Desigualdad de Lojasiewicz y estimación del exponente de Lojasiewicz vía poliedros de Newton

Orlando Vanegas Canro
Matemático
Código: 1013631642

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Septiembre 2017

Desigualdad de Lojasiewicz y estimación del exponente de Lojasiewicz vía poliedros de Newton

Orlando Vanegas Canro
Matemático
Código: 1013631642

Trabajo de grado para obtener el título de
Magister en Ciencias-Matemáticas

Director
Edwin León Cardenal, Ph.D.
cimat

Codirector
John Jaime Rodriguez V, Ph.D.
Profesor asociado

Línea de investigación
Geometría algebraica

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Septiembre 2017

Título en español

Desigualdad de Lojasiewicz y estimación del exponente de Lojasiewicz vía poliedros de Newton

Title in English

Lojasiewicz inequatily and Lojasiewicz exponent estimation with Newton polyhedrons

Resumen: En este trabajo estudiamos las pruebas de la desigualdad de Lojasiewicz desde la geometría algebraica real, y además la estimación del exponente de Lojasiewicz usando las herramientas del poliedro de Newton.

Abstract: In this work we study proofs of Lojasiewicz inequalities from real algebraic geometry and we study the estimation of Lojasiewicz´s exponent using the concepts and definitions of Newton polyhedrons.

Palabras clave: desigualdad, exponente, geometría algebraica real, Newton, poliedro.

Keywords: inequality, exponent, real algebraic geometry, Newton, polyhedron.

Dedicado a

A mi familia y amigos.

Agradecimientos

Agradezco a los profesores Edwin León Cardenal y John Jaime Rodriguez, por su paciencia, su tiempo y profesionalismo para poder elaborar este documento. Además agradezco a Dios y a mi familia por su apoyo incondicional.

Índice general

Índice general **I**

Introducción **III**

Introducción III

Algunas estimaciones elementales del exponente de Lojasiewicz V

Estimación del exponente de Lojasiewicz en una variable V

Estimación del exponente de Lojasiewicz para polinomios cuasi-homogéneos VI

Estimación de cotas del exponente de Lojasiewicz para funciones polinómicas de grado d VIII

Estimaciones para conjuntos semialgebraicos y semianalíticos y estimaciones con geometría analítica local IX

Presentación del documento XI

1. Algunos elementos de geometría algebraica real **1**

1.1. Cuerpos ordenados y cuerpos reales 1

1.1.1. Principio de Tarski-Seidenberg 4

1.2. Conjuntos semialgebraicos 8

1.2.1. Algunas nociones y propiedades topológicas del cuerpo R y los conjuntos semialgebraicos 10

1.3. Descomposición de conjuntos semialgebraicos 13

1.4. Conexidad y el lema de selección de curva 16

1.5. Funciones semialgebraicas continuas y la desigualdad de Lojasiewicz . 18

2. Estimación del exponente de Lojasiewicz vía poliedros de Newton **22**

2.1. El poliedro de Newton 22
2.1.1. Construcción del poliedro de Newton 23
2.1.2. El poliedro dual o abanico 24
2.1.3. Construcción de la variedad tórica asociada a un abanico 29
2.2. Caso 2-dimensional y condición extra de no degeneración 34
2.3. Dos ejemplos 46
Trabajo futuro 56

Bibliografía **57**

Introducción

La desigualdad de Lojasiewicz tiene su origen en la teoría de distribuciones, más precisamente en el denominado"problema de la división"propuesto por Laurent Schwartz, el cual trata de la división de una distribución por polinomios o por una función analítica [5]. En 1958 el matemático polaco Stanislaw Lojasiewicz resolvió en [24] dicho problema. De manera independiente, el matemático suizo Lars Hörmander dio otra solución en [15].

La desigualdad de Lojasiewicz en su versión analítica se define a continuación,

Desigualdad de Lojasiewicz

Sea $dist(x, A)$ la distancia de un punto x a un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, es decir

$$dist(x, A) = \text{ínf}\{|x - y| \mid y \in A\}.$$

Además, sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ una función analítica y Z_f el conjunto de ceros de f. Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1. *Para cada conjunto compacto $K \subset U$, existen constantes positivas α y C tal que*

$$dist(x, Z_f)^\alpha \leq C|f(x)|, \quad \forall x \in K. \tag{.1}$$

Según [5] la desigualdad (.1) fue el resultado clave en la prueba de parte de Lojasiewicz del problema de la división. Lojasiewicz probó la desigualdad en [24], y luego dio pruebas diferentes de casos generales. Luego, Hörmander dio otras pruebas de la desigualdad en [15].

Existen diferentes versiones de la desigualdad de Lojasiewicz. Una formulación equivalente al teorema anterior es llamada la *desigualdad gradiente de Lojasiewicz*. Se dice en [5] que fue empleada por Lojasiewicz cuando resolvió la conjetura de Whitney[1]. Ésta dice:

[1]La conjetura de Whitney dice que si f es una función analítica en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ entonces el conjunto Z_f de ceros de f es un conjunto deformado retractivamente (Una función continua

Teorema 2. *Para todo punto crítico $x \in U$ de f existen una vecindad V de x, un exponente $\theta \in [1/2, 1)$ y una constante C tal que*

$$|f(y) - f(x)|^{\theta} \leq C||\nabla f(y)|| \quad \forall y \in V. \tag{.2}$$

donde $|\cdot|$ representa el valor absoluto de $\mathbb{R}$ y $||\cdot||$ la norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$.

El menor de los θ que cumple la desigualdad (.2) es llamado el *exponente de Lojasiewicz* y está relacionado, entre otros, con algunos invariantes de geometría algebraica, como por ejemplo el umbral log-canónico de f, ver [33].

Además según el artículo de Lichtin [23] el exponente de Lojasiewicz se relaciona con el C^0 grado de suficiencia para un germen f.[2] A partir de esto, lo que se quiere es calcular v_f en términos del poliedro de Newton de f.

Para ciertas funciones el exponente de Lojasiewicz se puede encontrar con métodos clásicos del análisis, es decir, buscando cotas y a partir de estas encontrar el exponente adecuado. Se mostrarán algunas estimaciones elementales del exponente de Lojasiewicz para polinomios en una, dos variables y polinomios cuasihomogénenos. El caso general es mucho más complicado y gracias a los trabajos de Lejeune-Jalabert y Tessier en [21] y Lichtin [23] introducimos en la sección 2.1 la herramienta del poliedro de Newton de una función f, que ayudará a estimar gracias a herramientas de geometría tórica el exponente en el caso en que f es un polinomio en dos variables que satisface una cierta condición de no degeneración, véase la definición 36 todo esto según el trabajo de Lichtin [23]. Para el caso de un polinomio en más de dos variables se tienen trabajos como el de [10] los cuales no hacen parte en este trabajo. Finalmente en las secciones 2.2, 2.3 se muestra la estimación del exponente para el caso de un polinomio en dos variables no degenerado y dos ejemplos que ilustran las ideas geométricas detrás de esta prueba.

La estimación del exponente de Lojasiewicz puede ser una tarea bastante difícil en general, pero existen casos particulares en los cuales se puede mostrar cómo poder estimarlo. A continuación se da una breve explicación de dichos casos.

$g : X \times [0,1] \to X$ es una *deformación retractiva* de un espacio X sobre un subespacio A, si para todo $x \in X$ y todo $a \in A$, $g(x,0) = x$, $g(x,1) \in A$ y $f(a,1) = a$. A partir de esto se dice que A se deforma retractivamente en X) de una vecindad abierta de Z_f en U.

[2] Si $f : (C^n, 0) \to (C, 0)$ es un germen de una aplicación analítica, el C^0-grado de suficiencia v_f de f es el entero v más pequeño que satisface la condición que todos los términos de f que son de grado mayor que v no modifican el tipo topológico del polinomio que consiste de aquellos términos de f que tienen a los más orden v.

Algunas estimaciones elementales del exponente de Lojasiewicz

Para estas estimaciones debemos tener en cuenta la versión de la desigualdad del teorema (.2).

Estimación del exponente de Lojasiewicz en una variable

Sea f un polinomio no constante sobre el anillo $\mathbb{R}[x]$. Usando la expansión en serie de Taylor alrededor de x tenemos:

$$f(y) = f(x) + \sum_{k>0} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k$$

donde y está en una vecindad de x.

Ahora si tomamos $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $|x-y| < r$, se tiene que

$$|f(y) - f(x)| \leq \left|\frac{f^{(N)}(x)}{N!}\right| |y-x|^N$$

donde $N \geq 1$ es el mínimo tal que $\frac{\partial^N f}{\partial x^N}(x) \neq 0$. En particular, usando la desigualdad triangular inversa se tiene que

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f^{(N)}(x)}{N!}\right| |y-x|^N \leq |f(y)-f(x)| \leq 2\left|\frac{f^{(N)}(x)}{N!}\right| |y-x|^N \tag{.3}$$

Por lo tanto de la parte derecha de la desigualdad (.3), se tiene

$$\begin{aligned}
|f(y)-f(x)|^{\frac{N-1}{N}} &\leq \left(2\left|\frac{f^{(N)}(x)}{N!}\right| |y-x|^N\right)^{\frac{N-1}{N}} \\
&= 2^{\frac{N-1}{N}} \left|\frac{f^{(N)}(x)}{N!}\right|^{\frac{N-1}{N}} |y-x|^{N-1} \\
&= \frac{2^{-1}2^{\frac{2N-1}{N}}}{(N-1)!^{\frac{N-1}{N}} N^{\frac{N-1}{N}}} \left|f^{(N)}(x)\right|^{\frac{N-1}{N}} |y-x|^{N-1} \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{|f^{(N)}(x)|^{\frac{N-1}{N}}}{(N-1)!^{\frac{N-1}{N}}}|y-x|^{N-1}\frac{2^{\frac{2N-1}{N}}}{N^{\frac{N-1}{N}}}.
\end{aligned}$$

Así, si $c = \frac{2^{\frac{2N-1}{N}}}{N^{\frac{N-1}{N}}}$ entonces de lo anterior se tiene que

$$|f(y)-f(x)|^{\frac{N-1}{N}} \leq \frac{c}{2}\frac{|f^{(N)}(x)|^{\frac{N-1}{N}}}{|(N-1)!|^{\frac{N-1}{N}}}|y-x|^{N-1} \leq \frac{c}{2}\frac{|f^N(x)|}{|(N-1)!|}|y-x|^{N-1}, \tag{.4}$$

si $N > 1$.

Ahora, de la parte izquierda de la desigualdad (.3), para $N > 1$, podemos tomar $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $|y - x| < r$, y entonces dividiendo a ambos lados de esta desigualdad por $|y - x|$, se obtiene

$$|f'(y)| = \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \geq \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(N)}(x)}{N!}\right| |y - x|^{N-1} \tag{.5}$$

De las desigualdades (.3), (.4) y (.5) se tiene que

$$|f(y) - f(x)|^{\frac{N-1}{N}} \leq \frac{c}{2}\frac{|f^{(N)}(x)|}{(N-1)!}|y - x|^{N-1} \leq c'|f'(y)|, \tag{.6}$$

donde $c' = Nc$. Por lo tanto se ha mostrado la desigualdad gradiente de Lojasiewicz para un polinomio de una variable sobre $\mathbb{R}$, donde su exponente es $\theta = \frac{N-1}{N}$.

Estimación del exponente de Lojasiewicz para polinomios cuasi-homogéneos

En [13] se enuncia la desigualdad gradiente de Lojasiewicz de la siguiente manera:

Dados un cuerpo $\mathbb{K}$ real o complejo y una función polinómica $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ tal que $f(0) = 0$, existen una vecindad abierta U del origen de $\mathbb{K}^n$ y dos constantes positivas c y $\theta < 1$, tal que para todo punto x en U se tiene

$$||\nabla f(x)|| \geq c|f(x)|^{\theta}. \tag{.7}$$

A partir de esta desigualdad se dice que el *exponente gradiente de Lojasiewicz* de f notado por $\theta(f)$ es el ínfimo de los θ que satisfacen la desigualdad (.7) y se sabe gracias a [3] y [31] que este valor es un número racional.

Un polinomio $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ es *cuasi-homogéneo* de grado $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y peso $w = (w_1, ..., w_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$, si para todo $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ y todo $t > 0$

$$f(t^{w_1}x_1, ..., t^{w_n}x_n) = t^d f(x_1, ..., x_n).$$

Si f es un polinomio cuasi-homogéneo de grado $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, con peso $w = (w_1, ..., w_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, según [16] y [17] se tiene que $\theta(f) \leq 1 - \frac{w_*}{d}$ donde $w_* = \text{mín}_{j=1,2,...,n}\, w_j$.

Caso polinomio homogéneo.

A partir del caso anterior, si f es un polinomio homogéneo de grado d entonces según [13] se tiene que $\theta(f) = 1 - \frac{1}{d}$.

Un ejemplo tomado de [13] de esta descripción es el siguiente.

Ejemplo 1. *Considere el polinomio* $f(X,Y,Z) = X^2Y - XZ \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$. *Obsérvese que si* $t > 0$, *entonces*

$$\begin{aligned} f(tX, tY, t^2Z) &= (tX)^2 tY - tXt^2Z \\ &= t^3X^2Y - t^3XZ \\ &= t^3 f(X,Y,Z). \end{aligned}$$

Por lo tanto f *es cuasi-homogéneo, de peso* $w = (1,1,2)$ *y grado* $d = 3$.

Ahora,

$$\nabla f(X,Y,Z) = (2XY - Z, X^2, -X).$$

y por lo tanto se estima

$$\begin{aligned} |2XY - Z| + |X| &= \sqrt{(2XY-Z)^2} + \sqrt{X^2} \\ &\leq \sqrt{(2XY-Z)^2 + X^2} + \sqrt{X^2} \\ &\leq \sqrt{(2XY-Z)^2 + X^2 + X^4} + \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{(2XY-Z)^2 + X^2 + X^4} \\ &= \sqrt{2}\left(\sqrt{(2XY-Z)^2 + X^2 + X^4}\right) \\ &= \sqrt{2}||\nabla f||. \end{aligned}$$

Si $k := \frac{1}{\sqrt{2}}$, *entonces se tiene que*

$$||\nabla f|| \geq k\left(|2XY - Z| + |X|\right). \tag{.8}$$

Además,

$$\begin{aligned} |f(X,Y,Z)| = |X^2Y - XZ| &\leq |X^2Y + X^2Y - XZ - X^2Y| \\ &\leq |2X^2Y - XZ| + |X^2Y| \\ &\leq |2X^2Y - XZ| + |X|^2 \\ &\leq |X||2XY - Z| + |X|^2 \\ &\leq 2|X||2XY - Z| + |X|^2 \\ &\leq |2XY - Z|^2 + |X|^2 + |X|^2 \\ &\leq |2XY - Z|^2 + 2|X|^2, \end{aligned}$$

siempre que $|Y| \leq 1$.

Por lo tanto, de la desigualdad (.8) y lo anterior se tiene que

$$|f(X,Y,Z)| \leq |2XY - Z|^2 + 2|X|^2 \leq 2(|2XY - Z| + |X|)^2 \leq (2/k^2)||\nabla f(X,Y,Z)||^2, \quad (.9)$$

de donde

$$|f(X,Y,Z)|^{1/2} \leq c||\nabla f(X,Y,Z)||, \quad (.10)$$

con $c = 2/k^2$.

Se tiene así de las desigualdades (.7) y (.10) que

$$\theta(f) = 1/2 < 2/3 = 1 - 1/d.$$

Estimación de cotas del exponente de Lojasiewicz para funciones polinómicas de grado d

Si $f \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ y de grado d, según [6] y [7] se tiene que el exponente de Lojasiewicz $\theta(f)$ depende únicamente de n y d. Más precisamente se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3. *Si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un polinomio de grado* d*, entonces existen constantes positivas* c *y* ϵ *tales que*

$$||\nabla(f(x))|| \geq c|f(x) - f(y)|^{1-\tau}, \quad (.11)$$

donde $\tau = \frac{1}{R(n,d)}$*, siempre que* $||x - y|| \leq \epsilon$ *con*

$$R(n,d) := \begin{cases} d(3d-3)^{n-1} & \text{si } d \geq 2, \\ 1 & \text{si } d = 1. \end{cases}$$

Según [7] existen constantes positivas c y ϵ tales que

$$|f(x) - f(y)|^{R(n,d)} \geq c\,\mathrm{dist}(x, f^{-1}(y)),$$

para todos los x tales que $||x - y|| < \epsilon$ donde $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ denota la función distancia euclidiana.

Ahora según [7], si f es una función semialgebraica (véase definición 11) y continua no necesariamente suave, la desigualdad (.2) se cumple para dicha f si se reemplaza $||\nabla f(x)||$ por $m_f(x)$, llamada la *pendiente no suave* (ver la definición 2.2 de [7]). Finalmente se dice que desigualdades del tipo

$$m_f(x) \geq c|f(x) - f(y)|^{\theta},$$

se tienen en casos más generales. Sin embargo calcular o estimar cotas de θ puede ser bastante difícil.

Estimaciones para conjuntos semialgebraicos y semianalíticos y estimaciones con geometría analítica local

En [2], Bierstone y Hilman prueban el siguiente resultado.

Proposición 1. *Sean M una variedad real analítica y $K \subset M$. Si $f : K \to \mathbb{R}$ y $g : K \to \mathbb{R}$ son funciones con grafos compactos y son tales que $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$, entonces existen constantes positivas c, θ tales que*

$$|f(x)| \geq c|g(x)|^{\theta}.$$

En la prueba usan gran parte de la teoría de conjuntos semialgebraicos y semianalíticos desarrollada en [2]. Allí también se prueba que la función distancia es una función subanalítica así que en particular si $M = \mathbb{R}^n$, $K = f^{-1}(0)$, y $g(x) = d(x, K)$ con $x \in K$ entonces se tiene

$$|f(x)| \geq c|d(x, K)|^{r},$$

que reconocemos como la formulación (1) de la desigualdad de Lojasiewicz.

Existe, una formulación análoga de la Proposición 1 para conjuntos semialgebraicos, ésta se encuentra en el libro [4] y es el objeto de estudio del capítulo 1 del presente trabajo.

Otro desarrollo importante en esta teoría es el siguiente resultado de Lejeune-Jalabert y Teissier [21].

Si $f : (\mathbb{C}^n, \overline{0}) \to (\mathbb{C}, \overline{0})$ es un germen de aplicación analítico, la desigualdad de Lojasiewicz dice que existen constantes C y S tales que

$$|f_{X_1}(\overline{X}), ..., f_{X_n}(\overline{X})| \geq C|f(\overline{X})|^{S}. \tag{.12}$$

Según Teissier el mejor exponente θ para la desigualdad, esto es el exponente de Lojasiewicz, puede ser expresado en términos del crecimiento normalizado del ideal jacobiano J_f en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^n$. Más precisamente, si Ω es el conjunto de caminos analíticos que pasan por el origen de $\mathbb{C}^n$ y definimos

$$\alpha = \sup_{\gamma \in \Omega} \left[\frac{\text{mín}_i(ord_t(f_{X_i} \circ \gamma)(t))}{ord_t(f \circ \gamma)(t)} \right], \tag{.13}$$

entonces tendremos que

$$\theta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \tag{.14}$$

θ es el mejor exponente para la desigualdad (.12).

Evidentemente encontrar α en la ecuación (.13) es en general bastante complicado ya que se deben comparar los órdenes en t para todas las curvas que pasan por el origen de $\mathbb{C}^n$ de J_f y f. En el trabajo de Lichtin se consigue estimar α en el caso en que f es una función analítica en dos variables que no es degenerada con respecto a su poliedro de Newton. La idea esencial es que α en la ecuación (.13) se puede estimar usando la combinatoria del poliedro de Newton de f.

El teorema principal de Lichtin dice lo siguiente

Teorema 4. *Si $f : (\mathbb{C}^2, \overline{0}) \to (\mathbb{C}, \overline{0})$ es un germen de aplicación analítico que satisface las condiciones de no degeneración (definiciones 36 y 41). El valor*

$$v_f = \left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\right] + 1 \tag{.15}$$

es a lo más uno más que el intersecto más grande de cualquier linea de soporte finita que toque una cara de dimensión 1 del poliedro de Newton $\Gamma(f)$ con los ejes coordenados. Esto se explicará con mayor claridad en el estudio del caso 2 dimensional de la sección 2.2.

El valor v_f debe ser un número entero, por lo tanto la notación $[\cdot]$ en la ecuación (.15) se entiende como la función parte entera.

Este resultado es bastante útil y práctico, pues para un polinomio en dos variables no degenerado se puede leer una cota de su exponente de Lojasiewicz directamente de su poliedro de Newton. Esto es, un dato analítico asociado el cual se puede estimar de manera geométrica.

Finalmente queremos mencionar que el trabajo de Lichtin se ha generalizado al caso de gérmenes $f : (\mathbb{C}^n, \overline{0}) \to (\mathbb{C}, \overline{0})$ en los trabajos de [10] y [26].
En un principio planeamos en este trabajo final también estudiar el trabajo de Fukui [10] pero por cuestiones de tiempo decidimos posponer este estudio para posteriores trabajos.

Aplicaciones de la desigualdad de Lojasiewicz

Según [35], la desigualdad tiene aplicaciones en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Para ser más precisos en temas como los flujos gradientes. Además estos flujos son conocidos como sistemas dinámicos gradiente, es decir, sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t)). \tag{.16}$$

El siguiente teorema tomado de [5] relaciona estos sistemas con la desigualdad de Lojasiewicz.

Teorema 5. *(Teorema de Lojasiewicz) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función analítica, $x = x(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ es una curva tal que $x'(t) = -\nabla f$ y además $x(t)$ tiene un punto límite x_∞, entonces la longitud de la curva $x(t)$ es finita y*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\infty.$$

Se dice además que x_∞ es un punto crítico de f.

Otra de las aplicaciones en este caso del exponente de Lojasiewicz según [7] tiene que ver con un ejemplo, el cual asegura que la taza de convergencia de soluciones de sistemas gradiente de funciones analíticas depende del exponente mismo. Además, se muestra en [25] y [30] que la complejidad del Positivstellensatz de Schmüfgen y Putinar depende del exponente de la desigualdad clásica de Lojasiewicz Teorema 1 donde f es una función polinomial.

La desigualdad de Lojasiewicz tiene más aplicaciones en los campos del álgebra, análisis y geometría algebraica, véase [33] y las referencias allí citadas.

Presentación del documento

En el capítulo 1 presentamos las ideas esenciales para entender la demostración de la desigualdad en [4]. Con este fin presentamos las ideas básicas de geometría algebraica real que se requieren para entender el enunciado y la demostración que explicamos en el teorema 27. Algunas de las herramientas necesarias son: cuerpos realmente cerrados, conjuntos y funciones semialgebraicas, véase secciones 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5 respectivamente.

