UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Connecting-lemma y Closing-lemma en flujos seccional-Anosov

Victor Andrés Vargas Cubides

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá D.C., Colombia

2011

Connecting-lemma y Closing-lemma en flujos seccional-Anosov

Victor Andrés Vargas Cubides

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Ciencias - Matemáticas

Director:

Prof. Serafín Bautista Díaz

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá D.C., Colombia

2011

Dedicado a

A Gloria, y Jeimy

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por el apoyo incondicional que me han dado durante mis años de estudiante tanto en el pregrado como en la maestría.

Al profesor Serafín Bautista Díaz por su apoyo, y aportes que fueron fundamentales para la culminación de este trabajo.

A mis compañeros del seminario de sistemas dinámicos de la Universidad Nacional por acompañar de una manera u otra en la discusión y realización de este trabajo.

Resumen

En este trabajo se estudia parte del comportamiento de los flujos seccional-Anosov sobre 3-variedades compactas (posiblemente con $\partial M \neq \emptyset$), haciendo énfasis en dos resultados bastante importantes conocidos como connecting-lema y closing-lema. Para poder llegar a la prueba de estos resultados primero se hará un recuento de las propiedades principales de este tipo de flujos, tratando de ver el comportamiento de los flujos a través del comportamiento de sus funciones de retorno para secciones transversales escogidas de manera conveniente.

Palabras clave: Flujos seccional-Anosov, sección transversal singular, connecting-lema, closing-lema.

Abstract

In this paper we study part of the behavior of the sectional-Anosov flows on compact 3-manifolds (possibly with $\partial M \neq \emptyset$), with emphasis on two quite significant results known as connecting-lemma and closing-lemma. Order to arrive at the testing of these results first will be an account of the main properties of such flows, trying to see the flow behavior through the behavior of this return maps for selected cross sections conveniently.

Keywords: Sectional-Anosov flows, singular cross section, connecting-lemma, closing-lemma

Índice general

Agradecimientos VII

Resumen IX

1. Introducción 2

2. Preliminares 5

2.1. Connecting-lemma y Closing-lemma en flujos de Anosov 5

2.2. Flujos seccional-Anosov 9

3. Secciones transversales singulares ∂-adaptadas 15

3.1. Secciones transversales 15

3.2. Secciones transversales singulares 17

3.3. Secciones transversales singulares ∂-adaptadas 20

4. Connecting-lemma y Closing-lemma 33

4.1. Connecting-lemma 33

4.2. Closing-lemma 40

Bibliografía 42

1 Introducción

En el estudio de los sistemas dinámicos se ha prestado especial atención al comportamiento de los flujos de Anosov sobre variedades compactas, en particular se ha tratado de caracterizar el comportamiento de los conjuntos α-límite y ω-límite de un punto sobre la variedad en base al comportamiento de los conjuntos α-límite y ω-límite para puntos tales que su órbita pasa por una vecindad suficientemente cercana al punto; dos resultados que van en este sentido, y en los cuales se ha hecho un estudio riguroso son los siguientes: el primero conocido como *connecting-lemma* afirma que si X_t es un flujo de Anosov sobre una variedad cerrada M, y $p, q \in M$ satisfacen que para todo $\epsilon > 0$ existe una trayectoria de un punto ϵ-cercano a p hasta un punto ϵ-cercano a q, entonces existe un $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x) = \omega(q)$; el segundo resultado conocido como *closing-lemma* afirma que si $x \in \Lambda$ (donde Λ es conjunto hiperbólico del flujo generado por X en M) es un punto recurrente, entonces este punto es una singularidad, o puede ser aproximado por puntos periódicos. Estos resultados son consecuencia de un lema bastante conocido en el estudio de la dinámica en flujos hiperbólicos llamado *lema de sombreado*.

En los últimos años se ha comenzado a estudiar el comportamiento de la dinámica en flujos más generales que los flujos de Anosov. Una de estas generalizaciones son los flujos seccional-Anosov en los cuales se admite la aparición de singularidades no aisladas tipo silla sin afectar la descomposición continua del espacio tangente, luego es natural indagar si en este tipo de flujos se siguen teniendo los mismos resultados. En principio la respuesta es *negativa*, y un claro indicio de que no se tengan los mismos resultados es el hecho de que el *lema de sombreado* no se cumple sobre los flujos seccional-Anosov. Un ejemplo que muestra que no se cumple el *connecting-lemma* bajo las mismas hipótesis que se tienen en flujos de Anosov

se puede ver en la *Figura 1.1 (flujo seccional-Anosov en el bi-toro sólido)*; pues se sigue de la existencia de órbitas periódicas en flujos seccional-Anosov (Ver [2]) la existencia de una órbita periódica $\mathcal{O}$, tal que cualquier $p \in \mathcal{O}$ y el equilibrio $q = \sigma_2$ satisfacen las hipótesis más no la conclusión del *connecting-lemma*.

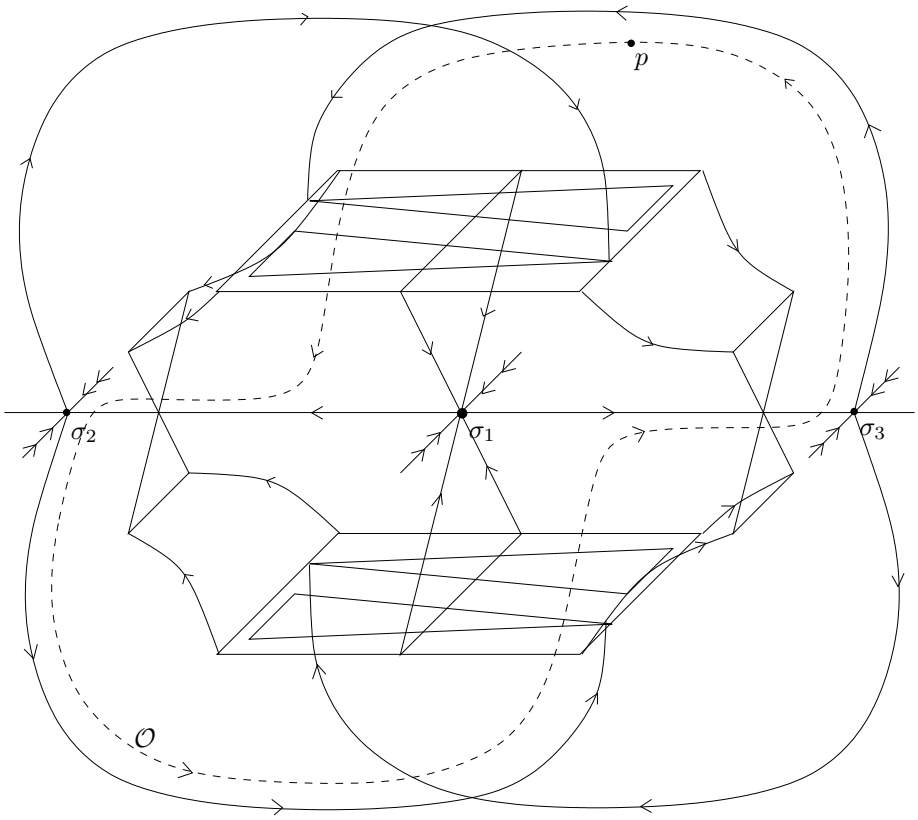

Figura 1.1: Flujo seccional-Anosov en el bi-toro sólido.

La pregunta que surge es: ¿haciendo ciertas modificaciones sobre las hipótesis de los teoremas se puede llegar a resultados similares en el caso de flujos seccional-Anosov sobre 3-variedades compactas?

En el primer caso pidiendo una condición adicional sobre el comportamiento de $\alpha(p)$, se llega a un resultado bastante cercano conocido como *connecting-lemma* para flujos seccional-Anosov en una 3-variedad que dice lo siguiente: si X_t es un flujo seccional-Anosov sobre una 3-variedad compacta M, donde $p, q \in M$ satisfacen que para todo $\epsilon > 0$ existe una trayectoria de un punto ϵ-cercano a p hasta un punto ϵ-cercano a q y $\alpha(p)$ es no singular, entonces existe

un $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x)$ es una singularidad ó $\omega(q)$.

En el segundo caso también se llega a un resultado bastante cercano conocido como *closing-lemma* para conjuntos seccional-hiperbólicos sobre 3-variedades que dice lo siguiente: si $\Lambda \subset M$ es un conjunto seccional-hiperbólico y $x \in \Lambda$ es un punto recurrente, entonces este punto puede ser aproximado por puntos periódicos ó por puntos para los cuales su ω-límite es una singularidad.

Para reconstruir las pruebas de estos resultados se utilizarán ideas y técnicas de artículos relacionados con el tema que aparecen en la bibliografía.

2 Preliminares

2.1. Connecting-lemma y Closing-lemma en flujos de Anosov

En esta sección se hará alusión a los resultados sobre flujos de Anosov que motivaron los teoremas principales que se estudian en este trabajo.

Consideremos M una variedad compacta (posiblemente con $\partial M \neq \emptyset$) y $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ (donde $\mathfrak{X}^1(M)$ es el espacio de campos vectoriales sobre M de clase C^1) transversal a ∂M hacia adentro. Notaremos por X_t el flujo generado por X en M. Se dice que un conjunto $\Lambda \subseteq M$ es invariante si $X_t(\Lambda) = \Lambda$ para todo $t > 0$. El conjunto maximal invariante del flujo X_t en M es definido por

$$M(X) = \bigcap_{t>0} X_t(M).$$

Decimos que un punto $\sigma \in M$ es una singularidad si $X(\sigma) = 0$. Notaremos por $Sing(X)$ el conjunto de todas las singularidades de X. Un conjunto compacto $\Lambda \subseteq M(X)$ es singular si este tiene singularidades.

Definición 2.1. *Si $x \in M$ se define su la órbita de x como*

$$\mathcal{O}(x) = \{y \in M(X) : y = X_t(x), \textit{para algún } t \in \mathbb{R}\},$$

se define la órbita positiva de x como

$$\mathcal{O}^+(x) = \{y \in M : y = X_t(x), \textit{para algún } t > 0\},$$

y se define la órbita negativa de x como

$$\mathcal{O}^-(x) = \{y \in M(X) : y = X_{-t}(x), \textit{para algún } t > 0\}.$$

Definición 2.2. *Se dice que un punto $p \in M$ es no errante, si para toda vecindad U de p y todo $T > 0$ existe un $t \geq T$ tal que $X_t(U) \cap U \neq \emptyset$. Notaremos el conjunto de todos los puntos no errantes de X como $\Omega(X)$. Este conjunto es cerrado e invariante.*

Definición 2.3. *Si $x \in M$ se define su conjunto ω-límite como*

$$\omega(x) = \{y \in M : y = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(x), \textit{para alguna } t_n \to \infty\}$$

y se define su conjunto α-límite (si $x \in M(X)$) como

$$\alpha(x) = \{y \in M : y = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(x), \textit{para alguna } t_n \to -\infty\}$$

Un punto $x \in M$ se llama recurrente si $x \in \omega(x)$.

Decimos que existe una trayectoria del punto $p \in M$ al punto $q \in M$ si existe $t > 0$ tal que $X_t(p) = q$. Un punto $p \in M$ es periódico si existe $t > 0$ tal que $X_t(p) = p$, al $T > 0$ más pequeño que cumple esta propiedad lo llamamos el periodo de p. Notaremos por $Per(X)$ el conjunto de todas los puntos periódicos de X.

Definición 2.4. *Un conjunto compacto invariante $\Lambda \subseteq M(X)$ de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ es hiperbólico si existe una descomposición continua DX_t-invariante del espacio tangente de la forma*

$$T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^X_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$$

tal que E^s_Λ es contractor, E^u_Λ es expansor, y E^X_Λ es tangente a X. Un flujo es de Anosov si su conjunto maximal invariante $M(X)$ es hiperbólico.

De ahora en adelante veremos las propiedades del flujo de los campos $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ a partir de las propiedades que cumplen las órbitas de difeomorfismos $f : N \to N$ teniendo en cuenta la siguiente definición.

Definición 2.5. *Dado un difeomorfismo $f : N \to N$, consideramos el espacio $N \times \mathbb{R}$ con la relación de equivalencia, $(x, s+1) \sim (f(x), s)$. Entonces tomando el espacio $\tilde{N} = (N \times \mathbb{R})/\sim$ y considerando las ecuaciones sobre $N \times \mathbb{R}$*

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{s} = 1. \end{cases}$$

Se induce un flujo $\bar{\varphi}^t$ sobre $N \times \mathbb{R}$, el cual pasa a un flujo φ^t sobre el espacio cociente $\tilde{N}$ llamado el flujo suspensión de f.

Notemos que el flujo suspensión de f no tiene singularidades, por lo tanto ciertas propiedades que se tienen sobre difeomorfismos se pueden extender de manera inmediata a flujos sin singularidades.

La teoría de la variedad invariante (Ver [8] pag 73) muestra que si Λ es hiperbólico y $p \in \Lambda$, entonces los conjuntos

$$W^{ss}(p) = \{x \in M : \lim_{t\to\infty} d(X_t(x), X_t(p)) = 0\},$$

y

$$W^{uu}(p) = \{x \in M : \lim_{t\to\infty} d(X_{-t}(x), X_{-t}(p)) = 0\}$$

son subvariedades inmersas en M de clase C^1. Estas variedades son llamadas variedad estable fuerte de p y variedad inestable fuerte de p respectivamente. Además $W^{ss}(p)$ y $W^{uu}(p)$ resultan tangentes a los subespacios lineales E^s_p y E^u_p en p respectivamente. En tal caso tenemos que

$$W^s(\mathcal{O}(p)) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} W^{ss}(X_t(p)),$$

y

$$W^u(\mathcal{O}(p)) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} W^{uu}(X_t(p)),$$

son variedades invariantes.

