



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Uso del método de los gráficos de unión para la solución de problemas de elastodinámica: Una propuesta Metodológica

Diego Edgardo Fuentes Herrera

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería, Departamento de Mecánica y Mecatrónica
Bogotá, Colombia
2015

Uso del método de los gráficos de unión para la solución de problemas de elastodinámica: Una propuesta Metodológica

Diego Edgardo Fuentes Herrera

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ingeniería Mecánica

Director:

Diego Alexander Garzón Alvarado Ph.D.

Línea de Investigación:

Métodos Numéricos

Grupo de Investigación:

Grupo de Modelado y Métodos Numéricos en Ingeniería - GNUM

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería, Departamento de Mecánica y Mecatrónica

Bogotá, Colombia

2015

Resumen

En este trabajo se presentan una serie de modelos de elastodinamica usando gráficos de unión (Bond Graphs). Se comienza con una revisión de los modelos ya documentados en otros trabajos. Con base en ellos, se explora la metodología con el fin de encontrar representaciones de otros sistemas elastodinámicos no explorados como la membrana elástica y las mallas masa-resorte, ampliamente usadas en computación gráfica. Los modelos obtenidos, en un principio son estudiados a partir de los Gráficos de Unión escalares clásicos, sin embargo, dado que las aproximaciones de sistemas de parámetros distribuidos requieren un número considerable de grados de libertad con estructuras repetitivas, también se estudian los modelos por Gráficos de Unión Vectoriales como herramienta de modelado abreviada para sistemas de parámetros concentrados con gran número de grados de libertad.

Palabras clave: Gráficos de Unión, Gráficos de Unión Vectoriales, Elastodinámica, Viga de Timoshenko, Cuerda Elástica, Membrana, Malla masa-resorte.

Abstract

This work presents a series of models using graphical representation methodology Bond Graphs. It begins with a review of the models already documented in other studies. Based on them, the methodology is explored in order to find representations of other elastodynamics systems unexplored, as the elastic membrane and spring-mass meshes, widely used in computer graphics. The models obtained are initially studied with the classical scalar Bond Graphs, however, since the approximations of distributed parameter systems require a considerable number of degrees of freedom with repetitive structures, this are represented by Vector Bond Graphs, which are suitable for situations like this.

Keywords: Bond Graphs, Vector Bond Graphs, Elastodynamics, MultiBond Graphs, Timoshenko Beam, Elastic String, Elastic Membrane, mass-spring mesh.

Contenido

	Pág.
Resumen	V
Abstract	V
Contenido.....	VII
Lista de figuras.....	VIII
Lista de tablas	IX
Lista de Símbolos y abreviaturas	X
Introducción.....	13
1. Gráficos de unión.....	17
2. Modelos Elastodinámicos de Sistemas unidimensionales mediante Gráficos de Unión. .	23
3. Modelos bidimensionales de parámetros concentrados usando Gráficos de unión.	35
4. Implementación y Comprobación	47
5. Conclusiones y Recomendaciones	51
6. Bibliografía	53

Lista de figuras

	Pág.
Figura 1-1: Nomenclatura común de unión en un gráfico de unión.....	17
Figura 2-1: Sistema masa-resorte no forzado: Representación gráfica. Gráfico de unión.	23
Figura 2-2: Sistema masa-resorte forzado: Sistema masa-resorte forzado, Gráfico de unión del sistema	23
Figura 2-3: Sistema masa-resorte-amortiguador forzado: Sistema masa-resorte-amortiguador forzado. Gráfico de unión del sistema	24
Figura 2-4: Respuestas del sistema de un grado de libertad a una señal de entrada del tipo Escalon Unitario.....	25
Figura 2-5: Respuestas del sistema de un grado de libertad a una señal de entrada del tipo Impulso Unitario.....	26
Figura 2-6: Representación gráfica de un elemento representativo de un sistema de varios grados de libertad.....	26
Figura 2-7: Representación mediante Gráficos de unión del elemento representativo de la Figura 2-6	27
Figura 2-8: Respuesta del sistema de cinco grados de libertad a una entrada tipo Impulso Unitario, aplicada al último bloque.	28
Figura 2-9: Respuesta del sistema de cinco grados de libertad a entradas aplicadas al último bloque del tipo: Impulso unitario. Escalon unitario.....	28
Figura 2-10: Gráfico de unión de la cuerda vibratoria.	29
Figura 2-11: Tres primeros modos de vibración de una cuerda vibratoria.	30
Figura 2-12: Representación gráfica de una viga de Timoshenko discretizada.	31
Figura 2-13: Gráfico de unión de la viga de Timoshenko.	31
Figura 3-1: Sistema péndulo resorte	35
Figura 3-2: Gráfico de unión del sistema de la Figura 3-1	35
Figura 3-3: Trayectoria de la partícula de la Figura 3-1	36
Figura 3-4: Multibond Graph del Sistema péndulo resorte de la Figura 3-1	37
Figura 3-5: Sistema de péndulo doble.....	39
Figura 3-6: Gráfico de unión del sistema de péndulo doble de la Figura 3-5	39
Figura 3-7: Gráfico de Unión Vectorial del sistema de péndulo doble de la Figura 3-5	40
Figura 3-8: Detalle de una partícula conectada a varios resortes.....	41
Figura 3-9: Esquema malla-resorte bidimensional.....	42
Figura 3-10: Detalle de una partícula de frontera restringida.....	44
Figura 3-11: Multibond Graph de un sistema general Masa-Resorte.....	45
Figura 4-1: Viga empotrada, que soporta la acción de su propio peso.....	47
Figura 4-2: Desplazamiento del extremo libre durante 0.01 [s] por la acción de su propio peso. Se muestran varias líneas correspondientes a los resultados obtenidos mediante varios métodos de solución.....	48

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 1-1: Variables de potencia y energéticas en cada dominio.....	18
Tabla 1-2: Puertos y sus ecuaciones constitutivas.....	20
Tabla 2-1: Orden de convergencia para el primer modo de vibración de una cuerda.....	30
Tabla 4-1: Parámetros usados para la solución del problema de oscilación de una viga bajo la acción de su propio peso.....	48

Lista de Símbolos y abreviaturas

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
0	Junta de conservación de esfuerzo (Escalar).		
$\underline{0}$	Junta de conservación de esfuerzo (Vectorial).		
1	Junta de conservación de flujo (Escalar).		
$\underline{1}$	Junta de conservación de flujo (Vectorial).		
b	Constante de amortiguación genérica.		
GY	Gyrator (Escalar)		
MGY	Gyrator modulado(Escalar)		
TF	Transformador (Escalar)		
MTF	Transformador modulado(Escalar)		
MTF	Transformador modulado(Vectorial)		
C	Puerto Capacitancia (Escalar).		
C	Multipuerto Capacitancia (Vectorial).		
e	Esfuerzo Generalizado.		
f	Flujo Generalizado.		
E	Módulo de Young	Pa	
I	Puerto Inercia (Escalar).		
I	Multipuerto Inercia (Vectorial).		
k	Constante de resorte.		
k	Vector de constantes de resorte.		
p	Momentum Generalizado		
q	Desplazamiento Generalizado		
R	Puerto Resistencia o disipación (Escalar).		
R	Multipuerto Resistencia o disipación (Vectorial).		
S_f	Fuente de flujo (Escalar).		
\underline{S}_f	Fuente de flujo (Vectorial).		
S_e	Fuente de esfuerzo (Escalar).		
\underline{S}_e	Fuente de esfuerzo (Vectorial).		

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
θ	Ángulo	rads	

Subíndices

Subíndice	Término
x	Coordenada equis x o con respecto a dicho eje.

Subíndice	Término
y	Coordenada equis y o con respecto a dicho eje.
$i (j)$	Relativo a la particular $i (j)$
$p (q)$	Relativo al resorte $p (q)$

Superíndices

Superíndice	Término
N	Exponente, potencia.
Comilla (')	Relativo a las coordenadas locales.

Abreviaturas

Abreviatura	Término
MSS	Sistema Masas – Resortes (Mass-Spring Systems)
EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria.
EDP	Ecuación Diferencial Parcial.
EAD	Ecuación Algebraica Diferencial

Introducción

La teoría de la elasticidad trata con el problema de describir el comportamiento de sólidos elásticos sobre los cuales se aplican cargas que producen deformaciones (1). Dicha descripción, en el caso de la elastostática, se hace bajo la suposición de que las fuerzas se aplican de una manera tan lenta, que es posible presumir que el proceso se realiza en equilibrio. Sin embargo, en casos donde se necesiten considerar fuerzas aplicadas que varíen en el tiempo o donde los efectos inerciales sean importantes, esta suposición pierde validez. A partir de ahí, el problema se convierte en materia de estudio de la elastodinámica, en la cual, los diferentes estados del sistema, a través del tiempo se reducen a un conjunto de ecuaciones de movimiento, que en el caso general, son Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), que describen la elasticidad macroscópicamente, asumiendo al sólido en cuestión como un medio continuo cuyas propiedades se encuentran distribuidas a través de toda su longitud, área o volumen, según sea el caso. Se habla pues, en este caso, de un modelo de parámetros distribuidos, y en caso contrario, es decir, cuando en un modelo se asume que las propiedades del cuerpo estudiado se encuentran concentradas en un solo punto (e.g. masa puntual), se le conoce como modelo de parámetros concentrados, los cuales, en general, están relacionados con la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) (2).

Ahora bien, existe otro concepto relacionado con fenómenos en los cuales el tiempo es un aspecto a tener en cuenta. Los sistemas dinámicos son sistemas físicos, biológicos, químicos, sociales, etc. En los cuales las variables de salida varían con el transcurrir del tiempo. El estudio de estos sistemas se encuentra muy extendido en áreas de la Ingeniería: Mecánica, Electrónica, Aeroespacial, Automotriz entre otras; en las que, mayoritariamente su aplicación se limita al desarrollo de modelos de parámetros concentrados, como en el caso de la dinámica de cuerpos, que en términos de sistemas dinámicos se ha restringido a los sistemas multicuerpo (2) compuestos de cuerpos rígidos, en los cuales existe un número finito de grados de libertad, mientras que la dinámica de cuerpos deformables no ha recibido mucha atención, dada la dificultad que representa su modelado, en razón del infinito número de grados de libertad. Situación que trae como consecuencia, modelos matemáticos en términos de ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Así pues, a lo largo de este trabajo se hará una compilación de algunos modelos elastodinámicos desarrollados a través de la técnica gráfica multidominio de modelado de sistemas dinámicos: Gráficos de Unión (Bond Graphs).

Los Gráficos de Unión, también llamados Grafos de Unión (2), son una metodología gráfica de representación de sistemas dinámicos desde los cuales es posible obtener ecuaciones de estado que se resuelven para las variables de estado involucradas, con el fin de describir el comportamiento de un sistema a través del tiempo. Son comparables con otras técnicas gráficas como los diagramas de bloques o los diagramas de flujo, ampliamente utilizados en la representación de sistemas dinámicos, cuya principal característica es la manipulación de señales. En contraste, los gráficos de unión tienen la característica de que su estructura se basa en la representación de flujos de energía entre puertos (vértices), a través de uniones (aristas). Esta ventaja sumada a su expresividad visual (3), hace que sean una opción viable para el modelado gráfico de sistemas dinámicos que requieren una consideración rigurosa de las leyes de conservación, además permiten expresar de manera más expedita, la coexistencia e interacción de entidades cuyo comportamiento se enmarca en diferentes dominios

energéticos (mecánicos, eléctricos, térmicos, hidráulicos, químicos, etc), debido al uso del concepto universal de energía (4).

Gracias a estos atributos, se ha visto cómo los gráficos de unión han incursionado de manera exitosa en diversas disciplinas. Por ejemplo, en Ingeniería Mecatrónica se ha realizado una gran producción investigativa, especialmente en el diseño de controladores en el campo físico dadas las propiedades de representación multidominio que ofrecen los gráficos de unión, esenciales en el estudio y diseño de este tipo de dispositivos, para cualquier tipo de sistema dinámico (5), (6). En el caso de la Ingeniería Mecánica se han llegado a encontrar aplicaciones en áreas como: la Dinámica de Sistemas Multicuerpo (7), Ingeniería de Procesos y Manufactura (8), Mecánica de Fluidos (9), Transferencia de Calor (ya sean *Pseudo Bond Graphs* (10) o *True Bond Graphs* (11)), entre otras. En menor medida pero de igual importancia ha sido la incursión de la metodología en otras especialidades como la Ingeniería Química, donde se han logrado modelar reacciones químicas, así como procesos en plantas químicas (12). Inclusive en disciplinas no ingenieriles ha habido casos de aplicación, por ejemplo, el comportamiento de sistemas económicos en el tiempo (13).

Las investigaciones en nuestro país (Colombia) usando Gráficos de Unión como herramienta de modelado de sistemas dinámicos se han llevado a cabo en diferentes campos, tales como la biomecánica, específicamente en el modelado de la marcha humana (14) y un trabajo de revisión realizado por el autor acerca de la aplicación de los gráficos de unión en investigaciones biomédicas (15). Además, en el campo de los sistemas electromecánicos se destaca el modelado del comportamiento vibracional axial de un taladro durante su operación (16) y finalmente en el ámbito de la dinámica automotriz, Muñoz propone un modelo de vibraciones, para la predicción de fallas en motores de combustión interna a través gráficos de unión (17).

Ahora, en cuanto al desarrollo de modelos de sistemas continuos, las propuestas de adaptación de los Gráficos de Unión para su modelado empezaron con el trabajo de Karnopp (18), en el que plantea un análisis modal a través de la metodología gráfica, para la representación aproximada de sistemas vibratoriales continuos mediante un modelo discretizado. Empezando con un modelo de parámetros concentrados de un sistema de parámetros distribuidos en dinámica de fluidos hasta modelos en parámetros distribuidos generalizados (9). Ahora, con respecto a la elastodinámica, se han planteado modelos continuos usando como punto de referencia el método de los elementos finitos (19) (20) (21) (2). Específicamente, Bel Cacho, en (2) propone una generalización continua a la metodología tomando como punto de partida los funcionales energéticos que se desprenden de las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana de las ecuaciones que rigen el fenómeno, para posteriormente plantear modelos usando Gráficos de Unión Vectoriales para representar las discretizaciones de las ecuaciones diferenciales parciales del modelo continuo.