En el capítulo 2, estudiaremos la estimación del exponente de Lojasiewicz para polinomios f en dos variables que son no degenerados con respecto a su poliedro de Newton, véase sección 2.1 definición 36. Para esto se introduce una herramienta geométrica llamada el poliedro de Newton. A partir de él y la construcción de su dual se establece una variedad tórica asociada a estos, la cual permite la estimación del exponente de Lojasiewicz (todo esto se trata en la sección 2.1). Además se toma el caso de un polinomio en 2 variables no degenerado en la sección 2.2. En éste se da una completa estimación del exponente de Lojasiewicz, mostrando que dicho valor depende solamente de las propiedades de su poliedro de Newton y su dual respectivo.

Una de las ventajas de esta estimación es que el exponente θ se puede leer directamente del poliedro de Newton, véanse ejemplos 31 y 32.

CAPÍTULO 1

Algunos elementos de geometría algebraica real

En este capítulo introducimos algunas nociones de geometría algebraica real siguiendo esencialmente [4] y [18]. En estas referencias se pueden consultar las pruebas de los resultados que hemos omitido en este escrito.

1.1. Cuerpos ordenados y cuerpos reales

Definición 1. *Un* orden *de un cuerpo F es una relación de orden total $\leq$ que satisface, dados $x, y, z \in F$:*

(i) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,

(ii) $0 \leq x, 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$.

Se notará con $(F, \leq)$ a un cuerpo ordenado, donde $\leq$ es un orden que cumple (i) y (ii).

Ejemplo 2. *Para $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ tenemos sus ordenes usuales. Un caso bastante interesante es cuando analizamos y describimos un orden para $\mathbb{R}(X)$ el conjunto de las funciones racionales reales. Consideremos el polinomio*

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_k X^k,$$

entonces diremos que $P(X) > 0$ si, y sólo si, $a_k > 0$, además si $Q(X) \neq 0$ entonces $P(X)/Q(X) > 0$ si, y sólo si, $P(X)Q(X) > 0$. Con este orden resulta que $(\mathbb{R}(X), \leq)$ es no arquimedeano. Además $0 \leq X \leq 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, y $0 \leq 1/X$ pero $n \leq 1/X$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora vamos a introducir la definición de cono que permite caracterizar a los cuerpos ordenados.

Definición 2. *Un* cono *de un cuerpo F es un subconjunto P de F tal que:*

(i) *Si $x \in P, y \in P$ entonces $x + y \in P$,*

(ii) *Si $x \in P, y \in P$ entonces $xy \in P$,*

(iii) *Si $x \in F$ entonces $x^2 \in P$.*

P se dice un *cono propio* si además cumple que $-1 \notin P$.

Definición 3. *Dado un cuerpo ordenado $(F, \leq)$, el conjunto*

$$P = \{x \in F \mid 0 \leq x\},$$

es un subconjunto de F y es llamado el cono positivo *de $(F, \leq)$.*

Proposición 2. *Dado $(F, \leq)$ un cuerpo ordenado. El cono positivo P de $(F, \leq)$ es un cono propio tal que $P \cup -P = F$, siendo $-P = \{x \in F \mid -x \in P\}$. Recíprocamente, si P es un cono propio de un cuerpo F que satisface la propiedad anterior, entonces F posee un orden dado por la relación*

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P.$$

Un caso particular de un cono es el conjunto $\sum F^2$ el cual denota el conjunto de sumas de cuadrados de elementos de F.
El siguiente teorema caracteriza los cuerpos que pueden llegar a ordenarse.

Teorema 6. *Sea F un cuerpo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) *F puede ordenarse.*

(ii) *El cuerpo F tiene un cono propio.*

(iii) $-1 \notin \sum F^2$.

(iv) *Para todo $x_1, ..., x_n \in F$, se cumple que si*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

entonces $x_i = 0$, para todo $i = 1, ..., n$.

Cualquier cuerpo que cumpla alguna de las 4 condiciones del teorema anterior será llamado un *cuerpo real*. Se puede probar también que todo cuerpo real tiene característica cero.

Demostración. Procederemos a probar las equivalencias tomando el orden (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) y (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Teniendo en cuenta la definición de cono propio, resulta que el conjunto $P = \{x \in F \mid x \geq 0\}$ cumple las condiciones de dicha definición, esto es, suma y producto de dos elementos de P están en P, además si $x \in P$ entonces $x^2 \in P$. P resulta ser además propio ya que $-1 \notin P$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea C un cono propio de F, supongamos por contradicción que $-1 \in \sum F^2$, sabemos por definición de cono propio que $\sum F^2 \subset C$, por lo tanto $-1 \in C$, lo cual es absurdo ya que C es propio.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Por hipótesis $-1 \notin \sum F^2$, por lo tanto $\sum F^2$ es un cono propio de F, así por la proposición 2, dicho cuerpo F puede ordenarse.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supongamos por contradicción que alguno de los $x_j \neq 0$ para $j = 1, ..., n$, por lo tanto como por hipótesis

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0,$$

esto implica que

$$-x_j^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i^2,$$

por lo tanto

$$-1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^2.$$

La parte derecha de la igualdad anterior es un elemento de $\sum F^2$, así entonces $-1 \in \sum F^2$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $x_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Supongamos por contradicción que $-1 \in \sum F^2$, así entonces

$$-1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

por lo tanto

$$0 = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$0 = 1^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2,$$

donde $x_{n+1} = 1$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto $-1 \notin \sum F^2$. □

Definición 4. *Un* cuerpo realmente cerrado F *es un cuerpo real que no tiene extensiones algebraicas reales no triviales.*

Teorema 7. *Sea F un cuerpo. Las siguientes propiedades son equivalentes*

(i) *El cuerpo F es realmente cerrado.*

(ii) *Existe un único orden para F cuyo cono positivo es el conjunto de cuadrados de elementos de F y todo polinomio de $F[X]$ de grado impar, tiene una raíz en F.*

(iii) *El anillo $F[i] = F[X]/(X^2 + 1)$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.*

Ejemplo 3. *El cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ es un cuerpo realmente cerrado pues $\mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$.*

Ejemplo 4. *El cuerpo de los números reales algebraicos (los números reales algebraicos sobre $\mathbb{Q}$) notado por $\mathbb{R}_{\mathbf{alg}}$ es un cuerpo realmente cerrado.*

Ejemplo 5. *Sea $\mathbb{R}(X)^\wedge$ (resp.$\mathbb{C}(X)^\wedge$) el cuerpo de las series de Puiseux con coeficientes reales (resp. complejos), esto es, el conjunto de elementos de la forma*

$$\sum_{i=k}^{+\infty} a_i X^{i/q} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_i \in \mathbb{R} \ \text{(resp.}\mathbb{C}\text{)}.$$

Se puede probar $\mathbb{C}(X)^\wedge$ es algebraicamente cerrado ([34], página 98) y como $\mathbb{C}(X)^\wedge = \mathbb{R}(X)^\wedge[i]$, se concluye que $\mathbb{R}(X)^\wedge$ es realmente cerrado.

Definición 5. *Una extensión algebraica R de un cuerpo ordenado $(F, \leq)$ es llamada* una clausura real *de F si R es realmente cerrado y la inclusión $F \hookrightarrow R$ preserva el orden.*

Tenemos para todo cuerpo ordenado F el siguiente resultado.

Proposición 3. *$(F, \leq)$ tiene una clausura real. Es más, si R y R' son dos clausuras reales de $(F, \leq)$, entonces existe un único $F - isomorfismo$ $\Phi : R \to R'$.*

Ejemplo 6. *La clausura real de $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{R}_{\mathbf{alg}}$.*

1.1.1. Principio de Tarski-Seidenberg

Nuestro interés ahora se centra en el estudio de sistemas de ecuaciones y desigualdades de funciones polinómicas. El principio de Tarski-Seidenberg permite estudiar las soluciones de tales sistemas mediante el estudio de sistemas similares en un número menor de variables. Además estudiaremos las condiciones de signo sobre las funciones polinómicas, lo cual conduce a una versión del principio basada

en arreglos matriciales. Esta herramienta será de utilidad para entender el posterior estudio de los conjuntos semialgebraicos.

El principio de Tarski-Seidenberg en su versión básica tiene en cuenta el estudio de sistemas de ecuaciones y desigualdades para $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ de la forma

$$S(\underline{X}) := \begin{cases} f_1(\underline{X}) \lhd_1 0 \\ \quad \vdots \\ f_k(\underline{X}) \lhd_k 0, \end{cases}$$

tal que para todo $i = 1, ..., k$, $\lhd_i \in \{\geq, >, =, \neq\}$ y $f_i(\underline{X}) \in \mathbb{Q}[\underline{X}]$ o $f_i(\underline{X}) \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. Diremos que $S(\underline{X})$ es un sistema de ecuaciones y desigualdades en n variables, con coeficientes en $\mathbb{Q}$ o R según sea el caso.

Teorema 8 (*Teorema de Tarski-Seidenberg*)**.** *[[18], p. 33] Sea $S(\underline{T}; \underline{X})$ un sistema de ecuaciones y desigualdades polinomiales en $m+n$ variables con coeficientes en $\mathbb{Q}$, donde $\underline{T} = (T_1, ..., T_m)$ y $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$. Entonces existen sistemas de ecuaciones y desigualdades polinomiales $S_1(\underline{T}), ..., S_l(\underline{T})$ en m variables con coeficientes en $\mathbb{Q}$ tales que para todo cuerpo cerrado R y todo $\underline{t} = (t_1, ..., t_m) \in R^m$ el sistema $S(\underline{t}; \underline{X})$ de ecuaciones y desigualdades polinomiales en n variables y con coeficientes en R que se obtiene al sustituir T_i por t_i en $S(\underline{T}, \underline{X})$ para todo $i = 1, ..., m$, tiene una solución $\underline{x} = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ si y solo si $\underline{t} = (t_1, ..., t_m) \in R^m$ es una solución en R para alguno de los sistemas $S_1(\underline{T}), ..., S_l(\underline{T})$.*

Veamos un ejemplo de lo que enuncia este teorema.

Ejemplo 7. *Sean $m = 3$ y $n = 1$, así $\underline{T} = (T_1, T_2, T_3)$ y $\underline{X} = X$. Consideremos el sistema*

$$S(\underline{T}, \underline{X}) := \Big\{ T_1X^2 + T_2X + T_3 = 0$$

Si R es un cuerpo realmente cerrado y $(t_1, t_2, t_3) \in R^3$ entonces $S(\underline{t}; X)$ tiene una solución X en R si, y sólo si, se cumple

$$\underbrace{(t_1 \neq 0 \wedge t_2^2 - 4t_1t_3 \geq 0)}_{S_1(T_1,T_2,T_3)} \vee \underbrace{(t_1 = 0 \wedge t_2 \neq 0)}_{S_2(T_1,T_2,T_3)} \vee \underbrace{(t_1 = t_2 = t_3 = 0)}_{S_3(T_1,T_2,T_3)}$$

Las expresiones anteriores son conocidas como *combinaciones booleanas* notadas por $B(\underline{T})$; su valor puede ser falso o verdadero.

Ahora de este principio, enunciaremos algunas definiciones respecto a cambios de signo de funciones polinomiales para después relacionarla con el principio de Tarski-Seidenberg.

Sea R un cuerpo realmente cerrado y $a \in R$. Se define

$$sign(a) = \begin{cases} -1 & \text{si } a < 0, \\ 0 & \text{si } a = 0, \\ 1 & \text{si } a > 0. \end{cases}$$

Sean $f_1, ..., f_s$ polinomios en $R[X]$ y sean $x_1 < \cdots < x_N$ las raíces en R de todos los f_i no nulos. Definimos $x_0 = -\infty, x_{N+1} = +\infty$. Si $I_k = (x_k, x_{k+1})$, para $k = 1, ..., N+1$ entonces $\text{sign}(f_i(x))$ es constante para $x \in I_k$ y se denota por $\text{sign}(f_i(I_k))$.
Sea $\text{SIGN}_R(f_1, ..., f_s)$ la matriz con s filas y $2N+1$ columnas donde un elemento de la $i-$ésima fila para $i = 1, ..., s$ es de la forma

$$\text{sign}(f_i(I_0)), \text{sign}(f_i(x_1)), \text{sign}(f_i(I_1)),...,\text{sign}(f_i(x_N)), \text{sign}(f_i(I_N)).$$

Más precisamente, $\text{SIGN}_R(f_1, ..., f_s)$ es una matriz de tamaño $s \times 2N+1$ con entradas en $\{-1, 0, 1\}$, así entonces

$$SIGN_R(f_1, ..., f_s) = \begin{pmatrix} sign(f_1(I_0)) & sign(f_1(x_1)) & \cdots & sign(f_1(x_N)) & sign(f_1(I_N)) \\ sign(f_2(I_0)) & sign(f_2(x_1)) & \cdots & sign(f_2(x_N)) & sign(f_2(I_N)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ sign(f_s(I_0)) & sign(f_s(x_1)) & \cdots & sign(f_s(x_N)) & sign(f_s(I_N)) \end{pmatrix}$$

Si $m = \text{máx}\{\deg(f_i) \mid i = 1, ..., s\}$, entonces $N \leq sm$. La unión disjunta de conjuntos de matrices con entradas en $\{-1, 0, 1\}$ de tamaño $s \times (2l+1)$ donde $l = 0, ..., sm$ será notado por $W_{s,m}$.

Ejemplo 8. *Dada la familia de polinomios en* $\mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} f_1 =& x^3 - 7x + 6, \\ f_2 =& x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x, \\ f_3 =& x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 4x - 12. \end{aligned}$$

Las raíces de la familia de polinomios son $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = -1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 2, x_7 = 3, x_8 = 4$.

Ahora se definen

$$I_0 := (-\infty, -3), I_1 := (-3, -2), I_2 := (-2, -1), I_3 := (-1, 0), I_4 := (0, 1)$$

$$I_5 := (1, 2), I_6 := (2, 3), I_7 := (3, 4), I_8 := (4, +\infty).$$

Se tienen en cuenta estas regiones y las raíces de los $\{f_i\}_{i=1}^3$ *ya que en ellas el signo de dichos polinomios es constante, por lo tanto la matriz de signo de esta familia es*

$$SIGN_R(f_1, f_2, f_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposición 4. *Si* ϵ *es una función de* $\{1, ..., s\}$ *en* $\{-1,0,1\}$ *entonces existe un subconjunto*

$$W(\epsilon) = \{M \in W_{s,m} \mid \text{una de las columnas de } M \text{ es } (\epsilon(1), ..., \epsilon(s))^T\},$$

tal que para todo cuerpo realmente cerrado R y toda familia de polinomios $f_1, ..., f_s \in R[X]$ todos de grado menor o igual a m, se tiene que el sistema

$$\begin{cases} sign(f_1(X)) = \epsilon(1) \\ \quad \vdots \\ sign(f_s(X)) = \epsilon(s), \end{cases}$$

tiene una solución x en R si, y sólo si, $\mathrm{SIGN}_R(f_1, ..., f_s) \in W(\epsilon)$.

Ejemplo 9. *Del ejemplo anterior sabemos que para resolver el siguiente sistema*

$$\begin{cases} sign(f_1(X)) = \epsilon(1) \\ sign(f_2(X)) = \epsilon(2) \\ sign(f_3(X)) = \epsilon(3) \\ sign(f_4(X)) = \epsilon(4), \end{cases}$$

se debe tener en cuenta que tiene una solución $x \in R$ si, y sólo si, la matriz $SIGN_R(f_1, f_2, f_3, f_4) \in W(\epsilon)$.

Se tiene que el SIGN_R de una familia de polinomios está completamente determinado por el SIGN_R de una familia de polinomios más simple. El siguiente resultado es más preciso:

Proposición 5. *Existe una función $\varphi : W_{2s,m} \to W_{s,m}$ tal que para todo cuerpo realmente cerrado R y toda familia de polinomios $f_1, ..., f_s \in R[X]$ todos de grado menor o igual que m, con f_s no constante y ninguno de los $f_1, ..., f_{s-1}$ nulos, entonces se tiene que*

$$\mathrm{SIGN}_R(f_1, ..., f_s) = \varphi(\mathrm{SIGN}_R(f_1, ..., f_{s-1}, f_s', g_1, ..., g_s)),$$

donde f_s' es la derivada de f_s y los g_i son los residuos de la división euclideana de f_s por $f_1, ..., f_{s-1}, f_s'$, respectivamente.

Así, el principio de Tarski-Seidenberg se puede reescribir como sigue

Teorema 9. *Sea $f_i(X, Y) = h_{i,m_i}(Y)X^{m_i} + \cdots + h_{i,0}(Y)$ una familia de polinomios de $n+1$ variables con coeficientes en $\mathbb{Z}$ donde $i = 1, ..., s$, y $\underline{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$ y además sea $m = \max\{m_i | i = 1, ..., s\}$. Sea W' un subconjunto de $W_{s,m}$. Entonces existe una combinación booleana $B(\underline{Y})$ de ecuaciones polinómicas y desigualdades en las variables $\underline{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$, tal que, para todo cuerpo realmente cerrado R y todo $\underline{y} \in R^n$, se tiene que* $\mathrm{SIGN}_R(f_1(X, \underline{y}), ..., f_s(X, \underline{y}))) \in W'$ *si y solo si $B(\underline{y})$ se satisface en R.*

Nota: Esta versión del principio de Tarski-Seidenberg será útil cuando tratemos con la descomposición de conjuntos semialgebraicos (sección 1.3).

Corolario 1. *Sea F un cuerpo real, $f_1(\underline{X}, \underline{Y}), ..., f_s(\underline{X}, \underline{Y})$ una familia de polinomios en $n+1$ variables con coeficientes en F, donde $\underline{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$. Sea*

$\epsilon : \{1, ..., s\} \to \{-1, 0, +1\}$ una función. Entonces existe una combinación booleana $B(\underline{Y})$ de ecuaciones polinómicas y desigualdades en las variables $\underline{Y}$ con coeficientes en F, tal que, para todo cuerpo realmente cerrado R que contiene a F y todo $\underline{y} \in R^n$, se tiene que el sistema

$$\begin{cases} sign(f_1(X, \underline{y})) = \epsilon(1) \\ \quad \vdots \\ sign(f_s(X, \underline{y})) = \epsilon(s), \end{cases}$$

tiene una solución $x \in R$ si y solo si $B(\underline{y})$ es verdadero en R.

1.2. Conjuntos semialgebraicos

De ahora en adelante asumiremos que R es un cuerpo realmente cerrado.

Definición 6. *Dado B un subconjunto de $R[X_1, ..., X_n]$, definimos*

$$\mathcal{Z}(B) = \{x \in R^n \mid \forall f \in B, \quad f(x) = 0\}.$$

Los elementos de $\mathcal{Z}(B)$ son los ceros *de todos los polinomios de B.*
Un subconjunto algebraico de R^n *es el conjunto de ceros de algún subconjunto C de $R[X_1, ..., X_n]$.*

Definición 7. *Dado $S \subset R^n$, definimos al conjunto*

$$\mathcal{I}(S) = \{f \in R[X_1, ..., X_n] \mid \forall x \in S, \ \ f(x) = 0\},$$

como el ideal *de $R[X_1, ..., X_n]$ de polinomios que se anulan en S.*

Proposición 6. *Dado un subconjunto algebraico V de R^n, existe un elemento $f \in R[X_1, ..., X_n]$ tal que $V = \mathcal{Z}(f)$.*

Demostración. Por el teorema de la base de Hilbert el ideal $\mathcal{I}(V)$ es finitamente generado, digamos por $f_1, ..., f_m$. Tomemos $f = f_1^2 + f_2^2 + \cdots f_m^2$. Veamos que $V = \mathcal{Z}(f)$.

($\subseteq$) Sea $x \in V$, por lo tanto $f_i(x) = 0$, para cada $i = 1, ..., m$, así entonces $f(x) = 0$, esto es $x \in \mathcal{Z}(f)$.

($\supseteq$) Sea $x \in \mathcal{Z}(f)$, por lo tanto $f(x) = 0$, es decir, $f_i(x) = 0$, para cada $i = 1, ..., m$ por Teorema 1 (iv), lo cual implica que $x \in V$. □

Las definiciones anteriores se pueden extender al considerar no solo igualdades sino además desigualdades respecto a una familia dada de polinomios. Este es el punto de partida de la teoría de conjuntos semialgebraicos.

Definición 8. Un subconjunto semialgebraico *de* R^n *es un subconjunto de la forma*

$$\bigcup_{i=1}^{s}\bigcap_{j=1}^{r_i}\{x \in R^n \mid f_{i,j} *_{i,j} 0\},$$

donde $f_{i,j} \in R[X_1, ..., X_n]$ *y* $*_{i,j} \in \{=, <\}$ *para* $i = 1, ..., s$ *y* $j = 1, ..., r_i$.

Se puede ver que los subconjuntos semialgebraicos de R^n forman la familia más pequeña de subconjuntos que contienen todos los conjuntos de la forma

$$\{x \in R^n \mid f(x) > 0\}, \text{ donde } f \in R[X_1, ..., X_n],$$

teniendo en cuenta además que dicha familia es cerrada bajo intersecciones finitas, uniones finitas y complementos.
Existe otra forma equivalente de definir los conjuntos semialgebraicos; ésta tiene en cuenta las siguientes condiciones sobre un polinomio $f \in R[X_1, ..., X_n]$: $f(\underline{x}) > 0, f(\underline{x}) < 0$ o $f(\underline{x}) = 0$, dichas condiciones se conocerán como las *condiciones de signo* del polinomio f. Así, cualquier subconjunto semialgebraico de R^n se puede definir mediante una combinación booleana de condiciones de signo sobre un número finito de polinomios.

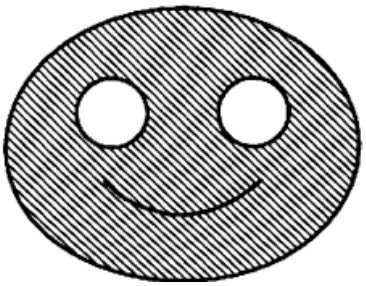

FIGURA 1.1. Tomada de [4]

Ejemplo 10. *(a) Todo conjunto algebraico es semialgebraico.*

(b) El conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/25 + y^2/16 < 1 \ \wedge \ x^2 + 4x + y^2 - 2y > -4 \\ \wedge x^2 - 4x + y^2 - 2y > -4 \ \wedge \ \neg(x^2 + y^2 - 2y \neq 8 \ \vee \ y > -1)\}$$

es semialgebraico. Véase figura 1.1.

(c) El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x\}$ *no es semialgebraico, pues no existe un número finito de polinomios que permita describir una función exponencial en la forma de la definición 8.*

(d) El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists n \in \mathbb{N} \ y = nx\}$, *conocido como el abanico infinito, no es semialgebraico.*

(e) El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \lfloor x \rfloor \text{ o } (x \in \mathbb{Z} \text{ y } x \leq y \leq x+1)\}$ *conocido como la escalera infinita, no es semialgebraico, siendo* $\lfloor x \rfloor$ *la función parte entera.*

Los siguientes resultados caracterizan los conjuntos semialgebraicos.

Proposición 7. *Los subconjuntos semialgebraicos de* R *son exactamente uniones de puntos e intervalos abiertos que pueden ser no acotados.*

Proposición 8. *Todo subconjunto semialgebraico de* R^n *puede ser escrito como una unión finita de conjuntos semialgebraicos de la forma*

$$\{x \in R^n \mid f_1(x) = \cdots = f_l(x) = 0,\ g_1(x) > 0, ..., g_m(x) > 0\},$$

con $f_1, ..., f_l, g_1, ..., g_m \in R[X_1, ..., X_n]$.

