UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Facultad de Ciencias.

OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS

Trabajo final de maestría presentado por:
LEANDRO MANUEL PARDO CALDERON

Dirigido por:
LEONARDO CASTAÑEDA COLORADO

Departamento de Física, sede Bogotá D.C

May 20, 2017

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Facultad de Ciencias.

OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS

Trabajo final de maestría presentado por:
LEANDRO MANUEL PARDO CALDERON

Dirigido por:
LEONARDO CASTAÑEDA COLORADO
Profesor del Observatorio Astronómico Nacional
Grupo Gravitación y Cosmología (GGC)

para obtener el grado de MAGISTER EN FÍSICA, PERFIL: PROFUNDIZACIÓN.

Departamento de Física, sede Bogotá D.C

May 20, 2017

Título en español

Oscilaciones Acústicas Bariónicas

Título en inglés

Baryon Acoustic Oscillations

Resumen

Las Oscilaciones Acústicas Bariónicas son un fenómeno ocurrido antes del desacople de materia y radiación que se caracteriza porque las perturbaciones en la densidad de la materia bariónica presentan oscilaciones, como sugiere su nombre. Estas perturbaciones se propagan como una onda de presión en el fluido fotón-barión producida por la presencia de potenciales gravitacionales, que agrupan la materia bariónica, y choques entre ésta y la radiación, que la dispersan. En este proyecto de grado se deduce la ecuación de las Oscilaciones Acústicas Bariónicas mediante la teoría de perturbaciones cosmológicas y de las ecuaciones de Boltzmann, y se describe físicamente. Además, se hace uso del software CAMB para hallar soluciones de la ecuación, con distintos modelos de energía oscura.

Abstract

Baryon Acoustic Oscillations are a phenomenon ocurred before matter-radiation decoupling, characterized because the baryonic matter perturbations presents oscillations, as the name suggests. These perturbations propagate like a pressure wave on the photon-baryon fluid produced by gravitational potentials, which join the baryonic matter, and collisions of baryons and photons, which scatter it. In this work I obtain the Baryon Acoustic Oscillations equation through the cosmological perturbations theory and Boltzmann equations, and I provide its physical description. Besides, I use CAMB software to find equation solutions, using different dark energy models.

Palabras claves:

Oscilaciones acústicas, perturbaciones cosmológicas, gauge newtoniano, ecuaciones de Boltzmann, bariones, energía oscura.

Keywords:

Acoustic oscillations, cosmological perturbations, newtonian gauge, Boltzmann equations, baryons, dark energy.

Nota de aceptación

Trabajo de grado

Jurado

Jurado

Jurado

Director de Tesis:
Leonardo Castañeda

Bogotá D.C. May 20, 2017

Dedicado a

A las mujeres de mi vida: mi mamá, mis hermanas, mis sobrinas y Erika
...y a la memoria de mi papá y mi querida abuelita.

Agradecimientos

A muchas personas debo agradecerles el apoyo y la ayuda para realizar este trabajo. Lastimosamente no podré mencionarlas a todas, así que de antemano me disculpo con quienes no nombro aquí.

Una mención para Sergio Rodríguez, quien compartió importantes datos del proyecto del que forma parte, muy útiles en la realización de mi proyecto. Al grupo LEA de la Universidad Nacional, representado por Sara y Lizzete, por su enseñanza sobre la correcta estructura del escrito y en las correcciones de la redacción del mismo. A Oscar Vija, compañero de mil batallas, desde el inicio del camino hasta la meta final.

Quiero resaltar de manera especial la ayuda de dos personas. Una es Javier Hortua, que hizo las veces de un hermano mayor, académicamente hablando, y retiró importantes talanqueras que surgieron en el desarrollo del trabajo. Y, por supuesto, la otra persona es el profesor Leonardo Castañeda, a quien rindo admiración por su excelsa inteligencia, sus vastos conocimientos y por ser una persona íntegra, en el amplio sentido de la palabra. A él le agradezco por haberme permitido ser parte de un maravilloso grupo, por sus valiosas enseñanzas y por su transinfinita paciencia cuando el proyecto de grado parecía estancarse durante interminables lapsos.

Índice general

Dedicado a **IV**

Agradecimientos **V**

Introducción **IX**

1 ELEMENTOS DE RELATIVIDAD GENERAL **1**

1.1 La ecuación de campo 3

1.2 Ecuación de las geodésicas 4

2 UNIVERSO HOMOGÉNEO E ISOTRÓPICO **6**

2.1 Tensor momentum-energía 7

2.2 Universo plano 7

2.2.1 Ecuaciones de campo para la métrica FLRW 8

2.2.2 Evolución de la energía 9

2.3 Energía Oscura 11

3 PERTURBACIONES COSMOLÓGICAS **13**

3.1 Definición de las perturbaciones 13

3.2 Perturbación en la métrica 15

3.3 Ecuaciones de campo perturbadas 15

4 LAS ECUACIONES DE BOLTZMANN **19**

4.1 Desarrollo de los términos de la ecuación de Boltzmann 20

4.1.1 Término $\frac{df}{dt}$ 20

4.1.2 Término de colisiones $C(f)$ 24

4.2 La ecuación de Boltzmann para fotones 25
4.2.1 La función de distribución de primer orden 25
4.2.2 El término de colisiones para fotones 26
4.2.3 La ecuación para fotones 29
4.3 La ecuación de Boltzmann para bariones 30
4.3.1 Término $\frac{df}{dt}$ para bariones 30
4.3.2 Ecuación para perturbación de densidad bariones 31
4.3.3 Ecuación para la velocidad de bariones 32

5 OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS 36
5.1 Ecuación de las BAO 37
5.2 Interpretación física de la ecuación de las BAO 41
5.2.1 Las oscilaciones 42
5.2.2 Damping o amortiguamiento 43
5.2.3 Comportamiento en función de la magnitud del vector de onda 45
5.3 Soluciones analíticas 46

6 DATOS, GRÁFICAS Y MEDICIONES: EL CÓDIGO CAMB 48
6.1 Gráficas de las BAO 49
6.2 Energía Oscura 57
6.3 Comparación con datos medidos 62

Conclusiones 73

Bibliografía 77

A INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA 81
A.1 Sobre la notación 81
A.2 Herramientas matemáticas 84
A.3 Definiciones físicas 88

B ECUACIONES DE BOLTZMANN 95

C ECUACIONES DE OSCILACIONES ACÚSTICAS 129

D GRÁFICAS COMPLEMENTARIAS **138**

Introducción

El interés de la humanidad por conocer el Universo se remonta a sus mismos orígenes. La necesidad de saber qué lugar ocupa el ser humano en el Cosmos lo llevó desde siempre a especular sobre su origen, su evolución, su futuro y su posible final. En un principio, estas especulaciones eran de tipo mítico o religioso, y no podían ser de otra manera, debido al incipiente desarrollo científico y de instrumentos de observación.

