UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SECCIONAL DE MEDELLIN
FACULTAD DE CIENCIAS
POSGRADO EN MATEMATICAS

# $L^2$-SOLUCIONES A LA ECUACION DE DIFUSION

## UNA APLICACION DE LA TEORIA DE SEMIGRUPOS Y DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN ESPACIOS DE BANACH.

UNIVERSIDAD NACIONAL
BIBLIOTECA CENTRAL

---

AUTORES

JORGE IVAN COSSIO BETANCUR
Profesor Asociado U.N.

ARGEMIRO ECHEVERRY CANO
Profesor Asociado U.N.

JORGE ENRIQUE MEJIA LAVERDE
Profesor Univ. de Antioquia

VOLKER STALLBOHM
Profesor Visitante U.N.

Centro de Publicaciones U.N.

1984

515.43
L37

# INTRODUCCION

El presente trabajo tiene por objeto dar una aplicación de la teoría abstracta de semigrupos de operadores lineales y del problema de Cauchy en espacios de Banach sobre conjuntos cerrados a la ecuación del calor o de difusión.

Nos hemos restringido al caso unidimensional en el espacio $L^2([0,1];\mathbb{R})$ con el fin de desarrollar esta aplicación en todos sus detalles. Para dimensiones mayores o iguales a 2, una exposición igualmente detallada haría demasiado extenso el trabajo, pues tendríamos que considerar operadores elípticos en espacios de Sobolev, teoremas de inmersión, derivadas generalizadas, etc.; sinembargo, la teoría abstracta es también aplicable a estos casos.

En el capítulo 1 se lleva a cabo un estudio de ciertos operadores diferenciales de segundo orden, obteniendo los resultados que nos permitirán concluír en el capítulo 2, que dichos operadores son generadores de un semigrupo lineal.

En la primera parte del capítulo 2 se hace un compendio de los resultados básicos de la teoría de semigrupos. A continuación se considera el problema lineal:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(p(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}U(t,\tau)\right) \\ &U(t,0) = U(t,1) = 0 \quad , \quad U(0,\tau) = \varphi_0(\tau) \end{aligned}\right\} \quad t>0, \ \tau\in[0,1]$$

y se obtienen, entre otros, un resultado de existencia y unicidad en el sentido del espacio $L^2$ ( $L^2$-soluciones) y una caracterización del semigrupo lineal generado por el operador asociado a esta ecuación.

En el tercer capítulo se inicia el estudio del problema semilineal, utilizando la teoría de Ecuaciones Diferenciales en espacios de Banach

y los resultados obtenidos en el capítulo 2. Se consideran los siguientes aspectos: Existencia local de $L^2$- soluciones moderadas, regularidad de $L^2$-soluciones moderadas (condiciones bajo las cuales una $L^2$-solución moderada llega a ser una solución clásica), y la existencia global de $L^2$-soluciones moderadas.

El capítulo 4 y último centra su atención en el comportamiento asintótico de las soluciones en el caso semilinoal autónomo.

Este trabajo es resultado del ostudio que sobre ecuaciones diferenciales en espacios de Banach ha venido realizando en los dos últimos años el seminario de Análisis Funcional del posgrado de Matemáticas de la Universidad Nacional.

Quisiéramos agradecer en este lugar a los profesores Beatriz Villa y Juan Camilo Ochoa, quienes con su participación en el seminario han contribuído a que este trabajo llegara a realizarse.

Igualmente, expresamos nuestro sincero reconocimionto al profesor Luis Alfonso Vélez, director del posgrado, por su efectiva y cordial colaboración con el seminario.

Por último, agradecemos a la señora Norola Gómez de C, por su cuidadoso trabajo mecanográfico.

Medellín 1984 LOS AUTORES

# I N D I C E


| | | pág. |
|---|---|---|
| Capítulo 1: | Operadores diferenciales de segundo ordon. | 1 |
| Capítulo 2: | Semigrupos de operadores lineales. | 30 |
| Capítulo 3: | Ecuaciones diferenciales semilineales. | 43 |
| Capítulo 4: | Ecuaciones semilineales autónomas. | 53 |
| Bibliografía. | | 64 |

UNIVERSIDAD NACIONAL
BIBLIOTECA CENTRAL

# CAPITULO 1

## OPERADORES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN.

En este capítulo serán deducidos algunos resultados sobre operadores lineales no acotados, generados por 'expresiones diferenciales' ordinarias de segundo orden en el espacio $L^2[0,1]$. En particular obtendremos una parte de la teoría de los operadores de Sturm-Liouville. Por lo demás nos restringiremos a las necesidades de las aplicaciones en los capítulos posteriores, donde trabajaremos con el intervalo compacto $[0,1]$, el espacio $L^2[0,1]$ y los coeficientes serán suficientemente regulares (Problema de Sturm-Liouville regular).

Sean $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $L^2 = L^2([0,1],\mathbb{K})$ el espacio de Hilbert de las clases de equivalencia de funciones medibles en $[0,1]$, cuyo cuadrado es integrable en el sentido de Lebesgue, dotado con el producto escalar y la norma definidos por

$$\langle \varphi,\psi\rangle := \int_0^1 \varphi(s)\,\overline{\psi(s)}\,ds \quad , \quad |\varphi|_2^2 := \langle \varphi,\varphi\rangle \quad ; \quad \varphi,\psi \in L^2 .$$

**Definición 1.1:** Una función $\varphi:[0,1]\to\mathbb{K}$ se llama absolutamente continua, si y solo si:

a) La derivada $\varphi'$ existe a. e. en $[0,1]$.

b) $\varphi'$ es integrable, es decir $\varphi' \in L^1[0,1]$

c) $\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(s)\,ds \quad , \quad \forall t\in[0,1]$ .

Se puede demostrar, que esta definición es equivalente a la afirmación: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0$ tal que para toda familia finita y disjunta de subintervalos de $[0,1]$, $\{[a_i,b_i] \mid i=1,\dots,n\}$ que satisface $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i) \le \delta(\varepsilon)$ se tiene que $\sum_{i=1}^{n} |\varphi(b_i)-\varphi(a_i)| \le \varepsilon$.

Para $n\in\mathbb{N}$ sea: $AC^n := \{\varphi \mid \varphi:[0,1]\to\mathbb{K}\ ,\ \varphi^{(n-1)}$ existe en $[0,1]$ y es absolutamente continua$\}$ , $AC := AC^1$ .

Sean $p,q:[0,1]\to\mathbb{R}$ funciones continuas con $p(t)>0$ para $t\in[0,1]$ y $p$ continuamente diferenciable en $[0,1]$, es decir $p\in C^1[0,1]$. Consideremos el operador $L: D(L)\subseteq L^2\to L^2$ dado por

$$\left.\begin{aligned} D(L) &:= \{\varphi : \varphi\in L^2,\ \varphi'\in AC,\ \varphi''\in L^2\} \\ L\varphi &:= -(p\varphi')' + q\varphi, \qquad \varphi\in D(L). \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Como $p'$ es continua, es obvio que $L\langle D(L)\rangle \subset L^2$. Resulta además, como veremos más tarde, que $D(L)$ es denso en $L^2$. Por lo tanto $L$ es un operador lineal con dominio denso en $L^2$ y también es claro que $L$ es no acotado.

Observación 1.1: (i) En la definición de $L$ se han hecho algunas identificaciones iniciales. Para ser mas preciso se tiene

$$D(L) = \{[\varphi] \mid \varphi\in AC^2,\ \int_0^1 |\varphi''(s)|^2\,ds < \infty\}$$

$$L[\varphi] = [-(p\varphi')' + q\varphi], \qquad [\varphi]\in D(L).$$

Pero esta escritura sería demasiado inmanejable. (ii) Obsérvese, que la inclusión de $C[0,1]$ en $L^2$ : $\varphi\mapsto[\varphi]$ es inyectiva, donde: $[\varphi] = \{f:[0,1]\to\mathbb{K} \;/\; f(t)=\varphi(t) \text{ a.e. en } [0,1]\}\in L^2$.

Recordemos, para posterior uso, el siguiente resultado referente a ecuaciones diferenciales lineales ordinarias. Una demostración de este resultado puede verse por ejemplo en [1], cap. 2 y problema 1 en cap. 3.

Teorema 1.1: (existencia y unicidad de solución al 'problema de valor inicial') Para todo $c\in[0,1]$, $a,b\in\mathbb{K}$ y $\chi:[0,1]\to\mathbb{K}$ medible tal que $\int_0^1|\chi(s)|\,ds<\infty$, existe exactamente una función $\varphi\in AC^2$ tal que

$$-(p\varphi')'(t) + (q\varphi)(t) = \chi(t), \text{ a.e. en } [0,1] \quad \text{y}$$

$$\varphi(c)=a, \quad \varphi'(c)=b.$$

Además, si $\chi \in C[0,1]$ se tiene $\varphi \in C^2[0,1]$.

Observación 1.2: (i) Supuesta la solución al problema de valor inicial anterior, probemos la 'regularidad' de dicha solución cuando $\chi \in C[0,1]$ : sea $\varphi \in AC^2$ tal que

$$-p'(t)\varphi'(t) - p(t)\varphi''(t) + q(t)\varphi(t) = \chi(t) \text{ , a.e. en } [0,1].$$

Como $\varphi', \varphi$ y $p'$ son continuas y $p(t)>0$ , se tiene $\varphi''(t) = h(t)$ a.e., donde h es continua. Dado que $\varphi' \in AC$ entonces

$$\varphi'(t) = \varphi'(c) + \int_c^t \varphi''(s)\,ds = \varphi'(c) + \int_c^t h(s)\,ds \quad , \quad \forall t \in [0,1]$$

y como h es continua se tiene $\varphi' \in C^1[0,1]$ y por consiguiente $\varphi \in C^2[0,1]$.

(ii) Con el resultado del teorema 1.1. y las identificaciones descritas en la observación 1.1 y que vamos a adoptar en lo sucesivo, está claro que para el operador $L$ , dofinido por (1.1), el problema homogéneo $L\varphi = 0$ , $\varphi(c) = a$ , $\varphi'(c) = b$ tiene solución única y esta solución pertenece a $C^2[0,1]$ . También es claro que si $\chi \in L^2[0,1]$ es 'continua', es decir $\chi = [\varphi]$ con $\varphi$ continua, toda solución de $L\varphi = \chi$ , $\varphi \in D(L)$ , satisface $\varphi \in C^2[0,1]$.

Lema 1.1: Si $L$ es el operador definido por (1.1) y $\varphi_1, \varphi_2 \in Ker(L)$, el núcleo de $L$ , entonces existe una constante $\Delta \in \mathbb{K}$ tal que el wronskiano ( modificado) $W(\varphi_1, \varphi_2; t)$ satisface:

$$W(\varphi_1, \varphi_2; t) := p(t) \det \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = p(t)\left[\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)\right] \equiv \Delta \quad , \quad \forall t \in [0,1].$$

Demostración: Basta verificar $\frac{d}{dt} W(\varphi_1, \varphi_2; t) = 0$ , $\forall t \in [0,1]$ si $\varphi_1, \varphi_2 \in Ker(L)$.

Corolario 1.1: Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in Ker(L)$ . Entonces $\varphi_1, \varphi_2$ son linealmente independientes si y solo si $W(\varphi_1, \varphi_2; t) \neq 0$ para un $t \in [0,1]$ (y con eso, de acuerdo al lema 1.1, para todos los $t \in [0,1]$) es decir : $\Delta \neq 0$.

Demostración: ($\Rightarrow$): Si $\varphi_1, \varphi_2 \in Ker(L)$ son lin. independientes, entonces los vectores de $\mathbb{K}^2$, $F\varphi_1$ y $F\varphi_2$, definidos por

$F\varphi_1 := (\varphi_1(0), \varphi_1'(0))$

y $F\varphi_2 := (\varphi_2(0), \varphi_2'(0))$ son linealmente independientes en $\mathbb{K}^2$. En efecto si $\lambda_1 F\varphi_1 + \lambda_2 F\varphi_2 = (0,0)$, entonces $\lambda_1 \varphi_1(0) + \lambda_2 \varphi_2(0) = 0$ y $\lambda_1 \varphi_1'(0) + \lambda_2 \varphi_2'(0) = 0$ ; por lo tanto $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ es solución del problema de valores iniciales $L\varphi = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$ y como $\varphi(t) \equiv 0$ es la unica solución de este problema, entonces $\lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_2 \varphi_2(t) = 0$, $\forall t \in [0,1]$. Dado que $\varphi_1, \varphi_2$ son linealmente independientes, debe tenerse $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Por lo tanto $F\varphi_1, F\varphi_2$ son linealmente independientes en $\mathbb{K}^2$. En consecuencia $W(\varphi_1, \varphi_2; 0) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Si $\varphi_1, \varphi_2 \in Ker(L)$ y $W(\varphi_1, \varphi_2; t_0) \neq 0$ para un $t_0 \in [0,1]$ obtenemos que $(\varphi_1(0), \varphi_1'(0))$ y $(\varphi_2(0), \varphi_2'(0))$ son lin. independientes y el teorema 1.1 implica que $\varphi_1, \varphi_2$ son lin. independientes (unicidad de la solución).

El siguiente resultado se refiere al rango del operador $L$ y a la dimensión de $Ker(L)$.

Proposición 1.1: Para el operador $L$ definido por (1.1), se tiene:

a) $\dim Ker(L) = 2$ , $Ker(L) \subset C^1[0,1] \subset D(L)$.

b) El operador $L$ es sobre, es decir, para todo $\chi \in L^2$ existe un $\varphi \in D(L)$ con $L\varphi = \chi$ ; además todos los $\varphi \in D(L)$ con esa propiedad están dados por

$$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \int_0^t \frac{\varphi_1(t)\varphi_2(s) - \varphi_1(s)\varphi_2(t)}{\Delta} \chi(s)\, ds \qquad (1.2)$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$, $(\varphi_1, \varphi_2)$ es una base de $Ker(L)$ y $\Delta = W(\varphi_1, \varphi_2; 0) \in \mathbb{K}$.

Demostración: a) Consideremos la aplicación $F : Ker(L) \to \mathbb{K}^2$ definida por $F\varphi := (\varphi(0), \varphi'(0))$ ; claramente $F$ es lineal.

Por el teorema 1.1 (unicidad) se tiene que $F$ es inyectiva y (existencia) sobre, por lo tanto $\dim \ker(L) = \dim(\mathbb{K}^2) = 2$. . Con las identificaciones adoptadas, habíamos visto ya que $\ker(L) \subset C^2[0,1] \subset D(L)$.

b) Veamos primero, que para $\chi \in L^2$, $\varphi$ definido por (1.2) es una solución: Definamos $\psi(t)$ por:

$$\psi(t) = \frac{\varphi_1(t)}{\Delta} \int_0^t \varphi_2(s)\,\chi(s)\,ds - \frac{\varphi_2(t)}{\Delta} \int_0^t \varphi_1(s)\,\chi(s)\,ds \quad , t \in [0,1].$$

Diferenciando $\psi(t)$ obtenemos:

$$\psi'(t) = \frac{\varphi_1'(t)}{\Delta} \int_0^t \varphi_2(s)\,\chi(s)\,ds - \frac{\varphi_2'(t)}{\Delta} \int_0^t \varphi_1(s)\,\chi(s)\,ds \quad , \text{ a. e.}$$

y como es obvio, por la observación (1.2), la igualdad vale para todo $t \in [0,1]$ ( $\psi \in AC$ y el lado derecho es una función continua)

Diferenciando nuevamente:

$$\psi''(t) = -\frac{\chi(t)}{p(t)} + \frac{\varphi_1''(t)}{\Delta} \int_0^t \varphi_2(s)\,\chi(s)\,ds - \frac{\varphi_2''(t)}{\Delta} \int_0^t \varphi_1(s)\,\chi(s)\,ds \quad , \text{ a. e.}$$

y de aquí es claro que $\psi'' \in L^2([0,1], \mathbb{K})$ . Como el producto de una función continuamente diferenciable con una absolutamente continua, $\int_0^t \varphi_i(s)\,\chi(s)\,ds$ , $i = 1,2$ ,es absolutamente continua, obtenemos $\psi' \in AC$ y por lo tanto $\psi \in D(L)$ . Ahora veamos que $L\psi = \chi$ :

$$-(p\psi')'(t) = -(p\psi'')(t) - (p'\psi')(t) = \chi(t) - \left(\frac{p\varphi_1''}{\Delta}\right)(t) \int_0^t \varphi_2\chi + \left(\frac{p\varphi_2''}{\Delta}\right)(t) \int_0^t \varphi_1\chi - \left(\frac{p'\varphi_1'}{\Delta}\right)(t) \int_0^t \varphi_2\chi + \left(\frac{p'\varphi_2'}{\Delta}\right)(t) \int_0^t \varphi_1\chi =$$

$$= \chi(t) - (p\varphi_1')'(t) \int_0^t \frac{\varphi_2\chi}{\Delta} + (p\varphi_2')'(t) \int_0^t \frac{\varphi_1\chi}{\Delta}$$

y como tenemos $-(p\varphi_i')' + q\varphi_i = 0$ para $i = 1,2$ resulta

$$-(p\psi')'(t) = \chi(t) - q(t)\,\psi(t) \quad , \text{ a.e es decir}$$

$-(p\psi')' + q\psi = \chi$ en $L^2$ es decir $L\psi = \chi$ .

Por lo tanto $\Psi$ es una 'solución particular' de $L\varphi = \chi$ y con esto, dado que $L$ es lineal y $\dim Ker(L) = 2$, todas las soluciones están dadas por(1.2).

Hemos visto, que el operador $L$ definido pór (1.1) es sobre pero no es invertible; más aún, esto es válido para $L - \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{K}$. Vamos a considerar ahora restricciones del operador $L$ a subespacios del dominio de $L$, definidos por dos funcionales $B_0$ y $B_1$. Definidos adecuadamente estos funcionales, veremos que el operador resultante es invertible para determinados $\lambda \in \mathbb{K}$. Podríamos demostrar, que para que esto ocurra $B_0$ y $B_1$ deben ser linealmente independientes. Por el momento no necesitamos de esta hipótesis y más tarde, en los casos particulares que consideraremos, esta hipótesis se cumplirá automaticamente.

Sean $B_i : D(B_i) \subseteq L^2 \to \mathbb{K}$, $i = 0,1$, funcionales lineales, definidos por

$$\left.\begin{aligned} &D(B_i) = AC^2, \quad i = 0,1 . \\ &B_0\varphi := \alpha_1\varphi(0) + \alpha_2\varphi'(0) + \alpha_3\varphi(1) + \alpha_4\varphi'(1), \quad \varphi \in D(B_i) \\ &B_1\varphi := \beta_1\varphi(0) + \beta_2\varphi'(0) + \beta_3\varphi(1) + \beta_4\varphi'(1), \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \ i = 1,4 \end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

Para $B_0, B_1$ asi definidos consideraremos el operador $L_b$ definido por

$$\left.\begin{aligned} &D(L_b) := \{ \varphi \mid \varphi \in D(L) \wedge B_0\varphi = B_1\varphi = 0 \} \\ &L_b\varphi := -(p\varphi')' + q\varphi, \quad \varphi \in D(L_b) \end{aligned}\right\} \quad (1.4)$$

Claramente $L_b$ es una restricción de $L$ al subespacio lineal $D(L_b)$ determinado por $B_0, B_1$. Nótese, dada la forma de $B_0, B_1$ que $D(L_b)$ contiene a $C_0^\infty[0,1]$, el espacio de las funciones infinitamente diferenciales con soporte compacto en $[0,1]$. Esto nos va a permitir demostrar que $D(L_b)$ es denso en $L^2$.

Observemos, que el problema 'abstracto' de determinar si $L_b$ es sobre y/o inyectivo es equivalente al problema de existencia y/o unicidad del problema de frontera:

$$\left.\begin{aligned} &-(p\varphi')'(t) + q(t)\varphi(t) = \chi(t) \quad \text{, a.e. en } [0,1] \\ &B_0\varphi = 0 \quad , \quad B_1\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

Las condiciones de frontera han 'desaparecido' en el problema abstracto ya que han sido incorporadas al dominio de $L_b$.