1.2.1. Algunas nociones y propiedades topológicas del cuerpo R y los conjuntos semialgebraicos

Se quiere estudiar la topología asociada a los conjuntos semialgebraicos. Resulta entonces conveniente definir sus abiertos y dar ciertos resultados útiles tanto a nivel topológico como geométrico.

Una diferencia importante entre los conjuntos algebraicos y los semialgebraicos es que en los primeros la topología fundamental, que permite desarrollar toda la maquinaria de la geometría algebraica, es la topología de Zariski. Para los conjuntos semialgebraicos la topología de Zariski no es muy útil y por ello se prefiere estudiar la topología euclidiana heredada del orden de R.

Definición 9. *Sea* $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n, r \in R, r > 0$. *Se definen*

$$\begin{aligned}
||x|| &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \\
B_n(x,r) &= \{y \in R^n \mid ||y - x|| < r\} \quad (\textit{bola abierta}), \\
\overline{B}_n(x,r) &= \{y \in R^n \mid ||y - x|| \leq r\} \quad (\textit{bola cerrada}), \\
S^{n-1}(x,r) &= \{y \in R^n \mid ||y - r|| = r\} \quad (\textit{esfera (n-1) dimensional}).
\end{aligned}$$

Se asumirá por convención que S^{n-1} denotara la esfera $S^{n-1}(0,1)$, esfera centrada en el origen de R^n y de radio 1. Además, de aquí en adelante R^n será considerada con su topología euclideana, es decir, la topología generada al tomar uniones de intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$B_r(x) = \{y \in R^n \mid ||y - x|| < r\},$$

donde $x \in R^n$ y $r \in R$ con $r > 0$.

Cabe decir que los conjuntos $B_n(x,r), \overline{B}_n(x,r)$ y $S^{n-1}(x,r)$ son todos semialgebraicos, adicionalmente se puede ver que los polinomios son continuos con respecto

a la topología euclidiana.

Los conjuntos semialgebraicos cumplen propiedades que no cumplen los conjuntos algebraicos, tales como ser cerrados bajo proyecciones y complementos. Se exponen algunas de ellas a continuación.

Proposición 9. *Si S es un subconjunto semialgebraico de $R^{n+1}, \Pi : R^{n+1} \to R^n$ la función proyección en las n primeras coordenadas, entonces $\Pi(S)$ es un subconjunto semialgebraico de R^n.*

Demostración. Por la proposición 8, es suficiente probar el resultado para conjuntos semialgebraicos de la forma:

$$\{(\underline{y}, x) \in R^n \times R \mid f_i(\underline{y}, x) = 0, i = 1, ..., l, g_j(\underline{y}, x) > 0, j = 1, ..., m\}.$$

Aplicando el teorema 9, existe una combinación booleana de ecuaciones polinómicas y desigualdades $B(\underline{Y})$ en las variables $\underline{Y}$ con coeficientes en R, tal que dado $\underline{y} \in R^n$, el siguiente sistema

$$\begin{cases} f_1(\underline{y}, X) = \cdots = f_l(\underline{y}, X) = 0 \\ g_1(\underline{y}, X) > 0 \\ \vdots \\ g_m(\underline{y}, X) > 0, \end{cases}$$

tiene una solución $x \in R$ si, y sólo si, $B(\underline{y})$ es verdadera. El conjunto de los $\underline{y} \in R^n$ que satisfacen $B(\underline{y})$ es semialgebraico ya que $B(\underline{y})$ es una combinación booleana de ecuaciones polinomiales y desigualdades en la variable $\underline{y}$. □

Cualquier subconjunto semialgebraico de R^n puede ser escrito como la proyección de un subconjunto semialgebraico de R^{n+m} para $m \in \mathbb{N}$, esto ya que el conjunto

$$\{x \in R^n \mid f_1(x) = \cdots = f_l(x) = 0, g_1(x) > 0, ..., g_m(x) > 0\}$$

es la proyección del conjunto

$$\{(x, y) \in R^{n+m} \mid f_1(x) = \cdots = f_l(x) = 0, y_1^2 g_1(x) = 1, ..., y_m^2(x) = 1\}.$$

La siguiente definición permite entender los conjuntos semialgebraicos desde la perspectiva de la lógica matemática.

Definición 10. *Una* fórmula de primer orden del lenguaje *de cuerpos ordenados con parámetros en R es una fórmula escrita con un número finito de conjunciones, disyunciones y cuantificadores existenciales o universales sobre las variables, empezando desde las fórmulas atómicas las cuales son fórmulas del estilo $f(x_1, ..., x_n) = 0$ o $h(x_1, ..., x_n) > 0$, donde f y h son polinomios con coeficientes en R. Las* variables libres *de una fórmula son aquellas variables de los polinomios que aparecen en las fórmulas, que no están cuantificadas.*

Proposición 10. *Si $\Phi(x_1, ..., x_n)$ es una fórmula de primer orden del lenguaje de cuerpos ordenados, con parámetros en R y con variables libres $x_1, ..., x_n$, entonces el conjunto $\{x \in R^n \mid \Phi(x)\}$ es un conjunto semialgebraico.*

Demostración. Comenzaremos con las fórmulas atómicas. Los primeros casos son aquellos que contienen conjunciones, disyunciones y negaciones los cuales son combinaciones booleanas, por lo tanto el resultado se tiene para este caso. Ahora, si $\Phi(x)$ es de la forma $\exists y \ \psi(x, y)$, definimos

$$S = \{(x, y) \in R^{n+1} \mid \psi(x, y)\},$$

y notamos que S es semialgebraico, entonces $\{x \in R^n \mid \Phi(x)\} = \Pi(S)$, es un conjunto semialgebraico. Para el caso cuando $\Phi(x)$ es de la forma $\forall y \ \psi(x, y)$, sólo hay que tener en cuenta que $\forall y \ \psi(x, y) = \neg\exists y \ \neg\psi(x, y)$. □

Cabe notar que en el ejemplo 10. (d), el conjunto parece cumplir todas las hipótesis de la proposición anterior, pero se debe tener en cuenta que la fórmula no es de primer orden pues las variables cuantificadas deben estar en R.

Se presentan a continuación algunos resultados topológicos que se cumplen en los conjuntos semialgebraicos.

Definición 11. *Sean $A \subset R^m$ y $B \subset R^n$ dos conjuntos semialgebraicos. Una función $f : A \to B$ es* semialgebraica *si su grafo es un conjunto semialgebraico en R^{m+n}.*

Proposición 11 ([4], p. 29)**.** *La composición de funciones semialgebraicas es semialgebraica. Las funciones semialgebraicas definidas en un mismo conjunto semialgebraico A con valores en R, forman todas un anillo con las operaciones de suma y producto de R.*

Proposición 12 ([4], p. 29)**.** *Sea $f : A \to B$ una función semialgebraica. Si $S \subset A$ es un conjunto semialgebraico, entonces $f(S)$es un conjunto semialgebraico. Además si $T \subset B$ es semialgebraico, entonces el conjunto $f^{-1}(T)$ es un conjunto semialgebraico.*

Ejemplo 11. *Si $A \subset R^n$ es un conjunto algebraico no vacio, para todo $x \in R^n$ se puede definir la distancia entre x y A, como*

$$dist(x, A) = inf(\{||x - y|| \mid y \in A\}).$$

La función $x \to dist(x, A)$ definida de R^n a R es semialgebraica y continua.

Definición 12. *Un subconjunto semialgebraico A de R^n es* localmente cerrado *si es la intersección de un conjunto abierto con un conjunto cerrado.*

Proposición 13. *Si A es un subconjunto de R^n semialgebraico y localmente cerrado, entonces existe un homeomorfismo semialgebraico $\phi : A \to C$ donde C es un subconjunto cerrado de R^{n+1}.*

1.3. Descomposición de conjuntos semialgebraicos

Para descomponer un conjunto semialgebraico en partes más simples vamos a usar algunas de las caracterizaciones empleando en particular el principio de Tarski-Seidenberg, garantizando una descomposición bien estructurada.

Teorema 10. *Sean $f_1(\underline{X}, Y), ..., f_s(\underline{X}, Y)$ polinomios en $n+1$ variables con coeficientes en R donde $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$. Existe una partición de R^n en un número finito de conjuntos semialgebraicos $A_1, ..., A_m$ y para cada $i = 1, ..., m$, existe un número finito de funciones semialgebraicas $\xi_{i,1} < \cdots < \xi_{i,l_i}$, con $\xi_{i,j} : A_i \to R$, que satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) *Para todo $x \in A_i$, el conjunto $\{\xi_{i,1}(x), ..., \xi_{i,l_i}(x)\}$ son las raíces de los polinomios en la lista $f_1, ..., f_s$ que no son cero en A_i.*

(ii) *Para todo $x \in A_i$, los signos de los $f_k(x, y)$ con $k = 1, ..., s$, dependen únicamente de los signos de $y - \xi_{i,j}(x), j = 1, ..., l_i$.*

Se debe tener en cuenta que se deben ordenar las raíces determinadas por los $\xi_{i,j}$, además precisar que los A_i con $i = 1, ..., m$ están completamente determinados por el signo de los polinomios, es decir, en cada A_i el signo de cada f_i con $i = 1, ..., s$ debe ser constante. Adicionalmente, se puede ver que el grafo de cada $\xi_{i,j}$ está contenido en el conjunto de ceros de algún f_k, con k dependiendo de i y j.

Proposición 14 ([4], p. 30-31)**.** *Sean $f_1(X, Y), ..., f_s(X, Y)$ polinomios en $n+1$ variables (X, Y) (con $X = (X_1, ..., X_n)$), con coeficientes en R. Sea q el máximo de los grados de los polinomios f_k con respecto a la variable Y. Sea $w \in W_{s,q}$. Entonces existe una combinación booleana $\mathcal{B}_w(X)$ de ecuaciones y desigualdades polinomiales en las variables X con coeficientes en R tal que, para todo $x \in R^n$:*

$$\mathrm{SIGN}_R(f_1(x, Y), ..., f_s(x, Y)) = w \text{ si y solo si } \mathcal{B}_w(x) \text{ se cumple.}$$

Ejemplo 12. *(Cara de pan de Jengibre) Considere la siguiente construcción: Sea una circunferencia de radio r_1 centrada en el origen, esta será la cara. Suponga que los ojos de nuestra cara son dos circunferencias de radio $r_2 < r_1$ centrada en el punto (x_2, y_2) y de radio $r_3 < r_1$ centrada en el punto (x_3, y_3). Sea la boca una elipse con eje mayor a y eje menor b centrada en el punto $(0, y_4)$. Sean ahora las funciones:*

$$\begin{aligned} f_1 =& x^2 + y^2 = r_1, \\ f_2 =& -((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2), \\ f_3 =& -((x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - r_3^2), \\ f_4 =& -(x^2/a^2 + (y - y_4)^2/b^2 - 1). \end{aligned}$$

La región que consideramos es el interior del círculo más grande intersectado con el exterior de los dos círculos más pequeños y el exterior de la elipse, como se muestra en la figura 1.2

FIGURA 1.2. Tomada de [20].

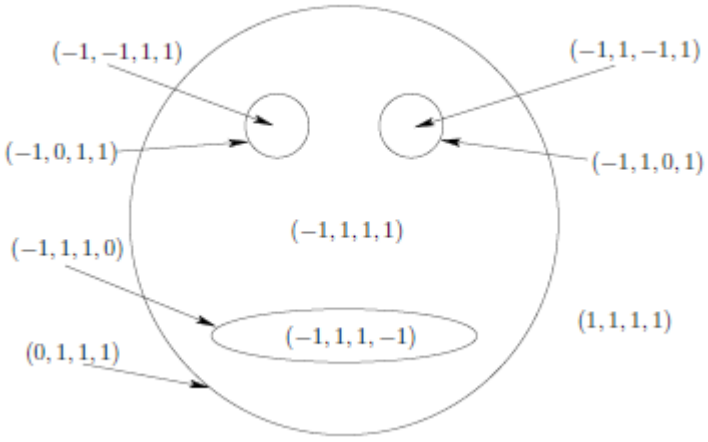

FIGURA 1.3. Una descomposición en conjuntos semialgebraicos de la Cara de Pan de jengibre, es una colección de 9 regiones de signo invariante. Tomada de [20].

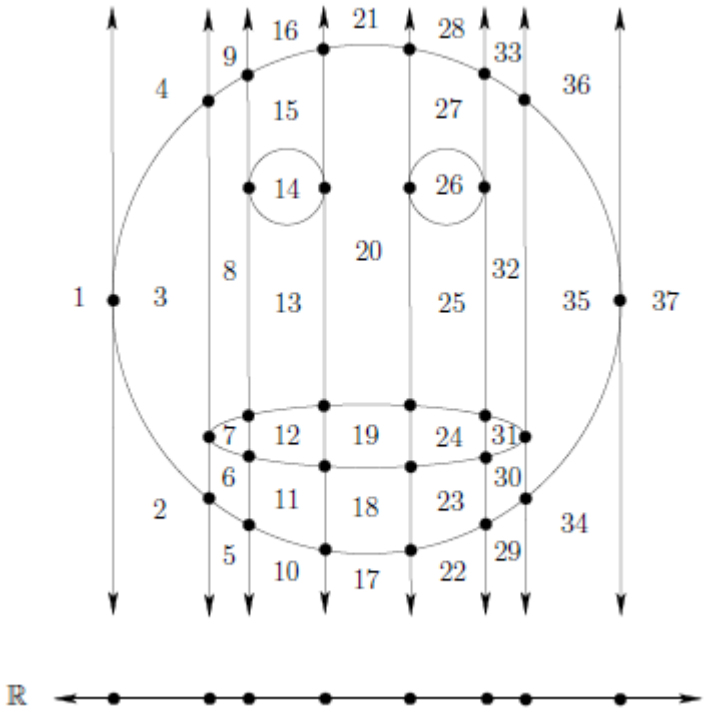

FIGURA 1.4. Tomada de [20].

Ahora, nuestro interés es hallar una descomposición semialgebraica del conjunto A definido por las funciones f_1, f_2, f_3, f_4, y las condiciones que siguen a la definición de las mismas. Para esto hay que tener en cuenta que las raíces de los polinomios del conjunto $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ determinan una descomposición adecuada de dicha cara, dividiéndola en 9 sectores. Estos sectores aparecen en la figura 1.3 y entre paréntesis aparecen los signos de cada una de las funciones f_i para $i = 1, 2, 3, 4$ en dicha región. La matriz de signo de los $\{f_1, ..., f_4\}$ es la misma del ejemplo 8.

La figura 1.4 ilustra la descomposición cilíndrica de la cara de pan de Jengibre. Cabe destacar que en la figura 1.4 los nueve puntos sobre la recta real corresponden a la proyección de puntos en las curvas, por ejemplo lo puntos extremos corresponden a la proyección de los puntos $(r_1, 0)$ y $(-r_1, 0)$ hacia la recta real, por lo tanto de esta manera se obtienen los puntos restantes. Ahora, estos puntos serán claves para encontrar las regiones. Por ejemplo la región 35 es la región acotada por las rectas $x = r_1, x = a$ y los sectores circulares $y = \sqrt{r_1^2 - x^2}$ y $y = -\sqrt{r_1^2 - x^2}$. Por lo tanto es importante reconocer que estas divisiones forman cilindros los cuales dependen de los puntos sobre la recta real. Así cada una de las 37 regiones se obtiene al intersectar una región de la figura 1.3 con dichos cilindros.

Definición 13. *Un* rebanado *para la familia de polinomios* $f_1(X, Y), f_2(X, Y)..., f_s(X, Y)$ *es una partición de* R^n *en conjuntos semialgebraicos* $A_1, ..., A_m$ *junto con una familia de funciones* $\xi_{i,1} < \cdots < \xi_{i,l_i}$, *cada una con* $\xi_{i,l_i} : A_i \to R$ *y tal que cumplan con las propiedades (i) y (ii) del teorema 10.*

Este rebanado es notado por $(A_i, (\xi_{i,j})_{j=1,...,l_i})_{i=1,...,m}$. Si los $A_1, ..., A_m$ están dados por combinaciones booleanas de polinomios $g_1, ..., g_t \in R[X_1, ..., X_n]$, se dirá que los $g_1, ..., g_t$ *rebanan* a los $f_1, ..., f_s$.

Proposición 15. *Sean $f_1(X,Y), ..., f_s(X,Y) \in R[X,Y]$ una familia de polinomios y $(A_i, (\xi_{i,j})_{j=1,...,l_i})_{i=1,...,m}$ de $f_1, ..., f_s$. Entonces para todo $i, 1 \leq i \leq m$, y todo $j, 0 \leq j \leq l_i$, la rebanada*

$$(\xi_{i,j}, \xi_{i,j+1}) = \{(x,y) \in R^{n+1} \mid x \in A_i \text{ y } \xi_{i,j}(x) < y < \xi_{i,j+1}(x)\}$$

es un conjunto semialgebraico y semialgebraicamente homeomorfo a $A_i \times (0,1)$, con la notación $\xi_{i,0} = -\infty$ y $\xi_{i,l_{i+1}} = +\infty$.

Proposición 16. *Todo subconjunto semialgebraico de R^n es la unión disjunta de un número finito de conjuntos semialgebraicos, donde cada uno de ellos es semialgebraicamente homeomorfo a un hipercubo abierto $(0,1)^d \subset R^d$, para $d \in \mathbb{N}$ ($(0,1)^0$ es un punto).*

Demostración. Usaremos inducción sobre n. En el caso $n = 1$ sabemos que el resultado se tiene por la proposición 7. Además los intervalos abiertos son semialgebraicamente homeomorfos a $(0,1)$. Por lo tanto asumimos el resultado para el caso $n = k$. Tomamos un subconjunto de R^{k+1} dado por una combinación boolenana de condiciones de signo sobre los polinomios $f_1, ..., f_s$ y sea $(A_i, (\xi_{i,j})_{j=1,...,l_i})_{i=1,...,m}$ un rebanado de $f_1, ..., f_s$. Por hipótesis de inducción, podemos suponer que los A_i son semialgebraicamente homeomorfos a hipercubos abiertos para todo $i = 1, ..., n$. Además S es la unión de un número finito de conjuntos semialgebraicos que son el grafo de una función $\xi_{i,j}$ o una rebanada $(\xi_{i,j}, \xi_{i,j+1})$ por la proposición 15. El grafo de la función $\xi_{i,j}$ es semialgebraicamente homeomorfo a A_i y nuevamente por la proposición 15, la rebanada $(\xi_{i,j}, \xi_{i,j+1})$ es semialgebraicamente homeomorfa a $A_i \times (0,1)$. Así el conjunto S es la unión finita disyunta de conjuntos cada uno de los cuales es semialgebraicamente homeomorfo a un hipercubo abierto, entonces el resultado se tiene para el caso $n = k + 1$. □

1.4. Conexidad y el lema de selección de curva

Es importante mencionar que con la definición de conexidad tradicional en cuerpos realmente cerrados arbitrarios con la topología euclidiana el único cuerpo conexo es $\mathbb{R}$, por ello se requiere de una definición especial en el contexto semialgebraico. Los resultados siguientes son esenciales para llegar a la prueba de la desigualdad de Lojasiewicz, proposición 27.

Definición 14. *Sea A un subconjunto semialgebraico de R^n. A es* semialgebraicamente conexo *si para todo par de conjuntos semialgebraicos F_1 y F_2 cerrados en A, tales que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ y $F_1 \cup F_2 = A$, se tiene que $F_1 = A$ o $F_2 = A$.*

Cabe aclarar que para cualquier conjunto semialgebraico A, se tiene que si A es conexo en la topología euclidiana esto implica que también es semialgebraicamente conexo. Esto se tiene ya que los cerrados de la topología euclidiana son conjuntos semialgebraicos (véase la proposición 8).

Proposición 17. *Un hipercubo abierto* $(0,1)^d \subset R^d$ *es semialgebraicamente conexo.*

Proposición 18. *Todo subconjunto semialgebraico* A *de* R^n *es la unión disjunta de un número finito de conjuntos semialgebraicos y semialgebraicamente conexos* $C_1, ..., C_s$ *los cuales son abiertos y cerrados en* A*.*

Definición 15. *Los* C_k *de la proposición anterior se conocen como las* componentes semialgebraicamente conexas *de* A*.*

Como mencionamos anteriormente un caso muy particular es cuando nuestro cuerpo realmente cerrado es $R = \mathbb{R}$. En este cuerpo un hipercubo abierto es conexo, por lo tanto cualquier $A \subset \mathbb{R}^n$ que sea semialgebraicamente conexo es conexo y recíprocamente. Además, todo conjunto semialgebraico (en particular algebraico) de $\mathbb{R}^n$ tiene un número finito de componentes conexas, las cuales son semialgebraicas.

Definición 16. *Un subconjunto* A *de* R^n *se dice* acotado*, si existe un* $r \in R$ *tal que* $||a|| < r$*, para todo* $a \in A$*.*

Definición 17. *Sea* $A \subset R^n$ *un conjunto semialgebraico. Se conoce como la* clausura algebraica *de* A *al conjunto*

$$clos(A) = \{x \in R^n \mid \forall t \in R \;\; \exists y \in A \;\; (||y - x||^2 < t^2 \vee t = 0)\}$$

Se dirá por lo tanto que un conjunto semialgebraico A es *cerrado* si, y sólo si, $A = \text{clos}(A)$.

La noción de compacidad clásica (en la topología euclidiana) tampoco es muy útil en cuerpos realmente cerrados diferentes a $\mathbb{R}$, por ello es preferible estudiar las propiedades de conjuntos semialgebraicos cerrados y acotados. El siguiente ejemplo ilustra esta aproximación.