Tuvieron que transcurrir muchos siglos hasta que Sir Isaac Newton desarrolló su Teoría de Gravitación Universal, en la segunda mitad del siglo XVII, y por primera vez en la historia se contaba con una teoría científica del Universo. De la mano de Newton la física terrestre y la universal se unificaban puesto que ya no cabía considerar a la Tierra y al Cielo como opuestos, como pensaban los antiguos griegos, sino que aquélla ocupaba un lugar en el Universo y éste era de su misma naturaleza, y seguía sus mismas leyes físicas.

Durante los siguientes doscientos años la física creció a pasos agigantados, encontrándose nuevos descubrimientos que hacían que el modelo de gravitación de Newton ya no fuera sostenible y era necesario someterlo a revisión. La genialidad de Albert Einstein trajo a la luz la Teoría General de la Relatividad en 1916, con la radical y a la vez brillante idea de considerar a la gravedad como una manifestación de las propiedades geométricas del espacio-tiempo, en lugar de ser una más entre las fuerzas de la naturaleza. El espacio y el tiempo, antes considerados fondos pasivos en los que los fenómenos físicos tomaban lugar, pasaron a convertirse en un elemento inseparable de la materia. En palabras de John Wheeler, "la materia

le decía al espacio-tiempo cómo curvarse y el espacio-tiempo le decía a la materia cómo moverse". Esta nueva unificación en la física, la de materia y geometría, en la reciente teoría de la gravedad, le arrebataba la cosmología a la religión y a la filosofía y la constituía en una nueva rama de la física.

Casi de inmediato aparecieron los primeros modelos para describir el Universo. Se basaban en la hipótesis de un Universo homogéneo e isotrópico, lo cual era confirmado por un gran número de observaciones. Estos modelos ofrecían una explicación a la expansión del Universo, la cual es causa de la separación observada y medida en las galaxias.

El modelo de un Universo homogéneo e isotrópico era una primera aproximación que explicaba gran parte de su comportamiento observado, pero tenía que ser revisado para incluir las agrupaciones de materia, que llevaron a la formación de galaxias, lo que a su vez llevó a la formación de estrellas con sistemas planetarios y, al menos en un planeta, a vida inteligente que se preguntara ¿por qué hay agrupaciones de materia en la que pudo surgir vida inteligente? Así, como un avance natural en la cosmología, surgieron los modelos de perturbaciones cosmológicas. Su tratamiento va más allá de una simple analogía al estudio de las perturbaciones tal como se trata en otras áreas de la física . Su estudio se empezó a desarrollar en la década de los 40 [26], pero tomó bastante tiempo llegar a una definición satisfactoria de las mismas. Sólo a principios de los años 80 [6] se empezó a disponer de un formalismo matemático que sentara las bases para realizar predicciones que pudieran someterse a observaciones. Aún así, las perturbaciones cosmológicas están lejos de ser un tema concluido y, por el contrario, sigue siendo materia de investigación.

El estudio de las perturbaciones cosmológicas conlleva de manera inherente las interacciones entre los distintos tipos de materia que hay en el Universo. Las múltiples interacciones entre estos distintos tipos de materia hace complejo el escenario de la evolución del Universo. Por fortuna, existen maneras de abordar este problema. Una de ellas consiste en acudir a una idea que data de unos 150 años atrás, cuyo autor es Ludwig Boltzmann, y que trata de cómo las colisiones

entre partículas determinan la manera en que éstas se distribuyen y evolucionan. El ingrediente adicional es la inclusión de un espacio-tiempo curvado por la presencia de la materia en él.

Dentro del conjunto de fenómenos abarcados por las perturbaciones cosmológicas es de gran interés el de las llamadas **Oscilaciones Acústicas Bariónicas** (BAO, por sus siglas en inglés: Baryon Acoustic Oscillations), que son un tipo de fluctuaciones en la densidad de la materia bariónica. Las BAO son el resultado de la presencia de potenciales gravitacionales, que producen atracción en la materia, e interacciones entre materia y radiación que causan que las partículas se separen. Esto provoca que la materia bariónica oscile y se propague como una onda de sonido, hasta que, al presentarse el desacople de materia y radiación, las oscilaciones se congelan, de tal manera que pueden ser observadas hoy en día [35]. A pesar de que ya se cuenta con un conjunto de medidas muy precisas de las Oscilaciones Acústicas Bariónicas, su estudio es reciente. Al llegar a conocerse en detalle, permitirá hacer un refinamiento en los modelos de formación de estructuras galácticas.

Todos los avances en la Cosmología anteriormente mencionados han ayudo a explicar la evolución del Universo, pero el estudio de esta evolución sigue dando sorpresas. Recientemente se ha descubierto que la expansión del Universo se está acelerando [33], lo que condujo a los físicos a postular la existencia de una nueva forma de materia que fuera la causa de esa aceleración: la *Energía Oscura*, que no interactúa directamente con la materia bariónica pero sí modifica el espacio-tiempo, por lo que influye en la evolución de ésta. Aquí vuelven a desempeñar un papel importante las BAO ya que se constituyen en un método para confirmar o descartar modelos de energía oscura.

En el presente trabajo de grado se obtiene la ecuación que describe el fenómeno de las Oscilaciones Acústicas Bariónicas, haciendo uso de la teoría de perturbaciones cosmológicas y las ecuaciones de Boltzmann de materia bariónica y radiación, y se hace una descripción física de la misma. Adicionalmente, se muestran soluciones de la ecuación de las BAO haciendo uso del software CAMB, utilizando diferentes

modelos de energía oscura. Se compararán los resultados calculados por CAMB con mediciones de las BAO y se mostrará que esta comparación se convierte en un método para descartar o confirmar la validez de los diferentes modelos de energía oscura.