Lema 1.2: El operador $L_b$ definido por (1.4) es un operador lineal con dominio denso en $L^2$.

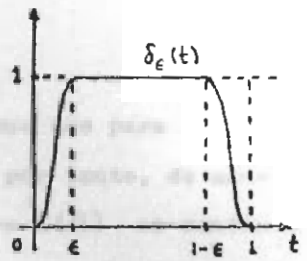
Demostración: Es obvio que $D(L_b)$ es un subespacio lineal de $L^2$ y que $L_b$ es un operador lineal. Verifiquemos ahora, que $D(L_b)$ es denso en $L^2[0,1]$ : Sabemos (teorema de Weierstrass) que $C^\infty[0,1]$ es denso en $C[0,1]$ (en la norma del máximo y por lo tanto en la norma de $L^2$). Además, $C[0,1]$ es denso en $L^2[0,1]$ (basta aplicar el teorema de Lusin a funciones de $L^2[0,1]$ que son acotadas y luego aproximar las no acotadas por sus truncaciones). Por lo tanto es suficiente mostrar, que $D(L_b)$ es denso en $C^\infty[0,1]$ (en la norma de $L^2[0,1]$). Para no hacer referencia a resultados generales sobre 'regularización' definamos explicitamente para $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$ la familia de funciones en $[0,1]$, $(\delta_\epsilon)$ por :

$$\delta_\epsilon(t) := \begin{cases} 0 & \text{Para } t=0 \text{ , } t=1 \\ e \cdot \exp\left[-\left(1-\left(\frac{t-\epsilon}{\epsilon}\right)^2\right)^{-1}\right] & \text{, para } 0 < t < \epsilon \\ e \cdot \exp\left[-\left(1-\left(\frac{t-(1-\epsilon)}{\epsilon}\right)^2\right)^{-1}\right] & \text{, para } 1-\epsilon < t < 1 \\ 1 & \text{, para } \epsilon \leq t \leq 1-\epsilon \,. \end{cases}$$

Es claro que $0 \leq \delta_\epsilon(t) \leq 1$ , $t \in [0,1]$

$\delta_\epsilon(t) = 1$ , $\epsilon \leq t \leq 1-\epsilon$ y se verifica

$\delta_\epsilon \in C^\infty[0,1]$ con $\delta_\epsilon^{(k)}(0) = \delta_\epsilon^{(k)}(1) = 0$ , $k \geq 0$ .




Sea ahora $\varphi \in C^\infty[0,1]$ dada; definamos $\varphi_\epsilon = \varphi . \delta_\epsilon$ . Entonces $\varphi_\epsilon \in C^\infty[0,1]$ y $\varphi_\epsilon \in D(L_b)$ . Además

$$|\varphi_\epsilon - \varphi|_2^2 = \int_0^\epsilon |\varphi_\epsilon - \varphi|^2 + \int_{1-\epsilon}^1 |\varphi_\epsilon - \varphi|^2 = \int_0^\epsilon |\varphi|^2 |\delta_\epsilon - 1|^2 + \int_{1-\epsilon}^1 |\varphi|^2 |\delta_\epsilon - 1|^2$$

$$\leq \int_0^\epsilon |\varphi|^2 + \int_{1-\epsilon}^1 |\varphi|^2 \leq 2\epsilon\, |\varphi|_\infty^2 ,$$

con lo cual queda demostrado el lema.

Observación 1.3: Como $D(L_b) \subset D(L)$ hemos verificado también que $D(L)$ es denso en $L^2[0,1]$ .

El siguiente resultado para operadores integrales lineales de tipo Uryson lo utilizaremos a continuación. Para su demostración, la cual es sencilla, remitimos a [2] pag. 176.

Proposición 1.2: Sean $M, n \in \mathbb{N}$ y $\phi \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compacto. Denotemos por $BL(\mathbb{K}^M)$ la clase de los operadores lineales (continuos) de $\mathbb{K}^M$ en $\mathbb{K}^M$ . Si $G : \Omega \times \Omega \to BL(\mathbb{K}^M)$ es una función continua, entonces el operador A definido por

$$(A\varphi)(t) := \int_\Omega G(t,s)\, \varphi(s)\, ds \quad , \quad t \in \Omega \quad , \quad \varphi \in L^1(\Omega)$$

es un operador lineal, continuo y compacto de $(L^1(\Omega), |\cdot|_1)$ en $(C(\Omega), |\cdot|_\infty)$.

Observación 1.4: Como $\Omega$ es acotado, se tiene que para $1 \leq p \leq \infty$ la inclusión $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ es continua y por tanto, de acuerdo a la proposición 1.2, $A/_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to C(\Omega)$ es continua y compacta y como la inclusión $C(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es también continua, entonces el operador A: $L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es continuo y compacto. En particular, $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

El siguiente lema es básico para el ostudio de la resolvente del operador $L_b$.

Lema 1.3: Sea $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ una función con las siguientes propiedades:

1) $G$ es continua.

2) Las derivadas parciales $D_1 G(t,s)$, $D_1^2 G(t,s)$ existen para todo $t \neq s$, $t, s \in [0,1]$ y son uniformemente continuas en cada uno de los 'triángulos':

$$\Delta_1 : 0 \leq s < t \leq 1 \quad , \quad \nabla_2 : 0 \leq t < s \leq 1.$$

3) $$\lim_{t \to s^+} D_1 G(t,s) - \lim_{t \to s^-} D_1 G(t,s) = \frac{1}{p(s)} \quad , \quad \forall s \in (0,1).$$

4) Para todo $s \in (0,1)$ : $B_0 G(\cdot, s) = B_1 G(\cdot, s) = 0$.

Entonces: a) El operador $T_0 : L^2 \to L^2$ definido por

$$\chi \longmapsto \int_0^1 G(\cdot, s)\, \chi(s)\, ds$$

es lineal, continuo, compacto y $T_0(L^2) \subset D(L_b)$;

b) Si $G$ cumple además:

5) $\forall s \in (0,1)$, $\forall t \in [0,1]$, $t \neq s$ :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\, D_1 G(t,s)\right) + q(t)\, G(t,s) = 0 ,$$

se tiene que $L_b T_0 = I$ y por lo tanto $L_b$ es sobre.

c) Si $\lambda \notin \sigma(L_b)$ y $G_\lambda$ es una función que satisface (1) - (4) y (5'), donde

(5') $\forall s \in (0,1)$, $\forall t \in [0,1]$, $t \neq s$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\, D_1 G_\lambda(t,s)\right) + q(t)\, G_\lambda(t,s) = \lambda\, G_\lambda(t,s)$$

Se tiene que: si $T_\lambda$ es el operador integral definido por $G_\lambda$, entonces $(L_b - \lambda I)^{-1} = T_\lambda$ y $(L_b - \lambda I)^{-1}$ es por lo tanto un operador lineal, continuo y compacto.

Demostración: a) Como $G$ es continua, obtenemos inmediatamente con base a la proposición 1.2 que $T_0$ es lineal, continuo y compacto.

Veamos que se cumple la inclusión $T_0(L^2) \subset D(L_b)$ : en efecto, para $\chi \in L^2 = L^2[0,1]$, sea $\varphi$ la función definida por:

$$\varphi(t) = \int_0^1 G(t,s)\, \chi(s)\, ds \quad , \quad t \in [0,1] \tag{1.6}$$

Vamos a demostrar primero, que $\varphi'(t)$ existe para todos los $t \in [0,1]$ y que $\varphi''(t)$ existe para casi todos los $t \in [0,1]$.

Para evitar repeticiones, asumamos demostrado ya que

$$\varphi'(t) = \int_0^1 D_1 G(t,s)\, \chi(s)\, ds \quad , \text{ para } t \in [0,1] \text{ y } \chi \in L^2[0,1] \tag{1.7}$$

y verifiquemos que para $\chi \in L^2[0,1]$ se cumple que

$$\varphi''(t) = \int_0^1 D_1^2 G(t,s)\, \chi(s)\, ds + \frac{\chi(t)}{p(t)} \quad , \text{ a.e. en } [0,1] \tag{1.8}$$

De (1.7) es inmediato

$$\varphi'(t) = \int_0^t D_1 G(t,s)\, \chi(s)\, ds + \int_t^1 D_1 G(t,s)\, \chi(s)\, ds \quad , \text{ para } t \in [0,1] \tag{1.9}$$

Sean $(t_n)$ una sucesión en $[0,1]$, $t \in [0,1]$ tal que $t_n \to t$ ; asumiremos $t_n > t$, siendo el otro caso $t_n < t$ similar:

$$\frac{\varphi'(t_n) - \varphi'(t)}{t_n - t} = \int_0^t \frac{D_1 G(t_n,s) - D_1 G(t,s)}{t_n - t}\, \chi(s)\, ds + \frac{1}{t_n - t}\int_t^{t_n} D_1 G(t_n,s)\, \chi(s)\, ds +$$

$$+ \int_{t_n}^{1} \frac{D_1 G(t_n,s) - D_1 G(t,s)}{t_n - t}\, \chi(s)\, ds - \frac{1}{t_n - t}\int_t^{t_n} D_1 G(t,s)\, \chi(s)\, ds$$

$$= I_1^{(n)}(t) + I_2^{(n)}(t) + I_3^{(n)}(t) + I_4^{(n)}(t).$$

Sean $\hat{D}_1 G$ y $\check{D}_1 G$ las extensiones continuas de $D_1 G$ a los 'triángulos' $\overline{\Delta}_1$ y $\overline{\nabla}_2$ respectivamente, así como $\hat{D}_1^2 G$ y $\check{D}_1^2 G$ las extensiones de $D_1^2 G$ a estos mismos mismos triángulos, las cuales son posibles de acuerdo a la continuidad uniforme asumida en (2) .

Probemos que:

$$\lim_{n\to\infty} I_1^{(n)}(t) = \int_0^t D_1^2 G(t,s)\, \chi(s)\, ds \quad , \quad t \in [0,1] \qquad (1.10)$$

En realidad para $s \in [0,t]$ tenemos

$$\frac{\hat{D}_1 G(t_n,s) - \hat{D}_1 G(t,s)}{t_n - t}\, \chi(s) \longrightarrow_{n\to\infty} \hat{D}_1^2 G(t,s)\, \chi(s) \quad \text{y por ser}$$

$\hat{D}_1^2 G$ acotada en $\overline{\Delta}_1$, por el 'teorema de valor medio', si $M_1 := \max\{\, |\hat{D}_1^2 G(t,s)| \mid (t,s) \in \overline{\Delta}_1 \,\}$ resulta

$$\left| \frac{\hat{D}_1 G(t_n,s) - \hat{D}_1 G(t,s)}{t_n - t} \right| \leq M_1\, \chi(s) \text{ , para } s \in [0,t]$$

y por el teorema de Lebesgue de 'convergencia dominada' obtenemos (1.10) ya que

$$\int_0^t \hat{D}_1^2 G(t,s)\,\chi(s)\,ds = \int_0^t D_1^2 G(t,s)\,\chi(s)\,ds .$$

Veamos ahora, que para casi todo $t \in [0,1]$ :

$$\lim_{n\to\infty} I_4^{(n)}(t) = -\check{D}_1 G(t,t)\,\chi(t) = -\lim_{s\to t^+} D_1 G(t,s)\,\chi(t). \qquad (1.11)$$

Observando que para $f \in L^1[0,1]$ , si definimos

$$h(t) := \int_0^t f(s)\,ds \quad , \quad t \in [0,1] ,$$

h es diferenciable y $h'(t) = f(t)$ , a.e. en $[0,1]$ , entonces por la continuidad de $\check{D}_1 G$ y la igualdad

$$I_4^{(n)}(t) = -\frac{1}{t_n - t}\int_t^{t_n} D_1 G(t,s)\,\chi(s)\,ds = -\frac{1}{t_n - t}\int_t^{t_n} \check{D}_1 G(t,s)\,\chi(s)\,ds$$

se obtiene obviamente (1.11).

Verifiquemos que para casi todo $t \in [0,1]$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} I_2^{(n)}(t) = \hat{D}_1 G(t,t)\,\chi(t) = \lim_{s\to t^-} D_1 G(t,s)\,\chi(t) \qquad (1.12)$$

Como $\hat{D}_1 G$ es uniformemente continua,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n - t}\int_t^{t_n} |\chi(s)|\,ds \qquad \text{existe para casi todo } t \in [0,1]$$

y $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n - t}\int_t^{t_n} |\chi(s) - \chi(t)|\,ds = 0 \text{ para casi todo } t \in [0,1]$$

( [6] pag. 255 ), entonces si $M := \max\{|\hat{D}_1 G(t,s)| : (t,s) \in \bar{\Delta}_\epsilon\}$ , $\epsilon > 0$ y n suficientemente grande, se obtiene la siguiente estimación :

$$|I_2^{(n)}(t) - \hat{D}_1 G(t,t)\,\chi(t)| \le \frac{1}{t_n - t}\left[\int_t^{t_n} |\hat{D}_1 G(t_n,s) - \hat{D}_1 G(t,t)|\,|\chi(s)|\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_t^{t_n} |\hat{D}_1 G(t,t)|\,|\chi(s) - \chi(t)|\,ds\right] \le$$

$$\leq \epsilon \frac{1}{t_n - t} \int_t^{t_n} |\chi(s)|\, ds + M \frac{1}{t_n - t} \int_t^{t_n} |\chi(s) - \chi(t)|\, ds ,$$

de donde (1.12) es obvio.

Sólo nos resta verificar que

$$\lim_{n \to \infty} I_3^{(n)}(t) = \int_t^1 D_1^2 G(t,s)\, \chi(s)\, ds \qquad (1.13)$$

Usando el teorema de valor medio, para $s \in [t_n, 1]$ existe $\xi_n(s) \in (t, t_n)$ tal que

$$I_3^{(n)}(t) = \int_{t_n}^1 \check{D}_1^2 G(\xi_n(s), s)\, \chi(s)\, ds$$

luego, dado $\epsilon > 0$ :

$$|I_3^{(n)}(t) - \int_t^1 D_1^2 G(t,s)\, \chi(s)\, ds| \leq \int_{t_n}^1 |\check{D}_1^2 G(\xi_n(s), s) - \check{D}_1^2 G(t,s)|\, |\chi(s)|\, ds +$$

$$+ \int_t^{t_n} |\check{D}_1^2 G(t,s)|\, |\chi(s)|\, ds \leq \epsilon$$

para $n$ suficientemente grande.

De (1.10) - (1.13) obtenemos, utilizando la condición (3), la relación (1.8). La demostración permite ver además, que para $\chi \in C[0,1]$ la relación (1.8) se cumple para todos los $t \in [0,1]$.

Si aplicamos ahora a (1.6) los cálculos hechos anteriormente a partir de (1.7), obtendremos de (1.6) la relación (1.7) para casi todo $t \in [0,1]$. Obsérvese que G es, según la condición 1), continua en $[0,1]^2$ y por lo tanto en este caso

$$\lim_{s \to t^-} G(t,s)\, \chi(t) - \lim_{s \to t^+} G(t,s)\, \chi(t) = 0 \qquad \text{a.e. en } [0,1].$$

Siendo G uniformemente continua en $[0,1] \times [0,1]$ resulta , usando la definición equivalente de continuidad absoluta, mencionada después de la definición 1.1 , que $\varphi$ dada por (1.6) es absolutamente continua.

Ahora bien, el lado derecho de (1.7) es continuo en $t \in [0,1]$ . Para verlo, tener presente la condición (2) y la descomposición (1.9). Por lo tanto utilizando un argumento como en la observación 1.2, obtenemos (1.7) para todo $t \in [0,1]$ y en consecuencia $\varphi'$ es continua. De nuevo la descomposición (1.9) y la condición (2) para $D_1 G$ demuestran que $\varphi'$ es absolutamente continua.

Para concluir que $\varphi'' \in L^2[0,1]$ basta considerar para $\varphi''$ una descomposición análoga a (1.9) y utilizar la condición (2) para $D_1^2 G$ y el hecho de que $\frac{1}{\rho}$ es continua y $\chi \in L^2$ .

Para completar la demostración de (a) solo nos falta demostrar que

$$B_0 \varphi = B_1 \varphi = 0 ,$$

pero esto es inmediato usando (1.6), (1.7) y la condición (4).

b) Supongamos que es válida la condición (5) y sean $\chi \in L^2$ y

$$(T_0 \chi)(t) := \varphi(t) = \int_0^1 G(t,s)\, \chi(s)\, ds \quad \text{para} \quad t \in [0,1]$$

En (a) demostramos :

$$\varphi'(t) = \int_0^1 D_1 G(t,s)\, \chi(s)\, ds , \quad t \in [0,1]$$

$$\varphi''(t) = \int_0^1 D_1^2 G(t,s)\, \chi(s)\, ds + \frac{\chi(t)}{\rho(t)} , \text{ a.e en } [0,1]$$

y $\varphi \in D(L_b)$. De esta manera obtenemos:

$$-(p\varphi')'(t) + (q\varphi)(t) = \int_0^1 \left[-(p(t)\, D_1 G(t,s))' + q(t)\, G(t,s)\right] \chi(s)\, ds + \chi(t)$$

a.e. en $[0,1]$

de donde, usando (5), $L_b \varphi = \chi$ en $L^2$ , es decir $L_b T_0 = I$ .

c) Si para $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_\lambda$ es el operador definido por el 'nucleo' $G_\lambda$ , es decir :

$$(T_\lambda \chi)(t) := \int_0^1 G_\lambda(t,s)\,\chi(s)\,ds \quad , \quad t \in [0,1] \quad , \quad \chi \in L^2 \; ;$$

se tiene, usando (a), (b) y substituyendo $q$ por $q-\lambda$ , que

$$(L_b - \lambda I)\, T_\lambda = I \, .$$

Como además asumimos que $\lambda \notin \sigma(L_b)$, es decir $L_b - \lambda I$ es inyectivo, tenemos que $T_\lambda$ es la inversa de $L_b - \lambda I$ , es decir : $(L_b - \lambda I)^{-1} = T_\lambda$ . El resto de las afirmaciones en (c) se obtiene de la proposición 1.2.

Observación 1.5: La función $G_\lambda$ cuya existencia hemos asumido, se denomina la función de Green del 'problema de frontera':

$$\left.\begin{aligned} -(p\varphi')' + q\varphi &= \lambda\varphi \\ B_0\varphi = B_1\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

Asumiendo solamente que $\lambda$ no es valor propio de $L_b$ , es decir $L_b - \lambda I$ es 1-1, demostremos ahora que existe una función de Green $G_\lambda$ del problema (1.14) y con esto, que $L_b - \lambda I$ es también sobre.

Proposición 1.3: Sea $L_b$ el operador definido por (1.14). Entonces, si $\lambda \in \mathbb{K}$ no es valor propio de $L_b$ , existe una función $G_\lambda : [0,1]^2 \to \mathbb{K}$ que satisface las condiciones (1)-(4), (5') del Lema 1.3 y por lo tanto $(L_b - \lambda I)^{-1}$ es un operador lineal, continuo, compacto y tiene la 'representación'

$$(L_b - \lambda I)^{-1}\chi(t) = \int_0^1 G_\lambda(t,s)\,\chi(s)\,ds \quad , \quad t \in [0,1] \quad , \quad \chi \in L^2 .$$

Además, $L_b$ es un operador cerrado.