Definición 2.6. *Sea M una variedad, $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, y $\epsilon > 0$. Se define una ϵ-pseudo órbita como una curva diferenciable $c : \mathbb{R} \to M$ tal que $||c'(t) - X(c(t))|| < \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Decimos que una curva diferenciable $c : \mathbb{R} \to M$ es *ϵ-sombreada* por una órbita de un punto $p \in M$ si existe una función diferenciable $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|s'(t) - 1| < \epsilon$ y $d(c(s(t)), X_t(p)) < \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Lema 2.1. *(*Lema de sombreado*) Sea M una variedad compacta y H un conjunto hiperbólico tipo silla sin singularidades de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Entonces existe una vecindad U de H tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo órbita puede ser ϵ-sombreada por una única órbita.*

Un esbozo de la prueba de este lema se puede encontrar en ([3] pag 111).

Teorema 2.1. *(*Connecting-lemma en flujos de Anosov*) Si X_t es un flujo de Anosov sobre una variedad cerrada M, donde $p \in M$ y $q \in M$ satisfacen que para todo $\epsilon > 0$ existe una trayectoria de un punto ϵ-cercano a p hasta un punto ϵ-cercano a q, entonces existe un $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$, y $\omega(x) = \omega(q)$.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ pequeño y $\rho > 0$ pequeño. Si $q \in \mathcal{O}^+(q)$, el resultado se tiene con $x = p$. Entonces podemos asumir que $q \notin \mathcal{O}^+(q)$, usando la órbita negativa de p, la órbita positiva de q y una trayectoria de un punto ϵ-cercano a p hasta un punto ϵ-cercano a q como en la *Figura 2.1* obtenemos una ϵ-pseudo órbita $c(t)$ de X, por el *Lema 2.1* se tiene que

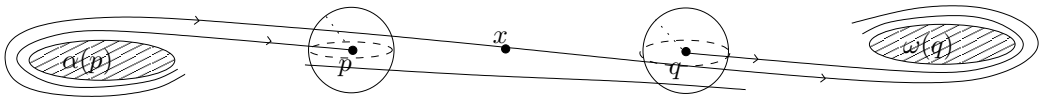

Figura 2.1: Connecting-lemma en flujos de Anosov.

$c(t)$ puede ser ρ-sombreada por la órbita de algún $x \in M$. En particular, $\mathcal{O}^-(x)$ se vuelve ρ-cercana a $\mathcal{O}^-(p)$ y $\mathcal{O}^+(x)$ se vuelve ρ-cercana a $\mathcal{O}^+(q)$, es decir, $x \in W^u(p) \cap W^s(q)$, por tanto $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x) = \omega(q)$. $\square$

Una consecuencia inmediata del *Connecting-lemma en flujos de Anosov* es la siguiente.

Corolario 2.1. *Sea $H \subset M$ un conjunto hiperbólico de X. Si $p, q \in H$ y existen sucesiones $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $z_n \to p$, y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n > 0$ tales que $X_{t_n}(z_n) \to q$. Entonces existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$, y $\omega(x) = \omega(q)$.*

Teorema 2.2. *(*Closing-lemma en flujos de Anosov*) Si X_t es un flujo sobre una variedad cerrada M, $\Lambda \subseteq M$ un conjunto hiperbólico, y $p \in \Lambda$ es un punto recurrente de X_t, entonces p es una singularidad, ó, p puede ser aproximado por puntos periódicos.*

Demostración. Si $p \in Sing(X) \cup Per(X)$ el resultado es trivial. Entonces podemos asumir $p \notin Sing(X) \cup Per(X)$. Como p es recurrente, entonces $p \in \Omega(X)$ luego para toda vecindad U de p y todo $T > 0$ existe un $t \geq T$ tal que $X_t(U) \cap U \neq \emptyset$. Entonces tomando $p = q$, y usando el *connecting-lemma* para flujos de Anosov se tiene el resultado. $\square$

Un estudio más profundo acerca de los dos resultados anteriores se puede ver en los artículos ([10], [11]).

2.2. Flujos seccional-Anosov

En esta sección se hará una introducción a los flujos seccional-Anosov, haciendo énfasis en algunos resultados que serán utilizados durante el trabajo para llegar a la prueba de los teoremas principales.

Notaremos por $m(\cdot)$ la co-norma del ínfimo y por $Det(\cdot)$ el Jacobiano de un operador lineal.

Definición 2.7. *Una descomposición continua DX_t-invariante del espacio tangente de un conjunto invariante $\Lambda \subseteq M$ dada por $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^c_\Lambda$ es dominada si $E^s_x \neq 0$ y $E^c_x \neq 0$ para todo $x \in \Lambda$, y existen constantes $K, \lambda > 0$ tales que*

$$\frac{\|DX_t(x)|_{E^s_x}\|}{m(DX_t(x)|_{E^c_x})} \leq Ke^{-\lambda t}, \textit{para todo } t > 0, \textit{ y todo } x \in \Lambda.$$

El conjunto Λ se dice parcialmente hiperbólico si

$$\|DX_t(x)|_{E^s_x}\| \leq Ke^{-\lambda t}, \textit{para todo } t > 0, \textit{ y todo } x \in \Lambda.$$

Se dice que la dirección central E^c_x es seccionalmente expansora si

$$Det(DX_t(x)|_{L^c_x}) \geq K^{-1}e^{\lambda t}, \textit{para todo } t > 0, \textit{ y todo } x \in \Lambda$$

donde L^c_x es cualquier subespacio 2-dimensional de E^c_x.

Definición 2.8. *Un conjunto compacto invariante es seccional-hiperbólico si este es parcialmente hiperbólico con dirección central seccionalmente expansora y sus singularidades son hiperbólicas. Un flujo es seccional-Anosov si su conjunto maximal invariante $M(X)$ es seccional-hiperbólico.*

De ahora en adelante supondremos siempre que M es una 3-variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ y que X_t es un flujo generado por X.

Definición 2.9. *Una singularidad en una 3-variedad es* Lorenz-like *si sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, y satisfacen $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$.*

Todas las singularidades *Lorenz-like* son hiperbólicas. Por tanto las variedades invariantes $W^s(\sigma)$ y $W^u(\sigma)$ están bien definidas y son tangentes a los subespacios propios asociados con los valores propios $\{\lambda_2, \lambda_3\}$ y $\{\lambda_1\}$ respectivamente. En particular $W^s(\sigma)$ es 2-dimensional y $W^u(\sigma)$ es 1-dimensional. Además la variedad invariante $W^{ss}(\sigma)$ tangente al espacio propio asociado a $\{\lambda_2\}$ también está bien definida. Si γ es una singularidad de X con dos valores propios positivos usaremos la notación $W^{ss}(\gamma) = W^s(\gamma)$.

Lema 2.2. *Sea X_t un flujo seccional-Anosov sobre una 3-variedad compacta M. Si $x \in M(X) \setminus Sing(X)$, entonces $X(x) \notin E^s_x$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe un $x_0 \in M(X) \setminus Sing(X)$ tal que $X(x_0) \in E^s_{x_0}$. Entonces $X(x) \in E^s_x$ para todo $x \in \mathcal{O}(x_0)$ dado que $E^s_{M(X)}$ es DX_t-invariante. Además por la continuidad de la descomposición se tiene que $X(x) \in E^s_x$ para todo $x \in \alpha(x_0)$, por lo cual $\omega(x)$ resulta ser una singularidad para todo $x \in \alpha(x_0)$. En particular $\alpha(x_0)$ contiene una singularidad σ la cual es necesariamente tipo silla, por lo cual tenemos dos casos posibles; $\alpha(x_0) = \{\sigma\}$ ó $\alpha(x_0) \neq \{\sigma\}$.
Si $\alpha(x_0) = \{\sigma\}$, entonces $x_0 \in W^u(\sigma)$. Luego para todo $t \in \mathbb{R}$ definimos el vector unitario

$$v^t = \frac{DX_t(x_0)(X(x_0))}{\|DX_t(x_0)(X(x_0))\|}.$$

Se sigue que $v^t \in T_{X_t(x_0)}W^u(\sigma) \cap E^s_{X_t(x_0)}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Tomemos una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n \to \infty$ tal que la sucesión $(v^{-t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ satisface que $v^{-t_n} \to v^\infty$. Claramente v^∞ es un vector unitario, además como $X_{-t_n}(x_0) \to \sigma$ y la descomposición es continua se tiene que $v^\infty \in T_\sigma W^u(\sigma) \cap E^s_\sigma$, es decir, v^∞ es un vector unitario el cual es simultáneamente expansor y contractor lo cual es imposible. Esta contradicción muestra que no se puede tener $\alpha(x_0) = \{\sigma\}$.
Si $\alpha(x_0) \neq \{\sigma\}$, entonces $(W^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}) \cap \alpha(x_0) \neq \emptyset$. Luego fijando $x_1 \in (W^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}) \cap \alpha(x_0)$ se tiene que $X(x_1) \in E^s_{x_1}$ de lo que sigue una contradicción como en el primer caso reemplazando x_0 por x_1. Esta contradicción muestra que no se puede tener $\alpha(x_0) \neq \{\sigma\}$.
Luego para todo $x \in M(X) \setminus Sing(X)$ se tiene que $X(x) \notin E^s_x$ □

Corolario 2.2. *Sea X_t un flujo seccional-Anosov sobre una 3-variedad compacta M. Si $\sigma \in M(X) \cap Sing(X)$, entonces $M(X) \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$.*

Demostración. Sea $x \in M(X) \cap W^{ss}(\sigma)$. Notemos que $E^s_x = T_x W^{ss}(\sigma)$ para todo $x \in W^{ss}(\sigma)$. Más aun, $W^{ss}(\sigma)$ es una variedad invariante, luego se tiene que $X(x) \in T_x W^{ss}(\sigma)$ para todo $x \in W^{ss}(\sigma)$. Por lo tanto, $X(x) \in E^s_x$ para todo $x \in W^{ss}(\sigma)$, y por el *Lema 2.2* se tiene que todo $x \in M$ que satisface la condición $X(x) \in E^s_x = T_x W^{ss}(\sigma)$ debe ser una singularidad, lo cual implica que $M(X) \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$. □

Lema 2.3. *Sea X_t un flujo seccional-Anosov sobre una 3-variedad compacta M. Si $T_{M(X)} = E^s_{M(X)} \oplus E^c_{M(X)}$ es la descomposición seccional-hiperbólica de X_t, entonces $X(x) \in E^c_x$.*

Demostración. Si $x \in Sing(X)$ el resultado se tiene trivialmente. Por lo tanto, podemos asumir que $x \in M(X) \setminus Sing(X)$. Primero supongamos que $\alpha(x)$ tiene un punto regular y. Tomemos una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n \to \infty$ tal que $X_{-t_n}(x) \to y$. Por el *Lema 2.2* sabemos que $X(y) \notin E^s_y$, así que el ángulo entre $X(y)$ y el subespacio E^s_y es positivo. Por otro lado como $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, entonces se tiene que $X(X_{-t_n}(x)) \to X(y)$, y de la continuidad de la descomposición se sigue que $E^s_{X_{-t_n}(x)} \to E^s_y$, por lo cual el ángulo entre $X(X_{-t_n}(x))$ y E^s_y es acotado pero distinto de cero para n suficientemente grande. De lo anterior y el hecho de que $E^s_{M(X)}$ domina a $E^c_{M(X)}$ podemos concluir que el ángulo entre $DX_{t_n}(X_{-t_n}(x))(X(X_{-t_n}(x)))$ y $DX_{t_n}(E^c_{X_{-t_n}(x)})$ converge a 0 cuando $n \to \infty$. Pero $DX_{t_n}(X_{-t_n}(x))(X(X_{-t_n}(x))) = X(x)$ y $DX_{t_n}(E^c_{X_{-t_n}(x)}) = E^c_x$, es decir, $X(x) \in E^c_x$ como se deseaba.
Ahora asumamos que $x \in W^u(\sigma)$ para algún $\sigma \in M(X) \cap Sing(X)$. Claramente se tiene que $T_\sigma W^u(\sigma) \cap E^s_\sigma = \{0\}$, luego $T_\sigma W^u(\sigma) \subseteq E^c_\sigma$. Así $T_x W^u(\sigma) \subseteq E^c_x$, entonces como $X(x) \in T_x W^u(\sigma)$ se tiene que $X(x) \in E^c_x$. □

Lema 2.4. *Toda singularidad de un flujo X_t seccional-Anosov sobre una 3-variedad compacta, es* Lorenz-like *o tiene dos valores propios positivos.*

Demostración. Notemos por $T_{M(X)} = E^s_{M(X)} \oplus E^c_{M(X)}$ la descomposición seccional-hiperbólica. Por el *Lema 2.3* se tiene que $X(x) \in E^c_x$ y por tanto $dim(E^s_x) = 1$ para todo $x \in M(X)$. En particular $dim(E^s_\sigma) = 1$, luego σ tiene un valor propio contractor (fuerte) $\lambda_2 < 0$. Si σ tiene un único valor propio contractor, entonces σ tiene dos valores propios positivos y el resultado se tiene. Así, podemos asumir que σ tiene otro valor propio negativo λ_3. Claramente por dominación $\lambda_2 < \lambda_3 < 0$. Como M es una 3-variedad y ninguna singularidad

en un conjunto seccional-hiperbólico puede ser atractor (por la condición de ser seccionalmente expansor), entonces existe un tercer autovalor $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < \lambda_1$ de σ. Ahora por la condición de expansión de volumen se sigue que $-\lambda_3 < \lambda_1$. En este caso tenemos que σ es *Lorenz-like*. □

Teorema 2.3. *Toda singularidad en la clausura de la variedad inestable de una órbita periódica de un flujo seccional-Anosov sobre una* 3*-variedad compacta es Lorenz-like*

Demostración. Sean X_t un flujo seccional-Anosov, y $\mathcal{O}$ una órbita periódica de X_t. Sea $\sigma \in Cl(W^u(\mathcal{O}))$ una singularidad fija. Si σ no es *Lorenz-like*, entonces $W^s(\sigma) = W^{ss}(\sigma)$ debe ser 1-dimensional. Como $\sigma \in Cl(W^u(\mathcal{O}))$ y $\sigma \notin \mathcal{O}$, entonces se tiene que $Cl(W^u(\mathcal{O}))$ intersecta a una de las dos componentes conexas de $W^s(\sigma) \setminus \{\sigma\}$, y además como $Cl(W^u(\mathcal{O}))$ es un conjunto invariante, entonces contiene a una de las dos componentes conexas de $W^s(\sigma) \setminus \{\sigma\}$, sin embargo tales componentes conexas están fuera de $M(X)$ por el *Corolario 2.2*. Por tanto σ debe ser *Lorenz-like*. □

Sea M una variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Dado $q \in M \setminus Sing(X)$ se define N_q como el complemento ortogonal de E_q^X. Dado $v \in N_q$ notaremos como $P_t(q)v$ la proyección ortogonal de $DX_t(q)v$ sobre $N_{X_t(q)}$. Esto define un flujo P_t llamado *flujo lineal de Poincaré*.
Dado un conjunto no singular invariante $\Lambda \subseteq M$ se define el espacio fibrado $N_\Lambda = \cup_{q\in\Lambda} N_q$. Decimos que P_t es hiperbólico sobre Λ si existe una descomposición continua P_t-invariante $N_\Lambda = G_\Lambda \oplus F_\Lambda$ tal que P_t contrae G_Λ^X y expande F_Λ^X.