Además de la presente introducción, esta tesis consta de otros tres capítulos. El Capítulo 2 comienza con una breve descripción de los conceptos fundamentales del modelado de sistemas dinámicos a través de Gráficos de Unión. Posteriormente se describe detalladamente el proceso de obtención de las ecuaciones de estado a partir de un gráfico de unión, con base en los dos sistemas mecánicos más básicos: el sistema masa resorte y el sistema masa-resorte-amortiguador. Luego, estos modelos son usados como base para la obtención del modelo general de sistemas masa-resorte-amortiguador conectados en serie que a su vez constituyen un modelo discretizado del sistema continuo: una barra que vibra axialmente. Siguiendo con los sistemas unidimensionales, el gráfico de unión del sistema masa-resorte encadenado se usa como base para la obtención del gráfico de otro modelo físico de gran importancia: la cuerda vibratoria. Para terminar con los modelos elásticos unidimensionales, se expone el modelo de viga vibratoria más completo: La viga de Timoshenko.

El Capítulo 2 continúa con la exposición de modelos de sistemas elastodinámicos continuos cuyos parámetros no se encuentran distribuidos sobre una línea como en el Capítulo 1 sino que ahora lo hacen sobre un plano. Se hace una detallada exposición de la obtención del Gráfico de Unión correspondiente a la discretización de un cuerpo deformable elástico sometido a la acción de fuerzas

en el plano, a través una malla de masas interconectadas con resortes cuya rigidez se encuentra relacionada con las propiedades mecánicas (Módulo de Elasticidad y Relación de Poisson) del material que compone el cuerpo deformable a modelar.

1. Gráficos de unión.

Los gráficos de unión (Bond Graphs) fueron creados por el Profesor Harry Paynter en 1959 y la metodología fue presentada en 1962 (22). Estos son grafos dirigidos cuyos vértices son llamados 'puertos' (ports) los cuales representan subsistemas, componentes o elementos básicos de un sistema. Las aristas del grafo se conocen como 'uniones' (bonds) y representan el intercambio de energía entre los puertos a través de variables conjugadas de potencia, denominadas genéricamente esfuerzo e y flujo f (effort & flow), cuyo producto, en cualquier dominio energético representa potencia, por ejemplo: fuerza y velocidad, en un sistema mecánico de traslación, voltaje y corriente en el dominio eléctrico, y otras combinaciones mostradas en la **Tabla 1-1**. Adicionalmente, se definen las variables energéticas (23), designadas como momento y desplazamiento generalizados, que son respectivamente las integrales temporales del esfuerzo y el flujo. Estas se listan en la parte derecha de la **Tabla 1-1**.

1.1 Elementos

Uniones.

Las uniones o «bonds» son los elementos a través de los cuales fluye la energía de un puerto a otro (Figura 1-1). Cada unión tiene asociadas las variables conjugadas esfuerzo y flujo. Ahora, con el fin de establecer una dirección de referencia de flujo de energía, las uniones son medias flechas que apuntan en la dirección positiva del producto. Adicionalmente, una línea perpendicular a la unión es usada para representar la dirección del esfuerzo, de manera que hacia el lado opuesto al que esta puesta la línea, irá el flujo. Esta asignación de direcciones conocida como causalidad, requiere tener en cuenta el proceso que se lleva a cabo en cada puerto, por lo que en libros especializados (7), (4), se indica el procedimiento sistemático de asignación de causalidad en un gráfico de unión, en el que se hayan completado tanto las conexiones entre puertos como la asignación de direcciones de flujos de energía.

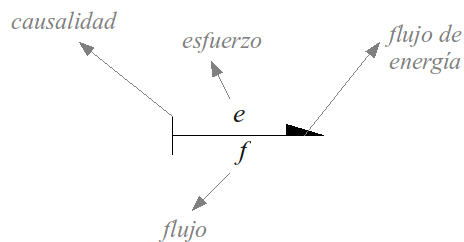


Figura 1-1: Nomenclatura común de unión en un gráfico de unión.

Dominio energético	Esfuerzo e	Flujo f	Momentum generalizado	Desplazamiento generalizado
Mecánico traslacional	Fuerza	Velocidad	Momentum lineal	Desplazamiento
	$F [N]$	$v [m/s]$	$p [Ns]$	$x [m]$
Mecánico rotacional	Momento de fuerza	Velocidad angular	Momentum angular	Angulo
	$M [Nm]$	$\omega [rad/s]$	$p [Nms]$	$\theta [rad]$
Eléctrico	Voltaje	Corriente	Flujo	Carga
	$u [V]$	$I [A]$	$\psi [Vs]$	$q [As]$
Hidráulico	Presión absoluta	Caudal	Momentum de presión	Volumen
	$p [Pa]$	$Q [m^3/s]$	$p_p [N/m^2s]$	$V [m^3]$
Térmico	Temperatura	Flujo de entropía	–	Entropía
	$T [K]$	$\dot{S} [J/Ks]$	–	$S [J/K]$
Químico	Potencial químico	Flujo molar	–	Masa molar
	$\mu [J/mol]$	$\dot{N} [mol/s]$	–	$N [mol]$

Tabla 1-1: Variables de potencia y energéticas en cada dominio

Puertos.

Existen diferentes tipos de puertos dependiendo del manejo que se haga en ellos de la energía y de las variables energéticas (disipación, almacenamiento, transformación, etc). Específicamente puede darse una clasificación:

- Almacenamiento tipo *I*: También llamados, elementos inductivos o inerciales, son aquellos en los que la energía se almacena debido a la integración (acumulación) del esfuerzo e , resultando en la variable de estado p (momentum generalizado). Una masa con velocidad, un inductor eléctrico son ejemplos de la interpretación física de este tipo de puertos.
- Almacenamiento tipo *C*: Este tipo de puertos representa la integración del flujo f con el fin de acumular la variable estado q (desplazamiento generalizado), por ejemplo, los resortes almacenan energía gracias a la elongación o compresión de este, un capacitor lo hace debido a una diferencia de voltaje, un tanque por diferencia de alturas, etc.
- Elementos resistivos: Representados como R , son aquellos puertos donde la energía se disipa, ya sea por efectos de fricción en el caso mecánico, o por resistencia al flujo de corriente o fluido en los sistemas eléctricos e hidráulicos respectivamente.
- Fuentes y sumideros: Son elementos que entregan o extraen energía del sistema, ya sea en forma de esfuerzo (S_e) o de flujo (S_f). Mediante ellos se modelan las condiciones de frontera de los modelos, pues se consideran entidades externas al sistema.

Juntas.

Las juntas son elementos de distribución instantánea de energía en los que no se realiza ninguna transformación, almacenamiento o disipación de la misma.

- Juntas 0: Es un multipuerto (puerto con varias uniones asociadas) en el que todos los esfuerzos de entrada y salida son iguales, mientras que la suma de los flujos debe ser igual a cero. Este elemento es análogo a un nodo en una red eléctrica, en el que se cumple la ley de corrientes de Kirchhoff.
- Juntas 1: Es la contra-parte de la junta 0 pues en éste la constante es el flujo y la suma de esfuerzos es cero, equivalente a una malla eléctrica regida por la ley de voltajes de Kirchhoff.

Transformación reversible de energía.

Otros dos tipos de puertos conservativos son aquellos en los que el valor de potencia es igual en la entrada y en la salida (4).

- Transformadores (TF): Implican la amplificación o reducción de cada una de las variables conjugadas de potencia, ya sea en uno o más dominios energéticos. La ecuación constitutiva de los transformadores relaciona el esfuerzo de entrada con el de salida mediante un módulo de transformación, mientras que los flujos se relacionan mediante su inversa. Algunos dispositivos que se modelan mediante este puerto incluyen reductores de velocidad, sistemas biela manivela, transformadores eléctricos, cilindros hidráulicos o neumáticos, etc.
- Gyrotors (GY): En este caso se relaciona el esfuerzo de entrada con el flujo de salida y el esfuerzo de salida con el flujo de entrada mediante el mismo módulo, por lo cual esta abstracción es usada generalmente para describir procesos de transducción (transformación de una forma de energía en otra), como los que suceden en motores eléctricos, bombas centrifugas, altavoces, etc (23).

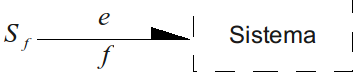
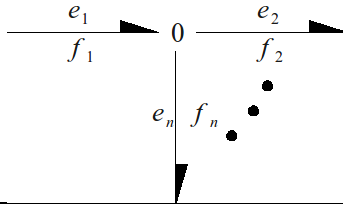
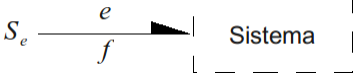
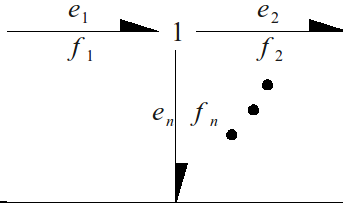
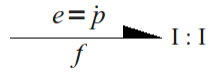
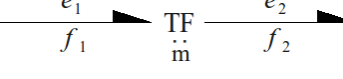
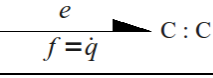
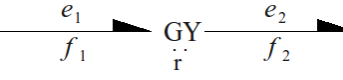
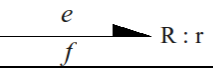
Puerto	Ecuación constitutiva	Puerto	Ecuación constitutiva
Fuente de flujo		Junta 0 (esfuerzo constante)	$e_1 = e_2 = \dots = e_n$
			$f_1 = f_2 + \dots + f_n$
Fuente de esfuerzo		Junta 1 (flujo constante)	$f_1 = f_2 = \dots = f_n$
			$e_1 = e_2 + \dots + e_n$
Almacenamiento I		Transformador	$e_1 = m \times e_2$
	$p = I \times f$		$f_2 = m \times f_1$
Almacenamiento C		Gyrator	$e_1 = r \times f_2$
	$q = C \times e$		$r f_1 = e_2$
Disipación R			
	$e = R \times f$		

Tabla 1-2: Puertos y sus ecuaciones constitutivas

1.2 Modelado mediante gráficos de unión

Para un modelador experimentado de sistemas dinámicos, los Gráficos de Unión, ser una abstracción directa del sistema físico estudiado, sin embargo una representación gráfica (esquemática) más explícita e intuitiva es, en general, necesaria con el fin de que los puertos y flujos de energía entre los componentes o subsistemas sean más evidentes. Algunas de estas representaciones incluyen, redes de circuitos eléctricos, hidráulicos o neumáticos, diagramas de cuerpo libre, diagramas de bloques, diagramas de flujo, etc. Karnopp et. al. (7), describen detalladamente, algoritmos de derivación de gráficos de unión para sistemas mecánicos (traslacionales y rotacionales), eléctricos, hidráulicos y térmicos, mientras que Borutzky (23), resume estos procedimientos para sistemas mecánicos así como para los pertenecientes a otros dominios energéticos (eléctricos, hidráulicos y térmicos), debido a que, para los primeros la variable de referencia es el flujo (velocidad) y para el resto es el esfuerzo (voltaje, presión, temperatura). Acá se mencionan los pasos más generales:

- Identificar velocidades (esfuerzos para sistemas no mecánicos) y asignarles una junta 1 (0).
- Identificar elementos R, C e I y conectarlos a las respectivas juntas.

- Asignar flujos de energía de referencia, asumiendo todos los elementos de almacenamiento descargados, es decir, estos flujos se dirigen desde las fuentes hacia los elementos R, I, C y los sumideros de energía.
- Eliminar nodos de referencia.
- Simplificar el gráfico.
- Asignar causalidad.

El último paso es muy importante, ya que la asignación correcta de la causalidad repercute en el modelo matemático final, donde lo deseable es que todos los puertos se encuentren en causalidad integral (7). De otra manera se deben reconsiderar las suposiciones hechas a partir del modelo físico, hasta que el gráfico sea adecuado para continuar con la deducción de la representación de estado del sistema.

Finalmente la obtención de una simulación a partir de la representación de estado se basa en la solución de las ecuaciones de estado que se obtengan del modelo gráfico. Existen métodos de obtención, mediante algoritmos -adecuados para ser programados en un ordenador (7), (4)-, de tales ecuaciones que suelen expresarse como sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, cuyas variables son las variables de estado que, en el caso de los gráficos de unión, suelen ser las variables energéticas (desplazamiento y momentum, generalizados).

- Escribir ecuaciones constitutivas para las fuentes independientes, es decir, aquellas que solo dependen del tiempo.
- Ahora se obtienen las relaciones para las fuentes controladas las cuales dependen de la señal moduladora de entrada.
- Expresar las variables de salida de los elementos R en términos de las fuentes y los elementos de almacenaje de energía mediante propagación hacia atrás.
- Finalmente, se obtienen las relaciones entre las derivadas de las salidas de los puertos de almacenaje (C e I) como función de las salidas de fuentes, elementos resistivos y de otros elementos de almacenamiento.

Así, al solucionar estos sistemas de ecuaciones, analítica o numéricamente, se obtiene el comportamiento en el tiempo de cada una de las variables de estado involucradas en el modelo, las cuales, a su vez expresan el comportamiento transitorio del sistema físico con unas condiciones iniciales dadas y con condiciones de frontera propiamente impuestas.

2. Modelos Elastodinámicos de Sistemas unidimensionales mediante Gráficos de Unión.

2.1 Sistema de un grado de libertad

El sistema elástico más básico consiste de una masa puntual unida a un resorte, el cual, por el otro extremo se encuentra fijo (velocidad igual a cero), tal como se muestra en la **Figura 2-1**. Igualmente, se puede ver el gráfico de unión, también sencillo, donde el puerto C representa al resorte y el puerto I la inercia del bloque.



Figura 2-1: Sistema masa-resorte no forzado: Representación gráfica. Gráfico de unión.

Ahora, cuando se hace necesario aplicar una carga externa al sistema (condición de frontera), en gráficos de unión, esto se traduce en fuentes de esfuerzo o de flujo. En el caso de sistemas mecánicos una fuente esfuerzo es una fuerza externa (en este ejemplo, aplicada al bloque) y una de flujo consiste en una condición de velocidad. Lo anterior se representa en la **Figura 2-2**.