Demostración: Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ , tal que $\lambda$ no sea valor propio de $L_b$ . Si $(\varphi_1, \varphi_2)$ es una base de $Ker(L-\lambda I)$ (sabemos que $\dim Ker(L-\lambda I) = 2$ ), se tiene por corolario 1.1 que existe $\Delta \in \mathbb{K}$, $\Delta \neq 0$ tal que $p[\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2](t) = \Delta$ . Definamos $H_\lambda : [0,1]^2 \to \mathbb{K}$ por

$$H_\lambda(t,s) := \begin{cases} \dfrac{\varphi_1(s)\,\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\,\varphi_2(s)}{\Delta} & , \quad 0 \le s \le t \le 1 \\ 0 & , \quad 0 \le t < s \le 1 \end{cases}$$

$H_\lambda$ Satisfaco (1), (2), (3) del Lema 1.3 (simple cálculo, sabiendo que $(\varphi_1, \varphi_2)$ es una base de $\ker(L-\lambda I)$.

Si $c_1, c_2$ son funciones continuas en $[0,1]$ arbitrarias y definimos $G_\lambda : [0,1]^2 \to \mathbb{K}$ por

$$G_\lambda(t,s) := c_1(s)\,\varphi_1(t) + c_2(s)\,\varphi_2(t) + H_\lambda(t,s) \; ; \qquad (1.15)$$

Obviamente se tiene también que $G_\lambda$ verifica (1), (2), (3). Veamos ahora, que existen $c_1, c_2 \in C[0,1]$ adecuadas, tales que $G_\lambda$ satisface además la condición (4). Consideremos la aplicación lineal $B : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ cuya representación matricial en la base canónica es:

$$[B] = \begin{pmatrix} B_0\varphi_1 & B_0\varphi_2 \\ B_1\varphi_1 & B_1\varphi_2 \end{pmatrix}$$

Claramente $B$ es 1-1 ya que si $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{K}^2$ tal que $B\xi = 0$, entonces $B_0(\xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2) = 0$ y $B_1(\xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2) = 0$ ; es decir : $\xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2 \in \ker(L_b - \lambda I)$ . Como hemos asumido que $\lambda$ no es valor propio de $L_b$ se tiene $\xi = 0$ . Siendo $B$ inyectivo en $\mathbb{K}^2$, $B$ es también sobre. Luego, para todo $s \in (0,1)$ dado, la ecuación

$$\begin{pmatrix} B_0\varphi_1 & B_0\varphi_2 \\ B_1\varphi_1 & B_1\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_0 H_\lambda(\cdot, s) \\ -B_1 H_\lambda(\cdot, s) \end{pmatrix} \; , \qquad (1.16)$$

tiene solución única $(c_1(s), c_2(s))$ ; obviamente $c_1, c_2 : (0,1) \to \mathbb{K}$ son funciones continuas ya que $B_0 H_\lambda(\cdot, s)$ , $B_1 H_\lambda(\cdot, s)$ lo son para $s \in (0,1)$ y $[B]$ es una matriz constante e invertible. De (1.16) obtenemos (4) del Lema 1.3 para $G_\lambda$ . Ahora por existir

$$\lim_{s \to 0} D_1 H_\lambda(0,s) \quad , \quad \lim_{s \to 1} D_1 H_\lambda(1,s)$$

y ser $H_\lambda$ continua, entonces las funciones $c_1, c_2$ poseen extensiones continuas a $[0,1]$. Con las funciones así construídas, $G_\lambda$ definido por (1.15) satisface también (5').

Aplicando el lema 1.3 obtenemos, que $L_b - \lambda I$ no es solo 1-1 sino también sobre, $(L_b - \lambda I)^{-1}$ es continua y compacta y

$$(L_b - \lambda I)^{-1} \chi(t) = \int_0^1 G_\lambda(t,s)\, \chi(s)\, ds \quad , \quad t \in [0,1], \quad \chi \in L^2.$$

Como $(L_b - \lambda I)^{-1}$ es continua con dominio $L^2$ entonces $(L_b - \lambda I)^{-1}$ es cerrado y por tanto $L_b$ cerrado.

El siguiente resultado, concerniente al operador $L_b$, lo deduciremos fácilmente usando un teorema del Análisis Funcional para operadores compactos autoadjuntos en espacios de Hilbert (teorema de Hilbert-Schmidt o teorema espectral). Para su demostración ver por ejemplo [3] pag. 336 - 337.

Teorema 1.2: Sea $(H, \langle , \rangle)$ un espacio de Hilbert separable; $A \neq 0$, $A: H \to H$ un operador lineal acotado, autoadjunto y compacto.

Entonces existe una sucesión (finita o infinita) $(\lambda_n)_{n \in N(A)}$ de valores propios reales (contados de acuerdo a su multiplicidad algebraica finita) con $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ y vectores propios $(\varphi_n)_{n \in N(A)}$ correspondientes, tales que $|\varphi_n| = 1$, $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0$, $n \neq m$ y

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{n \in N(A)} \langle \varphi, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad , \quad \forall \varphi \in H$$

donde $\varphi_0 \in \ker(A)$. Si $\dim H = \infty$ se tiene $N(A) = \mathbb{N}$, $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\to} 0$, $\lambda_n \neq 0$ y $\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Además, si $\lambda \in K$, $\lambda \in \rho(A)$ se tiene $\forall \varphi \in H$ :

$$(A - \lambda I)^{-1} \varphi = -\lambda^{-1} \varphi + \lambda^{-1} \sum_{n \in N(A)} \lambda_n (\lambda_n - \lambda)^{-1} \langle \varphi, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

y la familia $(\varphi_n)_{n\in N(A)}$ es un sistema ortonormal completo para $H$ si y solo si $A$ es inyectivo.

Aún cuando el teorema espectral se refiere a operadores continuos con dominio $H$ su importancia en muchas situaciones reside en su aplicabilidad a operadores autoadjuntos $B: D(B)\subset H \to H$ no necesariamente acotados que tienen una inversa compacta. Obsérvese que si B es autoadjunto e invertible, entonces también $B^{-1}$ es autoadjunto.

Tenemos como consecuencia simple del teorema i.2:

Teorema 1.3: Sea $B: D(B)\subset H \to H$ un operador lineal autoadjunto (no necesariamente acotado), $H$ un espacio de Hilbert separable y $\dim H=\infty$, tal que existe la inversa $B^{-1}$ de $B$ y sea compacta. Sean $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ los valores propios y vectores propios de $B^{-1}$ de acuerdo al teorema i.2 .

Entonces:

a) Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , donde $\lambda_n := \frac{1}{\mu_n}$ , $n\in\mathbb{N}$ , entonces $|\lambda_n|\to\infty$, $n\to\infty$, $\sigma(B)=\{\lambda_n / n\in\mathbb{N}\}$ y $\phi_n, n\in\mathbb{N}$ son los vectores propios correspondientes a los valores propios $\lambda_n$, $n\in\mathbb{N}$.

b) $\forall \lambda\in\rho(B)$ , $\varphi\in H$ se tiene

$$(B-\lambda I)^{-1}\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i-\lambda)^{-1}\langle \varphi,\phi_i\rangle \phi_i \ .$$

El siguiente criterio para determinar cuando un operador simétrico es autoadjunto lo utilizaremos mas adelante. Su simple prueba puede ser consultada en [2] pag. 97

Lema 1.4: Sea $B: D(B)\subset H\to H$ un operador lineal con $\overline{D(B)}=H$ simétrico, es decir :

$$\langle Bx,y\rangle = \langle x, By\rangle \ , \ \forall x,y\in D(B) \ ,$$

y supongamos que

existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Im(B-\lambda I) = H$, es decir: $B-\lambda I$ es sobre. Entonces $B$ es un operador autoadjunto, es decir: $B = B^*$.

Vamos a considerar ahora en más detalle casos particulares de los funcionales $B_0$, $B_1$ definidos anteriormente y que 'generan' operadores autoadjuntos en $L^2[0,1]$, lo cual nos permitirá obtener resultados importantes acerca de la resolvente de acuerdo al teorema 1.3. En particular, consideraremos las 'condiciones de frontera separadas' o de Sturm-Liouville.

$$(SLS) \quad \begin{cases} B_0\varphi = \alpha_1 \varphi(0) + \alpha_2 \varphi'(0) & \text{con} \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \ i=1,2. \\ B_1\varphi = \beta_1 \varphi(1) + \beta_2 \varphi'(1) & \text{y} \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \ \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

y brevemente las 'condiciones de frontera periódicas'

$$(SLP) \quad \begin{cases} B_0\varphi = \varphi(0) - \varphi(1) \\ B_1\varphi = \varphi'(0) - \varphi'(1) \end{cases} \tag{1.18}$$

Observación 1.6: Las condiciones (SLS) son llamadas 'condiciones de frontera separadas' debido a que cada funcional 'exige' algo solo en un punto de la frontera del intervalo. Un caso particular importante es el dado por $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ 'condiciones de frontera de Dirichlet' y otro el dado por $\alpha_1 \leq 0$, $\beta_1 \geq 0$, $\alpha_2 = \beta_2 = 1$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$.

Antes de consideror operadores $L_b$ 'generados' por los funcionales definidos por (SLS) y (SLP) mencionaremos un resultado de 'estimaciones a priori' para las funciones del dominio de $L$. Para una demostración, ver [4] pag. 157. El resultado es válido también para $L_p$, $1 \leq p < \infty$.

Lema 1.3 : Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo (no necesariamente finito) y sea

$$D(I) := \{ \varphi \mid \varphi : I \to \mathbb{K} \ , \ \varphi' \in AC(I) \ , \ \varphi'' \in L^2(I) \}$$

Entonces: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \ K_1 = K_1(\epsilon) \ , \ K_2 = K_2(\epsilon) : \ \forall \varphi \in D(I) \cap L^2(I)$ se tiene

a) $|\varphi'(t)|^2 \leq K_1 |\varphi|_2^2 + \epsilon |\varphi''|_2^2 \ , \quad \forall t \in I$

b) $|\varphi'|_2^2 \leq K_2 |\varphi|_2^2 + \epsilon |\varphi''|_2^2$

Ahora estamos en condiciones de probar:

Teorema 1.4: Supongamos que los funcionales lineales $B_0, B_1$ con dominio $D(B_i) = AC^2$, $i = 1, 2$ , están definidos por (SLS) . Sea $L_b$ el operador definido por

$$\begin{cases} D(L_b) := \{ \varphi \mid \varphi \in D(L) \subset L^2, \ B_0 \varphi = B_1 \varphi = 0 \} \\ L_b \varphi := -(p\varphi')' + q\varphi \quad , \ \varphi \in D(L_b) \end{cases}$$

Entonces: (1) El operador $L_b$ es autoadjunto, cerrado y de dominio denso en $L^2$.

2) El espectro $\sigma(L_b)$ de $L_b$ es un conjunto contable de valores propios reales, todos ellos simples, acotados inferiormente y que, ordenados de modo que $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ , satisfacen $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$.

3) Si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de vectores propios correspondientes a los $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $|\varphi_n|_2 = 1$ , entonces $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2$ es decir $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0$ para $n \neq m$ y $\forall \psi \in L^2$ se tiene

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

4) Si $\lambda \notin \sigma(L_b)$ se cumple que $(L_b - \lambda I)^{-1}$ es compacta y

$$(L_b - \lambda I)^{-1} \psi = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)^{-1} \langle \psi, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad , \ \forall \psi \in L^2 .$$

Demostración: Sabemos por el Lema 1.2 que $D(L_b)$ es denso en $L^2$.

Verifiquemos primero las condiciones del Teorema 1.3;

$L_b$ es autoadjunto: En efecto, sean $\varphi, \psi \in D(L_b)$. Entonces

$$\langle L_b \varphi, \psi \rangle = -\int_0^1 (p(s)\varphi'(s))' \overline{\psi(s)}\, ds + \int_0^1 q(s)\varphi(s)\overline{\psi(s)}\, ds.$$

Como $p\varphi' \in AC$ y $\overline{\psi} \in C^1 \subset AC$, podemos integrar por partes, dos veces, y llegamos a

$$\langle L_b \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L_b \psi \rangle + \left[ p(\varphi \overline{\psi}' - \varphi' \overline{\psi}) \right]_0^1 . \quad (1.19)$$

Veamos ahora que el segundo término del lado derecho en (1.19) se anula para $\varphi, \psi \in D(L_b)$. En realidad, como $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$

$$B_0 \varphi = \alpha_1 \varphi(0) + \alpha_2 \varphi'(0) = 0$$

$$\overline{B_0 \psi} = \alpha_1 \overline{\psi(0)} + \alpha_2 \overline{\psi'(0)} = 0$$

y dado que $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ se verifica $\varphi(0)\overline{\psi}'(0) - \overline{\psi(0)}\varphi'(0) = 0$.

Por lo tanto $p(0)\left[\varphi(0)\overline{\psi'(0)} - \varphi'(0)\overline{\psi(0)}\right] = 0$.

De igual forma se muestra, usando $B_1\varphi$, $\overline{B_1\psi}$ y $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$ que $p(1)\left[\varphi(1)\overline{\psi'(1)} - \varphi'(1)\overline{\psi(1)}\right] = 0$;

y de acuerdo a (1.19) $\langle L_b \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L_b \psi \rangle$, $\forall \varphi, \psi \in D(L_b)$, es decir: $L_b$ es simétrico. Para aplicar el lema 1.4 basta demostrar que $\rho(L_b) \neq \phi$. Probemos que si $\lambda_1, \lambda_2$ son valores propios distintos de $L_b$ con vectores propios $\varphi_1, \varphi_2$ se tiene que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$ ; en efecto: $\lambda_1 |\varphi_1|_2^2 = \langle L_b \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_1, L_b \varphi_1 \rangle = \overline{\lambda_1} |\varphi_1|_2^2$, $\therefore \lambda_1 = \overline{\lambda_1}$ y con eso $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ ; por otro lado $\langle \lambda_1 \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle L_b \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, L_b \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \lambda_2 \varphi_2 \rangle$ y con eso, debido a que $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$ se tiene $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$.

Como $L^2[0,1]$ es separable solo puede haber un número, a lo sumo contable de valores propios distintos. Por lo tanto existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda$ no es valor propio de $L_b$. Entonces por la proposición 1.3 $\lambda \in \rho(L_b)$, es decir $Im(L_b - \lambda I) = L^2$ y de acuerdo al Lema 1.4 $L_b$ es autoadjunto. Como $(L_b - \lambda I)$ es sobre y $(L_b - \lambda I)^{-1}$ es continua y por lo tanto cerrada, se verifica también que $L_b$ es un operador

cerrado. Como $L_b$ es autoadjunto, también lo serán $L_b-\lambda I$ y $(L_b-\lambda I)^{-1}$. Por lo tanto podemos aplicar el Teorema 1.3 a $(L_b-\lambda I)^{-1}$ ya que $(L_b-\lambda I)^{-1}$ es además, por la proposición 1.3, un operador compacto.

Observando que $\mu \in \sigma(L_b-\lambda I)$ si y solo si $\lambda+\mu \in \sigma(L_b)$ vemos que de las afirmaciones (2), (3), (4) sólo queda por demostrar, que los valores propios de $L_b$ son todos simples, es decir $\dim \ker (L_b-\lambda_n I) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\{\lambda_n / n \in \mathbb{N}\}$ es acotado inferiormente. Sea pués $\lambda_n$ valor propio de $L_b$ y $\varphi_n \in \ker (L_b-\lambda_n I)$ vector propio. Ahora existe, teorema 1.1, $\psi \in D(L)$ con $L\psi - \lambda_n \psi = 0$, $\psi(0)=\alpha_1$, $\psi'(0)=\alpha_2$. Como $\beta_0 \psi = \alpha_1 \psi(0) + \alpha_2 \psi'(0) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, se tiene $\psi \notin D(L_b)$; por lo tanto $\psi \notin \ker (L_b-\lambda_n I)$; por consiguiente $\ker (L_b-\lambda_n I) \subsetneq \ker (L-\lambda_n I)$, luego $\dim \ker (L_b-\lambda_n I) = 1$.

Veamos por último que los $\lambda_n$ son acotados inferiormente; para ello verifiquemos primero que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K(\epsilon) \quad \forall \varphi \in C^1[0,1] \quad |\varphi(t)|^2 \le K(\epsilon)\,|\varphi|_2^2 + \epsilon\,|\varphi'|_2^2 \,, \quad t \in [0,1]$$

Basta definir $F(t) := \int_0^t \varphi(s)\,ds$, $t \in [0,1]$; entonces $F' = \varphi \in C^1[0,1]$ y con ésto $F' \in AC$ y $F'' = \varphi' \in C[0,1] \subset L^2$. Por el lema 1.5 existe $K(\epsilon)$ tal que:

$$|F'(t)|^2 \le K(\epsilon)\,|F|_2^2 + \epsilon\,|F''|_2^2 \qquad (1.20)$$

Ahora $|F|_2^2 = \int_0^1 |F(s)|^2\,ds$ y $|F(t)| \le \int_0^t |\varphi(s)|\,ds \le \left(\int_0^t |\varphi(s)|^2\right)^{1/2} \le |\varphi|_2$, en consecuencia $|F|_2^2 \le |\varphi|_2^2$ y por lo tanto de (1.20)

$$|\varphi(t)|^2 \le K(\epsilon)\,|\varphi|_2^2 + \epsilon\,|\varphi'|_2^2 \qquad (1.21)$$

Sean ahora $\lambda$ un valor propio de $L_b$ y $\varphi$ vector propio con $|\varphi|_2^2 = 1$.

$$\lambda = \langle L_b\varphi, \varphi\rangle = \int_0^1 [-(p\varphi')' + q\varphi]\,\bar{\varphi} = \int_0^1 -(p\varphi')'\bar{\varphi} + \int_0^1 q\varphi\bar{\varphi} =$$

$$= -p\varphi'\bar{\varphi}\Big]_0^1 + \int_0^1 p\varphi'\overline{\varphi'} + \int_0^1 q\varphi\bar{\varphi} =$$

$$= -p\varphi'\bar{\varphi}\Big]_0^1 + \int_0^1 p|\varphi'|^2 + \int_0^1 q|\varphi|^2 \qquad (1.22)$$

Consideremos ahora $|p(0)\,\overline{\varphi(0)}\,\varphi'(0)|$ : Si $\varphi(0)=0$ tenemos $p(0)\,\overline{\varphi(0)}\,\varphi'(0)=0$ y si $\varphi(0)\neq 0$ obtenemos de $B_0\varphi = \alpha_1\varphi(0) + \alpha_2\varphi'(0) = 0$ que $\alpha_2 \neq 0$ . Por tanto $\alpha_1 |\varphi(0)|^2 + \alpha_2\,\varphi'(0)\,\overline{\varphi(0)} = 0$ y $\varphi'(0)\,\overline{\varphi(0)} = \alpha_1\alpha_2^{-1}\,|\varphi(0)|^2$ , luego :

$$|p(0)\,\overline{\varphi(0)}\,\varphi'(0)| = \begin{cases} p(0)\,|\alpha_1\alpha_2^{-1}|\,|\varphi(0)|^2, & \text{si } \varphi(0)\neq 0 \\ 0, & \text{si } \varphi(0)=0 \end{cases}$$

En forma análoga, usando $B_1\varphi$ , se obtiene

$$|p(1)\,\overline{\varphi(1)}\,\varphi'(1)| = \begin{cases} p(1)\,|\alpha_1\alpha_2^{-1}|\,|\varphi(1)|^2, & \text{si } \varphi(1)\neq 0 \\ 0, & \text{si } \varphi(1)=0 \end{cases}$$

Ahora bien, como $\varphi \in C^1[0,1]$ obtenemos de (1.21)

$$|\varphi(0)|^2 \leq K(\epsilon)\,|\varphi|_2^2 + \epsilon\,|\varphi'|_2^2$$

$$|\varphi(1)|^2 \leq K(\epsilon)\,|\varphi|_2^2 + \epsilon\,|\varphi'|_2^2$$

y utilizando la desigualdad $-(-p\varphi'\overline{\varphi}\,]_0^1 \geq -|p(0)\overline{\varphi(0)}\varphi'(0)| - |p(1)\overline{\varphi(1)}\varphi'(1)|$ se obtiene de (1.22) con constantes $c_1 - c_5$ , $c_i \geq 0$ $(c_1 = \min_{t\in[0,1]} p(t) > 0)$ :

$$\lambda \geq c_1|\varphi'|_2^2 - c_2\epsilon|\varphi'|_2^2 - c_3|\varphi|_2^2 - c_4|\varphi|_2^2 \geq$$

$$\geq (c_1 - c_2\epsilon)\,|\varphi'|_2^2 - c_5|\varphi|_2^2 \geq -c_5$$

ya que $|\varphi|_2^2 = 1$ y $c_1 - c_2\epsilon \geq 0$ para $\epsilon$ suficientemente pequeño, y el teorema está demostrado.

