.

Presentación de Schubert

Por la clasificación de Schubert, ver [29], sabemos que un enlace de dos puentes K puede ser representado por dos enteros p y q primos relativos tales que

$$p > 0, \quad -p < q < p \quad \text{y} \quad q \text{ impar},$$

de modo que K se puede denotar como, $\frac{p}{q}$ o (p, q) o $K(p, q)$, y además K tiene una proyección regular en el plano que se encuentra determinada por estos enteros. Además, para nuestro propósito usaremos el diagrama de Schubert de $\frac{p}{q}$, cuya construcción describimos brevemente a continuación; para más detalles de esta construcción se puede consultar [29], [25] y [3]. Dado el enlace $\frac{p}{q}$, tomemos su proyección en el plano en la cual dibujamos dos segmentos que representaran los puentes y los dividimos en p segmentos por $p + 1$ puntos, donde dos de ellos, los puntos de los extremos de los segmentos iniciales, representan los extremos de los puentes y los $p - 1$ puntos restantes representaran los puntos de cruces de cada puente. Etiquetamos todos los puntos de cada puente con $2p - 1$ etiquetas, de tal manera que los puntos de cruce tengan doble etiqueta y los extremos de los puentes sólo una, de la siguiente forma:

Sean EF y BA los puentes en $\frac{p}{q}$ y sin pérdida de generalidad supongamos que el puente EF se encuentra a la izquierda del diagrama y BA a la derecha. Llamemos $F_p = E$ y $F_0 = F$ en el

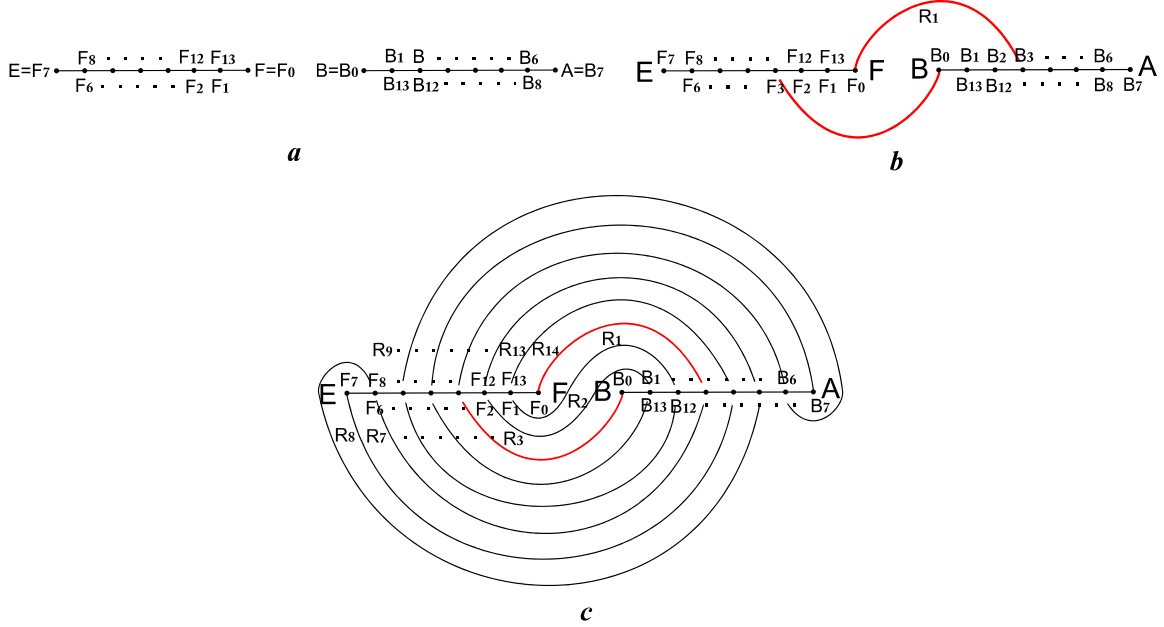


Figura 2-1: Construcción del diagrama de Schubert del nudo $\frac{7}{3}$

primer puente y $B_0 = B$ y $B_p = A$ en el segundo puente. A continuación tomamos los $p - 1$ vértices restantes en EF y le asignamos F_1, F_2, \dots, F_{p-1} iniciando por debajo y continuamos por encima con $F_{p+1}, F_{p+2}, \dots, F_{2p-1}$ tal que al vértice F_i le corresponde también F_j con $i + j = 2p$, para todo $i = 1, \dots, p - 1, j = p + 1, \dots, 2p - 1$. Del mismo modo hacemos la asignación en el puente BA , sólo que iniciando por encima, ver Figura 2-1a.

Luego, para seguir la construcción del diagrama, dibujamos arcos desde los primeros puntos etiquetados de cada puente hasta cruzar, por debajo, por primera vez el otro puente a través del punto con subíndice q , en su respectivo orden de etiquetamiento, ver Figura 2-1b. Posteriormente unimos a través de arcos por debajo los otros puntos de los puentes, sin que estos arcos se intersecten entre sí, ver Figura 2-1c.

Nota 2.1.1 Algunos textos representan el enlace de 2-puentes con el inverso multiplicativo del número racional considerado en esta construcción, presentación de Schubert, esto es, de la forma $\frac{p}{q}$, con $q > 1$ y $-q < p < q$.

Presentación en almohada

Dado un enlace de 2-puentes $\frac{p}{q}$, donde $\gcd(p, q) = 1$, $p > 1$ y $q > 0$, para hacer su presentación en almohada, tomamos el cuadrado unitario U con vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ y $(1, 1)$, sin incluir los segmentos que forman a U .

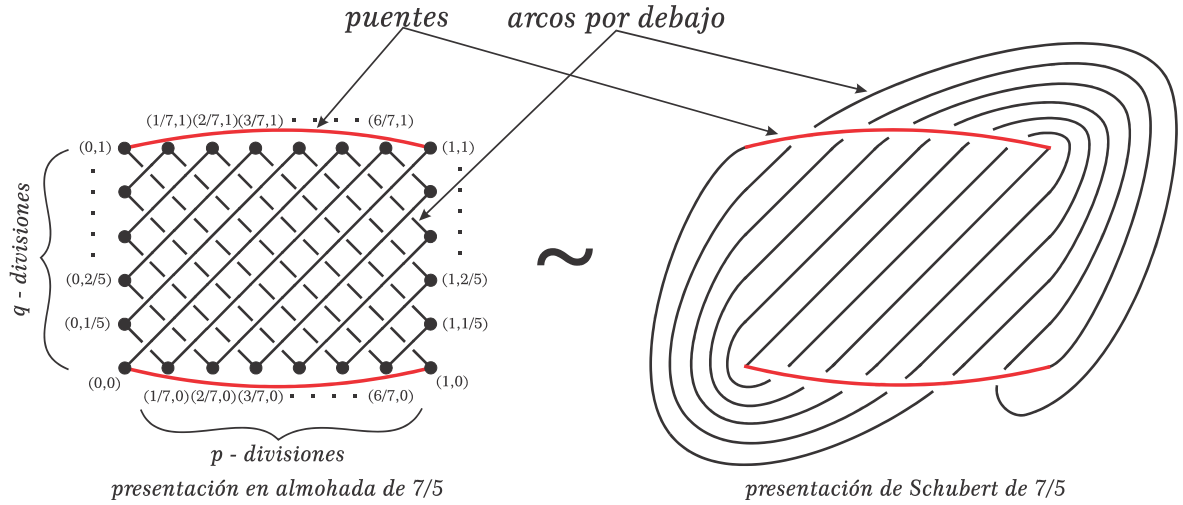


Figura 2-2: Presentación en almohada y en la forma de Schubert del enlace $\frac{7}{5}$, y su equivalencia

Posteriormente dibujamos todos los segmentos de recta en el interior de U , de pendiente $\frac{p}{q}$, que unen los puntos de la forma $\left(0, \frac{i}{q}\right)$ con $\left(\frac{q-i}{p}, 1\right)$ para $0 \leq i < q$, $\left(\frac{i}{p}, 0\right)$ con $\left(\frac{q+i}{p}, 1\right)$ para $0 < i \leq p-q$, y $\left(\frac{i}{p}, 0\right)$ con $\left(\frac{q-i}{q}, 0\right)$ para $p-q < i < q$.

Luego, dibujamos segmentos de recta en el interior de U , de pendiente $-\frac{p}{q}$, los cuales unen puntos de la forma $\left(\frac{i}{p}, 0\right)$ con $\left(0, \frac{i}{q}\right)$ para $0 < i \leq q$; $\left(\frac{i}{p}, 0\right)$ con $\left(\frac{i-q}{p}, 1\right)$ para $q < i \leq p$; y $\left(1, \frac{i}{q}\right)$ con $\left(\frac{p-q+i}{p}, 1\right)$ para $0 < i < q$. Estos últimos segmentos de recta los tomamos por debajo de los que tienen pendiente $\frac{p}{q}$.

Por último, dibujamos arcos de $(0,0)$ a $(0,1)$ y de $(1,0)$ a $(1,1)$, por el exterior de U . Estos dos arcos representaran los puentes y los segmentos anteriores, de pendientes $\frac{p}{q}$ y $-\frac{p}{q}$, representarán los arcos por debajo en el enlace de 2-puentes $\frac{p}{q}$, ver Figura 2-2.

Si en la construcción anterior tomamos los segmentos de pendiente $\frac{p}{q}$ por debajo de los segmentos de pendiente $-\frac{p}{q}$, obtenemos la presentación en almohada de la imagen espejo del enlace $\frac{p}{q}$, ver Figura 2-3.

Se ve fácilmente de la presentación en almohada que si retiramos, por debajo de los puentes, los arcos en el interior de U hasta que se encuentren en el exterior de U , sin que se intersecten entre sí, obtenemos la presentación de el enlace $\frac{p}{q}$ según Schubert, ver Figura 2-2. De igual modo se puede pasar de la presentación de Schubert a la de almohada, mostrando la equivalencia

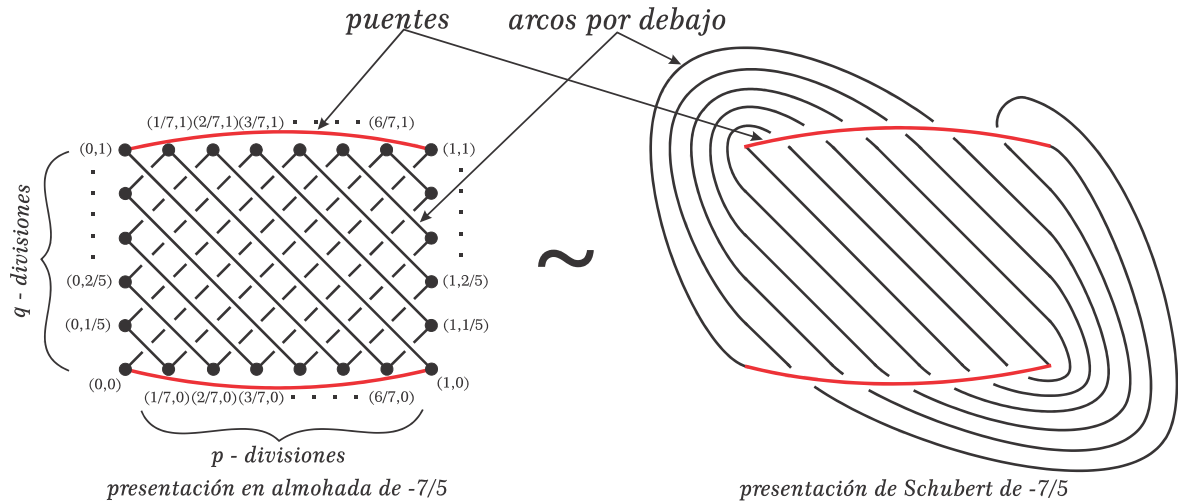


Figura 2-3: Presentación en almohada y en la forma de Schubert del enlace $-\frac{7}{5}$, y su equivalencia

entre estas dos representaciones para un enlace de 2-puentes.

Presentación en 4-plats

La *presentación en 4-plats* es otra forma de representar los enlaces de 2-puentes y esta se puede construir de la siguiente forma:

Tomamos un cuadrado U y situamos, en su respectivo orden, 4 puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 en el segmento superior de U y 4 puntos Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en el segmento inferior de U ; luego, por medio de 4 arcos que se trenzan en el interior de U , unimos los puntos superiores a los puntos inferiores, a través del interior de U , en cualquier orden.

Por último, unimos por medio de 4 arcos mutuamente disjuntos, en el exterior de U , los puntos P_1 y P_2, P_3 y P_4, Q_1 y Q_2, y, Q_3 y Q_4 . El resultado, al retirar los segmentos que unen a U , es un enlace de 2-puentes, lo cual fue demostrado por J. Birman utilizando la teoría de trenzas, ver [2]. Además, los 2 arcos que unen a P_1 y P_2, P_3 y P_4 , serán los dos puentes del enlace, ver Figura 2-4.

Presentación de Conway

Dado cualquier enlace de 2-puentes $\frac{p}{q}$ con una presentación en 4-plats, éste puede ser deformado, utilizando movimientos de Reidemeister, a una de las presentaciones mostradas en la Figura 2-5. Una demostración detallada de la equivalencia de estas dos presentaciones para un enlace de 2-puentes se puede encontrar en [25], donde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y cada a_i indica que tenemos $|a_i|$ cruces.

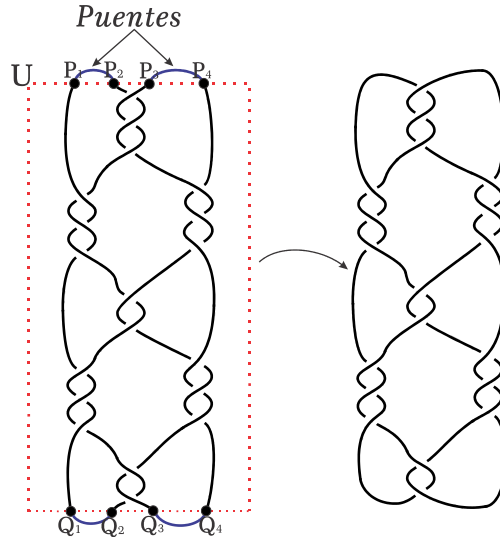


Figura 2-4: Presentación en 4-plats

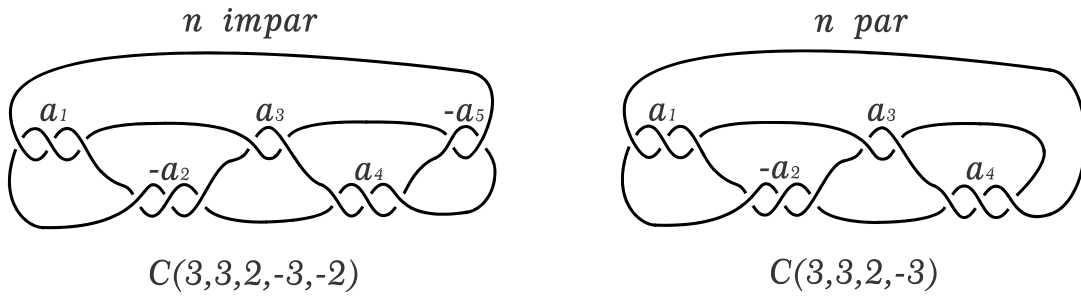


Figura 2-5: Presentación de Conway

Los cruces positivos y negativos del diagrama son como en la Figura 2-8. Además, los diagramas de la Figura 2-5, son llamados *formas normales de Conway* y las denotamos por $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$, donde para i par, a_i en la notación representa $-a_i$ en el diagrama y para i impar, a_i en la notación representa a_i en el diagrama.

Nota 2.1.2 Esta presentación para un enlace de 2-puentes no necesariamente es única, a menos que $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ y n sea impar. Además, los enteros a_1, a_2, \dots, a_n que aparecen en la forma normal de Conway de un enlace de 2-puentes, coinciden con enteros de la fracción continua del racional $\frac{p}{q}$ que representa al mismo enlace de 2-puentes; esto es,

$$C(a_1, a_2, \dots, a_n) \approx \frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Al final de este capítulo, mostraremos que todo enlace de 2-puentes en la forma de Conway, se puede llevar a la forma de Schubert, lo cual mostraría la equivalencia entre las 4 presentaciones dadas para un enlace de 2-puentes.

2.2 Tangles racionales (ovillos racionales)

En esta sección definiremos lo que es un (n, n) -tangle y nos centraremos en un tipo especial de $(2, 2)$ -tangles, los cuales son llamados tangles racionales.

Para este tipo particular de tangles definiremos ciertas operaciones algebraicas, las cuales se obtienen a partir de movimientos de isotopías, y que serán de gran importancia para la clasificación de un tangle racional por medio de una fracción continua finita, es decir, por medio de un número racional.

2.2.1 Definición de tangles racionales

Definición 2.2.1 *Un (n, n) -tangle T se construye de la siguiente manera: sobre la frontera de la 3-bola B^3 , ubicamos $2n$ puntos $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$, de tal manera que $a_1, \dots, a_n \in S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ y $b_1, \dots, b_n \in S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$ y mediante n curvas en el interior de B^3 , que no se intersecten en el espacio, unimos cada a_i con un a_j o b_j para $i, j = 1, \dots, n$, ver Figura 2-6.*

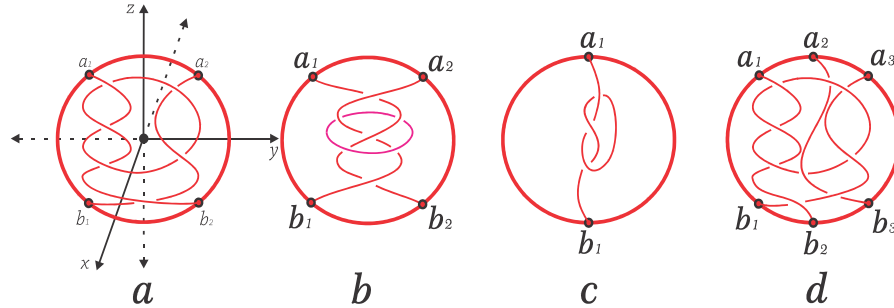


Figura 2-6: n -tangles

Es común denotar un (n, n) -tangle T como el conjunto (B^3, T) , especificando que nuestro tangle se encuentra en el interior de B^3 ; pero por simplicidad y debido a que todos los (n, n) -tangles están en B^3 , los denotaremos por T y cada vez que hablemos de n -tangles nos estamos refiriendo a (n, n) -tangles.

En general un n -tangle puede tener, además de las n curvas que unen los puntos sobre la frontera de B^3 , curvas cerradas, ver Figura 2-6b; pero este tipo de tangles no serán de interés en este trabajo.

Cada vez que hablemos de 2-tangle, podemos suponer que los puntos a_1, b_1 y a_2, b_2 están situados a la izquierda y derecha del plano xz , respectivamente, ver Figura 2-6a.

En este trabajo estudiaremos un caso particular de 2-tangles, que definiremos como *tangles racionales*, o *tangles triviales*. Ahora, definiremos una forma de construir nudos o enlaces a partir de 2-tangles.

Definición 2.2.2 Dado un 2-tangle T , definimos el **numerador de T** , denotado $N(T)$, como el nudo o enlace obtenido de T , al identificar los puntos extremos a_1 y b_1 con a_2 y b_2 respectivamente. En forma similar, definimos el **denominador de T** , denotado $D(T)$, como el nudo o enlace obtenido de T al identificar los puntos extremos a_1 y a_2 con b_1 y b_2 respectivamente, ver Figura 2-7.

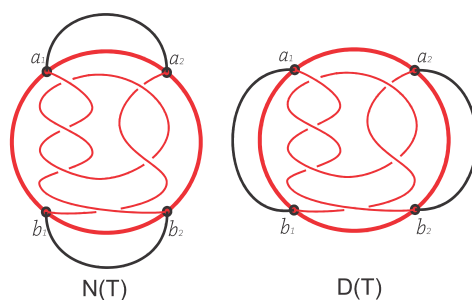


Figura 2-7: Numerador y denominador del 2-tangle T

Definición 2.2.3 Sea T un 2-tangle. Si T se obtiene al unir a_1 con a_2 y b_1 con b_2 , entonces decimos que T es el tangle **cero** y lo denotamos por $[0]$. Además, si $[0]$ lo rotamos 90° con respecto al eje x , obtenemos nuevamente un tangle, al cual llamamos el tangle **infinito** y lo denotamos por $[\infty]$, ver Figura 2-8.

Definición 2.2.4 Sea (B^3, T) un 2-tangle. Diremos que T es un **tangle racional** o **tangle trivial**, si existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f|_{\mathbb{R}^3 \setminus B^3} = Id$, $f(B^3) = B^3$, $f(\{a_1, a_2, b_1, b_2\}) = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, no necesariamente como la función identidad, y $f([\infty]) = T$.

De la Definición 2.2.4 tenemos que $[0]$ e $[\infty]$ son tangles racionales y que además todo tangle construido a partir de $[0]$ e $[\infty]$ mediante una composición de homeomorfismos, es un tangle racional.

Definición 2.2.5 Llamaremos **nudo** o **enlace racional**, al numerador o denominador de un tangle racional.

En esta sección estamos interesados en el estudio de los tangles racionales a través de movimientos de isotopías, para lo cual definimos la isotopía entre tangles racionales.

Dados dos tangles racionales, T, S , en B^3 , decimos que ellos son *isotópicos*, denotado por $T \sim S$, si existe un auto-homeomorfismo $h : (B^3, T) \rightarrow (B^3, S)$ preservando orientación, el cual actúa como la función identidad en la frontera de B^3 . Equivalentemente, T y S son isotópicos si y sólo si cualquier dos diagramas de estos son isotópicos, o en general, si dos diagramas cualesquiera de ellos difieren por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister.

Definición 2.2.6 *Los tangles $[-1]$ y $[1]$ se obtienen al intercambiar las posiciones de b_1 y b_2 en $[\infty]$, a través de un homeomorfismo que deje fijo a_1 y a_2 y haga una rotación en B^3 de 90° con respecto al eje z . Además, si al hacer la proyección del tangle $[\pm 1]$ en el plano yz , vemos que el arco que une los puntos a_1 y b_1 está por encima del arco que une los puntos a_2 y b_2 , decimos que este tangle es $[+1]$, en caso contrario, tenemos $[-1]$, ver Figura 2-8.*

Los tangles $[0]$, $[\infty]$, $[-1]$ y $[1]$, los llamaremos *tangles racionales simples*.

Nota 2.2.1 *La convención que adoptamos para la representación gráfica de los tangles $[+1]$ y $[-1]$ es distinta de algunos autores, ver [7], ya que seguimos los lineamientos de Kauffman y Lambropoulou, ver [17] y [18], y las aplicaciones de estos al estudio de la recombinación del ADN, ver [18].*

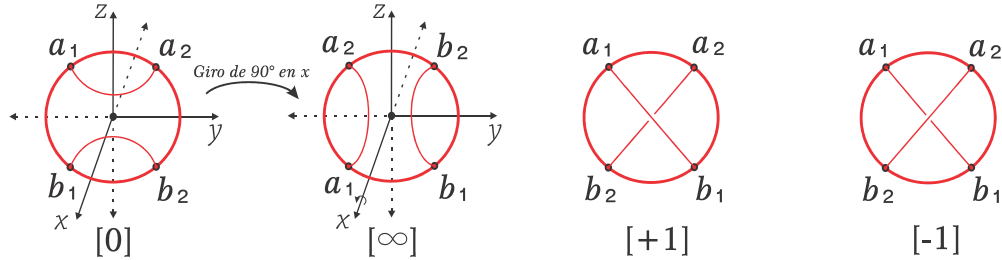


Figura 2-8: Tangles racionales simples

A continuación definiremos dos subconjuntos especiales de los tangles racionales, llamados *tangle entero* y *tangle vertical*, en los cuales definiremos dos operaciones binarias, *suma* y *producto*, respectivamente.

Definición 2.2.7

- i) Un **tangle entero**, denotado por $[n]$, es aquel formado a partir de n giros horizontales, partiendo de $[0]$, para $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos que $[n]$ se obtiene al hacer giros sobre $[0]$ a la izquierda y $[-n]$ al hacer giros a la derecha, ver Definición 2.2.6 y Figura 2-9.

ii) Un **tangle vertical**, denotado por $\frac{1}{[n]}$, es aquel formado a partir de n giros verticales, partiendo de $[\infty]$, para $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos que $\frac{1}{[n]}$ se obtiene al hacer giros sobre $[\infty]$ a la derecha y $\frac{1}{[-n]}$ al hacer giros a la izquierda, ver Figura 2-9.

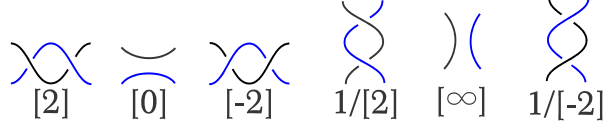


Figura 2-9: Tangles enteros y verticales

Es claro de la definición anterior que $\frac{1}{[1]} = [1]$ y $\frac{1}{[-1]} = [-1]$.

2.2.2 Aritmética de tangles racionales

En el conjunto de los tangles enteros y verticales definimos dos operaciones *suma* y *producto*, denotadas por $+$ y $*$, respectivamente. Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, definiremos la *suma* de $[m]$ y $[n]$ denotada $[n] + [m] = [n + m]$, o $[m]$ y $\frac{1}{[n]}$ denotada $[m] + \frac{1}{[n]}$, como el tangle racional obtenido al identificar los puntos extremos a_2 y b_2 de $[m]$ a los puntos extremos a_1 y b_1 de $[n]$ o $\frac{1}{[n]}$, respectivamente. De igual modo, definiremos el *producto* de $\frac{1}{[n]}$ y $\frac{1}{[m]}$ denotado por $\frac{1}{[n]} * \frac{1}{[m]} = \frac{1}{[n + m]}$, o $[m]$ y $\frac{1}{[n]}$ denotado por $[m] * \frac{1}{[n]}$, como el tangle racional obtenido al identificar los puntos extremos b_1 y b_2 de $\frac{1}{[m]}$ o $[m]$ a los puntos extremos a_1 y a_2 de $\frac{1}{[n]}$, respectivamente, ver Figura 2-10.

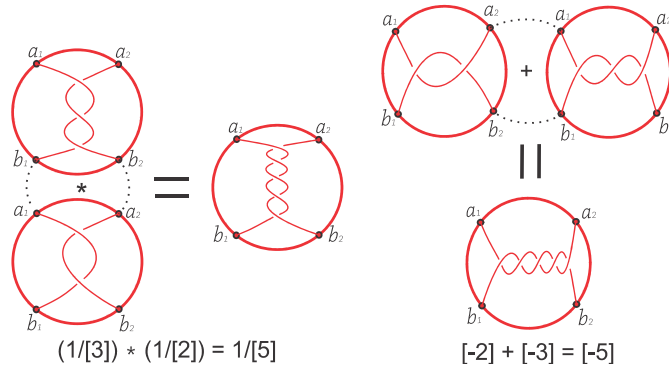


Figura 2-10: Producto (*) de tangles verticales, y suma (+) de tangles enteros

Ambas operaciones son conmutativas salvo isotopías. Además, si operamos dos tangles

racionales, el resultado no siempre será un tangle racional, ya que cuando operamos

$$[n] * [m] \quad \text{o} \quad \frac{1}{[n]} + \frac{1}{[m]} \quad (2.1)$$

para $m, n \neq \pm 1$, el resultado es un 2-tangle con una curva cerrada si m, n son pares, o simplemente obtenemos un 2-tangle el cual no es racional si al menos uno de los dos m o n es impar, ver Figura 2-11. De modo que extenderemos nuestras operaciones de suma y producto, las cuales no serán conmutativas en general, a tangles racionales, evitando hacer sumas o productos como los mostrados en (2.1). Además, dado un tangle racional podemos definir otras operaciones: rotación, inversión y además se les puede hallar la imagen espejo, ver Figura 2-12.

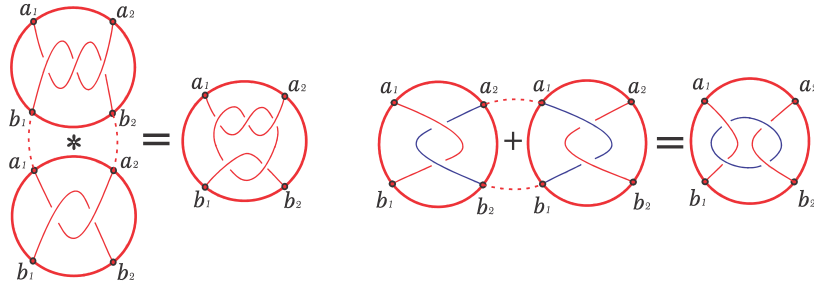


Figura 2-11: 2-tangles no racionales

La *imagen espejo* de un tangle T será denotada como $-T$ y se obtiene a partir de T al intercambiar todos los cruces de T . Es decir, $-[n] = [-n]$ y $-\frac{1}{[n]} = \frac{1}{[-n]}$. Además se puede ver que $-(T + S) = (-T) + (-S)$ y $-(T * S) = (-T) * (-S)$.

La *rotación* de un tangle T , denotada por T^r , se obtiene rotando 90° en sentido antihorario el tangle T , mientras que el *inverso* de T , denotado $T^{-1} = \frac{1}{T}$, es definido como $-T^r$. Por ejemplo $[n]^{-1} = \frac{1}{[n]}$ y $\frac{1}{[n]}^{-1} = [n]$. Rotando el tangle T en sentido horario 90° es la operación de *cancelación* de nuestra inversión y se denotará como $T^{-(-1)} = T$. En particular $[0]^r = [0]^{-1} = [\infty]$ y $[\infty]^r = [\infty]^{-1} = [0]$.

Definiremos ahora un movimiento de isotopía para un 2-tangle, el cual preserva la estructura alternante del tangle. Además, estos movimientos, los cuáles son llamados *flypes*, son los únicos movimientos de isotopías necesarios en la afirmación de la célebre Conjetura de Tait para nudos alternantes, la cual enunciaremos mas adelante, ver [20].

Definición 2.2.8 Un *flype* es una isotopía de un 2-tangle en un nudo, aplicado a un 2-subtangle de la forma $[\pm 1] + t$ o $[\pm 1] * t$ como ilustramos en la Figura 2-13. Un flype fija los puntos extremos $\{a_1, b_1\}$ y $\{a_2, b_2\}$ del 2-subtangle, si éste es de la forma $[\pm 1] + t$ y gira t en

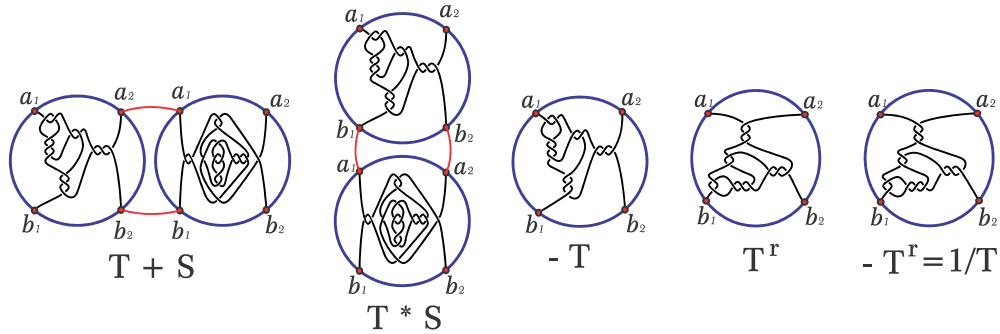


Figura 2-12: Suma, producto, imagen espejo, rotación e inversión de tangles racionales

el espacio 180° con respecto al eje y , o fija los puntos $\{a_1, a_2\}$ y $\{b_1, b_2\}$ si éste es de la forma $[\pm 1] * t$ y gira t en el espacio 180° con respecto al eje z . Un *flype* será llamado **racional** si el 2-subtangle en el cual éste actúa es racional.