Lema 2.5. *Un conjunto no singular compacto invariante es hiperbólico si, y solo si el flujo de Poincaré es hiperbólico.*

Sea Λ un conjunto compacto invariante de X, y definamos $\Lambda^* = \Lambda \setminus Sing(X)$. Luego los subespacios $F_{\Lambda^*} = N_{\Lambda^*} \cap E^c_{\Lambda^*}$ y $G_{\Lambda^*} = N_{\Lambda^*} \cap (E^s_{\Lambda^*} \oplus E^X_{\Lambda^*})$ son invariantes por P_t.

Lema 2.6. *Existen constantes $K, \lambda > 0$ tales que*

$$m(P_t(x)|_{F_x})m(DX_t(x)|_{E_x^X}) \geq Ke^{\lambda t}$$

para todo $x \in \Lambda^*$ y $t > 0$.

Demostración. Por la descomposición seccional-hiperbólica existen constantes $K, \lambda > 0$ tales que

$$|Det(DX_t(x)|_{L_x^c})| \geq K^{-1}e^{\lambda t},$$

para todo $t > 0$, $x \in \Lambda$, y todo subespacio 2-dimensional L_x^c de E_x^c. Sean $x \in \Lambda^*$ fijo, y $u, v \in T_xM$. Sea $A(u, v)$ el área del paralelogramo generado por $u, v \in T_xM$. Si $u \in F_x$ y $v \in E_x^X$ se tiene por la ortogonalidad que

$$A(u, v) = \|u\|\|v\|.$$

Luego de la definición de P_t se sigue que

$$A(DX_t(x)u, DX_t(x)v) = \|P_t(x)u\|\|P_t(x)v\|.$$

Pero $A(DX_t(x)u, DX_t(x)v) = |Det(DX_t(x)|_{L_x^c})|A(u, v)$ donde L_x^c es el subespacio generado por $\{u, v\}$. Como por definición $u \in E_x^c$, y por el *Lema 2.3* $v \in E_x^c$, entonces $L_x^c \subseteq E_x^c$, y por lo tanto

$$\|P_t(x)u\|\|DX_t(x)v\| \geq Ke^{\lambda t}\|u\|\|v\|.$$

Como u, v son arbitrarios, entonces se tiene el resultado. □

Teorema 2.4. *(*Lema hiperbólico*) Todo subconjunto compacto invariante sin singularidades de un conjunto seccional-hiperbólico, es hiperbólico.*

Demostración. Sea Λ un conjunto seccional-hiperbólico de un campo vectorial X sobre una variedad compacta M. Entonces existe una constante $A > 0$ tal que $\|X(x)\| \leq A$ para todo $x \in M$. Sea $H \subseteq \Lambda$ un conjunto compacto invariante sin singularidades de X. Entonces existe $B > 0$ tal que $\|X(x)\| \geq B$ para todo $x \in H$. Por lo tanto

$$m(DX_t(x)|_{E_x^X}) \leq \|DX_t(x)\frac{X(x)}{\|X(x)\|}\| = \frac{\|X(X_t(x))\|}{\|X(x)\|} \leq \frac{A}{B}, \quad \forall x \in H, \forall t > 0. \tag{2.1}$$

Ahora usando el *Lema 2.2* y (2.1) se llega a que

$$m(P_t(x)|_{F_x})\frac{A}{B} \geq m(P_t(x)|_{F_x})m(DX_t(x)|_{E_x^X}) \geq Ke^{\lambda t}$$

y así

$$m(P_t(x)|_{F_x}) \geq Ce^{\lambda t}, \quad \forall x \in H, \forall t > 0.$$

Por lo tanto P_t expande en F_H.

Definimos la descomposición $N_H = G_H \oplus F_H$ donde $G_H = N_H \cap (E^s_H \oplus E^X_H)$. Como P_t contrae en G_H se sigue del *Lema 2.5* que H es hiperbólico. □

Una consecuencia directa del *Lema hiperbólico* es la siguiente.

Corolario 2.3. *Todos los flujos seccional-Anosov sobre variedades cerradas son Anosov.*

Demostración. Supongamos que M es una variedad cerrada y X_t es un flujo seccional-Anosov sobre M, entonces $M(X) = M$. Luego el *Corolario 2.2* implica que el campo X no tiene singularidades sobre M, y por el *Lema hiperbólico* se concluye que X_t es Anosov. □

3 Secciones transversales singulares ∂-adaptadas

Ahora construiremos una clase especial de secciones transversales asociadas a singularidades *Lorenz-like* llamadas secciones transversales singulares.

3.1. Secciones transversales

Sea M una variedad compacta conexa. Dada una subvariedad W de M notaremos por ∂W e $Int(W)$ su frontera e interior respectivamente.

Definición 3.1. *Sea M una variedad compacta conexa, y $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Una sección transversal de X es una subvariedad compacta Σ de codimension 1, para la cual existe una subvariedad W con $\Sigma \subseteq Int(W)$ tal que X es transverso a $Int(W)$. Las fronteras vertical y horizontal de la sección transversal serán notadas como $\partial^v\Sigma$ y $\partial^h\Sigma$ respectivamente.*

Se sigue de la teoría de la variedad estable (Ver [8] pag 164) que $E^s_{M(X)}$ se puede extender a E^s_U, donde U es una vecindad de $M(X)$. Más aun, E^s_U es tangente a una foliación contractora 1-dimensional $\mathcal{F}^s$ definida en U. Notaremos por L_x la folia de $\mathcal{F}^s$ que contiene a $x \in U$. Por lo tanto, $T_xL_x = E^s_x$, para todo $x \in M(X)$. Resulta también que $\partial\Sigma$ puede ser elegida de tal forma que su frontera vertical este formada por dos folias de $\mathcal{F}^s$, y su frontera horizontal este formada por dos curvas transversales a $\mathcal{F}^s$. El espacio de folias $\Sigma/\mathcal{F}^s$ de $\mathcal{F}^s$ se pude ver como un intervalo compacto. Más aun, podemos dar un orden natural " $<$ " sobre este intervalo. La folia L también denotará el correspondiente elemento del espacio de folias.

Definición 3.2. *Una banda vertical en Σ es un subconjunto $V \subseteq \Sigma$ que es $\mathcal{F}^s$-invariante, es decir, V es unión de folias de $\mathcal{F}^s$. Se sigue que ∂V es formada por dos folias de $\mathcal{F}^s$, V^- y V^+, y dos curvas transversas a $\mathcal{F}^s$ contenidas en $\partial^h\Sigma$. La unión de estas curvas sera notada como $\partial^v V$ y $\partial^h V$ respectivamente.*

Notemos que $V^- < V^+$ en el orden natural. Por otro lado, si $L < L'$ son folias de $\mathcal{F}^s$, notaremos por $[L, L']$ (respectivamente (L, L')) la única banda vertical cerrada (respectivamente abierta) tal que $\partial^v[L, L'] = L \cup L'$ (respectivamente $\partial^v(L, L') = L \cup L'$). Una banda vertical es cerrada si $V^- \cup V^+ \subseteq V$, y es abierta si $(V^- \cup V^+) \cap V = \emptyset$. En particular, una banda vertical V satisface $V = [V^-, V^+]$ cuando es cerrada, y satisface $V = (V^-, V^+)$ cuando es abierta. Para cualquier banda vertical V definimos la banda vertical abierta $Int^v(V)$ como $Int^v(V) = (V^-, V^+)$. Se dice que una banda vertical V está alrededor de una folia L si se cumple que $L \subseteq Int^v(V)$.
Observemos que toda banda vertical V es una sección transversal de X.

Ahora definiremos la función de retorno Π_Σ asociada con la sección transversal Σ:
Su dominio está definido por

$$Dom(\Pi_\Sigma) = \{x \in \Sigma : X_t(x) \in \Sigma, \text{para algún } t > 0\},$$

definimos el tiempo de retorno como la función $t_\Sigma : Dom(\Pi_\Sigma) \to (0, \infty)$ donde

$$t_\Sigma(x) = \text{ínf}\{t > 0 : X_t(x) \in \Sigma\},$$

y la función de retorno está definida como $\Pi_\Sigma : Dom(\Pi_\Sigma) \subseteq \Sigma \to \Sigma$, donde

$$\Pi_\Sigma(x) = X_{t_\Sigma(x)}(x).$$

Definición 3.3. *Dado $\Sigma \in M$, decimos que un punto $q \in M$ satisface la propiedad $(P)_\Sigma$ si cumple las siguientes condiciones:*

1. *$Cl(\mathcal{O}^+(q)) \cap \Sigma = \emptyset$.*

2. *Existe un arco abierto $I \subseteq M$ con $q \in \partial M$ tal que $\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma \neq \emptyset$ para todo $x \in I$.*

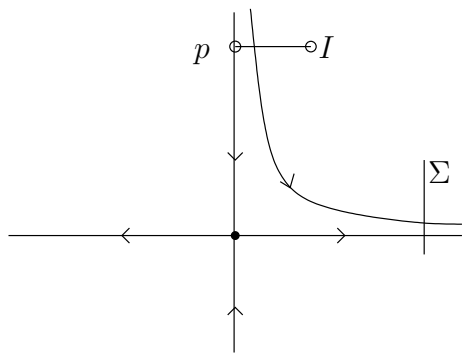

Figura 3.1: Propiedad $(P)_\Sigma$ en dimensión 2.

Teorema 3.1. *Sea M una 3-variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Si $q \in M$ y el $\omega(q)$ es seccional-hiperbólico, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *$\omega(q)$ es una órbita cerrada.*

2. *q satisface la propiedad $(P)_\Sigma$ para algún conjunto cerrado $\Sigma \subseteq M$.*

Este teorema da una caracterización de los conjuntos ω-límite en flujos seccional-Anosov, y la prueba se puede ver en ([3] pag 59)

3.2. Secciones transversales singulares

Ahora daremos la definición de sección transversal singular asociada a una singularidad *Lorenz-like* σ de X. Pero primero debemos notar que es posible elegir un sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de σ al cual X es restringido como se muestra en la *Figura 3.2*. En esta figura los rectángulos S^+, S^-, S^l, y S^r corresponden a las secciones transversales $\{x_2 = 1\}$, $\{x_2 = -1\}$, $\{x_1 = -1\}$, y $\{x_1 = 1\}$ respectivamente. Notemos que el conjunto $\{x \in S^+ \cup S^- : \mathcal{O}^+(x) \cap (S^l \cup S^r) = \emptyset\}$ es formado por dos curvas verticales $l^+ \subseteq S^+$ y $l^- \subseteq S^-$ ambas contenidas en $W^s(\sigma)$.

Definición 3.4. *Una sección transversal singular asociada a una singularidad* Lorenz-like *σ, es una sección transversal S igual a $S^+ \cup S^-$. La curva l_S igual a $l^+ \cup l^-$ es llamada la curva*

singular de S y cumple que para todo $x \in S \cap Dom(\Pi_S)$ el tiempo de retorno $t_S(x) \to \infty$ uniformemente cuando x se aproxima a l_S. En otras palabras

$$\lim_{\delta \to 0^+} \inf\{t_S(x) : x \in S \cap Dom(\Pi_S), d(x, l_S) \leq \delta\} = \infty \tag{3.1}$$

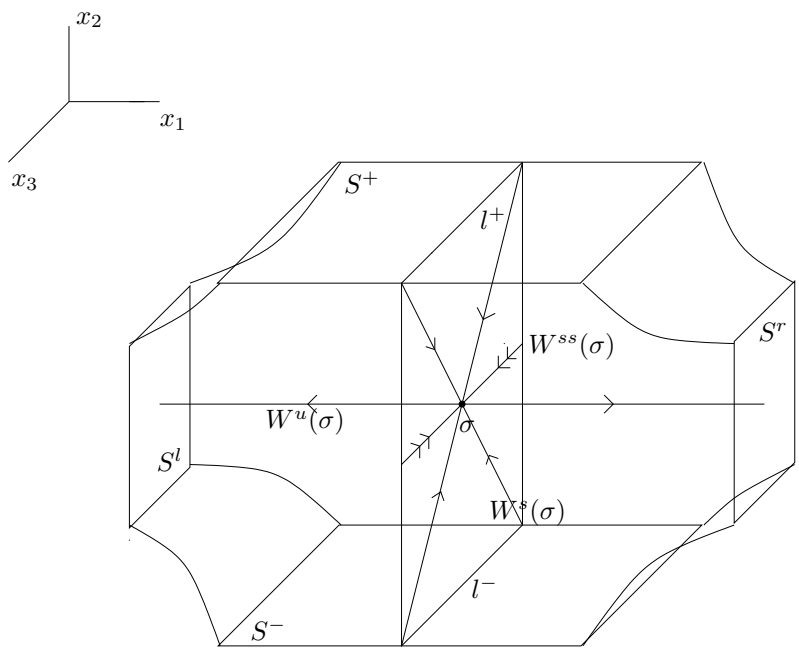

Figura 3.2: Sección transversal singular asociada a una singularidad *Lorenz-like*.