En un caso particular del teorema 1.4 podemos determinar fácilmente una cota inferior para los valores propios de $L_b$.

Proposición 1.4: Asumamos las condiciones del teorema 1.4 y sea $M = \min\{q(t) : t\in[0,1]\}$ . Supongamos además que $\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 = 0$.

Entonces: a) $\forall \varphi \in D(L_b)$ se tiene $\langle L_b\varphi,\varphi\rangle \geq M|\varphi|_2^2$ y con eso para los valores propios de $L_b$ : $M \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$

b) Si $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ (condiciones de Dirichlet) y $M \geq 0$ se tiene que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ y $L_b$ es un operador positivo.

Demostración: a) Como en la demostración de teorema 1.4 obtenemos, integrando por partes, para $\varphi \in D(L_b)$

$$\langle L_b \varphi, \varphi \rangle = -p\varphi' \bar{\varphi} \Big]_0^1 + \int_0^1 p|\varphi'|^2 + \int_0^1 q|\varphi|^2 \qquad (1.23)$$

Ahora la condición $\alpha_1 \alpha_2 = \beta_1 \beta_2 = 0$ da inmediatamente que $-p\varphi'\bar{\varphi}\Big]_0^1 = 0$ y como $p(t) > 0$ para $t \in [0,1]$ se obtiene de (1.23)

$$\langle L_b \varphi, \varphi \rangle \geq M |\varphi|_2^2 \qquad (1.24)$$

y por tanto $M \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ para los valores propios do $L_b$.

b) Si $M \geq 0$ (1.24) da $\langle L_b \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ para $\varphi \in D(L_b)$, es decir $L_b$ es positivo. Veamos ahora, que 0 no es valor propio. Para ello basta probar que $L_b$ es 1-1. De (1.23) obtenemos, si $\varphi \in D(L_b)$ y $L_b \varphi = 0$

$$0 = \langle L_b \varphi, \varphi \rangle = \int_0^1 p(s)\,|\varphi'(s)|^2 ds + \int_0^1 q(s)\,|\varphi(s)|^2 ds$$

Como $p(t) \geq 0$, $q(t) \geq 0$, $t \in [0,1]$ tenemos

$$\int_0^1 p(s)\,|\varphi'(s)|^2 ds = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^1 q(s)\,|\varphi(s)|^2 ds = 0$$

Ahora $p(s) > 0$, $s \in [0,1]$ y con eso $\varphi'(s) = 0$, $s \in [0,1]$, es decir $\varphi \equiv$ const.; pero como $B_0 \varphi = \varphi(0) = 0$ se tiene $\varphi \equiv 0$; es decir $L_b$ es inyectivo, lo que queriamos demostrar.

Para el caso de las condiciones de fronteras perlódicas se tiene un resultado similar al teorema 1.4. Siguiendo las lineas de la demostración del teorema 1.4 su prueba es fácil y queda para el lector.

Teorema 1.5: Sean $p \in C^1[0,1]$, $p(t) > 0$, $p(0) = p(1)$, $q \in C[0,1]$ y $M := \min\{q(t) \mid t \in [0,1]\}$. Supongamos que los funcionales $B_0, B_1$ con dominio $D(B_i) = AC^2$, $i = 1,2$, están definidos por

$$(SLP) \quad \begin{cases} B_0 \varphi = \varphi(0) - \varphi(1) \\ B_1 \varphi = \varphi'(0) - \varphi'(1) \end{cases}$$

Sea $L_b$ el operador definido por

$$\begin{cases} D(L_b) := \{ \varphi \mid \varphi \in D(L) \subset L^2 \,,\ B_0\varphi = B_1\varphi = 0 \} \\ L_b\varphi := -(p\varphi')' + q\varphi \quad , \ \varphi \in D(L_b) \end{cases}$$

Entonces: 1) El operador $L_b$ es autoadjunto, cerrado y de dominio denso en $L^2$.

2) El espectro $\sigma(L_b)$ de $L_b$ es un conjunto contable de valores propios reales con $M \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots\cdots$ y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.

3) $\forall \varphi \in D(L_b)$ se tiene $\langle L_b\varphi, \varphi \rangle \geq M |\varphi|_2^2$

4) Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de vectores propios correspondientes a los $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $|\varphi_n|_2 = 1$ , entonces $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2[0,1]$.

5) Si $\lambda \notin \sigma(L_b)$ , $(L_b - \lambda I)^{-1}$ es compacto y se cumple

$$(L_b - \lambda I)^{-1}\psi = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)^{-1} \langle \psi, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad , \ \forall \psi \in L^2.$$

Observación 1.7: En este caso no puede probarse que 0 no es valor propio de $L_b$ . Basta considerar $q(t) \equiv 0$ y ver que toda constante es solución. Tampoco puede probarse que los valores propios son simples.

Teniendo presente las aplicaciones de los capítulos siguientes, consideramos una propiedad de la resolvente de $L_b$ bajo condiciones de fronteras de Dirichlet. Recordemos:

Definición 1.2: Sea $X$ un espacio normado. Un subconjunto $K \subset X$ se llama un cono si para todo $x, y \in K$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ se tiene $x+y \in K$, $\lambda x \in K$. El cono se llama estricto, si dado $x \in K$ tal que $-x \in K$, entonces necesariamente $x = 0$.

Demostramos primero el siguiente Lema:

**Lema 1.6:** Sean $\Lambda \subsetneq \mathbb{R}$ un intervalo (no necesariamente compacto) y

$$K(\Lambda) := \{ \varphi \mid \varphi \in L^2([0,1]; \mathbb{R}),\ \varphi(t) \in \Lambda \text{ a.e. en } [0,1] \}$$

**Entonces:** 1) $K(\Lambda)$ es un conjunto convexo y cerrado en $L^2$.

2) Si $\Lambda$ es compacto, $K(\Lambda)$ es acotado en $L^2$.

3) $K([0,+\infty))$ es un cono cerrado y estricto.

4) Las funciones 'continuas' en $K(\Lambda)$ son densas en $K(\Lambda)$.

**Demostración:** 1) Sea $(\varphi_n)$ una sucesión en $K(\Lambda)$ y $\varphi \in L^2$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{L^2} \varphi$. Veamos que $\varphi \in K(\Lambda)$. Como $\varphi_n \to \varphi$ en $L^2$ existe una subsucesión $(\varphi_{n_j})$ con $\varphi_{n_j} \to \varphi$ a. e. para $j \to \infty$. Por tanto existe $E_0 \subset [0,1]$ con $mE_0 = 0$ tal que $\varphi_{n_j}(t) \to \varphi(t)$ $\forall t \in [0,1] \setminus E_0$. Como $\varphi_{n_j} \in K(\Lambda)$ $\forall j \in \mathbb{N}$, existe $E_j \subset [0,1]$ tal que $\varphi_{n_j}(t) \in \Lambda$ $\forall t \in [0,1] \setminus E_j$. Sea $E = E_0 \cup (\bigcup_1^\infty E_j)$. Como $mE = 0$ y $\varphi_{n_j}(t) \to \varphi(t)$, $\varphi_{n_j}(t) \in \Lambda$ para $t \in [0,1] \setminus E$ y $\Lambda$ es cerrado, entonces $\varphi(t) \in \Lambda$ para $t \in [0,1] \setminus E$, es decir $\varphi \in K(\Lambda)$; por consiguiente $K(\Lambda)$ es cerrado. Veamos que $K(\Lambda)$ es también convexo: Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in K(\Lambda)$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$; entonces existen $E_1 \subset [0,1]$, $mE_1 = 0$ tal que $\varphi_1(t) \in \Lambda$ para $t \in [0,1] \setminus E_1$ y $E_2 \subset [0,1]$, $mE_2 = 0$ tal que $\varphi_2(t) \in \Lambda$ para $t \in [0,1] \setminus E_2$, si $E = E_1 \cup E_2$, $mE = 0$, y para $t \in [0,1] \setminus E$ se tiene, dado que $\Lambda$ es convexo que $\alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) \in \Lambda$, es decir $K(\Lambda)$ convexo.

2) Sean $\Lambda$ compacto y $\varphi \in K(\Lambda)$; entonces $\varphi(t) \in \Lambda$, a. e.; sea $R > 0$ tal que $|t| \leq R$ $\forall t \in \Lambda$; entonces $|\varphi(t)| \leq R$, a. e. y por tanto $|\varphi(t)|^2 \leq R^2$, de donde $|\varphi|_2^2 = \int_0^1 |\varphi(t)|^2 dt \leq R^2$. En consecuencia $R$ es cota para $K(\Lambda)$.

3) $K([0,\infty))$ es cerrado por (1). Sea $\varphi \in K([0,\infty))$ y $\alpha \geq 0$; entonces $\alpha\varphi(t) \in [0,\infty)$, a. e, luego $\alpha\varphi \in K(\Lambda)$. La prueba de que $\varphi_1 + \varphi_2 \in K([0,\infty))$ si $\varphi_1, \varphi_2 \in K([0,\infty))$ es también trivial. Sea $\varphi \in K([0,\infty))$ tal que $-\varphi \in K([0,\infty))$, entonces $\varphi(t) \geq 0$, $-\varphi(t) \geq 0$ a. e. lo que implica $\varphi(t) = 0$, a.e., es decir $\varphi = 0$ en $L^2$.

b) Sea primero $[\varphi] \in K(\Lambda)$ con $\varphi$ acotada, $|\varphi(t)| \leq K$, $\forall t \in [0,1]$.
Por el teorema de Lusin tenemos que $\forall \eta > 0 \ \exists \psi \in C([0,1], \mathbb{R})$ con
$|\psi(t)| \leq K$, $t \in [0,1]$ y $m\{x / \varphi(x) \neq \psi(x)\} \leq \eta$.
Construyamos una modificación $\hat{\psi}$ de $\psi$ de manera que $\hat{\psi} \in C([0,1], \Lambda)$ y

$$|\varphi(t) - \hat{\psi}(t)| \leq |\varphi(t) - \psi(t)| \quad \text{a.e. en } [0,1] \qquad (1.25)$$

Supongamos para ello que $\Lambda = [a,b]$ (los demás casos $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ son análogos) y sea

$$\hat{\psi}(t) = \begin{cases} b & , \text{ si } \psi(t) > b \\ \psi(t) & , \text{ si } a \leq \psi(t) \leq b \\ a & , \text{ si } \psi(t) < a \end{cases}$$

Es claro que $\hat{\psi}(t) \in \Lambda$ para todo $t \in [0,1]$, $\hat{\psi}$ es continua, satisface (1.25) y $|\hat{\psi}(t)| \leq K$. Luego, dado $\epsilon > 0$ sea $\eta > 0$ tal que $\eta \cdot K^2 \leq \epsilon$, entonces:

$$\int_{[0,1]} |\varphi - \hat{\psi}|^2 = \int_{\varphi(t) \notin \Lambda} |\varphi - \hat{\psi}|^2 + \int_{\varphi(t) \in \Lambda} |\varphi - \hat{\psi}|^2 = \int_{\varphi(t) \in \Lambda} |\varphi - \hat{\psi}|^2 \leq \int_{\varphi(t) \in \Lambda} |\varphi - \psi|^2 =$$

$$= \int_{\{x / \varphi(x) \neq \psi(x)\}} |\varphi - \psi|^2 \leq \epsilon .$$

Por lo tanto $|[\varphi] - [\hat{\psi}]|_2^2 \leq \epsilon$.
Sea ahora $[\varphi] \in K(\Lambda)$ con $\varphi$ no esencialmente acotada, consideremos para $n \in \mathbb{N}$ las truncaciones $\varphi_n$:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} n & , \text{ si } \varphi(t) > n \\ \varphi(t) & , \text{ si } -n \leq \varphi(t) \leq n \\ -n & , \text{ si } \varphi(t) < -n \end{cases}$$

Como para $n$ suficientemente grande $\varphi_n(t) \in \Lambda$, a.e. $\varphi_n \in L^2$ y

$$\int_0^1 |\varphi - \varphi_n|^2 \to 0 \quad \text{para} \quad n \to \infty$$

basta aplicar el resultado anterior a las $\varphi_n$ que son acotadas para obtener de la desigualdad

$$|\varphi - \hat{\psi}_n|_2 \leq |\varphi - \varphi_n|_2 + |\varphi_n - \hat{\psi}_n|_2$$

lo deseado.

Demostremos ahora la propiedad anunciada anteriormente sobre la resolvente de $L_b$:

Teorema 1.6: Sea $L_b$ el operador en $L^2 = L^2([0,1],\mathbb{R})$ definido por

$$D(L_b) := \{\varphi \mid \varphi \in D(L_b),\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$$

$$L_b\varphi := -(p\varphi')' + q\varphi$$

donde, como antes, $p \in C^1[0,1]$, $p(t) > 0$, $t \in [0,1]$, $q \in C[0,1]$ y se cumple además: $q(t) \geq 0$, $t \in [0,1]$, es decir $q$ es no negativo.

Entonces: 1) $L_b$ es positivo, autoadjunto y los valores propios de $L_b$ son tales que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ con $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.

2) $\forall h > 0$ la inversa $(I + hL_b)^{-1}$ existe, es compacta y para todo intervalo cerrado $\Lambda \subset \mathbb{R}$ con $0 \in \Lambda$, el conjunto $K(\Lambda)$ es $(I+hL_b)^{-1}$- invariante, es decir:

$$(I+hL_b)^{-1} : K(\Lambda) \to K(\Lambda)$$

Demostración: 1) Que $L_b$ es autoadjunto y sus valores propios satisfacen $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ se sigue del teorema 1.4 y la proposición 1.4 ya que $q(t) \geq 0$. Igualmente de la prop. 1.4 se sigue que $L_b$ es positivo.

2) Como $(I+hL_b)^{-1} = h^{-1}(L_b + h^{-1}I)^{-1}$ y $-h < 0$, entonces del teorema 1.4 es claro que $(I+hL_b)^{-1}$ está definido y es compacto. En el Lema 1.6 demostramos que las funciones 'continuas' en $K(\Lambda)$ son densas en $K(\Lambda)$ y que $K(\Lambda)$ es cerrado. Por lo tanto, como $(I+hL_b)^{-1}$ es continua, basta demostrar, que para $\chi$ continua con

$\chi(t) \in \Lambda$ , $t \in [0,1]$ se tiene $(I + hL_b)^{-1}[\chi] \in K(\Lambda)$ . Sea $[\varphi] = (I + hL_b)^{-1}[\chi]$ . Sabemos que $[\varphi] \in D(L_b)$ y como $\chi$ la asumimos continua podemos suponer (ver observación 1.2 (ii) ) que $\varphi \in C^2[0,1]$. Por consiguiente:

$$\varphi(t) - h\,p'(t)\varphi'(t) - h\,p(t)\varphi''(t) + h\,q(t)\varphi(t) = \chi(t) \quad , \forall t \in [0,1] \qquad (1.26)$$

Sea $\varphi(t_0) = \max\{\varphi(t) \mid t \in [0,1]\}$. Si $t_0 = 0$ o $t_0 = 1$ se tiene $\varphi(t_0) = 0 \in \Lambda$ ; si $t_0 \in (0,1)$ entonces como $\varphi(t_0)$ es máximo se tiene $\varphi''(t_0) \leq 0$ y por (1.26)

$$(1 + h\,q(t_0))\,\varphi(t_0) = h\,p(t_0)\varphi''(t_0) + \chi(t_0) \leq \chi(t_0)$$

de donde

$$\varphi(t) \leq \varphi(t_0) \leq \chi(t_0)\,(1 + h\,q(t_0))^{-1} \leq \chi(t_0) \in \Lambda \quad , \forall t \in [0,1].$$

En consecuencia existe $b \in \Lambda$ con $\varphi(t) \leq b$ , $\forall t \in [0,1]$ . Sea ahora $\varphi(t_1) = \min\{\varphi(t) \mid t \in [0,1]\}$ . Argumentando de forma similar, se puede demostrar que existe $a \in \Lambda$ tal que $\varphi(t) \geq a$ $\forall t \in [0,1]$. Por lo tanto $\varphi(t) \in [a,b] \subset \Lambda$ , $\forall t \in [0,1]$ ; luego

$$[\varphi] = (I + hL_b)^{-1}[\chi] \in K(\Lambda)$$

y el teorema está demostrado.

# CAPITULO 2

## SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEALES

En este capítulo mencionaremos los resultados básicos de la teoría de semigrupos, necesarios en el estudio de X-soluciones a ecuaciones diferenciales parciales. En particular, veremos como se aplican las técnicas de semigrupos al caso de la ecuación de difusión unidimensional en $L^2$

Consideraremos la situación unidimensional de la ecuación de difusión, con el fin de poder utilizar los resultados desarrollados en el capítulo 1. Nuestro estudio será una preparación para el caso no lineal que trataremos en los capítulos siguientes.

Dados un espacio de Banach X, con norma $|\cdot|$, $z \in X$ y una aplicación lineal continua $A: X \to X$, es sabido que el problema de valores iniciales independiente del tiempo:

$$u'(t) = Au(t) \quad , \quad u(0) = z \quad , \quad t \geq 0 \quad ; \qquad (2.1)$$

tiene una solución única:

$$u_z : [0, \infty) \longrightarrow X \quad .$$

Si para cada $t \geq 0$, definimos el operador

$$S(t) : X \to X \quad \text{por} \quad S(t)z = u_z(t) \quad ,$$

entonces la familia de operadores $S = \{S(t) : t \geq 0\}$ tiene las siguientes propiedades:

(S1) $S(0) = I$ , es decir $S(0)z = z \quad \forall z \in X$

(S2) $S(t+s)z = S(t)\,S(s)z \quad \forall t, s \geq 0 \ \forall z \in X$.

(S3) La función $[0,\infty) \to X$, $t \mapsto S(t)z$ es continua para cada $z \in X$

(S4) $S(t) \in BL(X)$ $\forall t \geq 0$ con $\|S(t)\| \leq e^{\|A\| t}$

(S5) $Az = \frac{d^+}{dt} S(0)z = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)z - z}{h}$, $\forall z \in X$.

La familia de operadores $S$ y la aplicación $A$ constituyen una realización de los conceptos abstractos de semigrupo de operadores lineales y de generador infinitesimal de un semigrupo, que definiremos a continuación.

Definición 2.1. Una familia $T = \{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineales y acotados de $X$ en $X$ se denomina semigrupo lineal de clase $(C_0)$ si:

a) $T(0) = I$ y $T(t+s) = T(t)\,T(s)$ para todo $t, s \geq 0$ y

b) La aplicación $[0, \infty) \longrightarrow X$, $t \longmapsto T(t)x$ es continua para cada $x \in X$.

Denotaremos por $LS_+(X)$ la colección de los semigrupos lineales $T$ de clase $(C_0)$ que tienen la propiedad adicional:

c) $\exists \omega \in \mathbb{R}$ $\forall t \geq 0$ $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.

Para $T \in LS_+(X)$, denotaremos por $\nu[T]$ al ínfimo de los $\omega \in \mathbb{R}$ que cumple c).

Definición 2.2. Si $T \in LS_+(X)$, el operador $A$ en $X$, definido por $D(A) = \{x \in X : \text{existe } \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}\}$

y $Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}$, para $x \in D(A)$,

se denomina generador infinitesimal de $T$.

Se puede probar que $D(A)$ es un subespacio lineal de $X$, el cual es denso en $X$, y que el operador $A$ es lineal y cerrado.