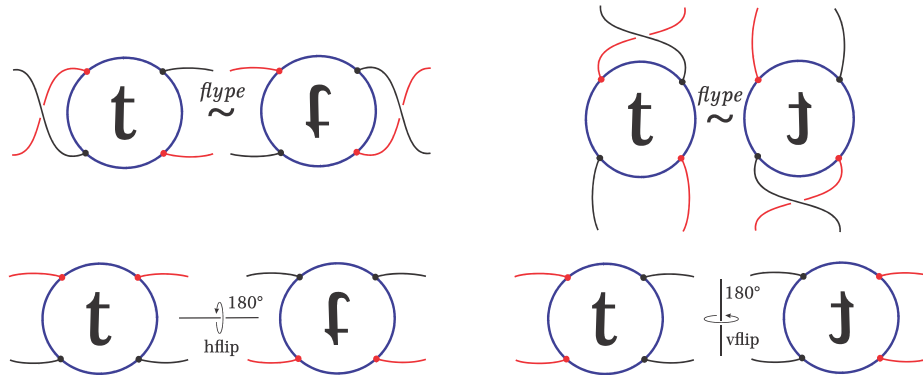


Figura 2-13: flypes y flip de tangles racionales

Conjetura 2.2.1 (La Conjetura de Tait para Nudos) *Dos nudos alternantes son isotópicos si y sólo si cualquier dos diagramas en S^2 están relacionados por una sucesión finita de flypes.*

A continuación definiremos otro movimiento para 2-tangle, el cual a diferencia del movimiento flype, cambia los puntos extremos del 2-tangle.

Definición 2.2.9 *Un **flip** es una rotación en el espacio de un 2-tangle mediante un giro de 180° . Decimos que un T^{hflip} es el **flip horizontal** del 2-tangle T si T^{hflip} se obtiene a partir de T , mediante una rotación de 180° alrededor del eje horizontal en el plano de T . Decimos que un T^{vflip} es el **flip vertical** del 2-tangle T si T^{vflip} se obtiene a partir de T mediante una rotación de 180° alrededor del eje vertical, en el plano de T . Ver Figura 2-13.*

El lema siguiente es muy importante para varios resultados que siguen.

Lema 2.2.2 (*Lema del flipping*). Sea T un tangle racional, entonces:

1. $T \sim T^{hflip}$,
2. $T \sim T^{vflip}$,
3. $T \sim (T^{-1})^{-1} = (T^r)^r$.

Prueba. Ver [17]. ■

Nota 2.2.2 Como una consecuencia del lema anterior se tiene que la adición de $[\pm 1]$ y la multiplicación por $[\pm 1]$ es conmutativa, es decir, para un flype racional se cumple que $[\pm 1] + t \sim t + [\pm 1]$ y $[\pm 1] * t \sim t * [\pm 1]$. En general, para cualesquiera m y n en \mathbb{Z} , tenemos las siguientes identidades isotópicas:

$$[m] + T + [n] \sim T + [m + n] \quad y \quad \frac{1}{[m]} * T * \frac{1}{[n]} \sim T * \frac{1}{[m + n]}.$$

Lema 2.2.3 Todo tangle racional T satisface las siguientes ecuaciones isotópicas:

$$T * \frac{1}{[n]} = \frac{1}{[n] + \frac{1}{T}} \quad y \quad \frac{1}{[n]} * T = \frac{1}{\frac{1}{T} + [n]}.$$

Prueba. Ver [17]. ■

2.2.3 Propiedades de tangles racionales

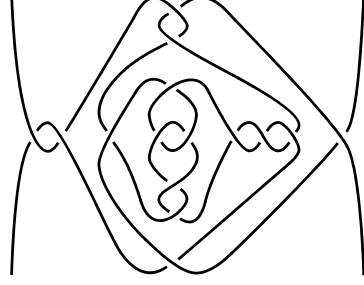
A continuación definiremos una forma inductiva de construir tangles racionales, a partir de los tangles enteros y verticales. Además, cualquier tangle construido de la siguiente manera es un tangle racional.

Definición 2.2.10 Un tangle racional en forma de **twist** es aquel creado por adiciones y productos consecutivas de los tangles $[\pm 1]$, comenzando con el tangle $[0]$ o el tangle $[\infty]$, ver Figura 2-14.

Un tangle en forma de twist se puede describir mediante una expresión algebraica dada por:

Algoritmo 2.2.1 Para cualquier sucesión de números enteros $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, tomamos una sucesión de tangles enteros o verticales $T_{a_0}, T_{a_1}, T_{a_2}, \dots, T_{a_n}$, donde $T_{a_i} = [a_i]$ o $T_{a_i} = \frac{1}{[a_i]}$, entonces:

1. Sea $B_0 = T_{a_0}$,



$$T = [2] + (1/[2] * [-1] + (1/[-1] * [-2] * 1/[-2]) + [3]) * 1/[1] + [1]$$

Figura 2-14: Tangle T en forma de twist

2. Para $k = 1$, tenemos que $B_1 = [a_1] + [a_0]$ o $B_1 = [a_0] + [a_1]$ si $T_{a_1} = [a_1]$, o tenemos que $B_1 = \frac{1}{[a_1]} * [a_0]$ o $B_1 = [a_0] * \frac{1}{[a_1]}$ si $T_{a_1} = \frac{1}{[a_1]}$, de modo que

i) Si $T_{a_2} = [a_2]$, sea $B_2 = [a_2] + B_1$ o $B_2 = B_1 + [a_2]$, esto es

$$\begin{aligned} B_2 &= [a_2] + ([a_1] + [a_0]) \quad \text{o} \quad B_2 = ([a_0] + [a_1]) + [a_2], \quad \text{o} \\ B_2 &= [a_2] + \left(\frac{1}{[a_1]} * [a_0] \right) \quad \text{o} \quad B_2 = \left([a_0] * \frac{1}{[a_1]} \right) + [a_2], \end{aligned}$$

ii) Si $T_{a_2} = \frac{1}{[a_2]}$, sea $B_2 = \frac{1}{[a_2]} * B_1$ o $B_2 = B_1 * \frac{1}{[a_2]}$, esto es

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{[a_2]} * ([a_1] + [a_0]) \quad \text{o} \quad B_2 = ([a_0] + [a_1]) * \frac{1}{[a_2]}, \quad \text{o} \\ B_2 &= \frac{1}{[a_2]} * \left(\frac{1}{[a_1]} * [a_0] \right) \quad \text{o} \quad B_2 = \left([a_0] * \frac{1}{[a_1]} \right) * \frac{1}{[a_2]}. \end{aligned}$$

3. Para $k < n$,

i) Si $T_{a_{k+1}} = [a_{k+1}]$, sea $B_{k+1} = [a_{k+1}] + B_k$ o $B_{k+1} = B_k + [a_{k+1}]$,

ii) Si $T_{a_{k+1}} = \frac{1}{[a_{k+1}]}$, sea $B_{k+1} = \frac{1}{[a_{k+1}]} * B_k$ o $B_{k+1} = B_k * \frac{1}{[a_{k+1}]}$.

Ahora, si en el algoritmo anterior tenemos que $B_0 = [s_0]$ y para $k < n$ se tiene que $T_{s_{k+1}} = [s_{k+1}]$, entonces B_{k+1} tiene la siguiente forma:

$$[s_k] + \left(\cdots + \left(\frac{1}{[r_3]} * \left([s_1] + \left(\frac{1}{[r_1]} * [s_0] * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_4]} + \cdots \right) + [s_{k+1}] \right), \quad (2.2)$$

pero si en el algoritmo tenemos que $B_0 = \frac{1}{[r_0]}$ y para $k < n$ se tiene que $T_{r_{k+1}} = \frac{1}{[r_{k+1}]}$, entonces B_{k+1} tiene la siguiente forma:

$$\frac{1}{[r_k]} * \left(\cdots * \left([s_3] + \left(\frac{1}{[r_1]} * \left([s_1] + \frac{1}{[r_0]} + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_4] \right) * \cdots \right) * \frac{1}{[r_{k+1}]}, \quad (2.3)$$

para $r_i, s_j \in \mathbb{Z}$. De lo anterior, se puede ver que (2.2) se inicia a partir de $[0]$, pues $[s_0]$ es un tangle entero, y (2.3) se inicia a partir de $[\infty]$, pues $\frac{1}{[r_0]}$ es un tangle vertical.

Dado un tangle racional T y $n \in \mathbb{Z}$ tenemos por Nota 2.2.2 que $[-n] + T + [n] = T + [0] = T$, pues los giros de la izquierda desenrollan los de la derecha. Si $[s_k] + [s_{k+1}] = [0]$ y además si $[s_0] = [\infty]$ en (2.2), podemos obtener (2.3) de la forma (2.2), puesto que $[\infty] * \frac{1}{[m]} = \frac{1}{[m]} * [\infty] = \frac{1}{[m]}$ para $m \in \mathbb{Z}$, así podemos escribir $\frac{1}{[r_0]}$ como $\frac{1}{[r_0-m]} * [\infty] * \frac{1}{[m]}$ en (2.3) y obtener:

$$[s_k] + \left(\cdots + \left(\frac{1}{[r_3]} * \left([s_1] + \left(\frac{1}{[r_1]} * [s_0] * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_4]} \right) + \cdots \right) + [s_{k+1}].$$

Esta prueba, de pasar de (2.3) a (2.2), se puede ver más detalladamente de la siguiente forma:

Mostremos que todo tangle en forma de twist que tiene una expresión algebraica de la forma (2.2) ó (2.3), se puede ver como una expresión de la forma (2.2). Sea T un tangle en forma de twist. Si T tiene la forma (2.2), listo. Ahora, si T tiene la forma (2.3), entonces T se puede ver como

$$T = \frac{1}{[r_k]} * \left(\cdots * \left([s_3] + \left(\frac{1}{[r_1]} * \left([s_1] + \frac{1}{[r_0]} + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_4] \right) * \cdots \right) * \frac{1}{[r_{k+1}]}.$$

Luego, si tomamos $s_k, s_{k+1}, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $[s_k] + [s_{k+1}] = [0]$ y $\frac{1}{[t_1]} * [\infty] * \frac{1}{[t_2]} = \frac{1}{[r_0]}$, esto es, $\frac{1}{[t_1]} * \frac{1}{[t_2]} = \frac{1}{[r_0]}$, se tiene que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{[r_k]} * \left(\cdots + \left(\frac{1}{[r_1]} * \left([s_1] + \frac{1}{[r_0]} + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_2]} \right) + \cdots \right) * \frac{1}{[r_{k+1}]} \\ &= [s_k] + \left(\frac{1}{[r_k]} * \left(\cdots + \left(\frac{1}{[r_1]} * \left([s_1] + \left(\frac{1}{[t_1]} * [s_0] * \frac{1}{[t_2]} \right) + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_2]} \right) + \cdots \right) \right. \\ &\quad \left. * \frac{1}{[r_{k+1}]} \right) + [s_{k+1}] \end{aligned}$$

donde $[s_0] = [\infty]$; esto es, T tiene la forma (2.2). \blacktriangle

Con la notación arriba y para cualquier $j \leq k$, llamaremos una *truncación* de T a un subtangle de T , el cual se puede ver como el obtenido al tomar solo j pasos en el proceso de formación del tangle en forma de twist, es decir,

$$[s_j] + \left(\cdots + \left(\frac{1}{[r_3]} * \left([s_1] + \left(\frac{1}{[r_1]} * [s_0] * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_4]} \right) + \cdots \right) + [s_{j+1}].$$

Ahora consideremos el siguiente lema, el cual caracteriza los tangles racionales.

Lema 2.2.4 *Sea T un tangle racional en forma de twist. Entonces*

1. *Todo 2-subtangle de T es racional.*
2. *Todo 2-subtangle de T es una truncación de T .*

Prueba. Ver [17]. ■

Del lema anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.5 *Todos los flypes de un tangle racional T son racionales.*

Prueba. Sea T un tangle racional, entonces T tiene una presentación en forma de twist, y por Lema 2.2.4(1), tenemos que todo 2-subtangle de T es racional. Por tanto, todos los flypes del tangle racional T son racionales, pues los estamos aplicando a 2-subtangle racionales. ■

Definición 2.2.11 *Un tangle racional se dice que está en **forma estándar** si éste se obtiene por una adición consecutiva de tangles $[\pm 1]$ sólo a la derecha, o sólo a la izquierda y multiplicación de tangles $[\pm 1]$ sólo en la parte inferior, o sólo en la parte superior, iniciando a partir de los tangles $[0]$ o $[\infty]$.*

Un tangle racional en forma estándar tiene una expresión algebraica de la forma:

$$\left(\left(\left([a_n] * \frac{1}{[a_{n-1}]} \right) + [a_{n-2}] \right) * \cdots * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1],$$

con a_2, \dots, a_{n-1} en $\mathbb{Z} - \{0\}$, donde a_1 puede ser $[0]$ y $[a_n]$ puede ser $[\infty]$.

Definición 2.2.12 *Dado un tangle racional T en forma estándar, diremos que T es **alternante** si todos los a_i son positivos o todos son negativos.*

Otra forma de representar un tangle racional abstracto en forma estándar es por medio de la *representación en 3-trenzas*, ilustrada en la Figura 2-15. La representación en 3-trenzas es una versión comprimida de la representación en forma estándar y estas dos representaciones son equivalentes: basta aplicar un *vflip* al tangle racional en forma estándar, luego hacemos rotaciones planas sobre los tangles verticales y algunos movimientos de isotopía plana sobre el tangle; ver Figura 2-15.

En un tangle representado en la forma de 3-trenzas, la fila superior de cruces corresponde a los cruces horizontales y la fila inferior a los cruces verticales de la forma estándar.

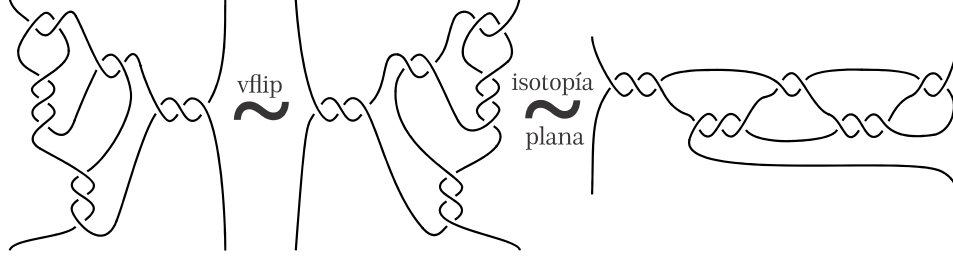


Figura 2-15: De la forma estándar a la forma de fracción continua

Nota 2.2.3 Definimos **la longitud** de un tangle racional en forma estándar, como el número de tangles enteros y verticales que lo conforman. Además, cuando comenzamos a crear un tangle racional, los primeros cruces pueden ser vistos como uno horizontal o uno vertical. Luego, como un tangle vertical $\left(\frac{1}{[n]}\right)$ siempre lo podemos ver como el producto $\left([1] * \frac{1}{[n-1]}\right)$, podemos suponer que comenzamos formando el tangle racional girando el tangle $[0]$, es decir, siempre comienza con un tangle entero. De igual forma podemos suponer que **la longitud** n de un tangle racional en forma estándar **es siempre impar**.

De la Figura 2-15, podemos ver que es posible asociar a un tangle racional T un vector de enteros (a_1, a_2, \dots, a_n) , donde la primera entrada, a_1 , denota el número de cruces del último tangle entero de T y la última entrada, a_n , denota el número de cruces del primer tangle entero de T , en su forma estándar. Además, dado un tangle racional T , este vector de enteros es **único** si y sólo si todos los a_i son positivos o todos son negativos. Por Nota 2.2.3, vemos que la entrada a_n en (a_1, \dots, a_n) se puede descomponer como $(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n - 1, 1)$ si $a_n > 0$, y $(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n + 1, -1)$ si $a_n < 0$.

El siguiente lema muestra que en efecto todo tangle racional se puede representar en la forma estándar.

Lema 2.2.6 *Todo tangle racional puede ser transformado vía isotopía en un tangle en forma estándar.*

Prueba. Sea T un tangle racional en forma de twist. Comenzando por los cruces más externos de T y usando flypes racionales, horizontales y verticales, podemos mover de manera inductiva todos los tangle enteros a la derecha y todos los tangle verticales a la parte inferior de T , aplicando las isotopías identidades para flypes racionales dadas en la Nota 2.2.2. Este proceso nos dice que el tangle

$$T = [s_k] + \left(\dots + \left(\frac{1}{[r_3]} * \left([s_1] + \left(\frac{1}{[r_1]} * [s_0] * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_4]} + \dots \right) + [s_{k+1}] \right),$$

gran importancia para la prueba que toda fracción continua $[[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$ se puede ver como una fracción continua con todos los enteros a_i mayores que 0, o todos menores que 0, la cual definiremos como *forma canónica*.

Prueba. Las pruebas de 1 y 3 son triviales. Veamos ahora que 2 se cumple. En efecto, como T es un tangle racional, tenemos que el tangle $\frac{1}{T} = T^{-1}$ también es racional, de modo que por Lema 2.2.6, T^{-1} se puede escribir en la forma estándar y además para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\left([m] * \frac{1}{[n]}\right)^{-1} = ([m])^{-1} + \left(\frac{1}{[n]}\right)^{-1} = \frac{1}{[m]} + [n],$$

y

$$\left([m] + \frac{1}{[n]}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{[n]}\right)^{-1} * ([m])^{-1} = [n] * \frac{1}{[m]}.$$

Así,

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \left(\left(\left(\frac{1}{[a_n]} + [a_{n-1}]\right) * \frac{1}{[a_{n-2}]} + \dots + [a_2]\right) * \frac{1}{[a_1]}\right) \\ &= \left(\left(\left(\left([\pm 1] * \frac{1}{[a_n \mp 1]} + [a_{n-1}]\right) * \frac{1}{[a_{n-2}]} + \dots + [a_2]\right) * \frac{1}{[a_1]}\right) + [0]\right) \end{aligned}$$

de modo que su representación en forma de fracción continua es

$$\begin{aligned} T^{-1} &= [[0], [a_1], [a_2], \dots, [a_n \pm 1], [\mp 1]] \\ &= [[0], [a_1], [a_2], \dots, [a_n]]. \end{aligned}$$

Por tanto, 2 se cumple. ■

Definición 2.2.14 *Un tangle racional $T = [[\beta_1], [\beta_2], \dots, [\beta_m]]$ está en **forma canónica** si T es alternante y m es impar. Además, T se denomina positivo o negativo de acuerdo al signo de sus términos.*

Nota 2.2.4 *Podemos ver que si T es alternante y m es par, entonces podemos transformar T a la forma canónica, escribiendo $[\beta_m]$ como $[\text{sign}(\beta_m) \cdot (|\beta_m| - 1)] + [\text{sign}(\beta_m) \cdot 1]$, por Nota 2.2.3 y por tanto, tenemos que $[[\beta_1], [\beta_2], \dots, [\beta_m]]$ se puede ver como*

$$[[\beta_1], [\beta_2], \dots, [\text{sign}(\beta_m) \cdot (|\beta_m| - 1)], [\text{sign}(\beta_m) \cdot 1]].$$

La siguiente proposición es la propiedad clave para tangles racionales.

Proposición 2.2.9 *Todo tangle racional se puede llevar por medio de isotopías a la forma canónica.*

Prueba. Ver [17]. ■

La naturaleza alternante de los tangles racionales se usa en la clasificación de los nudos o enlaces racionales. Es fácil ver que la clausura de un tangle racional alternante es un nudo alternante; es decir, tenemos como corolario el siguiente teorema.

Teorema 2.2.10 *Los nudos o enlaces racionales son alternantes, ya que estos poseen un diagrama que es la clausura de un tangle racional alternante.*

2.3 Teoremas de clasificación de los tangles racionales

En esta sección definiremos la relación entre la fracción continua de un tangle racional y la fracción continua de números racionales, ver Apéndice A, y posteriormente enunciaremos los resultados acerca de la clasificación de los tangles racionales usando el número racional, o la fracción continua, que lo representa.

El objetivo principal de esta sección es dar la prueba del siguiente teorema, ver [17].

Teorema 2.3.1 (Teorema de Clasificación de Conway, 1970) *Dos tangles racionales son isotópicos si y sólo si ellos tienen la misma fracción.*

Definición 2.3.1 Sean $x, y \in \mathbb{Q}$. Definiremos la operación aritmética $*$ entre x e y , como

$$x * y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

Lema 2.3.2 *La operación aritmética ‘ $*$ ’ de la Definición 2.3.1 es conmutativa y asociativa.*

Prueba. Sean $x, y, z \in \mathbb{Q}$, de la Definición 2.3.1 tenemos que

$$x * y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}} = y * x$$

por tanto $*$ es conmutativa. Ahora, veamos que $(x * y) * z = x * (y * z)$. En efecto, como

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= \left(\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \right) * z = \frac{1}{\left(\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \right) + \frac{1}{z}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\frac{y+x}{xy}} \right) + \frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{xy}{y+x}} + \frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{\frac{y+x}{xy} + \frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x * (y * z) &= x * \left(\frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \right) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \right)}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\frac{z+y}{yz}} \right)}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{yz}{z+y}}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{z+y}{yz}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{z}{yz} + \frac{y}{yz}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}
\end{aligned}$$

De modo que la operación $*$ es asociativa y además, $x * y * z = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$. ■

Definición 2.3.2 Sea T un tangle racional en forma de twist; esto es,

$$T = [s_k] + \left(\cdots + \left(\frac{1}{[r_3]} * \left([s_1] + \left(\frac{1}{[r_1]} * [s_0] * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_4]} \right) + \cdots \right) + [s_{k+1}].$$

Definimos la **fracción de T** , denotada $F(T)$, como el número racional

$$F(T) = s_k + \left(\cdots + \left(\frac{1}{r_3} * \left(s_1 + \left(\frac{1}{r_1} * s_0 * \frac{1}{r_2} \right) + s_2 \right) * \frac{1}{r_4} \right) + \cdots \right) + s_{k+1},$$

si $T \neq [\infty]$, donde la operación ' $*$ ' es como en la Definición 2.3.1, y la operación '+' es la suma formal de números racionales. Además, definimos $F[\infty] := \infty = \frac{1}{0}$, como una expresión formal.

Ejemplo 2.3.1 Si $T = [3] + \left(\frac{1}{[-5]} * [2] * \frac{1}{[6]} \right) + [-4]$, tenemos que la fracción de T , $F(T)$ es:

$$\begin{aligned}
F(T) &= 3 + \left(\frac{1}{-5} * 2 * \frac{1}{6} \right) + (-4) = 3 + \left(\frac{1}{\frac{1}{-5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} \right) + (-4) \\
&= -1 + \left(\frac{1}{-5 + \frac{1}{2} + 6} \right) = -1 + \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} \right) = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Lema 2.3.3 Sea T un tangle racional en forma de twist, y sea C su forma de fracción continua. Entonces $F(T) = F(C)$.

Prueba. Supongamos que

$$T = [s_k] + \left(\cdots + \left(\frac{1}{[r_3]} * \left([s_1] + \left(\frac{1}{[r_1]} * [s_0] * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_4]} \right) + \cdots \right) + [s_{k+1}]$$

y puesto que la forma de fracción continua y la forma estándar son equivalentes, por Proposición 2.2.7, se sigue del Lema 2.2.6 que

$$C = \left(\left(\left(\left([s_0] * \frac{1}{[r_1 + r_2]} \right) + [s_1 + s_2] \right) * \frac{1}{[r_3 + r_4]} \right) + \cdots \right) + [s_k + s_{k+1}].$$

Además, tenemos por Definición 2.3.2 las siguientes identidades para las operaciones ‘+’ y ‘*’:
 $F(T + [n]) = F([n] + T)$ y $F\left(T * \frac{1}{[n]}\right) = F\left(\frac{1}{[n]} * T\right)$. En efecto,

$$\begin{aligned} F(T + [n]) &= \left(s_k + \left(\cdots + \left(\frac{1}{r_3} * \left(s_1 + \left(\frac{1}{r_1} * s_0 * \frac{1}{r_2}\right) + s_2\right) * \frac{1}{r_4}\right) + \cdots\right) + s_{k+1}\right) + n \\ &= F(T) + n = n + F(T) = F([n] + T). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F\left(T * \frac{1}{[n]}\right) &= \left(s_k + \left(\cdots + \left(\frac{1}{r_3} * \left(s_1 + \left(\frac{1}{r_1} * s_0 * \frac{1}{r_2}\right) + s_2\right) * \frac{1}{r_4}\right) + \cdots\right) + s_{k+1}\right) * \frac{1}{n} \\ &= F(T) * \frac{1}{n} = \frac{1}{n} * F(T) = F\left(\frac{1}{[n]} * T\right). \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} F(T) &= \left(s_k + \left(\cdots + \left(\frac{1}{r_3} * \left(s_1 + \left(\frac{1}{r_1} * s_0 * \frac{1}{r_2}\right) + s_2\right) * \frac{1}{r_4}\right) + \cdots\right) + s_{k+1}\right) \\ &= s_k + \cdots + \frac{1}{r_3 + \frac{1}{s_1 + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{s_0} + r_2} + s_2} + r_4} + \cdots + s_{k+1} \\ &= (s_k + s_{k+1}) + \cdots + \frac{1}{(r_3 + r_4) + \frac{1}{(s_1 + s_2) + \frac{1}{(r_1 + r_2) + \frac{1}{s_0}}}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F(C) &= \left(\left(\left(\left(s_0 * \frac{1}{(r_1 + r_2)}\right) + (s_1 + s_2)\right) * \frac{1}{(r_3 + r_4)}\right) + \cdots\right) + (s_k + s_{k+1}) \\ &= (s_k + s_{k+1}) + \cdots + \frac{1}{(r_3 + r_4) + \frac{1}{(s_1 + s_2) + \frac{1}{(r_1 + r_2) + \frac{1}{s_0}}}}. \end{aligned}$$

Por tanto $F(T) = F(C)$. ■

Nota 2.3.1 *Se sigue del lema anterior que:*

$$\text{Si } T = [a_1] + \frac{1}{[a_2] + \cdots + \frac{1}{[a_{n-1}] + \frac{1}{[a_n]}}} \text{ entonces } F(T) = a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}},$$

de modo que tomaremos esta ecuación como la definición de $F(T)$.

Lema 2.3.4 *Sea $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$ un tangle racional en forma de fracción continua. Entonces la fracción del tangle tiene las siguientes propiedades.*

1. $F(T + [\pm 1]) = F(T) \pm 1$, y $F(T + [\pm k]) = F(T) \pm k$,
2. $F\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{F(T)}$,
3. $F(-T) = -F(T)$,
4. $F(T * [\pm 1]) = F(T) * (\pm 1)$, y $F\left(T * \frac{1}{[\pm k]}\right) = \frac{1}{\pm k + \frac{1}{F(T)}}$,
5. Si $R = [[a_{i+1}], \dots, [a_n]]$, entonces $F(T) = [a_1, \dots, a_i, F(R)]$,
6. Si $a_i = b_i + c_i$ y $S = [[c_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$, entonces

$$F(T) = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + F(S)] = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, 0, F(S)].$$

Prueba. Esta prueba se sigue de manera inmediata de los Lemas 2.2.3, 2.2.8 y A.0.2. ■

Es fácil ver, por Lema 2.3.4(2) que $F\left(\frac{1}{T}\right) = F((T^r)^r) = F(T)$.

Lema 2.3.5 Si T es un tangle racional, entonces $F(T^{hflip}) = F(T) = F(T^{vflip})$.

Prueba. Ver [17]. ■

Lema 2.3.6 Sea T un tangle racional en forma de fracción continua y T' su forma canónica. Entonces $F(T) = F(T')$.

Prueba. Este resultado es consecuencia de las pruebas de las Proposiciones 2.2.9 y A.0.3. ■

La siguiente proposición será de utilidad para nuestro teorema principal, pero omitiremos la prueba por motivos técnicos, ya que se escapa a los objetivos de este trabajo.

Proposición 2.3.7 Dos tangles racionales alternantes sobre S^2 son isotópicos si y sólo si ellos difieren por una sucesión finita de flypes racionales.

Prueba. Ver [17]. ■

A partir del Lema 2.2.4 y la Proposición 2.3.7 se puede deducir el siguiente corolario.

Corolario 2.3.8 Dos tangles racionales isotópicos con todos los cruces del mismo tipo serán formas de twist de la misma forma canónica.

Lema 2.3.9 Dos tangles racionales que difieran por un flype racional tienen la misma fracción.

Prueba. Sean T y S dos tangles racionales que difieran por un flype con respecto a un subangle racional t . El flype tendrá una de las siguientes formas algebraicas: $[\pm 1] + t \sim t^{hflip} + [\pm 1]$ o $[\pm 1] * t \sim t^{vflip} * [\pm 1]$. Por el Lema 2.3.5 se tiene que $F(t^{hflip}) = F(t)$ y $F(t^{vflip}) = F(t)$ y por el Lema 2.3.3 también se tiene que $F([\pm 1] + t) = F(t + [\pm 1])$ y $F([\pm 1] * t) = F(t * [\pm 1])$. Por el Corolario 2.2.5, t es una truncación racional de T y de los Lemas 2.2.8 y A.0.2 se deduce que las fracciones continuas de tangles racionales y fracciones continuas aritméticas concuerdan sobre truncaciones. Por lo tanto se tiene que $F(T) = F(S)$. ■

Ahora podremos enunciar y demostrar dos teoremas centrales de este trabajo.

Teorema 2.3.10 *La fracción asociada a un tangle racional es invariante bajo isotopía de tangles racionales.*

Prueba. Sean T y S dos tangles racionales isotópicos en forma de twist. Por el Lema 2.2.6 y la Proposición 2.2.7, los tangles T y S son isotópicos a dos tangles racionales T' y S' en forma de fracción continua y por el Lema 2.3.3 se cumple que $F(T) = F(T')$ y $F(S) = F(S')$. Además, por la Proposición 2.2.9, los tangles T' y S' se pueden transformar vía isotopía a dos tangles racionales alternantes T'' y S'' en forma canónica y por el Lema 2.3.6 se tiene que $F(T') = F(T'')$ y $F(S') = F(S'')$.

Ahora, por la Proposición 2.3.7, los tangles T'' y S'' difieren solamente por flypes racionales y por el Lema 2.3.9 se tiene que $F(T'') = F(S'')$. De este modo se cumple que $F(T) = F(S)$. ■

Teorema 2.3.11 *Dos tangles racionales con la misma fracción son isotópicos.*

Prueba. Sean $T = [[a_1], \dots, [a_n]]$ y $S = [[b_1], \dots, [b_m]]$ dos tangles racionales con $F(T) = F(S) = \frac{p}{q}$. Llevemos T y S a sus formas canónicas $T' = [[\alpha_1], \dots, [\alpha_k]]$ y $S' = [[\beta_1], \dots, [\beta_l]]$ respectivamente. Del Teorema 2.3.10 se concluye que $F(T') = F(T) = F(S) = F(S') = \frac{p}{q}$. Por la Proposición A.0.3, la fracción $\frac{p}{q}$ tiene una única expansión en forma de fracción continua en forma canónica, digamos $\frac{p}{q} = [\gamma_1 \dots, \gamma_r]$. Esto nos lleva al tangle racional alternante en forma canónica $Q = [[\gamma_1], \dots, [\gamma_r]]$, el cual está determinado de forma única a partir del vector de enteros $(\gamma_1 \dots, \gamma_r)$. Afirmamos que $Q = T'$ y similarmente $Q = S'$.