Figura 2-2: Sistema masa-resorte forzado: Sistema masa-resorte forzado, Gráfico de unión del sistema

Finalmente, los efectos disipativos, en este caso, del tipo fricción fluida que se representa mediante un amortiguador en la **Figura 2-3**, en un gráfico de unión están involucrados en el puerto R, que ahora se incluye en el gráfico del sistema que se está analizando.

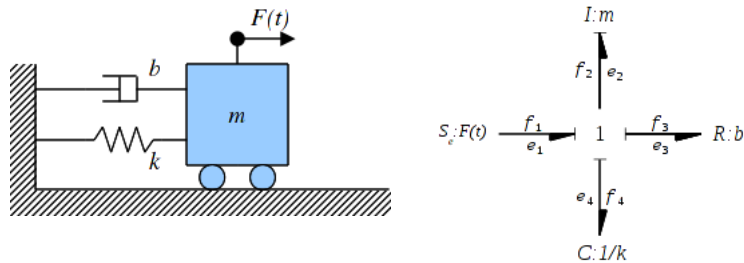


Figura 2-3: Sistema masa-resorte-amortiguador forzado: Sistema masa-resorte-amortiguador forzado. Gráfico de unión del sistema

Después de la representación gráfica, el siguiente paso en el análisis es obtener ecuaciones de estado, Para ello lo primero es, identificar los puertos que almacenan energía, en el sistema que se está considerando hay dos: el puerto I de la masa del bloque y el puerto C que representa el resorte, por lo cual se obtendrán dos ecuaciones de estado para dos variables de estado, siendo estas, según el enfoque de (4), el flujo en I (f_2) y el esfuerzo en C (e_4) o en términos del dominio mecánico, velocidad y fuerza, entonces:

$$y_1 = f_2 \quad (2.1)$$

$$y_2 = e_4 \quad (2.2)$$

Las ecuaciones constitutivas de los puertos I y C respectivamente:

$$\dot{f}_2 = \frac{1}{I} e_2 \quad (2.3)$$

$$\dot{e}_4 = \frac{1}{C} f_4 \quad (2.4)$$

O en términos de variables de estado:

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{I} e_2 \quad (2.5)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{C} f_4 \quad (2.6)$$

Como el objetivo es construir un sistema de ecuaciones que se encuentre en términos de las variables de estado, entonces se debe seguir el camino de la causalidad hasta que no haya variables intermedias. De esta manera, como en el puerto 1, todos los flujos son iguales:

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \quad (2.7)$$

Entonces la ecuación (2.6) queda:

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{C} f_2 \quad (2.8)$$

Al reemplazar lo definido en (2.1) y sabiendo que el valor de C es el inverso de la constante del resorte $C = 1/k$, se obtiene la primera ecuación de estado:

$$\dot{y}_2 = k y_1 \quad (2.9)$$

Ahora, la otra ecuación constitutiva del puerto 1:

$$e_1 = e_2 + e_3 + e_4 \quad (2.10)$$

sirve para reemplazar e_2 en (2.5):

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{I} (e_1 - e_3 - e_4) \quad (2.11)$$

Donde e_1 es el valor de entrada impuesto por la fuente de esfuerzo, es decir, la fuerza aplicada $F(t)$. El esfuerzo e_3 se obtiene a partir de la ecuación constitutiva del puerto R:

$$e_3 = R f_3 \quad (2.12)$$

Donde R se reemplaza por la constante de amortiguación b . Finalmente e_4 se obtiene de la definición 1 y la ecuación (2.11) se convierte en:

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{I} (F(t) - b f_3 - y_2) \quad (2.13)$$

Sin embargo, aún queda la variable intermedia f_3 , la cual se elimina retomando la condición de igualdad de flujos en el puerto 1 y la definición (2.1), en el sentido de que $f_3 = f_2 = y_1$. Y por último, se reemplaza el valor de I por la masa del bloque: $I = m$, en consecuencia la segunda ecuación de estado queda así:

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{m}(F(t) - by_1 - y_2) \quad (2.14)$$

En resumen las ecuaciones de estado para este sistema serán:

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{m}(F(t) - by_1 - y_2) \quad (2.15)$$

$$\dot{y}_2 = ky_1 \quad (2.16)$$

O en forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & -\frac{1}{m} \\ k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} F(t) \quad (2.17)$$

Así, el paso siguiente consiste en resolver dicho sistema, a partir de condiciones iniciales para las variables de estado en el tiempo t_0 que para una entrada de posición tipo escalon unitario se verán como:

$$y_1(0) = 0 \quad (2.18)$$

$$y_2(0) = 0 \quad (2.19)$$

Siendo la fuerza aplicada:

$$F(t) = k \times x_0 \quad (2.20)$$

En la cual $x_0 = 1$ es el desplazamiento inicial unitario del bloque con respecto a la posición de referencia. Finalmente, ya sea de manera analítica o numérica, se soluciona el sistema no sin antes asignar los parámetros:

$$m = 2 \quad k = 0.5 \quad b = 1 \quad (2.21)$$

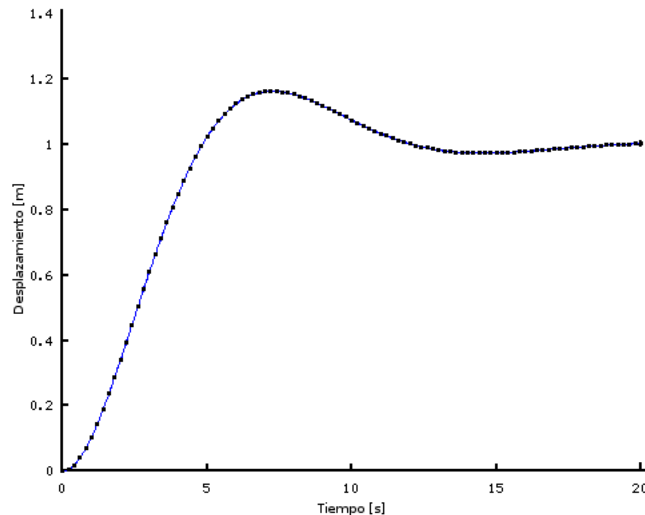


Figura 2-4: Respuestas del sistema de un grado de libertad a una señal de entrada del tipo Escalon Unitario.

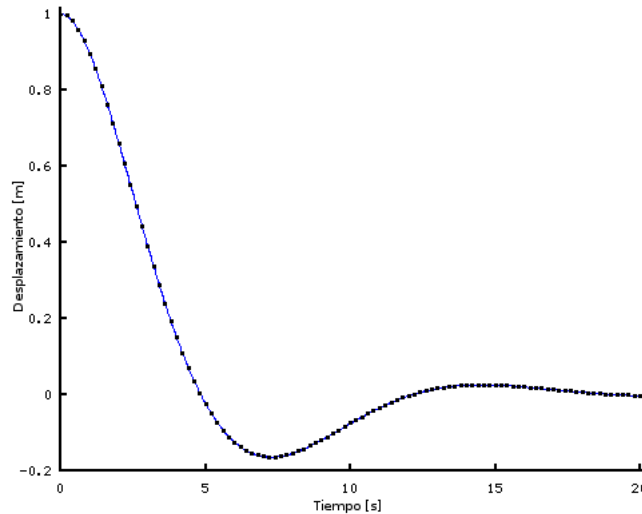


Figura 2-5: Respuestas del sistema de un grado de libertad a una señal de entrada del tipo Impulso Unitario.

La respuesta del sistema, tal como se puede observar en la **Figura 2-4** (línea) es del tipo subamortiguada y se estabiliza después de, aproximadamente, veinte segundos. Los puntos representan el resultado del problema usando la solución exacta. Igualmente se puede realizar la simulación usando un impulso unitario como entrada:

$$y_1(0) = 0 \quad (2.22)$$

$$y_2(0) = k \times x_0 \quad (2.23)$$

Con una fuerza externa nula, con lo cual se logra el resultado esperado mostrado en la **Figura 2-5**.

2.2 Sistema de varios grados de libertad.

Ahora supongase que un modelo requiere tener en cuenta varios cuerpos o que el sistema real es un medio continuo que va ser descompuesto en segmentos, para los cuales se va a asumir que sus propiedades son puntuales. En el caso específico de sistemas mecánicos, lo anterior se refiere a tomar un cuerpo con una geometría determinada y modelarlo como un grupo de partículas, cada una con una masa determinada, interconectadas mediante enlaces flexibles que recreen globalmente la elasticidad real del cuerpo. En este sentido, una extensión natural a los sistemas de un grado de libertad tratados arriba, consistiría en conectar varias partículas a lo largo del eje x . Igualmente, al aumentar en la misma medida los resortes y amortiguadores y suponer una fuerza aplicada en cada bloque, se obtiene un sistema físico como el de la **Figura 2-6**. Del mismo modo, el gráfico de unión resultante es una extensión sistemática del que se tenía arriba en la **Figura 2-3**, dado que, en este caso, las velocidades de entrada para los puertos C y R provienen de la diferencia entre las velocidades de las inercias adyacentes, la cual se realiza en el puerto 0.

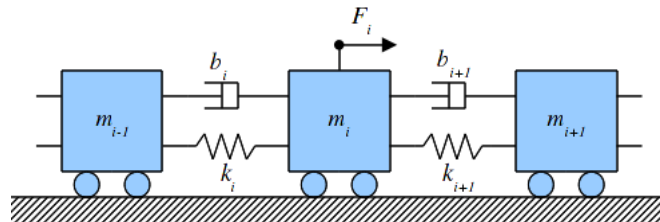


Figura 2-6: Representación gráfica de un elemento representativo de un sistema de varios grados de libertad.

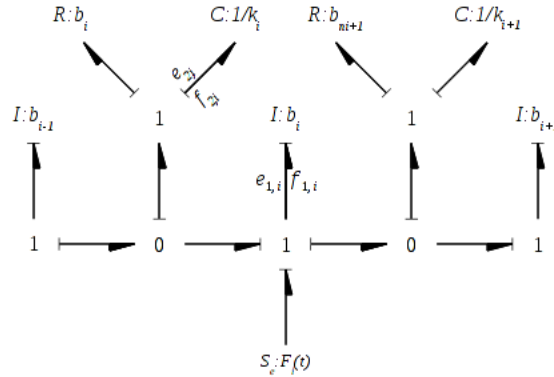


Figura 2-7: Representación mediante Gráficos de unión del elemento representativo de la **Figura 2-6**.

La obtención de las ecuaciones de estado es un proceso análogo al realizado para el sistema de un grado de libertad: se identifica la cantidad de puertos que almacenan energía y de esta manera se sabe cuántas ecuaciones hay que obtener. Sin embargo, el objetivo de este ejemplo es realizar un modelo general, que funcione para un problema con cualquier número de grados de libertad y al observar el diagrama físico y el gráfico de unión se hace evidente que la estructura masa-resorte-amortiguador se repite, de manera que se puede generar una ecuación de estado para cada puerto I y una por cada puerto C, y la estructura va a ser igual en cualquier lugar de la cadena. Entonces al tomar una sección arbitraria i , las variables de estado serán:

$$y_{1,i} = f_{1,i} \quad (2.24)$$

$$y_{2,i} = e_{2,i} \quad (2.25)$$

Las ecuaciones constitutivas de los puertos I y C son respectivamente:

$$\dot{f}_{1,i} = \frac{1}{I_i} e_{1,i} \quad (2.26)$$

$$\dot{e}_{2,i} = \frac{1}{C_i} f_{2,i} \quad (2.27)$$

Donde el índice i se refiere a la sección actual de la cadena, que incluye el bloque junto con el resorte y amortiguador a su izquierda. De este modo, al seguir un camino de manera similar al del primer ejemplo, se obtienen dos ecuaciones de estado por cada sección:

$$\dot{y}_{1,i} = \frac{1}{m} (b_i y_{1,i-1} - (b_i + b_{i+1}) y_{1,i} + b_{i+1} y_{1,i+1} + F_i(t)) \quad (2.28)$$

$$\dot{y}_{2,i} = k_i y_{1,i-1} - k_i y_{1,i} \quad (2.29)$$

Con lo cual, por ejemplo, si se ensambla un sistema de cinco grados de libertad (cinco segmentos) en el cual las posiciones de los bloques se midan desde su posición inicial, una gráfica de la respuesta a una entrada impulso para el último bloque se verá como la de la **Figura 2-8**, en el que se puede observar como, a causa de la amortiguación, todos los bloques vuelven a su posición inicial. Ahora, si en vez de una condición inicial de impulso, al último bloque se le aplica una entrada escalon unitario, el comportamiento será como el mostrado en la gráfica de la **Figura 2-9**.

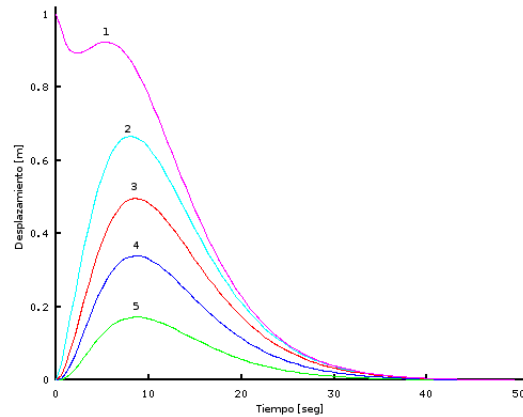


Figura 2-8: Respuesta del sistema de cinco grados de libertad a una entrada tipo Impulso Unitario, aplicada al último bloque.

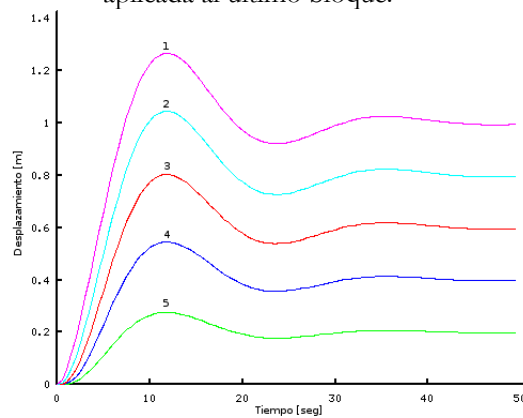


Figura 2-9: Respuesta del sistema de cinco grados de libertad a entradas aplicadas al último bloque del tipo: Impulso unitario. Escalón unitario.