Además, si $x \in D(A)$ entonces $\forall t \geq 0$ $T(t)x \in D(A)$, la aplicación

$[0,\infty) \longrightarrow X$ es continuamente diferenciable en $[0,\infty)$ y
$t \longmapsto T(t)x$

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \quad \forall t \geq 0 \qquad (2.2)$$

En consecuencia, si $z \in D(A)$, entonces

$$u_z : [0,\infty) \longrightarrow D(A), \quad t \longmapsto u_z(t) = T(t)z$$

es la solución al problema de valores iniciales:

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = z, \quad t \geq 0.$$

Denotaremos por $LD_+(X)$ la clase de todos los operadores lineales $A$ en $X$ que tienen las siguientes propiedades:

a) $A$ es cerrado y el dominio de $A$, $D(A)$, es denso en $X$;

b) Existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que la resolvente de $A$, $\rho(A)$, contiene el intervalo $(\omega,\infty)$; es decir: $\rho(A) \supset (\omega,\infty)$, y además:

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda-\omega} \qquad \forall \lambda > \max\{\omega, 0\}.$$

Para $A \in LD_+(X)$, denotaremos por $\mu[A]$ al ínfimo de los $\omega \in \mathbb{R}$ que cumple (b).

Una de las relaciones mas importantes entre las clases $LS_+(X)$ y $LD_+(X)$ está dada por el teorema de Hille-Yosida ([2] p.283-5, [5] p.8,19).

Teorema 2.1 (Hille-Yosida). Sean $A$ un operador lineal en $X$ y $\omega \in \mathbb{R}$. $A$ es el generador de un miembro $T$ de $LS_+(X)$ con $\nu[T] = \omega$ si y solo si $A \in LD_+(X)$ y $\mu[A] = \omega$.

Además, si $A \in LD_+(X)$ es el generador de $T$ entonces:

$$T(t)z = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} z \qquad \forall t \geq 0 \quad \forall z \in X, \qquad (2.3)$$

y para cada $z \in X$ el límite es uniforme sobre intervalos acotados de $t$ y la correspondencia $T \longmapsto A$ de $LS_+(X)$ en $LD_+(X)$ es biunívoca.

Observese que de (2.2) y el teorema 2.1, es claro que si $A \in LD_+(X)$ el problema de valores iniciales:

$$u'(t) = Au(t) \ , \ u(0) = z \ , \ z \in D(A) \ , \ t \geq 0 \qquad (2.4)$$

tiene una única solución $u_z : [0,\infty) \to D(A)$ definida por $u_z(t) = T(t)z$ , donde $T$ es el semigrupo asociado con $A$ y puede ser calculada mediante (2.3). De allí el interés por saber cuando un operador lineal $A$ pertenece a la clase $LD_+(X)$.

Definición 2.3 Un semigrupo $T$ en $LS_+(X)$ con generador infinitesimal $A$ se dice diferenciable si

$$T(t)x \in D(A) \quad \forall x \in X \quad \forall t > 0 \ .$$

Cuando el operador $A$ en el problema de valores iniciales:

$$u'(t) = Au(t) \ , \ t > 0 \ , \ u(0) = z \ , \qquad (2.5)$$

es el generador de un semigrupo diferenciable, el valor inicial $z$ no necesariamente debe estar en el dominio de $A$ . Más exactamente, tiene lugar la siguiente afirmación:

Teorema 2.2. ( [5] pág 104) Si $A$ es el generador infinitesimal de un semigrupo diferenciable $T$ , entonces para cada $z \in X$ el problema de valores iniciales (2.5) tiene una única solución $u : [0,\infty) \to X$ definida por: $u(t) = T(t)z \quad \forall t \geq 0$ ; es decir:

$$u(0) = z \qquad \frac{d}{dt} T(t)z = AT(t)z \quad \forall t > 0 \ .$$

En la clase de semigrupos diferenciables destacaremos los llamados semigrupos analíticos:

Definición 2.4 Diremos que un miembro $T$ de $LS_+(X)$ es analítico si $T$ es diferenciable y existe $N > 0$ tal que:

$$t \, \| AT(t) \| \leq N \quad \forall t \in (0,1] \ .$$

El siguiente teorema nos da una condición suficiente para que un operador sea el generador de un semigrupo analítico:

Teorema 2.3. ( [2] pág.290-293). Sean $X$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$, $A$ un operador lineal cerrado en $X$ densamente definido y supongamos que existen $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ y $M \geq 1$ tales que:

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \alpha\} \equiv \Delta_\alpha \quad \text{y}$$

a) $$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \Delta_\alpha .$$

Entonces $A$ es el generador de un semigrupo analítico $T$ en $X$ y existe $N \geq 1$ tal que:

$$\|T(t)\| \leq N \qquad \|AT(t)\| \leq t^{-1} N, \quad \forall t > 0 .$$

Si la hipótesis a) es cambiada por la hipótesis b):

b) $$\exists\, \omega > 0 \qquad \|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{\omega + |\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \Delta_\alpha ,$$

entonces $A$ es el generador de un semigrupo analítico $T$ en $X$ y existen $\delta > 0$ y $N \geq 1$ tales que:

$$\|T(t)\| \leq N e^{-\delta t} \qquad \|AT(t)\| \leq t^{-1} N e^{-\delta t}, \quad \forall t > 0.$$

En el estudio de ecuaciones diferenciales semilineales cuya parte lineal $A$ pertenece a $LD_+(X)$, se ponen usualmente condiciones sobre el semigrupo $T$ asociado a $A$ que garantizan existencia de soluciones moderadas a dichas ecuaciones. Una de tales condiciones suele ser que $T(t): X \to X$ sea un operador compacto para todo $t > 0$. Esta condición es también esencial en el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones.

Definición 2.5 Un semigrupo $T$ de $LS_+(X)$ se dice compacto si para cada $t > 0$ el operador $T(t): X \to X$ es un miembro compacto de $BL(X)$; es decir, si $D \subset X$ es un subconjunto acotado de $X$ y $t > 0$, la clausura del conjunto $T(t)\langle D \rangle = \{T(t)x : x \in D\}$

es compacta en $X$.

Para semigrupos analíticos se tiene una condición suficiente para que el semigrupo sea compacto, formulada en términos de la resolvente del generador infinitesimal $A$.

Teorema 2.4. ([2] pág. 303). Supongamos que $T \in LS_+(X)$ y $A \in LD_+(X)$ es el generador de $T$. Si $T$ es analítico y la resolvente $R_A(\lambda) := (A-\lambda I)^{-1}$ es compacta para algún $\lambda \in \rho(A)$, entonces $T$ es compacto.

Para establecer la existencia de soluciones no negativas (soluciones físicamente realizables) a ciertas ecuaciones diferenciales, el siguiente teorema sobre existencia de conjuntos invariantes para un semigrupo $T$ de $LS_+(X)$ jugará un papel fundamental.

Teorema 2.5 ([2] pág 304) Sean $D$ un subconjunto cerrado y convexo de $X$, $T \in LS_+(X)$ y $A \in LD_+(X)$ el generador infinitesimal de $T$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $T(t): D \to D \quad \forall t \geq 0$; es decir $x \in D$ implica $T(t)x \in D \quad \forall t \geq 0$

(ii) $(I-hA)^{-1}: D \to D$ para todo $h>0$ tal que $h\mu[A] < 1$.

Además, si (i) se cumple $D(A) \cap D$ es denso en $D$.

Nuestro objetivo ahora es ver como se aplican las anteriores ideas a un problema de existencia de $X$-solución a una ecuación diferencial parcial.

Consideraremos el problema de valor inicial y de frontera para la ecuación de difusión unidimensional:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U(t,\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\rho(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau} U(t,\tau)\right) \\ U(t,0) = U(t,1) &= 0 \;, \quad U(0,\tau) = \varphi_0(\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (t,\tau) \in [0,\infty) \times [0,1] \;, \qquad (2.6)$$

donde $\varphi_0 \in L^2([0,1];\mathbb{K})$ , $(\mathbb{K}=\mathbb{R}\ \text{ó}\ \mathbb{C})$, y $p:[0,1]\to(0,\infty)$ es continuamente diferenciable.

Con la ecuación (2.6) asociamos el problema de valores iniciales en $L^2$:

$$u'(t) = Au(t)\ ,\ t>0\ ,\ u(0)=\varphi_0\ , \qquad (2.7)$$

donde el operador lineal $A$ está definido por:

$$D(A)=\left\{\varphi\in L^2([0,1],\mathbb{K}):\ \varphi' \text{ es absolut. continua, } \varphi(0)=\varphi(1)=0\ ,\ \varphi''\in L^2\right\}$$

y $$A\varphi = (p\varphi')'\ ,\ \varphi\in D(A) \qquad (2.8)$$

Definición 2.6 Si $u:[0,\infty)\to L^2$ es una solución al problema de valores iniciales (2.7), la aplicación $U:[0,\infty)\times[0,1]\to\mathbb{K}$ definida por $U(t,\tau)=[u(t)](\tau)$ se denomina $L^2$-solución de la ecuación (2.6)

Veamos en que sentido la $L^2$-solución "verifica" a (2.6):

como $u(0)=\varphi_0$ en $L^2$, entonces $[u(0)](\tau)=\varphi_0(\tau)$ a.e.$\tau$ en $[0,1]$;

es decir, $U(0,\tau)=\varphi_0(\tau)$ a.e. $\tau$ en $[0,1]$.

Además, para todo $t>0$ , $[u(t)](0)=[u(t)](1)$ , puesto que

$u(t)\in D(A)$ para $t>0$; luego $U(t,0)=U(t,1)$ $\forall t>0$.

De otra parte, $[u'(t)](\tau)=[Au(t)](\tau)$ a.e. $\tau\in[0,1]$ $\forall t>0$.

Para $t>0$ fijo, haciendo $\varphi=u(t)$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}[Au(t)](\tau) &= [A\varphi](\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(p(\tau)\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)\\ &= \frac{d}{d\tau}\left(p(\tau)\lim_{h\to0}\frac{\varphi(\tau+h)-\varphi(\tau)}{h}\right)\\ &= \frac{d}{d\tau}\left(p(\tau)\lim_{h\to0}\frac{u(t)(\tau+h)-u(t)(\tau)}{h}\right)\\ &= \frac{d}{d\tau}\left(p(\tau)\frac{\partial U}{\partial\tau}(t,\tau)\right) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(p(\tau)\frac{\partial U}{\partial\tau}(t,\tau)\right)\end{aligned}$$

Luego

$$[u'(t)](\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(p(\tau)\frac{\partial U}{\partial\tau}(t,\tau)\right)\quad \forall t>0\ ,\text{para casi todo } \tau\in[0,1].$$

Pero:

$$\lim_{h\to0}\left|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-u'(t)\right|_2 = 0,\ \text{donde } |\ |_2 \text{ denota la norma en } L^2.$$

Es decir, $\lim_{h\to 0} \int_0^1 \left| \frac{u(t+h)(\tau) - u(t)(\tau)}{h} - [u'(t)](\tau) \right|^2 d\tau = 0 .$

Por tanto:

$$\lim_{h\to 0} \int_0^1 \left| \frac{U(t+h,\tau) - U(t,\tau)}{h} - \frac{\partial}{\partial \tau}\left(p(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau} U(t,\tau)\right) \right|^2 d\tau = 0, \ \forall t>0 \quad (2.9)$$

y en este sentido la $L^2$- solución $U$ "verifica" a (2.6).

Respecto al operador $A$ y a las $L^2$-soluciones de (2.6) se pueden hacer las siguientes afirmaciones:

Teorema 2.6 El operador lineal $A$ definido por (2.8) es el generador de un semigrupo lineal $T$, el cual es analítico y compacto. Además, existen $\delta>0$ y $N\geq 1$ tales que:

$$\| T(t) \| \leq N e^{-\delta t} \quad \text{y} \quad \| AT(t) \| \leq t^{-1} N e^{-\delta t}, \ \forall t>0 .$$

En particular, la ecuación diferencial (2.6) tiene una única $L^2$-solución $U: [0,\infty)\times[0,1] \to \mathbb{K}$ definida por $U(t,\tau) = [T(t)\varphi_0](\tau)$ para $(t,\tau) \in [0,\infty)\times[0,1]$.

Demostración: El operador lineal $A$ es cerrado y su dominio $D(A)$ es denso en $L^2 = L^2([0,1];\mathbb{K})$ (Teorema 1.4). Además el espectro de $A$, $\sigma(A)$, está contenido en $(-\infty, 0)$ (Proposición 1.4).

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ consideremos la complexificación $L^2_{\mathbb{C}}$ de $L^2 = L^2([0,1];\mathbb{R})$ y la complexificación $A_{\mathbb{C}}$ de $A$ ( [7] pag. 113 - 114). Como $A$ es cerrado y su dominio $D(A)$ es denso, entonces $A_{\mathbb{C}}$ es cerrado y su dominio $D(A_{\mathbb{C}}) = D(A)\times D(A)$ es denso en $L^2_{\mathbb{C}} = L^2([0,1],\mathbb{R}) \times L^2([0,1],\mathbb{R})$. Por otro lado se tiene que $\sigma(A_{\mathbb{C}}) = \sigma(A)$ y por tanto $\sigma(A_{\mathbb{C}}) \subset (-\infty, 0)$.

En adelante $\hat{A}$ designará al operador $A$ cuando $L^2 = L^2([0,1],\mathbb{C})$ y designará al operador $A_{\mathbb{C}}$ cuando $L^2 = L^2([0,1],\mathbb{R})$. Obsérvese que como $A$ es autoadjunto, $\hat{A}$ es autoadjunto.

Para $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ fijo, es claro que la resolvente $\rho(\hat{A})$ de $\hat{A}$ cumple la relación:

$$\rho(\hat{A}) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \alpha\} \equiv \Delta_\alpha .$$

Veamos tambien que el operador $\hat{A}$ cumple la hipótesis b) del Teorema 2.3. Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal y completo de funciones propias de $\hat{A}$, donde $\varphi_n$ es una función propia asociada al valor propio $-\lambda_n$, ( cuando $\hat{A} = A_E$, $\varphi_n = (\psi_n, \psi_n)$, donde $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal y completo de funciones propias de $A$, y $\psi_n$ es una función propia asociada al valor propio $-\lambda_n$ ). Sea $\varphi \in D(\hat{A})$. Entonces:

$$\langle \hat{A}\varphi, \varphi \rangle = \langle \hat{A}\varphi, \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, \varphi_n \rangle \varphi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \hat{A}\varphi, \langle \varphi, \varphi_n \rangle \varphi_n \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\langle \varphi, \varphi_n \rangle} \langle \hat{A}\varphi, \varphi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\langle \varphi, \varphi_n \rangle} \langle \varphi, \hat{A}\varphi_n \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\langle \varphi, \varphi_n \rangle} \langle \varphi, -\lambda_n \varphi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n |\langle \varphi, \varphi_n \rangle|^2$$

Luego:

$$\langle \hat{A}\varphi, \varphi \rangle \leq -\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi, \varphi_n \rangle|^2 = -\lambda_1 |\varphi|_2^2 \qquad (2.10)$$

Consideremos el operador $B$ definido por $B = \hat{A} + \lambda_1 I$, entonces $\sigma(B) \subset (-\infty, 0]$. En consecuencia, $\rho(B) \supset \Delta_\alpha$ y si $\varphi \in D(B) = D(\hat{A})$ con $|\varphi|_2 = 1$, utilizando la desigualdad (2.10) se tiene que:

$$\langle B\varphi, \varphi \rangle = \langle \hat{A}\varphi, \varphi \rangle + \lambda_1 \langle \varphi, \varphi \rangle = \langle \hat{A}\varphi, \varphi \rangle + \lambda_1 \leq 0$$

De donde:

$$\langle B\varphi, \varphi \rangle \in (-\infty, 0] \qquad (2.11)$$

Por tanto, si $\lambda \in \Delta_\alpha$, teniendo en cuenta (2.11):

$$|(B - \lambda I)\varphi|_2 = |(B - \lambda I)\varphi|_2 \, |\varphi|_2 = \langle B\varphi - \lambda\varphi, B\varphi - \lambda\varphi \rangle^{1/2} \leq \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}$$

$$\geq |\langle B\varphi - \lambda\varphi, \varphi \rangle| = |\langle B\varphi, \varphi \rangle - \lambda| \geq d(\lambda; (-\infty, 0]),$$

y de esta última desigualdad se sigue que:

$$\| (B - \lambda I)^{-1} \| \leq \frac{1}{d(\lambda; (-\infty, 0])}, \quad \forall \lambda \in \Delta_\alpha .$$

Como $\alpha < \pi$ , existe $M_1 \geq 1$ tal que:

$$\| (B-\lambda I)^{-1} \| \leq \frac{M_1}{|\lambda|} \quad , \forall \lambda \in \Delta_\alpha .$$

Luego:

$$\| [\hat{A} - (\lambda-\lambda_1)I]^{-1} \| \leq \frac{M_1}{|\lambda|} \quad , \forall \lambda \in \Delta_\alpha \qquad (2.12)$$

Sea $\lambda^* = \lambda-\lambda_1$ . Es claro que $\Delta_\alpha \subset \{\lambda-\lambda_1 : \lambda \in \Delta_\alpha\}$ .

De (2.12) se tiene que:

$$\| (\hat{A}-\lambda^* I)^{-1} \| \leq \frac{M_1}{|\lambda^*+\lambda_1|} \quad , \forall \lambda^* \in \{\lambda-\lambda_1 : \lambda \in \Delta_\alpha\}$$

Luego:

$$\| (\hat{A}-\lambda I)^{-1} \| \leq \frac{M_1}{|\lambda+\lambda_1|} \quad , \forall \lambda \in \Delta_\alpha .$$

Como $\alpha < \pi$ , se puede demostrar que existe $M_2 > 0$ tal que:

$$|\lambda+\lambda_1| \geq M_2 \, (|\lambda| + \lambda_1)$$

Por consiguiente:

$$\| (\hat{A}-\lambda I)^{-1} \| \leq \frac{M_1}{M_2} \frac{1}{\lambda_1+|\lambda|} \quad , \forall \lambda \in \Delta_\alpha ;$$

(i) Si $\hat{A} = A$ , según el teorema 2.3 $A$ es el generador de un semigrupo analítico $T$ en $L^2 = L^2([0,1],\mathbb{C})$ y existen $\delta > 0$ y $N \geq 1$ tales que:

$$\| T(t) \| \leq N e^{-\delta t} \quad \text{y} \quad \| AT(t) \| \leq t^{-1} N e^{-\delta t} \quad , \forall t > 0 .$$

(ii) Si $\hat{A} = A_{\mathbb{C}}$ , por el teorema 2.3 $A_{\mathbb{C}}$ es el generador de un semigrupo analítico $\hat{T}$ en $L^2_{\mathbb{C}}$ y existen $\delta > 0$ y $N \geq 1$ tales que:

$$\| \hat{T}(t) \| \leq N e^{-\delta t} \quad \text{y} \quad \| A_{\mathbb{C}} \hat{T}(t) \| \leq t^{-1} N e^{-\delta t} \quad , \forall t > 0$$

De otra parte, $A$ es el generador infinitesimal de un semigrupo $T$ en $L^2([0,1];\mathbb{R})$ , puesto que $A$ es cerrado , su dominio es denso en $L^2([0,1];\mathbb{R})$ , $\rho(A) \supset (0,\infty)$ y para $\lambda > 0$ y $\varphi \in D(A) - \{0\}$ utilizando (2.10) se tiene:

$$\left| (A_{\mathbb{C}} - \lambda I_{\mathbb{C}}) \frac{\varphi}{|\varphi|_2} \right|_2 \geq \left| \left\langle (A_{\mathbb{C}} - \lambda I_{\mathbb{C}}) \frac{\varphi}{|\varphi|_2}, \frac{\varphi}{|\varphi|_2} \right\rangle \right|$$

$$\geq \left| \left\langle A_{\mathbb{C}} \left(\frac{\varphi}{|\varphi|_2}\right), \frac{\varphi}{|\varphi|_2} \right\rangle - \lambda \right|$$

$$\geq \lambda .$$

Luego: $\left| (A_{\mathbb{C}} - \lambda I_{\mathbb{C}}) \varphi \right|_2 \geq \lambda |\varphi|_2 \quad , \forall \varphi \in D(A).$

y de aquí se sigue por propiedades de la complexificación:

$$\| (A - \lambda I)^{-1} \| = \| (A_{\mathbb{C}} - \lambda I_{\mathbb{C}})^{-1} \| \leq \frac{1}{\lambda} .$$

A continuación veamos que $\hat{T}(t) = T(t)_{\mathbb{C}}$, $\forall t \geq 0$. En efecto, por el teorema 2.1 aplicado a $(A_{\mathbb{C}}, \hat{T})$ y $(A, T)$ :

$$\hat{T}(t) z = \lim_{n \to \infty} \left( I_{\mathbb{C}} - \frac{t}{n} A_{\mathbb{C}} \right)^{-n} z = \lim_{n \to \infty} \left[ \left( I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} \right]_{\mathbb{C}} z$$

$$= \left[ \lim_{n \to \infty} \left( I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} \right]_{\mathbb{C}} z = \left[ T(t) \right]_{\mathbb{C}} z \quad , \quad \forall z \in L^2_{\mathbb{C}} .$$

En vista de la anterior igualdad y las propiedades de la complexificación:

$$\| T(t) \| = \| T(t)_{\mathbb{C}} \| = \| \hat{T}(t) \| \leq N e^{-\delta t} \qquad \text{y}$$

$$\| A T(t) \| = \| (A T(t))_{\mathbb{C}} \| = \| A_{\mathbb{C}} T(t)_{\mathbb{C}} \| = \| A_{\mathbb{C}} \hat{T}(t) \| \leq t^{-1} N e^{-\delta t} , \forall t > 0.$$

Para concluir que $T$ es un semigrupo analítico, solo nos resta probar que $T$ es diferenciable. Como $\hat{T}$ es diferenciable, $\hat{T}(t) z \in D(A_{\mathbb{C}}) = D(A) \times D(A)$ para todo $z \in L^2_{\mathbb{C}}$, $\forall t > 0$ , y dado que $\hat{T}(t) z = T(t)_{\mathbb{C}} z$ , entonces por la definición de $T(t)_{\mathbb{C}}$ , $T(t) x \in D(A)$ para todo $x \in L^2([0,1], \mathbb{R})$.