En efecto, si este no fuera el caso tendríamos que dos fracciones continuas diferentes en forma canónica darían origen al mismo número racional: $[\alpha_1, \dots, \alpha_k] = \frac{p}{q} = [\gamma_1 \dots, \gamma_r]$. Pero esto contradice la unicidad de la forma canónica de las fracciones continuas, ver Apéndice A. ■

Prueba del Teorema 2.3.1. La prueba de este teorema es una consecuencia de los Teoremas 2.3.10 y 2.3.11, los cuales muestran que dos tangles racionales son isotópicos si y sólo si ellos tienen la misma fracción. ■

De la unicidad de la forma canónica de una fracción continua se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 2.3.12 *La forma canónica de un tangle racional es única.*

Corolario 2.3.13 *Tangles racionales en forma canónica tienen mínimo número de cruces.*

Prueba. Sea T'' un tangle racional en forma canónica y sea Γ el conjunto de todos los tangles racionales en forma de twist con forma canónica el tangle T'' . Por el Corolario 2.3.12, para cada elemento de Γ la forma canónica T'' es única. Sea $T \in \Gamma$ un tangle racional con k cruces en forma de twist. Mediante una sucesión de flypes podemos llevar T a la forma estándar $T' \sim T$, y como los flypes no cambian el número de cruces, entonces T' tiene k cruces. Notemos que $T' \in \Gamma$. Llevemos T' a su forma canónica T'' y por la prueba de la Proposición 2.2.9, la cual omitimos, se tiene que T'' tendrá menos cruces que T' . ■

Corolario 2.3.14 *Tangles racionales alternantes tienen mínimo número de cruces.*

Prueba. En efecto, si un tangle racional alternante está en forma de twist, entonces mediante una sucesión de flypes podemos llevar dicho tangle a su forma canónica y por el Corolario 2.3.13, éste tiene número de cruces mínimo. Como los flypes no cambian el número de cruces entonces se tiene lo que se pedía. ■

2.4 Otra presentación de tangles racionales

A continuación daremos la equivalencia entre los tangles racionales en forma canónica y los tangles racionales en la forma de Montesinos, estos últimos corresponden a una pequeña modificación de los tangles racionales en forma de twist, con el fin de darles una forma simétrica a su representación. Estos tangles son utilizados por Montesinos para definir y clasificar los enlaces de Montesinos, ver [3, pág. 195], y su diagrama es como en la Figura 2-17.

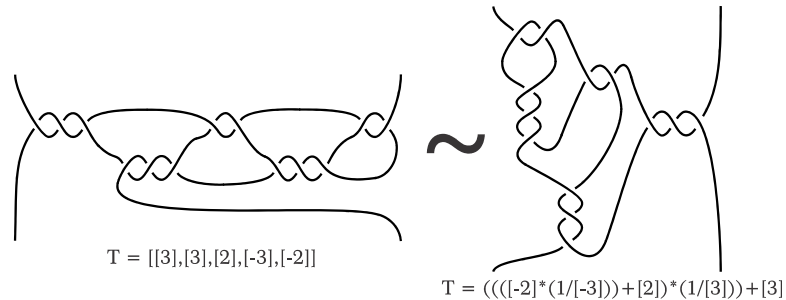


Figura 2-16: Tangle T en forma de fracción continua y forma estándar

Dado un tangle racional $T = [[\beta_1], [\beta_2], \dots, [\beta_m]]$ en forma canónica, hemos visto anteriormente que éste se obtiene de un tangle $T = [[a_1], \dots, [a_n]]$ en forma de fracción continua, donde m y n son impares; esto es, siempre podemos pasar de una forma a otra. Ahora, dado el tangle $T = [[a_1], \dots, [a_n]]$ en forma de fracción continua, tenemos que T siempre puede ser llevado a la forma estándar, ver Figura 2-16, esto es,

$$T = \left(\left(\left([a_n] * \frac{1}{[a_{n-1}]} \right) + [a_{n-2}] \right) * \dots * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1].$$

Una vez tengamos T en forma estándar, éste se puede llevar a la forma de twist, es decir, T lo podemos escribir como

$$T = [a'_1] + (\dots + (\frac{1}{[a'_{n-3}]} * ([a'_{n-2}] + (\frac{1}{[a'_{n-1}]} * [a_n] * \frac{1}{[a''_{n-1}]} + [a''_{n-2}]) * \frac{1}{[a''_{n-3}]})) + \dots) + [a''_1],$$

donde $[a_i] = [a'_i] + [a''_i]$ y $\frac{1}{[a_j]} = \frac{1}{[a'_j]} * \frac{1}{[a''_j]}$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, ver Figura 2-17. Luego, si $[a''_1] = [0]$ en la representación de T en forma de twist, tenemos la forma dada por Montesinos, ver Figura 2-17.

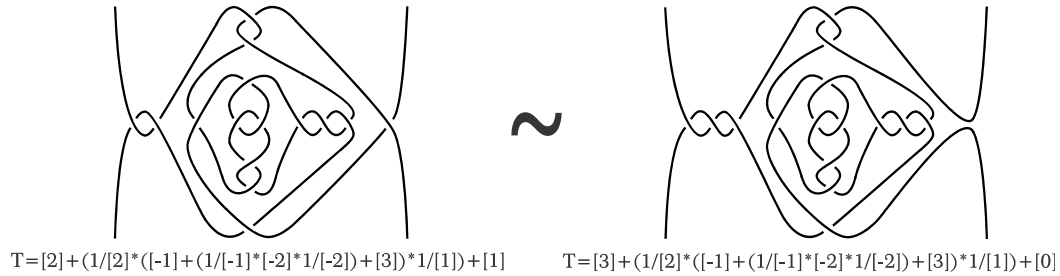


Figura 2-17: Tangle T en forma de twist y en forma de Montesinos

De igual modo, dado un tangle racional en la forma de Montesinos, éste se puede ver en forma de twist y por tanto lo podemos escribir en forma canónica.

La clasificación de los enlaces racionales utilizando tangles, permite asociar a estos una fracción continua finita y por tanto un número racional irreducible, el cual veremos en la siguiente sección que coincide con el racional asociado a los enlaces de 2-puentes dado por Schubert a través de los espacios lente, ver [29].

2.5 De la presentación de Conway a la presentación de Schubert

Como vimos en la primera sección de este capítulo, todo enlace de 2-puentes en la forma de Schubert se puede llevar a la forma de Conway, mostrando así que todo enlace de 2-puentes es un enlace racional.

En esta sección estamos interesados en mostrar que todo enlace racional se puede ver como un enlace de 2-puentes. Para ello tomaremos un enlace racional en la forma de Conway y lo llevaremos a la forma de Schubert, mostrando con esto la equivalencia entre enlaces de 2-puentes y los enlaces racionales; más aún se puede mostrar que la fracción continua que representa el enlace racional coincide con la fracción que representa al enlace de 2-puentes. Una prueba detallada de este resultado la podemos consultar en [36].

Para describir este proceso de pasar del diagrama en la forma de Conway al diagrama en la forma de Schubert, tomaremos el enlace racional $C(a_1, \dots, a_n)$ donde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ y n impar.

Descripción de los pasos

Sea $C(a_1, \dots, a_n)$ el enlace racional en la forma de Conway, donde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ y n impar, ver Figura 2-18a. En el primer paso transformamos, usando movimientos de Reidemeister, el tangle con a_1 cruces en el diagrama de Conway, a un diagrama en el que aparecen los tangles a_2, \dots, a_n y a_1 cruces debajo del puente A y $a_1 - 1$ cruces debajo del puente B , ver Figura 2-18b. Además, como $a_1 = \frac{a_1}{1}$, el puente A intersecta por primera vez al puente B en el cruce 1 y viceversa.

En el segundo paso transformamos el tangle con a_2 cruces en el diagrama obtenido del paso 1, para obtener un diagrama en el que aparecen los tangles a_3, \dots, a_n y $a_1 + a_1(a_2 - 1) = a_1 a_2$ cruces debajo del puente A , y $(a_1 - 1) + a_1(a_2 - 1) + 1 = a_1 a_2$ cruces debajo del puente B , ver Figura 2-18b. Además, como $a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$, el puente A intersecta por primera vez al puente B en el cruce a_2 y viceversa.

Siguiendo este proceso de manera inductiva sobre el número de tangles que conforman el enlace de Conway, o lo que es lo mismo, sobre la longitud de la fracción continua que representa al enlace racional, obtenemos una relación de recurrencia en cada uno de estos pasos.

Luego si m es par, en el paso m , para $1 \leq m \leq n$, tenemos que el diagrama de Conway sólo tiene los tangles a_{m+1}, \dots, a_n y $p_m - 1$ cruces debajo del puente A y $p_m - 1$ cruces debajo del puente B , donde $\frac{p_m}{q_m} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_m}}$. Pero si m es impar y $m < n$, tenemos que hay p_m cruces debajo del puente A y $p_m - 1$ cruces debajo del puente B . Además, para cada caso, el puente A intersecta por primera vez al puente B en el cruce q_m y viceversa. Por último

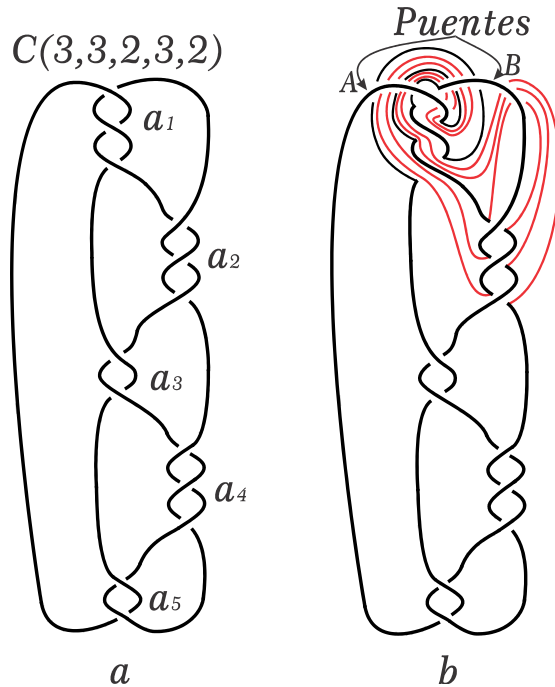


Figura 2-18: Presentación de Conway y modificación del diagrama

tenemos que si $\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}$, entonces el diagrama final tiene $p - 1$ cruces debajo de cada puente y además el puente A interseca por primera vez al puente B en el cruce q y viceversa. Completando así la descripción de los pasos por medio de los cuales hacemos la transformación del diagrama de Conway al diagrama de Schubert.

2.6 Clasificación de enlaces de 2-puentes

En esta sección daremos un repaso acerca de lo que se ha podido probar sobre la clasificación de los enlaces de 2-puentes, ver [29], [19], [3] y [25]. En cada uno de los resultados los enteros p y q son primos relativos, con $p \geq 2$, $-p < q < p$ y q impar.

Por la clasificación anterior, tenemos que los enlaces de 2-puentes también se les llama enlaces racionales, de modo que en adelante cuando hablemos de enlaces de 2-puentes o enlaces racionales, nos estamos refiriendo a lo mismo.

Los resultados que enunciaremos a continuación fueron probados inicialmente en [29], usando la cubierta doble ramificada sobre estos enlaces; también podemos consultar en [19], [3] y [25].

Proposición 2.6.1 *Si p es impar, el enlace p/q es un nudo. Si p es par, p/q es un enlace de 2 componentes.*

Proposición 2.6.2 *Los nudos racionales son invertibles y primos.*

Proposición 2.6.3 *Para enteros p, q, p' y q'*

1. *Los nudos p/q y p'/q' son equivalentes si y sólo si $p = p'$ y $q^{\pm 1} \equiv q' \pmod{p}$.*
2. *Los enlaces p/q y p'/q' son equivalentes si y sólo si $p = p'$ y $q^{\pm 1} \equiv q' \pmod{2p}$.*

Cuando no se considera orientación, la condición 2. se reduce a la 1.

Proposición 2.6.4 *La imagen espejo del enlace p/q es $p/(-q)$, así que el nudo p/q es anfiqueiral si y sólo si $q^2 \equiv (-1) \pmod{p}$.*

Proposición 2.6.5 *Si en un enlace de 2-puentes p/q , con 2 componentes, se cambia la orientación de una de las componentes, entonces se convierte en el enlace p/q' , donde $q' \equiv (p + q) \pmod{p}$.*

Proposición 2.6.6 *Todo enlace racional tiene un diagrama alternante.*

Proposición 2.6.7 *Todo enlace racional tiene asociada una fracción continua de la forma $C(2a_1, \dots, 2a_n)$.*

Capítulo 3

Espacios lenticulares o espacios lente

En este capítulo describiremos la construcción de los espacios lenticulares o espacios lente desde varias perspectivas. Estudiaremos varios modelos desde el punto de vista algebraico y geométrico, usando herramientas como: Descomposiciones de Heegaard, teoría de nudos y cirugía, entre otras. Además mostraremos que todos los modelos dados son equivalentes. Por lo tanto, para estudiar los espacios lente o temas relacionados con ellos, conviene usar en determinados casos el modelo que sea más conveniente.

En la sección 3.5 probamos que los espacios lentes son la cubierta doble ramificada sobre un enlace racional y también sobre un enlace de 2-puentes. Usamos este resultado para probar la equivalencia de la familia de enlaces racionales y la familia de enlaces de 2-puentes. Como uno de los objetivos de este trabajo es la clasificación y el estudio detallado de los enlaces racionales y enlaces de 2-puentes, es fundamental para nosotros entender los espacios lentes y su clasificación.

3.1 Modelo 1

Este primer modelo de los espacios $L(p, q)$ se define de una manera puramente algebraica. Para entender este modelo necesitaremos de los Apéndices C y B y de algunos resultados que daremos a continuación.

Ahora consideramos el Lema C.0.7, el cual será útil para nuestro teorema principal, Teorema 3.1.1.

Recordemos que la esfera 3-dimensional S^3 se define como el conjunto

$$S^3 = \left\{ (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1 \right\}. \quad (3.1)$$

De (3.1) se tiene que si $z_0 = x_1 + ix_2$ y $z_1 = x_3 + ix_4$, entonces vemos que

$$S^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\},$$

es decir, S^3 es la esfera unidad en \mathbb{R}^4 . Además, por el Teorema de Heine-Borel se tiene que S^3 es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^4 , ya que es cerrado y acotado.

Teorema 3.1.1 Sean p y q números enteros tales que $0 \leq q < p$, $\gcd(p, q) = 1$ y sea \mathbb{Z}_p el grupo cíclico de clases de equivalencia módulo p . Entonces S^3 es un \mathbb{Z}_p -espacio con la operación definida como:

$$m \cdot (z_0, z_1) = \left(e^{\frac{2\pi im}{p}} z_0, e^{\frac{2\pi iqm}{p}} z_1 \right).$$

Además \mathbb{Z}_p actúa libremente sobre S^3 .

Prueba. Veamos primero que la operación \cdot define una acción de \mathbb{Z}_p sobre S^3 .

1. $0 \cdot (z_0, z_1) = (e^0 z_0, e^0 z_1) = (z_0, z_1)$.
2. $m \cdot (n \cdot (z_0, z_1)) = m \cdot \left(e^{\frac{2\pi in}{p}} z_0, e^{\frac{2\pi iqn}{p}} z_1 \right) = \left(e^{\frac{2\pi i(m+n)}{p}} z_0, e^{\frac{2\pi iq(m+n)}{p}} z_1 \right) = (m+n) \cdot (z_0, z_1)$.

La acción está bien definida ya que si $m_1 \equiv m_2 \pmod{p}$, entonces

$$e^{\frac{2\pi im_1}{p}} = e^{\frac{2\pi im_2}{p}} \implies m_1 \cdot (z_0, z_1) = m_2 \cdot (z_0, z_1).$$

Sea $\theta_m : S^3 \longrightarrow S^3$ el mapeo definido como

$$\theta_m((z_0, z_1)) = m \cdot (z_0, z_1) = \left(e^{\frac{2\pi im}{p}} z_0, e^{\frac{2\pi iqm}{p}} z_1 \right).$$

Por resultados relacionados con espacios productos y mapeos, ver [24], θ_m es un mapeo continuo y tiene inversa continua para cada m . Cada θ_m es claramente un mapeo biyectivo y por tanto es un homeomorfismo. Luego S^3 es un \mathbb{Z}_p -espacio.

Veamos por la Definición C.0.9 que \mathbb{Z}_p actúa libremente sobre S^3 con la operación dada.

En efecto, si

$$m \cdot (z_0, z_1) = (z_0, z_1) \implies e^{\frac{2\pi im}{p}} z_0 = z_0 \quad \text{y} \quad e^{\frac{2\pi iqm}{p}} z_1 = z_1.$$

De $e^{\frac{2\pi im}{p}} z_0 = z_0$ se desprenden dos casos: $e^{\frac{2\pi im}{p}} = 1$ ó $z_0 = 0$. Si $e^{\frac{2\pi im}{p}} = 1$, entonces $\frac{m}{p} \in \mathbb{Z}$ y esto implica que p divide a m y por tanto $m = 0$ en \mathbb{Z}_p .

Si $z_0 = 0$, entonces

$$|z_1| = 1 \implies z_1 \neq 0 \implies e^{\frac{2\pi iqm}{p}} = 1 \implies \frac{mq}{p} \in \mathbb{Z}$$

y esto implica que p divide a mq y por tanto p divide a m , ya que $\gcd(p, q) = 1$, luego $m = 0$ en \mathbb{Z}_p . ■

Por todo lo anterior podemos concluir que S^3 es un \mathbb{Z}_p -espacio sobre el cual \mathbb{Z}_p actúa libremente.

Ahora ya estamos en condiciones de dar la primera definición de los espacios lentes.

Definición 3.1.1 Sean p y q números enteros tales que $0 \leq q < p$, $\gcd(p, q) = 1$. Definimos el **espacio lente** $L(p, q)$ como el espacio órbita S^3/\mathbb{Z}_p con respecto a la acción definida en el Teorema 3.1.1.

Nótese que por el Teorema C.0.8, los espacios $L(p, q)$ son una variedad compacta.

3.2 Modelo 2

El modelo de $L(p, q)$ que mostraremos a continuación es una construcción de naturaleza puramente geométrica.

Este sólido geométrico tiene la forma de una *lente* con tapas (fronteras) identificadas vía una proyección ortogonal después de una rotación de $\frac{2q\pi}{p}$ radianes de la tapa superior con respecto a la inferior.

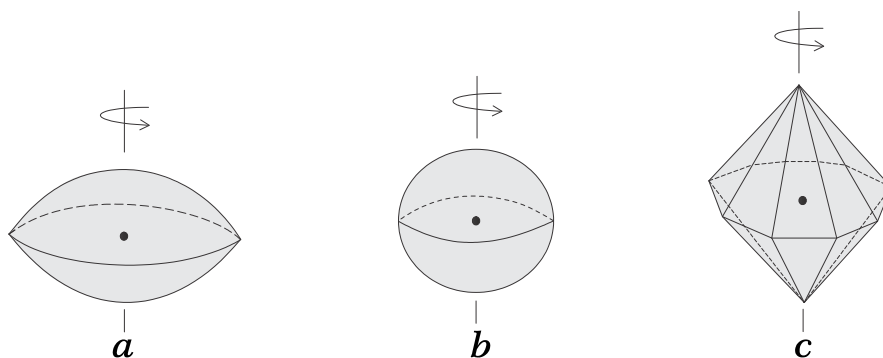


Figura 3-1: Formas de lentes

La Figura 3-1(a) muestra un sólido geométrico en forma de lente. Es fácil notar que los sólidos (a), (b) y (c) de la Figura 3-1 son homeomorfos. Algunos autores prefieren definir los espacios lente mediante los modelos (b) o (c). En este trabajo usaremos el modelo (a).

Consideremos el sólido en forma de lente cuya superficie consiste en dos capas radialmente simétricas e idénticas las cuales comparten un borde circular (ecuador). Las proporciones exactas son importantes. Sea N el polo norte y S el polo sur. Dividamos el borde circular en p arcos iguales separados por los puntos $x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x_p$ y unamos cada x_i mediante una línea con N y S de manera que cada capa quede dividida en p sectores triangulares, ver Figura 3-2.

El giro de $\frac{2q\pi}{p}$ radianes y la proyección ortogonal mencionada anteriormente produce como resultado que el triángulo $\triangle N x_i x_{i+1}$ quede identificado con el triángulo $\triangle S x_{q+i} x_{q+i+1}$, donde los subíndices son tomados módulo p . Notemos que los elementos del conjunto

$$\{x_0, x_q, x_{2q}, \dots, x_{(p-1)q}\}$$

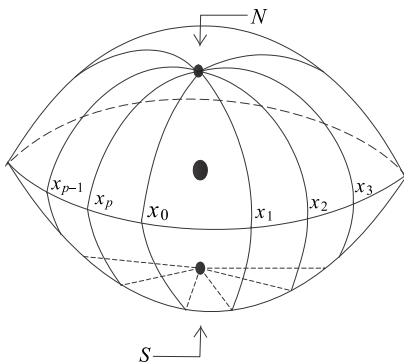


Figura 3-2: Espacio lente

quedan todos identificados y como $\gcd(p, q) = 1$, entonces este conjunto es justamente el conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$. Luego todos los vértices son identificados así como los arcos ecuatoriales $\widehat{x_i x_{i+1}}$. Claramente N y S son identificados.

Nuestro objetivo ahora es mostrar que los modelos 1 y 2 son equivalentes. Debemos ver que el espacio identificación creado en el modelo 2 representa el espacio órbita S^3/\mathbb{Z}_p .

Teorema 3.2.1 *Los modelos 1 y 2 son equivalentes.*

Prueba. Primero tratemos de construir un modelo mas apropiado para S^3 .

Sabemos que S^3 es el conjunto de pares ordenados de números complejos (z_0, z_1) con $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$. Si usamos las representaciones $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ y $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, entonces se tiene que $r_0^2 + r_1^2 = 1$. Si fijamos r_1 se tiene que $r_0 = \sqrt{1 - r_1^2}$ y por lo tanto a la pareja (z_0, z_1) le podemos asociar la tripleta $(r_1, \theta_0, \theta_1)$. La colección de tripletas $(r_1, \theta_0, \theta_1)$ nos lleva a pensar

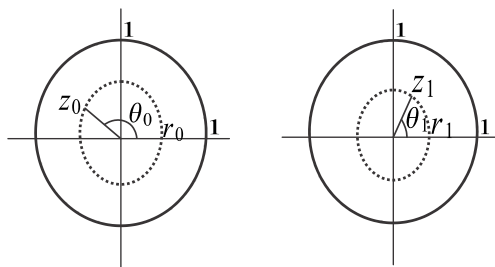


Figura 3-3: Números complejos

en un toro sólido en \mathbb{R}^3 . Adaptando este toro sólido en forma adecuada obtendremos un modelo apropiado de S^3 .

Notemos que cuando $r_1 = 0$ o $r_1 = 1$, la correspondencia $(z_0, z_1) \longleftrightarrow (r_1, \theta_0, \theta_1)$ implica que se deben tener en cuenta dos condiciones importantes.

1. Si $r_1 = 0$, entonces $r_0 = 1$ y la pareja $(z_0, z_1) = (e^{i\theta_0}, 0)$ es independiente de θ_1 . Luego necesitamos que $(0, \theta_0, \theta_1) = (0, \theta_0, \theta'_1)$ para todo $0 \leq \theta_1, \theta'_1 < 2\pi$.
2. Si $r_1 = 1$, entonces $r_0 = 0$ y la pareja $(z_0, z_1) = (0, e^{i\theta_1})$ es independiente de θ_0 . Por lo tanto necesitamos que $(1, \theta_0, \theta_1) = (0, \theta'_0, \theta_1)$ para todo $0 \leq \theta_0, \theta'_0 < 2\pi$.

Si representamos los puntos de un toro sólido T con radio meridional 1 como se muestra en la Figura 3-4, entonces la primera condición se cumple de manera obvia, ya que los puntos sobre el círculo central $r_1 = 0$ son independientes de θ_1 . Con el propósito de llenar la segunda

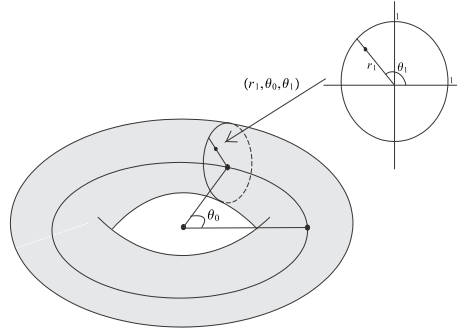


Figura 3-4: Toro sólido T

condición, debemos identificar apropiadamente los puntos sobre $r_1 = 1$, donde dichos puntos forman $\partial T = S^1 \times S^1$, es decir, un toro. Analizando la condición, vemos que para cada c con $0 \leq c < 2\pi$, todos los puntos del conjunto $\{(r_1, \theta_0, \theta_1) : \theta_1 = c, r_1 = 1\}$ constituyen una longitud sobre ∂T , donde cada longitud se identificará con un punto y por lo tanto la frontera de T quedará identificada con un meridiano.

Cortando T a través de un plano meridional obtenemos un cilindro sólido, ver Figura 3-5, con extremos identificados y cada uno de los segmentos verticales sugeridos son identificados en un solo punto. El resultado es homeomorfo a una bola sólida D^3 con hemisferios superior e inferior identificados vía una proyección ortogonal. Para ver esto colapsamos los segmentos verticales simultáneamente.

Esta identificación permite concluir que $L(1, q) \cong S^3$, para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Ahora ya estamos en condiciones de visualizar las órbitas inducidas por la acción de \mathbb{Z}_p sobre S^3 , las cuales calcularemos ahora. Primero es necesario determinar las clases de equivalencia de T y por tanto de S^3 , bajo la acción de \mathbb{Z}_p dada por

$$m \cdot (z_0, z_1) = \left(e^{\frac{2\pi im}{p}} z_0, e^{\frac{2\pi iqm}{p}} z_1 \right) = \left(r_1 e^{i(\theta_0 + \frac{2\pi m}{p})}, r_1 e^{i(\theta_1 + \frac{2\pi mq}{p})} \right).$$

Usando nuestras coordenadas del toro T , tenemos que $m \cdot (r, \theta_0, \theta_1) = \left(r, \theta_0 + \frac{2\pi q}{p}, \theta_1 + \frac{2\pi qm}{p} \right)$.

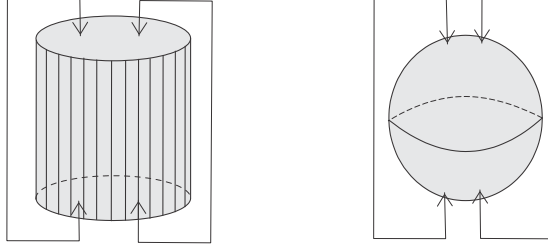


Figura 3-5: Identificación de cilindro sólido con B^3

Notemos que el valor de r no se afecta con la acción de \mathbb{Z}_p . Por lo tanto nos podemos concentrar en el toro $r = c$ con $0 \leq c \leq 1$, el cual denotaremos por T_c .

Notemos que $T = \bigcup_{0 \leq c \leq 1} T_c$, donde debemos tener en cuenta que T_0 y T_1 son casos especiales y deben ser tratados por separado.

Cuando $0 < c < 1$, T_c se puede dibujar como un cuadrado con lados identificados con el eje horizontal actuando como el eje θ_1 y el eje vertical actuando como el eje θ_0 , con $0 \leq \theta_0, \theta_1 < 2\pi$ sobre el cuadrado. Ver Figura 3-6(a). La acción de m sobre el punto (θ_0, θ_1) produce el punto

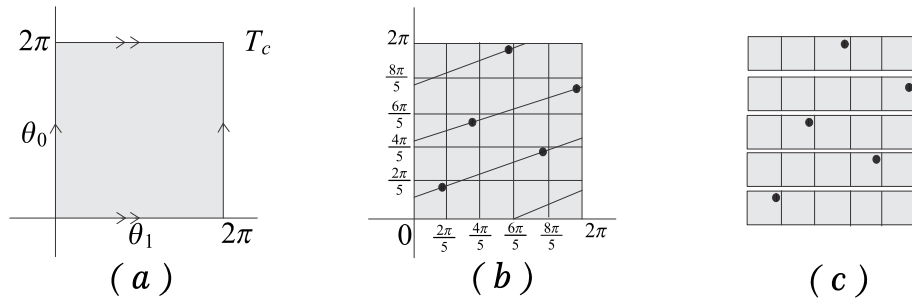


Figura 3-6: T_c y clases de equivalencia

$(\theta_0 + \frac{2\pi q}{p}, \theta_1 + \frac{2\pi q m}{p})$, luego todas las acciones de \mathbb{Z}_p son traslaciones a lo largo de líneas con inclinación o pendiente $\frac{1}{q}$.

Consideremos como ejemplo el caso $p = 5$ y $q = 3$. Si una línea de pendiente $\frac{1}{3}$ se dibuja a través de un punto sobre T_c , vemos que la clase de equivalencia del punto contiene $p = 5$ puntos igualmente espaciados a lo largo de la línea. Ver Figura 3-6(b).

Como puede observarse la clase de equivalencia contiene exactamente un punto en cada una de las bandas horizontales mostradas en la Figura 3-6(b) y es sencillo ver que el resultado también será cierto para todo p, q con $\gcd(p, q) = 1$.

Así una sola banda horizontal de ancho $\frac{2\pi}{p}$ contiene exactamente un punto de cada clase de equivalencia de T_c , ver Figura 3-6(c).

Por lo tanto podemos definir el espacio órbita T_c/\mathbb{Z}_p como

$$T_c/\mathbb{Z}_p = \left\{ (r, \theta_0, \theta_1) : r = c, 0 \leq \theta_0 < \frac{2\pi}{p}, 0 \leq \theta_1 < 2\pi \right\}.$$

Este conjunto es un tubo corto con extremos identificados mediante un giro de $\frac{2\pi q}{p}$ radianes. Ver Figura 3-7. Existen dos casos especiales que se deben considerar: T_0 ; la circunferencia

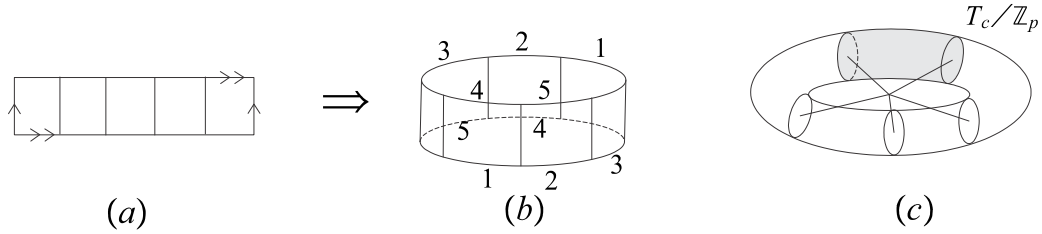


Figura 3-7: T_c/\mathbb{Z}_p

central y T_1 , ∂T con identificaciones.

Caso T_0 : T_0 es la circunferencia $r_1 = 0$. La acción de m sobre un punto de T_0 consiste en $\theta_0 \mapsto \theta_0 + \frac{2\pi m}{p}$, induciendo una rotación de $\frac{2\pi m}{p}$ radianes. Luego cada clase de equivalencia contiene exactamente un punto en cada arco de medida $\frac{2\pi}{p}$ radianes. En particular, el arco $0 \leq \theta_0 < \frac{2\pi}{p}$ tiene exactamente un punto de cada clase de equivalencia y por tanto T_0/\mathbb{Z}_p puede ser visto como un arco con extremos identificados, ver Figura 3-8a.

Caso T_1 : T_1 es la frontera ∂T con longitudes identificadas cada una a un punto. Esto se puede ver como la circunferencia S^1 . La acción de m sobre un punto de T_1 , la cual llamaremos una *longitud* de T_1 , es de la forma $\theta_1 \mapsto \theta_1 + \frac{2\pi m q}{p}$ y esta induce una rotación de $\frac{2\pi m q}{p}$ radianes.