El escrito se divide de la siguiente manera: en el capítulo **1** se exponen los elementos de la herramienta fundamental para el estudio de la cosmología, la relatividad general, limitándose a mostrar los conceptos que serán utilizados en el presente trabajo. La deducción de la ecuación de las BAO requiere como paso previo obtener las ecuaciones de Boltzmann de materia bariónica y radiación, lo cual se hace en el capítulo **4**, para lo cual se usa de la teoría de perturbaciones cosmológicas que se trata en el capítulo **3**, la cual implica perturbar un Universo homogenéneo e isotrópico, del que se habla en el capítulo **2**. Así, los dos primeros capítulos son una base previa para el estudio y los dos siguientes capítulos son la metodología como tal. En el capítulo **5** se deduce la ecuación de las Oscilaciones Acústicas Barónicas y se realiza su caracterización física. En la última sección de este capítulo se indican algunas soluciones analíticas de la ecuación de las BAO. En el capítulo **6** se muestran gráficas de soluciones de la ecuación utilizando el software CAMB, se exploran las soluciones con diferentes modelos de energía oscura y, como complemento a los objetivos del trabajo de grado, se comparan las soluciones con mediciones para confirmar o descartar la validez de estos modelos.

Capítulo 1

ELEMENTOS DE RELATIVIDAD GENERAL

La teoría general de la relatividad se constituyó en una verdadera revolución en la historia de la física al considerar a la gravedad aparte de las otras fuerzas, cuya causa es la modificación en la geometría del espacio-tiempo por el contenido de materia. La teoría original de Einstein fue revisada en la década de los 60 [41] , gracias a los trabajos de físicos como Stephen Hawking, Roger Penrose y George Ellis, incluyéndose elementos de Topología, lo cual permitió crear nuevos métodos para estudiar los problemas de gravitación y cosmología. Esta es la interpretación que prevalece hasta nuestros días.

A continuación se expone un conjunto de definiciones y relaciones matemáticas que no pretenden, ni mucho menos, agotar el amplio campo de conocimiento aportado por la relatividad general, sino que se selecciona cuidadosamente como fundamento matemático que se utilizará a lo largo de este escrito.

Al ser la gravedad una curvatura en el espacio-tiempo, es necesario abandonar la idea de un espacio Euclidiano, el cual debe ser reemplazado por un espacio-tiempo descrito, en términos generales, por un tensor simétrico de segundo orden llamado el *Tensor Métrico* $\mathbf{g}$, cuyas componentes en una determinada base coordenada serán $g_{\alpha\beta}$. Así, $\mathbf{g}$ define una métrica sobre el espacio-tiempo [40]. A partir del tensor

métrico se define el *intervalo espacio-temporal* como:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{1.1}$$

El tensor métrico permite también definir otras operaciones como *subir y bajar índices*:

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta, \tag{1.2}$$

$$A_\beta = g_{\alpha\beta} A^\alpha, \tag{1.3}$$

o la *magnitud de un vector*:

$$A^2 = g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta. \tag{1.4}$$

Una importante definición adicional es la *signatura del tensor métrico, sig.*($\boldsymbol{g}$), que es el número de valores propios positivos menos el número de valores propios positivos de la matriz que representa dicho tensor. Un caso particular a resaltar es la *métrica lorentziana* cuya signatura es, o bien, $n-2$, o bien, $2-n$, y para la cual hay un único valor propio de signo contrario a los demás: negativo en el primer caso y positivo en el segundo. Este valor propio de signo diferente se interpreta como la *coordenada temporal*. A lo largo de este escrito se trabajará siempre con métricas de signatura $n-2$.

La única manera de determinar si un espacio-tiempo está o no curvado, con independencia de las coordenadas que se elijan para representarlo, es a través del *Tensor de Riemman*, que escrito en términos de sus componentes es:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial^\alpha_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}\Gamma^\sigma_{\delta\beta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\delta}\Gamma^\sigma_{\gamma\beta}, \tag{1.5}$$

con $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, las *conexiones*.

Se puede imponer una condición adicional al tensor métrico, la cual es:

$$\nabla \mathbf{g} = 0, \tag{1.6}$$

que en términos de sus componentes suele expresarse con la siguiente notación:

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = 0. \tag{1.7}$$

El operador ∇ es la *derivada covariante* que se define para cualquier tensor:

$$T^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s;\gamma} = \frac{\partial T^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}}{\partial x^\gamma} + \Gamma^{\alpha_1}_{\gamma\sigma} T^{\sigma\alpha_2\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s} + \ldots + \Gamma^{\alpha_r}_{\gamma\sigma} T^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\sigma}_{\beta_1\ldots\beta_s} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta_1} T^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\sigma\beta_2\ldots\beta_s} - \ldots - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta_s} T^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_{s-1}\sigma}. \tag{1.8}$$

Con la condición anterior, las componentes de las conexiones se escriben ahora como:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \right). \tag{1.9}$$

A partir del tensor de Riemman se define el *Tensor de Ricci* mediante una contracción:

$$R_{\beta\delta} = R^{\sigma}_{\beta\sigma\delta} \tag{1.10}$$

y, de una nueva contracción, el *Escalar de Ricci*:

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}. \tag{1.11}$$

1.1 La ecuación de campo

La métrica que describe los efectos gravitaciones está determinada por la ecuación de campo:

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}, \tag{1.12}$$

donde $G_{\alpha\beta}$ es el *Tensor de Einstein*, G es la constante de gravitación universal y Λ

es la *constante cosmológica*, la cual surge de manera natural en las ecuaciones de campo gravitario.