Finalmente, con una asignación adecuada de propiedades, una cantidad considerable de segmentos, este modelo funcionaría muy bien para la simulación del problema de la barra vibratoria. No solo de barras prismáticas, sino, también de aquellas con secciones transversales variables e incluso, de diferentes materiales.

2.3 Cuerda

En el estudio de las vibraciones de sistemas continuos, el caso más sencillo es el de la cuerda elástica, que a través de ciertas suposiciones conlleva a la obtención de la conocida ecuación de onda unidimensional (2.30).

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.30)$$

Donde c es la velocidad de fase, la cual para el caso de las vibraciones libres de una cuerda se relaciona con la tensión T y la densidad lineal ρ mediante (2.31).

$$c^2 = \frac{T}{\rho} \quad (2.31)$$

Un modelo mediante gráficos de unión se obtiene reutilizando el obtenido para el problema de varios grados de libertad discutido arriba, partiendo del hecho de que se llega a la misma ecuación

(cuando no hay amortiguación), solo que con parámetros diferentes, ajustados al problema en concreto. En ese sentido, para la cuerda vibratoria los parámetros en los puertos I y C son los que se muestran en la **Figura 2-10**.

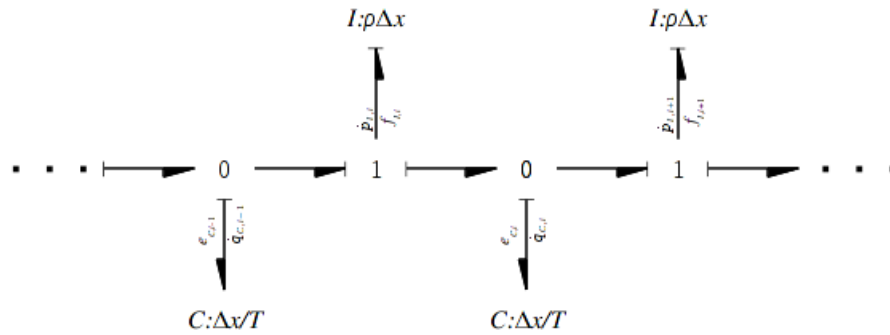


Figura 2-10: Gráfico de unión de la cuerda vibratoria.

La solución analítica de la ecuación de onda es (24):

$$w(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sin \alpha_m x (C_m \sin \omega_m t + D_m \cos \omega_m t) \quad (2.32)$$

Donde C_m y D_m son funciones que dependen de las condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento respectivamente.

Con el fin de conocer el desempeño de la solución aproximada se va a usar la medida de error de la métrica L_2 , la cual se define como:

$$e_{L_2} = \max_{11 < k < 1408} (w_t - w_k) \quad (2.33)$$

Siendo w_t la solución teórica y w_k la solución aproximada (numérica) De esta manera, el grado de convergencia p que se define mediante la ecuación (2.34).

$$p = \frac{\log(e_k e_{k+1})}{\log(h_k h_{k+1})} \quad (2.34)$$

Con e_k como el error para un número de nodos k y h_k el espaciamiento. En este caso la comparación se hizo con el problema de simular el primer modo de vibración de la cuerda, el cual se muestra la **Figura 2-11** (línea gruesa). El **Tabla 2-1**, muestra los valores del orden de convergencia obtenidos de las simulaciones, los cuales, son aproximadamente $p = 2$, para el primer modo de vibración.

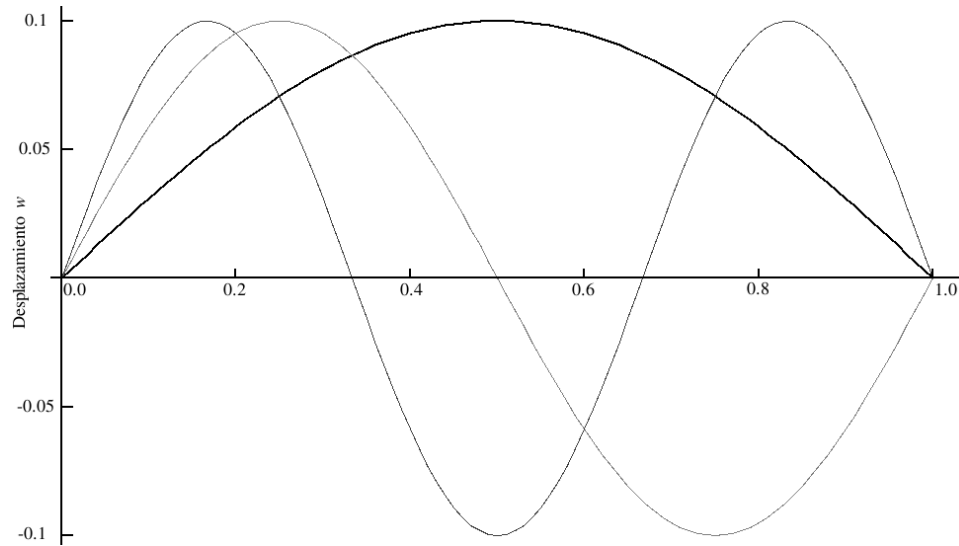


Figura 2-11: Tres primeros modos de vibración de una cuerda vibratoria.

N	11	22	44	88	176	352	704	1048
p	1.98	2.03	2.02	2.01	2	2	1.99	

Tabla 2-1: Orden de convergencia para el primer modo de vibración de una cuerda

2.4 Viga de Timoshenko

Continuando con los sistemas unidimensionales, existe un problema que siempre ha recibido especial atención: los modelos de vigas. Existen cuatro teorías principales: La viga de Euler-Bernoulli, La viga de Rayleigh, La viga cortante (shear) y la viga de Timoshenko. El primer modelo es el más sencillo, no se tienen en cuenta efectos cortantes ni de inercia rotacional mientras que el segundo sí tiene en cuenta estos últimos. La tercera, como su nombre lo indica, tiene en cuenta las fuerzas cortantes pero no los efectos rotacionales. Finalmente, el modelo de viga propuesto por Timoshenko, añade los efectos de la distorsión por corte y la inercia rotacional al modelo tradicional de Euler-Bernoulli (25).

El modelo matemático del modelo de viga de Timoshenko consiste de dos ecuaciones diferenciales parciales de cuarto orden acopladas:

$$kGA \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + p = \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + kGA \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \psi \right) = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.36)$$

En las que las variables ω y ψ representan el desplazamiento lateral (deflexión) de la viga y el ángulo de rotación debido al momento flector. La función $p(x,t)$ expresa la fuerza distribuida que actúa sobre la viga, ρ es la densidad del material; A e I , son el área y el segundo momento de área de la sección transversal de la viga. E y G , corresponden al módulo de elasticidad y al módulo de rigidez (también conocido como módulo de elasticidad transversal). Finalmente, el parámetro k , conocido como factor de corrección por esfuerzo cortante, según Cowper (26), depende únicamente del módulo de Poisson y de la forma de la sección transversal de la viga.

Ahora, es posible también expresar el sistema anterior usando las siguientes sustituciones (27):

$$V = -kGA \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \psi \right) \tag{2.37}$$

$$M = EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.38}$$

De manera que al reemplazar en (2.35) y en (2.36) se obtiene:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} dx + p = \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} dx \tag{2.39}$$

$$-V dx + \frac{\partial M}{\partial x} dx = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dx \tag{2.40}$$

Con base en el sistema de ecuaciones constituido por, Karnopp y compañía (7), sugieren un modelo de parametros concentrados discretizado tal como se puede ver en la **Figura 2-12** y cuyo gráfico de unión se muestra en la **Figura 2-13**.

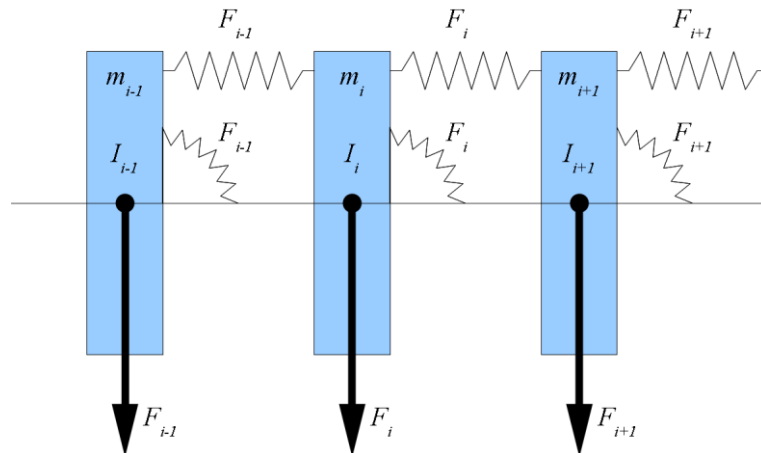


Figura 2-12: Representación gráfica de una viga de Timoshenko discretizada.

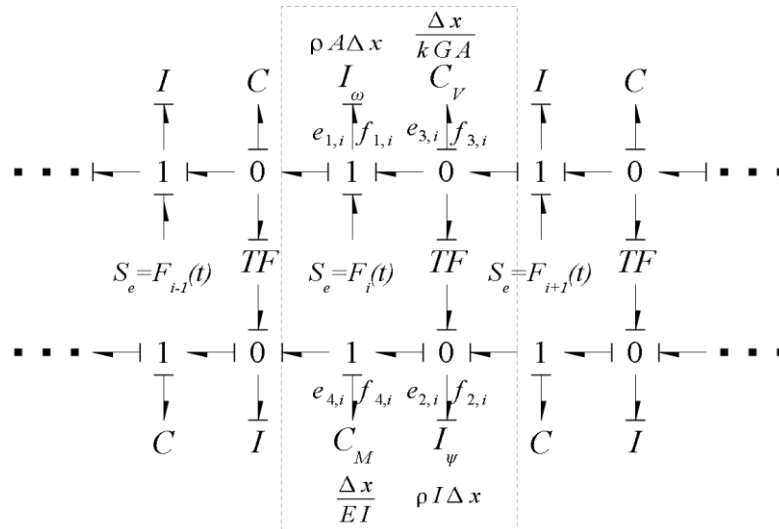


Figura 2-13: Gráfico de unión de la viga de Timoshenko.

Al igual que el modelo anterior, este está construido a partir de segmentos que se repiten, con lo cual también es conveniente programarlo para simulación. Cada segmento está compuesto por cuatro puertos que almacenan energía y que se refieren, cada uno, a una característica específica del modelo:

Los puertos I son para desplazamiento transversal y ángulo de inclinación, mientras que los puertos C estan relacionados con la fuerza cortante y con el momento flector en esa sección de la viga, en consecuencia hay cuatro variables de estado por cada elemento representativo del dominio:

$$y_{1,i} = f_{1,i} \quad (2.41)$$

$$y_{2,i} = f_{2,i} \quad (2.42)$$

$$y_{3,i} = e_{3,i} \quad (2.43)$$

$$y_{4,i} = e_{4,i} \quad (2.44)$$

Y cuatro ecuaciones de estado relacionadas con los puertos que almacenan energía:

$$\dot{f}_{1,i} = \frac{1}{I_\omega} e_{1,i} \quad (2.45)$$

$$\dot{f}_{2,i} = \frac{1}{I_\psi} e_{2,i} \quad (2.46)$$

$$\dot{e}_{3,i} = \frac{1}{C_V} f_{3,i} \quad (2.47)$$

$$\dot{e}_{4,i} = \frac{1}{C_M} f_{4,i} \quad (2.48)$$

Donde la primera ecuación tiene que ver con el desplazamiento vertical, la segunda con el ángulo, la tercera con la fuerza cortante y la última con el momento flector. Ahora, con el fin de que las ecuaciones de estado extraídas del gráfico de unión sean iguales a las que se presentan normalmente como modelo de viga de Timoshenko, los parametros de los puertos se definen así:

$$I_\omega = \rho A \Delta x \quad (2.49)$$

$$I_\psi = \rho I \Delta x \quad (2.50)$$

$$C_V = \frac{\Delta x}{kGA} \quad (2.51)$$

$$C_M = \frac{\Delta x}{EI} \quad (2.52)$$

Adicionalmente, en el gráfico de unión se ve que la parte superior se encuentra conectada con la inferior con un transformador, cuyo modulo es el inverso de la longitud del segmento de viga representativo:

$$m = \frac{1}{\Delta x} \quad (2.53)$$

De esta manera, las ecuaciones de estado quedan como:

$$\dot{y}_{1,i} = \frac{1}{\rho A \Delta x} (F_i + y_{3,i} - y_{3,i-1}) \quad (2.54)$$

$$\dot{y}_{2,i} = \frac{1}{\rho I \Delta x} (y_{4,i+1} + \Delta x y_{3,i} - y_{4,i}) \quad (2.55)$$

$$\dot{y}_{3,i} = \frac{kGA}{\Delta x} (y_{1,i+1} - y_{1,i} - \Delta x y_{2,i}) \quad (2.56)$$

$$\dot{y}_{4,i} = \frac{EI}{\Delta x} (y_{2,i} - y_{2,i-1}) \quad (2.57)$$

Cabe hacer notar que estas ecuaciones corresponden a una discretización espacial directa del sistema compuesto por (2.37), (2.38), (2.39) y (2.40), en el que se use un esquema de aproximación por

diferencias finitas hacia adelante, de tal suerte que mediante el modelo por Gráficos de Unión, se ha llegado a un sistema de ecuaciones de estado en el que las variables de estado corresponden a la tasa de cambio del desplazamiento ($d\omega/dt$), del ángulo de rotación ($d\psi/dt$), en el tiempo, al momentum lineal y angular relacionados con la fuerza cortante y el momento flector, respectivamente.