Como $\gcd(p, q) = 1$, tenemos que al dividir S^1 en p arcos iguales

$$0 \leq \theta_0 < \frac{2\pi}{p}, \dots, \frac{2(p-1)\pi}{p} \leq \theta_0 < 2\pi,$$

entonces todos ellos quedarán identificados, ver Figura 3-8b.

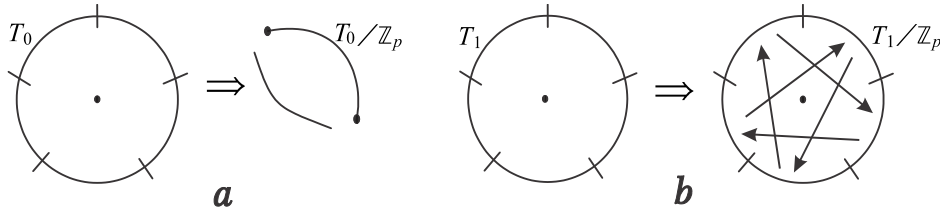


Figura 3-8: Identificación de T_0 y T_1

Como la \mathbb{Z}_p -acción deja puntos sobre sus respectivos toros T_c , entonces se tiene que

$$S^3/\mathbb{Z}_p = \bigcup_{0 \leq c \leq 1} T_c/\mathbb{Z}_p.$$

Notemos que S^3/\mathbb{Z}_p es una colección de tubos encajados con $0 \leq r < 1$ cuyos extremos son identificados por un giro de $\frac{2\pi q}{p}$ radianes y una frontera de segmentos llamados longitudes, los cuales se identifican con puntos y además, éstos arcos se identifican de p arcos a uno, ver Figura 3-9. Si primero colapsamos los segmentos - longitudes a puntos obtenemos entonces un sólido en

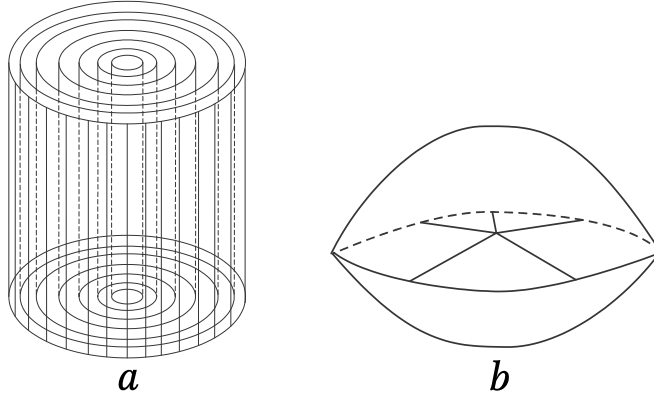


Figura 3-9: Obtención del espacio lente

forma de lente cuyo borde circular está dividido en p arcos iguales todos identificados de forma conjunta. Las capas superior e inferior del lente corresponden a los extremos de los cilindros sólidos de la Figura 3-9a y además éstos están identificados mediante un giro de $\frac{2\pi q}{p}$ radianes. Por lo tanto hemos obtenido el espacio lente $L(p, q)$ como lo habíamos descrito inicialmente. ■

3.3 Modelo 3

Ahora introduciremos un tercer modelo de los espacios $L(p, q)$.

Este modelo está definido en términos de diagramas y descomposiciones de Heegaard de género uno. La descomposición de Heegaard de una 3-variedad orientable es una importante herramienta teórica en el estudio de las 3-variedades. Para poder dar una definición correcta de este tercer modelo, usaremos algunas definiciones, ver Apéndice B, las cuáles serán de gran importancia.

Definición 3.3.1 Sean p y q enteros con $0 \leq q < p$ y $\gcd(p, q) = 1$. Definimos el espacio lente $L(p, q)$ como la 3-variedad de género Heegaard uno y cuyo diagrama de Heegaard consiste del nudo $T(p, q)$ sobre la superficie de un toro sólido.

Nuestro objetivo será demostrar que los modelos 2 y 3 son equivalentes.

Teorema 3.3.1 *Los modelos 2 y 3 de los espacios $L(p, q)$ son equivalentes.*

Prueba. De la definición del modelo 3, tenemos que $L(p, q)$ es el resultado de pegar dos toros sólidos T_1 y T_2 vía un homeomorfismo $h : \partial T_1 \rightarrow \partial T_2$, donde h toma un meridiano m en ∂T_1 y lo mapea al nudo $T(p, q)$ sobre ∂T_2 , ver Figura 3-10(b).

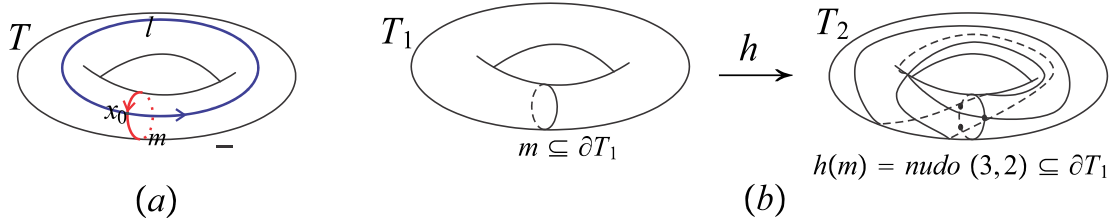


Figura 3-10: Identificación de los Toros T_1 y T_2

La 3-variedad obtenida es difícil de visualizar, pero veamos que en efecto es un espacio lente usando el modelo 2. Para una mejor ilustración pensaremos siempre en el toro T_2 con longitud dada por el nudo $T(5, 3)$ como en la Figura 3-10(b), y T_1 es él mismo.

Cortando T_2 a través de un plano paralelo a un meridiano podemos obtener un cilindro sólido con p secciones disjuntas del nudo $T(p, q)$ a lo largo de su lado. Para ver esto tomemos la frontera de T_2 , ∂T_2 , como en la Figura 3-11(a). El nudo $T(p, q)$ puede ser representado como una línea que pasa a través de 0 con una pendiente de $\frac{p}{q}$, como se muestra en la Figura 3-11(b). Notemos que si cortamos a T_2 mediante un plano paralelo a un meridiano y luego lo

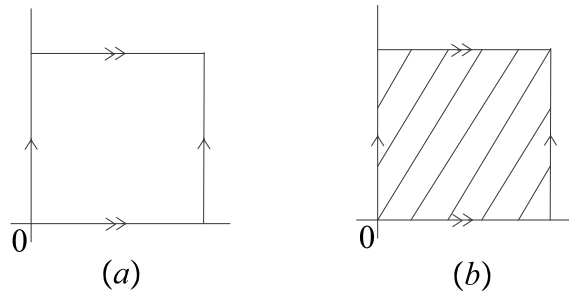


Figura 3-11: Identificación de T_2

rotamos 90 grados, obtenemos un cilindro sólido con extremos identificados, donde las líneas del nudo $T(p, q)$ quedan en ∂T_2 , ver Figura 3-12. Nótese que el cilindro de la Figura 3-12(b) es equivalente al cilindro de la Figura 3-12(a) después de un giro de $\frac{2\pi q}{p}$ radianes.

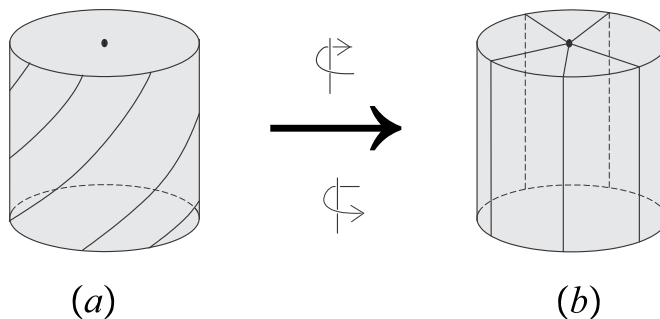


Figura 3-12: Cilindros sólidos

Como $\gcd(p, q) = 1$, entonces existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $pr + qs = 1$. Por lo tanto $qs \equiv 1 \pmod{p}$, lo que significa que q tiene un inverso $s = q^{-1}$ en \mathbb{Z}_p . Es importante notar que q^{-1} es único.

Cortando T_1 con un plano meridional que contiene el meridiano m obtenemos un cilindro sólido con extremos identificados y una copia de m en cada extremo.

Ahora giremos el cilindro sólido en el extremo superior un ángulo de $\frac{2\pi q^{-1}}{-p}$ radianes en dirección negativa y luego descompongamos dicho cilindro en p cuñas iguales, ver Figura 3-13. Si marcamos las caras superiores de las cuñas en un sentido positivo $0, 1, \dots, p-1$, entonces

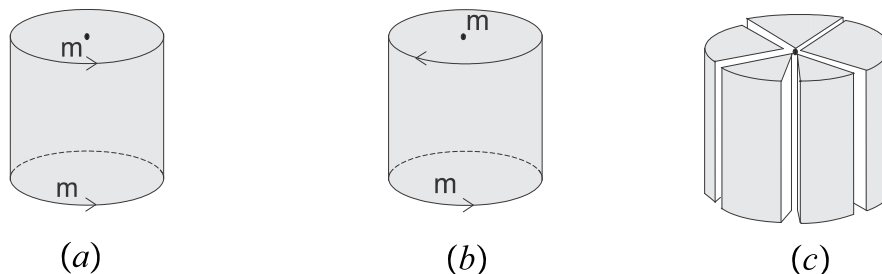


Figura 3-13: Cilindro sólido T_1

después del giro las caras inferiores de las cuñas quedan marcadas como

$$-q^{-1}, -q^{-1} + 1, -q^{-1} + 2, \dots, -q^{-1} + p - 1, \pmod{p}.$$

Como $-q^{-1}$ tiene un inverso en \mathbb{Z}_p denotado $-q$, entonces los conjuntos

$$\{0, -q^{-1}, 2(-q^{-1}), \dots, (p-1)(-q^{-1})\}$$

y $\{0, 1, \dots, p-1\}$ son iguales.

Identificando cada una de las cuñas por sus caras de acuerdo a la marcación dada, obtenemos

un circuito completo, el cual forma un sólido de forma toroidal con un lado plano y el otro lado puntiagudo como se muestra en la Figura 3-14.

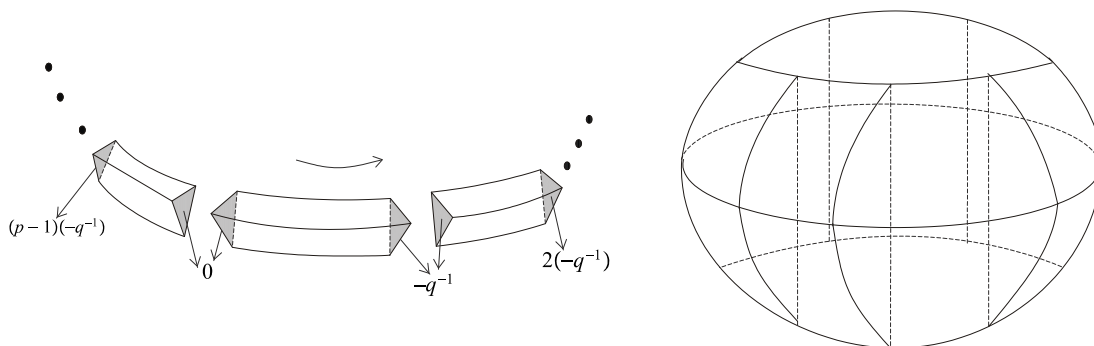


Figura 3-14: Forma de pegar las cuñas

Al pegar estas cuñas obtenemos el sólido hueco de la Figura 3-14, donde las líneas punteadas están igualmente espaciadas alrededor del hueco cilíndrico. Estas líneas punteadas corresponden a p pares de arcos correspondientes a los bordes de las caras de las cuñas. Por lo tanto, si las pegamos extremo a extremo en su orden original,

$$(0, 1, \dots, p-1) = (0, -q(-q^{-1}), -2(-q^{-1}), \dots, -(p-1)(-q^{-1})),$$

todos estos números mod p , obtenemos una copia del meridiano m .

En la Figura 3-14 las líneas punteadas del hueco cilíndrico aparecen secuencialmente como múltiplos de $-q^{-1}$, luego un orden de pegado para los segmentos verticales de la Figura 3-12(b), correspondiente bajo traslación al orden de pegado para el cilindro hueco, es simplemente $(0, -q, -2q, \dots, -(p-1)q)$, todos estos números mod p . Este es el orden en el cual todos los segmentos de la Figura 3-12(b) fueron unidos originalmente en el nudo $T(p, q)$. Para ver esto aplicamos un giro de $\frac{2\pi(-q)}{p}$ radianes al cilindro sólido e identificamos ortogonalmente para volver a T_2 .

Si insertáramos el cilindro sólido con un giro, identificando extremos en el hueco en una forma tal que los segmentos verticales coincidan, entonces estaríamos efectivamente reversando la descomposición de Heegaard, la cual da origen a nuestro diagrama de Heegaard descrito. Al introducir el sólido de la Figura 3-12(b) en el cilindro hueco obtenemos la Figura 3-15. De esto se sigue que $L(p, q)$, como se definió en el modelo 3, es homeomorfo al espacio sólido de un lente con varias regiones de las capas superior e inferior identificadas.

Las caras superior e inferior del cilindro sólido son identificadas después de un giro de $\frac{2\pi q}{p}$ radianes y también los paneles del cilindro hueco son identificados después de un giro de $\frac{2\pi q}{p}$ radianes. Para ver esto consideremos la Figura 3-16.

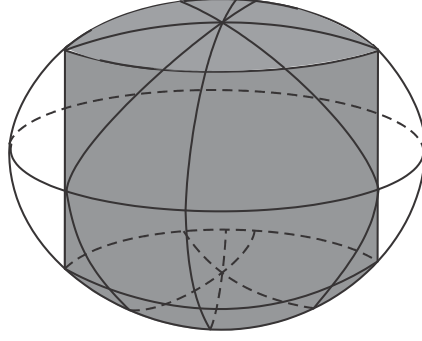


Figura 3-15: Cilindro sólido dentro del hueco

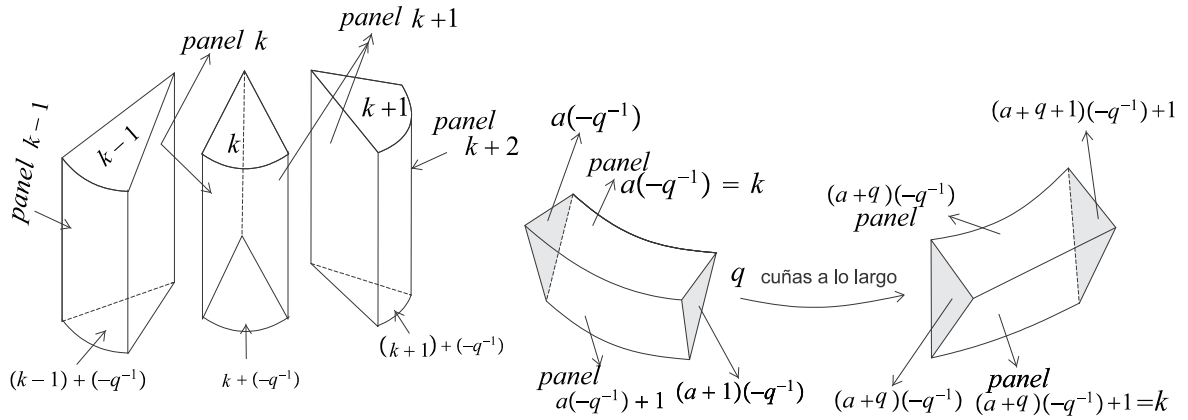


Figura 3-16: Cuñas

Como $a(-q^{-1}) = (a+q)(-q^{-1}) + 1$, entonces el panel superior de una cuña es identificada con el panel inferior de la q -ésima cuña, a lo largo de estas, atravesando el anillo en dirección positiva. Es decir, se obtiene un giro de $\frac{2\pi q}{p}$ radianes. Así el espacio $L(p, q)$ del modelo 3 es homeomorfo al espacio lente con las identificaciones descritas en el modelo 2. ■

3.4 Modelo 4

Un cuarto modelo de los espacios lente $L(p, q)$ se puede definir de la siguiente manera: $L(p, q)$ es la 3-variedad que resulta de realizar una $\frac{p}{q}$ cirugía de Dehn, ver Apéndice B, a lo largo del nudo trivial. A continuación veremos que esta definición describe el espacio $L(p, q)$ del modelo 3.

Procedamos ahora a seguir las instrucciones de cirugía dadas para $L(p, q)$ en el Apéndice B. Primero removemos una vecindad tubular del nudo trivial en S^3 . Esta vecindad tubular será un toro sólido desanudado T y cuando se toma la clausura $\overline{S^3 - T}$, el resultado es un segundo toro

sólido. Luego T se debe volver a pegar a $\overline{S^3 - T}$ vía un homeomorfismo $h : T \rightarrow T$ con $h(m) = ql + pm$, donde l, m son una longitud y un meridiano orientados, respectivamente. Usando una notación alterna, $h(T(0, 1)) = T(q, p)$. Ya que longitudes y meridianos se intercambian entre T y $\overline{S^3 - T}$, se sigue que un nudo $T(p, q)$ en el hueco toroidal dejado por T es en efecto un nudo $T(p, q)$ sobre el toro sólido $\overline{S^3 - T}$. Por lo tanto la variedad obtenida a partir de esta cirugía es el resultado de pegar dos toros sólidos vía una identificación de superficies, la cual lleva un meridiano $T(0, 1)$ a un nudo $T(p, q)$. La identificación vía h es una inversión de la descomposición de Heegaard para $L(p, q)$ que corresponde a la descripción del modelo 3. Por lo tanto hemos visto que $L(p, q)$ descrito como una cirugía de Dehn es equivalente a los tres modelos de $L(p, q)$ dados anteriormente.

3.5 La cubierta doble de S^3 ramificada sobre un enlace racional y sobre un enlace de 2-puentes $\frac{p}{q}$

En esta sección usaremos el concepto de cubierta ramificada, ver Apéndice B, y el modelo 3 de los espacios lente, para mostrar que el espacio $L(p, q)$ es la cubierta doble de S^3 ramificada sobre el enlace racional y el enlace de 2-puentes $\frac{p}{q}$. Así establecemos la estrecha relación que existe entre la teoría de nudos y los espacios lente.

De igual manera usaremos la unicidad en la representación de los espacios lente, como espacios de cubierta ramificada de 2-hojas de S^3 , sobre los enlaces de 2-puentes, ver [21, pág. 434], para clasificar los enlaces de 2 puentes y los enlaces racionales y también para mostrar la equivalencia entre estas dos familias.

Con el fin de ser lo más claro posible en esta sección, será conveniente proceder por pasos para mostrar resultados relacionados con cubiertas ramificadas, los cuales utilizaremos en las pruebas de los teoremas centrales de esta sección:

Paso 1. Notemos que el anillo R es la cubierta doble del disco D ramificada sobre los dos puntos interiores α y β , como se muestra en la Figura 3-17a. Es decir, nuestro conjunto de ramificación sobre D son los dos puntos α y β y nuestro mapeo cubierta es $\bar{p} : R - \{a, b\} \rightarrow D - \{\alpha, \beta\}$. Nótese que $\bar{p}^{-1}(\alpha) = a$ y $\bar{p}^{-1}(\beta) = b$. Para ver cómo actúa \bar{p} , sólo es necesario realizar el proceso inverso de la construcción de R como la cubierta doble del disco D ramificada sobre los puntos α y β , ver Figura 3-18c).

Paso 2. Un toro sólido T se puede ver como $R \times I$ y una 3-bola B , homeomorfa a D^3 , se puede ver como $D \times I$, donde $I = [0, 1]$ y R, D son dados como en el paso 1, ver Figura 3-17b.

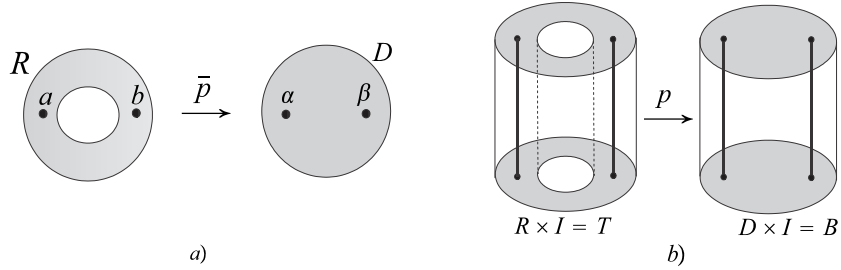


Figura 3-17: Cubiertas ramificadas dobles

Si definimos un mapeo $p_t : R \times \{t\} \longrightarrow D \times \{t\}$ para cada $t \in [0, 1]$ análogo al mapeo ya definido \bar{p} y denotamos el mapeo colectivo $p : T \longrightarrow B$, entonces vemos que p proporciona una cubierta doble ramificada de B por T , la cual está ramificada sobre dos arcos disjuntos no enlazados. Notemos que $p^{-1}(\{\alpha\} \times I) = a \times I$ y $p^{-1}(\{\beta\} \times I) = b \times I$.

Además, las condiciones (i.) y (iii.) de la Definición B.0.7 se cumplen de forma inmediata. Para verificar la condición (ii.) simplemente se busca una vecindad $U \times I$, donde U se escoge sobre un $D \times \{t_0\}$ dado en el paso 1.

Paso 3. Si consideramos la Figura 3-18 vemos que la preimagen bajo p de la región sombreada sobre ∂B es la región sombreada sobre ∂T .

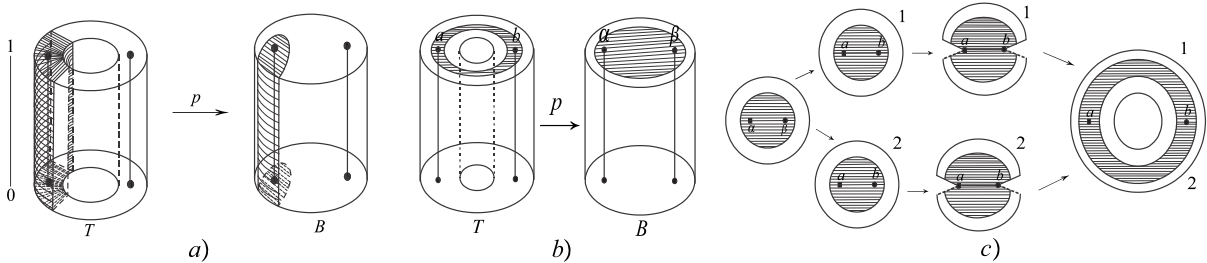


Figura 3-18: Preimagen bajo p de una vecindad sobre ∂B

Paso 4. De la Figura 3-19 podemos ver que medio giro sobre el disco sombreado corresponde bajo p a un giro completo, sobre el anillo sombreado.

Paso 5. Refiriéndonos a la Figura 3-18, la región sombreada sobre ∂T es homeomorfa a un anillo y la región sobre ∂B es homeomorfa a un disco. La función p mapea la región sombreada sobre ∂T al disco, como una cubierta doble ramificada sobre los dos extremos del arco. De manera análoga se puede verificar que medio giro sobre el disco corresponde a un giro completo sobre el anillo.

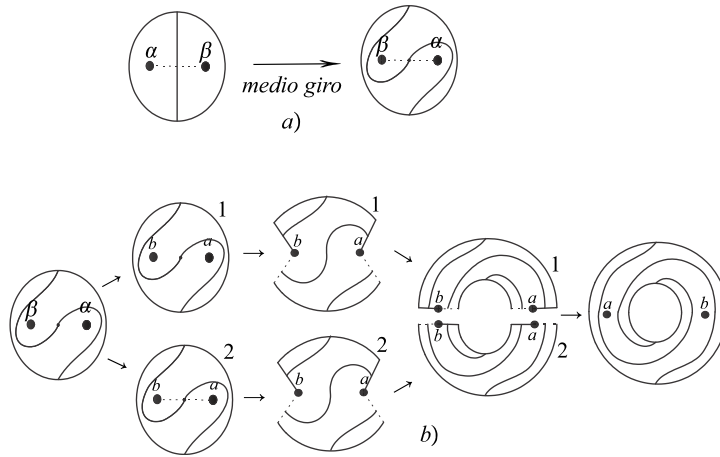


Figura 3-19: Preimagen de medio giro de Dehn

Paso 6. En este paso tendremos en cuenta la Definición B.0.8.

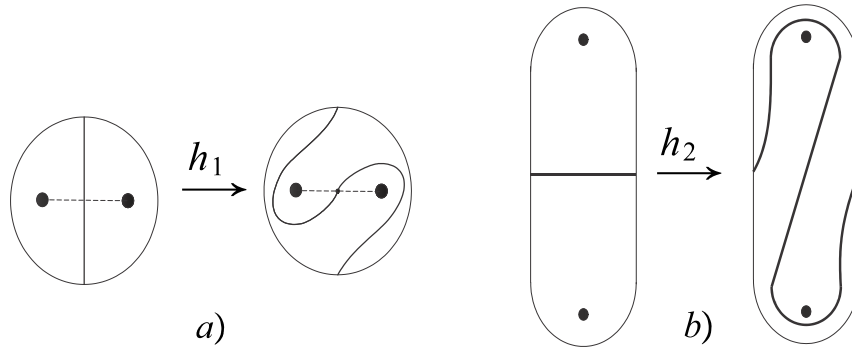


Figura 3-20: Giros de Dehn sobre un disco

Ahora definamos homeomorfismos h_1 , h_2 , \bar{h}_1 y \bar{h}_2 con $h_1 : \partial B \rightarrow \partial B$, $h_2 : \partial B \rightarrow \partial B$, $\bar{h}_1 : \partial T \rightarrow \partial T$ y $\bar{h}_2 : \partial T \rightarrow \partial T$, de la siguiente manera: h_1 es la identidad para puntos por fuera del disco sombreado de la Figura 3-18b) y actúa sobre el disco como se sugiere en la Figura 3-20a). El mapeo h_2 es la identidad para puntos por fuera de la región sombreada de la Figura 3-18a) y actúa sobre la región como se sugiere en la Figura 3-20b).

El mapeo \bar{h}_1 es la identidad para puntos por fuera del anillo sombreado de la Figura 3-18b) y realiza un giro completo positivo en el anillo sobre sí mismo. Por último, el mapeo \bar{h}_2 es la identidad para puntos por fuera del anillo sombreado de la Figura 3-18a) y realiza un giro completo negativo en el anillo sobre sí mismo.

Si consideramos dos copias de T y dos copias de B , denotadas T_1 , T_2 y B_1 , B_2 , respectiva-

mente, entonces de los pasos anteriores tenemos que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \partial T_1 & \xrightarrow{\bar{h}_1} & \partial T_2 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \partial B_1 & \xrightarrow{h_1} & \partial B_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \partial T_1 & \xrightarrow{\bar{h}_2} & \partial T_2 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \partial B_1 & \xrightarrow{h_2} & \partial B_2 \end{array}$$

Por lo tanto se tiene que $h_1 \circ p = p \circ \bar{h}_1$ y $h_2 \circ p = p \circ \bar{h}_2$. Es decir, \bar{h}_1 y \bar{h}_2 son levantamientos de h_1 y h_2 , respectivamente, con respecto a p .

Paso 7. Si $h : B_1 \rightarrow B_2$ es un homeomorfismo, entonces podemos pegar dos copias de B por medio de una identificación de sus fronteras vía el homeomorfismo h . El espacio resultante será denotado como $B_1 \cup_h B_2$. Ahora, si pegamos a B con B vía el homeomorfismo identidad I , obtenemos a S^3 .

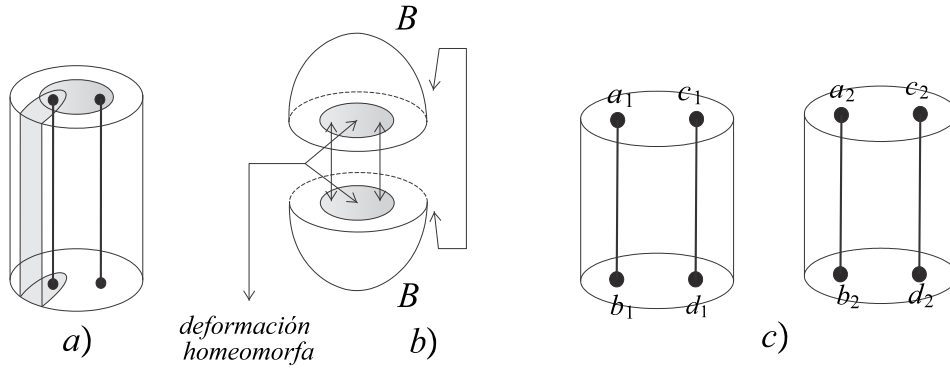


Figura 3-21: Homeomorfismos

Paso 8. Toda composición entre los h_1 y h_2 definidos en el paso 6, la cual llamaremos h y que está definida como en el paso 7, deja fijos todos los puntos de ∂B , excepto aquellos que pertenezcan a una región particular homeomorfa a un disco abierto, ver la Figura 3-21a). Como resultado podemos construir de forma fácil un homeomorfismo entre $B_1 \cup_h B_2$ y $B_1 \cup_I B_2 \cong S^3$, ver la Figura 3-21b).

Por razones que son obvias, solamente consideraremos el pegado de las bolas B vía mapeos que permuten los cuatro puntos de ramificación que están sobre ∂B . Usando las marcas de la Figura 3-21c) mostramos algunos ejemplos pertinentes.

1. Identificando B_1 con B_2 vía el mapeo I , obtenemos la permutación

$$(a_1 b_1 c_1 d_1) \mapsto (a_2 b_2 c_2 d_2).$$

2. Identificando B_1 con B_2 vía el homeomorfismo h_1 , obtenemos la permutación

$$(a_1 b_1 c_1 d_1) \mapsto (c_2 b_2 a_2 d_2).$$

3. Identificando B_1 con B_2 vía el homeomorfismo h_2 , obtenemos la permutación

$$(a_1 b_1 c_1 d_1) \mapsto (b_2 a_2 c_2 d_2).$$

Los resultados de estas identificaciones serán copias de S^3 conteniendo varios enlaces correspondientes al conjunto de ramificación, como se muestra en la Figura 3-22.

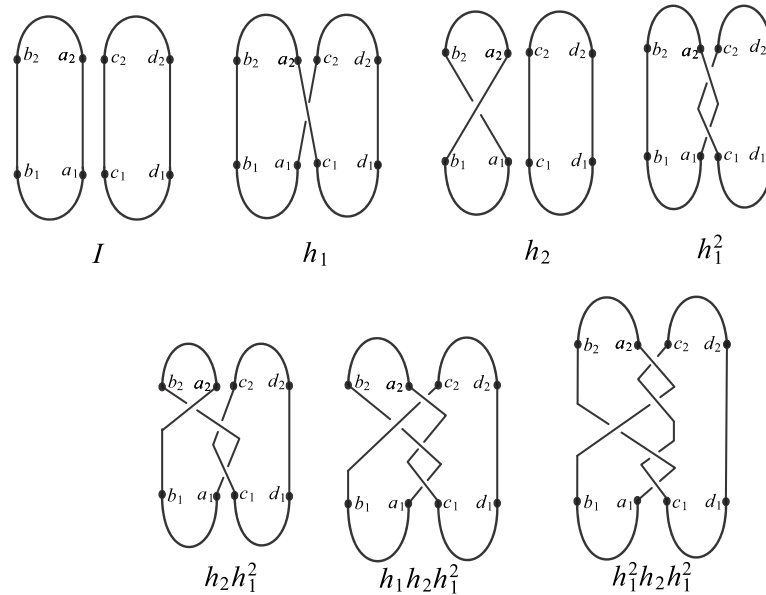


Figura 3-22: Identificaciones

El enlace que corresponde a una composición entre los homeomorfismos h_1 y h_2 se puede construir simplemente adicionando los cruces en el orden correcto. En la Figura 3-22 mostramos algunos ejemplos.