El tensor momento-energía, $T_{\alpha\beta}$, se define a partir de un principio de mínima acción, para una métrica $g_{\alpha\beta}$ como:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{-2}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}}, \tag{1.13}$$

con $|g|$, el determinante de $g_{\alpha\beta}$, para una acción:

$$S = \int L dv, \tag{1.14}$$

donde la *densidad Lagrangiana, L*, es función de los campos de materia y sus derivadas. El tensor momento-energía cumple el principio de conservación local [40]:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \tag{1.15}$$

1.2 Ecuación de las geodésicas

El principio de inercia se expresa mediante la ecuación:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0. \tag{1.16}$$

Esta ecuación, sin embargo, debe ser generaliza para incluir la curvatura del espacio-tiempo:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \tag{1.17}$$

Nótese que la ecuación (1.16) no está parametrizada por el tiempo t, tal como lo está (1.17). Esto se debe a que en la relatividad general, el tiempo es una coordenada con el mismo status que las coordenadas espaciales. Por esta razón, (1.17) está expresada en términos de una variable s llamada *parámetro afín*. La ecuación (1.17) puede expresarse en términos de otro parámetro afín λ:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \tag{1.18}$$

donde λ y s se relacionan a través de:

$$\lambda = as + b, \tag{1.19}$$

para a y b constantes. Encontrar parámetros afines como s o λ es un problema fundamental en relatividad general. Una manera natural de parametrizar la ecuación de las geodésicas es a través del *tiempo propio* τ, definido, para una métrica con signatura $n-2$, a partir de la relación:

$$d\tau^2 = -ds^2. \tag{1.20}$$

Capítulo 2

UNIVERSO HOMOGÉNEO E ISOTRÓPICO

Puesto que las Oscilaciones Acústicas Bariónicas forman parte del estudio de las perturbaciones cosmológicas, su apropiado entendimiento inicia con una comprensión de éstas, lo cual implica a su vez la necesidad de dar un vistazo al Universo homogéneo e isotrópico.

Una serie de trabajos en los años 20, por parte de los físicos Alexander Friedmann y Howard Robertson, el matemático Arthur Walker y el sacerdote y astrónomo George Lemaitre, concluyó en una solución exacta de la ecuación de campo de Einstein (1.12). La solución es conocida como la *métrica FLWR*[13] (por las iniciales de los apellidos de los científicos mencionados). En esa métrica, el intervalo espacio-temporal viene dado por [11]:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2 \right), \tag{2.1}$$

donde r, θ y ϕ son coordenadas espaciales, t es la coordenada temporal, llamada *tiempo cosmológico*(apéndice **A.3**); a es el factor de escala y K es el parámetro de curvatura espacial, el cual puede ser normalizado para tomar los valores 1, -1 o 0. Esta métrica describe un Universo homogéneo e isotrópico en expansión. En 1929 la expansión del Universo fue confirmada por las observaciones del astrónomo Edwin Hubble.

A cada uno de los valores de la curvatura espacial K corresponde una geometría espacial para el Universo (Figura 2.1). La geometría del Universo, junto con el factor de escala a, determinan su evolución futura.

2.1 Tensor momentum-energía

El tensor momento-energía asociado a la métrica FLRW que soluciona la ecuación de campo (1.12) corresponde a un modelo de fluido perfecto [44]:

$$\bar{T}^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(t) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

La densidad de energía ρ y la presión P sólo dependen de la coordenada temporal, lo que refleja su carácter homogéneo.

2.2 Universo plano

Las diferentes observaciones [32], tales como las del fondo cósmico de microondas o CMB, la distribución de galaxias, etc., favorecen un valor de curvatura espacial $K = 0$, es decir un Universo plano. El intervalo espacio-temporal de la ecuación (2.1) se escribe entonces:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(\delta_{ij} dx^i dx^j). \tag{2.3}$$

La métrica FLRW, expresada en forma matricial, es la siguiente:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

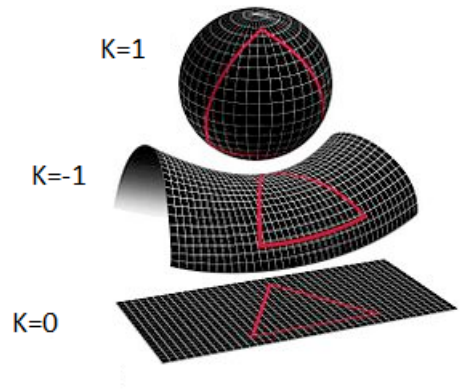

Figura 2.1: Geometrías espaciales del Universo. Imagen tomada de la página: $http://www.universetoday.com/86122/astronomy-without-a-telescope-enough-with-the-dark-already/$ en mayo de 2017.

por lo tanto:

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

2.2.1 Ecuaciones de campo para la métrica FLRW

Una vez definida la métrica FLRW (2.4), y el tensor momento-energía (2.2), se procede a resolver la ecuación de campo de Einstein (1.12). Las soluciones correspondientes de la ecuación de campo llevan a un par de ecuaciones conocidas como *Ecuaciones de Friedmann* [42]:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\bar{\rho}}{3} + \frac{\Lambda}{3}, \tag{2.6}$$

$$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\bar{\rho} + 3\bar{P}) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.7}$$

Estas dos ecuaciones son suficientes para conocer la evolución del Universo homogéneo.

Es interesante tratar la constante cosmológica como una densidad de materia más. Se define de manera estándar:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \tag{2.8}$$

Así, la densidad de materia es la suma de distintas contribuciones, incluyendo la constante cosmológica:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_m + \bar{\rho}_\gamma + \rho_\Lambda, \tag{2.9}$$

para $\bar{\rho}_m$, partículas con masa en reposo no nula, $\bar{\rho}_\gamma$, radiación y ρ_Λ, la densidad asociada a la constante cosmológica.

2.2.2 Evolución de la energía

A partir del tensor momento-energía (2.2) se hallan las ecuaciones de la evolución de la energía, mediante el principio de conservación, expresado por la ecuación (1.15). De la definición de la derivada covariante y calculando las conexiones (1.9), a partir de la métrica FLRW (2.4), se llega a la relación:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3\frac{a'}{a}(\bar{\rho} + \bar{P}) = 0. \tag{2.10}$$

En el modelo de fluido perfecto la materia no ejerce presión y para ella $\bar{P} = 0$. Esto simplifica la ecuación (2.10) a:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_m}{\partial t} + 3\frac{a'}{a}\bar{\rho}_m = 0, \tag{2.11}$$

siendo su solución:

$$\bar{\rho}_m \propto a^{-3}. \tag{2.12}$$

Lo anterior indica que la densidad de materia cae proporcionalmente al crecimiento del volumen del Universo. Este es un resultado esperado, que surge del hecho de que la cantidad de materia se mantiene constante, mientras que el volumen evoluciona, determinado por el factor de escala. Es posible expresar estas dos últimas ecuaciones

en términos del número de partículas por unidad de volumen n. Ya que, para una partícula de masa m, $n = m\bar{\rho}_m$, se tiene:

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial t} + 3\frac{a'}{a}\bar{n} = 0, \tag{2.13}$$

$$\bar{n} \propto a^{-3}. \tag{2.14}$$

En cuanto a la radiación, ésta ejerce una presión [11]:

$$\bar{P}_\gamma = \frac{\bar{\rho}_\gamma}{3}, \tag{2.15}$$

por lo tanto, se reescribe la ecuación (2.10):

$$\frac{\partial \bar{\rho}_\gamma}{\partial t} + 4\bar{\rho}_\gamma = 0, \tag{2.16}$$

cuya solución es:

$$\bar{\rho}_\gamma \propto a^{-4}. \tag{2.17}$$

Este resultado también puede hallarse heurísticamente si se tiene en cuenta que para la radiación, además de la disminución de la densidad proporcional al aumento del volumen, debe agregarse un factor adicional que es el aumento de la longitud de onda de los fotones, el cual es proporcional al factor de escala a, lo que causa una disminución adicional en la energía de los mismos.

Es importante encontrar relaciones entre las densidades y la temperatura. La energía de la radiación es proporcial a la temperatura, $E_\gamma \propto T$, e inversamente proporcional a la longitud de onda de los fotones, $E_\gamma \propto (\lambda)^{-1}$. Ya que la longitud de onda es, a su vez, proporcional al factor de escala, $\lambda \propto a$, a partir de (2.12) y (2.17), se encuentran relaciones entre las densidades de materia y la temperatura:

$$\bar{\rho}_m \propto \bar{T}^3, \tag{2.18}$$

$$\bar{\rho}_\gamma \propto \bar{T}^4. \tag{2.19}$$

Las dos últimas ecuaciones son consecuencia directa de las ecuaciones de campo para la métrica (2.4) [11, 15]. El acercamiento heurístico aquí expresado es suficiente para los propósitos de este documento.

Se ha dicho que para el modelo del fluido perfecto la materia tiene presión cero, mientras que para la radiación la presión viene dada por (2.15). En términos generales, se establece una ecuación de estado que relaciona la presión y la densidad de materia:

$$\bar{P} = \omega\bar{\rho}, \tag{2.20}$$

con una solución general:

$$\bar{\rho} \propto e^{\{-3\int_a \frac{da}{a}[1+\omega(t)]\}}. \tag{2.21}$$

2.3 Energía Oscura

Tal como se mencionó desde la Introducción misma, hay fuertes evidencias de que la expansión del Universo se está acelerando en el presente. A la luz de esta evidencia deben hacerse algunas observaciones con respecto a las ecuaciones derivadas anteriormente para el Universo plano y homogéneo.

La ecuación (2.7) puede reescribirse, como se indicó anteriormente, absorbiendo la constante cosmológica en la densidad de materia para obtener:

$$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\bar{\rho} + 3\bar{P}). \tag{2.22}$$

Esta ecuación implica que para densidades de materia que cumplan la relación:

$$\bar{P} < -\frac{\bar{\rho}}{3}, \tag{2.23}$$

o, lo que es lo mismo, a partir de (2.20):

$$\omega < -\frac{1}{3}. \tag{2.24}$$

Por supuesto, la materia conocida ejerce una presión positiva, pero dada la evidencia de la aceleración en la expansión del Universo, debe buscarse la opción de un tipo de materia que produzca una presión negativa y que sea dominante en el presente.

Un candidato ideal esta nueva especie desconocida de materia es la constante cosmológica. En efecto, se había dicho que esta puede interpretarse como una densidad de materia, según (2.8). La única manera para que ρ_Λ sea constante, es que $\omega = -1$, como puede verse claramente de (2.21). La constante cosmológica cumple la condición impuesta en (2.24), con el atractivo adicional de que surge de forma natural de la ecuación de campo de Einstein, lo que ahorraría la búsqueda de una forma diferente y desconocida de materia.

Lo cierto es que la única restricción impuesta es que, para hoy, $\omega < -\frac{1}{3}$ (más una restricción observacional que apunta a que $\omega < -0.5$ [15]). Cualquier campo que cumpla esta restricción explicaría la aceleración en la expansión. Este tipo de campos que cumplen la propiedad mencionada se conocen en su conjunto como *Energía Oscura* [1] y se denotan en general como ρ_Λ. Dado que ω no tiene que ser constante, el futuro del Universo no está definido. Puede llegar a expandirse por siempre, escenario conocido como *Big Freeze*, o puede incluso llegar a recolapsar, en un llamado *Big Crunch*.

Capítulo 3

PERTURBACIONES COSMOLÓGICAS

Hasta el momento se ha considerado una aproximación ideal del Universo, dada por la métrica FLRW (2.4). Esta aproximación es útil porque describe su proceso de expansión. Sin embargo, dicho modelo ideal no explica la presencia de concentraciones de materia, a partir de las cuales se formaron las galaxias, estrellas y planetas (Figura 3.1). Esto implica que deben considerarse modelos que contengan perturbaciones para una explicación más acorde al Universo real.

3.1 Definición de las perturbaciones

En el presente documento se trabajará exclusivamente con perturbaciones a primer orden. El Universo homogéneo e isotrópico, descrito en el capítulo **3**, será considerado el *fondo* u *orden cero*.