Ahora veremos algunas características importantes que cumplen este tipo de secciones transversales.

Lema 3.1. *Para toda sección transversal singular S asociada a una singularidad* Lorenz-like*, existe un $\delta > 0$ tal que las siguientes propiedades se tienen para toda banda vertical $V \subseteq B_\delta(l_S)$ (donde $B_\delta(l_S)$ es la bola centrada en l_S de radio δ):*

(1) $Dom(\Pi_V)$ es $\mathcal{F}^s$-invariante.

(2) Si L es una folia de $\mathcal{F}^s$ y $L \subseteq Dom(\Pi_V)$, entonces existe una folia $f(L)$ de $\mathcal{F}^s$ tal que $\Pi_V(L) \subseteq Int(f(L))$ y la restricción $\Pi_V|_L : L \to f(L)$ es continua. En particular $\Pi_V(L) \cap \partial^h V = \emptyset$.

Demostración. Como S es una sección transversal singular, por (3.1) podemos seleccionar δ de tal manera que si $V \subseteq B_\delta(l_S)$, entonces $t_V(x)$ es uniformemente grande para todo $x \in Dom(\Pi_V)$. Fijemos una folia L que intersecte a $Dom(\Pi_V)$ en algún punto x. Podemos asumir que $L \subseteq W^{ss}(x)$ proyectando a través del flujo. Como $t_V(x)$ es uniformemente grande, entonces se tiene que $X_{t_V(x)}(L)$ se vuelve cercano a $\Pi_V(x)$. Luego proyectando sobre V obtenemos *(1)*. Ahora como $f(L) = L_{\Pi_V(x)}$, entonces *(2)* es consecuencia del *teorema del flujo tubular* (Ver [8] pag 39). □

Ahora vamos a definir un campo de conos en S, lo cual será usado más adelante. Para esto vamos a extender la dirección central E^c de $M(X)$ a una dirección seccionalmente expansora (no necesariamente invariante) sobre una vecindad de $M(X)$, la cual también será notada como E^c. Sea S una sección transversal singular asociada con una singularidad *Lorenz-like* $\sigma \in M(X)$. Se sigue que E^c también está definido en S. Ahora vamos a considerar el campo de líneas F_S en S dado por

$$F_x = T_xS \cap E^c_x \text{ para todo } x \in S.$$

Es claro que F_S es transverso a $\mathcal{F}^s|_S$. Este campo de líneas induce un campo de conos en S que se define de la siguiente manera. Fijando $\alpha > 0$ pequeño y $x \in S$ se define el cono

$$C_\alpha(x) = \{v_x \in T_xS : \angle(v_x, F_x) \leq \alpha\}$$

donde $\angle(v_x, F_x)$ denota el ángulo entre v_x y la línea F_x. La función C_α que a cada $x \in S$ le asigna $C_\alpha(x)$ es un campo de conos con ángulo α en S centrado en F_S. Si el ángulo α es elegido suficientemente pequeño, entonces el campo de conos resulta transversal a la foliación $\mathcal{F}^s|_S$, es decir, $T_xL \nsubseteq C_\alpha(x)$ para toda folia L de $\mathcal{F}^s|_S$.

Lema 3.2. *Existe una vecindad U de $M(X)$ para la cual se tiene la siguiente propiedad: Para todo $\lambda > 0$ y toda sección transversal singular $S \subseteq U$ existe un $\delta > 0$ tal que si $V \subseteq B_\delta(l_S)$ es una banda vertical, entonces existe un campo de conos C_α en V transverso a $\mathcal{F}^s$ tal que las siguientes propiedades se tienen para todo $x \in Dom(\Pi_V)$ donde Π_V es diferenciable, y todo $v_x \in C_\alpha(x)$:*

(1) $D\Pi_V(x)(C_\alpha(x)) \subseteq Int(C_{\alpha/2}(\Pi_V(x)))$.

(2) $\|D\Pi_V(x)v_x\| \geq \lambda\|v_x\|$

Demostración. En primer lugar como $M(X)$ es un conjunto atractor por su definición, entonces $M(X)$ es *Lyapunov estable*. Entonces para todo $\alpha \in (0,1]$ existe una vecindad U_α de $M(X)$ y constantes $T_\alpha, K_\alpha, \lambda_\alpha > 0$ tales que:

(a) La descomposición seccional-hiperbólica $T_{M(X)} = E^s_{M(X)} \oplus E^c_{M(X)}$, se puede extender a una descomposición continua $T_{U_\alpha} = E^s_{U_\alpha} \oplus E^c_{U_\alpha}$ sobre U_α, donde $E^s_{U_\alpha}$ es invariante.

(b) Si $x \in U_\alpha$ y $t \geq T_\alpha$, entonces $DX_t(x)(C_\alpha(E^c_x)) \subseteq Int(C_{\alpha/2}(E^c_{X_t(x)}))$.

(c) Si $x \in U_\alpha$ es no singular, entonces $X(x) \in C_\alpha(E^c_x)$ y si $t \geq T_\alpha$ y $v_x \in C_\alpha(E^c_x) \cap N_x$, entonces

$$\|P_t(x)v_x\|\|X(X_t(x))\| \geq K_\alpha e^{\lambda_\alpha t}\|v_x\|\|X(x)\|,$$

donde N_x es el complemento ortogonal de $X(x)$ en T_xM; y $P_t(x)$ es el *flujo lineal de Poincaré* inducido por X.

Elegimos $\alpha \in (0,1]$ de manera que

$$\text{ínf}\{\angle(v_x, E^s_x) : x \in U_\alpha, v_x \in C_\alpha(E^c_x) \setminus \{0\}\} > 0. \tag{3.2}$$

Para tal α sean $T_\alpha, K_\alpha, \lambda_\alpha > 0$ satisfaciendo $(a)-(c)$. Definimos $U = U_\alpha$. Tomando $\lambda > 0$ y una sección transversal singular $S \subseteq U$, fijamos $D > 0$ tal que $\frac{\|X(x)\|}{\|X(y)\|} \geq D$, para todo $x, y \in S$. Fijamos $T_\lambda > 0$ grande tal que $K_\alpha e^{\lambda_\alpha t} D \geq \lambda$ para todo $t \geq T_\lambda$. Tomamos $\delta > 0$ tal que si $V \subseteq B_\delta(l_S)$ es una banda vertical, entonces $t_V(x) > T_\lambda$, para todo $x \in Dom(\Pi_V)$. Por (3.2) se tiene que C_α es transverso a $\mathcal{F}^s$, luego $D\Pi_V(x) = P_{t_V(x)}(x)v_x$. Entonces por *(b)* se tiene que $D\Pi_V(x)(C_\alpha(x)) \subseteq Int(C_{\alpha/2}(\Pi_V(x)))$ para todo $x \in Dom(\Pi_V)$ donde $D\Pi_V(x)$ exista. Además la propiedad *(c)* implica que $\|D\Pi_V(x)v_x\| \geq K_\alpha e^{\lambda_\alpha t_V(x)} D\|v_x\|$, luego tomando $t = t_V(x)$ se tiene que $\|D\Pi_V(x)v_x\| \geq \lambda\|v_x\|$, lo que prueba el resultado. □

3.3. Secciones transversales singulares ∂-adaptadas

Definimos este tipo de secciones transversales singulares porque queremos quitar el caso para el que la función de retorno se vuelve discontinua. Este caso se puede dar cuando la

trayectoria positiva entre $I \subseteq Dom(\Pi_S)$ y $\Pi_S(I)$ cae sobre $\partial^v S$ en un punto intermedio $z = \Pi_S(x)$ como se muestra en la *Figura 3.3*.

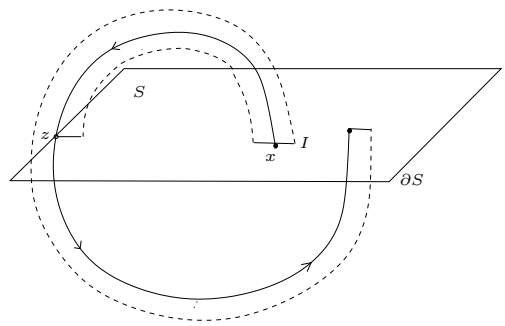

Figura 3.3: Discontinuidad en una función de retorno.

Definición 3.5. *Sea S una sección transversal singular de un campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Dado $R \subseteq S$, decimos que S es R-adaptada si la órbita positiva de todo punto $x \in R$ no intersecta a $S \setminus R$. En otras palabras $X_t(z) \notin S \setminus R$ para todo $z \in R$, y todo $t > 0$.*

Definición 3.6. *Una sección transversal singular ∂-adaptada de X es una sección transversal singular S la cual es $\partial^v S$-adaptada. Equivalentemente, las órbitas de X que inician en $\partial^v S$ no intersectan al $Int(S)$.*

Lema 3.3. *Para toda sección transversal singular S existe un $\delta > 0$ tal que si $V \subseteq B_\delta(l_S)$ es una banda vertical ∂-adaptada en S, entonces $Dom(\Pi_V)$ es abierto en V y $\Pi_V(x)$ es continua.*

Demostración. Tomemos δ como en el *Lema 3.1*. Para todo $A \subseteq M$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ definimos

$$X_B(A) = \{X_t(x) : x \in A, t \in B\},$$

escribiremos $X_B(x)$ en cambio de $X_B(\{x\})$ cuando $A = \{x\}$.
Para todo $x \in Dom(\Pi_V)$ tenemos que $X_{[0,t(x)]}(x) \cap \partial S = \emptyset$ pues S es ∂-adaptada y $X_t(x) \in Int^v(S)$. Como $X_{[0,t(x)]}(x)$ y ∂S son compactos, entonces existe un $\rho > 0$ tal que

$$X_{[0,t(x)]}(B_\rho(x)) \cap \partial S = \emptyset.$$

Ahora como $Int^v(V)$ es abierto en S y $X_{t(x)}(x) \in X_{[0,t(x)]}(B_\rho(x)) \cap Int^v(S)$, podemos seleccionar ρ de tal manera que $V \cap B_\rho(x) \subseteq Dom(\Pi_V)$ y $X_{[0,t(x)]}(y) \cap \partial S = \emptyset$ para todo $y \in V \cap B_\rho(x)$ como se ve en la *Figura 3.4*. Entonces $x \in Int(Dom(\Pi_V))$. Como $x \in Dom(\Pi)$

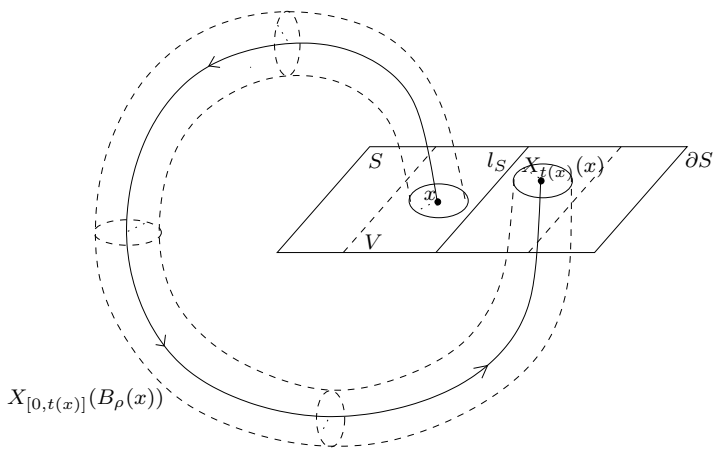

Figura 3.4: Banda ∂-adaptada.

es arbitrario, entonces $Dom(\Pi)$ es abierto. Además como consecuencia del *teorema del flujo tubular* se tiene que Π_V es continua en x, y por lo tanto se tiene el resultado deseado. $\square$

Notemos que Π_V resulta de clase C^1, pues $X(x) \notin T_x L_x$ para todo $x \in V$.

Lema 3.4. *Existe un $\delta > 0$ tal que, si $Q \subseteq B_\delta(l_S)$ es una banda vertical abierta cuya clausura $Cl(Q) = [Q^-, Q^+]$ satisface*

$$\partial^v Cl(Q) \cap \Pi^{-1}_{Cl(Q)}(Int(Cl(Q))) = \emptyset,$$

entonces Q es una banda vertical ∂-adaptada.

Demostración. Tomemos δ como en el *Lema 3.3*. Supongamos que Q no es ∂-adaptada. Entonces existe un punto $x \in \partial^v Q$ tal que $X_t(x) \in Q$ para algún $t > 0$. Definamos

$$t_m = \text{mín}\{t > 0 : X_t(x) \in Q\},$$

es claro que t_m está bien definido. Además como Q es una banda vertical abierta y $X_{t_m}(x) \in Q \subseteq Int(Cl(Q))$, entonces $\Pi_{Cl(Q)}(x) = X_{t_m}(x) \in Int(Cl(Q))$, por lo tanto $x \in \Pi^{-1}_{Cl(Q)}(Int(Cl(Q)))$.