Nota 3.5.1 1. Los diferentes órdenes de los cruces para h_1 y h_2 resultan de las diferentes orientaciones de los giros.

2. Los cruces son añadidos desde la base a la cima, ya que h identifica $x \in \partial B_1$ con $h(x) \in \partial B_2$.

Paso 9. En este paso demostraremos uno de nuestros lemas centrales, lo cual nos permitirá entender de una manera más clara este modelo.

Lema 3.5.1 *Supongamos que para cada $i = 1, 2$ los mapeos $p_i : T_i \rightarrow B_i$ son cubiertas dobles de B_i con conjuntos de ramificación L_i , donde L_i y $\bar{L}_i = p_i^{-1}(L_i)$ son los pares de arcos disjuntos sugeridos en la Figura 3-23.*

Sea $h : \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$ un mapeo que permuta el conjunto de puntos de ramificación superficiales, es decir, $\{h(a_1), h(b_1), h(c_1), h(d_1)\} = \{a_2, b_2, c_2, d_2\}$ y levanta a $\bar{h} : \partial T_1 \rightarrow \partial T_2$, esto es, $h \circ p_1 = p_2 \circ \bar{h} : \partial T_1 \rightarrow \partial B_2$. Entonces $T_1 \cup_{\bar{h}} T_2$ es una cubierta doble de $B_1 \cup_h B_2$ con conjunto de ramificación $L_1 \cup_h L_2$.

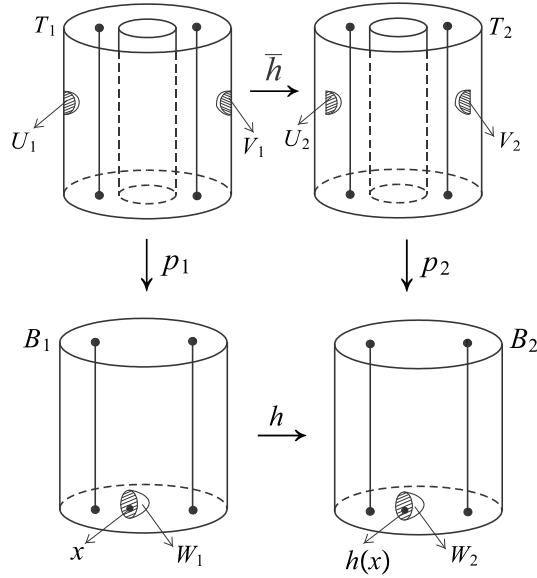


Figura 3-23: Cubierta doble ramificada

Prueba. Definamos $p : T_1 \cup_{\bar{h}} T_2 \rightarrow B_1 \cup_h B_2$ por

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{si } x \in T_1 \\ p_2(x) & \text{si } x \in T_2 \end{cases} .$$

Debemos ver que p es consistente en las fronteras ∂T_i . Supongamos que $x_1 \in \partial T_1$ y $x_2 \in \partial T_2$ están identificados:

$$x_2 = \bar{h}(x_1) \implies p_2(x_2) = p_2(\bar{h}(x_1)) = h(p_1(x_1))$$

por propiedades de levantamiento.

Ahora $p(x_1) = p_1(x_1) \in \partial B_1$ y $p(x_2) = p_2(x_2) \in \partial B_2$ están identificados y así p toma puntos identificados y los envía a puntos identificados y por tanto p es consistente.

Veamos ahora que se cumplen las condiciones de la Definición B.0.7. La condición (i.) se cumple claramente, ya que

$$p(\bar{L}_1 \cup_{\bar{h}} \bar{L}_2) = p(\bar{L}_1) \cup_h p(\bar{L}_2) = p_1(\bar{L}_1) \cup_h p_2(\bar{L}_2) = L_1 \cup_h L_2.$$

Las condiciones (ii.) y (iii.) se satisfacen para puntos en \mathring{B}_i , ya que $p : \mathring{T}_i \rightarrow \mathring{B}_i$ actúa como $p_i : \mathring{T}_i \rightarrow \mathring{B}_i$, proporcionando las vecindades abiertas requeridas y las cardinalidades correctas del conjunto preimagen. Debemos verificar la validez de las condiciones (ii.) y (iii.) sobre $\partial B_i : x \in \partial B_1$ es un punto de ramificación si y sólo si $h(x) \in \partial B_2$ es un punto de ramificación, puesto que h permuta los puntos de ramificación, así

$$|p^{-1}(\{x\})| = |p_1^{-1}(\{x\})| = |p_2^{-1}(\{x\})| = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es punto de ramificación} \\ 2 & \text{si } x \text{ no es punto de ramificación} \end{cases},$$

lo cual satisface la condición (iii.).

Construir la vecindad abierta requerida de $x \sim h(x)$ en $B_1 \cup_h B_2$ para satisfacer (ii.) es un proceso laborioso, pero daremos las líneas generales de la construcción.

Primero seleccionemos S_1, S_2 , vecindades abiertas de x y $h(x)$ en B_1 y B_2 , respectivamente, y las cuales satisfacen la condición (ii.) para los mapeos $p_i : T_i \rightarrow B_i$, para $i = 1, 2$ respectivamente. Aunque $S_1 \cap \partial B_1$ y $S_2 \cap \partial B_2$ pueden no emparejarse bajo h , se pueden escoger vecindades abiertas de x y $h(x)$ contenidas en las S_i , digamos $W_1 \subseteq S_1$ y $W_2 \subseteq S_2$, donde $W_1 \cap \partial B_1$ y $W_2 \cap \partial B_2$ se emparejen bajo h , de modo que $W_1 \cup_h W_2$ esté bien definida. Por propiedades de los p_i ya establecidas, los W_i tendrán las preimágenes p_i correctas. Es decir, cada $p_i^{-1}(W_i)$ tendrá dos componentes U_i y V_i , cada una de las cuales se mapea homeomórficamente sobre los W_i por la restricción apropiada de p_i .

Ya que

$$\bar{h}(p_1^{-1}(W_1) \cap \partial T_1) = (p_2^{-1}(W_2) \cap \partial T_2),$$

lo que se puede mostrar con argumentos de inclusión de conjuntos, haciendo uso de las propiedades de levantamiento de h y $U_i \cap V_i = \emptyset$, los conjuntos $U_1 \cap \partial T_1, V_1 \cap \partial T_1$ se emparejan con $U_2 \cap \partial T_2, V_2 \cap \partial T_2$ bajo \bar{h} , aunque no necesariamente en el orden deseado.

Sin embargo, renombrando U_2, V_2 si es necesario, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\bar{h}(U_1 \cap \partial T_1) = U_2 \cap \partial T_2$ y $\bar{h}(V_1 \cap \partial T_1) = V_2 \cap \partial T_2$.

Así, $U_1 \cup_{\bar{h}} U_2$ y $V_1 \cup_{\bar{h}} V_2$ son dos conjuntos abiertos en $T_1 \cup_h T_2$, bien definidos, disjuntos y además cumplen

$$[p |_{U_1 \cup_{\bar{h}} U_2}](U_1 \cup_{\bar{h}} U_2) = [p_1 |_{U_1}](U_1) \cup_h [p_2 |_{U_2}](U_2) = W_1 \cup_h W_2$$

y

$$[p \mid_{V_1 \cup_{\bar{h}} V_2}](V_1 \cup_{\bar{h}} V_2) = [p_1 \mid_{V_1}](V_1) \cup_h [p_2 \mid_{V_2}](V_2) = W_1 \cup_h W_2,$$

donde estos mapeos son homeomorfos.

Ahora

$$p^{-1}(W_1 \cup_h W_2) = p_1^{-1}(W_1) \cup_{\bar{h}} p_2^{-1}(W_2) = (U_1 \cup_{\bar{h}} U_2) \cup (V_1 \cup_{\bar{h}} V_2),$$

así que, $W_1 \cup_h W_2$ tiene la preimagen p correcta y es la vecindad requerida de $x \sim h(x)$ en $B_1 \cup_h B_2$ para satisfacer (ii). ■

Paso 10. Los homeomorfismos \bar{h}_1 y \bar{h}_2 definidos en el paso 6 son equivalentes a L y M , giros longitudinales y meridionales de Dehn definidos en Apéndice B, respectivamente.

Paso 11. Como vimos en el modelo 3, toda curva simple cerrada en un toro T es homotópica a un nudo toroidal $T(a, b)$ de la forma $al + bm$, para algunos enteros a, b tales que $\gcd(a, b) = 1$, donde l es una longitud canónica y m es un meridiano canónico con orientaciones fijas relativas, como se puede ver en la Figura 3-10(a).

Supongamos que $0 < q < p$ son enteros positivos con $\gcd(p, q) = 1$. Ahora examinaremos los efectos de los homeomorfismos L y M sobre un nudo $T(p, q) \subseteq \partial T$.

El homeomorfismo L esencialmente deja el número de transversales meridionales fijo, pero adiciona éste al número de transversales longitudinales.

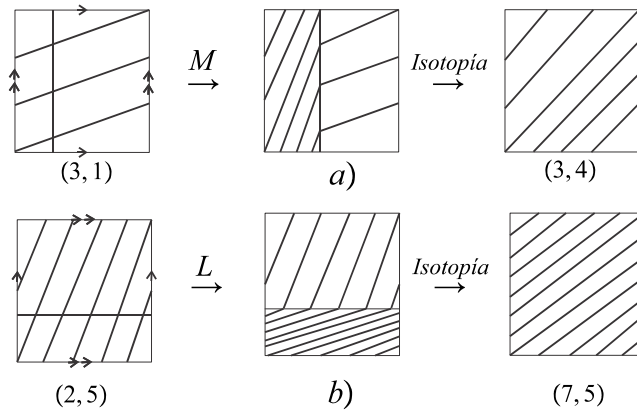


Figura 3-24: Ejemplos de los homeomorfismos L y M

Así, $L(T(p, q)) = T(p+q, q) = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y similarmente se tiene que $M(T(p, q)) =$

$T(p, p+q) = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ver la Figura 3-24 para un ejemplo.

Se puede probar por inducción, de manera sencilla, que $L^k(T(p, q)) = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$
y $M^k(T(p, q)) = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Paso 12. En este paso haremos uso de ciertas definiciones y resultados del Apéndice A. Además, para representar el nudo toroidal $T(p, q)$ hemos escogido los enteros p y q con $0 < q < p$ y $\gcd(p, q) = 1$, así que $\frac{p}{q}$ se puede ver en términos una fracción continua

$$\frac{p}{q} = [d_1, d_2, \dots, d_n]$$

donde n siempre se puede tomar impar y cada $d_i \in \mathbb{N}$. Esta fracción representa el enlace racional $C(d_1, d_2, \dots, d_n)$ en la clasificación de Conway, a partir de los tangles racionales, como se vio en el Capítulo 2. Ver también [6], [11], [17] y [18].

Paso 13. En este paso veremos un lema útil para nuestro estudio y haremos uso del Lema A.0.5.

Lema 3.5.2 *El homeomorfismo*

$$\bar{h}_1^{c_n} \bar{h}_2^{c_{n-1}} \dots \bar{h}_2^{c_2} \bar{h}_1^{c_1} : \partial T \longrightarrow \partial T$$

es un levantamiento del homeomorfismo $h_1^{c_n} h_2^{c_{n-1}} \dots h_2^{c_2} h_1^{c_1} : \partial B \longrightarrow \partial B$ con respecto a p .

Prueba. Notemos que

$$\begin{aligned} p(\bar{h}_1^{c_n} \bar{h}_2^{c_{n-1}} \dots \bar{h}_2^{c_2} \bar{h}_1^{c_1}) &= p\bar{h}_1(\bar{h}_1^{c_n-1} \bar{h}_2^{c_{n-1}} \dots \bar{h}_2^{c_2} \bar{h}_1^{c_1}) = h_1 p(\bar{h}_1^{c_n-1} \bar{h}_2^{c_{n-1}} \dots \bar{h}_2^{c_2} \bar{h}_1^{c_1}) \\ &= \dots = h_1^{c_n} h_2^{c_{n-1}} \dots h_2^{c_2} h_1^{c_1-1} p\bar{h}_1 = (h_1^{c_n} h_2^{c_{n-1}} \dots h_2^{c_2} h_1^{c_1}) p. \end{aligned}$$

■

3.5.1 $L(p, q)$ como la cubierta doble ramificada del enlace racional $\frac{p}{q}$

Ahora mostraremos uno de los teoremas centrales de esta sección, utilizando la fracción continua del número racional que representa al enlace racional a través de la presentación de Conway.

Teorema 3.5.3 *La cubierta doble de S^3 ramificada sobre un enlace racional p/q es el espacio lente $L(p, q)$.*

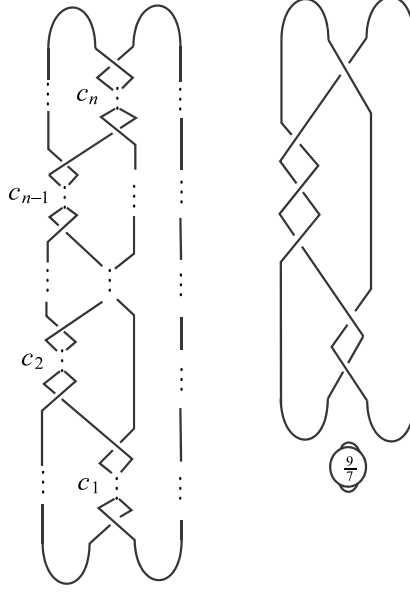


Figura 3-25: Nudo racional

Prueba. Sea $\frac{p}{q} = [c_n, \dots, c_1]$. Entonces del Lema A.0.5 tenemos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & c_{n-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

donde $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{p}{q}$. Equivalentemente, $L^{c_n} M^{c_{n-1}} \cdots M^{c_2} L^{c_1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Además,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 1 & c_{n-1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c_n & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdots 1 = 1$$

y así se tiene que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ y por tanto $\gcd(p, q) = 1$. Luego se deduce que $\gamma = p$ y $\delta = q$ y por lo tanto

$$\bar{h}_1^{c_n} \bar{h}_2^{c_{n-1}} \cdots \bar{h}_2^{c_2} \bar{h}_1^{c_1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}.$$

Sea $h = h_1^{c_n} h_2^{c_{n-1}} \cdots h_2^{c_2} h_1^{c_1} : \partial B \rightarrow \partial B$. Entonces del Lema 3.5.2 se sigue que $\bar{h} = \bar{h}_1^{c_n} \bar{h}_2^{c_{n-1}} \cdots \bar{h}_2^{c_2} \bar{h}_1^{c_1}$ es un levantamiento de h , es decir, $p\bar{h} = hp$. Luego, del Lema 3.5.1 tenemos que $B_1 \cup_h B_2$ tiene una cubierta doble $T_1 \cup_{\bar{h}} T_2$ ramificada sobre $L_1 \cup_h L_2$. Ahora $T_1 \cup_{\bar{h}} T_2$ es la 3-variedad resultante de identificar dos toros sólidos vía el homeomorfismo \bar{h} . Hemos visto justamente que $\bar{h} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}$, es decir, \bar{h} toma un meridiano $T(0, 1)$ en ∂T_1 y lo envía a un nudo $T(p, q)$ sobre ∂T_1 . Por lo tanto, del modelo 3, vemos que $T_1 \cup_{\bar{h}} T_2 \cong L(p, q)$. También sabemos que $B_1 \cup_h B_2 \cong S^3$. Así, $L(p, q)$ es la cubierta doble de S^3 ramificada sobre $L_1 \cup_h L_2$.

De las Figuras 3-22 y 3-25 podemos ver que $L_1 \cup_h L_2$ es el enlace racional $C(c_n, \dots, c_1)$.

Por lo tanto, hemos visto que $L(p, q)$ es la cubierta doble de S^3 ramificada sobre $L_1 \cup_h L_2$; esto es, ramificada sobre el enlace racional. ■

3.5.2 $L(p, q)$ como la cubierta doble ramificada del enlace de 2-puentes $\frac{p}{q}$

En esta parte mostraremos otro de los teoremas centrales de esta sección, ver [3], el cual garantiza, junto con el Teorema 3.5.3, que los enlaces racionales y los enlaces de 2-puentes representados por la misma fracción, tienen como cubierta doble ramificada sobre ellos el mismo espacio lente, y puesto que todos los espacios lentes tienen representación única como espacios cubiertos ramificada 2-hojas de S^3 , ver [21, pág. 434], tenemos la equivalencia de estos enlaces.

Para el siguiente teorema presentaremos dos pruebas, la primera obtenida de [19, pág. 22] y la segunda, un poco más fácil de entender, se hará a través de diagramas, usando el concepto de 2-mariposa.

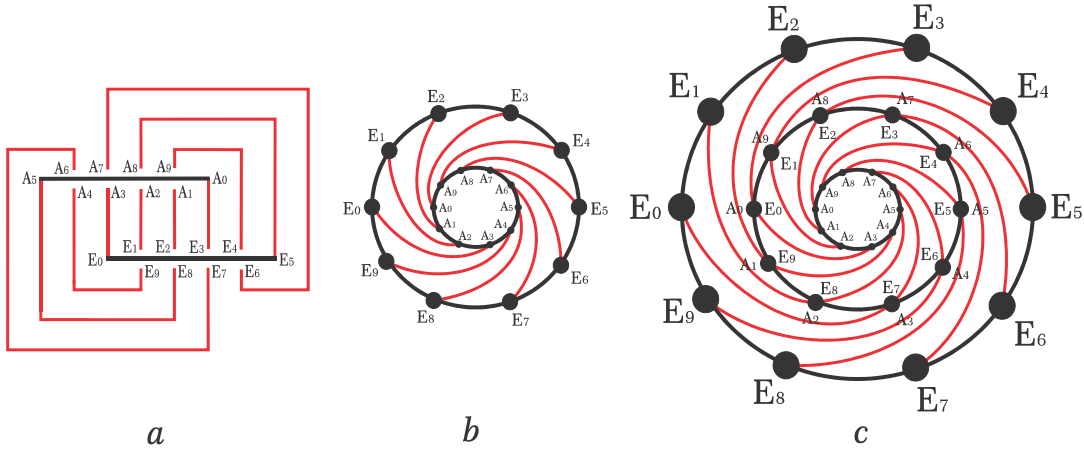


Figura 3-26: Construcción del espacio lente $L(5, 3)$ sobre el nudo $\frac{5}{3}$

Teorema 3.5.4 *La cubierta doble de S^3 ramificada sobre un enlace de 2-puentes p/q es el espacio lente $L(p, q)$.*

Prueba 1. Supongamos que α_1, α_2 son los puentes y β_1, β_2 son los arcos por debajo, sea $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección regular. Puesto que tanto $(B_+^3, \alpha_1 \cup \alpha_2)$ y $(B_-^3, \beta_1 \cup \beta_2)$ son tangles triviales, la cubierta doble ramificada sobre B_+^3 y B_-^3 con conjuntos de ramificación $\alpha_1 \cup \alpha_2$ y $\beta_1 \cup \beta_2$ respectivamente, son toros sólidos V_+ y V_- . Entonces la cubierta doble de S^3 ramificada sobre un enlace de dos puentes es un espacio lenticular. Cada uno de los levantamientos de $\rho(\alpha_1)$ y $\rho(\alpha_2)$ a V_+ es un meridiano de V_+ . También cada uno de los levantamientos de $\rho(\beta_1)$

y $\rho(\beta_2)$ a V_- es un meridiano de V_- . Entonces si el levantamiento de $\rho(\alpha_1)$ (o $\rho(\alpha_2)$) es un meridiano estándar, el de $\rho(\beta_1)$ (o $\rho(\beta_2)$) es una curva característica del espacio lenticular.

Consideremos el caso particular del enlace $5/3$, el cual se muestra en la Figura 3-26a. Cortemos S^2 a lo largo de $\rho(\alpha_1) \cup \rho(\alpha_2)$ para obtener un anillo, como se muestra en la Figura 3-26b. Entonces la cubierta doble de S^2 , con conjunto de ramificación el conjunto $\{A_0, A_5, E_0, E_5\}$, es un toro, el cual se obtiene al pegar las dos fronteras del anillo dado en la figura 3-26c. Puesto que cada uno de los levantamientos de $\rho(\alpha_1)$ y $\rho(\alpha_2)$ es un meridiano de V_+ , cada uno de los levantamientos de $\rho(\beta_1)$ y $\rho(\beta_2)$ es homólogo a 5 (*meridiano*) + 3 (*longitud*) en la frontera de ∂V_+ con respecto al sistema de meridiano-longitud de V_+ . Por lo tanto la cubierta doble de S^3 con conjunto de ramificación $5/3$ es el espacio lenticular $L(5, 3)$. Para cualquier otro enlace p/q la conclusión se obtiene mediante el mismo procedimiento. ■

Prueba 2 usando la noción de 2-mariposa. Ver la Figura 3-27. ■

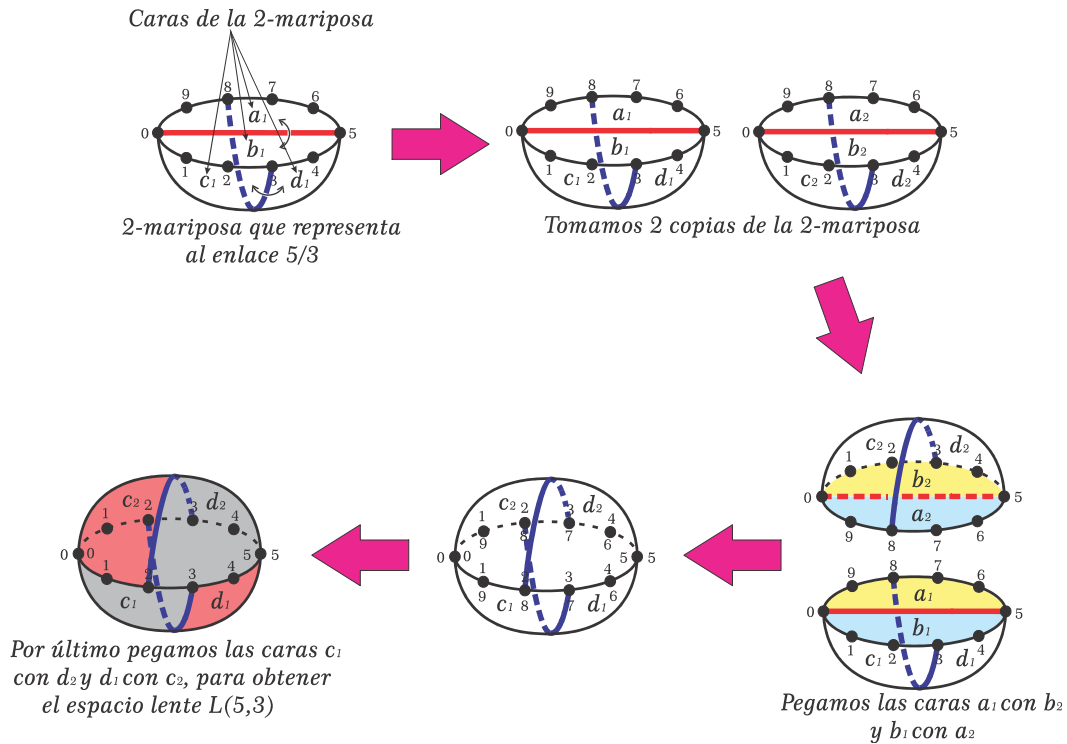


Figura 3-27: Construcción de $L(5, 3)$, usando 2-mariposa

Capítulo 4

Enlaces de 3-puentes

En este capítulo construiremos una familia de nudos de 3-puentes, a partir de nudos de 2-puentes, y a esta familia asociaremos una 6-tupla de enteros, utilizando el concepto de 3-mariposa, contribuyendo así al problema de clasificación. A este nudo de tres puentes lo representaremos por medio de tres enteros y veremos la relación entre dichos enteros y la 6-tupla de la 3-mariposa. Además, utilizando la cubierta doble ramificada sobre este nudo y el grupo del nudo, mostraremos que en efecto es de 3-puentes, luego asociaremos una 6-tupla a su imagen espejo.

Por último mostraremos distintos diagramas para enlaces de 3-puentes e introduciremos el concepto de rosetas de n -niveles y la equivalencia entre las rosetas de 1-nivel y los enlaces pretzel.

4.1 Construcción de nudos de 3-puentes a partir de nudos de dos puentes

En esta sección construiremos un pequeño grupo de nudos de 3-puentes a partir de nudos de 2-puentes, con el fin de extender la construcción de Schubert, basados en una construcción que aparece en [22]; luego clasificaremos todos estos nudos por medio de una 6-tupla, usando su presentación en mariposa. Inicialmente mostraremos la construcción original, debida a O. Morikawa en [22] y luego nos centraremos en nuestra construcción y mostraremos, usando el polinomio de Alexander, que las dos construcciones generan nudos diferentes.

4.1.1 Construcción de O. Morikawa

En adelante, cuando hablemos de arcos, nos referimos a arcos por debajo y los arcos por encima los llamaremos puentes.

Dado un nudo de dos puentes K , usaremos la notación $K(p, q)$ con $\gcd(p, q) = 1$, $0 < q < p$ y p y q impar, para la construcción de un nudo de 3-puentes, el cual llamaremos $K(p, q; r)$, con $r \in \mathbb{Z}$, ver [22], [23]. Además, para nuestro propósito, usaremos el diagrama de Schubert de $K(p, q)$, el cual construimos en la Sección 2.1.

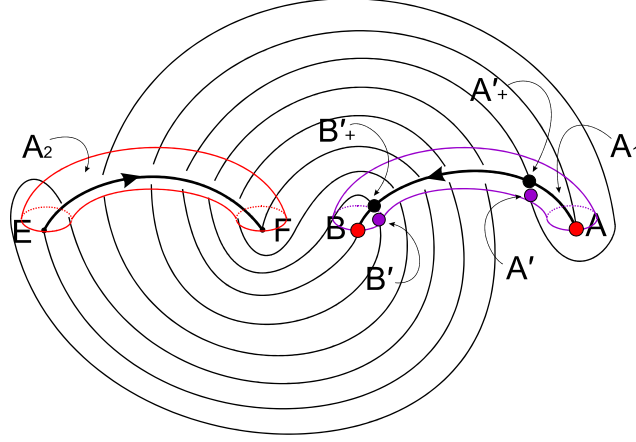


Figura 4-1: Elección de los anillos A_1 y A_2 en el nudo

Suponemos que $K(p, q)$ es una unión de 4 arcos AB , EF , BE y FA , tales que BE , FA son llamados arcos y están contenidos en \mathbb{R}^2 y AB , EF se denominan puentes y están contenidos en A_1 y A_2 en \mathbb{R}_+^3 , respectivamente. A continuación daremos una orientación al nudo, inducida por la dirección \overrightarrow{AB} en el puente AB .

Sea $\rho : S^3 - \{\infty\} = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \mathbb{R}^2$ la proyección regular $\rho(x, y, z) = (x, y, 0)$. Sea A_1 un anillo en $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) : z \geq 0\}$ cuya frontera $\partial A_1 = S^1 \times \{0\} \cup S^1 \times \{1\}$ está contenida en \mathbb{R}^2 , y sean A y B puntos de las componentes fronteras $S^1 \times \{0\}$ y $S^1 \times \{1\}$, respectivamente, ver Figura 4-1.

Del mismo modo que arriba, definimos un anillo A_2 y puntos E y F .

A continuación definiremos un área paralela en \mathbb{R}^2 de la siguiente manera.

Sean A' y B' los primeros puntos dobles en $\rho(AB)$ cercanos a los puntos $\rho(A)$ y $\rho(B)$, respectivamente. Ahora, tenemos que $\rho(A') \cap K(p, q)$ consiste de dos puntos A' y A'_+ , donde A' está en el arco BE y A'_+ esta en el puente AB . Del mismo modo se define B'_+ en el puente AB , ver Figura 4-1. Definamos ahora AA'_+ y BB'_+ los subarcos del puente AB y sean AB' y $A'B$ los subarcos de los arcos FA y BE , respectivamente. Entonces tenemos que la unión de los 4 arcos $\rho(AA'_+)$, $\rho(BB'_+)$, AB' y $A'B$ forman una región cerrada en \mathbb{R}^2 . Llamaremos al área en \mathbb{R}^2 acotada por esta región cerrada, la cual no contiene al punto E , un *área paralela*, ver Figura 4-2.

Luego, tomamos dos puntos C y D en la intersección de ∂A_1 y el interior del área paralela, cerca de los puntos A y B , respectivamente y adicionamos un nuevo arco CD en el interior del área paralela, ver Figura 4-2. Por último, eliminamos el puente AB del nudo $K(p, q)$, y adicionamos 2 nuevos puentes AD y CB a través del anillo A_1 , tal que $\rho(AD) \cap \rho(CB) = \phi$, ver Figura 4-3.

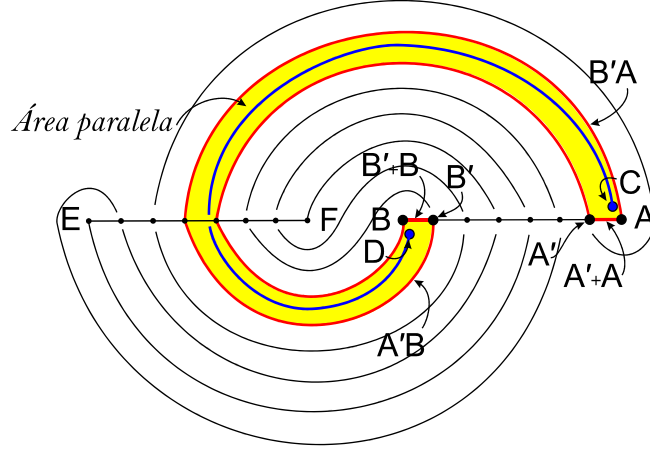


Figura 4-2: Área paralela y arco DC

El resultado de esta construcción es un nudo, ya que ninguno de los tres puentes une sus extremos a través de un arco. Dicho nudo se denota por $K(p, q; 0)$ y como vemos tiene una presentación en 3-puentes.

Luego, para construir el nudo $K(p, q; r)$ con $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$, procedemos de la siguiente manera.

Caso 1: $r > 0$: En \mathbb{R}^2 , giramos r -veces los arcos FA y DC alrededor del anillo A_1 en sentido antihorario.

Caso 2: $r < 0$: Similarmente, giramos $|r|$ -veces los arcos FA y DC en sentido horario.

Ejemplo 4.1.1 Dado el nudo de 2-puentes $K(7, 3)$, usaremos la construcción de Morikawa para hallar el nudo de 3-puentes $K(7, 3; 3)$.

Primero hallamos la región paralela, ver Figuras 4-1 y 4-2, luego hallamos el nudo $K(7, 3; 0)$, ver Figura 4-3, y por último tenemos el nudo $K(7, 3; 3)$, ver Figura 4-4.

Además, usando el concepto de 3-mariposa podemos asociarle a este nudo una 6-tupla, la cual viene dada por $\left(\frac{13}{13}, \frac{12}{1}, \frac{8}{5}\right)$.

4.1.2 Construcción basada en la de O. Morikawa y su presentación en mariposa

A continuación, basados en la construcción anterior, presentamos otra forma de construir un nudo de 3-puentes, a partir de uno de 2-puentes. Esta construcción da, en general, un nudo diferente al anterior, lo cual mostraremos usando el polinomio de Alexander y su presentación como 3-mariposa. Para nuestro propósito, dado el nudo $K(p, q)$ exigimos que $0 < q < p$ con p impar y al nudo de 3-puentes resultante, lo llamaremos $\tilde{K}(p, q, r)$ y posteriormente construiremos su presentación en mariposas $\left(\frac{p'}{p'}, \frac{q'}{1}, \frac{s'}{l}\right)$ con $s' \leq q' \leq p'$ y $0 < l \leq s'$, ver [35].