Ejemplo 13. *Si tomamos* $R = \mathbb{R}_{alg}$ *y consideramos el intervalo* $[0,1] \subseteq R$*, entonces* $[0,1]$ *es cerrado (ya que* $clos([0,1]) = [0,1]$*) y acotado pero no es compacto (en el sentido clásico), ya que el conjunto*

$$\mathcal{D}_{r,s} = \{[0,r) \cup (s,1]\}$$

con $r, s \in \mathbb{R}_{alg}$ *y* $0 < r < \pi/4 < s < 1$ *es un cubrimiento abierto de* $[0,1]$ *por subconjuntos semialgebraicos de* R*, del cual no es posible extraer un subcubrimiento finito.*

Definición 18. *Una función $f : A \to R$ se dice* acotada *si para todo $a \in A$ existe un $r \in R$ tal que $||f(a)|| < r$.*

Proposición 19. *Sea $r \in R, r > 0$ y $\varphi : (0, r] \to R$ una función acotada semialgebraica y continua. Entonces φ se extiende a una función continua en $[0, r]$.*

Proposición 20. *Sea $A \subseteq R$ un conjunto semialgebraico y $\varphi : A \to R$ una función semialgebraica. Entonces existe un polinomio no nulo $f \in R[X, Y]$ tal que para todo $x \in A, f(x, \varphi(x)) = 0$.*

Proposición 21. *(Lema de Selección de Curva) Sean A un subconjunto semialgebraico de R^n, $x \in R^n, x \in \text{clos}(A)$. Entonces existe una función semialgebraica y continua $f : [0, 1] \to R^n$ tal que $f(0) = x$ y $f((0, 1]) \subset A$.*

Corolario 2. *Sea A un subconjunto de R^{n+1} semialgebraico, cerrado y acotado. Sea $\Pi : R^{n+1} \to R^n$ la función proyección de las primeras n coordenadas. Entonces $\Pi(A)$ es un conjunto semialgebraico, cerrado y acotado.*

Corolario 3. *Sean $A \subset R^n$ un conjunto semialgebraico cerrado y acotado, y $f : A \to R^p$ una función semialgebraica y continua. Entonces $f(A)$ es un conjunto semialgebraico, cerrado y acotado.*

1.5. Funciones semialgebraicas continuas y la desigualdad de Lojasiewicz

La parte esencial de este escrito es llegar a la prueba de la desigualdad de Lojasiewicz teniendo como base la construcción de los resultados anteriores, es decir, el comportamiento, la estructura de los conjuntos semialgebraicos y su relación con los cuerpos realmente cerrados. Así se presentan a continuación una cadena de resultados todos sujetos a nuestros estudios anteriores y que finalmente llegan a la prueba de nuestro resultado central, la proposición 27.

Proposición 22. *Sea $f : (a, +\infty) \subset R \to R$ una función semialgebraica que no es necesariamente continua. Existen $r, c \in R$, con $r > a$, y $p \in \mathbb{N}$, tales que, para todo $x \geq r$, se tiene que*

$$|f(x)| \leq cx^p.$$

Más aún, si $h \in R[X, Y]$ es un polinomio no nulo, tal que $h(x, f(x)) = 0$ en el intervalo $(a, +\infty)$, podemos tomar p como el grado de h con respecto a la variable X.

Demostración. Por la proposición 20, se sabe que existe un polinomio no nulo $h(X, Y) = q_m(X)Y^m + \cdots + q_0(X)$ tal que $h(x, f(x)) = 0$ en $(a, +\infty)$. Se puede suponer que el término q_m no es nulo y por lo tanto $q_m(x)$ no se anula para un x suficientemente grande. Así, para este x se puede acotar $f(x)$ como

$$|f(x)| \leq 1 + |q_m(x)|^{-1}(|q_{m-1}(x)| + \cdots + |q_0(x)|).$$

Si p es el máximo de los grados de $q_{m-1}, ..., q_0$, se puede encontrar una constante $c \in R$ tal que $|f(x)| \leq cx^p$ para todo x suficientemente grande. □

Proposición 23. *Sean F un subconjunto semialgebraico cerrado de R^n, y $f : F \to R$ una función semialgebraica y continua. Entonces $|f|$ está acotado por un polinomio, es decir, existen $c \in R$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que para todo $x \in F$ se tiene que $|f(x)| \leq c(1 + ||x||^2)^p$.*

Demostración. Si $F_t = \{x \in F \mid ||x|| = t\}$, entonces se puede ver que este es un conjunto semialgebraico cerrado y acotado. Definimos la función $v : R \to R$, para cada $t \in R$ como

$$v(t) = \begin{cases} \sup_{x \in F_t}\{|f(x)|\}, & \text{si } F_t \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función v es semialgebraica ya que su grafo es el conjunto

$$\{(t,u) \in R \times R \mid (\exists x \in F_t \text{ con } u = |f(x)| \text{ y } \forall y \in F_t, \quad |f(y)| \leq u) \\ \text{o } (F_t = \emptyset \text{ y } u = 0)\}.$$

Por lo tanto, aplicando la proposición 22, se tiene que existen $r \in R, p \in \mathbb{N}$ y $c_1 \in R$ tales que $|v(t)| \leq c_1 t^p$ para $t \geq r$. Ahora sea c_2 el máximo de $|f(x)|$ para $x \in F$ y $||x|| \leq r$, este máximo existe por el corolario 3. Teniendo en cuenta esto tenemos dos casos para $x \in F$, a saber:

(i) Si $||x|| \leq r$ entonces $|f(x)| < c_2$,

(ii) si $||x|| \geq r$ entonces $|f(x)| < c_1||x||^p$.

Si tomamos $c = \max(c_1, c_2)$, entonces una cota superior para las condiciones (i) y (ii) es $c(1+||x||^2)^p$, por lo tanto se tiene que $|f(x)| \leq c(1+||x||^2)^p$ para todo $x \in F$. □

Proposición 24. *Sean A un subconjunto semialgebraico de R^n y $f : A \to R$ una función semialgebraica. Existe una partición de A en un número finito de conjuntos semialgebraicos A_i con $i = 1, ..., m$ y para todo i existe un polinomio $g_i(X, Y)$ en $n + 1$ variables, tal que, para todo $x \in A_i, g_i(x, Y)$ es no nulo y $g_i(x, f(x)) = 0$.*

Demostración. El grafo de f es un conjunto formado por combinaciones booleanas de condiciones de signo sobre polinomios $g_1(X, Y), ..., g_s(X, Y)$. Sea $(A_i, (\xi_{i,j})_{j=1,...l_i})$ un rebanado de los $g_1, ..., g_s$ tal que A es la unión de los $A_i, i = 1, ..., m$. Entonces el grafo de $f|_{A_i}$ coincide con el grafo de los $\xi_{i,j}$, esto gracias a las condiciones del rebanado (teorema 10). □

Proposición 25. *Sean A un conjunto semialgebraico localmente cerrado y $f : A \to R$ una función semialgebraica. Sea $g : \{x \in A \mid f(x) \neq 0\} \to R$ una función semialgebraica y continua. Entonces existe un entero $N > 0$, tal que la función $f^N g$, extendida a cero cuando $f(x) = 0$, es continua en A.*

Demostración. Por la proposición 13, se puede considerar a A como un subconjunto semialgebraico de R^{n+1}. Ahora, dados $x \in A$ y $u \in R$, definimos

$$A_{x,u} = \{y \in A \mid \ ||y - x|| \leq 1 \ \text{ y } \ u|f(y)| = 1\}.$$

El conjunto $A_{x,u}$ es semialgebraico, cerrado (ya que es igual a su clausura) y acotado. Se define entonces

$$v(x,u) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ A_{x,u} = \emptyset, \\ \sup\{|g(y)| \ \mid y \in A_{x,u}\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función v está bien definida y es semialgebraica por la proposición 25. Por la proposición 24, $A \times R$ es la unión de un número finito de conjuntos semialgebraicos B_i, tales que para cada i existe un polinomio $h_i(X, U, V)$ donde para cada $(x, u) \in B_i$, se tiene que $h_i(x, u, V)$ no es cero y $h_i(x, u, v(x, u)) = 0$.

Ahora se fija un $x' \in A$ tal que $f(x') = 0$. Se notará como $h_{x'}$ al producto de los h_i tales que $B_i \cap (\{x'\} \times R)$ sea no vacio. El polinomio $h_{x'}(x', U, V)$ es no nulo y $h_{x'}(x', u, v(x', u)) = 0$. Así entonces por la proposición 22, existen un entero p (que se puede escoger independiente de x', por lo tanto p es igual a la suma de los grados en U de todos los h_i) y números $r(x'), c(x') \in R$, tales que

$$|v(x', u)| \leq c(x')u^p \ \text{ para todo } \ u \geq r(x').$$

Lo cual implica por definición de v y $A_{x,u}$ que

$$|g(y)| \leq |v(x', u)| \leq c(x')u^p = c(x')\frac{1}{|f(y)|^p}.$$

Esto es

$$|f(y)|^p|g(y)| \leq c(x'),$$

en el conjunto $\{y \in A \mid \ f(y) \neq 0, ||y - x'|| \leq 1\}$ para $|f(y)|$ suficientemente pequeño. La función $f^{p+1}g$ al extenderla a cero, es continua en x'. Como p es independiente de x' entonces se tiene el resultado. □

Observación. Cabe decir que el hecho de que el conjunto A sea localmente cerrado es esencial ya que por ejemplo si se toma $A = \{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = 1/y$, la función $f^N g = (x^2 + y^2)^N/y$ no es continua en $(0, 0)$ para ningún N, esto debido a que el conjunto A no es localmente cerrado ya que no se puede expresar como la intersección de un conjunto cerrado con un conjunto abierto.

Proposición 26. *Sean A un conjunto semialgebraico localmente cerrado, $f : A \to R$ y $g : A \to R$ dos funciones semialgebraicas y continuas, tales que $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$. Entonces existe un entero $N > 0$ y una función $h : A \to R$ semialgebraica y continua, tal que $g^N = hf$ en A.*

Demostración. La función $1/f$ es continua y semialgebraica en el conjunto $\{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$. Por proposición 25, existe un entero $N > 0$, tal que la función $h : A \to R$ definida como

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) = 0. \\ g^N(x)/f(x) & \text{si } f(x) \neq 0, \end{cases}$$

es continua, semialgebraica, y $g^N = hf$. □

Proposición 27. *(Desigualdad de Lojasiewicz) Sean A un conjunto semialgebraico, cerrado y acotado, $f : A \to R$ y $g : A \to R$ dos funciones semialgebraicas y continuas tales que $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$. Entonces existen, un entero $N > 0$ y una constante $c \in R$, tales que*

$$|g|^N \leq c|f| \quad \text{en } A.$$

Demostración. Por la proposición 26, basta tomar $c = \sup\{|h(x)| \mid x \in A\}$. □

CAPÍTULO 2

Estimación del exponente de Lojasiewicz vía poliedros de Newton

En la sección 2.1 veremos la definición del poliedro de Newton de un polinomio y cómo se emplea esta herramienta para estimar el exponente de Lojasiewicz en el caso de polinomios en dos variables, véase secciones 2.2 y 2.3.

2.1. El poliedro de Newton

De aquí en adelante $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{Z}^+$ denotaran los conjuntos de los números reales no negativos y enteros no negativos, respectivamente.

El poliedro de Newton es un herramienta combinatoria y geométrica que aparece frecuentemente en varias ramas de la matemática, como análisis, álgebra, geometría algebraica y teoría de números entre otras. En particular en este capítulo veremos cómo se usa para estimar el exponente de Lojasiewicz que ayuda a encontrar de una manera sencilla y constructiva el exponente de Lojasiewicz para un polinomio dado. Seguiremos de cerca la exposición de Lichtin en [23].

2.1.1. Construcción del poliedro de Newton

Sea $f(X_1, ..., X_n) \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o un cuerpo arbitrario. Para dicho polinomio usaremos la siguiente notación

$$f(X_1, ..., X_n) = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} a_m X^m,$$

donde $a_m \in \mathbb{R}$, $m = (m_1, ..., m_n)$ y $X^m = X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_n^{m_n}$. Además, definimos el *soporte* de f como el conjunto

$$\text{sop}(f) = \{m \in \mathbb{N}^n \mid a_m \neq 0\}.$$

Ejemplo 14. *Para el polinomio $f(X, Y) = Y^2 - X^3$, tenemos $f(X, Y) = a_{(0,2)}Y^2 - a_{(3,0)}X^3$, con $a_{(0,2)} = 1 = a_{(3,0)}$ y sop(f)= $\{(0, 2), (3, 0)\}$.*

Definición 19. *El* poliedro de Newton *de f notado por $\Gamma(f)$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen al conjunto*

$$\bigcup_{m \in sop(f)} \left(m + (R^+)^n\right),$$

esto se conoce como la envolvente convexa *de dicho conjunto y se nota como*

$$conv\left(\bigcup_{m \in sop(f)} (m + (R^+)^n)\right).$$

Definición 20. *Un* hiperplano de soporte *es un hiperplano que intersecta al poliedro de Newton en uno o más puntos del soporte del polinomio f.*

Ejemplo 15. *Para el polinomio $f(X, Y) = Y^2 - X^3$, $\Gamma(f)$ es la parte sombreada de la figura 2.1. Un hiperplano de soporte para este poliedro de Newton es la recta $y = x + 2$.*

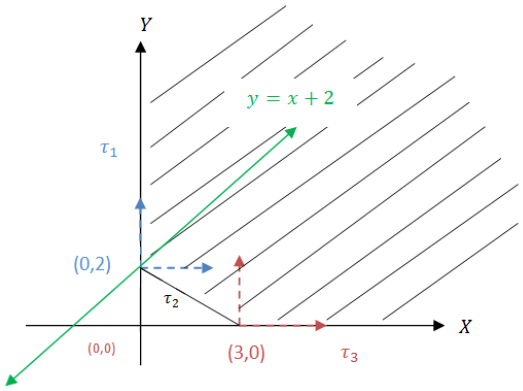

FIGURA 2.1. Poliedro de Newton del polinomio $f(X, Y) = Y^2 - X^3$.

Definición 21. *Una* cara *del poliedro de Newton es la intersección de un hiperplano de soporte con el poliedro de Newton. Por dimensión de una cara entenderemos la dimensión en el sentido de la geometría convexa, (como en [8]). Las* caretas *son las caras de dimensión* $n-1$ *donde* n *es la dimensión del espacio y los* vértices *son las caras de dimensión cero.*

En el ejemplo 15, más precisamente en la figura 2.1, podemos ver que las caras del poliedro de Newton son la semirecta:

$$\tau_1 := \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x = 0,\ \ y \geq 2\right\},$$

el segmento de recta:

$$\tau_2 := \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid y = -\frac{2}{3}x + 2,\ \ 0 \leq x \leq 3\right\},$$

la semirecta:

$$\tau_3 := \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid y = 0,\ \ x \geq 3\},$$

y los puntos $(0,2)$ y $(3,0)$ que los notamos $\tau_{1,2}$ y $\tau_{2,3}$ respectivamente. Así, las caretas del poliedro de Newton de la figura 2.1 son τ_1, τ_2 y τ_3 y los vértices son $\tau_{1,2}$ y $\tau_{2,3}$.

Diremos que Γ_+ es la unión de todas las caras del poliedro de Newton y Γ es la unión de las caras compactas (cerradas y acotadas en la topología usual de $\mathbb{R}^n$) del poliedro de Newton.

2.1.2. El poliedro dual o abanico

Se puede construir otro poliedro asociado al poliedro de Newton original conocido como el poliedro dual. A continuación describiremos brevemente esta construcción.

Definición 22. *Para* $a \in (\mathbb{R}^+)^n \setminus \{(0,...,0)\}$*, se define* $m(a) := \text{ínf}_{x\in\Gamma(f)}\{x \cdot a\}$*, donde* $x \cdot a$ *denota el producto interno de* $\mathbb{R}^n$*.*

Se puede probar, veáse [14], que $m(a) := \text{mín}_{x\in\text{sop}(f)}\{x \cdot a\}$.

Ejemplo 16. *Del poliedro de Newton de la figura 2.1, sabemos que sop*$(f) = \{(0,2),(3,0)\}$*, así, si tomamos* $a = (1,1) \in (\mathbb{R}^+)^2$*,* $m(a) = \text{mín}\{(1,1)\cdot(0,2),(1,1)\cdot(3,0)\} = \text{mín}\{2,3\} = 2$.

Definición 23. *Para* $a \in (\mathbb{R}^+)^n \setminus \{(0,...,0)\}$*, definimos* $K_a := \{x \in \Gamma(f) \mid x \cdot a = m(a)\}$.

Proposición 28. K_a *es una cara del poliedro de Newton* $\Gamma(f)$.

Demostración. Por la definición 21, se debe probar que el conjunto K_a es la intersección de $\Gamma(f)$ con un hiperplano de soporte de $\Gamma(f)$, así por definición

$$K_a = \Gamma(f) \cap \underbrace{\{x \in (\mathbb{R}^+)^n \mid x \cdot a = m(a)\}}_{\Omega},$$

este último conjunto Ω es un hiperplano de soporte de $\Gamma(f)$. Se puede entonces concluir que K_a es una cara de $\Gamma(f)$. □

Ejemplo 17. *Si $a_1 = (1,1)$ sabemos del ejemplo 16 que $m(a_1) = 2$, así calculamos $K_{a_1} = K_{(1,1)} = \{(x_1,x_2) \in \Gamma_+ \mid (x_1,x_2)\cdot(1,1) = 2\} = \{(x_1,x_2) \in \Gamma_+ \mid x_1 + x_2 = 2\} = (0,2) = \tau_{1,2}$. Ahora si $a_2 = (2,1)$, entonces por definición $m(a_2) = \min\{(2,1)\cdot(0,2),(2,1)\cdot(3,0)\} = 2$ y además $K_{a_2} = \{(x_1,x_2) \in \Gamma_+ \mid (x_1,x_2)\cdot(2,1) = 2\} = \{(x_1,x_2) \in \Gamma_+ \mid 2x_1 + x_2 = 2\} = (0,2) = \tau_{1,2} = K_{a_1}$.*

Definición 24. *A partir del ejemplo 17 se define en $(\mathbb{R}^+)^n$ una relación de equivalencia como $a_1 \sim a_2$ si, y sólo si, $K_{a_1} = K_{a_2}$.*

Ahora si $\tau \in \Gamma_+$ entonces definimos el *cono asociado a τ* como el conjunto

$$\Delta_\tau = \{a \in (\mathbb{R}^+)^n \mid K_a = \tau\}. \tag{2.1}$$

Definición 25. *Dados $a_1,...,a_k \in (\mathbb{R}^+)^n \setminus \{0\}$ con $k \leq n$, el conjunto*

$$\Delta = \langle a_1,...,a_k\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

lo llamaremos el cono positivo *generado por los vectores $a_1,...,a_k$. Si los generadores $a_1,...,a_k$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, entonces el cono será llamado* simplicial. *Si el conjunto $\{a_1,...,a_n\}$ es una base para el $\mathbb{Z}-$módulo $\mathbb{Z}^n$ entonces se dirá que el cono es* simple.

Definición 26. *Dados $a_1,...,a_r \in \mathbb{R}^n$, un cono poliedral $\sigma = \langle a_1,...,a_r\rangle$, con $r \leq n$ se dice* racional *si $a_1,...,a_r \in \mathbb{Q}^n$.*

Lema 1. *Según [22], dada τ una cara de Γ, tal que $\tau \neq \Gamma$, entonces*

(i) la clausura topológica $\overline{\Delta_\tau}$ de Δ_τ es un cono poliedral racional donde

$$\overline{\Delta_\tau} = \{a \in (\mathbb{R}^+)^n \mid K_a \supset \tau\}.$$

(ii) Dadas $\beta_1,...,\beta_k$ caretas de Γ que contienen a τ y $a_1,...a_k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ la única colección de vectores ortogonales interiores a $\beta_1,...,\beta_k$ respectivamente. Entonces

$$\Delta_\tau = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i > 0\},$$
$$\overline{\Delta_\tau} = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0\}.$$

Definición 27. *Un vector $a \in \mathbb{Z}^n$ se dice* primitivo*, si todas sus entradas son enteros primos relativos.*

Observación De manera equivalente, un cono $\Delta = \langle a_1,...,a_n\rangle$ es simple si se cumple que

$$\det = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \pm 1$$

Definición 28. *Un* abanico $\mathcal{F}$ *es un conjunto finito de conos poliedrales tales que*

(i) Toda cara no vacía de un cono de $\mathcal{F}$ *está contenida en* $\mathcal{F}$ *y*

(ii) La intersección de dos conos C_i *y* C_j *de* $\mathcal{F}$ *es una cara tanto de* C_i *como de* C_j*.*

Definición 29. *Un abanico es* simplicial *(respectivamente* simple*) si todos sus conos son simpliciales (respectivamente* simples*).*

Proposición 29. *Existe una correspondencia uno a uno entre caras de* Γ *y conos de su abanico subordinado, esta correspondencia es complementaria hablando en términos de dimensión, más precisamente si la dimensión de nuestro espacio es* n *y tomamos una cara en* Γ *de dimensión* $k-1$*, esta tendrá un correspondiente cono de dimensión* $n-(k-1)=1$*, esto para* $k=1,...,n+1$*.*

Nota: La colección $(\Delta_\tau)_{\tau\in\Gamma}$ forma un abanico.

Este abanico se dice *subordinado a* $\Gamma(f)$ pues cada cono del abanico está contenido en una clase de equivalencia de $\sim$.

El siguiente ejemplo muestra con detalle lo dicho anteriormente.

Ejemplo 18. *Teniendo en cuenta el poliedro de Newton del ejemplo 15 y los cálculos de los ejemplos anteriores debemos utilizar el lema 1 y las definiciones 28 y 29, es decir construir el abanico subordinado al poliedro dado. Esto requiere hallar los vectores normales a las caras* τ_1, τ_2 *y* τ_3 *respectivamente, así para la cara* τ_1 *hallamos su vector normal el cual es* $(1,0)$*, para la cara* τ_2 *hallamos su vector normal que es* $(2,3)$*, para la cara* τ_3 *hallamos su vector normal que es* $(0,1)$*, se definen*

$$\sigma_1 := \langle(1,0)\rangle = \{x \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x = \gamma(1,0), \gamma \in \mathbb{R}^+\},$$

$$\sigma_2 := \langle(2,3)\rangle = \{x \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x = \gamma(2,3), \gamma \in \mathbb{R}^+\},$$

$$\sigma_3 := \langle(0,1)\rangle = \{x \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x = \gamma(0,1), \gamma \in \mathbb{R}^+\}.$$

Para las caras restantes $\tau_{1,2}$ *y* $\tau_{2,3}$ *debemos tener en cuenta que se definen además*

$$\sigma_{1,2} = \{x \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(2,3); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+\},$$

$$\sigma_{2,3} = \{x \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x = \alpha_1(2,3) + \alpha_2(0,1); \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+\}.$$

Se dice por lo tanto que σ_1 *es el dual de* τ_1*,* σ_2 *es el dual de* τ_2*,* σ_3 *es el dual de* τ_3*,* $\sigma_{1,2}$ *es el dual de* $\tau_{1,2}$ *y* $\sigma_{2,3}$ *es el dual de* $\tau_{2,3}$*.*

Ejemplo 19. *Recordemos del Ejemplo 18 que* $\sigma_{2,3} = \langle(2,3),(0,1)\rangle$*, se puede verificar que este cono no es simple, ya que*

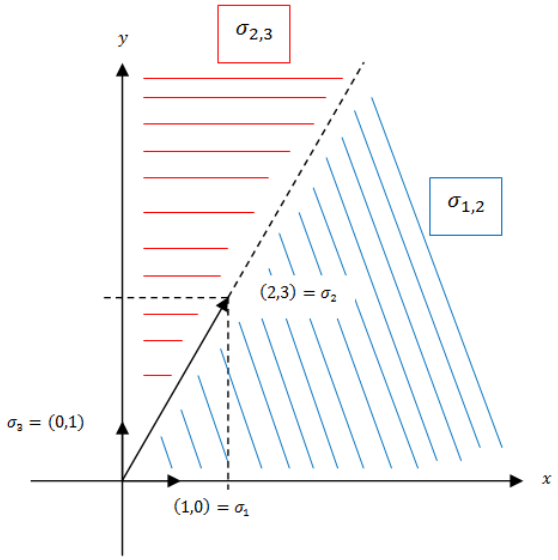

FIGURA 2.2. Dual subordinado al poliedro de Newton del polinomio $f(X,Y) = Y^2 - X^3$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq \pm 1,$$

Pero el cono $\langle (1,2),(0,1) \rangle$ *si lo es.*

Teorema 11 ([14], lema 1.2.3)**.** *Cualquier descomposición cónica de* $(\mathbb{R}^+)^2$ *se puede transformar en una descomposición de un número finito de conos simpliciales mediante subdivisiones.*

Es posible encontrar vectores en $\sigma_{1,2}$ y $\sigma_{2,3}$ que refinan la descomposición original y la llevan a una descomposición simple. Véase [27].
Nota: Se notará a una cara de C_τ como Δ_τ^+. Esta cara es además un cono y cada cono Δ_τ^+ se puede subdividir en una colección finita de conos simpliciales $\Delta_{\tau,i}^+$. Más aún añadiendo nuevos vectores a dichas subdivisiones, se tiene que dicha subdivisión se da con una colección finita de conos simples.