De lo anterior y del hecho que $\partial^v Q = \partial^v Cl(Q)$ se deduce que

$$\partial^v Cl(Q) \cap \Pi^{-1}_{Cl(Q)}(Int(Cl(Q))) \neq \emptyset$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto Q es ∂-adaptada. $\square$

Lema 3.5. *Sea S una sección transversal singular. Existe un $\delta > 0$ tal que si $V \subseteq B_\delta(l_S)$ es una banda vertical ∂-adaptada en S que no intersecta a la variedad estable de las singularidades, entonces para toda banda vertical cerrada $\bar{V} \subseteq Int^v(V)$ y todo $x \in Dom(\Pi_V)$ con $\Pi_V(x) \subseteq Int^v(\bar{V})$, existe una banda vertical cerrada $B_x \subseteq Int^v(V)$ (Ver* Figura 3.5*) alrededor de L_x que satisface las siguientes propiedades:*

(1) $B_x \subseteq Dom(\Pi_V)$ y $\Pi_V|_{B_x}$ es continua.

(2) $\Pi_V(B) \subseteq \bar{V}$.

(3) $\Pi_V(\partial^v B_x) \subseteq \partial^v \bar{V}$.

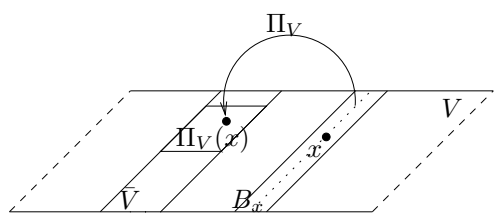

Figura 3.5: Propiedades (1), (2), *y* (3).

Demostración. Fijaremos δ como en el *Lema 3.3* y una banda vertical $V \subseteq B_\delta(l_S)$. Notaremos por $\mathcal{B}$ el conjunto de las bandas verticales abiertas $B \subseteq V$ alrededor de L_x que satisfacen las condiciones (1) y (2) del lema. Como V es ∂-adaptada, entonces Π_V es continua y $Dom(\Pi_V)$ es abierto en V. Más aun, como $\Pi_V(x) \in \bar{V} \subseteq Int^v(V)$, del *teorema del flujo tubular* se sigue que $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Dotando $\mathcal{B}$ con el orden de inclusión, se sigue del *lema de Zorn* que existe un elemento maximal (B_x^-, B_x^+) de $\mathcal{B}$ alrededor de L_x.

Definimos $B_x = [B_x^-, B_x^+]$. Se sigue de la definición que (B_x^-, B_x^+) está alrededor de L_x, por lo tanto B_x también está alrededor de L_x. Veamos que $B_x \subseteq V$. Para probar esto

solo es necesario ver que $\partial^v B_x \subseteq V$, pues $Int^v(B_x) = (B_x^-, B_x^+) \subseteq V$ por definición de $\mathcal{B}$. Supongamos que $\partial^v B_x \nsubseteq V$. Como $(B_x^-, B_x^+) \subseteq V$, entonces se tiene que $B_x^- \nsubseteq V$ ó $B_x^+ \nsubseteq V$. Primero asumamos que $B_x^- \nsubseteq V$, entonces $B_x^- = V^-$. Elegimos $a \in V^-$ e $I \subseteq (B_x^-, B_x^+)$ de tal forma que $a \in \partial I$. Entonces como V es ∂-adaptada se tiene que $Cl(\mathcal{O}^+(a)) \cap \bar{V} = \emptyset$, pues de otra forma como $\bar{V} \subseteq V$ se tiene que $a \in Dom(\Pi_V)$, lo que contradice la maximalidad de B_x. Además como $I \subseteq (B_x^-, B_x^+) \in \mathcal{B}$, entonces

$$Cl(\mathcal{O}^+(x)) \cap \bar{V} \neq \emptyset \quad \forall x \in I.$$

Es decir, a satisface la propiedad $(P)_{\bar{V}}$, entonces por el *Teorema 3.1* se tiene que a pertenece a la variedad estable de una órbita periódica, o a pertenece a la variedad estable de una singularidad. El primer caso no se tiene pues contradice el λ-*lema* (Ver [8] pag 39), y el segundo caso contradice la hipótesis pues $a \in [V^-, V^+]$. Esta contradicción prueba que $B_x^- \subseteq V$. De manera análoga se prueba que $B_x^+ \subseteq V$, y por lo tanto $\partial^v B_x \subseteq Dom(\Pi_V)$. Pero $(B_x^-, B_x^+) \subseteq Dom(\Pi_V)$ por la definición de $\mathcal{B}$.
Luego $B_x \subseteq Dom(\Pi_V)$. Además como V es ∂-adaptada, tenemos que $\Pi_V|_{B_x}$ es continua por lo cual satisface (1). Por otro lado $Int^v(B_x)$ satisface (2), pues por la definición de $\mathcal{B}$ se tiene que $Int^v(B_x) = (B_x^-, B_x^+) \in \mathcal{B}$, entonces (2) sigue de que $\Pi_V|_{B_x}$ es continua y $\bar{V}$ es una banda cerrada. Además como (B_x^-, B_x^+) es maximal, entonces se tiene (3). Por lo tanto se tiene el resultado deseado. □

Lema 3.6. *Sea S una sección transversal singular. Existe un $\delta > 0$ tal que si $V \subseteq B_\delta(l_S)$ es una banda vertical ∂-adaptada en S tal que $[V^-, V^+]$ no intersecta a la variedad estable de las singularidades. Entonces V contiene un punto no errante si, y solo si V contiene un punto periódico.*

Demostración. Fijaremos δ como en el *Lema 3.5*, y una banda vertical $V \subseteq B_\delta(l_S)$. Como todo punto periódico es no errante, entonces esta implicación se tiene trivialmente por lo cual solo probaremos la implicación directa. Asumamos que V tiene un punto $p \in \Omega(X)$. Entonces $Dom(\Pi_V) \neq \emptyset$, así existe un $q \in V$ tal que $\Pi_V(q)$ está definido. Elegimos una sucesión de bandas verticales cerradas $(\bar{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\bar{V}_n \subseteq V$ que satisfagan las siguientes propiedades para n grande:

(a) $q, \Pi_V(q) \in Int^v(\bar{V}_n)$;

(b) $\bar{V}_n \subseteq Int^v(\bar{V}_{n+1})$;

(c) la frontera vertical de $\bar{V}_n$ es $\frac{1}{n}$-cercana a la frontera vertical de V.

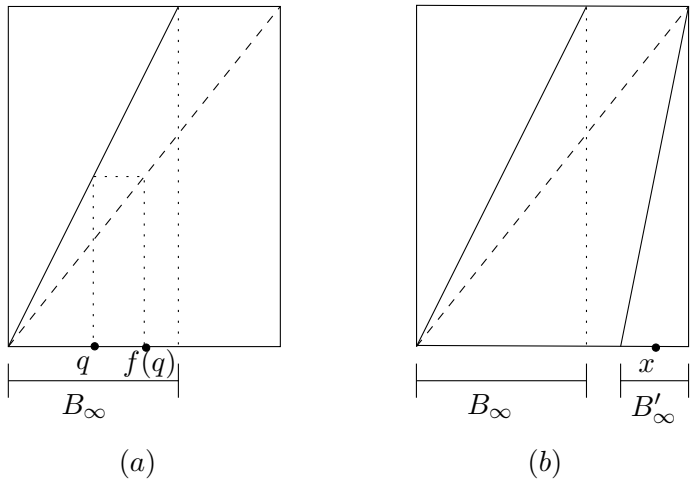

Figura 3.6: Gráficos de $f|_{B_\infty}$ y $f|_{B_\infty \cup B'_\infty}$.

Por hipótesis, $[V^-, V^+]$ no intersecta a $W^s(Sing(X))$. Luego podemos aplicar el *Lema 3.5* a las bandas $V, \bar{V}_n$ y al punto $x = q$ con el objetivo de obtener una sucesión de bandas verticales cerradas $(B_{q,n})_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_{q,n} \subseteq V$ satisfaciendo las condiciones $(1) - (3)$ del *Lema 3.5*. De (b) se sigue que $B_{q,n} \subseteq Int^v(B_{q,n+1})$ para todo n, por lo tanto

$$B_\infty = \bigcup_n B_{q,n}$$

es una banda vertical abierta en V contenida en el $Dom(\Pi_V)$. Además $\Pi_V|_{B_\infty}$ es continua por el *Lema 3.5*(1).

Por otro lado, Π_V preserva folias, y así considerando V como un subintervalo del espacio de folias $S/\mathcal{F}^s$, se obtiene una función 1-dimensional inducida $f : Dom(f) \subseteq V \to V$, que resulta continua en los puntos donde Π_V es continua pues $\mathcal{F}^s$ es una foliación continua. La propiedad (c), el *Lema 3.5*(3), y el hecho de que Π_V preserva folias, implica que los límites laterales

$$\lim_{L\to(B_\infty^-)^+} f(L) \text{ y } \lim_{L\to(B_\infty^+)^-} f(L)$$

existen y pertenecen a distintos elementos del conjunto $\{V^-, V^+\}$.
Si $[B_\infty^-, B_\infty^+] \subseteq V$, entonces por la existencia de los límites y el hecho que $\Pi_V|_{B_\infty}$ es continua, se tiene que f tiene un punto fijo en V. Este punto fijo corresponde a la folia cuya imagen por Π_V está contenida en si misma. Consecuentemente, Π_V tiene un punto fijo correspondiente a una órbita periódica que intersecta a V, y así el resultado se tiene en este caso.
Si $[B_\infty^-, B_\infty^+] \nsubseteq V$, entonces $B_\infty^- = V^-$, ó, $B_\infty^+ = V^+$. Supongamos que $B_\infty^- = V^-$, entonces se tiene que $B_\infty^+ \subset V$ porque en caso contrario se tiene $B_\infty = V$ lo cual implica que f tiene un punto fijo pues V tiene un punto no errante, y en este caso el resultado se tiene. También podemos asumir que $f|_{B_\infty}$ preserva la orientación pues en caso contrario $f|_{B_\infty}$ tiene un punto fijo y el resultado se tiene. Se sigue que el gráfico de $f|_{B_\infty}$ en V es como en la *Figura 3.6*(a). Pero p es un punto no errante, por lo tanto $Int^v(V \setminus B_\infty) \cap Dom(f_V) \neq \emptyset$, luego podemos elegir un punto $x \in Int^v(V \setminus B_\infty) \cap Dom(f_V)$. Reemplazando q por x en el argumento anterior, se obtiene una banda vertical B'_∞ que contiene a x de manera que el gráfico de $f|_{B_\infty \cup B'_\infty}$ es justo como el de la *Figura 3.6*(b) donde q no necesariamente es un punto no errante. El resultado se tiene pues una función como la de la *Figura 3.6*(b) tiene puntos periódicos. $\square$

Definiremos ahora la función de holonomía $\Pi_{D,R}$ de un conjunto $D \subseteq M$ hacia un conjunto $R \subseteq S$.
Su dominio está definido por

$$Dom(\Pi_{D,R}) = \{x \in D : X_t(x) \in R, \text{para algún } t > 0\},$$

definimos el tiempo de vuelo como la función $t_{D,R} : Dom(\Pi_{D,R}) \to (0, \infty)$ donde

$$t_{D,R}(x) = \text{ínf}\{t > 0 : X_t(x) \in R\},$$

y la función de holonomía está definida como $\Pi_{D,R} : Dom(\Pi_{D,R}) \subseteq D \to R$ donde

$$\Pi_{D,R}(x) = X_{t_{D,R}(x)}(x).$$

Observemos que la función de holonomía $\Pi_{D,S}$ puede ser discontinua, ya que la trayectoria positiva entre $I \subseteq Dom(\Pi_{D,S})$ y $\Pi_{D,S}(I)$ puede golpear a $\partial^v S$ en un punto intermedio

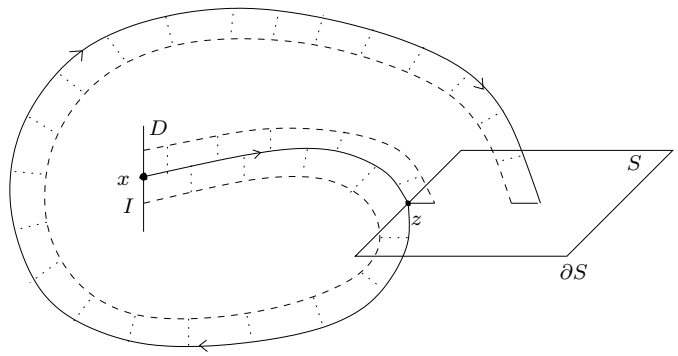

Figura 3.7: Discontinuidad en una función de holonomía.

$z = \Pi_{D,S}(x)$ como se ve en la *Figura 3.7* (la discontinuidad en funciones de holonomía es análoga a la discontinuidad en funciones de retorno).