Ahora, con el objetivo de solucionar cualquier problema de oscilaciones en vigas usando las ecuaciones de estado obtenidas, es necesario establecer las condiciones iniciales y de frontera. En cuanto a estas últimas, si por ejemplo, se tiene una viga empotrada en el extremo derecho y libre en el otro, en la que, la única fuerza externa sea su peso, el problema se condiciona, para el empotramiento, restringiendo el desplazamiento y la rotación:

$$\dot{y}_{1,1} = 0 \quad (2.58)$$

$$\dot{y}_{2,1} = 0 \quad (2.59)$$

Mientras que en el extremo libre se establece que no hay fuerza cortante ni momento flector:

$$\dot{y}_{3,n} = 0 \quad (2.60)$$

$$\dot{y}_{4,n} = 0 \quad (2.61)$$

Donde n indica que la restricción se aplica al último segmento de la viga. Ahora, debido a que no se están teniendo en cuenta efectos disipativos, se espera que la respuesta, en cuanto a la deflexión del extremo libre de esta viga sea oscilatorio, tal como se comprobará en la sección 4.2.

3. Modelos bidimensionales de parámetros concentrados usando Gráficos de unión.

3.1 Una partícula en el plano: Péndulo resorte

De manera análoga a como sucedía en el caso unidimensional, el ejemplo más sencillo consiste en una partícula unida a un resorte, el cual se encuentra fijo (velocidad nula) por el otro extremo. Sin embargo, en este caso, la partícula tiene la libertad de moverse sobre el plano, es decir, su posición se define por dos coordenadas (dos grados de libertad). En la **Figura 3-1** se ilustra el problema y en la **Figura 3-2** se muestra el gráfico de unión obtenido, el cual está basado en el que presenta Borutzky en (23). En él se puede ver que existe un puerto I para la coordenada x y otro para la coordenada y , ya que cada uno representa una variable de estado. Igualmente, si se tratara de una partícula en el espacio, existirían tres puertos I, entonces, se hablaría de tres grados de libertad. Así mismo, en un sistema de múltiples partículas, por cada una, existirán dos o tres puertos, dependiendo del número de dimensiones que contengan al sistema.

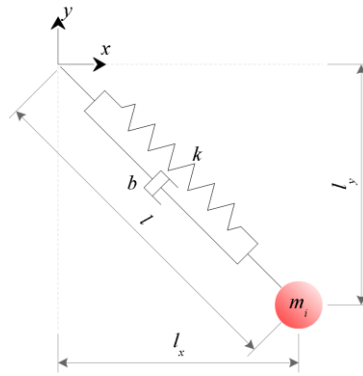


Figura 3-1: Sistema péndulo resorte

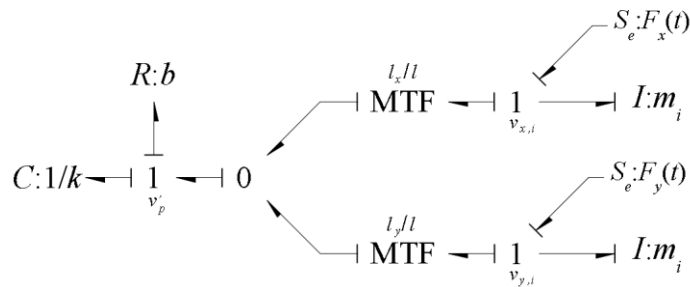


Figura 3-2: Gráfico de unión del sistema de la Figura 3-1.

En este ejemplo además de los dos puertos I, el puerto C aporta una tercera ecuación de estado, con lo cual se obtienen tres variables de estado, a saber:

$$y_1 = f_x \quad (3.1)$$

$$y_2 = f_y \quad (3.2)$$

$$y_3 = e_C \quad (3.3)$$

Igualmente las ecuaciones de estado comienzan con las relaciones constitutivas de tales puertos:

$$\dot{f}_x = \frac{1}{I} e_x \quad (3.4)$$

$$\dot{f}_y = \frac{1}{I} e_y \quad (3.5)$$

$$\dot{e}_C = \frac{1}{C} f_C \quad (3.6)$$

Las cuales en términos de variables de estado se convierten en:

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{m} \left[F_x - \frac{l_x}{l} \left(\frac{bl_x}{l} y_1 + \frac{bl_y}{l} y_2 + y_3 \right) \right] \quad (3.7)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{m} \left[F_y - \frac{l_y}{l} \left(\frac{bl_x}{l} y_1 + \frac{bl_y}{l} y_2 + y_3 \right) \right] \quad (3.8)$$

$$\dot{y}_3 = \frac{k}{l} [l_x y_1 + l_y y_2] \quad (3.9)$$

Donde $l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$ es la longitud actual del resorte, l_x y l_y son las componentes en equis y en ye de dicha longitud, las cuales en este caso coinciden con y_1 y y_2 debido a que el resorte en todo momento se encuentra unido al origen del sistema de coordenadas.

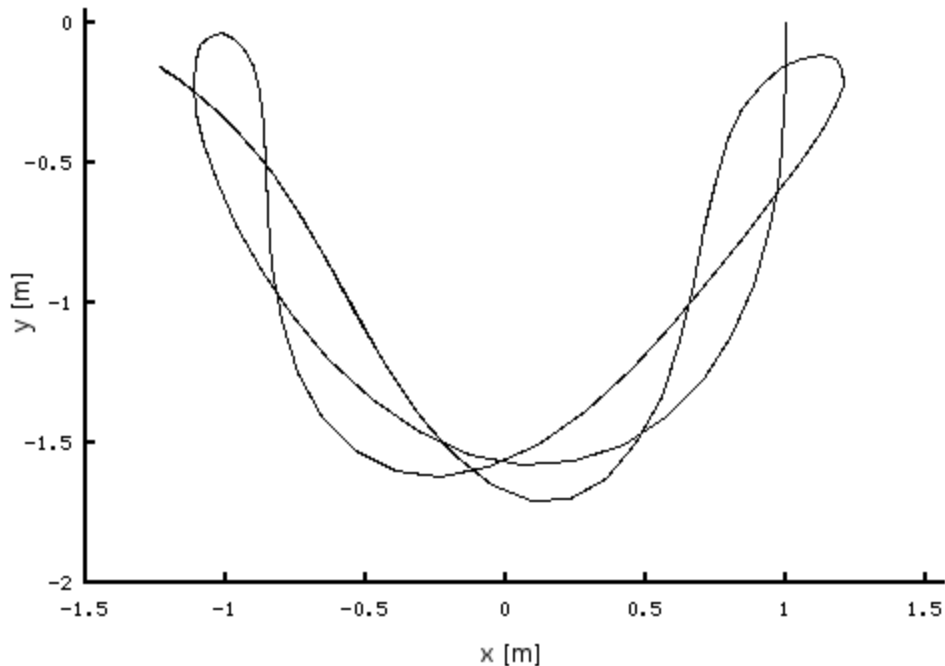


Figura 3-3: Trayectoria de la partícula de la **Figura 3-1**

Finalmente la resolución del sistema de ecuaciones entrega como resultados: la velocidad en equis, la velocidad en ye y la fuerza en el resorte, pero con el fin de conocer la trayectoria que recorre la partícula desde alguna posición inicial, se añaden dos ecuaciones adicionales:

$$\dot{y}_4 = y_1 \quad (3.10)$$

$$\dot{y}_5 = y_2 \quad (3.11)$$

Con lo que se obtendrán las coordenadas de la partícula en cada instante y así trazar una trayectoria como la que se muestra en la **Figura 3-3**, la cual se obtuvo para una partícula con $m = 1$, $k = 50$ y con una posición inicial $(1,0)$, en la cual el resorte se encuentra en su longitud natural.

Ahora, la **Figura 3-4**, muestra el Gráfico de Unión Vectorial en el que se ha unificado en un multipuerto **I**, la inercia de la partícula, mediante la relación constitutiva de la ecuación 3.12, mientras que para el Transformador Modulador (**MTF**) su relación es la ecuación 3.13 y su relación recíproca se calcula usando la transpuesta de la matriz de módulos \mathbf{A}^T como se muestra en la ecuación 3.14:

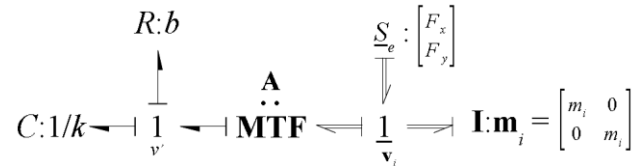


Figura 3-4: Multibond Graph del Sistema péndulo resorte de la **Figura 3-1**.

$$\begin{bmatrix} F_{x,i}^R \\ F_{y,i}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & m_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x,i} \\ v_{y,i} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$[v^I] = \begin{bmatrix} l_x/l & l_y/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x,i} \\ v_{y,i} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} F_x^k \\ F_y^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x/l \\ l_y/l \end{bmatrix} [F^k] \quad (3.14)$$

3.2 Modelo discreto bidimensional de varios grados de libertad.

Teniendo en cuenta que en el caso analizado en la sección anterior, el movimiento de la partícula se describe con respecto a un sistema de referencia fijo, la ecuación de estado del resorte está únicamente en términos de la posición de la partícula unida a un extremo, sin embargo, con el propósito de lograr una descripción más general del movimiento, en esta sección se plantea el sistema ilustrado en la **Figura 3-5** en el que se puede observar la manera como un resorte se une en sus extremos a masas que pueden moverse en el plano. Lo anterior conlleva a la obtención de una ecuación de estado para el resorte, en términos de las posiciones de sus puntos extremos, es decir que la elongación o contracción del resorte p (de constante k_p) depende de los desplazamientos de las dos masas unidas a sus extremos, a saber, m_i y m_j .

El Gráfico de Unión del sistema se muestra en la **Figura 3-6**. En este es importante notar la estructura que representa la conexión de las masas m_i y m_j a través del resorte p (rectángulo 1), pues esta misma estructura se va a repetir en configuraciones más generales de sistemas de n partículas interconectadas en diferentes topologías con el fin de aproximar el comportamiento elástico de cuerpos bidimensionales.

Así pues, se desea obtener un conjunto de ecuaciones generales, tal como se logro con los dos sistemas unidimensionales de varios grados de libertad. Sin embargo, en esta oportunidad las ecuaciones no aplicaran a secciones específicas del sistema, es decir, a grupos de elementos que se

repite, en vez de ello, las ecuaciones modelo estarán relacionadas con una partícula genérica y con un resorte genérico. Dicha partícula aportará dos ecuaciones de estado: una para el movimiento en equis y otra para el mismo en ye. Entonces, para cualquier partícula i las variables de estado son:

$$y_{1,i} = f_{x,i} \quad (3.15)$$

$$y_{2,i} = f_{y,i} \quad (3.16)$$

Y como siempre, las ecuaciones de estado comienzan con las ecuaciones constitutivas de los dos puertos I:

$$\dot{f}_{x,i} = \frac{1}{I} e_{x,i} \quad (3.17)$$

$$\dot{f}_{y,i} = \frac{1}{I} e_{y,i} \quad (3.18)$$

Los esfuerzos de entrada en estos puertos son los de salida del puerto 1 adyacente, es decir, es la suma de los otros esfuerzos que entran a dicho puerto 1. En el caso del péndulo simple, estos esfuerzos entrantes eran el de la fuente de esfuerzo y el del transformador modulado, pero en ese caso la partícula estaba unida a un solo resorte. Si ahora se observa la **Figura 3-6**, los puertos 1 de la partícula 2, que tiene dos resortes unidos a ella, tienen un esfuerzo de entrada adicional proveniente del transformador relacionado con el nuevo resorte. Así, en general, para una partícula con cualquier cantidad de resortes unidos a ella, o de vecinos v , las relaciones se convierten en:

$$\dot{f}_{x,i} = \frac{1}{I} \left(F_{x,i} - \sum_{p=0}^v e_{x,p} \right) \quad (3.19)$$

$$\dot{f}_{y,i} = \frac{1}{I} \left(F_{y,i} - \sum_{p=0}^v e_{y,p} \right) \quad (3.20)$$

Donde $e_{x,p}$ y $e_{y,p}$ son los esfuerzos que llegan a los puertos 1 en equis y ye respectivamente, por parte del resorte p . Finalmente, después de seguir la causalidad por cada uno de los resortes y al reemplazar las variables, se llega a las dos ecuaciones de estado para la partícula i :

$$\dot{y}_{1,i} = \frac{1}{m} \left(F_{x,i} - \sum_{p=0}^v m_{x,ip} y_p \right) \quad (3.21)$$

$$\dot{y}_{2,i} = \frac{1}{m} \left(F_{y,i} - \sum_{p=0}^v m_{y,ip} y_p \right) \quad (3.22)$$

En las cuales $m_{x,ip}$ y $m_{y,ip}$ son los módulos de los transformadores en equis y en ye, que tienen que ver con el resorte p que está conectado a la partícula i . Y y_p es la variable de estado relacionada con el resorte p , la cual se define como:

$$y_p = e_{C,p} \quad (3.23)$$

Y cuya ecuación de estado parte de la relación del puerto C, con constante $C_p = k_p$ (pues como se va a ver más adelante, cada resorte tiene su propia constante):

$$\dot{e}_{C,p} = \frac{1}{C_p} f_{C,p} \quad (3.24)$$

Entonces, como se puede ver en la **Figura 3-6** la causalidad lleva a que la ecuación incluya las variables de estado de las dos partículas i y j que están en los extremos del resorte y con ello obtener la ecuación de estado para un resorte cualquiera p :

$$\dot{y}_p = \frac{1}{k_p l_p} [l_x (y_{1,i} - y_{1,j}) + l_y (y_{2,i} - y_{2,j})] \quad (3.25)$$

Donde l_p es la longitud actual del resorte, calculada como:

$$l_p = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (3.26)$$

Siendo (x_i, y_i) las coordenadas de la partícula i y (x_j, y_j) las coordenadas de la partícula j .

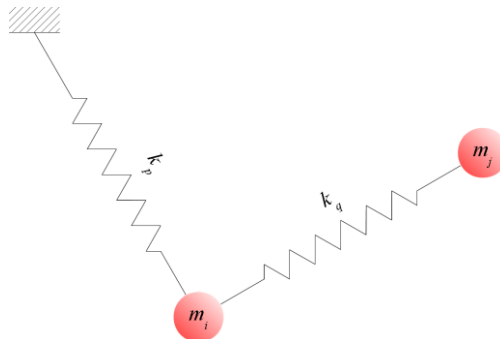


Figura 3-5: Sistema de péndulo doble.