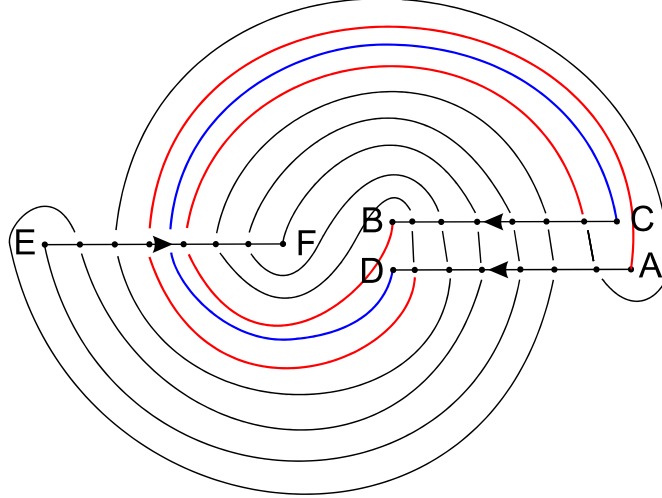


Figura 4-3: Nudo $K(7,3;0)$

Construcción: Sea $K(p, q)$ con $\gcd(p, q) = 1$, $0 < q < p$ y p impar. Para nuestra construcción tomaremos la representación del diagrama de $K(p, q)$ en la forma de Schubert, ver Sección 2.1.

Luego, definimos R_j como la región del diagrama del nudo $K(p, q)$ en \mathbb{R}^2 que intersecta el segmento $\overline{F_{j-1}F_j}$ del puente EF , para $j = 1, \dots, 2p$, como se muestra en la Figura 4-5, donde $r + (q + 1) = 2p$. Además, diremos que las regiones R_i y R_j son *regiones correspondientes*, si $i + j = 2p + 1$.

Ahora, tomamos puntos C, D en las vecindades $V(B) \cap \text{Int}R_q$ y $V(A) \cap \text{Int}R_{p+q}$, respectivamente, eliminamos el puente BA y trazamos dos nuevos puentes DA y BC ; los puntos C y D se pueden tomar de tal manera que los puentes DA y BC estén formados por segmentos paralelos, tal que los vértices A y B de los nuevos puentes, conserven su forma de pegado en el nudo $K(p, q)$, ver Figura 4-6.

Nota 4.1.1 *Por la simetría del diagrama de un nudo $K(p, q)$, con $0 < q < p$, p, q impares, en la forma de Schubert, la construcción anterior se puede realizar en el otro puente y luego rotar el diagrama 180° en el plano. Ahora, si q es par, los diagramas son simétricos salvo algún movimiento de Reidemeister, de tal manera que siempre es posible hacer esta construcción sin perder generalidad.*

A continuación trazamos un arco que llamaremos DC , el cual una los puntos D y C , y que no debe intersectar otro arco distinto de los puentes en la proyección del nudo en \mathbb{R}^2 ; es decir, este arco debe pertenecer a $\text{Int}R_j$ para algunos $j \in \{1, \dots, 2p\}$. De esta manera construimos el nudo $\tilde{K}(p, q, 0)$ similar al de [22], a partir del nudo $K(p, q)$.

Nudo $K(7,3;3)$ de Morikawa

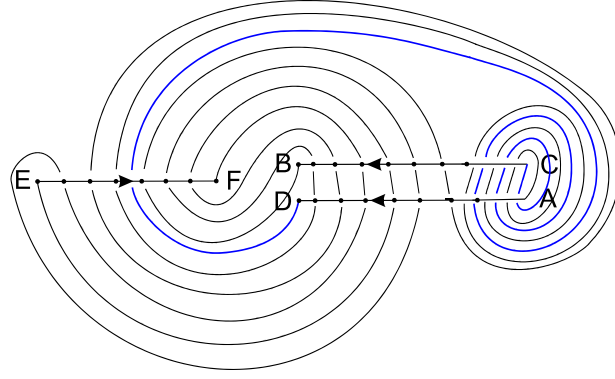


Figura 4-4: Nudo hallado por la construcción de Morikawa

El número de intersecciones de DC con los puentes DA y BC , el cual es el mismo por la construcción de $\tilde{K}(p, q, 0)$, lo llamaremos n y tal número se puede calcular de la siguiente manera:

Lema 4.1.1 *El número n de intersecciones de DC con los puentes DA y BC , es de la forma $\frac{k-1}{2}$, donde $0 < k < 2p$ es el menor entero impar que cumple $p - q + 1 = (kq) \pmod{2p}$.*

Prueba. Dada la proyección de $K(p, q)$ en \mathbb{R}^2 tenemos que al trazar DC , partiendo del vértice D en el puente DA , éste recorre $IntR_q$ e interseca el puente EF , para luego recorrer $IntR_{2p-q+1}$, ya que R_q y R_{2p-q+1} son regiones correspondientes, e interseca los puentes DA y BC , regresando su recorrido por $IntR_{i_1}$ con $i_1 = (3q) \pmod{2p}$, e intersectando nuevamente el puente EF ; seguir su recorrido por $IntR_{2p-i_1+1}$ y nuevamente interseca los puentes DA y BC , y así sucesivamente continuamos por $IntR_{i_s}$, donde $i_s = ((2t + 1)q) \pmod{2p}$ para $s, t \in \mathbb{N}$.

Ahora, como el vértice C en el puente BC pertenece a $IntR_{p+q}$, tenemos que el proceso anterior termina cuando DC interseca por última vez el puente EF y recorre $IntR_{p+q}$; esto es, cuando DC recorre $IntR_{p-q+1}$, es decir, cuando $p - q + 1 = ((2r + 1)q) \pmod{2p}$, para algún $r \in \mathbb{N}$.

Luego, si $2r + 1 < 2p$ tomamos $k = 2r + 1$, de lo contrario, si $2r + 1 > 2p$ tenemos que $2r + 1 = (2p)l + h$ para algunos $h, l \in \mathbb{N}$ con $0 < h < 2p$ impar, de modo que

$$((2r + 1)q) \pmod{2p} = (((2p)l + h)q) \pmod{2p} = (hq) \pmod{2p}$$

y tomamos $k = h$. Por lo tanto, como el número de intersecciones de DC con el puente EF es $\frac{k+1}{2}$, tenemos por la construcción de $\tilde{K}(p, q, 0)$ que el número de intersecciones de DC con los puentes DA y BC es $\frac{k+1}{2} - 1 = \frac{k-1}{2}$. Así, $n = \frac{k-1}{2}$ donde $0 < k < 2p$ es el menor entero impar que cumple $p - q + 1 = (kq) \pmod{2p}$. ■

$(r - 1)$ -veces el puente DA y el arco que se extiende del vértice C , se enrolla del mismo modo, sin intersectarse con el arco que parte de A y de tal manera que atraviese r -veces el puente DA y r -veces el puente BC , ver Figura 4-7.

- Si $r < 0$, el arco que parte de A atraviesa $|r|$ -veces el puente BC y $|r|$ -veces el puente DA , y el arco que parte de C , atraviesa $|r|$ -veces el puente DA y $|r - 1|$ -veces el puente BC , ver Figura 4-7.

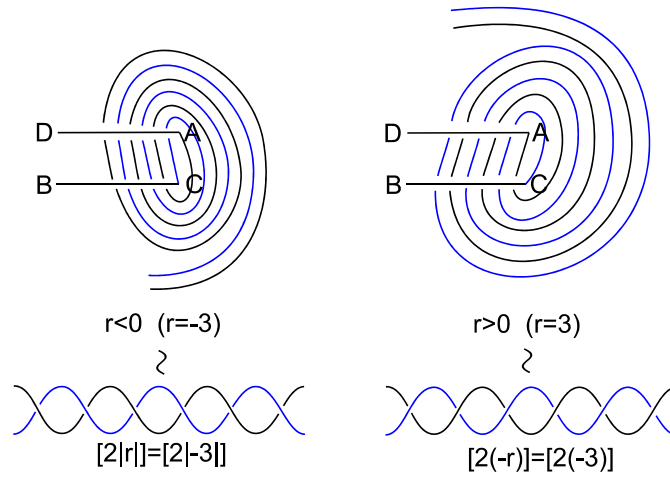


Figura 4-7: $r > 0$ y $r < 0$

Por último, pegamos los nuevos arcos que parten de los vértices A y C a los arcos iniciales del nudo $\tilde{K}(p, q, 0)$, de este modo obtenemos el nudo $\tilde{K}(p, q, r)$. Además, al igual que $\tilde{K}(p, q, 0)$, este nudo tiene como puentes a EF , DA y BC .

De este modo, si n es el número de intersecciones del arco DC con los puentes DA y BC , entonces el número de cruces de cada puente esta dado por:

- Si $r > 0$, el número de cruces de EF , DA y BC es $p + n$, $p + n + 2r - 2$ y $p + n + 2r - 1$, respectivamente.
- Si $r < 0$, el número de cruces de EF , DA y BC es $p + n$, $p + n + 2|r| - 1$ y $p + n + 2|r| - 2$, respectivamente.

Ejemplo 4.1.2 Dado el nudo $K(7, 3)$, construiremos el nudo $\tilde{K}(7, 3, 3)$ y su presentación en mariposa $\left(\frac{p'}{p'}, \frac{q'}{1}, \frac{s'}{l}\right)$.

En efecto, dado $K(7, 3)$ tenemos que al construir $\tilde{K}(7, 3, 0)$, el arco DC , el cual parte del

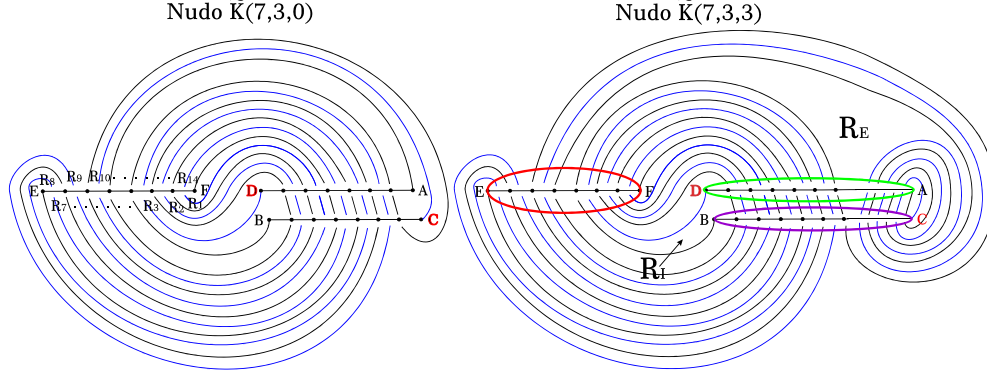


Figura 4-8: $\tilde{K}(7, 3, 0)$ y $\tilde{K}(7, 3, 3)$

vértice D y se conecta con C , interseca el interior de las siguientes regiones

$$\begin{array}{cccccc}
 R_{1(3)} & R_{3(3)} & R_{5(3)} & R_{7(3)} & R_{9(3)} & R_{11(3)} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 R_3 & R_9 & R_1 & R_7 & R_{13} & R_5
 \end{array}$$

Luego, como el proceso termina cuando DC recorre $\text{Int}R_{p-q+1}$, y $R_{p-q+1} = R_5 = R_{11(3)}$ tenemos que $k = 11$, de modo que $n = \frac{11-1}{2} = 5$.

Ahora, como el número de enteros impares j que cumplen las condiciones, $1 \leq j \leq 11$ y $j(3) = \hat{r} \bmod 14$ para $3 < \hat{r} \leq 12$, es 3, ver (4.1), tenemos por Lema 4.1.2 que $l' = 3$.

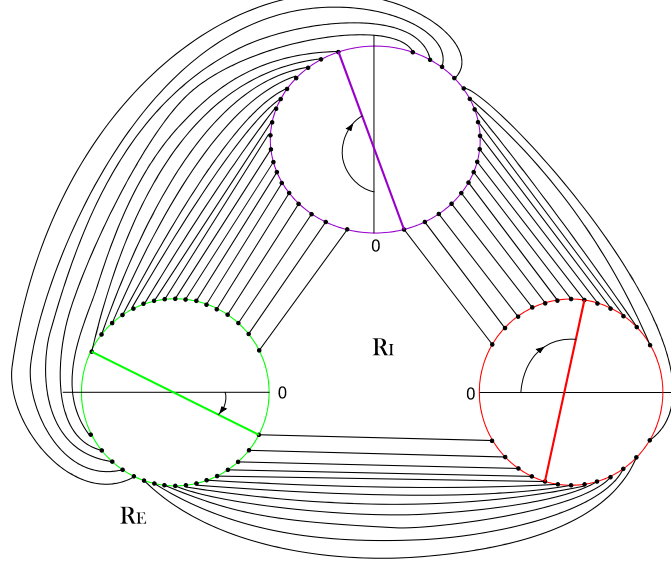
$$\begin{array}{llll}
 1(3) & = & 3 \bmod 14 & \times \text{ ya que } 3 \not\leq 3 \\
 3(3) & = & 9 \bmod 14 & \checkmark \text{ ya que } 3 < 9 \leq 12 \\
 5(3) & = & 1 \bmod 14 & \times \text{ ya que } 1 \not\leq 3 \\
 7(3) & = & 7 \bmod 14 & \checkmark \text{ ya que } 3 < 7 \leq 12 \\
 9(3) & = & 13 \bmod 14 & \times \text{ ya que } 13 \not\leq 12 \\
 11(3) & = & 5 \bmod 14 & \checkmark \text{ ya que } 3 < 5 \leq 12
 \end{array} \tag{4.1}$$

Así, como $r = 3 > 0$ tenemos que: $p' = 7 + 5 + 2(3) = 18$, $q' = 7 + 5 + 2(3) - 1 = 17$, $s' = 7 + 5 + 1 = 13$ y $l = 7 - 3 + 3 + 1 = 8$; por lo tanto el nudo $\tilde{K}(7, 3, 3)$ tiene la siguiente presentación en mariposa:

$$\left(\frac{p'}{p'}, \frac{q'}{1}, \frac{s'}{l} \right) = \left(\frac{18}{18}, \frac{17}{1}, \frac{13}{8} \right).$$

En las Figuras 4-8 y 4-9, podemos ver el ejemplo de manera gráfica, donde R_E , R_I son las regiones externa e interna, respectivamente, comunes en los 3 puentes del nudo.

Lema 4.1.2 (Lema principal) Dado el nudo $\tilde{K}(p, q, r)$ construido de la forma anterior, po-

Figura 4-9: $(\frac{18}{18}, \frac{17}{1}, \frac{13}{8})$

demos asignarle la presentación en mariposa $(\frac{p'}{p'}, \frac{q'}{1}, \frac{s'}{l})$, donde:

1. Si $r > 0$, $p' = p + n + 2r$, $q' = p + n + 2r - 1$, $s' = p + n + 1$ y $l = p - q + l' + 1$,
2. Si $r < 0$, $p' = p + n + 2|r|$, $q' = p + n + 2|r| - 1$, $s' = p + n + 1$ y $l = q + n - l' + 1$,

en donde l' cuenta el número de enteros impares j tales que $1 \leq j \leq k$, $jq = \hat{r} \pmod{2p}$ para $q < \hat{r} \leq 2p - q + 1$ y k es como en el Lema 4.1.1.

Prueba. Una vez construido el nudo $\tilde{K}(p, q, r)$, tenemos dos regiones comunes para los tres puentes, en la proyección en el plano de dicho nudo. Una región interior la cual llamaremos R_I y una región exterior la cual llamaremos R_E . Hallaremos la presentación como 3-mariposa de este nudo, a través de la región R_I , de la siguiente manera: dibujamos elipses alrededor de cada puente, tales que cada elipse intersekte todos los arcos por debajo y los vértices extremos, E y F , D y A , y B y C , de cada puente, ver Figura 4-8. Cada una de estas elipses representará una 1-mariposa de nuestra 3-mariposa.

Ahora si $r > 0$, tenemos que la elipse con mayor número de cruces es la que contiene el puente BC y le sigue la que contiene el puente DA y por último la que contiene el puente EF . Si $r < 0$, tenemos que la mayor es la de DA , le sigue la de BC y la de menor número de cruces es la de EF .

En cada una de las elipses, los puentes representan los troncos en la presentación como 3-mariposa. Además, por la construcción de $\tilde{K}(p, q, r)$ tenemos que si $r > 0$, el número de

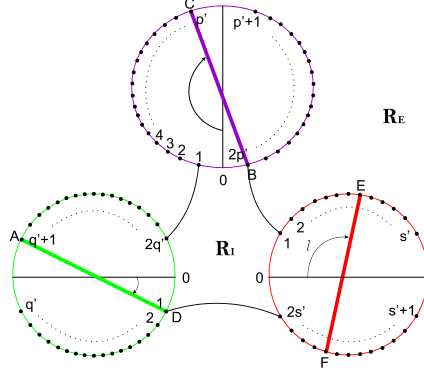


Figura 4-10: Forma de situar 1-mariposas y troncos de $K(p, q; r)$

cruces de EF , DA y BC es $p+n$, $p+n+2r-2$ y $p+n+2r-1$, respectivamente; luego se sigue que las elipses que contienen a los puentes EF , DA y BC tienen, incluyendo los extremos de los puentes, $2(p+n+1)$, $2(p+n+2r-1)$ y $2(p+n+2r)$ intersecciones, respectivamente; y si $r < 0$, se sigue que las elipses que contienen a los puentes EF , DA y BC tienen $2(p+n+1)$, $2(p+n+2|r|)$ y $2(p+n+2|r|-1)$ intersecciones, respectivamente.

Así, en la presentación como 3-mariposa $\left(\frac{p'}{\widehat{m}}, \frac{q'}{\widehat{n}}, \frac{s'}{l}\right)$ de $\widetilde{K}(p, q, r)$ tenemos que si $r > 0$, $p' = p+n+2r$, $q' = p+n+2r-1$ y $s' = p+n+1$, y si $r < 0$, $p' = p+n+2|r|$, $q' = p+n+2|r|-1$, $s' = p+n+1$.

A continuación organizamos las 1-mariposas de $\widetilde{K}(p, q, r)$ y sus troncos, las cuales están representadas por las elipses y los puentes, ver Figura 4-10, esto de acuerdo a [35], de tal manera que R_I contenga el punto 0 de cada 1-mariposa, así siguiendo la orientación dada en [35] obtenemos que el número de vértices entre 0 y el primer extremo del tronco, llamado \widehat{m} , es p' , que $\widehat{n} = 1$, y l se puede calcular de la construcción de $\widetilde{K}(p, q, r)$ de la siguiente forma: tomamos las regiones R_{jq} con j impar cuyo interior contiene el arco DC , el cual parte del vértice D y termina en el vértice C ; luego tenemos por la prueba del Lema 4.1.1 que el número de estas regiones es $k+1$.

Ahora, definimos l' como el número de regiones R_{jq} tal que $1 \leq j \leq k$, j impar y $jq = \widehat{r} \bmod 2p$ para $q < \widehat{r} \leq 2p - q + 1$, es decir, sin pérdida de generalidad podemos tomar a l' como el número de j impar, con $1 \leq j \leq k$ y tal que $jq = \widehat{r} \bmod 2p$ para $q < \widehat{r} \leq 2p - q + 1$. Por tanto, definimos l como:

$$\text{Si } r > 0, l = p - q + l' + 1 \quad \text{y} \quad \text{si } r < 0, l = q + n - l' + 1,$$

lo cual concluye la prueba. ■

Si en el lema anterior hallamos la presentación de la 3-mariposa de $\widetilde{K}(p, q, r)$ a través de R_E ,

obtenemos como resultado la presentación como 3-mariposa de la imagen espejo de $\tilde{K}(p, q, r)$. Más adelante mostraremos la presentación como 3-mariposa de la imagen espejo de $\tilde{K}(p, q, r)$.

Corolario 4.1.3 *La presentación como 3-mariposa del nudo $\tilde{K}(p, q, 0)$ está dada por*

$$\left(\frac{p+n+1}{p-q+l'+1}, \frac{p+n}{p+n}, \frac{p+n}{1} \right).$$

Ahora, dados los nudos de 3-puentes $\tilde{K}(p, q, r)$ y $K(p, q, r)$ de nuestra construcción y la de Morikawa, respectivamente, usaremos el polinomio de Alexander y la presentación como 3-mariposa de cada uno de estos nudos, para garantizar que, en general, ambas construcciones generan nudos diferentes y que ambos nudos son distintos del nudo trivial.

Para nuestro propósito sólo mostraremos el resultado para tres casos particulares. Además, para los casos particulares de los nudos $\tilde{K}(p, q, r)$, mostraremos la presentación del grupo con tres generadores y tres relaciones.

Ejemplo 4.1.3 (Cálculo del polinomio de Alexander y el grupo del nudo) *Para hacer el cálculo del polinomio de Alexander utilizamos un programa de computador con el software Mathematica, ver [34] y [35], el cual utiliza la presentación como 3-mariposa del nudo.*

1. *Dados los nudos $\tilde{K}(3, 1, 2)$ y $K(3, 1, 2)$, los cuales tienen asociadas las 3-mariposas $\left(\frac{8}{8}, \frac{7}{1}, \frac{5}{4}\right)$ y $\left(\frac{7}{7}, \frac{6}{1}, \frac{4}{3}\right)$, respectivamente, tenemos que sus respectivos polinomios de Alexander son $1 + 2z^2$ y $1 + 2z^2 + z^4$.*
2. *Dados los nudos $\tilde{K}(7, 3, 3)$ y $K(7, 3, 3)$, los cuales tienen asociadas las 3-mariposas $\left(\frac{18}{18}, \frac{17}{1}, \frac{13}{8}\right)$ y $\left(\frac{13}{13}, \frac{12}{1}, \frac{8}{5}\right)$, respectivamente, tenemos que sus respectivos polinomios de Alexander son $1 + 4z^2 + 2z^4$ y $1 + 5z^2 + 8z^4 + 2z^6$.*
3. *Dados los nudos $\tilde{K}(7, 5, 3)$ y $K(7, 5, 3)$, los cuales tienen asociadas las 3-mariposas $\left(\frac{17}{17}, \frac{16}{1}, \frac{12}{4}\right)$ y $\left(\frac{14}{14}, \frac{13}{1}, \frac{9}{3}\right)$, respectivamente, tenemos que sus respectivos polinomios de Alexander son $1 + 4z^2 + 5z^4 + z^6$ y $1 + 5z^2 + 13z^4 + 7z^6 + z^8$.*

Luego, para calcular la presentación del grupo de estos nudos, lo hacemos a través del diagrama de 3-puentes de cada uno de ellos. Así, tenemos las siguientes presentaciones de grupos:

1. *Dado el nudo $\tilde{K}(3, 1, 2)$, tenemos la siguiente presentación para el grupo:*

$$\langle x, y, z \mid \bar{w}_1 x w_1 \bar{z}, \bar{w}_2 y w_2 \bar{x}, \bar{w}_3 z w_3 \bar{y} \rangle,$$

donde $w_1 = zyxyzy$, $w_2 = xzy$ y $w_3 = xzyxyzyz$ son palabras en x, y, z .

2. Dado el nudo $\tilde{K}(7, 3, 3)$, tenemos la siguiente presentación para el grupo:

$$\langle x, y, z \mid \bar{w}_1 x w_1 \bar{z}, \bar{w}_2 y w_2 \bar{x}, \bar{w}_3 z w_3 \bar{y} \rangle,$$

donde $w_1 = zy\bar{x}y\bar{z}xzy\bar{x}y\bar{z}yzy$, $w_2 = xzy\bar{x}y\bar{z}xzy$ y $w_3 = xzy\bar{x}y\bar{z}xzy\bar{x}y\bar{z}xzy\bar{x}y\bar{z}yzy\bar{z}$ son palabras en x, y, z .

3. Dado el nudo $\tilde{K}(7, 5, 3)$, tenemos la siguiente presentación para el grupo:

$$\langle x, y, z \mid \bar{w}_1 x w_1 \bar{z}, \bar{w}_2 y w_2 \bar{x}, \bar{w}_3 z w_3 \bar{y} \rangle,$$

donde $w_1 = zy\bar{x}zy\bar{x}y\bar{z}xzy\bar{x}y\bar{z}yzy$, $w_2 = x\bar{y}zxy\bar{x}zy$ y $w_3 = x\bar{y}zxy\bar{x}zy\bar{x}y\bar{z}xzy\bar{x}y\bar{z}yzy\bar{z}$ son palabras en x, y, z .

4.2 Cubierta doble de S^3 ramificada sobre el nudo $\tilde{K}(p, q, r)$

Dado un nudo de 3-puentes $\tilde{K}(p, q, r)$ con grupo fundamental no trivial, es posible distinguirlo de un nudo de dos puentes, examinando el espacio cubierta ramificada de 2-hojas de S^3 sobre $\tilde{K}(p, q, r)$. Si este espacio no es un espacio lenticular, entonces el nudo no es de 2-puentes, ver 3.5. Usamos este método para garantizar que existen nudos de 3-puentes que no son de 2-puentes.

Sea $\rho : S^3 - \{\infty\} = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \mathbb{R}^2$ una proyección regular $\rho(x, y, z) = (x, y, 0)$. Por la construcción del nudo $\tilde{K}(p, q, r)$ tenemos que, si q es impar, éste se puede ver como la unión de los 6 arcos FA, AD, DC, CB, BE y EF tal que: FA, DC y BE , son los arcos del nudo, y AD, CB y EF , son los puentes. De otro lado, si q es par, éste se puede ver como la unión de los 6 arcos EA, AD, DC, CB, BF y EF tal que: BF, DC y EA , son los arcos, y AD, CB y EF , son los puentes.

Ahora, sea $C(p, q, r)$ el espacio cubierta ramificado doble de S^3 , ramificado sobre el nudo $\tilde{K}(p, q, r)$ y sea $P : C(p, q, r) \longrightarrow S^3$ el mapeo cubierta. La siguiente proposición se demostrará para q impar, ya que la prueba para q par es análoga.

Proposición 4.2.1 *Toda variedad $C(p, q, r)$ tiene la misma homología que un espacio lente.*

Prueba. Por Birman-Hilden [1] y Takahashi [33], tenemos que la 3-variedad $C(p, q, r)$ tiene diagrama de Heegaard de género 2, ver Figura 4-11. Sean l_a, l_b, m_1, m_2 y m_3 las curvas cerradas simples $P^{-1}(BE), P^{-1}(FA), P^{-1}(\rho(EF)), P^{-1}(\rho(AD))$ y $P^{-1}(\rho(CB))$, respectivamente. Entonces la unión $m_1 \cup m_2 \cup m_3$ es un sistema completo de meridianos del diagrama de Heegaard de $C(p, q, r)$.

Sean $B_0 = P^{-1}(B), B_1, \dots, B_{2n-1}$ todos los puntos de intersección del arco l_a con $m_1 \cup m_2 \cup m_3$, en el orden en que l_a los intersecta. Cada intersección tiene doble etiqueta cuando

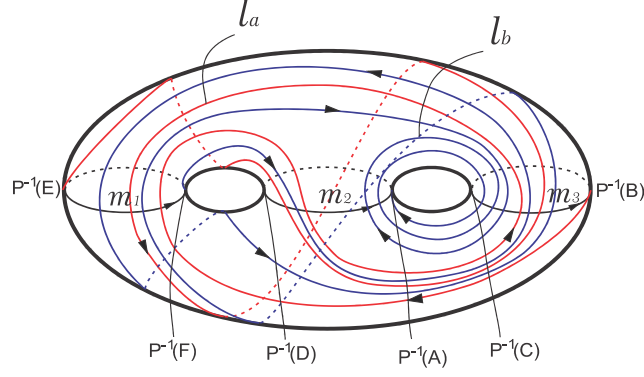


Figura 4-11: Diagrama de Heegaard de $\tilde{K}(5, 3, 3)$

la vemos en $\tilde{K}(p, q, r)$, excepto por los puntos de ramificación $P^{-1}(B)$ y $P^{-1}(E)$, además por la construcción de $K(p, q)$, ver [29], tenemos que $n = \frac{3p-1}{2}$. Entonces $P(B_n) = E$ y $P(B_{2n-i}) = P(B_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Por construcción de $K(p, q, r)$ tenemos que $P(B_1)$ está en $\rho(EF)$, y por tanto $P(B_{3i+1})$ también está en $\rho(EF)$, para $i = 0, 1, \dots, \frac{2n-2}{3} (= p-1)$; esto es, B_{3i+1} está en $m_1 = P^{-1}(\rho(EF))$.

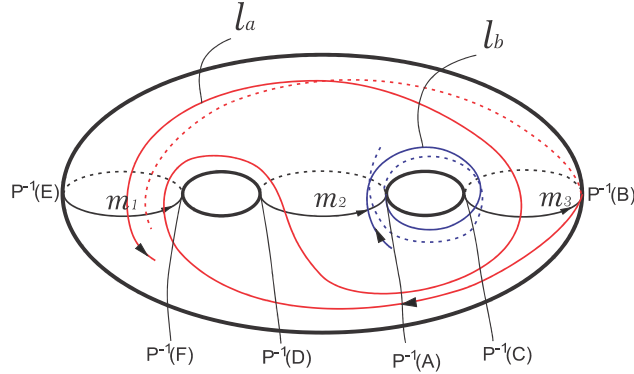


Figura 4-12: Diagrama de Heegaard

Como por la construcción de $\tilde{K}(p, q, r)$, $P(l_a) = BE$ intersecta los tres puentes en cada recorrido, sin cruzar dos veces consecutivas el mismo puente, tenemos que l_a intersecta del mismo modo el sistema de meridianos $\{m_1 \cup m_2 \cup m_3\}$, en $C(p, q, r)$. Podemos orientar l_a, l_b, m_1, m_2 y m_3 como en la Figura 4-12, de tal manera que para cada j , el número de intersección de l_a y el sistema completo de meridianos $\{m_1 \cup m_2 \cup m_3\}$ es igual a -1 en el punto B_{2j} y es igual a $+1$ en B_{2j+1} . Luego, como l_a intersecta a m_1 en puntos de la forma B_{3i+1} para $i = 0, 1, \dots, \frac{2n-2}{3}$, tenemos que l_a cruza a m_1 con número de intersección $+1$ en puntos de

la forma B_{6i+1} para $i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{3} \left(= \frac{p-1}{2} \right)$ y l_a cruza a m_1 con número de intersección -1 en puntos de la forma B_{6i+4} para $i = 0, 1, \dots, \frac{n-4}{3} \left(= \frac{p-3}{2} \right)$. Por lo tanto, el número de intersección $m_1 \cdot l_a$, el cual es igual a la suma de los número de intersecciones en cada paso de l_a por m_1 , es igual a $+1$. De igual modo tenemos que el número de intersección $m_1 \cdot l_b$ es igual a $+1$ o -1 , dependiendo cómo sea el número de intersección en el punto $P^{-1}(F)$, $+1$ o -1 respectivamente, ya que el número de veces que cruza l_a a m_1 es el mismo número de veces que cruza l_b a m_1 .

Definamos ahora

$$\alpha = m_2 \cdot l_a \quad \text{y} \quad \beta = m_2 \cdot l_b, \quad (4.2)$$

el número de intersecciones en $C(p, q, 0)$. Además, como l_a no cruza por ningún punto de ramificación de m_2 , tenemos que todos sus cruces por m_2 tienen doble codificación, por lo tanto se tiene que α es par y puesto que l_b cruza por el punto de ramificación $P^{-1}(A)$ de m_2 , el cual tiene una sola codificación, tenemos que β es impar. Luego, por la construcción de $\tilde{K}(p, q, r)$ tenemos que el número de intersección $m_2 \cdot l_a$ en $C(p, q, r)$ es α , y el de $m_2 \cdot l_b$ en $C(p, q, r)$ es $\beta + 2r$.