Para ver que el semigrupo $T$ generado por $A$ es compacto, basta observar que para todo $\lambda \in \rho(A)$ , $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ es un miembro compacto de $\mathcal{BL}(L^2)$ (teorema 1.4), y por el teorema 2.4 resulta que el semigrupo $T$ es compacto.

Por último, de acuerdo al teorema 2.2, si $\varphi_0 \in L^2([0,1];\mathbb{K})$

$$\frac{d}{dt} T(t)\varphi_0 = AT(t)\varphi_0 \quad \forall t>0.$$

Luego $u:[0,\infty) \to L^2([0,1];\mathbb{K})$ definido por $u(t)=T(t)\varphi_0$ es la única solución al problema de valores iniciales (2.7), y por tanto:

$$U(t,\tau) = [u(t)](\tau) = [T(t)\varphi_0](\tau) \quad \text{para} \quad (t,\tau) \in [0,\infty)\times[0,1]$$

es $L^2$- solución a la ecuación diferencial parcial (2.6).

Observación2.1 (i) Si $\varphi_0$ es de valor real, la $L^2$- solución $U$ es tambien de valor real (consecuencia de la relación (2.3) en el teoroma 2.1).

(ii) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $\Lambda$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ con $0\in\Lambda$ y definimos

$$K(\Lambda) = \{\varphi \in L^2([0,1];\mathbb{R}) : \varphi(\tau)\in\Lambda \text{ a.e. } \tau\in[0,1]\}$$

entonces $K(\Lambda)$ es un subconjunto invariante de $T(t)$, $\forall t\geq 0$ ; es decir: $T(t) : K(\Lambda) \to K(\Lambda)$ , $\forall t\geq 0$.

En efecto, es sabido que para todo $h>0$ , $K(\Lambda)$ es un subconjunto invariante de la aplicación $(I-hA)^{-1}$ (teorema 1.6). Como $K(\Lambda)$ es un conjunto convexo y cerrado de $L^2([0,1];\mathbb{R})$ (lema 1.6), se concluye del teorema 2.5 que $T(t) : K(\Lambda) \to K(\Lambda)$ $\forall t\geq 0$.

(iii) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $\Lambda=[0,+\infty)$ la observación (ii) nos permite concluir que si $\varphi_0(\tau)\geq 0$ para casi todo $\tau\in[0,1]$ , entonces:

$$U(t,\tau) = [T(t)\varphi_0](\tau) \geq 0 \quad \forall t\geq 0 \text{ para casi todo } \tau\in[0,1]$$

Recordando que $T(t)\varphi_0 \in D(A)$ $\forall t>0$ , entonces $T(t)\varphi_0$ , $t>0$ , es continua en el siguiente sentido: $T(t)\varphi_0$ es una clase de equivalencia de funciones iguales casi en todas partes, la cual tiene exactamente una función continua $u(t):[0,1]\to\mathbb{R}$. Como $[u(t)](\tau)\geq 0$ para casi todo $\tau\in[0,1]$ , entonces necesariamente $[u(t)](\tau)\geq 0$ $\forall \tau\in[0,1]$ Así debe ser entendida la afirmación de que si $\varphi_0(\tau)\geq 0$ para casi

todo $\tau \in [0,1]$ , entonces $U(t,\tau) \geq 0 \quad \forall t \in [0,\infty) \; \forall \tau \in [0,1]$ . Es decir, si la condición inicial $\varphi_0$ es no-negativa, la $L^2$ -solución $U$ de la ecuación diferencial (2.6) tambien es "no-negativa".

# CAPITULO 3

## ECUACIONES DIFERENCIALES SEMILINEALES

En este capítulo veremos como se aplican los teoremas de existencia abstractos acerca del problema de valor inicial semilineal en espacios de Banach a la existencia de $L^2$ - soluciones moderadas y $L^2$- soluciones de la ecuación de difusion semilineal unidimensional. Comenzaremos enunciando los resultados abstractos: Consideremos el problema de Cauchy o de valor inicial semilineal:

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + B(t,u(t)) \quad , \quad t>a \\ u(a) &= z \end{aligned}\right\}; \qquad (3.1)$$

donde asumimos que $X$ es un espacio de Banach, $D$ es un subconjunto cerrado en $X$, $A \in LD_t(X)$ es el generador infinitesimal de un semigrupo $T \in LS_t(X)$, $B: [a,\infty) \times D \to X$ es una función continua y $(a,z) \in [a,\infty) \times D$.

Definición 3.1 Una función continua $u: J \to D$, donde $J$ es un subintervalo de $[a,\infty)$ con $a \in J$ se dice una solución clásica de (3.1) en $J$ si $u$ es continuamente diferenciable en $J \cap (a,\infty)$, $u(t) \in D(A)$ para $t>a$ y se cumple (3.1) en $J \cap [a,\infty)$.

Observación 3.1 Sea $u: J \to D$ una solución clásica de (3.1) y $t \in J$ con $t>a$. Consideremos la función: $\rho: (a,t) \to X$ definida por $\rho(s) = T(t-s)u(s)$ para $s \in (a,t)$, entonces

$$\begin{aligned} \rho'(s) &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -T(t-s)Au(s) + T(t-s)[Au(s) + B(s,u(s))] \\ &= T(t-s)B(s,u(s)) \end{aligned}$$

Observando que $\rho(t) = u(t)$ $\rho(a) = T(t-a)z$ por integración de la expresión anterior entre $a$ y $t$ obtenemos:

$$u(t) = T(t-a)z + \int_a^t T(t-s)\,B(s,u(s))\,ds \qquad (3.2)$$

Luego cada solución clásica de (3.1) es solución de la ecuación integral (3.2).

Definición 3.2. Una función continua $u: J \to D$, donde $J$ es un subintervalo de $[a,\infty)$ con $a \in J$ se dice una solución moderada de (3.1) en $J$ si

$$u(t) = T(t-a)z + \int_a^t T(t-s)\,B(s,u(s))\,ds \quad \text{para} \quad t \in J \qquad (3.2)$$

Los teoremas abstractos establecen:

a) Condiciones que aseguran la existencia de soluciones moderadas a (3.1).

b) Condiciones bajo las cuales una solución moderada de (3.1) llega a ser solución clásica de (3.1) (condiciones de regularidad).

Para referencia futura en este capítulo, designaremos por (C1) - (C4) las condiciones:

(C1) $A \in LD_+(X)$ es el generador del semigrupo $T \in LS_+(X)$.

(C2) $D$ es un subconjunto cerrado en $X$ y $B: [0,\infty) \times D \to X$ es una función continua.

(C3) Si $x \in D$ entonces $T(t)x \in D$ para todo $t \geq 0$.

(C4) $\liminf_{h \to 0^+} \dfrac{d(x + hB(t,x); D)}{h} = 0$ para $(t,x) \in [0,\infty) \times D$.

Con relación a soluciones moderadas de (3.1), tiene lugar el siguiente teorema fundamental de existencia, el cual es de carácter local.

Teorema 3.1 ( [2] pág. 337). Supongamos que las condiciones (C1) a (C4) se cumplen y que $T$ es un semigrupo compacto. Entonces para $(a,z) \in [0,\infty) \times D$ existe $\sigma = \sigma(a,z) > a$ tal que (3.1) tiene una solución moderada en $[a,\sigma]$.

Observación 3.2 El teorema 3.1 es un caso especial de un resultado de R.H.Martin, donde se asume solamente que $D$ es localmente cerrado. Su demostración es tecnicamente complicada ya que $\bar{x}$ no es necesariamente un punto interior de $D$. Esto hace tambien indispensable la condición (C4), trivialmente satisfecha si $\bar{x}$ es punto interior de $D$.

Un ejemplo de G.F.Webb ( [2] pág. 345) demuestra que una solución moderada de (3.1) no es necesariamente una solución clásica. Sin embargo bajo ciertas condiciones impuestas al semigrupo $T$ y al operador no-lineal $B$ se tiene el siguiente resultado de regularidad:

Teorema 3.2 ( [2] pág. 346 ) Supongamos que las condiciones (C1) a (C4) se cumplen, que el semigrupo $T$ es analítico y que existen $\sigma > a$, $N > 0$ $r \in (0,1]$ tales que para todo $(t,x), (s,y) \in [a,\sigma] \times D$ :

$$|B(t,x) - B(s,y)| \leq N\,(|t-s|^r + |x-y|^r)\,.$$

Entonces toda solución moderada $u:[a,\sigma] \to D$ de (3.1) es una solución clásica de (3.1).

Definición 3.3. Una solución moderada $u$ de (3.1) en el intervalo $J_u$ se dice una continuación de una solución moderada $v$ de (3.1) en $J_v$ si $J_u \supset J_v$ y $v(t) = u(t)$ para todo $t \in J_v$. Una solución moderada $u$ de (3.1) en el intervalo $J_u$ se dice no-continuable si no tiene una continuación propia.

Puede ser demostrado fácilmente que toda solución moderada de (3.1) admite una continuación no-continuable.

Bajo la hipótesis de existencia local de soluciones moderadas de (3.1), el teorema siguiente considera el comportamiento de soluciones no-continuables.

Teorema 3.3. ([2] pág. 351) Supongamos que las condiciones (C1) a (C4) son válidas, que $B$ envía subconjuntos acotados de $[0,\infty) \times D$

en subconjuntos acotados de $X$ y que (3,2) tiene una solución local para cada $(a,z) \in [0,\infty)\times D$. Si $(\hat{a},\hat{z}) \in [0,\infty)\times D$ y si $u$ es una solución no-continuable en el intervalo $J_u$ de la ecuación:

$$u(t) = T(t-\hat{a})\,\hat{z} + \int_{\hat{a}}^{t} T(t-s)\,B(s,u(s))\,ds\,,$$

entonces $J_u = [\hat{a},\sigma)$ para algún $\sigma$, $\hat{a} < \sigma \leq \infty$. Además si $\sigma \neq \infty$, entonces $\lim_{t\to\sigma^-} |u(t)| = +\infty$.

Veamos ahora como se aplican los resultados anteriores al estudio de la ecuación diferencial parcial del calor o de difusion no lineal:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}U(t,\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\rho(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}U(t,\tau)\right) + f(t,\tau,U(t,\tau)) \\ U(t,0) = U(t,1) &= 0\,, \quad U(0,\tau) = \varphi_0(\tau) \end{aligned}\right\} \qquad t>0\,,\ \tau\in[0,1]. \tag{3.3}$$

donde: $\varphi_0 \in L^2([0,1];\mathbb{K})$, $\Lambda = [a,b]$, $f: [0,\infty)\times[0,1]\times\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y $\rho:[0,1]\to(0,\infty)$ es continuamente diferenciable.

Con la ecuación (3.3) asociamos el problema de valores iniciales en $L^2$:

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + B(t,u(t))\,, \quad t>0 \\ u(0) &= \varphi_0 \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

donde el operador $A$ está definido por:

$$D(A) = \left\{\varphi\in L^2 :\ \varphi' \text{ absol. continua},\ \varphi''\in L^2,\ \varphi(0)=\varphi(1)=0\right\}$$

$$A\varphi = (\rho\varphi')' \text{ para todo } \varphi\in D(A)\,; \tag{3.5}$$

y el operador de sustitución $B:[0,\infty)\times K(\Lambda) \to L^2$ está definido por:

$$[B(t,\varphi)](\tau) = f(t,\tau,\varphi(\tau)) \text{ a.e. } \tau\in[0,1] \quad \text{y} \tag{3.6}$$

$(t,\varphi)\in[0,\infty)\times K(\Lambda)$, donde: $K(\Lambda) = \left\{\varphi\in L^2 :\ \varphi(\tau)\in\Lambda \text{ a.e. } \tau\in[0,1]\right\}$.

Definición 3.4. Si $u:[0,\sigma]\to D$ es una solución clásica (respectivamente una solución moderada) de (3.4) entonces la función $U:[0,\sigma]\times[0,1]\to R$ definida por $U(t,\tau)=[u(t)](\tau)$ se denomina una $L^2$- solución (respectivamente una $L^2$- solución moderada) de (3.3).

En el estudio de la ecuación diferencial (3.3) consideraremos los siguientes aspectos: Existencia local de $L^2$- soluciones moderadas, regularidad de las $L^2$- soluciones moderadas y la existencia global de las $L^2$- soluciones moderadas. Veamos a continuación cada uno de estos puntos.

Teorema 3.4 Sea $f:[0,\infty)\times[0,1]\times\Lambda\to R$ una función continua que satisface $f(t,\tau,a)\geq 0$, $f(t,\tau,b)\leq 0$ para todo $(t,\tau)\in[0,\infty)\times[0,1]$, donde $\Lambda=[a,b]$ con $a\leq 0\leq b$. Entonces, si $\varphi_0\in K(\Lambda)$, existen $\sigma>0$ y una $L^2$ - solución moderada $U:[0,\sigma]\times[0,1]\to\Lambda$ de la ecuación (3.3).

Demostración. Sea $A$ el operador lineal definido por (3.5) y sea $B$ el operador de sustitución definido por (3.6). Para demostrar el teorema veamos que se cumplen las hipótesis del teorema 3.1, es decir, las condiciones (C1) a (C4) y que $T$ es un semigrupo compacto. En efecto, por el teorema 2.6 $A$ es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico $T\in LS_+(L^2)$, luego se satisface la condición (C1). De otra parte, por el lema 1.6 $D=K(\Lambda)$ es un subconjunto cerrado de $L^2$ y por la observación 2.1 (ii) $T(t):D\to D$, $\forall t\geq 0$, luego se verifica la condición (C3). Para probar que se satisface la condición (C2) nos resta demostrar que $B:[0,\infty)\times D\to L^2$ es un operador continuo.

La prueba de que $B$ es continuo la haremos por contradicción; supongamos que $B$ no es continuo, entonces existen $\epsilon>0$ y una sucesión $(t_n,\varphi_n)\to(t,\varphi)$, donde $t_n, t\in[0,\infty)$; $\varphi_n,\varphi\in L^2$ con

$\varphi_n \to \varphi$ en $L^2$ , $t_n \to t$ y $|B(t_n,\varphi_n) - B(t,\varphi)|_2^2 \geq \epsilon$ .

Como $\varphi_n \to \varphi$ en $L^2$ podemos asumir pasando a una subsucesión y renumerando, que $\varphi_n(\tau) \to \varphi(\tau)$ para casi todo $\tau \in [0,1]$ y como $t_n \to t$ entonces existe $\alpha$ tal que $t_n, t \in [0,\alpha]$, $\forall n$.

Como $f$ es continua entonces

$f(t,\tau,\varphi_n(\tau)) \to f(t,\tau,\varphi(\tau))$ para casi todo $\tau \in [0,1]$;

luego $[B(t,\varphi_n)](\tau) \to [B(t,\varphi)](\tau)$ para casi todo $\tau \in [0,1]$.

Ahora, por ser $f$ acotada sobre $[0,\alpha] \times [0,1] \times [a,b]$ existe $K$ tal que

$$|[B(t_n,\varphi_n)](\tau) - [B(t,\varphi)](\tau)| \leq K \quad \forall n \text{ , para casi todo } \tau \in [0,1]$$

Escojamos $\delta > 0$, tal que $K^2\delta < \frac{\epsilon}{3}$.

Por el teorema de Egoroff existe un subconjunto $\Omega \subset [0,1]$ con $m(\Omega) < \delta$ tal que

$$[B(t,\varphi_n)](\tau) \to [B(t,\varphi)](\tau) \text{ uniformemente en } [0,1] \setminus \Omega$$

luego existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(t,\tau,\varphi_n(\tau)) - f(t,\tau,\varphi(\tau))|^2 < \frac{\epsilon}{12} \quad \forall n \geq N_1 \ \forall \tau \in [0,1] \setminus \Omega .$$

Como $f$ es uniformemente continua en $[0,\alpha] \times [0,1] \times [a,b]$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$|f(t_n,\tau,\varphi_n(\tau)) - f(t,\tau,\varphi_n(\tau))|^2 < \frac{\epsilon}{12}$ $\forall n \geq N_2$ y para casi todo $\tau \in [0,1]$.

Luego $\forall n \geq N = \max\{N_1,N_2\}$

$$|B(t_n,\varphi_n) - B(t,\varphi)|_2^2 = \int_0^1 |f(t_n,\tau,\varphi_n(\tau)) - f(t,\tau,\varphi(\tau))|^2 d\tau \leq$$

$$\leq 2^2 \int_{[0,1]\setminus\Omega} |f(t_n,\tau,\varphi_n(\tau)) - f(t,\tau,\varphi_n(\tau))|^2 d\tau +$$

$$+ 2^2 \int_{[0,1]\setminus\Omega} |f(t,\tau,\varphi_n(\tau)) - f(t,\tau,\varphi(\tau))|^2 d\tau + \int_{\Omega} |f(t_n,\tau,\varphi_n(\tau)) - f(t,\tau,\varphi(\tau))|^2 d\tau$$

$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ ; con esto llegamos a una contradicción ya que $|B(t_n,\varphi_n) - B(t,\varphi)|_2^2 \geq \epsilon$ Luego $B$ es continua y por lo tanto satisface la condición (C2).

Veamos ahora que se cumple la condición (C4), verifiquemos que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{d(\varphi + hB(t,\varphi); D)}{h} = 0 \quad \text{para} \quad (t,\varphi) \in [0,\infty) \times D$$

Sean $\epsilon > 0$ , $t \in [0,\infty)$; como $f$ es acotada en compactos escojamos $M > 0$ tal que $|\xi| \leq M$ y $|f(t,\tau,\xi)| \leq M$ para $(\tau,\xi) \in [0,1] \times [a,b]$.