Para definir las perturbaciones a primer orden en el Universo se debe contar con dos variedades espacio-tiempo. Una describe el Universo ideal a través de la métrica FLRW, la otra busca aproximarse al Universo real [6]. Cada punto $\bar{p}$ del Universo ideal puede asociarse con un punto p del Universo real a través de una ón $p = \phi(\bar{p})$, tal que esta correspondencia es uno a uno. La transformación ϕ define una *escogencia de gauge*. Esta transformación no es única y hacer un mapeo diferente $p = \phi'(\bar{p})$

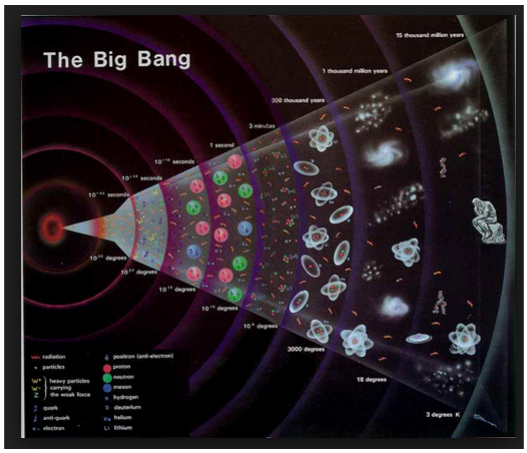

Figura 3.1: Formación de estructuras en el Universo. Imagen tomada de la página: $http://www.universetoday.com/54756/what-is-the-big-bang-theory/$ en mayo de 2017.

implica realizar una *transformación gauge* [21]. A través de la determinación de este mapeo es posible ahora definir perturbaciones como:

$$\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

$$\delta\rho = \rho - \bar{\rho}, \tag{3.2}$$

$$\delta T = T - \bar{T}, \tag{3.3}$$

así como perturbaciones fraccionales para cantidades escalares:

$$\delta_\rho = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}, \tag{3.4}$$

$$\Theta = \delta_T = \frac{\delta T}{\bar{T}}. \tag{3.5}$$

A través de las transformaciones gauge es posible trabajar en la variedad del espacio-tiempo ideal, descrita por la métrica FLWR, para describir el Universo real.

3.2 Perturbación en la métrica

Las perturbaciones en el espacio-tiempo FLRW se describen mediante la métrica:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1+2\Psi) & 0 \\ 0 & a^2(1+2\Phi)\delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Esta métrica se conoce en la literatura como *gauge newtoniano*. Incluye únicamente perturbaciones escalares, siendo Φ y Ψ funciones escalares con respecto a las transformaciones de coordenadas en el espacio-tiempo ideal FLRW, que dependen tanto de la coordenada temporal como de las coordenadas espaciales. Ψ es conocido como *Potencial Newtoniano* y Φ como *Perturbación en la Curvatura Espacial* [15], para los que se cumple $\Phi << 1$ y $\Psi << 1$. El gauge newtoniano permite describir la formación de grandes estructuras en el Universo y será la métrica utilizada a lo largo de este trabajo en las descripciones del Universo perturbado.

La inversa de la métrica, $g^{\mu\nu}$, con la condición de que los potenciales Φ y Ψ son pequeños, es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1-2\Psi) & 0 \\ 0 & a^{-2}(1-2\Phi)\delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

3.3 Ecuaciones de campo perturbadas

La ecuación de campo (1.12) perturbada se escribe como:

$$\delta G^{\nu}_{\mu} = 8\pi G \delta T^{\nu}_{\mu}, \tag{3.8}$$

donde la parte perturbada del tensor momento-energía asociado al fluido perfecto es:

$$\delta T^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} -\delta\rho & (\bar{\rho}+\bar{P})v^i \\ -(\bar{\rho}+\bar{P})v^j & \delta P \delta^i_j \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

con $v^i \equiv \frac{dx^i}{d\eta}$, la *velocidad coordenada* y η, el *tiempo conforme* (A.33). A partir de la métrica del gauge newtoniano (3.6) y de la perturbación del tensor momento-energía de (3.9) se encuentran las ecuaciones de campo perturbadas, escritas en tiempo conforme[7]:

$$3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} - \frac{\dot{a}}{a}\Psi\right) + \nabla^2\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho, \tag{3.10}$$

$$\partial_i\left(\dot{\Phi} - \frac{\dot{a}}{a}\Psi\right) = -4\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{P})v^i, \tag{3.11}$$

$$\ddot{\Phi} - \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\Psi} - 2\dot{\Phi}) - \left[2\frac{\dot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\Psi - \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi + \Phi) = -4\pi G a^2 \delta P, \tag{3.12}$$

$$\partial_i\partial_j(\Psi + \Phi) = 0. \tag{3.13}$$

Al aplicar *Transformada de Fourier* (A.21) en (3.13), para trabajar en variable *número de onda* $\vec{k}$, se tiene:

$$k_i k_j(\tilde{\Psi} + \tilde{\Phi}) = 0. \tag{3.14}$$

Como esta última ecuación debe ser válida para cualquier escala $\vec{k}$, implica que:

$$\Psi = -\Phi. \tag{3.15}$$

Dada la relación anterior, es posible escribir las ecuaciones (3.10) a (3.12) en términos de un sólo potencial. Así, escribiéndolas en términos del potencial newtoniano Ψ:

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G a^2 \bar{\rho}\left[\delta_\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+\omega)v\right], \tag{3.16}$$

$$\dot{\Psi} + \frac{\dot{a}}{a}\Psi = 4\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{P})v, \tag{3.17}$$

$$\ddot{\Psi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Psi} + \left[2\frac{\dot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\Psi = 4\pi G a^2 \delta P, \tag{3.18}$$

donde se introdujo la variable v, que cumple $v^i = -\partial_i v$. En el caso de la materia, para la cual $\omega = \bar{P} = \delta P = 0$, las últimas ecuaciones se reducen a:

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \left[\delta_{\rho_m} + 3\frac{\dot{a}}{a} v\right], \tag{3.19}$$

$$\dot{\Psi} + \frac{\dot{a}}{a}\Psi = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m v, \tag{3.20}$$

$$\ddot{\Psi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Psi} + \left[2\frac{\dot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\Psi = 0. \tag{3.21}$$

Para la era de materia [43]:

$$a \propto \eta^2, \tag{3.22}$$

aplicando en la ecuación (3.21), junto a las ecuaciones de Friedmann (2.6) y (2.7), se obtiene [27]:

$$\ddot{\Psi} + \frac{6}{\eta}\dot{\Psi} = 0, \tag{3.23}$$

cuya solución es:

$$\Psi(\eta, \vec{x}) = C_1(\vec{x}) + C_2(\vec{x})\eta^{-5}. \tag{3.24}$$

El segundo término del lado derecho tiende a cero por lo que:

$$\Psi(\eta, \vec{x}) = C(\vec{x}). \tag{3.25}$$

Esta ecuación muestra que el potencial Ψ es independiente de la coordenada temporal en la era de materia y, por lo tanto, $\dot{\Psi} = 0$. Combinando este hecho con (3.19), (3.20) y (3.22), y aplicando transformada de Fourier:

$$\tilde{\delta}_{\rho_m} = -\left[2 + \frac{1}{3}(k\eta)^2\right]\tilde{\Psi}. \tag{3.26}$$

Para modos *superhorizonte*, es decir, longitudes de onda que cruzan el *horizonte de Hubble* (apéndice **A.3**), $k\eta << 1$ (A.47), por lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$\tilde{\delta}_{\rho_m} = -2\tilde{\Psi} = C(\vec{k}). \tag{3.27}$$

Se ha encontrado que las perturbaciones de materia son independientes de la coordenada temporal en la era de materia para modos superhorizonte. Las condiciones iniciales que determinan el valor de los potenciales y la perturbación de materia son establecidas en *Inflación* [1].