Ahora, como el diagrama de Heegaard de $C(p, q, r)$ es de género 2, tenemos que $\{m_1, m_2\}$ es un sistema de meridianos para este diagrama de Heegaard y además el grupo fundamental de $C(p, q, r)$, $\pi_1(C(p, q, r))$, tiene una presentación con dos generadores y dos relaciones obtenidas del diagrama de Heegaard, ver [12], de la siguiente forma: tomamos un conjunto generador $\{l_a, l_b\}$ para la presentación del grupo de $C(p, q, r)$ utilizando el diagrama de Heegaard y formamos palabras en l_a, l_b determinadas por m_i , $i = 1, 2$. Así,

$$\pi_1(C(p, q, r)) = \left\langle l_a, l_b \mid \begin{array}{l} l_b^{t_1} l_a^{e_1} \dots l_b^{e_{(p-1)/2}} l_a^{t_{(p-1)/2}} l_b^{2r + e_{((p-1)/2)+1}} l_a^{t_{((p-1)/2)+1}} \dots l_a^{t_{p-1}} l_b^{e_p}, \\ l_a^{r_1} l_b^{s_1} \dots l_a^p l_b^{s_p} \end{array} \right\rangle.$$

Donde $r_i, t_j, s_k, e_h = \pm 1$ para todo i, j, k, h , de modo que la segunda relación está dada por las intersecciones de m_1 con l_a y m_1 con l_b y la primera relación esta dada por las intersecciones de m_2 con l_a y m_2 con l_b , la cual está dada por α y $\beta + 2r$ respectivamente, donde α y β están dados en (4.2), esto es, α es par y β es impar, y $r \in \mathbb{Z}$.

Luego, si el número de intersección de l_b en $P^{-1}(F)$ es $+1$, tenemos que $m_1 \cdot l_a = m_1 \cdot l_b = +1$, de lo contrario $m_1 \cdot l_a = -m_1 \cdot l_b$; de modo que el primer grupo de homología de $C(p, q, r)$,

$H_1(C(p, q, r))$, que es la abelianización de $\pi_1(C(p, q, r))$, ver Nota B.0.2, es

$$\begin{aligned}
H_1(C(p, q, r)) &= \pi_1(C(p, q, r)) / [\pi_1(C(p, q, r)), \pi_1(C(p, q, r))] \\
&= \left\langle l_a, l_b \mid \begin{array}{l} l_b^{t_1} l_a^{e_1} \dots l_b^{e_{(p-1)/2}} l_a^{t_{(p-1)/2}} l_b^{2r+e_{((p-1)/2)+1}} l_a^{t_{((p-1)/2)+1}} \dots l_a^{t_{p-1}} l_b^{e_p}, \\ l_a^{s_1} l_b^{s_1} \dots l_a^{r_p} l_b^{s_p}, l_a^{+1} l_b^{+1} l_a^{-1} l_b^{-1} \end{array} \right\rangle \\
&= \begin{cases} \langle l_a, l_b \mid l_a^{+1} l_b^{+1}, l_a^\alpha l_b^{\beta+2r} \rangle & \text{si } m_1 \cdot l_a = m_1 \cdot l_b \\ \langle l_a, l_b \mid l_a^{+1} l_b^{-1}, l_a^\alpha l_b^{\beta+2r} \rangle & \text{si } m_1 \cdot l_a = -m_1 \cdot l_b \end{cases}.
\end{aligned}$$

Ahora, si $m_1 \cdot l_a = m_1 \cdot l_b$ tenemos, usando la notación aditiva para grupos abelianos, que:

$$\begin{aligned}
H_1(C(p, q, r)) &= \langle l_a, l_b \mid l_a + l_b = 0, \alpha l_a + (\beta + 2r) l_b = 0 \rangle \\
&= \langle l_a, l_b \mid l_a = -l_b, \alpha l_a + (\beta + 2r) l_b = 0 \rangle \\
&= \langle l_a \mid \alpha l_a - (\beta + 2r) l_a = 0 \rangle \\
&= \langle l_a \mid (\alpha - (\beta + 2r)) l_a = 0 \rangle \\
&\cong \mathbb{Z}_{\alpha - (\beta + 2r)},
\end{aligned}$$

y si $m_1 \cdot l_a = -m_1 \cdot l_b$ tenemos que

$$H_1(C(p, q, r)) \cong \mathbb{Z}_{\alpha + (\beta + 2r)}.$$

Por lo tanto, tenemos que la variedad $C(p, q, r)$ representa un espacio lenticular homológico, ver Apéndice B. ■

El Teorema a continuación garantiza, mediante nuestra construcción, la existencia de nudos de 3-puentes que no son de 2-puentes, ya que dado un nudo de 2-puentes $K(p, q)$, existe un entero $r \in \mathbb{Z}$ tal que $C(p, q, r)$ y $C(p, q, r + 1)$ son 3-esferas homológicas, ver Definición B.0.5. Por lo tanto $\tilde{K}(p, q, r)$ y $\tilde{K}(p, q, r + 1)$ son nudos de 3-puentes.

Teorema 4.2.2 *Dado un nudo de 2-puentes $K(p, q)$, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$C(p, q, r) \quad \text{y} \quad C(p, q, r + 1)$$

son 3-esferas homológicas.

Prueba. Por la prueba de la proposición anterior, tenemos que α es par y β es impar. Entonces escogamos $r = \frac{\alpha - \beta - 1}{2}$ si $m_1 \cdot l_a = m_1 \cdot l_b$ ó $r = \frac{-(\alpha + \beta + 1)}{2}$ si $m_1 \cdot l_a = -m_1 \cdot l_b$; de modo que:

1. Si $m_1 \cdot l_a = m_1 \cdot l_b$, tenemos por la proposición anterior, que $H_1(C(p, q, r)) \cong \mathbb{Z}_{\alpha - (\beta + 2r)}$;

luego, como $r = \frac{\alpha-\beta-1}{2}$ se sigue que $\mathbb{Z}_{\alpha-(\beta+2r)} = \mathbb{Z}_1$ y además,

$$H_1(C(p, q, r)) \cong \mathbb{Z}_{\alpha-(\beta+2r)} = \mathbb{Z}_{\alpha-(\beta+2(\frac{\alpha-\beta-1}{2}))} = \mathbb{Z}_{\alpha-(\beta+\alpha-\beta-1)} = \mathbb{Z}_1$$

y similarmente,

$$H_1(C(p, q, r+1)) \cong \mathbb{Z}_{\alpha-(\beta+2(r+1))} = \mathbb{Z}_{\alpha-(\beta+2(\frac{\alpha-\beta-1}{2}+1))} = \mathbb{Z}_{\alpha-(\beta+\alpha-\beta-1+2)} = \mathbb{Z}_{-1}.$$

Por lo tanto, como $1\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ y $(-1)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, tenemos que $\{0\} \cong \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_1$ y $\{0\} \cong \mathbb{Z}/(-1)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{-1}$; así

$$H_1(C(p, q, r)) \cong \{0\} \cong H_1(C(p, q, r+1)).$$

2. Del mismo modo, si $m_1 \cdot l_a = -m_1 \cdot l_b$, entonces $H_1(C(p, q, r)) \cong \mathbb{Z}_{\alpha+(\beta+2r)}$; luego, tomando $r = \frac{-(\alpha+\beta+1)}{2}$, se sigue que $H_1(C(p, q, r)) \cong \mathbb{Z}_{-1}$ y $H_1(C(p, q, r+1)) \cong \mathbb{Z}_1$.

Por lo tanto, se tiene que $C(p, q, r)$ y $C(p, q, r+1)$ son 3-esferas homológicas, lo cual garantiza que $\tilde{K}(p, q, r)$ y $\tilde{K}(p, q, r+1)$ son nudos de 3-puentes. ■

4.3 Imagen espejo

Usando la presentación en mariposa del nudo de 3-puentes $K = \tilde{K}(p, q, r)$, daremos la presentación en mariposa de su imagen espejo, denotada $-K$, haciendo uso del resultado que aparece en [35].

Por el Lema 4.1.2 tenemos que, dado un nudo de 3-puentes $\tilde{K}(p, q, r)$, su presentación en mariposa es de la forma $\left(\frac{p'}{p'}, \frac{q'}{1}, \frac{s'}{l}\right)$, donde $p' = p+n+2|r|$, $q' = p+n+2|r|-1$ y $s' = p+n+1$ para $r \in \mathbb{Z}$.

Lema 4.3.1 *Sea $K = \tilde{K}(p, q, r)$, $r > 0$, un nudo 3-puentes y sea $\left(\frac{p'}{p'}, \frac{q'}{1}, \frac{s'}{l}\right)$ su presentación en mariposa. Entonces la imagen espejo $-K$ de K tiene presentación en mariposa dada por $\left(\frac{p'}{2r-1}, \frac{q'}{p+n}, \frac{s'}{q+n+2-l'}\right)$, donde l' está definido como en el Lema 4.1.2.*

Prueba. Sea $\left(\frac{p'}{\hat{n}}, \frac{q'}{\hat{m}}, \frac{s'}{\hat{l}}\right)$ la presentación en mariposa de la imagen espejo $-K$ de K . Entonces por [35], tenemos que:

Como $p' = p + n + 2r < q' + s' = 2(p + n + r)$, se sigue que

$$\begin{aligned}\widehat{n} &= ((q' - s' - p') \bmod p') + 1 \\ &= ((p + n + 2r - 1 - p - n - 1 - p - n - 2r) \bmod p') + 1 \\ &= ((-p - n - 2) \bmod p') + 1,\end{aligned}$$

ya que $-p - n - 2 = (-1)(p + n + 2r) + (2r - 2)$, con $0 \leq 2r - 2 < p + n + 2r = p'$, tenemos

$$\widehat{n} = (2r - 2) + 1 = 2r - 1.$$

$$\begin{aligned}\widehat{m} &= ((s' - p' - 1) \bmod q') + 1 \\ &= ((p + n + 1 - p - n - 2r - 1) \bmod q') + 1 \\ &= ((-2r) \bmod q') + 1,\end{aligned}$$

además, como $-2r = (-1)(p + n + 2r - 1) + (p + n - 1)$, con $0 \leq p + n - 1 < p + n + 2r - 1 = q'$, tenemos

$$\widehat{m} = (p + n - 1) + 1 = p + n.$$

$$\begin{aligned}\widehat{l} &= ((p' - q' - l) \bmod s') + 1 \\ &= ((p + n + 2r - p - n - 2r + 1 - p + q - l' - 1) \bmod s') + 1 \\ &= ((q - p - l') \bmod s') + 1\end{aligned}$$

y como $q - p - l' = (-1)(p + n + 1) + (q + n + 1 - l')$, con $0 \leq q + n + 1 - l' < p + n + 1$, ya que $q < p$ y $n + 1 \geq l'$, tenemos

$$\widehat{l} = (q + n + 1 - l') + 1 = q + n + 2 - l'.$$

Así, obtenemos la presentación deseada. ■

Ejemplo 4.3.1 Dado $K = \widetilde{K}(7, 3, 3)$, tenemos por el Ejemplo 4.1.2 que su presentación en mariposa está dada por $(\frac{18}{18}, \frac{17}{1}, \frac{13}{8})$, con $n = 5$ y $l' = 3$; luego la presentación como 3-mariposa de $-K$ está dada por $(\frac{18}{5}, \frac{17}{12}, \frac{13}{7})$, de acuerdo con la afirmación anterior. Además, si hallamos la presentación como 3-mariposa de K , a través de R_E obtenemos la siguiente presentación, ver Figura 4-13.

Cuando consideramos el caso $r < 0$ en la afirmación anterior, la presentación en mariposa de $-K$ queda de la forma $(\frac{p'}{n}, \frac{q'}{m}, \frac{s'}{l})$, donde $\widehat{n} = 2|r| - 1$, $\widehat{m} = p + n$ y $\widehat{l} = p - q + 2 + l'$.

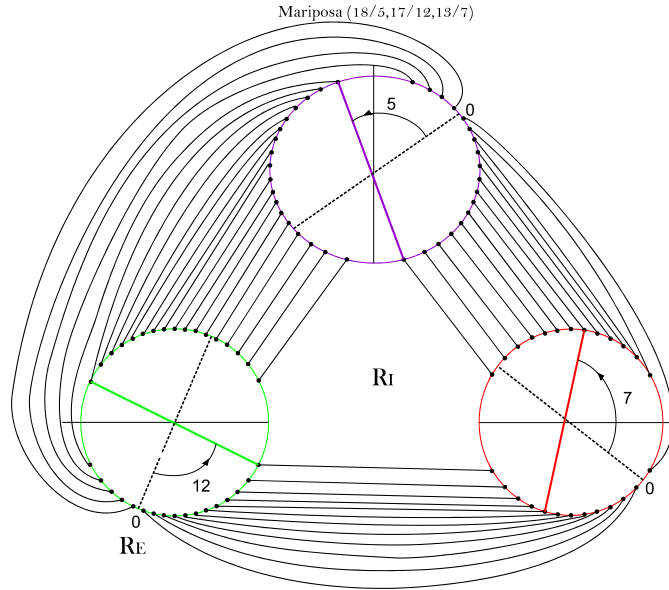


Figura 4-13: Mariposa $(\frac{18}{5}, \frac{17}{12}, \frac{13}{7})$ a través de R_E

4.4 Rosetas

A continuación definiremos otra forma de representar enlaces de 3-puentes, a la cual llamaremos *rosetas de n -niveles*, con $n \in \mathbb{N}$.

Comenzaremos definiendo las rosetas de 1-nivel.

Definición 4.4.1 Dado un enlace con una proyección como en la Figura 4-14, donde $t_i = \frac{1}{[n_i]}$, $n_i \in \mathbb{Z}$, es un tangle vertical para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, diremos que el nudo está representado en forma de **rosetas de 1-nivel**.

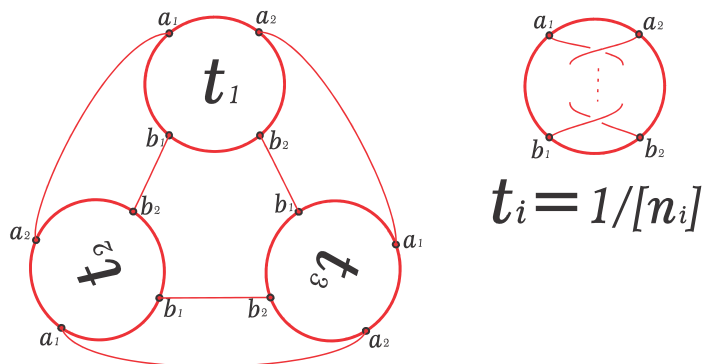


Figura 4-14: Rosetas de 1-nivel

Lema 4.4.1 *Todos los enlaces pretzel se pueden ver como rosetas de 1-nivel y todas las rosetas de 1-nivel son enlaces pretzel, ver Figura 4-15. Además, las rosetas de 1-nivel, con al menos un $t_i = \frac{1}{[\pm 1]}$ o $\frac{1}{[\infty]}$, son enlaces racionales.*

Prueba. Ver Figura 4-15. ■

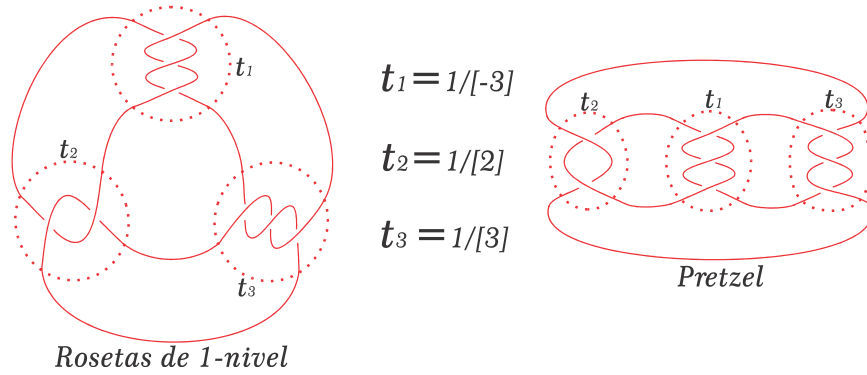


Figura 4-15: Equivalencia entre rosetas de 1-nivel y pretzel

De otro lado, como todo pretzel se puede ver como un 6-plats, ver Figura 4-16, los cuales son enlaces de tres puentes, tenemos que las rosetas de 1-nivel también se pueden ver como 6-plats, y así son ejemplos simples de enlaces de tres puentes.

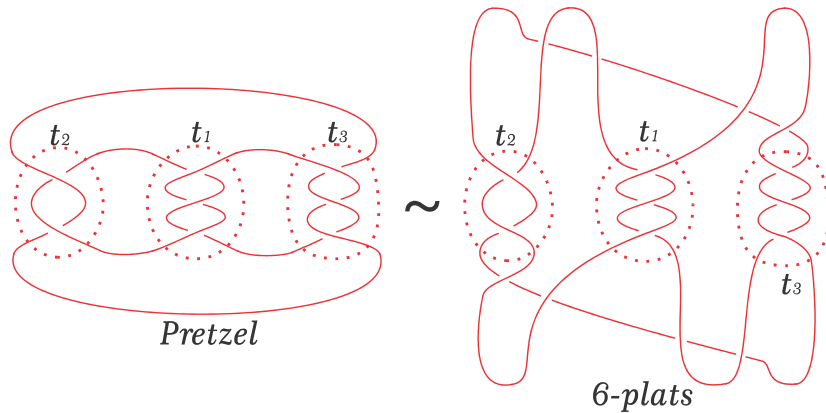


Figura 4-16: Equivalencia entre los pretzel y 6-plats

Ahora, si en las rosetas de 1-nivel, permitimos que $t_i = [n_i]$, $n_i \in \mathbb{Z}$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, sean tangles enteros, tenemos que la roseta es un enlace racional, ver Figura 4-17, por lo tanto no se considerarán estos casos como rosetas de 1-nivel. Además, si permitimos que $t_i = [n_i]$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$, tenemos que las rosetas de 1-nivel tendrían la siguiente presentación, ver Figura 4-18.

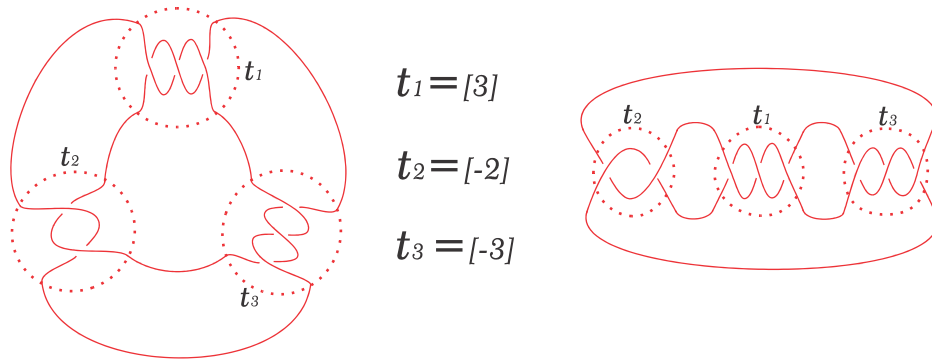


Figura 4-17: Enlace racional

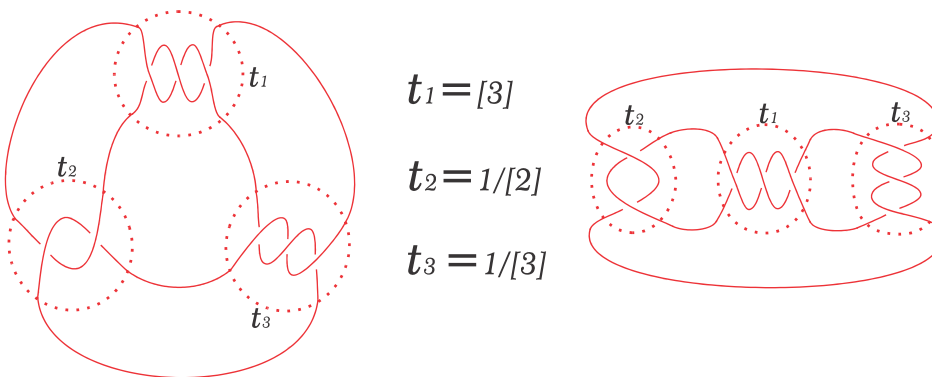


Figura 4-18: Rosetas con un tangle entero

Definición 4.4.2 Dado un enlace el cual tiene una proyección como en la Figura 4-19, donde $t_i = \frac{1}{[n_i]}$, $n_i \in \mathbb{Z}$, es un tangle vertical para todo $i \in \{1, \dots, 6\}$. Diremos que el nudo está representado en forma de **rosetas de 2-niveles**.

Además, estas rosetas se forman a partir de 6-cuerdas, donde cada nivel de la roseta tiene la forma de un pretzel, de modo que ésta se puede ver como si pegáramos dos pretzel de la siguiente forma, ver Figura 4-20.

Esta forma de representar las rosetas de 2-niveles, se deriva de la idea de J. H. Conway de obtener diagramas de enlaces por poliedros, al sustituir los vértices del poliedro por tangles enteros o verticales, ver [6]. En el trabajo de Conway, el poliedro que representa a las rosetas de 2-niveles se denota por 6^* , pero a diferencia de Conway, nosotros exigimos, para las rosetas de 2-niveles, y en general para las rosetas de n -niveles, que los vértices de este poliedro 6^* de Conway, sean tangles verticales.

En trabajos posteriores investigaremos la forma de pasar de la presentación en rosetas de un

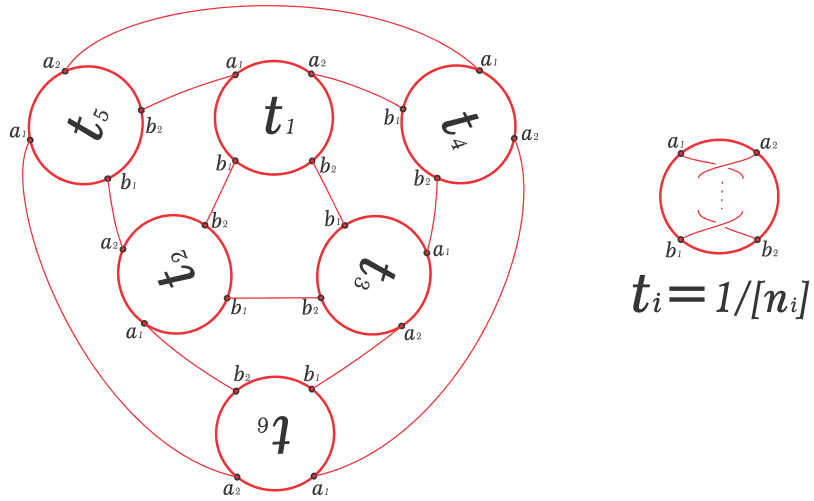


Figura 4-19: Rosetas de 2-niveles

enlace de 3-puentes a la presentación en 3-mariposa y recíprocamente. Igualmente, estudiaremos familias de enlaces cuya presentación en rosetas tenga una simetría particular.

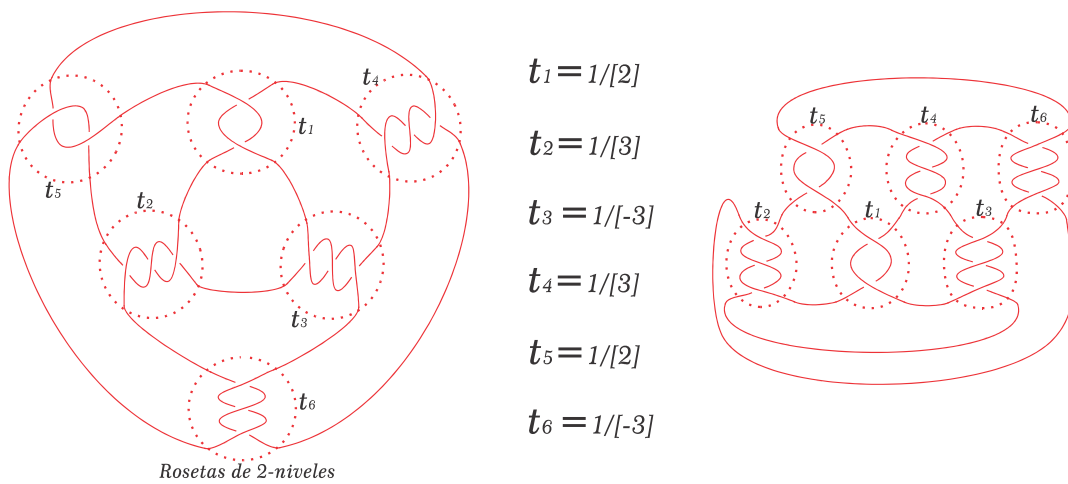


Figura 4-20: Equivalencia de diagramas

Apéndice A

Fracciones continuas

Es conocido que todo número racional puede ser considerado como una fracción continua finita, con todos los numeradores iguales a uno, es decir, como una expresión aritmética del tipo:

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] := a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}} \quad (\text{A.1})$$

para $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y n par o impar. Como en el caso de tangles racionales, permitimos que el término a_1 sea cero. La *longitud* de la fracción continua se define como el número de enteros a_i que aparecen en (A.1), incluyendo $a_1 = 0$. Notemos que si $a_1 \neq 0$, entonces el valor absoluto de la fracción continua es mayor que uno y si $a_1 = 0$ es menor que uno.

En este Apéndice probaremos la bien conocida forma canónica para fracciones continuas. El algoritmo que se elabora trabaja en paralelo con el algoritmo utilizado en la forma canónica de tangles racionales en la Sección 2.2.3. Las siguientes afirmaciones acerca de fracciones continuas son realmente sencillas. Para un estudio mas detallado, ver [4].

Lema A.0.2 *Sea $\frac{p}{q}$ cualquier número racional. Entonces*

1. *Existen $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tales que $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$,*
2. *$\frac{p}{q} \pm 1 = [a_1 \pm 1, a_2, \dots, a_n]$,*
3. *$\frac{q}{p} = [0, a_1, a_2, \dots, a_n]$,*
4. *$-\frac{p}{q} = [-a_1, -a_2, \dots, -a_n]$,*
5. *Si $\frac{r}{d} = [a_{i+1}, \dots, a_n]$, entonces escribimos $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_i, \frac{r}{d}]$,*
6. *Si $a_i = b_i + c_i$ y $\frac{s}{u} = [c_i, a_{i+1}, \dots, a_n]$, entonces $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + \frac{s}{u}]$ y*

$$\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + c_i, a_{i+1}, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, 0, c_i, a_{i+1}, \dots, a_n].$$

Permitimos en el numeral (5.), reescribir la fracción continua como una fracción continua con 0 en una posición $j > 1$, ya que será de gran importancia para la prueba de que toda

fracción continua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ se puede ver como una fracción continua con todos los enteros a_i mayores que 0, o todos menores que 0, la cual definiremos como forma canónica.

Prueba. 1. Sea $\frac{p}{q}$ un número racional, y supongamos sin pérdida de generalidad que $q > 0$. Entonces por el algoritmo de Euclides existen $a_1 \in \mathbb{Z}$ y $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, a_1 puede ser cero en el caso que tengamos $q > p$, tal que se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} p &= qa_1 + r_1 && \text{donde } 0 < r_1 < q, \\ q &= r_1a_2 + r_2 && \text{donde } 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2a_3 + r_3 && \text{donde } 0 < r_3 < r_2, \\ &\vdots \\ r_{n-3} &= r_{n-2}a_{n-1} + r_{n-1} && \text{donde } 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\ r_{n-2} &= r_{n-1}a_n + 0. \end{aligned}$$

Luego, podemos reescribir las ecuaciones anteriores de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_1 + \frac{r_1}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} \\ \frac{q}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} \\ \frac{r_1}{r_2} &= a_3 + \frac{r_3}{r_2} = a_3 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}} \\ &\vdots \\ \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_n \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo la última ecuación en la anterior e iterando el proceso hasta llegar a la primera ecuación, obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

2. Por (1) tenemos que $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, de modo que $\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}$ y

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} \pm 1 &= \left(a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}} \right) \pm 1 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}} \pm 1 \\ &= a_1 \pm 1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}} = [a_1 \pm 1, a_2, \dots, a_n]. \end{aligned}$$

3. Como $\frac{q}{p} = \frac{1}{\frac{p}{q}}$, tenemos entonces que:

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = 0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = [0, a_1, a_2, \dots, a_n].$$

4. Como $\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} -\frac{p}{q} &= -\left(a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}\right) = -a_1 - \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}} \\ &= -a_1 + \frac{1}{-\left(a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}\right)} = \dots = -a_1 + \frac{1}{-a_2 + \dots + \frac{1}{-a_{n-1} + \frac{1}{-a_n}}} \\ &= [-a_1, -a_2, \dots, -a_n]. \end{aligned}$$

5. Si $\frac{r}{d} = [a_{i+1}, \dots, a_n] = a_{i+1} + \frac{1}{a_{i+2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}$, entonces como

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_i + \frac{1}{a_{i+1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}},$$

se tiene que:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_i + \frac{1}{\left(a_{i+1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}\right)}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_i + \frac{r}{d}}} = \left[a_1, \dots, a_i, \frac{r}{d}\right].$$

6. Si $a_i = b_i + c_i$ y $\frac{s}{u} = [c_i, a_{i+1}, \dots, a_n]$, tenemos que:

$$\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + c_i, a_{i+1}, \dots, a_n].$$

Además, por (2) tenemos que $b_i + \frac{s}{u} = [b_i + c_i, a_{i+1}, \dots, a_n] = [a_i, a_{i+1}, \dots, a_n]$. De modo que por (5) tenemos $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_{i-1}, \frac{s}{u} + b_i]$.

Ahora, como

$$\left[a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + \frac{s}{u}\right] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{i-1} + \frac{1}{b_i + \frac{s}{u}}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{i-1} + \frac{1}{b_i + \frac{s}{u}}}}$$

y como (3) implica que $\frac{u}{s} = [0, c_i, a_{i+1}, \dots, a_n]$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + c_i, a_{i+1}, \dots, a_n] = \left[a_1, \dots, a_{i-1}, \frac{s}{u} + b_i \right] \\ &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{i-1} + \frac{1}{b_i + \frac{u}{s}}}} = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, 0, c_i, a_{i+1}, \dots, a_n]. \end{aligned}$$

■

Nota A.0.1 Si una fracción continua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ tiene longitud par, entonces siempre podemos llevarla a una de longitud impar, haciendo transformaciones en el último término, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, \dots, a_n] &= [a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1], \quad \text{para } a_n > 0 \text{ y} \\ [a_1, a_2, \dots, a_n] &= [a_1, a_2, \dots, a_n + 1, -1], \quad \text{para } a_n < 0. \end{aligned}$$

Además, diremos que una fracción continua es positiva o negativa, si todos los términos en esta expresión son positivos o negativos, respectivamente.

Definición A.0.3 Una fracción continua $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]$ se dice que está en **forma canónica**, si es positiva o negativa y m es impar.

Proposición A.0.3 Toda fracción continua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ se puede transformar a una única forma canónica, con todos los signos de los enteros a_j iguales al signo del primer término distinto de cero.