Lema 3.7. *Sea $R \subseteq S$ cerrado, tal que S es una sección transversal singular R-adaptada. Si $D \subseteq M$ es disyunto de S, entonces $Dom(\Pi_{D,S\setminus R})$ es abierto en D y además $\Pi_{D,S\setminus R}$ es continua.*

Demostración. Por simplicidad notaremos como $\Pi = \Pi_{D,S\setminus R}$ y $t(x) = t_{D,S\setminus R}(x)$.
Para todo $x \in Dom(\Pi)$ tenemos que $X_{[0,t(x)]}(x) \cap R = \emptyset$ pues S es R-adaptada y $X_t(x) \in S\setminus R$. Como $X_{[0,t(x)]}(x)$ y R son compactos, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$X_{[0,t(x)]}(B_\delta(x)) \cap R = \emptyset.$$

Ahora como $S \setminus R$ es abierto en S y $X_{t(x)}(x) \in X_{[0,t(x)]}(B_\delta(x)) \cap (\Sigma \setminus R)$, podemos seleccionar δ de tal manera que $D \cap B_\delta(x) \subseteq Dom(\Pi)$ y $X_{[0,t(x)]}(y) \cap R = \emptyset$ para todo $y \in D \cap B_\delta(x)$ como se ve en la *Figura 3.8*.
Entonces $x \in Int(Dom(\Pi))$. Como $x \in Dom(\Pi)$ es arbitrario, entonces $Dom(\Pi)$ es abierto. Además como consecuencia del *teorema del flujo tubular* se tiene que Π es continua en x. Por lo tanto se tiene el resultado deseado. $\square$

Note que $\Pi_{D,S\setminus R}$ resulta de clase C^1 cuando D es una subvariedad que satisface $X(x) \notin T_xD$ para todo $x \in D$.

Corolario 3.1. *Si S es una sección transversal singular ∂-adaptada y $D \subseteq M$ es disyunto de S, entonces $Dom(\Pi_{D,Int(S)})$ es abierto en D y $\Pi_{D,Int(S)}$ es continua.*

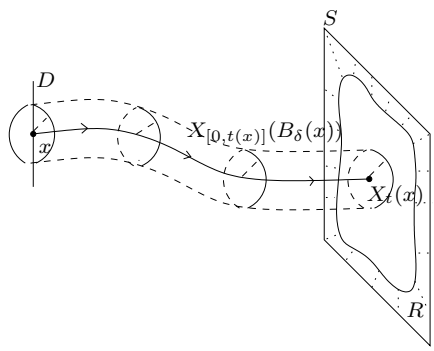

Figura 3.8: Banda R-adaptada.

Demostración. El resultado sigue de aplicar el lema anterior a $R = \partial S$. □

Ahora daremos algunos resultados acerca de la existencia de las bandas verticales singulares ∂-adaptadas.

Lema 3.8. *Para toda sección transversal singular S existe un $\delta > 0$ tal que si $L_0 \subseteq B_\delta(l_S)$ es una folia de $\mathcal{F}^s$ que no intersecta la clausura de las órbitas periódicas de X, entonces existe una banda vertical ∂-adaptada $Q \subseteq S$ alrededor de L_0 que es arbitrariamente cercana a L_0.*

Demostración. Sea δ como en el *Lema 3.2* con $\lambda > 4$ y $L_0 \subseteq B_\delta(l_S)$ una folia que no sea acumulada por órbitas periódicas. Por el *Lema 3.4* es suficiente hallar una banda vertical abierta Q alrededor y arbitrariamente cercana a L_0 satisfaciendo que

$$\partial^v Cl(Q) \cap \Pi^{-1}_{Cl(Q)}(Int(Cl(Q))) = \emptyset.$$

Como L_0 no intersecta la clausura de las órbitas periódicas de X, entonces podemos elegir una banda vertical cerrada V alrededor y arbitrariamente cercana a L_0 que no intersecta ninguna órbita periódica de X. Tomemos una folia $L^- \neq L_0$ de tal forma que

$$L^- \cap Dom(\Pi_V) = \emptyset.$$

Sin perdida de generalidad podemos asumir que $L^- < L_0 < V^+$. Para definir la banda Q, primero definimos las folias $Q^- < Q^+ \subseteq V$. Para definir Q^- simplemente elegimos $Q^- = L^-$.

Para definir Q^+ primero definimos una banda vertical cerrada

$$W = [Q^-, V^+]$$

y procedemos acorde a los siguientes casos:

Caso 1: Si $V^+ \cap Dom(\Pi_W) = \emptyset$, definimos

$$Q^+ = V^+$$

y así $Cl(Q) = W$. Además $\partial^v Cl(Q) \cap \Pi^{-1}_{Cl(Q)}(Int(Cl(Q))) = \emptyset$, luego por el *Lema 3.4* Q es ∂-adaptada, y por la construcción Q está alrededor de L_0.

Caso 2: Si $V^+ \cap Dom(\Pi_W) \neq \emptyset$, entonces $V^+ \subseteq Dom(\Pi_W)$. Como $\Pi_W(V^+) \subseteq L^- \cup V^+ \cup Int^v(W)$, entonces se tienen las siguientes posibilidades:

$$\Pi_W(V^+) \subseteq L^-, \quad o \quad \Pi_W(V^+) \subseteq V^+, \quad o \quad \Pi_W(V^+) \subseteq Int^v(W).$$

En la primera posibilidad definimos

$$Q^+ = V^+$$

pues como $\Pi_W(V^+) \subseteq L^-$ se tiene que $(Q^- \cup V^+) \cap \Pi_W^{-1}(Int(W)) = \emptyset$, pero $\partial^v Cl(Q) = \partial^v W = Q^- \cup V^+$ y $Cl(Q) = W$, por lo tanto $Int(Cl(Q)) = Int(W)$, es decir,

$$\partial^v Cl(Q) \cap \Pi^{-1}_{Cl(Q)}(Int(Cl(Q))) = \emptyset$$

por lo cual Q es ∂-adaptada y está alrededor de L_0.

En la segunda posibilidad, V^+ es una folia invariante por lo cual deben existir órbitas periódicas que pasen por $V^+ \subseteq V$, pero esto contradice el hecho que V no intersecta órbitas periódicas, luego este caso no puede ocurrir.

En la tercera posibilidad $\Pi_W(V^+) \subseteq Int^v(W)$, es decir, existe una folia intermedia $L^- \leq \tilde{V}^+ < V^+$ tal que la banda vertical $\tilde{W} = (\tilde{V}^+, V^+]$ satisface $\tilde{W} \subseteq Dom(\Pi_W)$ y $\Pi_W(\tilde{W}) \subseteq Int^v(W)$. En particular, $\Pi_W|_{\tilde{W}}$ es continua y $\tilde{W}$ es el conjunto maximal que satisface la condición. Como Π_W es expansora en la dirección transversa de $\mathcal{F}^s$ con derivada mayor que 4, entonces el diámetro de $\Pi_W(\tilde{W})$ en la dirección transversa a $\mathcal{F}^s$ es al menos dos veces el de $\tilde{W}$, por lo cual $L_0 < \tilde{V}^+$. Si $\tilde{V}^+ \cap Dom(\Pi_W) = \emptyset$, entonces definimos $Q^+ = \tilde{V}^+$ y por lo

tanto Q está alrededor de L_0. Además si $\tilde{V}^+ \cap Dom(\Pi_W) \neq \emptyset$, entonces $\tilde{V}^+ \subseteq Dom(\Pi_W)$ por invarianza. Luego se tiene que

$$\Pi_W(\tilde{V}^+) \subseteq L^- \cup V^+ \cup Int^v(W)$$

y así resultan tres nuevas situaciones:

$$\Pi_W(\tilde{V}^+) \subseteq L^-, \quad o \quad \Pi_W(\tilde{V}^+) \subseteq V^+, \quad o \quad \Pi_W(\tilde{V}^+) \subseteq Int^v(W).$$

En la primera situación definimos $Q^+ = \tilde{V}^+$ y por lo tanto se satisface que

$$\partial^v Cl(Q) \cap \Pi^{-1}_{Cl(Q)}(Int(Cl(Q))) = \emptyset$$

por lo cual Q es ∂-adaptada y está alrededor de L_0.
Si se tiene la segunda situación, entonces existe una función 1-dimensional $f : Dom(f) \subseteq W \to W$ inducida por Π_W en el espacio de folias (considerando W como un subintervalo en el espacio de folias). Como $\Pi_W(\tilde{V}^+) \subseteq V^+$, entonces $f|_{(\tilde{V}^+, V^+]}$ es una función que preserva la orientación con $f(\tilde{V}^+) = V^+$. Luego $f|_{(\tilde{V}^+, V^+]}$ tiene un punto fijo, el cual representa una folia invariante de Π_W. Consecuentemente $(\tilde{V}^+, V^+]$ intersecta una órbita periódica. Pero $(\tilde{V}^+, V^+] \subseteq V$, lo que contradice el hecho que V no intersecta órbitas periódicas, por lo tanto esta situación no puede ocurrir. La tercera situación no puede ocurrir pues se contradice la maximalidad de $\tilde{W}$. Por lo tanto el resultado se tiene. □

Teorema 3.2. *Sea X_t un flujo seccional-Anosov sobre una 3-variedad compacta. Entonces para toda sección transversal singular S asociada con una singularidad* Lorenz-like *de X que satisfaga $M(X) \cap \partial^h S = \emptyset$, existe una sección transversal singular ∂-adaptada $S^* \subseteq S$ tal que:*

1. $l_{S^*} = l_S$.
2. $\partial^h S^* \subseteq \partial^h S$.

Demostración. Si la curva singular l_S de S no es acumulada por órbitas periódicas, entonces por el *Lema 3.8* existe una banda vertical ∂-adaptada alrededor de l_S arbitrariamente cercana a l_S, por lo tanto se tiene el resultado.

Entonces podemos asumir que l_S es acumulada por órbitas periódicas. Fijando una banda cerrada Q alrededor de l_S tal que Q^- y Q^+ son equidistantes de l_S. Como l_S es acumulada por órbitas periódicas, podemos seleccionar una folia $L' \subseteq Int^v(Q)$ conteniendo una órbita periódica. Claramente $L' \neq l_S$ pues L' es periódica, por lo tanto $L' < l_S$ ó $L' > l_S$ en el espacio de folias.

Supongamos $L' < l_S$. Como $L' \subset Dom(\Pi_Q)$ contiene una órbita periódica, entonces existe un conjunto finito de folias $L'_0, \ldots, L'_k \subseteq Dom(\Pi_Q)$ con $L'_0 = L'_k = L'$ de manera que $\Pi_Q^i(L') = L'_i$ para todo $i = 0, \ldots, k$. Luego se tienen las siguientes dos posibilidades:

* Existe algún L'_j tal que $L'_j > l_S$

* $L'_i < l_S$ para todo $i = 0, \ldots, k$.

En el primer caso tomando L'_{j_0} la folia que tiene la distancia mínima a l_S de todos las folias L'_j tales que $L'_j > l_S$, y L'_{i_0} la folia que tiene la distancia mínima a l_S de todos las folias L'_i tales que $L'_i < l_S$. Entonces la banda vertical $S^* = [L'_{i_0}, L'_{j_0}]$ satisface la conclusión del teorema. En el segundo caso, tomaremos L^* la folia en $\{L'_0, \ldots, L'_k\}$ que tiene la distancia mínima a l_S. Tal minimalidad implica que

$$L^* \cap \Pi^{-1}_{[L^*,Q^+]}((L^*, Q^+)) = \emptyset.$$

Ahora procederemos como en la prueba del lema anterior.

Si bien $Q^+ \cap Dom(\Pi_{[L^*,Q^+]}) = \emptyset$, o bien $Q^+ \subseteq Dom(\Pi_{[L^*,Q^+]})$ y $\Pi_{[L^*,Q^+]}(Q^+) \subseteq L' \cup Q^+$, tomando $S^* = [L', Q^+]$ el resultado se tiene. Luego podemos asumir que

$$Q^+ \subseteq Dom(\Pi_{[L^*,Q^+]}), \text{ y } \Pi_{[L^*,Q^+]}(Q^+) \subseteq (L^*, Q^+).$$

Luego podemos seleccionar una folia maximal $L^{**} \subseteq (L^*, Q^+)$ tal que

$$(L^{**}, Q^+] \subseteq Dom(\Pi_{[L^*,Q^+]}), \text{ y } \Pi_{[L^*,Q^+]}|_{(L^{**},Q^+]} \text{ es } C^1.$$

Como Q es equidistante de l_S, entonces se tiene que $l_S < L^{**}$. Otra vez, si bien $L^{**} \cap Dom(\Pi_{[L^*,Q^+]}) = \emptyset$, o bien $L^{**} \subseteq Dom(\Pi_{[L^*,Q^+]})$ y $\Pi_{[L^*,Q^+]}(L^{**}) \subseteq L^*$, tomando $S^* =$

$[L^*, L^{**}]$ el resultado se tiene. Como $\Pi_{[L^*,Q^+]}(L^{**}) \nsubseteq (L^*, Q^+)$ cuando $L^{**} \subseteq Dom(\Pi_{[L^*,Q^+]})$, por la maximalidad de L^{**} debemos considerar el caso

$$L^{**} \subseteq Dom(\Pi_{[L^*,Q^+]}), \text{ y } \Pi_{[L^*,Q^+]}(L^{**}) \subseteq Q^+.$$

Esto junto con el hecho que $\Pi_{[L^*,Q^+]}(Q^+) \subseteq (L^*, Q^+)$ implica que la función 1-dimensional f inducida por $\Pi_{[L^*,Q^+]}|_{(L^{**},Q^+]}$ invierte la orientación. Luego f tiene un punto fijo $L_{fix} \subseteq (L^{**}, Q^+]$, es decir, $\Pi_{[L^*,Q^+]}(L_{fix}) \subseteq L_{fix}$. Entonces eligiendo $S^* = [L^*, L_{fix}]$ el resultado se tiene. $\square$

4 Connecting-lemma y Closing-lemma

En este capítulo reconstruiremos las pruebas de los teoremas principales que se abordan en este trabajo conocidos como *Connecting-lemma* y *Closing-lemma*, y por último se verán algunas de sus consecuencias más importantes.