Sea $\eta = \frac{\epsilon}{2M}$ y definamos

$$f_\eta(\tau,\xi) = f(t,\tau,\xi) - \eta(\xi - \xi_0) \quad \text{para} \quad (\tau,\xi) \in [0,1] \times [a,b],$$

donde $\xi_0 = \frac{a+b}{2}$ .

Entonces para todo $\tau \in [0,1]$:

$$f_\eta(\tau,a) = f(t,\tau,a) - \eta\left(\frac{a-b}{2}\right) > 0 \quad (\text{ya que } f(t,\tau,a) \geq 0)$$

y $$f_\eta(\tau,b) = f(t,\tau,b) - \eta\left(\frac{b-a}{2}\right) < 0 \quad (\text{ya que } f(t,\tau,b) \leq 0).$$

Ahora como $f_\eta$ es uniformemente continua podemos escoger $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{b-a}{2}$ y $f_\eta(\tau,\xi) \leq 0$ si $\xi \in [b-\delta, b]$ y $\tau \in [0,1]$ y tal que $f_\eta(\tau,\xi) \geq 0$ si $\xi \in [a, a+\delta]$ y $\tau \in [0,1]$.

Como $f_\eta(\tau,\xi)$ está acotada para $(\tau,\xi) \in [0,1] \times [a,b]$ , escojamos $h > 0$ tal que $h|f_\eta(\tau,\xi)| \leq \delta$ para $(\tau,\xi) \in [0,1] \times [a,b]$.

Luego $\xi + h f_\eta(\tau,\xi) \in [a,b]$ , $\forall \xi \in [a,b]$.

Por lo tanto si $\varphi \in D$ y denotamos

$$\psi_\varphi(\tau) = \varphi(\tau) + h f_\eta(\tau,\varphi(\tau)) \quad \text{para todo } \tau \in [0,1]$$

entonces $\psi_\varphi \in D$.

Por tanto $d(\varphi + hB(t,\varphi); D) \leq |\varphi + hB(t,\varphi) - \psi_\varphi|_2$

y como

$$|[\varphi + hB(t,\varphi)](\tau) - \psi_\varphi(\tau)| = h\eta\,|\varphi(\tau) - \xi_0| \leq h\eta\, 2M < h\epsilon$$

se obtiene:

$$\frac{d(\varphi + hB(t,\varphi); D)}{h} \leq \epsilon \qquad \text{para} \quad h > 0 \quad \text{suficientemente}$$

pequeño; luego:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{d(\varphi + hB(t,\varphi); D)}{h} = 0.$$

Se verifican entonces las condiciones (C1) a(C4) y además por el teorema 2.6 el semigrupo $T$ es compacto; por lo tanto de acuerdo con el teorema 3.1 tenemos que la ecuación (3.3) tiene una solución moderada $U : [0,\sigma] \times [0,1] \to \Lambda$ siempre que $\varphi_0 \in K(\Lambda)$.

Teorema 3.5 Sea $f : [0,\infty) \times [0,1] \times \Lambda \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface $f(t,\tau,a) \geq 0$, $f(t,\tau,b) \leq 0$ para todo $(t,\tau) \in [0,\infty) \times [0,1]$ donde $\Lambda = [a,b]$ con $a \leq 0 \leq b$; supongamos además que existen $N > 0$ y $r \in (0,1]$ tales que

$$|f(t,\tau,\xi) - f(s,\tau,\eta)| \leq N\,(|t-s|^r + |\xi-\eta|^r)$$

para todo $(t,\tau,\xi)$, $(s,\tau,\eta) \in [0,\infty) \times [0,1] \times [a,b]$. Entonces toda $L^2$-solución moderada de la ecuación (3.3) (que existe por el teorema 3.4) es $L^2$-solución clásica de la ecuación (3.3).

Demostración: Sea $A$ el operador lineal definido por (3.5) y $B$ el operador de sustitución definido por (3.6); como en el teorema 3.4 las condiciones (C1) a (C4) se cumplen, el semigrupo $T$ es analítico; por consiguiente de acuerdo al teorema 3.2 solo nos resta probar que el operador no-lineal $B$ es Hölder continuo:

Sean $t, s \in [0,\sigma]$; $\varphi, \psi \in D := K(\Lambda)$ y $\sigma > 0$ está dado por teorema 3.4

Se tiene :

$$|[B(t,\varphi)](\tau) - [B(s,\psi)](\tau)| = |f(t,\tau,\varphi(\tau)) - f(s,\tau,\psi(\tau))|$$

$$\leq N\,(|t-s|^r + |\varphi(\tau)-\psi(\tau)|^r) \quad \text{para todo } \tau \in [0,1].$$

Por lo tanto :

$$|B(t,\varphi) - B(s,\psi)|_2 = \left(\int_0^1 |[B(t,\varphi)](\tau) - [B(s,\psi)](\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2}$$

$$\leq N\left[\int_0^1 (|t-s|^r + |\varphi(\tau)-\psi(\tau)|^r)^2 d\tau\right]^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{2}\,N\left[|t-s|^r + \left(\int_0^1 |\varphi(\tau)-\psi(\tau)|^{2r} d\tau\right)^{1/2}\right].$$

Veamos ahora que

$$\int_0^1 |\chi(\tau)|^{2r} d\tau \leq \left(\int_0^1 |\chi(\tau)|^2 d\tau\right)^r \quad \forall \chi \in L^2. \qquad (3.7)$$

En efecto, si $r = 1$ el resultado es obvio.

Si $0 < r < 1$ entonces $\frac{1}{r} > 1$. Sea $q$ el exponente conjugado de $\frac{1}{r}$, es decir, $\frac{1}{q} + r = 1$.

Por la desigualdad de Hölder tenemos :

$$\int_0^1 |\chi(\tau)|^{2r} d\tau \leq \left(\int_0^1 1^q d\tau\right)^{1/q} \left(\int_0^1 |\chi(\tau)|^2 d\tau\right)^r$$

$$\leq \left(\int_0^1 |\chi(\tau)|^2 d\tau\right)^r;$$

lo que demuestra (3.7).

Usando (3.7) obtenemos

$$|B(t,\varphi) - B(s,\psi)|_2 \leq \sqrt{2}\,N\,(|t-s|^r + |\varphi-\psi|_2^r)$$

para todo $t, s \in [0,\sigma]$, $\varphi, \psi \in D$.

Por lo tanto $B$ es Hölder continuo y por el teorema 3.2 tenemos que la $L^2$-solución moderada de la ecuación (3.3) es $L^2$-solución clásica.

UNIVERSIDAD NACIONAL
BIBLIOTECA CENTRAL

Por último veamos que las condiciones impuestas en el teorema de existencia local (teorema 3.4) son suficientes para garantizar también la existencia global

Teorema 3.6: Sea $f:[0,\infty)\times[0,1]\times\Lambda\to R$ una función continua que satisface $f(t,\tau,a)\geq 0$ , $f(t,\tau,b)\leq 0$ para todo $(t,\tau)\in[0,\infty)\times[0,1]$, donde $\Lambda=[a,b]$, con $a\leq 0\leq b$. Entonces la ecuación (3.3) tiene una $L^2$-solución moderada $U:[0,\infty)\times[0,1]\to\Lambda$ para cada $\varphi_0\in K(\Lambda)$.

Demostración

Para probar el teorema veamos que se cumplen las hipótesis del teorema 3.3; como se probó en la demostración del teorema 3.4 las condiciones (C1) a (C4) son válidas, por lo tanto existe una $L^2$-solución moderada local de la ecuación (3.3). Veamos ahora que $B$ envía subconjuntos acotados de

$[0,\infty)\times K(\Lambda)$ en subconjuntos acotados de $L^2$ :

en efecto, si $R$ es un subconjunto acotado de $[0,\infty)\times K(\Lambda)$ existe $c>0$ tal que $R\subset[0,c]\times K(\Lambda)$ , basta verificar que $B(R\cap([0,c]\times K(\Lambda)))$ es acotado en $L^2$.

Sea $M=\sup_{[0,c]\times[0,1]\times[a,b]}|f(t,\tau,\xi)|$ y $(t,\varphi)\in[0,c]\times K(\Lambda)$ ;

como $\varphi(\tau)\in[a,b]$ para casi todo $\tau\in[0,1]$,

tenemos

$$|[B(t,\varphi)](\tau)|=|f(t,\tau,\varphi(\tau))|\leq M \text{ para casi todo } \tau\in[0,1];$$

luego

$$|B(t,\varphi)|_2^2\leq M^2 .$$

Sea $u$ una solución moderada no continuable de la ecuación (3.4); entonces como $B$ es acotado en $[0,c]\times K(\Lambda)$ para cada $c>0$ , por el teorema 3.3 tenemos que la ecuación (3.3) tiene una $L^2$-solución moderada $U:[0,\infty)\times[0,1]\to\Lambda$ para cada $\varphi_0\in K(\Lambda)$.

# CAPITULO 4

## ECUACIONES SEMILINEALES AUTONOMAS

En este capítulo aplicaremos los resultados abstractos relativos al comportamiento asintótico de las soluciones clásicas y las soluciones moderadas de ecuaciones diferenciales semilineales autónomas en espacios de Banach a la ecuación de difusion semilineal autónoma en $L^2$.

Iniciamos el capítulo enunciando los resultados abstractos:

Sea $X$ un espacio de Banach sobre el campo $\mathbb{K}$ $(\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$. Haremos las siguientes suposiciones básicas:

(C1)" $T \in LS_+(X)$ y $A \in LD_+(X)$ es el generador infinitesimal de $T$.

(C2)" $D$ es un subconjunto cerrado de $X$ tal que $T(t) : D \to D$, $\forall t \geq 0$.

(C3)" $B : D \to X$ es continua y

(C4)" $$\lim_{h \to 0^+} \frac{d(x+hBx; D)}{h} = 0 \quad , \quad \forall x \in D$$

Para $z \in D$ y bajo estas suposiciones consideraremos el problema de valores iniciales:

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + Bu(t) \quad , t > 0 \\ u(0) &= z \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

y la correspondiente ecuación integral:

$$u(t) = T(t)z + \int_0^t T(t-r)\, B u(r)\, dr . \qquad (4.2)$$

Para cada subconjunto cerrado $D \subset X$ denotaremos por $\mathcal{B}_+^c(D)$ la clase de todas las funciones $B : D \to X$ que satisfacen las condiciones:

(D1) $B$ es continua de $D$ en $X$.

(D2) $$\liminf_{h \to 0^+} \frac{d(x+hBx; D)}{h} = 0 \quad \forall x \in D$$

(D3) Existe un $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $B - \omega I$ es dislpativo; es decir:

$$|x - y - h(Bx - By)| \geq (1 - h\omega)\,|x - y| \quad \forall x, y \in D \quad \forall h > 0.$$

Bajo estas condiciones tiene lugar el siguiente teorema de existencia y unicidad de solución a (4.2):

Teorema 4.1 ([2] pág. 355) Supongamos que se satisfacen las condiciones (C1)" - (C4)" y que $B \in \mathcal{P}_+^c(D)$ . Entonces (4.2) tiene una única solución global $u_z$ en $[0,+\infty)$ para cada $z \in D$.

Observación 4.1 Nótese, con relación al teorema 3.1, que el teorema 4.1 garantiza la existencia y la unicidad de la solución al problema (4.2) sin exigencia de compacidad para el semigrupo lineal $T$, pero exigiéndole a la parte no lineal $B$ que pertenezca a $\mathcal{P}_+^c(D)$.

Puesto que la solución de (4.2) es global, resulta muy importante en este caso estudiar el comportamiento asintótico de dicha solución. Para ello asumiremos adicionalmente :

(C5)" $T = \{T(t) : t \geq 0\}$ es un semigrupo compacto.

(C6)" $B$ envía conjuntos acotados en conjuntos acotados.

(C7)" Las soluciones a (4.2) son únicas a la derecha para cada $z \in D$.

Sabemos por el teorema 3.3 ((C1)" - (C7)" nos dan las condiciones del teorema 3.3) que para cada $z \in D$ existe una única solución no continuable $u_z : [0, \sigma_z) \to D$ a (4.2). Además, si $\sigma_z \neq +\infty$ :

$$\lim_{t \to \sigma_z^-} |u_z(t)| = +\infty.$$

Para cada $t \geq 0$ sea $D_t = \{z \in D : \sigma_z > t\}$ y definamos la familia de aplicaciones $\mathcal{U} = \{U(t) : t \geq 0\}$, donde $U(t) : D_t \to D$ está definida por :

$$U(t)z = u_z(t) \qquad \forall t \geq 0 \ , \ \forall z \in D_t \qquad (4.3)$$

Definición 4.1 Si (C1)" - (C7)" se cumplen y $\mathcal{U}$ está definida por (4.3), la aplicación :

$$\begin{aligned} U(\cdot, z) : [0, \sigma_z) &\longrightarrow D \\ t &\longmapsto U(t,z) = u_z(t) \end{aligned}$$

Se denomina la trayectoria de $\mathcal{U}$ en $z$. Si $z \in D$ y $\sigma_z = +\infty$ , el conjunto $\omega$-límite de la trayectoria $U(\cdot, z)$ , que denotaremos $\omega(z)$, es el subconjunto de $X$ (posiblemente vacío), cuyos elementos son los puntos límites de $\{U(t,z) : t \geq 0\}$ cuando $t \to +\infty$ . Es decir :

$$\omega(z) = \left\{ x \in X : \text{existe } \{t_k\} \text{ con } \lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty \text{ y } x = \lim_{k\to+\infty} U(t_k, z) \right\}.$$

Puede verse que $\omega(z) \subset D$ y que si la trayectoria $U(\cdot, z)$ es acotada entonces $\omega(z) \neq \phi$.

El teorema siguiente describe el comportamiento asintótico de las soluciones a (4.2). Serán asumidas las hipótesis:

(i) Se cumplen las condiciones (C1)"- (C7)".

(ii) $\Phi : X \to [0, +\infty)$ es un funcional convexo y existe un $L>0$ tal que:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \in X \qquad (4.4)$$

(iii) $\exists r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi(T(t)z) \leq e^{rt}\Phi(z) \quad \forall z \in X, \forall t \geq 0 \qquad (4.5)$$

(iv) $$\delta_+ \Phi(x) Bx < -r\,\bar{\Phi}(x) \quad \text{para } x \in D \text{ con } \bar{\Phi}(x) > 0 \qquad (4.6)$$

donde $\delta_+ \bar{\Phi}(x) Bx = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{\Phi(x+hBx) - \Phi(x)}{h}$ es la variación lateral.

<u>Teorema 4.2</u> ([2] pág. 363) Bajo las hipótesis (i) - (iv) se tiene que para cada $z \in D$ la función $[0, \sigma_z) \to \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \bar{\Phi}(U(t,z)) = \bar{\Phi}(u_z(t))$$

es no creciente y estrictamente decreciente en cualquier subintervalo $J$ de $[0, \sigma_z)$, donde $\bar{\Phi}(U(t,z)) > 0 \ \forall t \in J$. También, si $z \in D$ con $\sigma_z = +\infty$ y $U(\cdot, z)$ es acotada, $\omega(z) \subset \{x \in D : \bar{\Phi}(x) = 0\}$. Además, si $\bar{\Phi}(x) \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$, entonces $\sigma_z = +\infty$ y $U(\cdot, z)$ es acotada para cada $z \in D$.

A continuación aplicaremos los teoremas 4.1 y 4.2 al problema concreto que hemos venido trabajando en los capítulos 2 y 3:

Sean $X = L^2([0,1]; \mathbb{R}) = L^2$, $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $R > 0$ existe $L(R) \in \mathbb{R}$ tal que: $\forall h > 0$, si $|\xi|, |\eta| \leq R$ y $\tau \in [0,1]$ entonces:

$$|(\xi - \eta) - h[f(\tau, \xi) - f(\tau, \eta)]| \geq (1 - hL(R))|\xi - \eta| \qquad (4.7)$$

y existen $c, d \in \mathbb{R}$ con $c \leq 0 \leq d$ tales que:

$$\left.\begin{array}{l} f(\tau,\xi) < 0 \quad \text{si} \quad (\tau,\xi) \in [0,1] \times (d,+\infty) \\ \text{y} \quad f(\tau,\xi) > 0 \quad \text{si} \quad (\tau,\xi) \in [0,1] \times (-\infty, c) \end{array}\right\} \qquad (4.8)$$

Consideraremos la ecuación diferencial parcial :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t} U(t,\tau) = \dfrac{\partial}{\partial \tau}\left(\rho(\tau) \dfrac{\partial}{\partial \tau} U(t,\tau)\right) + f(\tau, U(t,\tau)) \\ U(t,0) = U(t,1) = 0 \,, \quad U(0,\tau) = \varphi_0(\tau) \end{array}\right\} \qquad (4.9)$$

donde $(t,\tau) \in [0,+\infty) \times [0,1]$ , $\varphi_0 \in L^\infty \subset L^2$ , y $\rho \in C^1([0,1])$ con $\rho(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [0,1]$ .

Sea $A$ el operador definido por:

$$D(A) = \left\{ \varphi \in L^2 : \varphi, \varphi' \text{ son absolut. continuas}, \varphi'' \in L^2 \,, \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \right\}$$

y $\quad A\varphi = (\rho \varphi')' .$

Para cada subintervalo $\Lambda \subset \mathbb{R}$ , $\Lambda$ cerrado , sea

$$K(\Lambda) = \left\{ \varphi \in L^2 : \varphi(\tau) \in \Lambda \text{ para casi todo } \tau \in [0,1] \right\}$$

y sea $R_0 > 0$ tal que $\varphi_0(\tau) \in [-R_0, R_0]$ para casi todo $\tau \in [0,1]$ y $[c,d] \subset (-R_0, R_0)$ . Si $D = K([-R_0, R_0])$ claramente $\varphi_0 \in D$. Definamos

$$B : D \to L^2 \text{ por}$$
$$[B\varphi](\tau) = f(\tau, \varphi(\tau)) \,, \quad \tau \in [0,1] .$$

Como antes , con (4.9) asociamos el problema de valores iniciales en $L^2$

$$\left.\begin{array}{l} u'(t) = Au(t) + Bu(t) \,, \quad t > 0 \\ u(0) = \varphi_0 \end{array}\right\} . \qquad (4.10)$$

Por definición sabemos que (4.9) tiene una única $L^2$- solución moderada en $[0,+\infty) \times [0,1]$ si (4.10) tiene una única solución moderada en $[0,+\infty)$. Ahora bien, para probar esto último es suficiente, por el teorema 4.1, que se cumplan las condiciones $(C1)''$-$(C4)''$ y que $B \in \mathcal{D}^e_+(D)$.

Verifiquemos entonces estas condiciones.

$(C1)''$ Por el teorema 2.6 sabemos que $A$ es el generador de un semigrupo analítico compacto $T \in LS_+(L^2)$ con $\nu[T] \leq 0$.

(C2)" Por el lema 1.6 y la observación 2.1 (ii) sabemos que $D = K([-R_0, R_0])$ es un subconjunto cerrado y convexo de $L^2$ y además $T(t): D \to D \ \forall t \geq 0$.

(C3)" Como $B\varphi$ definida por $[B\varphi](\tau) = f(\tau, \varphi(\tau))$ es la composición de una función medible ($\varphi \in D$) con una continua tenemos que $B\varphi$ es medible. Sea :

$$M = \max_{\substack{\tau \in [0,1] \\ \xi \in [-R_0, R_0]}} |f(\tau, \xi)| \geq 0$$

Entonces, para todo $\varphi \in D$ $|[B\varphi](\tau)| \leq M$ para casi todo $\tau \in [0,1]$, y por tanto $B\varphi \in L^2$. Es decir :

$B : D \to L^2$. Además, $B$ es continua (ver demostración del teorema 3.4 donde $f(t,\tau,\varphi(\tau))$ se remplaza por $f(\tau,\varphi(\tau))$)

(C4)" Sea $\eta$ tal que $0 < \eta < R_0$ y $[c,d] \subset [-R_0+\eta, R_0-\eta]$.