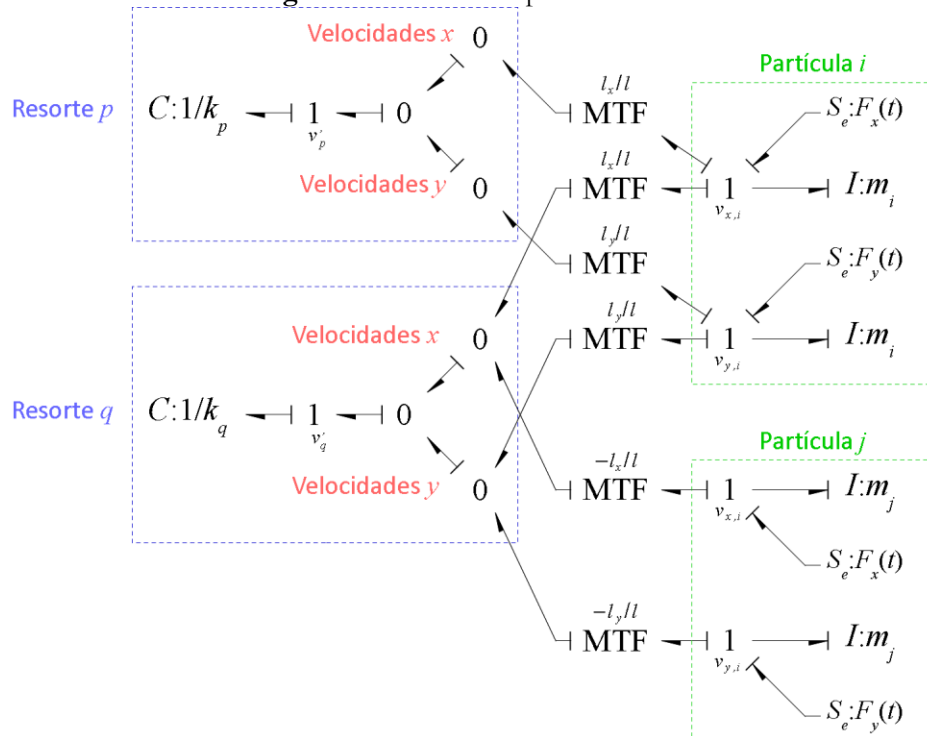


Figura 3-6: Gráfico de unión del sistema de péndulo doble de la **Figura 3-5**.

Ahora, utilizando los mismos principios que permitieron obtener el Gráfico de Unión Vectorial del péndulo elástico del capítulo anterior, se obtiene el correspondiente para este caso del péndulo doble, que se muestra en la **Figura 3-7**. Las relaciones constitutivas de los puertos **I** son similares a la

planteada en el caso anterior, sin embargo el Transformador Modulado ahora tendrá la relación constitutiva:

$$\begin{bmatrix} v'_p \\ v'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{x,i}/l_i & l_{x,j}/l_j & 0 & 0 \\ l_{x,i}/l_i & l_{y,j}/l_j & -l_x/l & -l_y/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x,i} \\ v_{y,i} \\ v_{x,j} \\ v_{y,j} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

En la que se puede notar que su matriz de módulos no es cuadrada, debido a que el puerto tiene cuatro entradas y dos salidas escalares, a saber, las componentes de las velocidades en el sistema coordenado global como entradas y las velocidades en el sistema local, para cada resorte, como salidas.

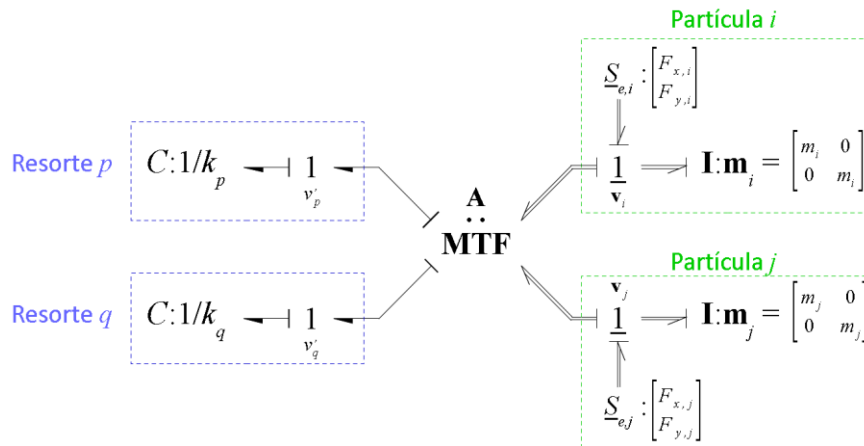


Figura 3-7: Gráfico de Unión Vectorial del sistema de péndulo doble de la Figura 3-5.

3.3 Sistema de malla tipo masa-resorte.

Tomando como base los modelos en Gráficos de Unión obtenidos para el sistema de péndulo doble de la sección anterior, se planteará ahora una estructura genérica que pueda ser repetida tantas veces como se desee, dentro de una configuración de varias masas puntuales interconectadas entre sí, a través de resortes con constantes dadas. A este tipo de arreglos reticulares se les conoce como Modelos Masa-Resorte (Mass Spring Models MSM), los cuales han sido ampliamente utilizados en el campo de la computación gráfica para la representación realista de cuerpos deformables como telas (28) o tejidos organicos en la simulación de cirugías (29).

En discretizaciones de este tipo las masas puntuales se interconectan con las partículas aledañas mediante tantos resortes como puntos vecinos se usen. La Figura 3-8 muestra el detalle de una partícula con un número determinado de resortes adheridos a ella, y su correspondiente representación dentro de un Gráfico de Unión escalar, en el que se puede apreciar la manera en que cada uno de los dos puertos I que representan la inercia sobre los ejes coordenados, se conecta a un puerto 1, el cual distribuye el flujo por cada uno de los resortes conectados a la partícula.

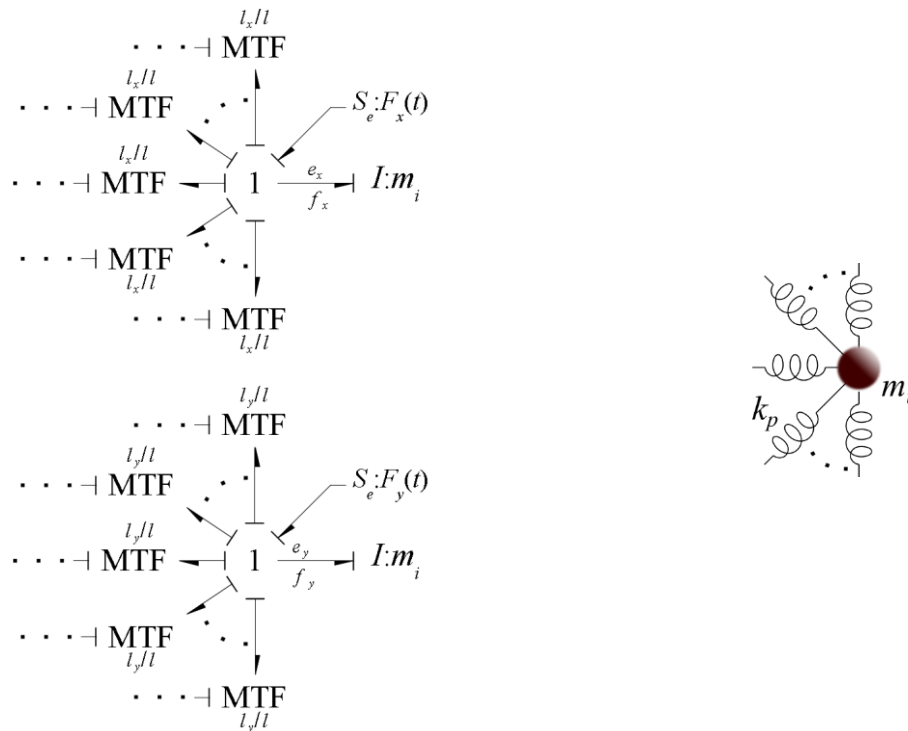


Figura 3-8: Detalle de una partícula conectada a varios resortes.

3.4 Cuerpos deformables a través de Sistemas Masa-Resorte.

La discretización de la sección anterior será utilizada ahora para plantear otro modelo de la viga vibratoria en cantilever que se discutió en la sección 2.4. La diferencia, en este caso, se encuentra en la manera de convertir el problema de parámetros continuos a parámetros concentrados ya que ahora no se plantea unidimensionalmente (distribución de propiedades sobre una línea) sino con grados de libertad en los dos ejes coordenados del plano (propiedades distribuidas sobre un área). Ahora, la inercia de la viga será emulada a través de la distribución uniforme de partículas, de masa puntual, que al ser sumadas resultan en la masa total de la viga. En cuanto a las propiedades elásticas, el efecto global del Módulo de Elasticidad (E) y el módulo de Poisson (ν), se logra a través de la adecuada asignación de las constantes de los resortes que interconectan a las partículas entre sí, de manera tal que globalmente la rigidez del cuerpo representado en forma de parámetros distribuidos sea lo más aproximada posible a la rigidez del cuerpo como un continuo.

Así, el estudio de las relaciones entre las constantes elásticas del material real y las constantes de los resortes que forman la red, ha venido llevándose a cabo desde el trabajo pionero de Terzopoulos et. al. (30), quienes fueron los primeros en aplicar conceptos de la teoría de la elasticidad para obtener las fórmulas de las constantes de resorte que fueran físicamente coherentes. Posteriormente Van Gelder (31) obtuvo una fórmula de constante de resorte para arreglos masa-resorte en los que los resortes forman triángulos, de manera similar a una malla de FEM, solo que en este caso, en los nodos se ubican las partículas de masa puntual, mientras que los resortes van a través de las aristas de los triángulos. La fórmula obtenida, establece que la constante de cualquier resorte dentro de la malla, depende directamente del Módulo Bidimensional de Elasticidad del material y del área de los triángulos a los que pertenece dicho resorte, y depende de manera inversa del cuadrado de la longitud

inicial del resorte. Sin embargo, su aplicación resulta limitada por el hecho de que solo presenta buenos resultados cuando el Coeficiente de Poisson tiene un valor de $\nu = 0$, lo que tiene una aplicabilidad poco realista dado que para sólidos bien conocidos en ingeniería como los metales, polímeros y cerámicos, el rango de esta propiedad es $0.25 < \nu < 0.35$ (32).

En respuesta a lo anterior y con el fin de expandir los casos de estudio, Baudet et. al. proponen un modelo que utiliza como base un enmallado de elementos cuadriláteros, usando de nuevo el mismo principio de ubicar las masas puntuales en los nodos, conectadas entre ellas, de tal manera que interactúen directamente a través de los resortes, con todas las otras masas que se encuentren en los mismos elementos. Así, en el caso de una masa que no haga parte de la frontera del cuerpo, se encontrará ubicada en un nodo común a cuatro (4) elementos, por lo que deberá conectarse mediante los resortes a 8 masas, tal como se muestra en la **Figura 3-9**.

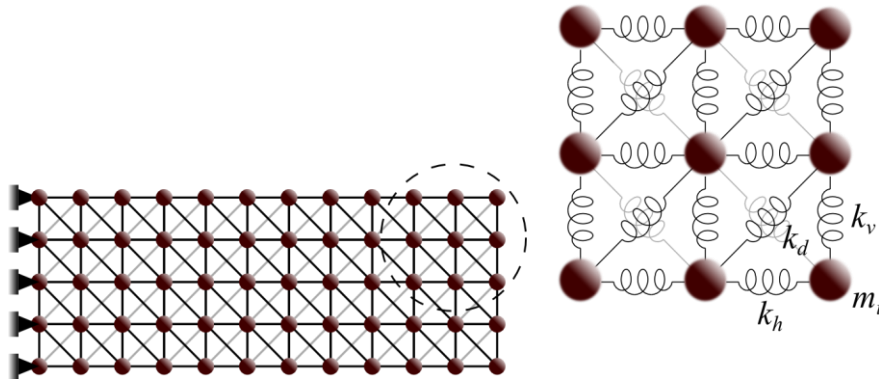


Figura 3-9: Esquema malla-resorte bidimensional.

Entonces, usando métodos energéticos para analizar el comportamiento de los resortes, los autores establecen relaciones entre las propiedades mecánicas del material a simular y las constantes de los resortes, así como la introducción de fuerzas de corrección que permitan simular correctamente el ensanchamiento o estrechamiento que se produce en la dirección perpendicular a la aplicación de una fuerza de tensión o compresión sobre un cuerpo, que en el modelo elástico continuo es medido por el módulo de Poisson. Las respectivas fórmulas son:

$$k_d = \frac{E(l_0^2 + h_0^2)}{4l_0h_0(1+\nu)} \quad (3.28)$$

$$k_h = \frac{E(h_0^2(3\nu+2) - l_0^2)}{4l_0h_0(1+\nu)} \quad (3.29)$$

$$F_{\perp h} = \frac{h_0F_h(1-3\nu)}{8l_0} \quad (3.30)$$

$$k_v = \frac{E(l_0^2(3\nu+2) - h_0^2)}{4l_0h_0(1+\nu)} \quad (3.31)$$

$$F_{\perp l} = \frac{l_0F_l(1-3\nu)}{8h_0} \quad (3.32)$$

Donde (3.28), (3.29) y (3.31) son las constantes de los resortes que se encuentran inicialmente en posición diagonal, horizontal y vertical, respectivamente, así como (3.30) y (3.32) son las fuerzas de corrección que deben aplicarse perpendicularmente a las aristas horizontal (de ancho l_0) y vertical (de alto h_0), respectivamente.