4.1. Connecting-lemma

Teorema 4.1. *(*Connecting-lemma*) Si X_t es un flujo seccional-Anosov sobre una 3-variedad compacta M, donde $p \in M(X)$ y $q \in M$ satisfacen que para todo $\epsilon > 0$ existe una trayectoria de un punto ϵ-cercano a p hasta un punto ϵ-cercano a q y $\alpha(p)$ es no singular, entonces existe un $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$, y $\omega(x)$ es una singularidad ó $\omega(q)$.*

Para poder probar este resultado primero vamos a probar dos lemas que abordan casos particulares.

Propiedad ($\prec$)**.** *Dos puntos $p, q \in M(X)$ satisfacen $p \prec q$, si para todo $\epsilon > 0$ existe una trayectoria de un punto ϵ-cercano a p hasta un punto ϵ-cercano a q.*

Lema 4.1. *Sea X_t un flujo seccional-Anosov sobre una 3-variedad compacta M. Si un punto periódico $p \in M$ y una singularidad $q = \sigma \in M$ satisfacen $p \prec \sigma$, entonces existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x)$ es una singularidad.*

Demostración. Sean U y V vecindades fijas (pero arbitrarias) de p y σ respectivamente. Como $p \prec \sigma$, entonces existen $t > 0$ y $z \in X_t(U) \cap V$. Elegimos U suficientemente pequeña para asegurarnos que $W^{ss}(X_{-t}(z)) \cap W^u(\mathcal{O}(p)) = \{z'\}$. Como $\sigma \notin \mathcal{O}(p)$, entonces podemos tomar $t \to \infty$. Entonces $X_{-t}(z)$ y z' pertenecen a la misma variedad estable fuerte, y de

esto se sigue que $X_t(z') \in V$. Por otro lado $z' \in W^u(\mathcal{O}(p))$ el cual es invariante, luego $X_t(z') \in W^u(\mathcal{O}(p)) \cap V$, es decir, $W^u(\mathcal{O}(p)) \cap V \neq \emptyset$ para V una vecindad arbitraria de σ, entonces $\sigma \in Cl(W^u(\mathcal{O}(p))$, luego el *Teorema 2.3* implica que σ es *Lorenz-like*.
Por otro lado como $M(X) \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$, podemos seleccionar una sección transversal singular S asociada y suficientemente cercana a σ, de manera que se cumplan las siguientes condiciones. $S \cap \mathcal{O}(p) = \emptyset$, $M(X) \cap \partial^h S = \emptyset$, y $W^u(\mathcal{O}(p)) \cap Int(S)$ tenga un punto de acumulación en la folia singular l_S de S.

Aplicando el *Teorema 3.2*, podemos seleccionar dos secciones transversales singulares ∂-adaptadas $S_0, S_1 \subseteq S$ asociadas con σ tales que $S_0 \subseteq Int(S_1)$ y $l_S \in S_i$ para $i = 0, 1$. Por otro lado como $W^u(\mathcal{O}(p))$ se acumula sobre $l_S \subseteq Int(S_0)$, entonces podemos seleccionar un punto $a^* \in W^u(\mathcal{O}(p)) \cap Int(S_0)$. Tomando la órbita negativa de a^* obtenemos un dominio fundamental (Ver [8] pag 81) $D^u = [a, b]$ de $W^{uu}(p)$ tal que $D^u \cap S = \emptyset$. Más aun, b está en la órbita positiva de a, y a está en la órbita negativa de a^*. Por simplicidad notaremos por $\Pi = \Pi_{D^u, Int(S_1)}$ a la función de holonomía de D^u a $Int(S_1)$. Como S_1 es una banda ∂-adaptada, entonces tenemos que $Dom(\Pi)$ es abierto en D^u, y Π es continua. Además por la construcción de Π se tiene que $a, b \in Dom(\Pi)$, y como b está en la órbita positiva de a se sigue que $\Pi(a) = \Pi(b) = a^*$, luego

$$\Pi(a) = \Pi(b) \in Int(S_0).$$

Definimos

$$q^* = \sup\{s \in [a, b] : \quad [a, s] \subseteq Dom(\Pi), \text{y } \Pi([a, s]) \subseteq S_0 \text{ es conexo}\},$$

y

$$q^{**} = \text{ínf}\{s \in [a, b] : \quad [s, b] \subseteq Dom(\Pi), \text{y } \Pi([s, b]) \subseteq S_0 \text{ es conexo}\}.$$

Como $\Pi(a) \in Int(S_0)$, es claro que q^* está bien definido y que $a < q^*$.
Si $q^* \notin Dom(\Pi)$, entonces q^* satisface la propiedad $(P)_{S_0}$ con $I = (a, q^*)$. Como $\omega(q^*)$ es seccional-hiperbólico, entonces por el *Teorema 3.1* $\omega(q^*)$ es una órbita periódica ó una singularidad. Si $\omega(q^*) = \mathcal{O}(x^*)$ con $x^* \in M(X) \cap Per(X)$, entonces el *lema de inclinación* implica que la órbita positiva de I se acumula en $W^u(\mathcal{O}(x^*))$. En particular, la órbita positiva

de I contiene un arco abierto I^* arbitrariamente cercano a D^{u*}, donde D^{u*} es un dominio fundamental de $W^{uu}(x^*)$ como se ve en la *Figura 4.1*.

Proyectando I^* en D^{u*} a lo largo de las variedades estables fuertes de los puntos en I^*

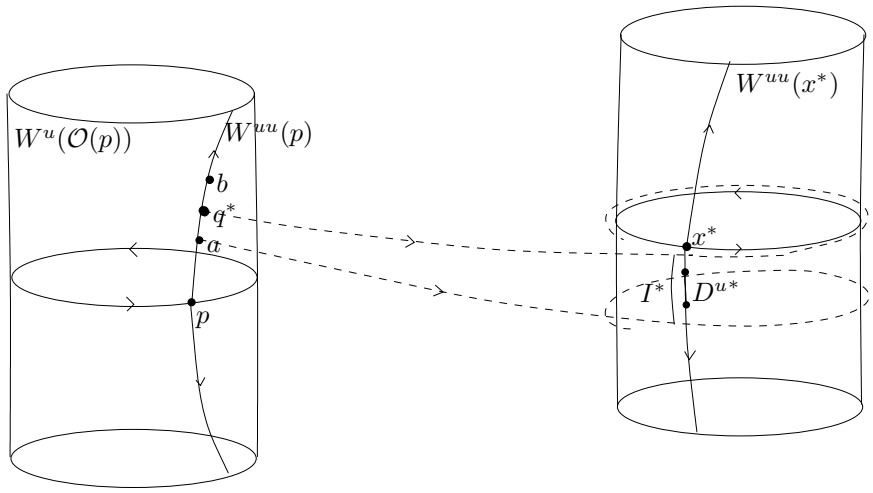

Figura 4.1: Convergencia de I a D^{u*}.

podemos concluir que D^{u*} es llevada completamente por X_t en una curva $C \subseteq S_0$. Como D^{u*} es un dominio fundamental, C resulta ser una curva cerrada. Además C resulta tangente al subespacio estable E^s en al menos dos puntos, pero esto es imposible pues los vectores tangentes a C pertenecen al subespacio central E^c. Luego de esta contradicción se concluye que $\omega(q^*)$ es una singularidad, por lo tanto $q^* \in W^s(\sigma^*)$ para alguna singularidad σ^*. Como $q^* \in D^u \subseteq W^u(\mathcal{O}(p))$ tenemos que $x = q^*$ funciona, y en este caso el resultado se tiene.

Si $q^* \in Dom(\Pi)$, entonces como Π es continua tenemos que $\Pi([a, q^*]) \subseteq S_0$ es un arco conexo uniendo $\Pi(a)$ con $\Pi(q^*) \in \partial^v S_0$ transversal al subespacio estable E^s de $M(X)$. De la misma manera podemos ver que $\Pi([q^{**}, b]) \subseteq S_0$ es un arco conexo uniendo $\Pi(b)$ con $\Pi(q^{**}) \in \partial^v S_0$ transversal al subespacio estable E^s de $M(X)$. Pero $\Pi(a) = \Pi(b)$, así que el conjunto

$$l = \Pi([a, q^*]) \cup \Pi([q^{**}, b])$$

es un arco conexo transverso a E^s que contiene a los puntos $\Pi(q^*), \Pi(q^{**}) \in \partial^v S_0$. Pero como l es transverso a E^s, entonces se sigue que $\Pi(q^*)$ y $\Pi(q^{**})$ están en distintas componentes conexas de $\partial^v S_0$, por lo tanto siendo l conexo existe un $x \in l \cap l_S$. Como $l_S \in W^s(\sigma)$ y

$l \subseteq W^u(\mathcal{O}(p))$, entonces $x \in W^s(\sigma) \cap W^u(\mathcal{O}(p))$, y como $W^u(\mathcal{O}(p)) = W^u(p)$ se sigue que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x) = \sigma$. Por lo tanto en este caso el resultado también se tiene. □

Lema 4.2. *Sea X_t un flujo seccional-Anosov sobre una 3-variedad compacta M. Si un punto $p \in M(X)$ y una singularidad $q = \sigma \in M$ satisfacen $p \prec \sigma$ con $\alpha(p)$ no singular, entonces existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x)$ es una singularidad.*

Demostración. Tenemos que $\alpha(p)$ es hiperbólico (Pues no tiene singularidades). Fijemos $y \in \alpha(p)$, entonces existe una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n \to \infty$ tal que $X_{-t_n}(p) \to y$. Además como $\alpha(p)$ es hiperbólico podemos encontrar una vecindad U de $\alpha(p)$ tal que la descomposición hiperbólica se tenga sobre U, y como la órbita negativa de p se vuelve cercana a $\alpha(p)$ podemos suponer $p \in U$, luego usando técnicas de transformación de gráficos se puede hallar un $\epsilon > 0$ y una sucesión de intervalos abiertos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $I_n = (X_{-t_n}(p) - \epsilon, X_{-t_n}(p) + \epsilon) \subseteq W^{uu}(X_{-t_n}(p))$ convergiendo al intervalo abierto $I = (y - \epsilon, y + \epsilon) \subseteq W^{uu}(y)$ como se ve en la *Figura 4.2*. Por otro lado, aplicando el *lema de sombreado* a la órbita negativa de p, podemos

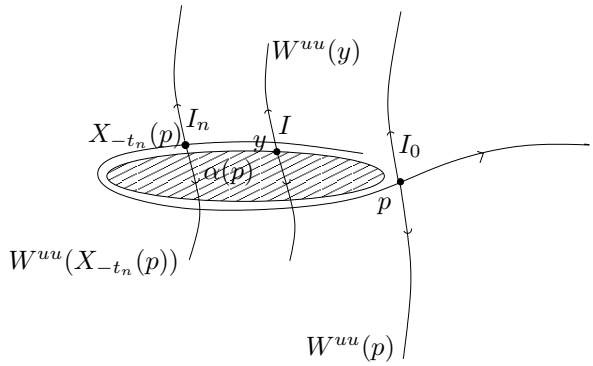

Figura 4.2: Convergencia de I_n a I.

construir una sucesión de puntos periódicos $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que $p_n \to y$, sus variedades estables fuertes $W^{uu}(p_n)$ tienen tamaño uniformemente grande y se aproximan a I cuando $n \to \infty$. Entonces ambos $W^{uu}(p_n)$ e I_n aproximan al intervalo I cuando $n \to \infty$; esto nos permite hallar $n_o, n_1 \in \mathbb{N}$ con la siguiente propiedad.

Propiedad ($\mathcal{Q}$)**.** *La variedad estable de todo punto cercano a $X_{-t_{n_o}}(p)$ intersecta a $W^{uu}(p_{n_1})$, y recíprocamente, la variedad estable de todo punto cercano a p_{n_1} intersecta a I_{n_0}.*

Como $p \prec \sigma$, entonces también se tiene que $X_{-t_{n_o}}(p) \prec \sigma$. Así, existen sucesiones $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ con $z_m \to X_{-t_{n_o}}(p)$ y $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ con $t_m > 0$ tales que $X_{t_m}(z_m) \to \sigma$. Luego la propiedad $(\mathcal{Q})$ implica que existe una correspondiente sucesión $(z'_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq W^{uu}(p_{n_1}) \cap W^s(z_m)$. Entonces $X_{t_m}(z'_m) \to \sigma$, por lo tanto $p_{n_1} \prec \sigma$. Luego aplicando el *Lema 4.1* se tiene que existe $x^* \in M(X)$ tal que $\alpha(x^*) = \alpha(p_{n_1})$ y $\omega(x^*)$ es una singularidad σ^* (Ver *Figura 4.3*). Tomando

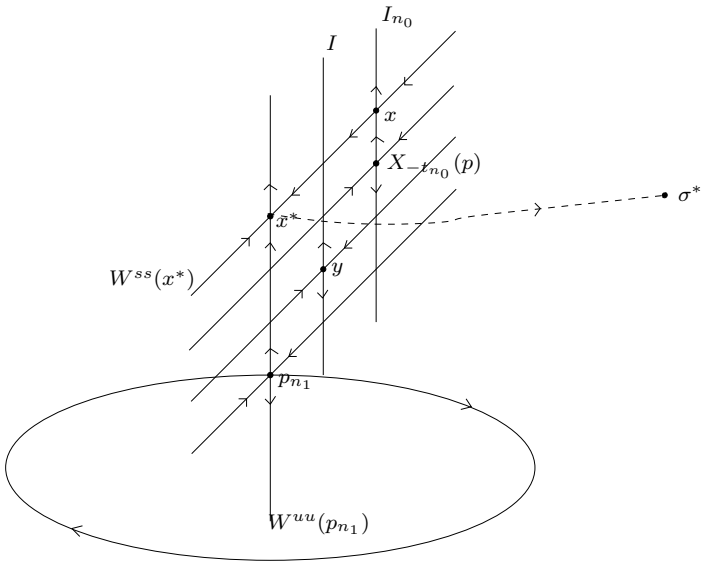

Figura 4.3: Propiedad $(\mathcal{Q})$.