De otra parte, como $\forall \varphi \in D \ |f(\tau,\varphi(\tau))| \leq M$ para casi todo $\tau \in [0,1]$ se tiene :

Si $R_0 - \eta < \varphi(\tau) \leq R_0$ entonces $f(\tau,\varphi(\tau)) < 0$, de donde $0 \leq \varphi(\tau) + h f(\tau,\varphi(\tau)) < \varphi(\tau) \leq R_0$, para $h > 0$ suficientemente pequeño.

Si $-R_0 \leq \varphi(\tau) < -R_0 + \eta$, entonces $f(\tau,\varphi(\tau)) > 0$, de donde: $-R_0 \leq \varphi(\tau) < \varphi(\tau) + h f(\tau,\varphi(\tau)) \leq 0$ para $h > 0$ suficientemente pequeño

Si $-R_0 + \eta \leq \varphi(\tau) \leq R_0 - \eta$ entonces:

$-R_0 \leq \varphi(\tau) + h f(\tau,\varphi(\tau)) \leq R_0$ para $h > 0$ suficientemente pequeño

Luego, para $h > 0$ suficientemente pequeño :

$$\varphi(\tau) + h f(\tau,\varphi(\tau)) \in [-R_0, R_0] \text{ para casi todo } \tau \in [0,1];$$

es decir : para $h > 0$ suficientemente pequeño :

$\varphi + hB\varphi \in D$ ; por tanto $\lim_{h \to 0^+} \frac{d(\varphi + hB\varphi ; D)}{h} = 0$ ,

y (C4)" se cumple.

Solo nos resta probar, para tener las hipótesis del teorema 4.1, que $B \in \mathcal{D}_+^c(D)$, es decir, que existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $B - \omega I$ es disipativo:

Para $R_0$ sea $\omega = L(R_0) \in \mathbb{R}$ tal que cumple (4.7). Entonces para cada $\varphi, \psi \in D$ :

$$|\varphi(\tau) - \psi(\tau) - h[f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))]| \geq (1 - hL(R_0)) |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|$$

para casi todo $\tau \in [0,1]$, luego :

$$|\varphi - \psi - h[B\varphi - B\psi]|_2 \geq (1 - hL(R_0)) |\varphi - \psi|_2 ;$$

Es decir : $B \in \mathcal{D}_+^c(D)$. En consecuencia tenemos el siguiente teorema :

Teorema 4.3 Bajo las condiciones impuestas a $\rho$, $f$ y $\varphi_0$ la ecuación diferencial (4.9) tiene una única $L^2$-solución moderada en $[0,+\infty) \times [0,1]$.

Con relación al comportamiento asintótico de la $L^2$-solución moderada de (4.9) veamos que se satisfacen las hipótesis del teorema 4.2:

(i) Ya sabemos que se satisfacen las condiciones (C1)" - (C4)" y que $B \in \mathcal{D}_+^c(D)$.

(C5)" $T$ es compacto (teorema 2.6).

(C6)" Como $B$ es acotada (ver verificación de la hipótesis (C3)") entonces es obvio que $B$ envía acotados en acotados.

(C7)" Del teorema 4.1 tenemos que las soluciones a (4.10) son únicas a la derecha para cada $\varphi_0 \in D$.

Por consiguiente se verifica la hipótesis (i).

(ii) Definamos el funcional

$$\Phi : L^2 \longrightarrow [0,+\infty) \text{ por :}$$

$$\Phi(\varphi) = d(\varphi ; K([c,d])) \text{ para cada } \varphi \in L^2 \qquad (4.11)$$

donde $[c,d]$ es el intervalo compacto de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in [c,d]$ (se permite la posibilidad $c=d=0$). Veamos que $\Phi$ es un funcional convexo tal que $|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)| \leq |\varphi - \psi|_2$ ($L=1$).

Sean $\varphi, \psi \in L^2$, $u, v \in K$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Usando el hecho de que $K$ es convexo :

$$\bar{\Phi}(\lambda\varphi+(1-\lambda)\psi) \leq |\lambda\varphi+(1-\lambda)\psi-[\lambda u+(1-\lambda)v]|_2$$
$$\leq \lambda|\varphi-u|_2+(1-\lambda)|\psi-v|_2$$

y por ser esta desigualdad válida para todo $u,v\in K$ se tiene por propiedad del ínfimo que :

$\bar{\Phi}(\lambda\varphi+(1-\lambda)\psi) \leq \lambda\bar{\Phi}(\varphi)+(1-\lambda)\bar{\Phi}(\psi)$ . Esto es , $\bar{\Phi}$ es convexa.

Además: $|\bar{\Phi}(\varphi)-\bar{\Phi}(\psi)| \leq |\varphi-\psi|_2$ ya que

$$\bar{\Phi}(\varphi) \leq |\varphi-u|_2 \leq |\varphi-\psi|_2+|\psi-u|_2 \quad \forall u\in K$$

luego $\bar{\Phi}(\varphi) \leq |\varphi-\psi|_2+\bar{\Phi}(\psi)$ ;

es decir: $\bar{\Phi}(\varphi)-\bar{\Phi}(\psi) \leq |\varphi-\psi|_2$ y simetricamente

$$\bar{\Phi}(\psi)-\bar{\Phi}(\varphi) \leq |\varphi-\psi|_2 \ ;$$

de donde $|\bar{\Phi}(\varphi)-\bar{\Phi}(\psi)| \leq |\varphi-\psi|_2$ ;

luego se tiene la condición (ii).

(iii) Sean $\varphi\in L^2$ y $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $K([c,d])$ tal que $\bar{\Phi}(\varphi)=\lim_{n\to\infty}|\varphi-\varphi_n|_2$ ; entonces, por ser $K([c,d])$ $T$-invariante (observación 2.1 (ii)) tenemos que $T(t)\varphi_n\in K([c,d])$ ; luego :

$\bar{\Phi}(T(t)\varphi) \leq |T(t)\varphi-T(t)\varphi_n|_2$ para todo $n$ . Luego

$$\bar{\Phi}(T(t)\varphi) \leq \limsup_{n\to\infty}|T(t)\varphi-T(t)\varphi_n|_2 \leq \limsup_{n\to\infty} e^{\nu[T]t}|\varphi-\varphi_n|_2$$

y como $\nu[T]\leq 0$ , obtenemos : $\bar{\Phi}(T(t)\varphi) \leq \lim_{n\to\infty}|\varphi-\varphi_n|_2=\bar{\Phi}(\varphi)$ .

De donde , $\bar{\Phi}(T(t)\varphi)\leq\bar{\Phi}(\varphi)$ $\forall t\geq 0$ , $\forall\varphi\in L^2$ , y por consiguiente se cumple (iii) con $r=0$ .

(iv) Debemos probar que $\delta_+\bar{\Phi}(\varphi;\beta\varphi)<0$ para $\varphi\in D$ con $\bar{\Phi}(\varphi)>0$. Es decir : $\delta_+\bar{\Phi}(\varphi;\beta\varphi)<0$ $\forall\varphi\in D\setminus K([c,d])$ , ( recordemos que $\bar{\Phi}(\varphi)$ es la distancia de $\varphi$ a $K([c,d])$ ). Para ello sea

$$\Phi_t : \mathbb{R}\to[c,d]$$
$$\xi\mapsto \Phi_t(\xi)=d(\xi,[c,d])=|\xi-P_t\xi|$$

donde $P_t$ es el operador proyección de $\mathbb{R}$ sobre el convexo cerrado $[c,d]$.

Es decir :

$$\Phi_1(\xi) = \begin{cases} c-\xi & \text{si } \xi < c \\ 0 & \text{si } \xi \in [c,d] \\ \xi-d & \text{si } \xi > d \end{cases}$$

Es claro que $\Phi_1$ es convexa.

Recordando que:

$f(\tau,\xi) < 0$ si $(\tau,\xi) \in [0,1] \times [d,+\infty)$,

$f(\tau,\xi) > 0$ si $(\tau,\xi) \in [0,1] \times (-\infty,c]$,

$K([c,d]) \subset D = K([-R_0,R_0])$, donde $[c,d] \subset (-R_0,R_0)$ y

$[B\varphi](\tau) = f(\tau,\varphi(\tau))$ , $\tau \in [0,1]$;

podemos probar para $\Phi_1$ que :

1. $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $(\tau,\xi) \in [0,1] \times [-R_0,R_0]$ y $0 \leq h \leq \delta$

Entonces:

$$\Phi_1(\xi + h f(\tau,\xi)) - \Phi_1(\xi) \leq h\epsilon \qquad (4.12)$$

2. Para todo subconjunto compacto $E$ de $[-R_0,R_0] \setminus [c,d]$ existen $\epsilon'(E) > 0$ y $\delta'(E) > 0$ tales que si $(\tau,\xi) \in [0,1] \times E$ y $0 \leq h \leq \delta'(E)$

Entonces:

$$\Phi_1(\xi + h f(\tau,\xi)) - \Phi_1(\xi) \leq -h\,\epsilon'(E) \qquad (4.13)$$

<u>Demostración de 2</u>. Razonemos por el absurdo. Supongamos que existe $E$ subconjunto compacto de $[-R_0,R_0] \setminus [c,d]$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $(\tau_n,\xi_n) \in [0,1] \times E$ y $0 < h_n \leq \frac{1}{n}$ para los cuales

$$\Phi_1(\xi_n + h_n f(\tau_n,\xi_n)) - \Phi_1(\xi_n) > -\frac{h_n}{n}.$$

Podemos suponer por un paso adecuado a subsucesiones que $\{(\tau_n,\xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $(\tau,\xi)$ en $[0,1] \times E$, ya que $[0,1] \times E$ es compacto, y además que $\xi_n > d$ para todo $n$; (el caso $\xi_n < c$ se analiza en forma análoga).

Dado $h > 0$ existe $N_h \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_h$ $h_n < h$ luego, por ser $f(\tau_n,\xi_n) < 0$ se tiene:

$$\xi_n + h f(\tau_n,\xi_n) < \xi_n + h_n f(\tau_n,\xi_n) < \xi_n \quad \forall n \geq N_h . \qquad (4.14)$$

Recordando que para una función convexa $\Phi_1$, si $x \le x' < y'$ y $x < y \le y'$ se tiene que

$$\frac{\Phi_1(x) - \Phi_1(y)}{x - y} \le \frac{\Phi_1(x') - \Phi_1(y')}{x' - y'}$$

entonces, de la desigualdad (4.14):

$$\frac{\Phi_1(\xi_n) - \Phi_1(\xi_n + h f(\tau_n, \xi_n))}{-h f(\tau_n, \xi_n)} \le \frac{\Phi_1(\xi_n) - \Phi_1(\xi_n + h_n f(\tau_n, \xi_n))}{-h_n f(\tau_n, \xi_n)}$$

para todo $n \ge N_k$. Como $f(\tau_n, \xi_n) < 0$ entonces

$$\frac{\Phi_1(\xi_n + h f(\tau_n, \xi_n)) - \Phi_1(\xi_n)}{h} \ge \frac{\Phi_1(\xi_n + h_n f(\tau_n, \xi_n)) - \Phi_1(\xi_n)}{h_n} > -\frac{1}{n}$$

para todo $n \ge N_k$. Pasando al límite obtenemos:

$$\frac{\Phi_1(\xi + h f(\tau, \xi)) - \Phi_1(\xi)}{h} \ge 0 \qquad \forall h > 0 \qquad (4.15)$$

Por otro lado, por la definición de $f(\cdot, \xi)$ en los intervalos $(d, +\infty)$ y $(-\infty, c)$ tenemos para $h > 0$ suficientemente pequeño que

$$\Phi_1(\xi + h f(\tau, \xi)) - \Phi_1(\xi) = \begin{cases} h f(\tau, \xi) & \text{si } \xi > d \\ -h f(\tau, \xi) & \text{si } \xi < c \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\frac{\Phi_1(\xi + h f(\tau, \xi)) - \Phi_1(\xi)}{h} < 0$$

para $h > 0$ suficientemente pequeño, lo cual está en contradicción con (4.15). De esta manera (2) queda demostrado. La prueba de 1. es similar.

Sea ahora $\varphi \in D \setminus K([c,d])$. Existe $\delta > 0$ tal que

$$\Phi(\varphi) = d(\varphi; K([c,d])) \ge \delta .$$

Si $P : L^2 \to K([c,d])$ es el operador proyección, entonces $P$ es continuo ([2] pág. 13 prop. 3.2) ya que $L^2$ es uniformemente convexo y $K([c,d])$ es convexo y cerrado. Además

$$\Phi(\varphi) = |\varphi - P\varphi|_2$$

Es claro que $[P\varphi](\tau) = P_1(\varphi(\tau))$.

Sea $E = \{\xi : \xi \in [-R_0, R_0] \wedge d(\xi, [c,d]) \geq \frac{\delta}{2}\}$,

y sean, para este compacto $E$, $\epsilon'(E)$, $\delta'(E) > 0$ tales que se cumpla (4.13). Sean $A_1 = \{\tau : \tau \in [0,1] \wedge \varphi(\tau) \in E\}$ y $B_1 = [0,1] \setminus A_1$. Entonces

$$\delta^2 \leq [\bar{\Phi}(\varphi)]^2 = \int_{A_1} |\varphi(\tau) - P_1(\varphi(\tau))|^2 d\tau + \int_{B_1} |\varphi(\tau) - P_1(\varphi(\tau))|^2 d\tau$$

$$\leq m(A_1) R_0^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2,$$

con lo que se obtiene $m(A_1) > 0$.

Para $0 < h \leq \delta'(E)$, sea $\varphi_h = \varphi + h\beta\varphi$ Entonces

$$[\bar{\Phi}(\varphi_h)]^2 - [\bar{\Phi}(\varphi)]^2 = \int_{A_1} \{[\bar{\Phi}_1(\varphi_h(\tau))]^2 - [\bar{\Phi}_1(\varphi(\tau))]^2\} d\tau$$

$$+ \int_{B_1} \{[\bar{\Phi}_1(\varphi_h(\tau))]^2 - [\bar{\Phi}_1(\varphi(\tau))]^2\} d\tau \qquad (4.16)$$

Como $\bar{\Phi}_1$ es uniformemente continua en compactos y $|f(\tau, \varphi(\tau))| \leq M$ para casi todo $\tau$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < h < \delta_1$ entonces:

$$|\bar{\Phi}_1(\varphi_h(\tau)) - \bar{\Phi}_1(\varphi(\tau))| = |\bar{\Phi}_1(\varphi(\tau) + h f(\tau, \varphi(\tau))) - \bar{\Phi}_1(\varphi(\tau))| \leq \frac{\delta}{4} \text{ a.e. en } [0,1].$$

En particular: $\bar{\Phi}_1(\varphi(\tau)) \geq \bar{\Phi}_1(\varphi_h(\tau)) \geq \bar{\Phi}_1(\varphi(\tau)) - \frac{\delta}{4} \geq \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{4}$ a.e. en $A_1$.

Teniendo presente que si $0 < \frac{\delta}{4} \leq x_1 \leq x_2$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) \leq \frac{\delta}{2}(x_1 - x_2) \text{ ya que } x_1 - x_2 \leq 0$$

puede afirmarse, utilizando la desigualdad (4.13), que para casi todo $\tau \in A_1$

$$[\bar{\Phi}_1(\varphi_h(\tau))]^2 - [\bar{\Phi}_1(\varphi(\tau))]^2 \leq \frac{\delta}{2} [\bar{\Phi}_1(\varphi_h(\tau)) - \bar{\Phi}_1(\varphi(\tau))]$$

$$\leq -\frac{\delta}{2} h \epsilon'(E) \text{ si } 0 < h < \delta_1. \qquad (4.17)$$

De otra parte para casi todo $\tau \in B_1$, de acuerdo a (1), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < h < \delta_2$ entonces:

$$\bar{\Phi}_1(\varphi_h(\tau)) - \bar{\Phi}_1(\varphi(\tau)) \leq h\epsilon$$

Luego, si $0 < h < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para casi todo $\tau \in B_1$ se tiene:

$$[\bar{\Phi}_1(\varphi_h(\tau))]^2 - [\bar{\Phi}_1(\varphi(\tau))]^2 = [\bar{\Phi}_1(\varphi_h(\tau)) + \bar{\Phi}_1(\varphi(\tau))][\bar{\Phi}_1(\varphi_h(\tau)) - \bar{\Phi}_1(\varphi(\tau))]$$

$$\leq [\bar{\Phi}_1(\varphi_h(\tau)) + \bar{\Phi}_1(\varphi(\tau))] h\epsilon$$

$$\leq [\bar{\Phi}_1(\varphi(\tau)) + \frac{\delta}{4} + \bar{\Phi}_1(\varphi(\tau))] h\epsilon \leq 5\frac{\delta}{4} h\epsilon$$

Y así : $$\int_{B_1} \left\{ [\Phi_1(\varphi_h(r))]^2 - [\Phi_1(\varphi(r))]^2 \right\} dr \leq 5\frac{\delta}{4} h\epsilon \qquad (4.18)$$

Con base a las desigualdades (4.17) y (4.18), de (4.16) se sigue , para $0 < h < \min\{\delta_1, \delta_2, \delta'(\epsilon)\}$ que :

$$[\bar{\Phi}(\varphi_h)]^2 - [\Phi(\varphi)]^2 \leq -mA_1 \frac{\delta}{2} h\epsilon'(\epsilon) + 5\frac{\delta}{4} h\epsilon$$

De donde

$$\frac{[\bar{\Phi}(\varphi_h)]^2 - [\Phi(\varphi)]^2}{h} \leq -mA_1 \frac{\delta}{2} \epsilon'(\epsilon) + 5\frac{\delta}{4} \epsilon$$

Como el $\epsilon > 0$ es arbitrario, puede afirmarse entonces que :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{[\bar{\Phi}(\varphi_h)]^2 - [\Phi(\varphi)]^2}{h} \leq -mA_1 \frac{\delta}{2} \epsilon'(\epsilon) < 0$$

Luego :

$$\delta_+ \Phi(\varphi) B\varphi = \lim_{h\to 0^+} \frac{\bar{\Phi}(\varphi_h) - \Phi(\varphi)}{h}$$

$$= \frac{1}{2}[\Phi(\varphi)]^{-1} \lim_{h\to 0^+} \frac{[\bar{\Phi}(\varphi_h)]^2 - [\bar{\Phi}(\varphi)]^2}{h} < 0$$

Es decir: $\delta_+ \Phi(\varphi) B\varphi < 0$ , y la hipótesis del teorema 4.2 se cumplen.

Tiene lugar por lo tanto el siguiente teorema :

Teorema 4.4 La $L^2$-solución moderada de la ecuación diferencial (4.9), que existe de acuerdo al teorema 4.3, es tal que para el funcional $\Phi$ definido por 4.11, si $\varphi \in D$ , el conjunto $\omega$-limite $\omega(\varphi)$ está contenido en $\{\varphi \in D : \Phi(\varphi) = 0\}$. En particular, si $c = d = 0$ , se tiene para la $L^2$ - solución moderada $U$ de (4.9):

$$|U(t,\cdot)|_2 \to 0 \quad , \quad t \to \infty .$$

## BIBLIOGRAFIA

[1] Coddington,E.A.,Levinson,N.: Theory of ordinary differential equations, Mc-Graw Hill, New York 1955.

[2] Martin, R.H.: Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces, John Wiley & Sons, 1976.

[3] Taylor, A.E.: Introduccion to functional Analysis, John Wiley & Sons, 1958.

[4] Goldberg, S.: Unbounded linear Operators, Theory and Applications, Mc-Graw Hill.

[5] Pazy, A.: Semigroups of linear Operators and Applications to partial differential equations, Springer 1983.

[6] Natanson, I.P.: Theory of functions of a real variable,Volume I, Frederick Ungar Publishing, New York 1974.

[7] Weidman, J.: Linear Operators in Hilbert spaces, Springer 1980.