Ahora, Lloyd et. al. en vez de usar fuerzas de corrección, proponen el uso de resortes inicialmente deformados al establecer que sus longitudes naturales sean diferentes a la distancia inicial entre los nodos que conectan. De esta manera las constantes de resorte son:

$$k_{h-v} = \sum_e \frac{5}{16} tE \quad (3.33)$$

$$k_d = \sum_e \frac{7}{16} tE \quad (3.34)$$

Donde (3.33) es la fórmula para calcular la constante de los resortes horizontales y verticales y (3.34) es la constante para los resortes diagonales, siendo t el espesor del cuerpo a analizar y E , el módulo de elasticidad del material. Ahora, las longitudes naturales de los respectivos resortes son:

$$l_{h-v}^0 = \frac{6}{5} \|\mathbf{p}_i^0 - \mathbf{p}_j^0\| \quad (3.35)$$

$$l_d^0 = \frac{6}{7} \|\mathbf{p}_i^0 - \mathbf{p}_j^0\| \quad (3.36)$$

En este sentido, el estado inicial del sistema debe ser configurado de tal manera que las fuerzas que ejercen los resortes sobre las masas sean consecuentes con las deformaciones iniciales que experimentan. Así pues, la condición inicial cada una de las variables de estado correspondientes a los puertos C, se calculan mediante:

$$F_{h-v}^k = -\frac{1}{5} k_{h-v} \|\mathbf{p}_i^0 - \mathbf{p}_j^0\| \quad (3.37)$$

$$F_d^k = \frac{1}{7} k_d \|\mathbf{p}_i^0 - \mathbf{p}_j^0\| \quad (3.38)$$

3.5 Condiciones de Frontera.

Las restricciones de desplazamiento que se apliquen sobre las fronteras del dominio analizado se pueden aplicar de dos maneras distintas. La primera consiste en usar fuentes de flujo en cada grado de libertad que requiera ser condicionado. Si la condición impuesta es un desplazamiento nulo sobre una frontera, las fuentes generarán un flujo de valor cero sobre cada una de las uniones de conservación de flujo, de manera tal que las masas que pertenecen a dicha línea de frontera quedan condicionadas a tener una velocidad igual a cero en cualquier instante. Sin embargo, la inclusión de dicha fuente directamente a la unión 1 producirá el efecto indeseado de condicionar al puerto I correspondiente a una causalidad derivativa y por ende, generar un sistema de ecuaciones algebraicas diferenciales.

Así, con el fin de evitar este inconveniente, se propone la modificación ilustrada en la **Figura 3-10**, consistente en restringir el movimiento de las partículas de frontera mediante resortes con rigidez muy alta, que aproximen una conexión rígida con la referencia, usados en conjunto con disipadores que amortigüen las oscilaciones de alta frecuencia que se puedan producir por la inclusión de estos resortes con rigidez tan alta. (23).

La otra opción consiste en eliminar las masas de las fronteras y conectar los resortes que a ellas llegan, directamente a la referencia. Sin embargo, este último procedimiento tiene la desventaja de que se estaría afectando la distribución de la inercia distribuida real, al omitir que parte de esta se encuentra fija.

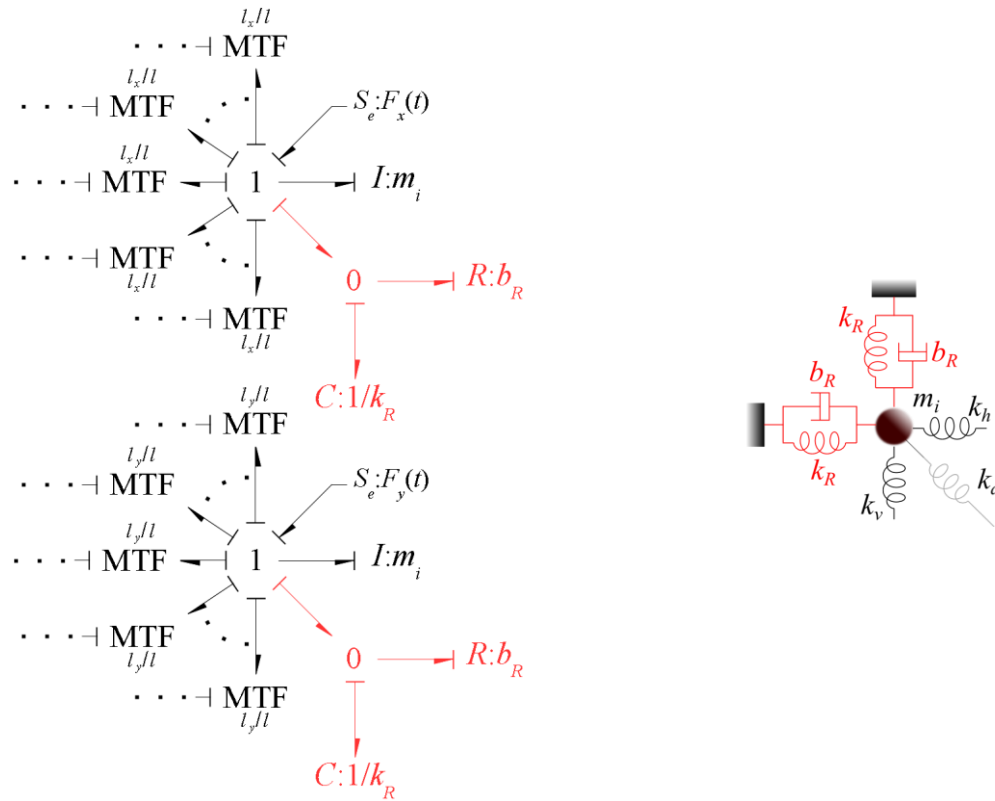


Figura 3-10: Detalle de una partícula de frontera restringida.

3.6 Modelo General Multibond Graph MSS.

Los modelos explicados anteriormente se pueden generalizar y condensar en el gráfico que se muestra en la **Figura 3-11**. En donde el multipuerto **C** de la izquierda representa a todos los resortes que se usen para reproducir la elasticidad del sólido modelado. El multipuerto **1** de la izquierda es aquel donde se recopilan las velocidades v' locales relacionadas con el cambio en la elongación de los respectivos resortes. El transformador modulado multipuerto contiene todas las relaciones entre las coordenadas globales de las partículas y las velocidades locales relacionadas con los resortes, mediante la matriz A , definida de manera análoga a como se mostró en la sección 3.2. El puerto **1** de la derecha representa el vector de velocidades absolutas de las partículas y es a donde concurren las uniones provenientes de los multipuertos fuente de esfuerzo e Inercia, el primero de los cuales representa la aplicación de fuerzas externas sobre las partículas y el segundo las inercias de estas. Con respecto al multipuerto **0**, este representa las fuerzas de restricción en las fronteras del cuerpo, que se generan mediante soportes con rigidez y disipación, con tal de evitar la causalidad derivativa del modelo, tal como se explicó en la sección anterior.

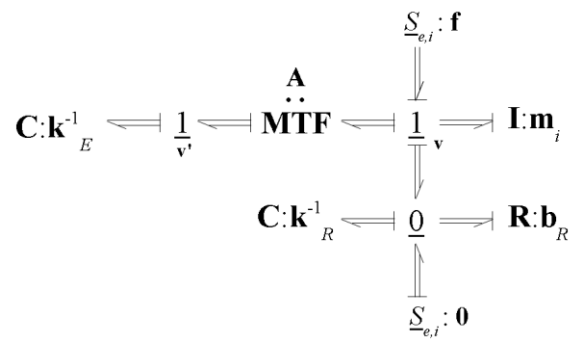


Figura 3-11: Multibond Graph de un sistema general Masa-Resorte.

4. Implementación y Comprobación

4.1 Implementación

Las ecuaciones de estado obtenidas desde los modelos en Gráficos de Unión de los problemas descritos, fueron solucionadas a través del Método Runge-Kutta-Fehlberg - RKF45 (33) implementado en subrutinas mediante el lenguaje de programación FORTRAN90.

Se planteó la solución del problema que involucra una viga empotrada en un extremo y que oscila bajo la acción de su propio peso (**Figura 4-1**) usando los parámetros que se listan en la Tabla 4-1.

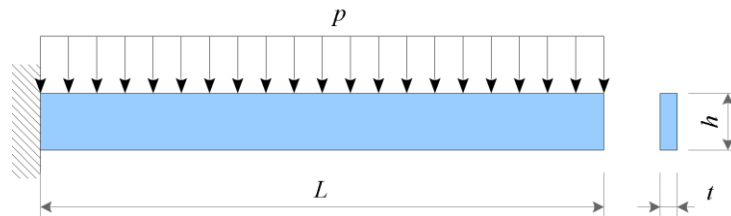


Figura 4-1: Viga empotrada, que soporta la acción de su propio peso.

La solución se realizó mediante cuatro (4) métodos, de los cuales, dos (2) se plantearon a modo de comprobación de los resultados obtenidos de la solución de las ecuaciones de estados obtenidas en este trabajo. En resumen los métodos usados son:

- Modelo de viga de Timoshenko discretizada espacialmente según la sección 2.4. Se usaron mil segmentos para obtener un grado de precisión aceptable.
- Modelado 2D de la viga de la **Figura 4-1** mediante discretización por Sistema Masa Resorte (MMS) tal como se mostró en la sección 3.2. Para la simulación se usó una distribución de 45 partículas a lo largo de la longitud, por 5 partículas de alto.
- Método de los Elementos Finitos usando elemento BEAM3. Se usó un enmallado consistente de 10 elementos.
- Método de los Elementos Finitos usando elemento PLANE82. Se usó una malla estructurada de 45x6.

Parámetro.	Valor	Descripción
L	1.0 m	Longitud de la viga
h	0.1 m	Altura.
t	0.01 m	Ancho.

ρ	7830 kg/m ³	Densidad.
E	206.8 GPa	Módulo de Elasticidad.
G	79.5384154 Gpa	Módulo de Rigidez.
I	8.333333×10^{-7} m ⁴	Segundo Momento de Área
k	0.8496732	Factor de Corrección por Esfuerzo Cortante.
ν	0.3	Módulo de Poisson.

Tabla 4-1: Parámetros usados para la solución del problema de oscilación de una viga bajo la acción de su propio peso.

4.2 Resultados y Análisis

La Figura 4-2 muestra el desplazamiento del extremo libre de la viga que se usó como problema modelo para la comprobación de las ecuaciones de estado obtenidas tanto para el modelo discretizado de la viga de Timoshenko, así como el modelo bidimensional de discretización por Sistema Masa-Resorte (MSS).

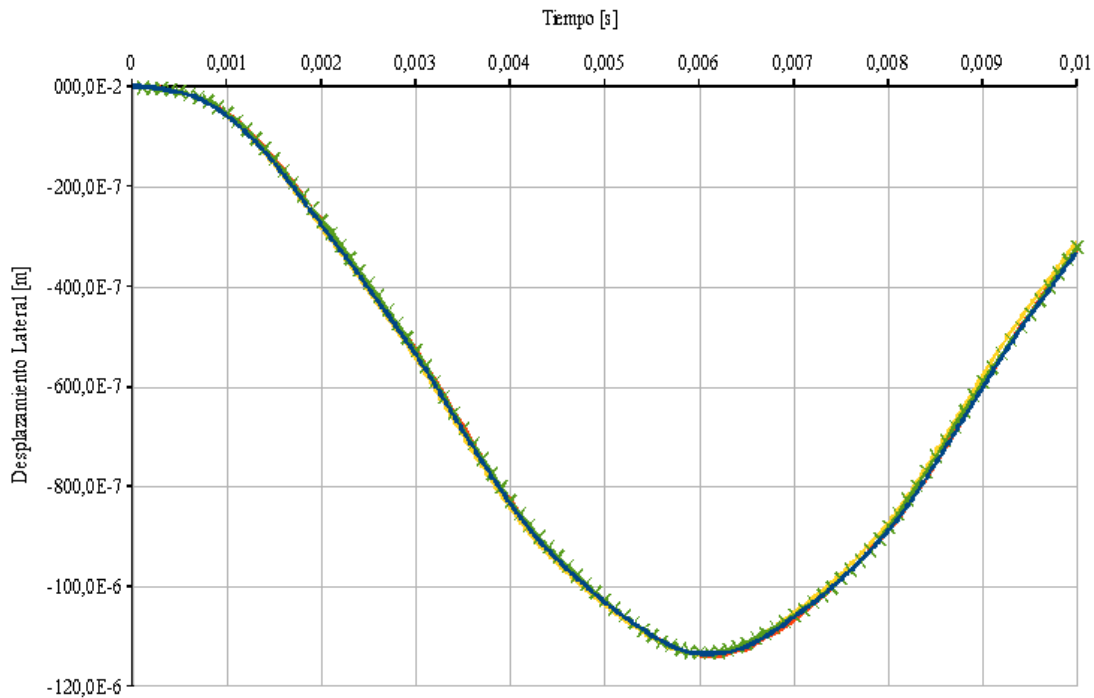


Figura 4-2: Desplazamiento del extremo libre durante 0.01 [s] por la acción de su propio peso. Se muestran varias líneas correspondientes a los resultados obtenidos mediante varios métodos de solución.

Como se puede observar, el nivel de aproximación de todas las soluciones es muy alto en el nivel de predecir tanto la forma de la oscilación, así como el valor de la deflexión máxima. Sin embargo, en el caso de la discretización de las ecuaciones del modelo de Timoshenko, se necesita un número elevado de segmentos (en este caso mil) para obtener un nivel de exactitud apreciable, hecho que tiene como consecuencia el consabido consumo computacional tanto de memoria como de tiempo de

procesamiento debido a la finura de la malla. Ahora, este grado de convergencia tan bajo tiene que ver con la naturaleza de la discretización y por ende de las ecuaciones de estado que se obtienen, pues como ya se había discutido en la sección 2.4, el esquema resulta ser de diferencias finitas hacia adelante que resulta en un error de orden $O(h)$.

Por otro lado, a pesar de que el costo computacional es también alto, en comparación con el FEM, la exactitud del Modelo Masa Resorte es bastante aceptable.