Definición 30. *Si la subdivisión se hace con una colección finita de conos simples, se dirá que el conjunto* Σ *es un* abanico o dual simple subordinado *al poliedro de Newton* $\Gamma(f)$*.*

Nota: De ahora en adelante se trabajará con Σ como un abanico simple subordinado a $\Gamma(f)$ con soporte $(\mathbb{R}^+)^n$.

Ejemplo 20. *Por el Ejemplo 19 la descomposición de la figura 2.2, no es una descomposición cónica simple. Por lo tanto, si tenemos en cuenta ahora los vectores* $(1,1)$ *y* $(1,2)$ *que pertenecen a* $\sigma_{1,2}$ *y* $\sigma_{2,3}$ *respectivamente entonces la nueva descomposición cónica es simple ver figura 2.3.*

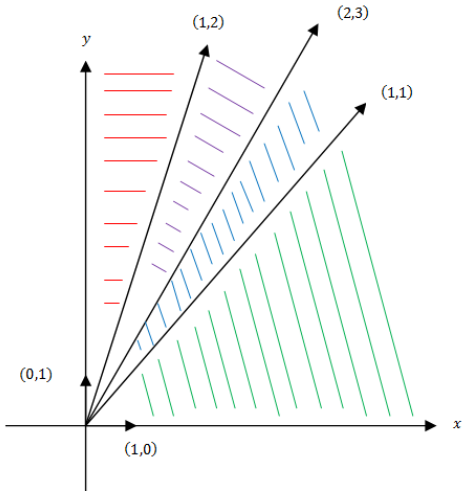

FIGURA 2.3. Abanico simple subordinado al poliedro de Newton del polinomio $f(X,Y) = Y^2 - X^3$.

Veremos ahora la construcción del poliedro de Newton y su poliedro dual subordinado a un polinomio de tres variables.

Ejemplo 21. *Considérese el polinomio*

$$f(X,Y,Z) = a_{(1,0,0)}X + a_{(0,1,0)}Y + a_{(0,0,1)}Z$$

con $a_{(1,0,0)} = 1 = a_{(0,1,0)} = a_{(0,0,1)}$. *Por lo tanto*

$$sop(f) = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$

su poliedro de Newton se muestra en la figura 2.4.

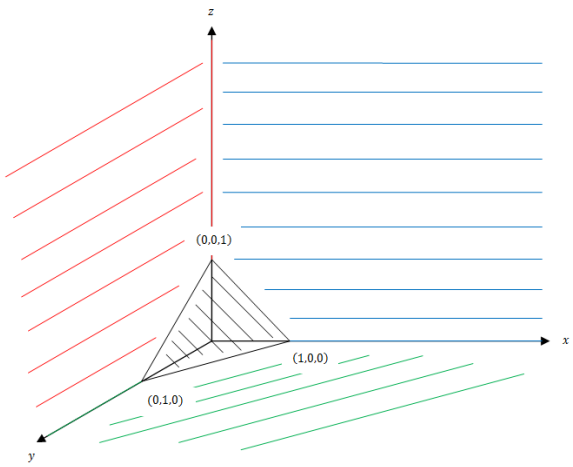

FIGURA 2.4. Poliedro de Newton del polinomio $f(X,Y,Z) = X + Y + Z$.

Análoga a la construcción del cono del ejemplo 18, se tiene que los vectores normales correspondientes a las caretas del poliedro de Newton son

$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ *y el vector* $(1,1,1)$ *que es el vector normal al plano* $X+Y+Z=1$*, así el dual del poliedro de Newton de* f *se presenta en la figura 2.5.*

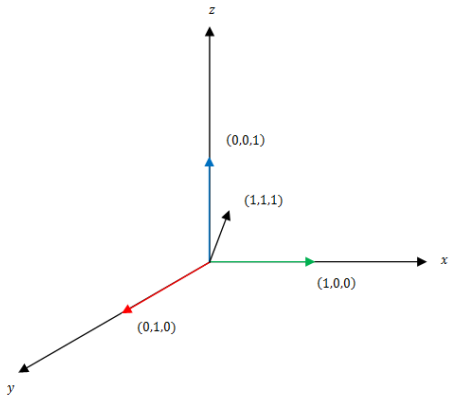

FIGURA 2.5. Dual subordinado al poliedro de Newton del polinomio $f(X,Y,Z)=X+Y+Z$.

2.1.3. Construcción de la variedad tórica asociada a un abanico

Teniendo ya como herramientas tanto el poliedro de Newton como su poliedro dual o abanico, construimos con base en estos una variedad tórica asociada a dichos elementos siguiendo las definiciones e ideas de [23]. Estas construcciones son clásicas, pero aquí seguimos las ideas y notación de [23], (otras construcciones similares se pueden encontrar en [8]).

Definición 31. *Sean* Σ *un abanico simple subordinado a* $\Gamma(f)$ *con soporte* $(\mathbb{R}^+)^n$ *y* $\sigma=\langle a^1,...,a^n\rangle$ *un cono simple* $n-$*dimensional tal que si* τ *es un vértice de* $\Gamma_+(f)$ *se tiene que* $K_a=\tau$ *donde* $a\in\sigma$*. Por notación* $a^i=(a^i_1,...,a^i_n)$*. A* σ *le asociamos una copia de* $\mathbb{C}^n$ *la cual notaremos como* $\mathbb{C}^n(\sigma)$*, a partir de esto definimos el morfismo monomial*

$$\pi(\sigma):\mathbb{C}^n(\sigma)\to\mathbb{C}^n$$

tal que si $Y=(Y_1,...,Y_n)\in\mathbb{C}^n(\sigma)$ *entonces* $\pi(\sigma)(Y)=X=(X_1,...,X_n)$ *donde* $X_j=Y_1^{a^1_j}Y_2^{a^2_j}\cdots Y_n^{a^n_j}$ *para todo* $j=1,...,n$*. Ahora en donde se pueda hacer (Véase [27]), se define la aplicación*

$$\pi(\sigma)^{-1}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n(\sigma)$$

tal que para $X=(X_1,...,X_n)\in\mathbb{C}^n$*,* $\pi(\sigma)^{-1}(X)=Y=(Y_1,...,Y_n)$ *donde* $Y_j=X_1^{b^q_1}\cdots X_n^{b^q_n}$*, tal que los* b^i_j *son las entradas de la matriz* $(b_{ij})=A^{-1}$ *donde* $A=(a^i_j)$ *es la matriz cuyas columnas son los vectores* $a^1,...,a^n$*. La matriz* A *es la matriz que determina la aplicación* $\pi(\sigma)$*.*

Ejemplo 22. *Recordemos que los conos del abanico de la figura 2.4 son simples, uno de estos es* $\sigma=\langle(1,0,0),(1,1,1),(0,0,1)\rangle$*, así* $a^1=(1,0,0),a^2=(1,1,1)$ *y* $a^3=$

$(0,0,1)$. *Este abanico es el dual del poliedro de Newton del polinomio* $f(Y_1,Y_2,Y_3) = Y_1+Y_2+Y_3$, *si asociamos a* σ *una copia de* $\mathbb{C}^3(\sigma)$ *podemos ver que la aplicación* $\pi(\sigma)$ *transforma*

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1^{a_1^1}Y_2^{a_1^2}Y_3^{a_1^3} = Y_1^1Y_2^0Y_3^0 = Y_1,\\ X_2 &= Y_1^{a_2^1}Y_2^{a_2^2}Y_3^{a_2^3} = Y_1^1Y_2^1Y_3^1 = Y_1Y_2Y_3,\\ X_3 &= Y_1^{a_3^1}Y_2^{a_3^2}Y_3^{a_3^3} = Y_1^0Y_2^0Y_3^1 = Y_3. \end{aligned}$$

Definición 32. *Sean* σ_1 *y* σ_2 *conos de dimensión* n *y simples tales que* $\mathbb{C}^n(\sigma_1)$ *y* $\mathbb{C}^n(\sigma_2)$ *son sus copias de* $\mathbb{C}^n$ *correspondientes. Para dos puntos* $Y \in \mathbb{C}^n(\sigma_1)$ *y* $W \in \mathbb{C}^n(\sigma_2)$, *se define la relación*

$$Y \sim W \text{ si y solo si } (\pi^{-1}(\sigma_2)\circ\pi(\sigma_1))(Y) = W.$$

Proposición 30 ([27], p. 67, Assertion 45)**.** *La relación* $\sim$ *es una relación de equivalencia.*

El anterior proceso es un proceso de pegado el cual permite unir o pegar las copias $\mathbb{C}^n(\sigma_1)$ y $\mathbb{C}^n(\sigma_2)$. A partir de las clases de equivalencia de la relación anteriormente definida, damos la siguiente definición.

Definición 33. *La* variedad tórica *asociada al abanico del poliedro de Newton* $\Gamma(f)$ *es el conjunto*

$$X(\Gamma(f)) = \left(\bigcup_i \mathbb{C}^n(\sigma_i)\right) \diagup \sim .$$

Dicha unión es tomada sobre los conos de dimensión maximal.

Proposición 31. *Dado* $\sigma = \langle a^1, ..., a^n\rangle$ *entonces*

1. $K_{a^1} \cap K_{a^2} \cap \cdots \cap K_{a^n} = p$ *donde* $p = (p_1, ..., p_n)$ *es un vértice en* $\Gamma(f)$.

2. *Si* $m = (m_1, ..., m_n)$ *es cualquier monomio de* Γ_+ *se tiene que*

$$(X_1^{m_1}\cdots X_n^{m_n})\circ\pi(\sigma) = Y_1^{\{m\cdot a^1\}}Y_2^{\{m\cdot a^2\}}\cdots Y_n^{\{m\cdot a^n\}}.$$

Demostración.

1. Recordemos que para algún a^j, K_{a^j} es una cara del poliedro de Newton y estas caras por definición son la intersección del poliedro $\Gamma(f)$ con un hiperplano de soporte. Así entonces si $p \in K_{a^1}\cap K_{a^2}\cap\cdots\cap K_{a^n}$ entonces p es un punto del poliedro de Newton que satisface las n ecuaciones que describen los hiperplanos de soporte, esto implica que este punto p es un punto vértice del poliedro $\Gamma(f)$.

2. Si $X_j = Y_1^{a_j^1} \cdots Y_n^{a_j^n}$ entonces

$$\begin{aligned} X_1^{m_1} \cdots X_j^{m_j} \cdots X_n^{m_n} &= \left(Y_1^{a_1^1} \cdots Y_n^{a_1^n}\right)^{m_1} \cdots \left(Y_1^{a_j^1} \cdots Y_n^{a_j^n}\right)^{m_j} \cdots \left(Y_1^{a_n^1} \cdots Y_n^{a_n^n}\right)^{m_n} \\ &= \left(Y_1^{a_1^1 m_1 + \cdots + a_j^1 m_j + \cdots + a_n^1 m_n}\right) \cdots \left(Y_i^{a_1^i m_1 + \cdots + a_j^i m_j + \cdots + a_n^i m_n}\right) \\ &\qquad \cdots \left(Y_n^{a_1^n m_1 + \cdots + a_j^n m_j + \cdots + a_n^n m_n}\right) \\ &= \left(Y_1^{m_1 a_1^1 + \cdots + m_j a_j^1 + \cdots + m_n a_n^1}\right) \cdots \left(Y_i^{m_1 a_1^i + \cdots + m_j a_j^i + \cdots + m_n a_n^i}\right) \\ &\qquad \cdots \left(Y_n^{m_1 a_1^n + \cdots + m_j a_j^n + \cdots + m_n a_n^m}\right) \\ &= Y_1^{m \cdot a^1} \cdots Y_i^{m \cdot a^i} \cdots Y_n^{m \cdot a^n}. \end{aligned}$$

□

Definición 34. *Para $\Gamma(f)$ fijo y un sistema fijo de coordenadas $(X_1, ..., X_n) \in \mathbb{C}^n$ alrededor de cero, un polinomio f definido en este sistema se puede escribir como*

$$f = \underbrace{\sum_{I \in \Gamma(f)} a_I X^I}_{\textit{Parte principal}} + \sum_{I \notin \Gamma(f)} a_I X^I.$$

Definición 35. *Sean $\Omega_{\Gamma_+} = \{g \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \mid \Gamma_+(g) = \Gamma_+\}$, y τ una cara cerrada de Γ_+, entonces*

$$g_\tau := \sum_{I \in \tau} b_I X^I \quad \text{si} \quad g = g_\tau + \sum_{I \notin \tau} b_I X^I.$$

g_τ es llamada la función de la cara *τ.*

Ejemplo 23. *La cara $\tau_2 := \left\{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid y = -\frac{2}{3}x + 2,\ 0 \le x \le 3\right\}$ del ejemplo 15 es una cara cerrada de $\Gamma(f)$ para $f(X, Y) = Y^2 - X^3$. Entonces $f_{\tau_2} = Y^2 - X^3$ ya que los puntos $(0, 2)$ y $(3, 0)$ que representan los monomios Y^2 y X^3 pertenecen a τ_2. También $\tau_{1,2}$ es una cara cerrada, por lo tanto $f_{\tau_{1,2}} = Y^2$.*

Definición 36. *f es* no degenerada *con respecto a su poliedro de Newton Γ_+, si para cada cara cerrada τ de Γ_+, las funciones $f_\tau, (f_\tau)_{X_1}, ..., (f_\tau)_{X_n}$ no tienen ceros comunes en $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ donde $(f_\tau)_{X_j}$ representa la derivada con respecto a la j-ésima variable de la función de cara f_τ.*

Ejemplo 24.

(a) El polinomio $f(X, Y) = Y^2 - X^3$ es no degenerado con respecto a su poliedro de Newton (Véase la figura 2.6). Del ejemplo 15 las caras $\tau_2, \tau_{1,2}$ y $\tau_{2,3}$ son todas las caras cerradas de $\Gamma(f)$, por lo tanto calculamos $f_{\tau_{1,2}} = Y^2, f_{\tau_2} = 0, f_{\tau_{2,3}} = -X^3$ entonces $(f_{\tau_{1,2}})_X = 0, (f_{\tau_{1,2}})_Y = 2Y, (f_{\tau_2})_X = 0, (f_{\tau_2})_Y = 0, (f_{\tau_{2,3}})_X = -3X^2, (f_{\tau_{2,3}})_Y = 0$. Por lo tanto si $\tau \in \{\tau_2, \tau_{1,2}, \tau_{2,3}\}$ entonces las funciones $(f_\tau)_X$ y $(f_\tau)_Y$ no tienen ceros comunes en $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Se concluye que f es no degenerada.

(b) Sea $g(X,Y) = (Y^2 - X^3)^2 + X^7 + Y^9$ las caras de su poliedro de Newton (Véase la figura 2.6) son:

$$\tau_1 := \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x = 0, y \geq 4\},$$
$$\tau_2 := \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid y = -\frac{2}{3}x + 4, 0 \leq x \leq 6\right\},$$
$$\tau_3 := \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x \geq 6, y = 0\}.$$

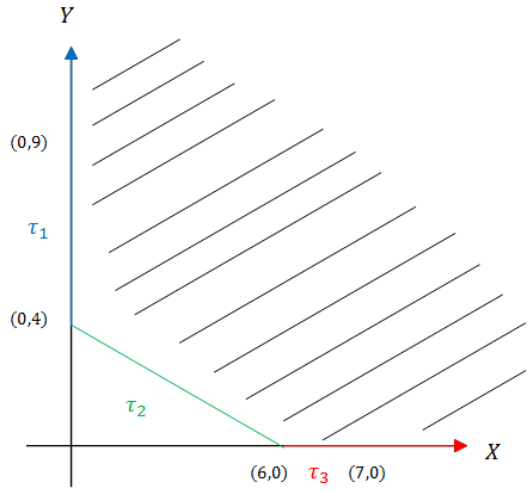

FIGURA 2.6. Poliedro de Newton del polinomio $g(X,Y) = (Y^2 - X^3)^2 + X^7 + Y^9$

Así, sus caras compactas son $\tau_{1,2} = (0,4), \tau_2, \tau_{2,3} = (6,0)$.

Hallamos $g_{\tau_2} = Y^4 - 2X^3Y^2 + X^6$; así,

$$(g_{\tau_2})_X = -6X^2Y^2 + 6X^5 = 6X^2(-Y^2 + X^3),$$
$$(g_{\tau_2})_Y = 4Y^3 - 4X^3Y = 4Y(Y^2 - X^3).$$

Las soluciones comunes de estas dos funciones se pueden encontrar al estudiar el siguiente sistema

$$\begin{cases} 6X^2(-Y^2 + X^3) & = 0 \\ 4Y(Y^2 - X^3) & = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto las soluciones son $X^3 = Y^2$, las cuales son no nulas en general, lo cual implica que g es degenerado con respecto a su poliedro de Newton.

Ahora, el siguiente resultado da una caracterización de la transformación monomial $\pi(\sigma)$ aplicada a un polinomio f.

Proposición 32. *Dado $f \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, y dado $\sigma = \langle a^1, ..., a^n \rangle$ un cono $n-$dimensional, se tiene que*

$$f \circ \pi(\sigma)(Y_1, ..., Y_n) = Y_1^{m(a^1)} \cdots Y_n^{m(a^n)} f_\sigma(Y_1, ..., Y_n), \tag{2.2}$$

donde $f_\sigma(0, ..., 0) \neq 0$.

Demostración. Escribimos f como suma de sus diferentes r monomios,

$$f = \sum_{k=1}^{r} X_1^{m_{1,k}} \cdots X_n^{m_{n,k}},$$

por lo tanto calculamos

$$f \circ \pi(\sigma) = \sum_{k=1}^{r} Y_1^{m_k^{'} \cdot a^1} Y_2^{m_k^{'} \cdot a^2} \cdots Y_n^{m_k^{'} \cdot a^n},$$

donde $m_k^{'} = (m_{1,k}, ..., m_{n,k})$.

Ahora, para todo $j = 1, ..., n$ podemos factorizar $Y_j^{\tilde{m}_k \cdot a^j}$ de cada monomio de f tal que $\tilde{m}_k \cdot a^j \leq m_k^{'} \cdot a^j$ para todo $k = 1, ..., m$. Pero por la definición 22, $\tilde{m}_k \cdot a^j$ es precisamente $m(a^j)$ así entonces para $j = 1, ..., n$ se tiene que

$$f \circ \pi(\sigma) = \underbrace{\sum_{k=1}^{x} Y_1^{m_k^{'} \cdot a^1} Y_2^{m_k^{'} \cdot a^2} \cdots Y_n^{m_k^{'} \cdot a^n}}_{\Delta} + \sum_{r-x}^{r} Y_1^{m_k^{'} \cdot a^1} \cdots Y_n^{m_k^{'} \cdot a^n}, \tag{2.3}$$

donde Δ representa los x monomios en los cuales se cumple que $m_k^{'} \cdot a^j = m(a^j)$ para $j = 1, ..., n$, entonces $x \neq 0$ y de la ecuación (2.3) factorizamos $Y_1^{m(a^1)}, \cdots, Y_n^{m(a^n)}$, esto implica que

$$f \circ \pi(\sigma) = Y_1^{m(a^1)} \cdots Y_n^{m(a^n)} \left(x + \sum_{r-x}^{r} Y_1^{m_k^{'} \cdot a^1 - m(a^1)} \cdots Y_n^{m_k^{'} \cdot a^n - m(a^n)} \right).$$

Luego concluye que

$$f_\sigma = x + \sum_{k=r-x}^{r} Y_1^{m_k^{'} \cdot a^1 - m(a^1)} \cdots Y_n^{m_k^{'} \cdot a^n - m(a^n)}. \tag{2.4}$$

Finalmente, a partir de la ecuación (2.4) se tiene que $f_\sigma((0, ..., 0)) = x \neq 0$. □

Ejemplo 25. *Del ejemplo 15 sabemos que $m(a^1) = 6$ y $m(a^2) = 2$ donde $a^1 = (2, 3)$ y $a^2 = (1, 1)$, por lo tanto sea $\sigma = \sigma_2 = ((2, 3), (1, 1))$. Ahora, si notamos el polinomio f del ejemplo 15 como $f(X_1, X_2) = X_2^2 - X_1^3$, así entonces calculamos*

$$f \circ \pi(\sigma_2) = (X_2^2 - X_1^3) \circ \pi(\sigma_2).$$

Ahora, a partir de la proposición 31, teniendo en cuenta los monomios de f, calculamos

$$X_2^2 \circ \pi(\sigma_2) = Y_1^{\{m\cdot a^1\}} Y_2^{\{m\cdot a^2\}} = Y_1^{(0,2)\cdot(2,3)} Y_2^{(0,2)\cdot(1,1)} = Y_1^6 Y_2^2 \tag{2.5}$$

$$X_1^3 \circ \pi(\sigma_2) = Y_1^{\{m\cdot a^1\}} Y_2^{\{m\cdot a^2\}} = Y_1^{(3,0)\cdot(2,3)} Y_2^{(3,0)\cdot(1,1)} = Y_1^6 Y_2^3 \tag{2.6}$$

Así de las ecuaciones (2.5) y (2.6) entonces

$$f \circ \pi(\sigma_2) = Y_1^6 Y_2^2 - Y_1^6 Y_2^3 = Y_1^6 Y_2^2 (1 - Y_2) \tag{2.7}$$

Por lo tanto por la proposición 32 se tiene que $f_\sigma = f_{\sigma_2} = 1 - Y_2$ y en efecto $f_\sigma(0,0) = 1 \neq 0$.

Se debe tener en cuenta que en adelante la función f_σ juega un papel relevante en los cálculos del exponente de Lojasiewicz.

La siguiente definición tiene en cuenta los puntos $p \in \pi(\sigma)^{-1}(\overline{0})$ para los cuales las funciones f_σ se anulan.