la órbita negativa de x^*, podemos asumir que x^* es suficientemente cercano a p_{n_1}. Entonces la propiedad $(\mathcal{Q})$ implica que $W^s(x^*)$ intersecta a I_{n_0} en algún punto x (Ver *Figura 4.3*). Luego como $I_{n_0} \subseteq W^{uu}(X_{-t_{n_0}}(p))$ y $\alpha(X_{-t_{n_0}}(p)) = \alpha(p)$, entonces se tiene que $\alpha(x) = \alpha(p)$, y como $x \in W^s(x^*)$ se tiene que $\omega(x) = \omega(x^*) = \sigma^*$ lo que prueba el resultado. $\square$

Demostración. (*Connecting-lemma*) Sean X_t un flujo seccional-Anosov sobre una 3-variedad compacta M y $p, q \in M(X)$ tal que $\alpha(p)$ es no singular. Supongamos que para todo par de vecindades U de p y V de q, existe $t > 0$ tal que $X_t(U) \cap V \neq \emptyset$. Vamos a probar que existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x)$ es una singularidad ó $\omega(q)$. Para esto observemos primero que $p \prec q$. Si $q \in \mathcal{O}^+(p)$, entonces $x = p$ satisface la conclusión del teorema. Entonces podemos suponer que $q \notin \mathcal{O}^+(p)$. Si $\omega(p)$ ó $\omega(q)$ contienen una singularidad σ, entonces $p \prec \sigma$; luego la existencia de x sigue del *Lema 4.1*. Si $\alpha(q)$ contiene una singularidad σ,

entonces la continuidad del flujo X_t, y el hecho de que $q \notin \mathcal{O}^+(p)$ implica que $p \prec \sigma$; luego la existencia de x sigue del *Lema 4.1*. De lo anterior, podemos asumir que el conjunto $\omega(p) \cup \alpha(q) \cup \omega(q)$ es no singular. En este caso mostraremos que existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x) = \omega(q)$. Esto es básicamente una consecuencia del *connecting-lemma* en flujos de Anosov. Para comenzar tomemos un bloque aislante U de $M(X)$. Podemos asumir que U es positivamente invariante, es decir, $X_t(U) \subseteq U$ para todo $t \geq 0$. Notaremos por $B_\delta(A)$ la δ-bola abierta centrada en el conjunto A.
Como $\alpha(p)$ y $\omega(p) \cup \alpha(q) \cup \omega(q)$ son no singulares, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $p, q \in H_1$ donde

$$H_1 = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U \setminus B_{\delta_1}(Sing(X))).$$

Como H_1 no tiene singularidades, entonces es un conjunto hiperbólico, por lo cual $W^{uu}(p)$ está bien definida, y además es una 1-variedad que contiene a p. Como $p \prec q$, entonces existen sucesiones $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $z_n \to p$, y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n > 0$ tales que $X_{t_n}(z_n) \to q$. Sin perdida de generalidad como $q \notin \mathcal{O}^+(p)$ podemos tomar $t_n \to \infty$. Además el tamaño de la variedad estable fuerte $W^{ss}(z_n)$ es acotado distinto de cero, y $W^{uu}(p)$ es una 1-variedad que contiene a p. Por lo tanto podemos asumir que existe una sucesión $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{ss}(z_n) \cap W^{uu}(p)$ de modo que $z'_n \to p$. Como $t_n \to \infty$, entonces $X_{t_n}(z'_n) \to q$. Supongamos por un momento que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\sigma_k \in Sing(X)$ tal que

$$\sigma_k \in Cl(\bigcup_{n=k}^{\infty} \mathcal{O}^+(z'_n)).$$

Como el número de equilibrios en $M(X)$ es finito, podemos asumir que $\sigma = \sigma_k$ no depende de k. Como $z'_n \to p$, entonces se concluye que $p \prec \sigma$; luego el resultado sigue del *Lema 4.1*. Entonces podemos asumir que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ y $0 < \delta_2 < \delta_1$ tal que

$$(\bigcup_{n=k_0}^{\infty} \mathcal{O}^+(z'_n)) \bigcap B_{\delta_2}(Sing(X)) = \emptyset.$$

Observemos que $\mathcal{O}^+(z'_n) \subseteq U$, por lo cual

$$\mathcal{O}^+(z'_n) \subseteq U \setminus B_{\delta_2}(Sing(X)), \text{para todo } n \geq k_0.$$

Por otro lado, $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{uu}(p)$, así $\alpha(z'_n) = \alpha(p)$ es no singular para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $z'_n \to p$, podemos concluir que existe $0 < \delta_3 < \delta_2$ tal que

$$\mathcal{O}^-(z'_n) \subseteq U \setminus B_{\delta_3}(Sing(X)), \text{para todo } n \geq k_0.$$

Consecuentemente $(z'_n)_{n\geq k_0} \subseteq H$ donde

$$H = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} X_t(U \setminus B_{\delta_3}(Sing(X)))$$

el cual es no singular y por lo tanto hiperbólico. Luego como $X_{t_n}(z'_n) \to q$ y H es hiperbólico, por el *Connecting-lemma en flujos de Anosov* existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x) = \omega(q)$. □

Corolario 4.1. *Si H es un conjunto compacto invariante no singular de un flujo* seccional-Anosov *X_t sobre una 3-variedad compacta, entonces $Cl(W^u(H)) \cap Sing(X) \neq \emptyset$ si, y solamente si $W^u(H) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$ para algún $\sigma \in Sing(X)$.*

Demostración. Si $W^u(H) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$, entonces $Cl(W^u(H)) \cap Sing(X) \neq \emptyset$ trivialmente. Ahora supongamos que $Cl(W^u(H)) \cap Sing(X) \neq \emptyset$, entonces existe una singularidad q y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \to q$ tal que $\alpha(x_n) \subseteq H$ para todo n. Tomemos un punto $p \in Cl(\cup_{n\in\mathbb{N}}\alpha(x_n))$. Entonces p y q satisfacen las condiciones del *connecting-lemma* en el caso cuando q es una singularidad. Así, existe un $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x)$ es una singularidad σ. En particular, $x \in W^s(\sigma)$, y como H es compacto, entonces $p \in H$, más aun $\alpha(x) = \alpha(p) \subseteq H$, es decir, $x \in W^u(H)$. Por lo tanto $x \in W^u(H) \cap W^s(\sigma)$ y el resultado se tiene. □

Corolario 4.2. *Si $\mathcal{O}$ es una órbita periódica de un flujo* seccional-Anosov *X_t sobre una 3-variedad compacta satisfaciendo $Cl(W^u(\mathcal{O})) \cap Sing(X) \neq \emptyset$, entonces $W^u(\mathcal{O}) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$ para algún $\sigma \in Sing(X)$.*

Demostración. Como $\mathcal{O}$ es una órbita periódica, entonces $\mathcal{O}$ es un conjunto compacto invariante no singular de un flujo *seccional-Anosov* X_t sobre una 3-variedad compacta, y por el corolario anterior aplicado a $H = \mathcal{O}$ el resultado se tiene. □

Corolario 4.3. *Todo flujo* seccional-Anosov X_t *sobre una* 3*-variedad compacta con singularidades y órbitas periódicas densas satisface que para toda órbita periódica* $\mathcal{O}$ *existe una singularidad* σ *tal que* $W^u(\mathcal{O}) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea X_t un flujo *seccional-Anosov* sobre una 3-variedad compacta M. Sea $\mathcal{O}$ una órbita periódica de X_t. Si $Cl(W^u(\mathcal{O})) \cap Sing(X) = \emptyset$, entonces $Cl(W^u(\mathcal{O}))$ es un conjunto hiperbólico. En tal caso $Cl(W^u(\mathcal{O}))$ es un conjunto atractor cerrado en $M(X)$. Además si $M(X) \setminus Cl(W^u(\mathcal{O}))$ fuera cerrado, entonces $Cl(W^u(\mathcal{O}))$ debe estar en una de las componentes conexas de $M(X)$, y como $M(X)$ es conexo se debe tener $Cl(W^u(\mathcal{O})) = M(X)$ y así X_t no tiene singularidades lo cual contradice la hipótesis. Como $M(X) \setminus Cl(W^u(\mathcal{O}))$ no puede ser cerrado, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M(X) \setminus Cl(W^u(\mathcal{O}))$ convergiendo a algún $x \in Cl(W^u(\mathcal{O}))$. Pero X_t tiene órbitas periódicas densas, así que cada x_n es acumulado por órbitas periódicas las cuales necesariamente están en $Cl(W^u(\mathcal{O}))$, pues este conjunto es atractor, por lo tanto se tiene una contradicción. De lo anterior se deduce que $W^u(\mathcal{O}) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$. □

4.2. Closing-lemma

Teorema 4.2. *(*Closing-lemma*) Un punto recurrente en un conjunto seccional-hiperbólico sobre una* 3*-variedad compacta* M *puede ser aproximado por puntos periódicos ó por puntos para los cuales su conjunto* ω*-límite es una singularidad.*

Para poder probar este resultado primero vamos a probar un lema que se usa en la demostración.

Lema 4.3. *Si* $q \in M(X) \cap \Omega(X)$ *y* $\omega(q) \cap Sing(X) \neq \emptyset$*, entonces*

$$W^{ss}(q) \cap Cl(Per(X) \cup W^s(Sing(X))) \neq \emptyset.$$

Demostración. Sea $q \in M(X) \cap \Omega(X)$ tal que $\omega(q)$ contiene una singularidad σ. Podemos asumir que $q \notin W^s(Sing(X))$ pues en este caso el resultado es trivial. Como q es un punto regular, $q \notin W^s(\sigma)$, y además $\sigma \in \omega(q)$, entonces se concluye que σ es *Lorenz-like*. Luego podemos asumir que $q \in \Sigma$ para alguna sección transversal singular Σ asociada a σ que es

arbitrariamente cercana a su curva singular.

Supongamos que

$$W^{ss}(q) \cap Cl(Per(X) \cup W^s(Sing(X))) = \emptyset,$$

por lo tanto

$$L_q \cap Cl(Per(X) \cup W^s(Sing(X))) = \emptyset.$$

En particular, L_q no es acumulada por órbitas periódicas de X. Por el *Lema 3.8* aplicado a $L_0 = L_q$, podemos elegir una sección transversal singular ∂-adaptada V alrededor y arbitrariamente cercana a L_q, de tal manera podemos asumir que V no intersecta las órbitas periódicas de X. Por otro lado como V es cercana a L_q podemos asumir que no intersecta a $W^s(Sing(X))$. Además como $q \in V$ es no errante, entonces por el *Lema 3.6* se sigue que V contiene una órbita periódica, lo cual es una contradicción. Por lo tanto

$$W^{ss}(q) \cap Cl(Per(X) \cup W^s(Sing(X))) \neq \emptyset,$$

como se quería. □

Demostración. (*Closing-lemma*) Sea q un punto recurrente, debemos ver que $q \in Cl(Per(X) \cup W^s(Sing(X)))$. Para ver esto consideraremos dos casos, cuando $\omega(q)$ contiene una singularidad y cuando no.

Si $\omega(q)$ no tiene singularidades, entonces $\omega(q)$ es hiperbólico, por lo tanto el resultado sigue del *Closing-lemma* en flujos de Anosov. Por otro lado si $\omega(q)$ contiene una singularidad, como $q \in \Omega(X)$, entonces q satisface las condiciones del *Lema 4.3*, es decir, existe $z \in W^{ss}(q) \cap Cl(Per(X) \cup W^s(Sing(X))$. Como $z \in W^{ss}(q)$, entonces $\omega(z) = \omega(q)$, además $z \in Cl(Per(X) \cup W^s(Sing(X))$ el cual es compacto invariante, por lo tanto

$$\omega(q) = \omega(z) \subseteq Cl(Per(X) \cup W^s(Sing(X))$$

y como q es recurrente, entonces $q \in \omega(q)$. Por lo tanto se tiene el resultado deseado. □

Bibliografía

[1] S. Bautista, y C. Morales, *A sectional-Anosov connecting lemma*, Ergodic Theory and Dynamical Systems (2010), 30: 339-359, Cambridge University Press 2009.

[2] S. Bautista, y C. Morales, *Existence of periodic orbits for singular-hipebolic sets*, Moscow Mathematical Journal (2006), 2: 265-297.

[3] S. Bautista, y C. Morales, *Lectures on sectional-Anosov flows*, Preprint (2009).

[4] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Springer-Verlag (1977).

[5] C. Morales, *A singular-hiperbolic closing lemma*, Michigan Mathematical Journal (2008), 1: 29-53.

[6] C. Morales, y M. Pacifico, *Mixing attractors for 3-flows*, Nonlinearity 14 (2001), 359-378.

[7] C. Morales, y M. Pacifico, *Sufficient conditions for robustness of attractors*, Pacific Journal Mathematics 216 (2004), 2: 181-189.

[8] J. Palis Jr, y W. De Melo, *Geometric theory of dynamical systems*, Springer-Verlag (1982).

[9] C. Robinson, *Dynamical systems stability, symbolic dynamics, and chaos*, CRC press (1999).

[10] J. Suh Park, y C. Ku Chu, *On the C^r closing lemma*, Journal of the Korean Mathematical Society (1995), 1: 109-114.

[11] L. Wen, y Z. Xia, *A simpler proof for the C^1 connecting lemma*, Preprint.