5. Conclusiones y Recomendaciones

5.1 Conclusiones

La obtención de representaciones por medio de Gráficos de Unión escalares y vectoriales de sistemas elastodinámicos fue el alcance de la presente tesis. Los Gráficos de unión escalares se usaron como punto de partida para hacer representaciones gráficas de modelos discretizados de un tipo especial de sistemas dinámicos de parámetros distribuidos, a saber, los sistemas compuestos de cuerpos elásticos en movimiento. Así, el objetivo de dichas discretizaciones consiste en obtener ecuaciones de estado como ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), solucionables mediante métodos numéricos desarrollados para tal fin. Sin embargo, en la medida en que se requiere alcanzar un nivel de aproximación apropiado al sistema continuo real, se hace necesario aumentar el número de grados de libertad del modelo y por tanto la extensión del Gráfico de unión escalar que lo representa, también aumentará considerablemente, siguiendo, sin embargo, un patrón identificable en cuanto a la repetición de estructuras determinadas.

En respuesta a ello, la solución al problema de la representación se concibe mediante los Gráficos de unión vectoriales que son una generalización de los Gráficos de unión escalares, usados de manera extendida en el modelado de sistemas de mecánica multicuerpo, y que en el presente trabajo se usan como una representación simplificada y a la vez general de discretizaciones con un número finito de grados de libertad. La subdivisión de los parámetros distribuidos del sistema elástico real se planteo mediante el esquema MMS (Mass-Spring System) consistente en redistribuir la inercia del sólido mediante un número determinado de partículas de masa concentradas, que al ser sumadas dan como resultado la masa total del sólido analizado y que se distribuyen de tal manera que la ocupación del espacio sea lo más cercana a la real. Ahora, con respecto a la elasticidad, dicho esquema interconecta las partículas de masa puntual mediante resortes con constantes elásticas determinadas por las propiedades del sólido simulado.

Los Gráficos de Unión Vectoriales permiten una representación abreviada de sistemas complejos, manteniendo la claridad en la visualización de los intercambios de energía entre los diferentes subsistemas y partes que los componen y sus alrededores. Esta coherencia ha permitido representar, en el dominio mecánico, sistemas de cuerpos rígidos en movimiento, interconectados y sometidos a todos los tipos de cargas y restricciones contempladas en el estudio de la Dinámica Multicuerpo y en este trabajo se mostraron también sus cualidades como herramienta de representación de modelos discretos que aproximan el comportamiento de sistemas de parámetros distribuidos en elastodinámica.

Las ecuaciones de estado obtenidas mediante la aplicación de los métodos descritos en las publicaciones relacionadas con Gráficos de Unión, coinciden con las ecuaciones halladas a través de las ecuaciones de movimiento usadas habitualmente, lo cual sirve como comprobación de que el gráfico de unión planteado corresponde a una abstracción fiel al sistema dinámico original. Adicionalmente en este trabajo se plantea una solución al problema de las restricciones que generan causalidades derivativas ya sea en uno o en los dos grados de libertad de la partícula en cuestión. En este sentido, se propone la utilización de restricciones con cierto grado de elasticidad y de

amortiguamiento (como en efecto son en la realidad), con lo cual se obtiene un Gráfico de unión con causalidad integral en su totalidad y se evita así el inconveniente que representa la solución de ecuaciones algebraicas-diferenciales que surgen con las causalidades derivativas.

5.2 Recomendaciones

Teniendo en cuenta que una de las características más sobresalientes de los Gráficos de Unión es la representación unificada de los flujos de energía entre y a través de los diferentes dominios, esta puede ser aprovechada, también para el modelado de sistemas continuos que requieran la inclusión de diversos fenómenos de intercambio de energía que generen efectos en los otros dominios, por ejemplo, la contracción o dilatación de los sólidos producidos por los cambios de temperatura o las fuerzas que genera un fluido al pasar alrededor de un cuerpo.

Adicionalmente el uso de modelos que tengan en cuenta la distribución espacial de las propiedades para el diseño de sistemas de control, representa una oportunidad para mejorar el desempeño de estos últimos, en la medida en que una representación más precisa del sistema dinámico permite una mejor calibración del sistema de control en cuanto a la ganancia que este genera con el fin de reducir el error mediante una corrección más cercana al tipo críticamente amortiguado. Lo anterior es especialmente importante en campos de aplicación que requieren gran precisión y rapidez en la respuesta, como es el caso de los manipuladores robóticos y asistentes de cirugía en los que la elasticidad y distribución de la inercia de sus piezas afectan de significativamente la efectividad y eficiencia con la que se alcanza la señal de referencia. Y del mismo modo en procesos que involucren termofluidos resulta importante el desarrollo de modelos más realistas en los que se tenga en cuenta la dinámica de los procesos térmicos y el movimiento de los fluidos involucrados, así como las variaciones espaciales de las variables y los parámetros involucrados.

El auge de los edificios altos como forma de urbanización y densificación en las grandes ciudades requiere un desarrollo a la par de sistemas de control activo de vibraciones que reduzcan las oscilaciones de la estructura que se producen por el movimiento del suelo y la acción del viento. En ese sentido, el modelado de sistemas estructurales sujetos a fuerzas dinámicas en los que la implementación de dicho control para la evaluación de su efectividad, es de vital importancia. Así, el sistema estructural podrá ser modelado mediante Gráficos de Unión, usando por ejemplo la representación de la viga de Timoshenko para cada viga, columna, vigueta y demás elementos estructurales esbeltos sujetos a cargas transversales, teniendo en cuenta los diferentes tipos de uniones y restricciones a través de las condiciones de contorno adecuadas. Y así, con el modelo estructural y la correcta aplicación de las fuerzas dinámicas a través de fuentes de esfuerzo, se puede realizar una evaluación del comportamiento de la edificación, tanto en el campo de las frecuencias como en el de los desplazamientos (derivadas) de las diferentes partes del edificio.

Ahora, conocido el comportamiento dinámico de la estructura analizada, a través del modelo en Gráficos de Unión, en caso de ser necesario, se puede proceder al diseño e implementación, en las simulaciones, del sistema de control activo que opere en uno o varios puntos de la estructura con el fin de disminuir desplazamientos excesivos que afecten a los elementos no estructurales y la comodidad de los ocupantes del edificio.

6. Bibliografía

1. **Timoshenko, Stephen P and Goodier, JN.** *Theory of elasticity*. New York : McGraw-Hill, 1969.
2. **Bel Cacho, José David.** *Formulación e implementación de una metodología de elementos finitos para el análisis de modelos bond graph de sistemas discreto - continuos*. Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Zaragoza. Zaragoza : s.n., 2001. Tesis de Doctorado.
3. *Modelling flexible body systems: a bond graph component model approach*. **Damić, Vjekoslav.** 2 - 3, s.l. : Taylor & Francis, 2006, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, Vol. 12, págs. 175 -187.
4. **Borutzky, Wolfgang.** *Bond Graph Methodology, Development and Analysis of Multidisciplinary Dynamic System Models*. London : Springer, 2010.
5. *Bond graphs in control: Physical state variables and observers*. **Karnopp, Dean.** 3, s.l. : Elsevier, 1979, *Journal of the Franklin institute*, Vol. 308, págs. 219 - 234.
6. *Physical model-based control: A bond graph approach*. **Gawthrop, Peter J.** 3, 1995, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 332, págs. 285 - 305. 0016-0032.
7. **Karnopp, Dean C., Margolis, Donald L. and Rosemberg, Ronald C.** *System Dynamics Modelling and Simulation of Mechatronic Systems*. s.l. : John Wiley & Sons, Inc, 2006.
8. *Bond-graphs for modelling of manufacturing systems*. **Besombes, B y Marcon, E.** Le Touquet : IEEE, 1993. *Systems, Man and Cybernetics*, 1993. 'Systems Engineering in the Service of Humans', *Conference Proceedings*., International Conference on. págs. 256 - 261.
9. *A general bond graph approach for computational fluid dynamics*. **Baliño, JL, Larreteguy, AE and Raso, EF.** 7, s.l. : Elsevier, 2006, *Simulation Modelling Practice and Theory*, Vol. 14, pp. 884-908.
10. *Pseudo bond graphs for thermal energy transport*. **Karnopp, Dean.** 3, s.l. : American Society of Mechanical Engineers, 1978, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 100, págs. 165 - 169.
11. **Breedveld, Pieter Cornelis.** *Physical systems theory in terms of bond graphs*. Univ. of Twente. Enschede, The Netherlands : s.n., 1984. Tesis de Doctorado.
12. *Bond graph for dynamic modelling in chemical engineering*. **Couenne, F, y otros.** 11, s.l. : Elsevier, 2008, *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, Vol. 47, págs. 1994 - 2003.
13. *Progress in the bond graph representations of economics and population dynamics*. **Brewer, John W.** 5, s.l. : Elsevier, 1991, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, págs. 675 - 696.
14. *Modelamiento de la marcha humana por medio de gráficos de unión*. **Contreras Bravo, Leonardo Emiro y Roa Garzón, Máximo Alejandro.** 16, 2005, *Revista Tecnura*, Vol. 8, págs. 26 - 42.
15. *Metodología de los gráficos de unión (bond graphs) en aplicaciones biomédicas*. **Fuentes Herrera, Diego Edgardo y Garzón Alvarado, Diego Alexander.** 3, s.l. : Editorial Ciencias Médicas, 2012, *Revista Cubana de Investigaciones Biomédicas*, Vol. 31, págs. 386 - 405.
16. *Bond-Graph model of axial vibrations in a Drill-Hand-Arm system*. **Ruiz, Darwin J, y otros.** [ed.] IEEE. 2013. *Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC)*, 2013 IEEE International. págs. 49 - 52.
17. **Muñoz Rodríguez, Alejandro.** *Modelado de motor de combustión interna para predicción de fallas de funcionamiento*. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá : s.n., 2012. Tesis de Maestría.

18. *Computer representation of continuous vibratory systems using normal modes and bond graph techniques.* **Karnopp, Dean C.** 3, s.l. : SAGE Publications, 1968, Simulation, Vol. 10, págs. 129 - 135.
19. *The extended bond graph notation.* **Ingrim, ME y Masada, GY.** 1, s.l. : American Society of Mechanical Engineers, 1991, Journal of dynamic systems, measurement, and control, Vol. 113, págs. 113 - 117.
20. *Extended bond graph representation of the traction problem in linear elastodynamics.* **Ingrim, ME y Masada, GY.** 1, s.l. : American Society of Mechanical Engineers, 1991, Journal of dynamic systems, measurement, and control, Vol. 113, págs. 118 - 121.
21. **Pelegay Quintana, José Luis.** *Generalización de la notación Bond Graph a sistemas continuos, acoplamiento con elementos finitos y elementos de contorno.* Zaragoza : Universidad de Zaragoza, Centro Politécnico Superior, 1993. Tesis doctoral.
22. **Paynter, H. M.** *Analysis and Design of Engineering Systems.* Cambridge, Massachusetts, USA : M.I.T. Press, 1961.
23. *Bond graph modelling and simulation of multidisciplinary systems – An introduction.* **Borutzky, Wolfgang.** 1, 2009, Simulation Modelling Practice and Theory, Vol. 17, pp. 3–21.
24. **Leissa, Arthur W y Qatu, Mohamad Subhi.** *Vibrations of continuous systems.* s.l. : McGraw-Hill, 2011.
25. *DYNAMICS OF TRANSVERSELY VIBRATING BEAMS USING FOUR ENGINEERING THEORIES.* **HAN, SEON M., BENAROYA, HAYM y WEI, TIMOTHY.** 5, New Jersey : s.n., 5 de September de 1999, Journal of Sound and Vibration, Vol. 225, págs. 935–988.
26. *The shear coefficient in Timoshenko's beam theory.* **Cowper, GR.** 2, Journal of applied mechanics : American Society of Mechanical Engineers, 1966, Vol. 33, págs. 335 - 340.
27. **Carcorze-Soto, Jorge Luis.** *Dynamic Stress Predictions Of A Viscously Damped Timoshenko Beam At Resonant Conditions Analytical And Numerical Solutions.* Hartford, Connecticut : Rensselaer Polytechnic Institute, 2010.
28. *Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behaviour.* **Provot, Xavier.** s.l. : Canadian Information Processing Society, 1995. Graphics interface. págs. 147 - 147.
29. *Identification of spring parameters for deformable object simulation.* **Lloyd, Bryn, Székely, Gábor y Harders, Matthias.** 5, s.l. : IEEE, 2007, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, Vol. 13, págs. 1081 - 1094.
30. *Elastically deformable models.* **Terzopoulos, Demetri, y otros.** 4, 1987, ACM Siggraph Computer Graphics, Vol. 21, págs. 205 - 214.
31. *Approximate simulation of elastic membranes by triangulated spring meshes.* **Van Gelder, Allen.** 2, 1998, Journal of graphics, gpu, and game tools, Vol. 3, págs. 21-41.
32. *Poisson's ratio and modern materials.* **Greaves, G. N., y otros.** 11, s.l. : Nature Publishing Group, 2011, Vol. 10, págs. 823 - 837.
33. *Subroutine RKF45.* **Shampine, LF and Watts, HA.** San Francisco, CA : Prentice Hall, 1977, Computer Methods for Mathematical Computations, págs. 135 - 147.
34. **Baudet, Vincent, et al.** *New Mass-Spring System Integrating Elasticity Parameters in 2D.* LIRIS UMR 5205 CNRS/INSA de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1/Université Lumière Lyon 2/École Centrale de Lyon. Lyon : s.n., 2007.
35. **Zimmer, Dirk.** *A modelica library for multibond graphs and its application in 3d-mechanics.* Department of Computer Science, Institute of Computational Science, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich. Zürich : s.n., 2006. Master's thesis.
36. *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations.* **Peaceman, D. W. and Rachford, Jr, H. H.** 1, 1955, Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics, Vol. 3, pp. 28-41.
37. *Bond graph models for fluid dynamic systems.* **Karnopp, Dean.** 3, s.l. : American Society of Mechanical Engineers, 1972, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 94, págs. 222 - 229.

38. **Weaver, W., Timoshenko, S.P. y Young, D.H.** *Vibration Problems in Engineering*. New York : John Wiley & Sons, 1990.
39. **Ljung, Lennart y Glad, Torkel.** *Modeling of dynamic systems*. [ed.] Englewood Cliffs. New Jersey : Prentice Hall, 1994.
40. *Vector bond graphs applied to one-dimensional distributed systems.* **Bonderson, L.S.** 1, 1975, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 97, págs. 75 – 82.