Definición 37. *Dado un punto $p = (p_1, ..., p_n) \in \pi(\sigma)^{-1}(\overline{0})$, p es un punto* simple *si $f_\sigma(p) = 0$ pero $\left(\frac{\partial f_\sigma}{y_1}, ..., \frac{\partial f_\sigma}{y_n}\right)(p) \neq (0, ..., 0)$.*

Proposición 33 ([23], p. 420-421.)**.** *Si para un punto $p \in \pi(\sigma)^{-1}((0, ..., 0))$, se tiene que $f_\sigma(p) = 0$ y si f satisface la condición de la definición 36 (condición de no degeneración) entonces p es un punto simple de f_σ.*

2.2. Caso 2-dimensional y condición extra de no degeneración

Para el caso de dimensión $n = 2$ según [23], tomamos la copia del espacio $\mathbb{C}^2(\sigma)$ asociado a un σ $n-$dimensional simple como en la definición 31. Luego de esto debemos tener en cuenta el estudio en dos casos:

Caso A. Dado un polinomio $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$, $\Gamma(f)$ no intersecta los ejes coordenados.

Caso B. Dado un polinomio $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$, $\Gamma(f)$ intersecta los ejes coordenados.

Esto probará el teorema 4. Esta prueba consiste en la construcción de una variedad tórica, la cual permitirá estimar α_σ el cual es análogo al α de .13 en $\mathbb{C}^2(\sigma)$ y así entonces calcular $\theta_\sigma = \frac{\alpha_\sigma}{1-\alpha_\sigma}$, y a partir de esto estimar el v_f del teorema 4. Así entonces como $\theta_\sigma = \frac{\alpha_\sigma}{1-\alpha_\sigma}$, se obtiene entonces el valor v_f de .15 a partir de θ_σ, esto es

$$v_f = \left[\max_\sigma \theta_\sigma\right] + 1 \tag{2.8}$$

donde este máximo se toma sobre el conjunto de conos unitarios de dimensión 2 definidos en la construcción de la variedad tórica.

Ejemplo 26. *Un poliedro de Newton que cumple la condición del caso A, es el poliedro del polinomio* $f(X,Y) = XY^3 - X^4Y$. *Un polinomio que cumple la condición del caso B es* $g(X,Y) = Y^2 - X^3$ *cuyo poliedro de Newton aparece en la figura 2.6.*

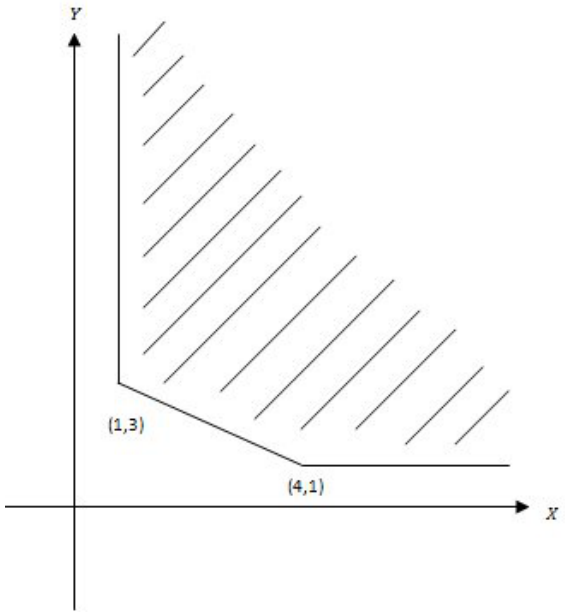

FIGURA 2.7. Poliedro de Newton del polinomio $f(X,Y) = XY^3 - X^4Y$.

A partir de esta distinción se puede decir que cada caso requiere de un estudio por aparte para estimar el exponente de Lojasiewicz. Comenzamos por lo tanto con el caso A.

Caso A. Para empezar debemos recordar que en este caso la matriz A de la definición 31 es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix},$$

donde $\sigma = (a^1, a^2)$ y $p = (p_1, p_2) \in \pi(\sigma)^{-1}(0)$ se tiene que

$$A^{-1} \begin{pmatrix} m(a^1) \\ m(a^2) \end{pmatrix} = I_\sigma = K_{a^1} \cap K_{a^2}.$$

Ahora recordemos de la prueba de la proposición 33 (Véase [23], p. 420-422) que

$$\begin{pmatrix} x_1 f_{x_1} \circ \pi(\sigma) \\ x_2 f_{x_2} \circ \pi(\sigma) \end{pmatrix} = M(y) \left[f_\sigma(y) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_1} \\ y_2 \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_2} \end{pmatrix} \right] \tag{2.9}$$

donde $M(y) = Y_1^{m(a^1)} Y_2^{m(a^2)}$.

Ahora, como el poliedro de Newton no toca los ejes coordenados entonces tanto p_1 como p_2 son no nulos, entonces la ecuación 2.9 toma la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 f_{x_1} \circ \pi(\sigma) \\ x_2 f_{x_2} \circ \pi(\sigma) \end{pmatrix} = M(y) \begin{pmatrix} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

donde y_i no divide ni a $\psi_1(y)$ ni a $\psi_2(y)$ de la ecuación (2.10).

Si se divide a ambos lados de la i-ésima ecuación del sistema matricial (2.10) por $x_i \circ \pi(\sigma) = Y_1^{a_1^1} Y_2^{a_1^2}$, para $i = 1, 2$, obtenemos

$$f_{x_i} \circ \pi(\sigma) = y_1^{m(a^1)-a_i^1} y_2^{m(a^2)-a_i^2} \psi_i(y). \tag{2.11}$$

Ahora es posible definir un orden lineal entre los puntos $\delta_1 = (m(a^1)-a_1^1, m(a^2)-a_1^2)$, $\delta_2 = (m(a^1) - a_2^1, m(a^2) - a_2^2)$, así

- Si $a_1^1 \leq a_2^1$ y $a_1^2 \leq a_2^2$ entonces $\delta_1 \geq \delta_2$.
- Si $a_1^1 \geq a_2^1$ y $a_1^2 \geq a_2^2$ entonces $\delta_1 \leq \delta_2$.

Esto se puede lograr si se incluye el vector $(1, 1)$ en la partición original del cono simple de $\Gamma_+(f)$. Por lo tanto cada cono $\sigma = (a^1, a^2)$ está a uno de los lados de $(1, 1)$ o $a^i = (1, 1)$ para $i = 1$ o $i = 2$.

Ejemplo 27. *Recordemos del ejemplo 20, la figura 2.2 y la figura 2.3 que al añadir el vector* $(1, 1)$ *al cono* $\sigma = \langle (2, 3), (1, 1) \rangle$ *que es simple, se puede ver que los puntos* δ_1 *y* δ_2 *son respectivamente*

$$\delta_1 = (6 - 2, 2 - 1) = (4, 1)$$

$$\delta_2 = (6 - 3, 2 - 1) = (3, 1).$$

Por lo tanto como $a_1^1 = 2 < 3 = a_2^1$ *y* $a_1^2 = 1 = a_2^2$, *se concluye que* $\delta_1 \geq \delta_2$. *Además, notamos que todos los conos de esta descomposición son* $\sigma_1 = \langle (0, 1), (1, 2) \rangle$, $\sigma_2 = \langle (1, 2), (2, 3) \rangle$, $\sigma_3 = \langle (2, 3), (1, 1) \rangle$ *y* $\sigma_4 = \langle (1, 1), (1, 0) \rangle$. *Por lo tanto los conos* σ_1, σ_2 *estan a un lado del vector* $(1, 1)$, *mientras que los conos* σ_3 *y* σ_4 *tiene en sus generadores al vector* $(1, 1)$.

Definición 38. *A partir del orden anterior se define el punto* minimal *como el punto* $\left(m(a^1) - a_\mu^1, m(a^2) - a_\mu^2\right)$ *y el punto* maximal *como el punto* $(m(a^1) - a_M^1, m(a^2) - a_M^2)$. *donde* $\mu, M \in \{1, 2\}$ *según el orden definido anteriormente.*

Ejemplo 28. *Por lo tanto del ejemplo 27 se tiene que* $\mu = 2$ *y* $M = 1$, *así el punto minimal es el punto* $\left(m(a^1) - a_\mu^1, m(a^2) - a_\mu^2\right) = \delta_2 = (6 - 3, 2 - 1) = (3, 1)$ *y el punto maximal es el punto* $(m(a^1) - a_M^1, m(a^2) - a_M^2) = \delta_1 = (6 - 2, 2 - 1) = (4, 1)$.

Ahora si tenemos en cuenta el caso cuando $i = \mu$ entonces consideramos el factor ψ_μ de la ecuación (2.11).

Definición 39. *Se definen*

$$\alpha_\sigma(0,0) = \max_{\{\beta_1,\beta_2\}} \left(\frac{(m(a^1) - a^1_\mu)\beta_1 + (m(a^2) - a^2_\mu)\beta_2}{m(a^1)\beta_1 + m(a^2)\beta_2} \right),$$

donde $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ *es una curva monomial que pasa por* $(0,0)$ *y además*

$$\theta_\sigma(0,0) = \frac{\alpha_\sigma(0,0)}{1 - \alpha_\sigma(0,0)}.$$

A continuación enunciamos la primera estimación del exponente de Lojasiewicz asociado a un cono simple σ dado.

Proposición 34. *Si* $\psi_\mu(p) \neq 0$ *para todos los puntos* $p \in \pi(\sigma)^{-1}((0,0))$*, entonces*

$$\theta_\sigma = \frac{\alpha_\sigma}{1 - \alpha_\sigma} \tag{2.12}$$

es a lo sumo el valor más grande de los puntos de intersección de los ejes coordenados con las lineas de soporte de Γ_+ *que pasan por una cara compacta.*

Demostración. Sea $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in (\mathbb{Z}^+)^2$ y definimos $\gamma_\beta(t) = (c_1 t^{\beta_1}, c_2 t^{\beta_2})$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, una curva monomial que pasa por cero, esto es $\gamma_\beta(0) = (0,0)$.
Por lo tanto calculamos

$$f_{x_\mu} \circ \pi(\sigma) \circ \gamma_\beta = (c_1 t^{\beta_1})^{m(a^1) - a^1_\mu} (c_2 t^{\beta_2})^{m(a^2) - a^2_\mu} \underbrace{\psi_\mu(c_1 t^{\beta_1}, c_2 t^{\beta_2})}_{(*)}. \tag{2.13}$$

Por la proposición 32 y por hipótesis, sabemos que $(*)$ es una unidad, por lo tanto su orden en t es cero. De donde podemos calcular el orden

$$ord_t(f_{x_\mu} \circ \pi(\sigma) \circ \gamma_\beta) = \left(m(a^1) - a^1_\mu)\beta_1 + (m(a^2) - (a^2_\mu)\right)\beta_2. \tag{2.14}$$

De manera análoga se tiene que

$$ord_t(f \circ \pi(\sigma) \circ \gamma_\beta) = m(a^1)\beta_1 + m(a^2)\beta_2. \tag{2.15}$$

Nos concentramos ahora el la definición 39 el cual será necesario para encontrar θ_σ.

$$\alpha_\sigma(0,0) = \max_{\{\beta_1,\beta_2\}} \left(\frac{\overbrace{(m(a^1) - a^1_\mu)\beta_1}^{a} + \overbrace{(m(a^2) - a^2_\mu)\beta_2}^{b}}{\underbrace{m(a^1)\beta_1}_{c} + \underbrace{m(a^2)\beta_2}_{d}} \right). \tag{2.16}$$

Ahora como a, b, c, d son números no negativos por definición de a^1_μ, a^2_μ, $m(a^1)$ y $m(a^2)$ entonces se tiene que

$$\min\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\} \leq \frac{a+b}{c+d} \leq \max\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\}. \tag{2.17}$$

Por lo anterior se tiene que

$$\alpha_\sigma(0,0) = \max_i \left(\frac{m(a^j) - a^j_\mu}{m(a^j)} \right). \tag{2.18}$$

Se debe tener en cuenta según la definición 38 que si $a^j_\mu \geq a^j_M$ entonces se tiene que $m(a^j) - a^j_\mu \leq m(a^j) - a^j_M$ esto para $j = 1, 2$.

De la ecuación (2.16) se tiene que

$$\frac{a}{c} = \frac{(m(a^1) - a^1_\mu)\beta_1}{m(a^1)\beta_1} = 1 - \frac{a^1_\mu}{m(a^1)}, \tag{2.19}$$

$$\frac{b}{d} = \frac{(m(a^2) - a^2_\mu)\beta_2}{m(a^2)\beta_2} = 1 - \frac{a^2_\mu}{m(a^2)}. \tag{2.20}$$

A partir de esto se puede afirmar que $\alpha_\sigma(0,0) < 1$, y entonces por la definición 39 calculamos

$$\begin{aligned}
\theta_\sigma(0,0) &= \frac{\alpha_\sigma(0,0)}{1 - \alpha_\sigma(0,0)} \\
&= \max_j \left(\frac{\frac{m(a^j) - a^j_\mu}{m(a^j)}}{\frac{m(a^j) - \left(m(a^j) - a^j_\mu\right)}{m(a^j)}} \right) \\
&= \max_j \left(\frac{m(a^j) - a^j_\mu}{a^j_\mu} \right) \\
&= \max_j \left(\frac{m(a^j)}{a^j_\mu} \right) - 1.
\end{aligned}$$

Este resultado se puede interpretar teniendo en cuenta las siguientes ecuaciones llamadas las *ecuaciones de hiperplanos* asociados a $\sigma = (a^1, a^2)$

$$H_{a^1} : a^1_1 x_1 + a^1_2 x_2 = m(a^1) \tag{2.21}$$

$$H_{a^2} : a^2_1 x_1 + a^2_2 x_2 = m(a^2) \tag{2.22}$$

Por lo tanto las intersecciones de estas rectas con los ejes nos darán los valores $\frac{m(a^1)}{a^1_1}$ y $\frac{m(a^2)}{a^2_\mu}$, esto se obtiene igualando en la ecuación 2.21 $x_2 = 0$ y de aquí $x_1 = \frac{m(a^1)}{a^1_1} = \frac{m(a^1)}{a^1_\mu}$. De manera análoga si en la ecuación 2.22 $x_1 = 0$ entonces $x_2 = \frac{m(a^2)}{a^2_1} = \frac{m(a^2)}{a^2_\mu}$. □

Nota: Sabemos que por hipótesis de la proposición 34 $\psi_\mu(p) \neq 0$ para todos los puntos $p \in \pi(\sigma)^{-1}(0,0)$, pero es posible que $f_\sigma(p) = 0$. Esto implica que se deben

encontrar cotas para los valores α_σ y θ_σ, teniendo en cuenta que para este caso

$$\alpha_\sigma = \max_{p\in\pi(\sigma)^{-1}(0,0)} \alpha_\sigma(p).$$

Todo esto se garantiza gracias al siguiente resultado.

Proposición 35. *Siguiendo las hipótesis anteriores, por la proposición 33 existen coordenadas locales Y_1, Y_2 en p tales que*

$$f\circ\pi(\sigma)(Y_1,Y_2) = Y_1 Y_2^{m(a^2)} u(Y_1,Y_2),\ \ u(0,0)\neq 0. \tag{2.23}$$

Además

$$f_{x_\mu}\circ\pi(\sigma)(Y_1,Y_2) = Y_2^{m(a^2)-a_\mu^2} V_\mu(Y_1,Y_2),\ \ V_\mu(0,0)\neq 0$$

.

Demostración. Aplicando la definición de $\alpha_\sigma(0,0)$ en la ecuación 2.18, para este caso se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha_\sigma(p) &= \max_{\beta=(\beta_1,\beta_2)} \left\{ \frac{(m(a^2)-a_\mu^2)\beta_2}{\beta_1 + m(a^2)\beta_2} \right\} \\ &\leq \max_{\beta=(\beta_1,\beta_2)} \left\{ \frac{(m(a^1)-a_\mu^1)\beta_1 + (m(a^2)-a_\mu^2)\beta_2}{m(a^1)\beta_1 + m(a^2)\beta_2} \right\} \\ &= \alpha_\sigma(0,0).\end{aligned}$$

Esto implica por la definición 39, $\theta_\sigma(p)\leq\theta_\sigma(0,0)$. □

Nota: La hipótesis de la proposición 34 $\psi_\mu(p)\neq 0$ para todo $p\in\pi(\sigma)^{-1}(0,0)$ en general es difícil de garantizar a partir únicamente de $\Gamma(f)$, por ello se debe estudiar su respectivo abanico simple subordinado y a través de sus propiedades geométricas garantizar dichas hipótesis. Lo anterior se estudiará en las proposiciones 36 y 37.

Definición 40. *Dado $\sigma=(a^1,a^2)$, se definen*

$$\sigma_1 := \{x\in\Gamma_+(f) \mid x\cdot a^1 = m(a^1), x\cdot a^2 > m(a^2)\}, \tag{2.24}$$

$$\sigma_2 := \{x\in\Gamma_+(f) \mid x\cdot a^2 = m(a^2), x\cdot a^1 > m(a^1)\}. \tag{2.25}$$

Ejemplo 29. *Sean $f(X_1,X_2) = X_1^2X_2^2 + X_1^4X_2 + X_1X_2^4$, $a^1=(1,2)$ y $a^2=(2,1)$, se puede ver que $\Gamma_+(f)$ no intersecta los ejes coordenados y además se tiene que $m(a^1)=6, m(a^2)=6$.*

Se tiene además que

$$\begin{aligned}\sigma_1 &:= \{x \in \Gamma_+(f) \mid x \cdot (1,2) = 6,\ \ x \cdot (2,1) > 6\}\\ &:= \{x \in \Gamma_+(f) \mid x_1 + 2x_2 = 6,\ \ 2x_1 + x_2 > 6\}.\\ \sigma_2 &:= \{x \in \Gamma_+(f) \mid x \cdot (1,2) > 6,\ \ x \cdot (2,1) = 6\}\\ &:= \{x \in \Gamma_+(f) \mid x_1 + 2x_2 > 6,\ \ 2x_1 + x_2 = 6\}.\end{aligned}$$

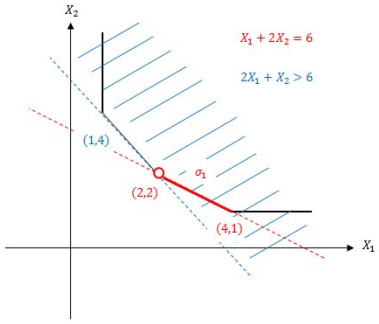

FIGURA 2.8. Representación gráfica de σ_1.

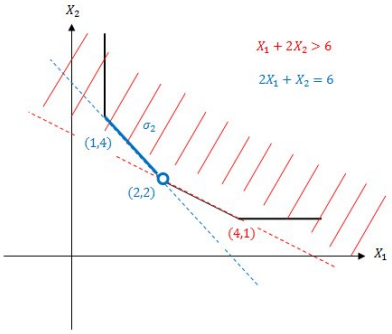

FIGURA 2.9. Representación gráfica de σ_2.

Los siguientes resultados son útiles en el sentido de que permiten decidir si las funciones ψ_μ tienen o no raices en $\pi(\sigma)^{-1}(0,0)$ sin necesidad de aplicar la definición de la ecuación (2.11).

Proposición 36 ([23] p. 424)**.** *Para cada k, ψ_k no tiene raíces sobre $\pi(\sigma)^{-1}(0,0)$ si $\sigma_{\{1\}} \cup \sigma_{\{2\}} = \emptyset$.*

Proposición 37 ([23] p. 425)**.** *Si ningún a^i_j no es cero y si $\sigma_{\{1\}} \cup \sigma_{\{2\}} \neq \emptyset$ entonces para todo k, las funciones ψ_k tienen una raíz sobre $\pi(\sigma)^{-1}(0,0)$.*

Ejemplo 30. *Recordemos del ejemplo 29 que*

$$\begin{aligned}\sigma_1 &:= \{x \in \Gamma_+(f) \mid x \cdot (1,2) = 6,\ \ x \cdot (2,1) > 6\}\\ &:= \{x \in \Gamma_+(f) \mid x_1 + 2x_2 = 6,\ \ 2x_1 + x_2 > 6\}.\\ \sigma_2 &:= \{x \in \Gamma_+(f) \mid x \cdot (1,2) > 6,\ \ x \cdot (2,1) = 6\}\\ &:= \{x \in \Gamma_+(f) \mid x_1 + 2x_2 > 6,\ \ 2x_1 + x_2 = 6\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sigma_1 \cup \sigma_2 \neq \emptyset$, así debemos calcular las funciones ψ_1 y ψ_2 de la función del ejemplo 29, esto es,

$$\begin{aligned} f_{X_1} \circ \pi(\sigma) &= (2X_1X_2^2 + 4X_1^3X_2 + X_2^4) \circ \pi(\sigma) \\ &= 2Y_1^5Y_2^4 + 4Y_1^5Y_2^7 + Y_1^8Y_2^4 \\ &= Y_1^5Y_2^4(\underbrace{2 + 4Y_2^3 + Y_1^3}_{\psi_1}). \\ f_{X_2} \circ \pi(\sigma) &= (2X_1^2X_2 + X_1^4 + 4X_1X_2^3) \circ \pi(\sigma) \\ &= 2Y_1^4Y_2^5 + Y_1^4Y_2^8 + 4Y_1^7Y_2^5 \\ &= Y_1^4Y_2^5(\underbrace{2 + Y_2^3 + 4Y_1^3}_{\psi_2}). \end{aligned}$$

Así entonces, el punto $p_1 = (-\sqrt[3]{2}, 0) \in \pi(\sigma)^{-1}(0,0)$ y se cumple que $\psi_1(p_1) = 0$. Además el punto $p_2 = (0, -\sqrt[3]{2}) \in \pi(\sigma)^{-1}(0,0)$ es tal que $\psi_2(p_2) = 0$. Se concluye que tanto ψ_1 y ψ_2 tienen raíces sobre $\pi(\sigma)^{-1}(0,0)$.

Existe un problema cuando $\psi_\mu(p) = 0$ en el cálculo del mín$_i\{$ ord $(f_{X_i} \circ \pi(\sigma) \circ \gamma_\beta)\}$ para una curva monomial γ_β ya que en este caso ord$_i\psi_\mu(\gamma_\beta) > 0$, esto no permite hacer un cálculo sencillo sobre todos los γ_β. Se introduce por lo tanto la segunda condición de no degeneración, la cual hace posible el cálculo anteriormente planteado.

Definición 41. *(Condición extra de no degeneración) Sea $p = (p_1, p_2) \in \pi(\sigma)^{-1}(0,0)$. (Por un cambio de coordenadas podemos suponer que $p_1 = 0$). Si $\psi_\mu(p) = 0$ entonces $\frac{\partial \psi_\mu}{\partial y_2}(p) \neq 0$. Ahora, si $p_2 = 0$ y si $\psi_\mu(p) = 0$, entonces $\frac{\partial \psi_\mu}{\partial y_1}(p) \neq 0$.*

Esta nueva definición alternativa a la definición 36 es una herramienta que permite emular la demostración de la proposición 32 y por lo tanto cubrir las situaciones que se presentan en el caso A.