Prueba. Sea $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ y supongamos que los a_j no son todos del mismo signo. Ahora, supongamos que a_{i-1}, a_i son el primer par de a_j adyacentes de signos opuestos y además que $a_{i-1} > 0$. Entonces, tenemos por el Lema A.0.2(6) que:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= [a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, \dots, (a_{i-1} - 1) + 1, -1 + (a_i + 1), \dots, a_n] \\ &= [a_1, \dots, (a_{i-1} - 1), 0, 1, -1 + (a_i + 1), \dots, a_n] \\ &= \left[a_1, \dots, (a_{i-1} - 1), 0, 1, -1 + \frac{r}{l} \right], \end{aligned}$$

donde $\frac{r}{l} = [a_i + 1, a_{i+1}, \dots, a_n]$. Luego, como

$$\left[0, 1, -1 + \frac{r}{l} \right] = \frac{1}{1 + \frac{1}{-1 + \frac{r}{l}}} = 1 - \frac{l}{r} = 1 + \frac{1}{-\frac{r}{l}} = \left[1, -\frac{r}{l} \right],$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \left[a_1, \dots, (a_{i-1} - 1), 0, 1, -1 + \frac{r}{l} \right] = \left[a_1, \dots, (a_{i-1} - 1), 1, -\frac{r}{l} \right] \\ &= \left[a_1, \dots, (a_{i-1} - 1), 1, -(a_i + 1), \dots, -a_n \right].\end{aligned}$$

Luego como $a_i < 0$, tenemos que $-(a_i + 1) \geq 0$; de modo que cambiamos el signo de la entrada negativa. Continuando de forma inductiva, eliminamos en la fracción continua todas las entradas con signos negativos. En el caso $a_{i-1} < 0$ procedemos de la siguiente forma:

$$\left[a_1, \dots, (a_{i-1} + 1) - 1, 1 + (a_i - 1), \dots, a_n \right] = \left[a_1, \dots, a_{i-1} + 1, 0, -1, 1 + (a_i - 1), \dots, a_n \right]$$

y usamos la siguiente identidad

$$\left[0, -1, 1 + \frac{r}{l} \right] = \frac{1}{-1 + \frac{1}{1 + \frac{r}{l}}} = -1 - \frac{l}{r} = -1 + \frac{1}{-\frac{r}{l}} = \left[-1, -\frac{r}{l} \right].$$

De este modo podemos eliminar todas las entradas de la fracción continua con signos positivos. Finalmente, por Nota A.0.1 tenemos que la longitud m de la fracción continua $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]$ se puede suponer impar y la unicidad de la fracción continua final se sigue del algoritmo de Euclides. ■

Otro hecho interesante es que cualquier fracción continua positiva puede ser escrita como una fracción continua con denominadores enteros pares.

Proposición A.0.4 *Todo número racional $\frac{p}{q}$, con p, q impares se puede expresar como una fracción continua, con todas las entradas pares, excepto la primera.*

Prueba. Sea $\frac{p}{q}$ un número racional arbitrario, con p, q impares. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $q > 0$, pues si q es menor que cero, utilizamos su valor absoluto y agregamos el signo negativo a p .

Afirmación: Sea $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q > 0$. Entonces existen $a, r \in \mathbb{Z}$ donde podemos tomar a par o a impar, según sea necesario y $|r| < q$ tal que $p = aq + r$.

Caso a par: En efecto, por el algoritmo de la división tenemos que existen $a_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $p = a_1q + r_1$ y $0 \leq r_1 < q$. Ahora, si a_1 es par, basta tomar $a = a_1$ y $r = r_1$. Si a_1 es impar, tenemos que existe $s \in \mathbb{Z}^+$ con $s < q$ tal que $r_1 + s = q$, ya que $r_1 < q$. De modo que

$$p = a_1q + r_1 = a_1q + (r_1 + s) - s = a_1q + q - s = (a_1 + 1)q + (-s) \quad \text{y} \quad |-s| = s < q,$$

Luego tomamos $a = a_1 + 1$, el cual es par y $r = -s$.

Caso a impar: Para este caso hacemos un procedimiento análogo al anterior.▲

Ahora, como p, q son impares, por la afirmación anterior, existen $a_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ con a_1 impar, tales que $p = a_1q + r_1$ con $|r_1| < q$, luego como q es impar, tenemos que a_1q es impar y por tanto r_1 tiene que ser par, ya que p es impar y $\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}$. Del mismo modo, podemos suponer $r_1 > 0$ tal que para $(\pm q), r_1$ existen por afirmación $a_2, r_2 \in \mathbb{Z}$ con a_2 par, tales que $(\pm q) = a_2r_1 + r_2$ con $|r_2| < r_1$, luego como r_1 es par, tenemos que a_2r_1 es par y por tanto r_2 tiene que ser impar, ya que $(\pm q)$ es impar y $\frac{\pm q}{r_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$; siguiendo el mismo procedimiento, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} && \text{con } |r_1| < q \text{ y } q > 0, \\ \frac{\pm q}{r_1} &= a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} && \text{con } |r_2| < r_1 \text{ y } r_1 > 0, \\ &\vdots \\ \frac{\pm r_{n-3}}{r_{n-2}} &= a_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}} && \text{con } |r_{n-1}| < r_{n-2} \text{ y } r_{n-2} > 0, \\ \frac{\pm r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_n + 0 && \text{y } r_{n-1} > 0, \end{aligned}$$

ya que $0 \leq |r_{n-1}| < |r_{n-2}| < \dots < |r_1| < q$. Luego tenemos que

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]],$$

donde a_1 es impar y todos los a_j para $j = 2, \dots, n$ son pares. ■

Ahora, presentamos una forma de calcular fracciones continuas vía matrices 2×2 .

Interpretación Matricial para Fracciones Continuas

Sea $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_n]$. Asociamos a cada fracción de la forma $\frac{p}{q}$ el vector columna $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, definimos las matrices $M(a_i) = \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y llamemos $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces, tenemos de esta notación que:

$$[a_1, \dots, a_n] = M(a_1)M(a_2) \cdots M(a_n)v.$$

Otra forma de ver las fracciones continuas a través de matrices está dada por el siguiente lema.

Lema A.0.5 Dada la fracción continua $\frac{\gamma}{\delta} = [c_n, \dots, c_1]$, con n impar, entonces

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_3 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_{n-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_{n-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_n & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Prueba. Haremos la prueba por inducción. Si $n = 1$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{bmatrix}$ tiene la forma $\frac{c_1}{1} = c_1$ como se requiere. Supongamos que el resultado es cierto para n y veamos que es cierto para $n + 2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & c_{n-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & c_{n-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_{n+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_{n+2} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + c_{n+1}c_{n+2} & c_{n+1} \\ c_{n+2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \alpha c_{n+1}c_{n+2} + \beta c_{n+2} & \alpha c_{n+1} + \beta \\ \gamma + \gamma c_{n+1}c_{n+2} + \delta c_{n+2} & \gamma c_{n+1} + \delta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma + \gamma c_{n+1}c_{n+2} + \delta c_{n+2}}{\gamma c_{n+1} + \delta} &= c_{n+2} + \frac{\gamma}{\gamma c_{n+1} + \delta} = c_{n+2} + \frac{\gamma}{c_{n+1} + \frac{1}{\frac{\delta}{\gamma}}} \\ &= c_{n+2} + \frac{1}{c_{n+1} + \frac{1}{c_n + \frac{1}{\dots + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_1}}}}}. \end{aligned}$$

Luego el resultado es cierto para $n + 2$ y por lo tanto para todo n impar. ■

Apéndice B

Topología

Un espacio topológico X se dice *simplemente conexo* si es conexo por caminos y $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$, para algún $x_0 \in X$, donde $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo fundamental de X o primer grupo de homotopía de X con punto base x_0 . De esta definición tenemos un resultado muy importante.

Teorema B.0.6 *Si $n \geq 2$, la n -esfera S^n es simplemente conexa.*

Si X es un espacio topológico conexo por caminos, llamaremos a

$$H_1(X) = \pi_1(X, x_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \quad (\text{B.1})$$

el *primer grupo de homología* de X . De modo que por el Teorema B.0.6 y (B.1) obtenemos, en particular, que $\pi_1(S^3, x_0) = \{0\}$ y $H_1(S^3) = \{0\}$.

Nota B.0.2 *Si G es un grupo, definimos la abelianización de G como el grupo obtenido al hacer el cociente de G por su conmutador $[G, G]$, esto es, $G/[G, G]$.*

La notación $H_1(X; \mathbb{Z})$ se usa para representar el primer grupo de homología de X con coeficientes en \mathbb{Z} .

Definición B.0.4 *Una n -variedad es un espacio Hausdorff, segundo contable, tal que cada punto en M tiene una vecindad homeomorfa a $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$; equivalentemente, cada punto en M tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^n . Recordemos que D y \mathbb{R}^n son espacios homeomorfos mediante el mapeo $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $h(x) = \frac{x}{1 - \|x\|}$.*

Una n -variedad con frontera M es un espacio Hausdorff, segundo contable, tal que cada punto en M tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^n o al semiespacio

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

*El conjunto de puntos en M teniendo la última propiedad, pero no la primera, forman una $(n - 1)$ -variedad, llamada la **frontera** de M , la cual se denota como ∂M .*

Una n -variedad M compacta, orientable y sin frontera, diremos que es una n -variedad *cerrada*.

Definición B.0.5 Una 3-variedad cerrada y conexa por caminos M se denomina una **esfera homológica**, si $H_1(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$.

Nota B.0.3 Todos los grupos de homología de una esfera homológica M de dimensión 3, coinciden con los correspondientes grupos de homología de S^3 .

Si una 3-variedad cerrada y conexa por caminos tiene primer grupo de homología con coeficientes en \mathbb{Z} isomorfo al grupo de homología de un espacio lente, esta es llamada un *espacio lenticular homológico*.

Descomposición y diagramas de Heegaard

Para un estudio más detallado sobre descomposición y diagramas de Heegaard, ver [12].

Una *superficie* S es una 2-variedad conexa y compacta. Además, la superficie S es *orientable* si y sólo si ésta no contiene una banda de Möbius.

El teorema de clasificación de superficies orientables establece que toda superficie orientable S es de la forma $S^2 \# nT$ para algún $n \geq 0$, donde T es el toro; es decir, n asas pegadas a la 2-esfera. El número n es llamado el *género* de la superficie S .

Un *cuerpo con asas* H es una 3-variedad formada por su interior H° y su frontera, la cual consiste de una superficie orientable, es decir, $H = H^\circ \cup \partial H$, con ∂H una superficie orientable. El *género* de un cuerpo con asas H se define como el género de la superficie ∂H .

Una *descomposición de Heegaard* de una 3-variedad M es una descomposición de M en dos cuerpos con asas H_1, H_2 de géneros iguales, cuyas superficies están identificadas vía un homeomorfismo $h : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$.

El *género de Heegaard* de una 3-variedad M es el mínimo número entero $n \geq 0$, para el cual M se puede descomponer en dos cuerpos con asas de género n , vía una descomposición de Heegaard.

Supongamos que M es una 3-variedad de género Heegaard n y que los cuerpos con asas de género n , H_1 y H_2 con superficies identificadas mediante el homeomorfismo $h : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ constituyen una descomposición de Heegaard de M . Entonces el *diagrama de Heegaard* de M es H_2 junto con las curvas simples cerradas $h(m_1), h(m_2), \dots, h(m_n)$, donde m_1, m_2, \dots, m_n son los meridianos canónicos escogidos sobre H_1 .

En el libro de topología de J. Stillwell, ver [32], se prueba que basta conocer $h(m_i)$ sobre H_2 para construir una 3-variedad homeomorfa a M . Es decir, si $h^* : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$ con $h^*(m_i) = h(m_i)$ para $1 \leq i \leq n$, entonces

$$H_1 \cup_{h^*} H_2 \cong H_1 \cup_h H_2 = M.$$

El grupo fundamental de un toro T es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, es decir, el grupo abeliano libre con dos generadores. Si fijamos un punto x_0 sobre el toro T y denotamos la longitud canónica y el

meridiano canónico con orientaciones, pasando a través de x_0 como l y m respectivamente, entonces l y m generan el grupo fundamental $\pi_1(T, x_0)$, ver Figura 3-10(a).

Por lo tanto todo lazo cerrado en T basado en x_0 está en la clase de homotopía de $al + bm$, con a, b en \mathbb{Z} , donde los signos de a y b representan las direcciones en las cuales m y l son atravesados. Si $\gcd(p, q) = 1$, entonces un miembro de la clase del lazo $[pm + ql]$ es el nudo $T(p, q)$. Notemos que los nudos $T(1, 0)$ y $T(0, 1)$ son longitudes y meridianos, respectivamente.

Cirugía de Dehn

El concepto de *cirugía* fue introducido primero por *Dehn* en 1910, en su construcción de la *Homología de la Esfera de Poincaré*. Este es un método que permite construir 3-variedades removiendo un número finito de toros sólidos mutuamente disjuntos de S^3 y luego estos toros se vuelven a *pegar*, de manera diferente a como lo estaban antes de ser removidos.

De manera más precisa, seleccionemos y removamos n toros sólidos mutuamente disjuntos T_1, T_2, \dots, T_n (posiblemente anudados o enlazados) de S^3 y tomemos la clausura

$$\overline{S^3 - (T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n)}.$$

Supongamos que existe un homeomorfismo

$$h : \partial T_1 \cup \partial T_2 \cup \dots \cup \partial T_n \longrightarrow \partial T_1 \cup \partial T_2 \cup \dots \cup \partial T_n$$

tal que cada $h|_{\partial T_i}$ es un homeomorfismo $h_i : \partial T_i \longrightarrow \partial T_i$ ($1 \leq i \leq n$). Entonces h describe implícitamente cómo los T_1, \dots, T_n se vuelven a pegar dentro de $\overline{S^3 - (T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n)}$: simplemente identificamos las fronteras de los T_i vía los h_i . La 3-variedad resultante

$$M = \overline{S^3 - (T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n)} \underset{h}{\cup} (T_1 \cup \dots \cup T_n)$$

se dice que ha sido obtenida a partir de una cirugía de Dehn sobre S^3 .

La 3-variedad M está completamente determinada por los T_1, T_2, \dots, T_n y h , luego las *instrucciones de cirugía* son introducidas para presentar esta información en un formato útil y conciso. Estas instrucciones aparecen primero en [28], pero notaciones equivalentes aparecen en otros textos.

Los T_i pueden ser descritos por un enlace L , con componentes L_1, \dots, L_n de los cuales T_1, \dots, T_n son vecindades tubulares disjuntas, respectivamente. El homeomorfismo h puede ser descrito por una colección de pares de enteros $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$. Esto se logra fijando una longitud canónica l_i y un meridiano canónico m_i sobre cada ∂T_i , con orientaciones relacionadas como se muestra en la Figura B-1, de modo que $h_i(m_i)$ sea homotópico a $a_i l_i + b_i m_i$, para algunos $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ con $\gcd(a_i, b_i) = 1$.

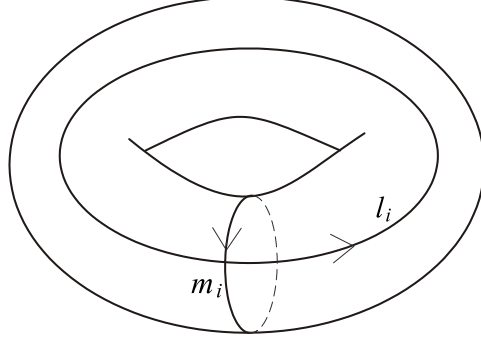


Figura B-1: Orientaciones de longitudes y meridianos en cada uno de los toros T_i

Se sigue a partir de los resultados de [28], que una vez L y los correspondientes (a_i, b_i) son dados, entonces toda elección simultánea de:

- i. vecindades tubulares mutuamente disjuntas T_i de los L_i
- ii. longitudes y meridianos orientados l_i, m_i sobre la respectiva ∂T_i y
- iii. un homeomorfismo h tal que cada $(h|\partial T_i)(m_i)$ es equivalente a $a_i l_i + b_i m_i$ para $1 \leq i \leq n$, producirá una 3-variedad homeomorfa a M .

Así M es descrita, salvo homeomorfismos, por un enlace L y una colección

$$\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}.$$

Existe una pequeña ambigüedad, ya que cada par m_i, l_i pueda tener dos posibles orientaciones, de modo que (a_i, b_i) es intercambiable con $(-a_i, -b_i)$. Esta ambigüedad se puede eliminar si consideramos los racionales $\frac{a_i}{b_i}$. Permitiremos $\frac{\pm 1}{0}$ y lo denotaremos como ∞ . Por lo tanto nuestras instrucciones de cirugía para la construcción de una 3-variedad M , han sido reducidas a un enlace y a un número racional o ∞ .

S^3 se puede descomponer como dos toros sólidos de manera que un meridiano de un toro se identifica con una longitud del otro y viceversa.

Ahora definiremos lo que es un *giro de Dehn*. Un giro de Dehn alrededor de una curva cerrada simple c , con orientación fija, en ∂T , es un homeomorfismo $\partial T \rightarrow \partial T$ que resulta del siguiente procedimiento: Desconectar una vecindad anular de c suficientemente estrecha y que no se intersecte a sí misma como se muestra en la Figura B-2a, y luego realizamos un giro completo de una curva con respecto a la curva c como se muestra en la Figura B-2b. Realmente podemos considerar la siguiente definición.

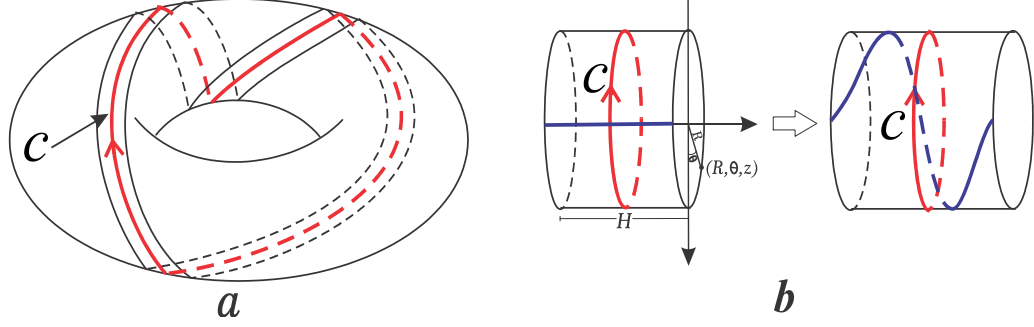


Figura B-2: Giro de Dehn alrededor de un meridiano

Definición B.0.6 Sea X el cilindro de altura H y radio R . Definamos un sistema de coordenadas (R, θ, z) como se muestra en la Figura B-2b. Sea $c = \{(R, \theta, z) : z = \frac{H}{2}\} \cap X$. La función $\tau : X \rightarrow X$ definida por $\tau(R, \theta, z) = (R, \theta + \frac{2\pi z}{H}, z)$ es un homeomorfismo y lo llamaremos **giro de Dehn anular alrededor de la curva c** .

Un giro de Dehn alrededor de un meridiano m se denomina un *giro meridional* de Dehn y lo denotaremos $M : \partial T \rightarrow \partial T$ y un giro alrededor de una longitud l se denomina un *giro longitudinal* de Dehn, el cual denotaremos como $L : \partial T \rightarrow \partial T$.

Cubiertas ramificadas

Definición B.0.7 Sean M y \bar{M} n -variedades y sean $\bar{L} \subseteq \bar{M}$ y $L \subseteq M$ $(n-2)$ -variedades.

Si existe una función continua y sobreyectiva $p : \bar{M} \rightarrow M$ tal que:

- i. $p(\bar{L}) = L$,
- ii. $p|_{\bar{M}-\bar{L}} : \bar{M} - \bar{L} \rightarrow M - L$ es un mapeo cubierta de k hojas. Es decir, cada punto en $M - L$ tiene una vecindad abierta U tal que $(p|_{\bar{M}-\bar{L}})^{-1}(U)$ consiste de k componentes disjuntas, cada una de las cuales es mapeada por $p|_{\bar{M}-\bar{L}}$ de manera homeomorfa sobre U .
- iii. $|p^{-1}(\{x\})| = k$ si $x \in M - L$ y $|p^{-1}(\{x\})| < k$ si $x \in L$.

Entonces decimos que \bar{M} es una **cubierta de k hojas de M ramificada sobre L** . A L se le llama el **lugar de ramificación** o **conjunto de ramificación**.

Además, la Definición B.0.7 se cumple en general para n -variedades con o sin frontera.

Definición B.0.8 Sean M, N 3-variedades, $p : M \rightarrow N$ una cubierta ramificada y $f : \partial N \rightarrow \partial N$ un homeomorfismo que deja fijos los puntos ramificados, como conjunto. Decimos que el

homeomorfismo $\bar{f} : \partial M \longrightarrow \partial M$ es un **levantamiento** de f con respecto a p si el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \partial M & \xrightarrow{\bar{f}} & \partial M \\ p \downarrow & & p \downarrow \\ \partial N & \xrightarrow{f} & \partial N \end{array}$$

Es decir, se tiene que $f \circ p = p \circ \bar{f}$.

Apéndice C

Acción de grupos sobre conjuntos

Definición C.0.9 Un grupo G actúa sobre un conjunto X si existe un mapeo $\varphi : G \times X \longrightarrow X$, definido como $\varphi(g, x) = g \cdot x$ tal que

1. $1 \cdot x = x, \forall x \in X$ (1 es la identidad de G)
2. $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x, \forall g, h \in G$ y $\forall x \in X$.

Además, si G actúa sobre X y X es un espacio topológico con la propiedad de que para cada g en G el mapeo $\theta_g : X \longrightarrow X$ dado por $\theta_g(x) = g \cdot x$ es un homeomorfismo, entonces se dice que X es un **G -espacio**.

Si X es un G -espacio tal que $g \cdot x = x$ para algún x implica que $g = 1$, entonces diremos que G actúa **libremente** sobre x .

Si el grupo G actúa sobre X , entonces X/G denotará el conjunto de clases de equivalencia $\{[x] : x \in X\}$, donde $[x_1] = [x_2]$ si y sólo si $x_1 = g \cdot x_2$ para algún $g \in G$. X/G se denomina el *espacio órbita* de X sobre G y los $G \cdot x$ constituyen una colección de *órbitas* disjuntas correspondientes a las clases de equivalencia.

Lema C.0.7 Si X es un espacio Hausdorff, compacto y además X es un G -espacio con G finito, entonces X/G es un espacio Hausdorff compacto.

Prueba. Sea $\phi : X \longrightarrow X/G$ el mapeo dado por $\phi(x) = [x]$. Si consideramos X/G como un espacio cociente, entonces los conjuntos abiertos en X/G se definen en términos de sus preimágenes en X y por lo tanto ϕ es automáticamente continua.

X/G es un espacio compacto por ser la imagen de un conjunto compacto bajo una función continua. Ahora veamos que X/G es un espacio Hausdorff.

Sean $[x_1]$ y $[x_2]$ en X/G y $[x_1] \neq [x_2]$. Esto significa que $g_1 \cdot x_1 \neq g_2 \cdot x_2, \forall g_1, g_2$ en G , así que $\phi^{-1}([x_1]) = \{g \cdot x_1 : g \in G\}$ y $\phi^{-1}([x_2]) = \{g \cdot x_2 : g \in G\}$ son subconjuntos disjuntos de X . Como estos subconjuntos son finitos, entonces usando repetidamente la propiedad de Hausdorff, podemos construir conjuntos abiertos disjuntos U_1 y U_2 en X con $\phi^{-1}([x_1]) \subseteq U_1$ y $\phi^{-1}([x_2]) \subseteq U_2$.

Ahora,

$$\phi^{-1}(\phi(X - U_i)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot (X - U_i) = \bigcup_{g \in G} \theta_g(X - U_i)$$

y así $\phi^{-1}(\phi(X - U_i))$ es la unión de un número finito de cerrados para $i = 1, 2$, ya que los θ_g son homeomorfismos y, consecuentemente, cerrados en X .

Luego $\phi(X - U_i)$ es cerrado en X/G y $W_i = (X/G) - \phi(X - U_i)$ es un conjunto abierto en X/G para $i = 1, 2$. Notemos que $\phi^{-1}([x_i]) \subseteq U_i$ así que $[x_i] \notin \phi(X - U_i)$ y por lo tanto $[x_i] \in W_i$ para $i = 1, 2$.

Además,

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= ((X/G) - \phi(X - U_1)) \cap ((X/G) - \phi(X - U_2)) \\ &= (X/G) - (\phi(X - U_1) \cup \phi(X - U_2)) = (X/G) - \phi((X - U_1) \cup (X - U_2)) \\ &= (X/G) - \phi(X - (U_1 \cup U_2)) = (X/G) - \phi(X) = \emptyset. \end{aligned}$$

Así que X/G es un espacio Hausdorff. ■

Ahora estamos listos para enunciar y demostrar nuestro resultado principal.

Teorema C.0.8 *Si G es un grupo finito actuando libremente sobre un G -espacio X y X es una n -variedad compacta, entonces X/G es una n -variedad compacta.*

Prueba. Como X es una n -variedad, entonces X es un espacio Hausdorff. Luego del Lema C.0.7 tenemos que X/G es un espacio Hausdorff compacto y sólo resta ver que cada punto de X/G tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^n .

Sea $G = \{1 = g_0, g_1, \dots, g_m\}$. Dado $[x] \in X/G$, tenemos por el Lema C.0.7 que $x \in X$ con $\phi(x) = [x]$. Como G actúa libremente sobre X , entonces $g_m \cdot x = x \implies m = 0$ y usando repetidamente la propiedad Hausdorff podemos construir vecindades U_0, U_1, \dots, U_m de $g_0 \cdot x, g_1 \cdot x, \dots, g_m \cdot x$ respectivamente, con $U_0 \cap U_i = \emptyset$ para $1 \leq i \leq m$. Por lo tanto

$$U = \bigcap_{i=0}^m g_i^{-1} \cdot U_i = \bigcap_{i=0}^m \theta_{g_i}^{-1}(U_i)$$

es claramente una vecindad abierta de x , ya que $\theta_{g_i}^{-1}$ es homeomorfismo $\forall g_i \in G$.

Como X es una n -variedad, sabemos que x tiene alguna vecindad abierta W_x en X tal que W_x es homeomorfa a \mathbb{R}^n lo cual denotaremos por $W_x \cong \mathbb{R}^n$; esto es, existe un homeomorfismo $h : W_x \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Notemos que $W_x \cap U$ es abierto en W_x y así $h(W_x \cap U)$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n . Como $h(x) \in h(W_x \cap U)$, entonces existe $\epsilon > 0$ con $N_\epsilon(h(x)) \subseteq h(W_x \cap U)$. Por lo tanto

$$V_x = h^{-1}(N_\epsilon(h(x))) \cong N_\epsilon(h(x)) \cong \mathbb{R}^n$$

es una vecindad abierta de x en U .

Veamos que el mapeo $\phi|_{V_x} : V_x \longrightarrow \phi(V_x)$ es un homeomorfismo. El mapeo $\phi|_{V_x}$ es inyectivo ya que

$$\phi|_{V_x}(x_1) = \phi|_{V_x}(x_2) \implies [x_1] = [x_2] \implies x_1 = g_k \cdot x_2$$

para algún $g_k \in G$. Luego

$$x_1, x_2 \in V_x \implies x_1, x_2 \in U \implies x_1 \in g_0^{-1} \cdot U_0 = U_0$$

y

$$\begin{aligned} x_2 \in g_k^{-1} \cdot U_k &\implies x_1 = g_k \cdot x_2 \in U_0 \cap U_k \implies U_0 \cap U_k \neq \emptyset \\ &\implies k = 0 \implies g_k = 1 \implies x_1 = x_2. \end{aligned}$$

El mapeo $\phi|_{V_x}$ es sobreyectivo por definición. Como el mapeo $\phi : X \rightarrow X/G$ es un mapeo continuo y abierto, entonces la restricción de ϕ a un conjunto abierto también será abierta y continua.

De lo anterior se sigue que $\phi|_{V_x}$ es un homeomorfismo y consecuentemente $\phi(V_x) \cong V_x \cong \mathbb{R}^n$, así que $\phi(V_x)$ es la vecindad abierta requerida. ■

Bibliografía

- [1] J. S. Birman y H. M. Hilden, *Heegaard splitting of branched coverings of S^3* , Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975), 315-352.
- [2] J. S. Birman, *Braid, links and mapping class groups*, Ann. Math. Studies **82**. Princeton, N.J., Princeton Univ. Press.
- [3] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter, New York, NY (1985).
- [4] D. M. Burton, *Elementary Number Theory*, McGraw-Hill, New York, Sixth edition (2007).
- [5] A. Cavicchioli and B. Ruini, *Special Representations for n -Bridge Links*, Discrete Comput. Geom. **12**, No **1** (1994), 9-27.
- [6] J. Conway, *An enumeration of knots and links and some of their related properties*, In Computational Problems in Abstract Algebra, Proc. Conf. Oxford (1967), 329-358.
- [7] P. Cromwell, *Knots and Links*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [8] H. Doll and J. Hoste, *A tabulation of oriented links*, Mathematics of Computation 57, **196** (1991), 747-761.
- [9] C. H. Dowker and M. B. Thistlethwaite, *Classification of knot projections*, Topology Appl. **16** (1983), 19-31.
- [10] R. E. Goodrick, *Two bridge knots are alternating knots*, Pac. J. Math. **40** (1972) 561-564.
- [11] J. Goldman and L. Kauffman, *Rational Tangles*, Adv. Appl. Math. **18** (1997), 300-332.
- [12] J. Hempel, *3-Manifolds*, AMS Chelsea Publishing, Houston, TX (2004), 17-18.
- [13] H. M. Hilden, J. M. Montesinos, D. M. Tejada and M. M. Toro, *Mariposas y 3-variedades*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, **Vol. 28** (2004), 71-78.

- [14] H. M. Hilden, J. M. Montesinos, D. M. Tejada y M. M. Toro, *A new presentation of links: Butterflies*, Arxiv:1203.2045, 2012, 1-22.
- [15] H. M. Hilden, J. M. Montesinos, D. M. Tejada y M. M. Toro, *On the classification of 3-bridge links*, **Vol. 46, 2** (2012), 113-144.
- [16] T. Kanenobu, *Alexander polynomials of two-bridge Links*, J. Aust. Math. Soc., Ser. A **36** (1984), 59-68.
- [17] L. H. Kauffman and S. Lambropoulou, *On the Classification of Rational Tangles*, Adv. Appl. Math. **33** (2004), ???.
- [18] L. H. Kauffman and S. Lambropoulou, *On the Classification of Rational Knots*, Enseign. Math., II. **Sér. 49**, No. 3-4 (2003), 357-410 .
- [19] A. Kawachi, *A survey of knot theory*, Birkhäuser Verlag, Basel (1996).
- [20] W. W. Menasco and M. B. Thistlethwaite, *The Tait flying conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc., **25**(2) (1991), 403–412.
- [21] J. M. Montesinos and W. C. Whitten, *Constructions of two-fold branched covering Spaces*, Pac. J. Math. **Vol. 125**, No. 2 (1986), 415-446.
- [22] O. Morikawa, *A class of 3-bridge knots I*, Math. Semin. Notes Kobe Univ. **9** (1981), 349-369.
- [23] O. Morikawa, *A class of 3-bridge knots II*, Yokohama Math. J. **30** (1982), 53-72.
- [24] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2nd edition, New Jersey (1999).
- [25] K. Murasugi, *Knot theory and its applications*, Birkhäuser, Boston (1996).
- [26] S. Negami and K. Okita, *The splittability and triviality of 3-bridge links*, Trans. Amer. Math. Soc. **Vol. 289, 1** (1985), 253-280.
- [27] S. Negami, *The minimum crossing of 3-bridge links*, Osaka J. Math. **21, No 3** (1984), 477–487.
- [28] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series **7**, Publish & Perish Inc., Berkeley (1976).
- [29] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Z. **65** (1965), 133-170.
- [30] H. Schubert, *Knoten and Vollringe*, Acta Math. **90** (1953), 131-268.

- [31] H. Schubert, *Über eine numerische Knoteninvariante*, Math. Zeitschrift **61** (1954), 245-288.
- [32] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, 2nd Edition, New York (1993).
- [33] M. Takahashi, *An alternative proof of Birman-Hilden-Viro's theorem*, Tsukuba J. Math. **2** (1978), 27-34.
- [34] M. M. Toro, *Nudos combinatorios y mariposas*, Rev. Acad. Colomb. Cienc. **28**, **106** (2004), 79-86.
- [35] M. M. Toro, *Enlaces de tres puentes y mariposas*, Trabajo presentado como requisito parcial para promoción a la categoría de profesora titular, Universidad nacional de Colombia, Sede Medellín (2010).
- [36] M. M. Toro, *Equivalence of rational links and 2-bridge links revisited*, arXiv:1406.2955.