Proposición 38. *Sea $p = (0, p_2)$. Si $\psi_\mu(p) = 0$ entonces $f_\sigma(p) \neq 0$.*

La definición 41 y la proposición 38 son herramientas para hallar $\alpha_\sigma(p)$ y $\theta_\sigma(p)$ para un punto $p \in \pi(\sigma)^{-1}(0,0)$ para el cual $\psi_\mu(p) = 0$. Por lo tanto, a continuación se estima el valor de $\alpha_\sigma(p)$ y $\theta_{\sigma(p)}$ teniendo en cuenta la frase anterior. Para esto se requiere observar el punto p para los casos cuando $p = (0, p_2)$ o $p = (p_1, 0)$.

Si $p = (0, p_2)$, definimos $Y_1 = y_1, Y_2 = y_2 - p_2$, y además

$$\tilde{Y_1} = Y_1 \tag{2.26}$$

$$\tilde{Y_2} = \psi_\mu(Y_1, Y_2) \tag{2.27}$$

Como $\frac{\partial \psi_\mu}{\partial Y_2}(0,0) \neq 0$, las ecuaciones 2.26 y 2.27 permiten un cambio local de coordenadas cerca de p en $\pi(\sigma)^{-1}(0,0)$. Por lo tanto a partir de este cambio de coordenadas

y recordando la ecuación (2.11) sabemos que

$$\begin{aligned} f_{x_\mu} \circ \pi(\sigma) &= Y_1^{m(a^1)-a^1_\mu} Y_2^{m(a^2)-a^2_\mu} \psi_\mu(Y_1, Y_2), \\ f_{x_M} \circ \pi(\sigma) &= Y_1^{m(a^1)-a^1_M} Y_2^{m(a^2)-a^2_M} \psi_M(Y_1, Y_2), \\ f \circ \pi(\sigma)(Y_1, Y_2) &= Y_1^{m(a^1)} Y_2^{m(a^2)} f_\sigma(Y_1, Y_2). \end{aligned}$$

Esto se transforma en

$$\begin{aligned} f_{x_\mu} \circ \pi(\sigma)(\tilde{Y}) &= \tilde{Y}_1^{m(a^1)-a^1_\mu} \tilde{Y}_2 U_\mu(\tilde{Y}), \\ f_{x_M} \circ \pi(\sigma)(\tilde{Y}) &= \tilde{Y}_1^{m(a^1)-a^1_M} U_M(\tilde{Y}), \\ f \circ \pi(\sigma)(\tilde{Y}) &= \tilde{Y}_1^{m(a^1)} U(\tilde{Y}), \end{aligned}$$

donde $U_\mu(0,0) \cdot U_M(0,0) \cdot U(0,0) \neq 0$. Recordando cómo se halla $\alpha_\sigma(p)$ en la proposición 35, así entonces se tiene que

$$\alpha_\sigma(p) = \frac{m(a^1) - a^1_M}{m(a^1)}.$$

Además sabemos que $a^1 \neq (0,1)$ o $a^1 \neq (1,0)$, por lo tanto $a^1_M \neq 0$ y entonces

$$\theta_\sigma(p) = \frac{m(a^1)}{a^1_M} - 1,$$

es uno menos que el intercepto más grande de los ejes con la linea de soporte $a^1 \cdot x = m(a^1)$.

Ahora, de lo anterior se tienen dos casos a saber:

(1) Si el hiperplano de soporte $H_1 : a^1 \cdot x = m(a^1)$ toca al poliedro Γ_+ en una cara 1-dimensional entonces se tiene el resultado de la proposición 34.

(2) Si H_1 toca al poliedro Γ_+ en un vértice, entonces K_{a^1} es un extremo en la frontera de K_b donde $\sigma = (a^1, b)$ y σ es un cono unitario. Por lo tanto a partir de esto se debe calcular la diferencia $\frac{m(a^1)}{a^1_M} - \frac{m(b)}{b_M}$.

Ahora, si $p = (p_1, 0)$ entonces se deben hacer pequeñas modificaciones del caso anterior, esto es, definir $Y_1 = y_1 - p_1, Y_2 = y_2$, y además,

$$\tilde{Y}_2 = Y_2 \tag{2.28}$$

$$\tilde{Y}_1 = \psi_\mu(Y_1, Y_2). \tag{2.29}$$

Como $\frac{\partial \psi_\mu}{\partial Y_1}(0,0) \neq 0$, las ecuaciones 2.28 y 2.29 permiten un cambio local de coordenadas cerca de p en $\pi(\sigma)^{-1}(0,0)$.

Esto implica que si se tienen nuevamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} f_{x_\mu} \circ \pi(\sigma) &= Y_1^{m(a^1)-a^1_\mu} Y_2^{m(a^2)-a^2_\mu} \psi_\mu(Y_1, Y_2), \\ f_{x_M} \circ \pi(\sigma) &= Y_1^{m(a^1)-a^1_M} Y_2^{m(a^2)-a^2_M} \psi_M(Y_1, Y_2), \\ f \circ \pi(\sigma)(Y_1, Y_2) &= Y_1^{m(a^1)} Y_2^{m(a^2)} f_\sigma(Y_1, Y_2), \end{aligned}$$

entonces éstas se transforman en

$$\begin{aligned} f_{x_\mu} \circ \pi(\sigma)(\tilde{Y}) &= \tilde{Y}_2^{m(a^2)-a^2_\mu} \tilde{Y}_2 U_\mu(\tilde{Y}), \\ f_{x_M} \circ \pi(\sigma)(\tilde{Y}) &= \tilde{Y}_2^{m(a^2)-a^2_M} U_M(\tilde{Y}), \\ f \circ \pi(\sigma)(\tilde{Y}) &= \tilde{Y}_2^{m(a^2)} U(\tilde{Y}), \quad U_\mu(0,0) \cdot U_M(0,0) \cdot U(0,0) \neq 0. \end{aligned}$$

Así, de forma similiar al caso anterior se tiene que $\alpha_\sigma(p) = \frac{m(a^2)-a^2_M}{m(a^2)}$ y por lo tanto $\theta_\sigma(p) = \frac{m(a^2)}{a^2_M} - 1$. Las demás consideraciones respecto a los hiperplanos de a^2 se tienen de manera similar al caso de a^1.

La siguiente proposición muestra qué sucede cuando el hiperplano H_1 toca el poliedro de Newton en un vértice.

Proposición 39. $\left| \frac{m(a^1)}{a^1_M} - \frac{m(b)}{b_M} \right| \leq 1$, *si* $I_\sigma = (1, p_2)$ *o* $I_\sigma = (p_1, 1)$.

Demostración. Notemos que

$$\left| \frac{m(a^1)}{a^1_M} - \frac{m(b)}{b_M} \right| = \left| \left(\frac{a^1_\mu p_\mu + a^1_M p_M}{a^1_M} \right) - \left(\frac{b_\mu p_\mu + b_M p_M}{b_M} \right) \right| = \frac{p_\mu}{a^1_M b_M} \left| \begin{pmatrix} a^1_\mu & a^1_M \\ b_\mu & b_M \end{pmatrix} \right|,$$

donde $I_\sigma = (p_1, p_2)$ y $\mu, M \in \{1, 2\}$.

Ahora, como σ es un cono unitario, se tiene que

$$\left| \begin{pmatrix} a^1_\mu & a^1_M \\ b_\mu & b_M \end{pmatrix} \right| = \pm 1.$$

Por lo tanto, si estamos en el caso A, tenemos dos posibilidades

1. Si $\mu = 1$ entonces $I_\sigma = (1, p_2)$; así

$$\frac{p_\mu}{a^1_M b_M} = \frac{p_1}{a^1_M b_M} = \frac{1}{a^1_M b_M} < 1.$$

2. Si $\mu = 2$ entonces $I_\sigma = (p_1, 1)$; así

$$\frac{p_\mu}{a_M^1 b_M} = \frac{p_2}{a_M^1 b_M} = \frac{1}{a_M^1 b_M} < 1.$$

Como en este caso el poliedro de Newton no intersecta los ejes coordenados, $I_\sigma \neq (1, p_2)$ o $I_\sigma \neq (p_1, 1)$ entonces el punto de interseccíon más grande de la linea de soporte H_{a^1} con los ejes coordenados no es más grande que el intersecto que se tiene en la proposición 34.

□

Así, gracias a las hipótesis añadidas de las proposiciones 38 y 39 se ha probado algo más que la proposición 34, es decir, según Lichtin [23] se ha probado el teorema 4.

Nota: Ahora para el caso B, el resultado del caso A se obtiene siempre y cuando no se tenga que $I_\sigma = (0, p_2)$ o $I_\sigma = (p_1, 0)$, y además a^1 no debe estar en la misma dirección de $(1, 0)$ ni a^2 no debe estar en la dirección de $(0, 1)$ donde $\sigma_1 \cup \sigma_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto para estos casos según Lichtin [23] se debe estudiar el caso B, el cual se expone a continuación.

Caso B. Para este caso construimos una partición dual de $\Gamma_+(Jf)$ (el poliedro de Newton del jacobiano de f es el poliedro de Newton de la función producto de sus derivadas parciales f_{X_1}, f_{X_2}) como se hizo con $\Gamma_+(f)$ y juntamos las dos para crear un abanico con conos unitarios más refinado que el de $\Gamma_+(f)$. Dado que I_σ corresponde a un punto de la frontera de $\Gamma_+(f)$, se notará como J_σ a un punto de la frontera de $\Gamma_+(Jf)$.

Se debe tener en cuenta que según la nota anterior, hay que considerar la geometría del punto I_σ, esto significa que se deben estudiar por aparte los puntos de la forma $I_\sigma = (p_1, 0)$ y $I_\sigma = (0, p_2)$. Esto se muestra a continuación.

Para un σ que satisface las hipótesis de la proposición 33, supongamos que $I_\sigma = (0, p_2)$; entonces

$$x_1 f_{x_1} \circ \pi(\sigma) = y_1^{M(a^1)} y_2^{M(a^2)} \psi_1(y) \tag{2.30}$$

$$x_2 f_{x_2} \circ \pi(\sigma) = y_1^{m(a^1)} y_2^{m(a^2)} \psi_2(y), \tag{2.31}$$

donde $m(a^i) \leq M(a^i)$ para $i = 1, 2$. Por lo tanto

$$f_{x_1} \circ \pi(\sigma) = y_1^{M(a^1)-a_1^1} y_2^{M(a^2)-a_1^2} \psi_1(y) \tag{2.32}$$

$$f_{x_2} \circ \pi(\sigma) = y_1^{m(a^1)-a_2^1} y_2^{m(a^2)-a_2^2} \psi_2(y). \tag{2.33}$$

Para realizar el refinamiento de la partición, se debe tener en cuenta la construcción de un abanico que comprende la unión del abanico de f y el de su jacobiano J_f. De

esto, gracias a la definición 38 se sabe que existe un orden lineal entre dos pares de exponentes de las ecuaciones (2.32) y (2.33) y como $\sigma_1 \cup \sigma_2 \neq \emptyset$, se debe considerar la posibilidad de que ψ_μ tenga una raíz en $\pi(\sigma)^{-1}(0,0)$.

Si ahora tenemos en cuenta la condición extra de no degeneración (definición 41), ésta nos permite hacer un cambio de coordenadas en una vecindad de un cero de ψ_μ. Por lo tanto debemos suponer al igual que en el caso A que dicha raíz tiene la forma $\overline{p} = (\overline{p}_1, 0)$ o $\overline{p} = (0, \overline{p}_2)$. Así, recordando que $I_\sigma = (0, p_2)$ y si $\overline{p} = (\overline{p}_1, 0)$ entonces análogo al caso A, consideramos los siguientes casos:

(a) Si $\mu = 1$, entonces se calcula

$$\alpha_\sigma(\overline{p}) = \max_{\beta} \left\{ \frac{\min((M(a^2) - a_1^2)\beta_2 + \beta_1, (m(a^2) - a_2^2)\beta_2)}{m(a^1)\beta_1 + m(a^2\beta_2)} \right\} = \frac{m(a^2) - a_2^2}{m(a^2)}. \quad (2.34)$$

Por lo tanto,

$$\theta_\sigma(\overline{p}) = \frac{m(a^2) - a_2^2}{a_2^2} = \frac{m(a^2)}{a_2^2} - 1 \leq \frac{m(a^2)}{\min\{a_j^2\}} - 1. \quad (2.35)$$

(b) Si $\mu = 2$ entonces $m(a^i) - a_2^i \leq M(a^i) - a_1^i$, para $i = 1, 2$. Por lo tanto,

$$\alpha_\sigma(\overline{p}) = \frac{M(a^2) - a_1^2}{m(a^2)}. \quad (2.36)$$

Como el punto vértice $J_\sigma = S - e_1$ o $J_\sigma = S - e_2$ donde $S \in \text{sop}(f)$, y además $a^i \cdot J_\sigma = M(a^i) - a_1^i \leq a^i \cdot (I_\sigma - e_2)$, a partir de esto se tiene que para $i = 1, 2$

$$m(a^i) - a_2^i \leq M(a^i) - a_1^i \leq m(a^i) - a_2^i.$$

Así, la ecuación (2.36) se transforma en

$$\alpha_\sigma(\overline{p}) = \frac{m(a^2) - a_2^2}{m(a^2)}. \quad (2.37)$$

Luego, se concluye que

$$\theta_\sigma(\overline{p}) = \frac{m(a^2)}{a_2^2} - 1 \leq \frac{m(a^2)}{\min\{a_j^2\}} - 1. \quad (2.38)$$

Ahora, si $\overline{p} = (0, \overline{p_2})$ entonces se deben hacer similares estimaciones, esto es:

(a) Si $\mu = 1$, se tiene que

$$\alpha_\sigma(\overline{p}) = \frac{m(a^1) - a_2^1}{m(a^1)}. \quad (2.39)$$

Esto implica que

$$\theta_\sigma(\overline{p}) = \frac{m(a^1) - a_2^1}{a_2^1} \leq \frac{m(a^1)}{\text{mín}\{a_j^1\}} - 1. \tag{2.40}$$

(b) Si $\mu = 2$ entonces $m(a^i) - a_2^i \leq M(a^i) - a_1^i$ para $i = 1, 2$.

Por lo tanto,

$$\alpha_\sigma(\overline{p}) = \frac{M(a^1) - a_1^1}{m(a^1)}. \tag{2.41}$$

Aplicando el mismo razonamiento que llevo a escribir la ecuación (2.37), se concluye que

$$\theta_\sigma(\overline{p}) = \frac{m(a^1)}{a_1^1} - 1 \leq \frac{m(a^1)}{\text{mín}\{a_j^1\}} - 1. \tag{2.42}$$

Ahora, de manera análoga, si $I_\sigma = (p_1, 0)$ entonces las ecuaciones (2.30) y (2.31) se transforman respectivamente en

$$x_1 f_{x_1} \circ \pi(\sigma) = y_1^{m(a^1)} y_2^{m(a^2)} \psi_1(y) \tag{2.43}$$

$$x_2 f_{x_2} \circ \pi(\sigma) = y_1^{M(a^1)} y_2^{M(a^2)} \psi_2(y), \tag{2.44}$$

y además como $m(a^i) \leq M(a^i)$ para $i = 1, 2$, entonces las ecuaciones (2.32) y (2.33) se transforman en las ecuaciones

$$f_{x_1} \circ \pi(\sigma) = y_1^{m(a^1) - a_1^1} y_2^{m(a^2) - a_1^2} \psi_1(y) \tag{2.45}$$

$$f_{x_2} \circ \pi(\sigma) = y_1^{M(a^1) - a_2^1} y_2^{M(a^2) - a_2^2} \psi_2(y). \tag{2.46}$$

Así teniendo en cuenta los cambios respecto al caso cuando $I_\sigma = (0, p_2)$, las estimaciones de α_σ y θ_σ son análogos, teniendo en cuenta que dependen de los exponentes de las ecuaciones (2.45) y (2.46), aplicando en estos el orden lineal dado en la definición 38. Por lo tanto α_σ y θ_σ se hallan a partir de la definición que se utilizó en la ecuación (2.34).

Según Lichtin [23], este caso también garantiza lo dicho en la proposición 39 y así también se ha mostrado el teorema 4 para el caso B, y por lo tanto se tiene en general.

2.3. Dos ejemplos

A continuación mostramos dos ejemplos, uno del caso A y uno del caso B de la sección 2.2 en donde se estimará para cada uno de ellos el exponente de Lojasiewicz, es decir, ilustraremos en cada caso el teorema 4.

Ejemplo 31. *Dado* $f(X_1, X_2) = X_1X_2^3 - X_1^4X_2$*, podemos ver que, este polinomio es cuasihomogéneo, ya que para todo* $X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$*, si* $t > 0$*, se tiene que*

$$f(t^2X_1, t^3X_2) = t^2X_1(t^3X_2)^3 - (t^2X_1)^4t^3X_2 = t^{11}(X_1X_2^3 - X_1^4X_2),$$

así el polinomio f *tiene grado* $d = 11$ *y peso* $w = (w_1, w_2) = (2, 3)$*, por lo tanto se tiene que una cota del exponente de lojasiewicz es* $\theta(f) \leq 1 - \frac{w_*}{d} = 1 - \frac{2}{11} = \frac{9}{11}$*. Ahora, si tenemos en cuenta que su soporte es* $\text{sop}(f) = \{(1, 3), (4, 1)\}$*, y además su poliedro de Newton es*

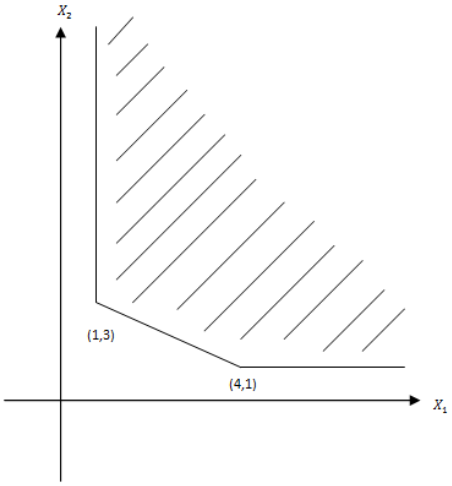

FIGURA 2.10. Poliedro de Newton $\Gamma_+(f)$ del polinomio $f(X_1, X_2) = X_1X_2^3 - X_1^4X_2$.

entonces este poliedro entra en el estudio del Caso A. De esta manera su dual descompuesto en conos poliedrales simpliciales es

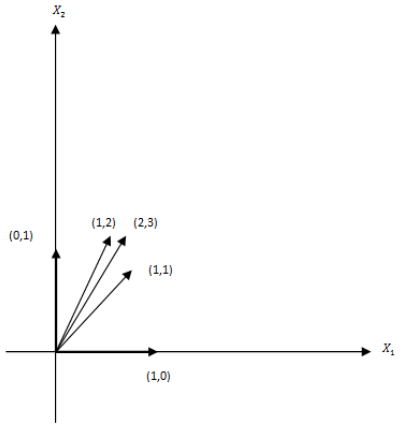

FIGURA 2.11. Dual del poliedro de Newton $\Gamma_+(f)$ con $f(X_1, X_2) = X_1X_2^3 - X_1^4X_2$.

Ahora, se definen a partir de este dual los conos

$$\begin{aligned}\sigma_1 &:= \langle (1,0),(1,1)\rangle,\\ \sigma_2 &:= \langle (1,1),(2,3)\rangle,\\ \sigma_3 &:= \langle (2,3),(1,2)\rangle,\\ \sigma_4 &:= \langle (1,2),(0,1)\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\sigma = \sigma_1$*, calculamos*

$$\begin{aligned}f\circ\pi(\sigma_1) &= (X_1X_2^3 - X_1^4X_2)\circ\pi(\sigma_1)\\ &= X_1X_2^3\circ\pi(\sigma_1) - X_1^4X_2\circ\pi(\sigma_1)\\ &= Y_1^{(1,3)\cdot(1,0)}Y_2^{(1,3)\cdot(1,1)} - Y_1^{(4,1)\cdot(1,0)}Y_2^{(4,1)\cdot(1,1)}\\ &= Y_1^1Y_2^4 - Y_1^4Y_2^5\\ &= Y_1Y_2^4(1-Y_1^3Y_2),\end{aligned}$$

de donde, $f_{\sigma_1}(Y_1,Y_2) = 1 - Y_1^3Y_2$*, en efecto por la proposición 32,* $f_{\sigma_1}(0,0)\neq 0$*.*

Ahora, como $a^1 = (1,0)$ *y* $a^2 = (1,1)$*, entonces* $m(a^1) = 1$ *y* $m(a^2) = 4$*, además* $a_1^1 = 1$*,* $a_2^1 = 0$*,* $a_1^2 = 1$ *y* $a_2^2 = 1$*. La matriz* A *de la definición 31 es de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1\\ a_1^2 & a_2^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

por lo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

A partir de esto verificamos las ecuaciones de la proposición 33. Debemos debemos calcular

$$\begin{aligned}X_1f_{X_1} &= X_1(X_1X_2^3 - 4X_1^3X_2)\\ &= X_1X_2^3 - 4X_1^4X_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_2f_{X_2} &= X_2(3X_1X_2^2 - X_1)\\ &= 3X_1X_2^3 - X_1^4X_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_1f_{X_1}\circ\pi(\sigma_1) &= (X_1X_2^3 - 4X_1^4X_2)\circ\pi(\sigma_1)\\ &= Y_1Y_2^4 - 4Y_1^4Y_2^5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_2f_{X_2}\circ\pi(\sigma_1) &= (3X_1X_2^3 - X_1^4X_2)\circ\pi(\sigma_1)\\ &= 3Y_1Y_2^4 - Y_1^4Y_2^5.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene

$$A^{-1}\begin{pmatrix} m(a^1) \\ m(a^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = K_{a^1} \cap K_{a^2} = I_{\sigma_1}. \tag{2.47}$$

Ahora, por definición

$$M(Y) = Y_1^{m(a^1)}Y_2^{m(a^2)} = Y_1Y_2^4. \tag{2.48}$$

Así, a partir de la siguiente igualdad se debe mostrar quiénes son las funciones ψ_1 y ψ_2.

$$\begin{pmatrix} X_1 f_{X_1} \circ \pi(\sigma_1) \\ X_2 f_{X_2} \circ \pi(\sigma_1) \end{pmatrix} = M(Y)\begin{pmatrix} \psi_1(Y) \\ \psi_2(Y) \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$\begin{pmatrix} X_1 f_{X_1} \circ \pi(\sigma_1) \\ X_2 f_{X_2} \circ \pi(\sigma_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1Y_2^4 - 4Y_1^4Y_2^5 \\ 3Y_1Y_2^4 - Y_1^4Y_2^5 \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

Como $I_\sigma = (p_1, p_2) = (1, 3)$, entonces se tiene que

$$f_{\sigma_1}(Y)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 1 - Y_1^3Y_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - Y_1^3Y_2 \\ 3 - 3Y_1^3Y_2 \end{pmatrix}. \tag{2.50}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&Y_1Y_2^4\left[\begin{pmatrix} 1 - Y_1^3Y_2 \\ 3 - 3Y_1^3Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3Y_1^3Y_2 \\ -Y_1^3Y_2 \end{pmatrix}\right] \\
&= Y_1Y_2^4\left[\begin{pmatrix} 1 - Y_1^3Y_2 \\ 3 - 3Y_1^3Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3Y_1^3Y_2 \\ 2Y_1^3Y_2 \end{pmatrix}\right] \\
&= \underbrace{Y_1Y_2^4}_{M(Y)}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 - 4Y_1^3Y_2 \\ 3 - Y_1^3Y_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \psi_1(Y) \\ \psi_2(Y) \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} Y_1Y_2^4 - 4Y_1^4Y_2^5 \\ 3Y_1Y_2^4 - Y_1^4Y_2^5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\psi_1(Y) = 1 - 4Y_1^3Y_2 \tag{2.51}$$

$$\psi_2(Y) = 3 - Y_1^3Y_2. \tag{2.52}$$

Recordemos que para estimar el exponente de Lojasiewicz se debe calcular ord($J_f \circ \pi(\sigma) \circ \gamma_\beta$). Para esto, según la definición 38 se debe establecer un orden lineal entre los puntos

$$\begin{aligned}
(m(a^1) - a_1^1, m(a^2) - a_1^2) &= (1 - 1, 4 - 1) \\
&= (0, 3),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(m(a^1)-a_2^1, m(a^2)-a_2^2) &= (1-0, 4-1)\\ &= (1,3).\end{aligned}$$

Este orden implica que $(0,3) \leq (1,3)$. *De aquí entonces* $a_\mu^1 = 1, a_\mu^2 = 1$ *con* $\mu = 1$ *y* $a_M^1 = 0, a_M^2 = 1$ *con* $M = 2$. *Así,* $\psi_\mu(Y) = \psi_1(Y) = 1 - 4Y_1^3Y_2$.

Para que se cumplan las hipótesis de la proposición 34, se deben tomar puntos p tales que, $p \in \pi(\sigma_1)^{-1}(0,0)$. *Estos puntos se pueden calcular recordando la definición de la aplicación* $\pi(\sigma)$*(definición 31), y como en este caso* $\sigma = \sigma_1 = \langle(1,0),(1,1)\rangle$, *entonces basta resolver las siguientes ecuaciones*

$$(X_1, X_2) = (Y_1^1Y_2^1, Y_1^0Y_2^1) = (0,0), \tag{2.53}$$

cuya solución es $Y_2 = 0$ *y* Y_1 *es cualquier valor en* $\mathbb{C}$. *Por lo tanto, los puntos* $p \in \pi(\sigma_1)^{-1}(0,0)$ *son de la forma* $p = (p_1, 0)$. *De lo anterior, como* $\mu = 1$ *entonces calculamos* $\psi_\mu((p_1,0)) = \psi_1((p_1,0)) = 1 \neq 0$

Así, por la proposición 34,

$$\theta_{\sigma_1}(0,0) = \text{máx}_{j=1,2}\left(\tfrac{m(a^j)}{a_\mu^j}\right) - 1 = \text{máx}\left(\tfrac{1}{1}, \tfrac{4}{1}\right) - 1 = 4 - 1 = 3$$

Ahora si, tomamos $\sigma = \sigma_2 = \langle(1,1),(2,3)\rangle$ *y procedemos a hacer los mismos cálculos del caso anterior, se obtienen*

$$\psi_1(Y_1, Y_2) = 1 - 4Y_1. \tag{2.54}$$

$$\psi_2(Y_1, Y_2) = 3 - Y_1. \tag{2.55}$$

Los puntos $p \in \pi(\sigma_2)^{-1}(0,0)$ *son de la forma* $p = (p_1, 0)$ *o* $p = (0, p_2)$. *Así si* $p = (1/4, 0)$ *entonces* $\psi_1(p) = 0$ *y de la misma manera, si* $p = (3,0)$ *entonces* $\psi_2(3,0) = 0$.

Lo anterior implica que si $\mu = 1$ *o* $\mu = 2$ *de cualquier forma no se cumple la hipótesis de la proposición 34. Esto nos lleva a utilizar la condición extra de no degeneración (definición 41). Podemos ver que como* $a_1^1 = 1, a_2^1 = 1, a_1^2 = 2$ *y* $a_2^2 = 3$, *estos valores se clasifican como* $a_\mu^1 = 1, a_M^1 = 1, a_\mu^2 = 3$ *y* $a_M^2 = 2$. *Así* $\mu = 2$, *de aquí que*

$$\psi_\mu(Y_1, Y_2) = \psi_2(Y_1, Y_2) = 3 - Y_1.$$

Ahora, como $p = (3,0)$ *entonces* $p_2 = 0$, *así por la condición extra de no degeneración se debe hallar* $\frac{\partial \psi_\mu}{\partial Y_1} = \frac{\partial \psi_2}{\partial Y_1} = 3 \neq 0$.

Además, como $f_{\sigma_2} = 1 - Y_1$, *en efecto se cumple la proposición 38, ya que* $f_{\sigma_2}(p) = f_{\sigma_2}(3,0) = 1 - 3 = -2 \neq 0$. *Por lo tanto*

$$\theta_{\sigma_2} = \frac{m(a^2)}{a_M^2} - 1 = \frac{11}{2} - 1 = \frac{9}{2}.$$

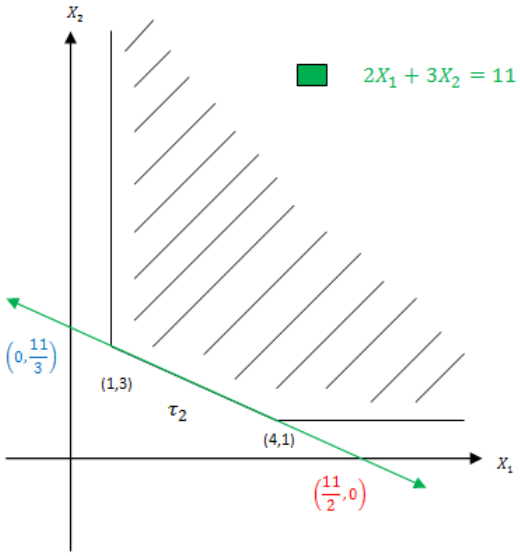

FIGURA 2.12. El punto $\left(\frac{11}{2},0\right)$ es el intersecto más grande del hiperplano $2X_1 + 3X_2 = 11$ que pasa por la cara compacta τ_2.

Ahora si $\sigma = \sigma_3 = \langle (2,3),(1,2) \rangle$, *de la misma manera como se hizo antes, calculamos*

$$\begin{aligned} f_{X_1} \circ \pi(\sigma_3) &= (X_2^3 - 4X_1^3X_2) \circ \pi(\sigma_3) \\ &= Y_1^9Y_2^6 - 4Y_1^9Y_2^5 \\ &= Y_1^9Y_2^5(Y_2 - 4). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\psi_1(Y_1, Y_2) = Y_2 - 4$, *y además*

$$\begin{aligned} f_{X_2} \circ \pi(\sigma_3) &= (3X_1X_2^2 - X_1^4) \circ \pi(\sigma_3) \\ &= 3Y_1^8Y_2^5 - Y_1^8Y_2^6 \\ &= Y_1^8Y_2^5(3 - Y_2), \end{aligned}$$

donde $\psi_2(Y_1, Y_2) = 3 - Y_2$.

De manera similar al caso de σ_2, *se tiene que para* ψ_1 *y* ψ_2 *existen puntos* $p = (0,4) \in \pi(\sigma_3)^{-1}(0,0)$ *y* $q = (3,0) \in \pi(\sigma_3)^{-1}(0,0)$ *tales que* $\psi_1(p) = 0$ *y* $\psi_2(q) = 0$ *y así nuevamente nos debemos apoyar en la condición extra de no degeneración, por lo tanto como* $a_\mu^1 = 2, a_M^1 = 3, a_\mu^2 = 1$ *y* $a_M^2 = 2$, *así* $\mu = 1$ *y*

$M = 2$, además que $m(a^1) = 11$.

Cabe notar que en este caso el punto es de la forma $p = (p_1, p_2) = (0, 4)$. Así $p_1 = 0$, por la definición 41 se debe hallar $\frac{\partial \psi_\mu}{\partial Y_2} = \frac{\partial \psi_1}{\partial Y_2} = 1 \neq 0$. Por lo tanto, se tiene que $\theta_{\sigma_3} = \frac{11}{3} - 1 = \frac{8}{3}$. Y finalmente, si $\sigma = \sigma_4 = \langle (1, 2), (0, 1) \rangle$ tenemos que

$$\psi_1(Y_1, Y_2) = Y_1 Y_2^2 - 4 \tag{2.56}$$

$$\psi_2(Y_1, Y_2) = 3Y_1 Y_2^2 - 1. \tag{2.57}$$

Para este cono σ_4 se tiene que los puntos $p \in \pi(\sigma_4)^{-1}(0, 0)$ son de la forma $p = (p_1, 0)$ y como se tiene que $\mu = 2$ entonces $\psi_1(p_1, 0) = -4 \neq 0$. Por lo tanto se cumplen las hipótesis de la proposición 34. Por lo anterior se halla θ_{σ_4} de la forma

$$\text{máx}\left(\frac{m(a^1)}{a_2^1}, \frac{m(a^2)}{a_2^2}\right) = \text{máx}\left(\frac{6}{2}, \frac{1}{1}\right) = 3. \tag{2.58}$$

Así según el teorema 4, para este caso tenemos que

$$v_f = \left[\max_\sigma \theta_\sigma\right] + 1 = \left[\text{máx}\left(\frac{9}{2}, \frac{8}{3}, 3\right) + 1\right] = \left[\frac{9}{2} + 1\right] = \left[\frac{11}{2}\right] = 5. \tag{2.59}$$

Una de las ventajas del método empleado anteriormente es que para el polinomio $p(X_1, X_2) = X_1 X_2^3 - X_1^4 X_2 + X_1^5 X_2^6$ que no es cuasihomogéneo, se puede ver que su poliedro de Newton coincide con el de la figura 2.12 y esto implica que la cota dada en la ecuación 2.59 también funciona para este polinomio.

Estudiaremos ahora un ejemplo respecto al Caso B.

Ejemplo 32. *Sea $g(X_1, X_2) = X_2^2 - X_1^3$. En este caso también se tiene que este polinomio es cuasihomogéneo, ya que para todo $X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$, si $t > 0$, se tiene que*

$$g(t^2 X_1, t^3 X_2) = (t^3 X_2)^2 - (t^2 X_1)^3 = t^6 (X_2^2 - X_1^3).$$

De esto se tiene que su grado es $d = 6$ y su peso es $w = (w_1, w_2) = (2, 3)$ donde por el resultado de la subsección se tiene que el exponente de Lojasiewicz $\theta(g)$ está acotado por

$$\theta(g) \leq 1 - \frac{w_*}{d} = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

Ahora, su soporte es $sop(g) = \{(0, 2), (3, 0)\}$. Sabemos por el ejemplo 15 que su poliedro de Newton es

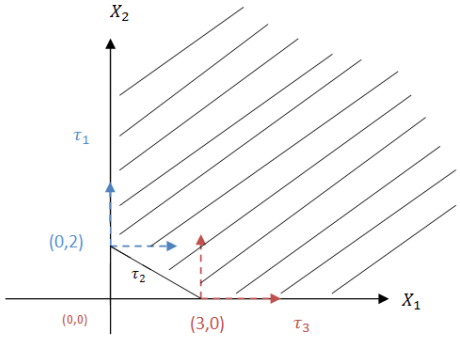

FIGURA 2.13. Poliedro de Newton del polinomio $g(X_1, X_2) = X_2^2 - X_1^3$.

y también su dual descompuesto en conos simples es

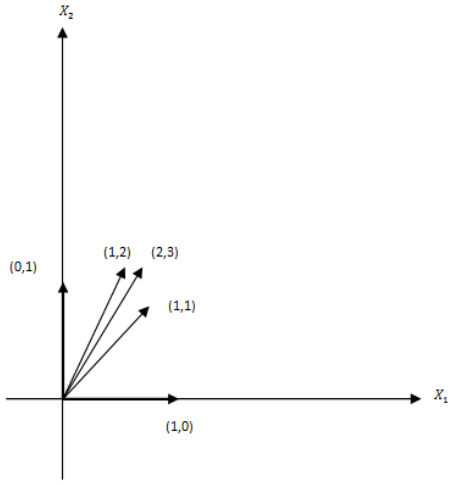

FIGURA 2.14. Dual simple del poliedro de Newton de $g(X_1, X_2) = X_2^2 - X_1^3$.

Definimos los conos

$$\begin{aligned}\sigma_1 &:= \langle (1,0), (1,1) \rangle \\ \sigma_2 &:= \langle (1,1), (2,3) \rangle \\ \sigma_3 &:= \langle (2,3), (1,2) \rangle \\ \sigma_4 &:= \langle (1,2), (0,1) \rangle .\end{aligned}$$

Según el análisis mostrado en el caso B, los conos σ que difieren del análisis del caso A, son aquellos σ tales que $I_\sigma = (p_1, 0)$ o $I_\sigma = (0, p_2)$, donde a^1 no está en la dirección de $(1,0)$ ni a^2 no está en la dirección de $(0,1)$ y además $\sigma_{\{1\}} \cup \sigma_{\{2\}} \neq \emptyset$.

Por tanto los conos σ a estudiar en este caso de la lista anterior son σ_2 y σ_3, ya que

$$I_{\sigma_2} = \{x \in \Gamma(g) \mid X_1 + X_2 = 2, \;\; 2X_1 + 3X_2 = 6\} = (0,2),$$

y

$$I_{\sigma_3} = \{x \in \Gamma(g) \mid 2X_1 + 3X_2 = 6,\ \ X_1 + 2X_2 = 3\} = (3, 0).$$

Dado que

$$(\sigma_2)_1 = \{x \in \Gamma(g) \mid X_1 + X_2 = 2,\ \ 2X_1 + 3X_2 > 6\}$$
$$(\sigma_2)_2 = \{x \in \Gamma(g) \mid 2X_1 + 3X_2 = 6,\ \ X_1 + X_2 > 2\}$$

entonces, $(\sigma_2)_1 \cup (\sigma_2)_2 \neq \emptyset$.

De manera similar si $\sigma = \sigma_3$*, como*

$$(\sigma_3)_1 = \{x \in \Gamma(g) \mid 2X_1 + 3X_2 = 6,\ \ X_1 + 2X_2 > 3\}$$
$$(\sigma_3)_2 = \{x \in \Gamma(g) \mid X_1 + 2X_2 = 3,\ \ 2X_1 + 3X_2 > 6\}$$

se tiene también que $(\sigma_3)_1 \cup (\sigma_3)_2 \neq \emptyset$.

Por lo tanto, tomamos $g(X_1, X_2) = X_2^2 - X_1^3$ *y hallamos*

$$g_{X_1}(X_1, X_2) = -3X_1^2$$

$$g_{X_2}(X_1, X_2) = 2X_2.$$

Además, si $\sigma = \sigma_2$ *entonces calculamos* $m(a^1) = 2$, $m(a^2) = 6$, $M(a^1) = 3$ *y* $M(a^2) = 6$*, como* $I_{\sigma_2} = (0, 2)$*, entonces por las ecuaciones 2.32 y 2.33 se tiene que*

$$g_{X_1} \circ \pi(\sigma_2) = -3Y_1^2 Y_2^4$$
$$g_{X_2} \circ \pi(\sigma_2) = 2Y_1 Y_2^3.$$

Se puede ver de las ecuaciones anteriores que $\psi_1 = 1 = \psi_2$*, a partir de esto se cumplen las hipótesis de la proposición 34. Por lo tanto teniendo en cuenta que en este caso* $\mu = 1$ *entonces*

$$\theta_{\sigma_2}(0, 0) = \max_{1,2}\left(\frac{m(a^1)}{a_1^1}, \frac{m(a^2)}{a_1^2}\right) = \max_{1,2}\left(\frac{2}{1}, \frac{6}{2}\right) = 3. \tag{2.60}$$

Y de manera análoga. si $\sigma = \sigma_3$ *entonces como* $m(a^1) = 6$ *y* $m(a^2) = 3$*, se tiene que* $\mu = 1$*, así*

$$\theta_{\sigma_3}(0, 0) = \max_{1,2}\left(\frac{m(a^1)}{a_1^1}, \frac{m(a^2)}{a_1^2}\right) = \max_{1,2}\left(\frac{6}{2}, \frac{3}{1}\right) = 3. \tag{2.61}$$

De esto, entonces según el teorema 4, se tiene que

$$v_f = \left[\max_{\sigma \in \{\sigma_2, \sigma_3\}} \theta_\sigma\right] + 1 = 3 + 1 = 4. \tag{2.62}$$

En efecto el valor $v_f = 3 + 1 = 4$ *es uno más que el corte más grande de la recta de soporte* $X_2 = -\frac{2}{3}x + 2$ *que pasa por la cara compacta* τ_2 *con los ejes coordenados.*

Nota: El polinomio $q(X_1, X_2) = X_2^2 - X_1^3 + 2X_2^5$ no es cuasihomogéneo, pero tiene el mismo poliedro de Newton de la figura 2.13, por lo tanto el valor de v_f de la ecuación 2.62 también se puede usar para $g(X_1, X_2)$.

Trabajo futuro

En este documento hemos estudiado la desigualdad de Lojasiewicz desde los puntos de vista de la geometría algebraica real y desde la construcción del poliedro de Newton en dos dimensiones. Se debe tener en cuenta para estudios posteriores que existen referencias como en [10], donde se estudian otros tipos de desigualdades de Lojasiewicz. En particular estudios en dimensiones superiores y otras generalidades allí presentes.

Bibliografía

[1] M. Barbagallo, *Tesis de licenciatura: Roadmaps en conjuntos Semialgebraicos.* Universidad de Buenos Aires, (2010).

[2] E. Bierstone, P.D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets.* Publications mathématiques de l'I.H.É.S.,tome 67(1988), p.5-42.

[3] J. Bochnak , J. J. Risler, *Sur les exposants de Lojasiewicz*, Comment. Math. Helv., 50(1975), 493-507.

[4] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy. *Real algebraic geometry.* Ergenisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 36. Springer-Verlag, Berlín, (1998).

[5] T. Colding, W.P. Minicozzi II *Lojasiewicz inequalities and applications* (English summary) Surveys in differential geometry 2014. Regularity and evolution of nonlinear equations, Surv. Differ. Geom., 19, Int. Press, Somerville, MA, (2015), 63-82.

[6] D. D'Acunto, K. Kurdyka, *Explicit bounds for the Lojasiewicz exponent in the gradient inequality for polynomials*, Ann. Polon. Math. 87 (2005) 51-61.

[7] S.T. Dinh, T.S. Pha. m, *Lojasiewicz inequalities with explicit exponents for smallest singular value functions*, Journal of Complexity 41 (2017) 58-71.

[8] G. Ewald, *Combinatorial convexity and algebraic geometry.* Springer-Verlag New York, Inc, (1996).

[9] B. Grünbaum, *Convex Polytopes.* Berlin. Springer-Verlag, University of Washington, Seattle, (2003).

[10] T. Fukui, *Lojasiewicz type inequalities and Newton diagrams.* Proc. Amer. Math. Soc. 112, no. 4 (1991), 1169-1183.

[11] A. Haraux, *Some applications of the Lojasiewicz gradient inequality*, Commun. Pure Appl. Anal. 11 (6) (2012) 2417-2427.

[12] A. Haraux, *Positively homogeneous functions and the Lojasiewicz gradient inequality*, Ann. Polon. Math., 87 (2005), 165-174.

[13] A. Haraux, T. Son Pham, *On the gradient of quasi-homogenous polynomials*, Universitatis Iagellonicae acta mathematica, fasciculus XLIX, (2011).

[14] K. Hoornaert, *Newton Polyhedra and Igusa's Local Zeta Function. PhD Thesis,* Katholieke Universiteit Leuven, (2002).

[15] L. Hörmander, *On the division of distributions by polynomials.* Arkiv för Mat 3(1958), 555-568.

[16] J. Kollar, *An effective Lojasiewicz inequality for real polynomials*. Period. Math. Hungar., Vol. 38, N. 3 (1999), 213-221.

[17] T. Krasinski, G. Oleksik, and A. Ploski, *The Lojasiewicz exponent of an isolated weighted homogeneous surface singularity*, Proc. Amer. Math. Soc. 137, no. 10, (2009), 3387-3397.

[18] S. Kuhlmann, M. Infusino, C. Goel. *Vorlesung Reelle algebraische Geometrie I"* WS 2009/2010. (REAL ALGEBRAIC GEOMETRY LECTURE NOTES) Disponible en la página personal de la Profesora Salma Kuhlmann: `http://www.math.uni-konstanz.de/~kuhlmann/index.html`

[19] K. Kurdyka, S. Spodzieja, *Separation of real algebraic sets and the Lojasiewicz exponent*, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (9)(2014) 3089-3102.

[20] S. M. LaValle *Planning algorithms.* Cambridge University Press, 2006.

[21] Lejeune Jalabert, M. Teissier, B.: *Seminar on "Integral closure of ideals and equisingularity theory "*, Fourier Institute, Faculte des Sciences 38402 St. Martin d'Aeres.

[22] E. León-Cardenal W. A. Zuñiga-Galindo *Local Zeta Functions for Non-degenerate Laurent Polynomials Over p-adic Fields* J. Math. Sci. Univ. Tokyo 20 (2013), 569-595.

[23] B. Lichtin, *Estimation of Lojasiewicz exponents and Newton polygons.* Invent. Math. 64, no. 3 (1981), 417-429.

[24] S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*. Preprint 112 pp.(IHES,1965).

[25] J. Nie, M. Schweighofer, *On the complexity of Putinar's Positivstellensatz*, J. Complexity 23 (1) (2007) 135-150.

[26] M. Oka, *Lojasiewicz exponents of non-degenerate holomorohic and mixed functions*, `https://arxiv.org/abs/1704.06379v2`.

[27] M. Oka, *Non-degenerate complete intersection singularity*. Actualités Mathématiques. Hermann, Paris, (1997).

[28] T.S. Pham, *An explicit bound for the Lojasiewicz exponent of real polynomials*, Kodai Math. J. 35 (2) (2012) 311-319.

[29] T. Rodak, A. Rózycki, S. Spodzieja, *Multiplicity and Semicontinuity of the Lojasiewicz Exponent* Faculty of Mathematics and Computer Science University of Lódz S. Banacha 22, 90-238 Lódz, Poland.

[30] M. Schweighofer, *On the complexity of Schmüdgen's Positivstellensatz*, J. Complexity 20 (4) (2004) 529-543.

[31] S. Spodzieja, *The Lojasiewicz inequality at iffinity for the gradient of a polynomial*, Ann. Polon. Math., 87 (2005), 247-263.

[32] B. Teissier, *Varities Polaires I-Invariants Polaires des Singulariets d'hypersurfaces*. Inventiones math, 40, 267-292 (1977).

[33] B. Teissier , *Some Resonances of Lojasiewicz Inequalities Wiad.* Mat. 48, no. 2, (2012), 271-284.

[34] R. Walker, *Algebraic curves*. Berlín. Springer-Verlag (1978).

[35] Lojasiewicz inequality. *Encyclopedia of Mathematics.* `http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Lojasiewicz_inequality&oldid=36300]`