[1]Inflación no forma parte del alcance de este trabajo de grado, por lo que no se entrará en detalles sobre este tema. Para un estudio del mismo véase por ejemplo [20].

Capítulo 4

LAS ECUACIONES DE BOLTZMANN

El proceso de derivar la ecuación de las Oscilaciones Acústicas Bariónicas tiene un elemento de dificultad, debido a las interacciones de materia y espacio-tiempo. La materia bariónica interactúa con la radiación a través de procesos de *dispersión de Compton* (apéndice **A.3**) y las dos especies de materia afectan la métrica. Los neutrinos, la materia oscura y la energía oscura (apéndice **A.3**), si bien no interactúan con la materia bariónica ni la radiación, sí deben incluirse como elemento perturbador de la métrica. La métrica a su vez modifica el movimiento de la materia, y por lo tanto los procesos de dispersión entre materia y radiación [1].

Puede verse que en este caso todos los elementos involucrados se interrelacionan y no puede sustraerse ninguno de ellos, ni analizarse por separado. Una manera de enfrentar esta dificultad es escribir las *ecuaciones de Boltzmann* para las especies. Así, se parte de la ecuación de Boltzmann:

[1] Este capítulo está ampliamente basado en el libro *Modern Cosmology* de *Scott Dodelson*, al que le corresponde la referencia [15], que se encuentra varias veces a lo largo del escrito. Este libro se ha tomado como guía metodológica para la deducción de la ecuación de las BAO en el actual capítulo y en la sección **5.1** del siguiente, y de él se ha tomado también su notación. Sin embargo, no se trata simplemente de seguir una serie de pasos en la deducción de las ecuaciones sino de adaptar la metodología del libro a las necesidades específicas del presente escrito, las cuales difieren de las del libro en mención.

$$\frac{df}{dt} = C(f), \tag{4.1}$$

siendo f, la *función de distribución* de la respectiva especie, t la coordenada temporal y $C(f)$ el término de colisiones. Esta ecuación dice, en términos generales, que las colisiones entre partículas cambian la evolución de la función de distribución de las partículas. Antes de aplicar la ecuación de Boltzmann de forma específica al caso de interés, es necesario analizar los términos a lado y lado de la igualdad (4.1).

4.1 Desarrollo de los términos de la ecuación de Boltzmann

A continuación se muestra como se desarrollan los términos izquierdo y derecho de la ecuación de Boltzmann (4.1), en particular, cómo se incluye la métrica perturbada en dicha ecuación.

4.1.1 Término $\frac{df}{dt}$

La función de distribución es, en general, inhomogénea y anisotrópica, por lo tanto:

$$f = f(t, x^i, p, \hat{p}^i), \tag{4.2}$$

con x^i las coordenadas espaciales, p la magnitud del momento de las partículas y $\hat{p}$ un vector unitario de momento que determina la dirección de las partículas, que por definición cumple:

$$\hat{p}^i = \hat{p}_i, \delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j = 1, \tag{4.3}$$

lo cual indica la dependencia de la dirección de la función de distribución.

Teniendo en cuenta lo anterior, se aplica el *Teorema de Liouville*[36] para obtener:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i}\frac{d\hat{p}^i}{dt}. \tag{4.4}$$

De la relatividad especial [37] se conoce la energía de un partícula en función de su masa en reposo, m_0, y su momento:

$$E = \sqrt{{m_0}^2 + p^2}. \tag{4.5}$$

Esta relación entre energía y momento permite redefinir (4.4) en términos de E:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial E}\frac{dE}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i}\frac{d\hat{p}^i}{dt}. \tag{4.6}$$

De hecho, el último término de esta ecuación puede despreciarse cuando se trabaja con perturbarciones a primer orden. Esto es debido a que las funciones de distribución a orden cero no dependen de la dirección. La dependencia de la dirección sólo ocurre cuando se considera una perturbación. Así, $\frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i}$ es un término de primer orden. Por otra parte, $\frac{d\hat{p}^i}{dt}$ implica un cambio en el tiempo en la dirección de las partículas. Si no se consideran perturbaciones en el Universo (tomando al Universo como homogéneo e isotrópico) las partículas se mueven en línea recta. El hecho de que este término sea distinto de cero, implica la presencia de los potenciales gravitacionales, Φ y Ψ, definidos en la sección **3.2**, los cuales son de primer orden. En conclusión, el último término de (4.6), resulta ser de segundo orden y puede despreciarse para el tratamiento que se seguirá en el presente escrito.

Según lo anterior:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial E}\frac{dE}{dt}. \tag{4.7}$$

Hasta el momento se ha hablado de las variables momento y energía, p y E respectivamente, pero ¿qué significado tienen estos términos de momento y energía en el marco de la relatividad general? La respuesta viene de la definición del cuadrivector momento:

$$P^\mu = m_0 \frac{dx}{d\tau}. \tag{4.8}$$

Usando la definición de tiempo propio (1.20) y la de la magnitud de un vector (1.4), el cuadrado de la magnitud del cuadrivector momento es:

$$P^2 = -m_0^2. \tag{4.9}$$

Para partículas que tienen masa en reposo nula, como es el caso de la radiación, debe usarse una parámetro afín, tal que el cuadrivector momento toma la forma:

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \tag{4.10}$$

Análogamente, el vector momento se define como:

$$p^i = P^i = m_0 \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{d\lambda}, \tag{4.11}$$

y su magnitud al cuadrado:

$$p^2 = g_{ij} P^i P^j. \tag{4.12}$$

Ahora es necesario incluir los efectos gravitacionales en (4.7), para lo cual se hará uso de la métrica del gauge newtoniano (3.6). El método consiste en reemplazar los términos $\frac{dx^i}{dt}$ y $\frac{dE}{dt}$, en la ecuación (4.7), como se expone a continuación. Primero se reescribe (4.9), mediante (1.4):

$$P^2 = g_{00}(P^0)^2 + p^2 = -{m_0}^2. \tag{4.13}$$

Despejando P^0:

$$P^0 = E(1 - \Psi). \tag{4.14}$$

Ahora bien, las componentes del momento p^i son proporcionales al vector unitario (4.3), es decir:

$$p^i = P^i = C\hat{p}^i. \tag{4.15}$$

La constante de proporcionalidad C se encuentra a partir de (4.12) , por lo que:

$$P^i = p\hat{p}^i \frac{1-\Phi}{a}. \tag{4.16}$$

Reescribiendo:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}, \tag{4.17}$$

por lo tanto, de (4.10):

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{P^i}{P^0}. \tag{4.18}$$

Conociendo P^0 y P^i en función de los potenciales gravitacionales, dados por (4.14) y (4.16), se reemplaza en la ecuación anterior para obtener:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{p}{E}\frac{\hat{p}^i}{a}(1+\Psi-\Phi). \tag{4.19}$$

Para determinar $\frac{dE}{dt}$ en términos de los potenciales gravitacionales se hará uso de la ecuación de las geodésicas (1.18) para la componente temporal, la cual, aprovechando la definición (4.8) del cuadrivector momento es:

$$\frac{dP^0}{d\lambda} + \Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta = 0. \tag{4.20}$$

El desarrollo algebraico lleva a la ecuación:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{p^2}{E}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{a'}{a}\right) - \frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a}. \tag{4.21}$$

Ahora es posible insertar (4.19) y (4.21) en (4.7). Luego de despreciar términos de segundo orden, el miembro izquierdo de la ecuación de Boltzmann es finalmente:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{p}{E}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial E}\left(\frac{a'}{a}\frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right). \tag{4.22}$$

Esta ecuación, para partículas con masa en reposo cero, para las cuales $E = p$, se simplifica a:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial f}{\partial x^i} - p\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{a'}{a} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right). \tag{4.23}$$

4.1.2 Término de colisiones $C(f)$

Para analizar el término de las colisiones, $C(f)$, se toma en cuenta que la evolución de la función de distribución es debida a interacciones entre partículas de dos especies distintas, que producen un cambio en sus valores de momento y energía:

$$(\vec{p_1}, \vec{p_2}, E_1, E_2) \leftrightarrow (\vec{p'}_1, \vec{p'}_2, E'_1, E'_2). \tag{4.24}$$

Las cantidades no primadas son los valores de las partículas antes de la interacción y las primadas los resultantes luego de la interacción. El proceso es en general reversible, lo que se denota con la doble flecha en (4.24). El término de colisiones que modifica la función de distribución de una especie, por ejemplo la $1'$, se expresa entonces como:

$$\begin{aligned} C(f'_1) = &\int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3p'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \int \frac{d^3p'_2}{(2\pi)^3 2E'_2} (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p_1} + \vec{p_2} - \vec{p'_1} - \vec{p'_1}) \\ &* \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) |M|^2 (f_1 f_2 - f'_1 f'_2). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Ahora se procede a indicar qué es cada uno de los términos de esta ecuación. Los *deltas de Dirac* expresan la conservación del momento y la energía. A cada una la acompaña un factor de 2π que resulta de pasar de una *delta de Kronecker* discreta a la delta de Dirac.

Se deduce que el aumento en la cantidad de la especie $1'$ es proporcional a las cantidades de las especies antes de la interacción, y su disminución a las cantidades luego de la interacción. Esta dependencia se expresa en el último factor de la ecuación anterior.

La amplitud $|M|^2$ viene por la física de la interacción entre partículas específica.

La forma que toma las medida de integración se explican en el apéndice **B** (Ecuaciones B.46-B.50).

4.2 La ecuación de Boltzmann para fotones

4.2.1 La función de distribución de primer orden

Para fotones, la función de distribución se obtiene partiendo de la estadística de Bose-Einstein:

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} - 1}, \tag{4.26}$$

con μ, el potencial químico, el cual puede despreciarse. Recordando que para fotones $E = p$, la ecuación (4.26) para una temperatura perturbada a primer orden es:

$$f_\gamma = \frac{1}{e^{\frac{p_\gamma}{\bar{T}[1+\Theta]}} - 1}. \tag{4.27}$$

Aplicando una perturbación a $\bar{f}_\gamma$:

$$f_\gamma = \bar{f}_\gamma + \delta \bar{f}_\gamma \tag{4.28}$$

y dado que $\bar{f}_\gamma$ es:

$$\bar{f}_\gamma = \frac{1}{e^{\frac{p_\gamma}{\bar{T}}} - 1}, \tag{4.29}$$

se llega a que la función de distribución se escribe como:

$$f_\gamma = \bar{f}_\gamma - p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} \Theta. \tag{4.30}$$

A partir de (4.27) se halla una relación entre la derivada parcial de $\bar{f}_\gamma$ con respecto a la temperatura y con respecto a la magnitud del momento. En efecto:

$$\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} = -\frac{\bar{T}}{p_\gamma} \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial \bar{T}}. \tag{4.31}$$

Reemplazando (4.31) en (4.23), dejando sólo los términos de primer orden, es decir los que contienen la información de la perturbación como tal, se obtiene la ecuación de primer orden:

$$\frac{df_\gamma}{dt}|_{primerorden} = -p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i_\gamma}{a}\frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i_\gamma}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right). \tag{4.32}$$

4.2.2 El término de colisiones para fotones

Las colisiones que afectan la evolución de la función de distribución de los fotones son debidas a la dispersión de Compton, en la que la interacción entre los fotones y otras partículas con masa en reposo no nula es tratada como un choque elástico entre dos cuerpos, en la cual el momento y la energía se conservan. Debido a que la masa del protón es casi 2000 veces la del electrón, la interacción de interés corresponde a la de los fotones con los electrones que esquemáticamente se escribirá:

$$e(\vec{p}_e) + \gamma^-(\vec{p}_\gamma) = e(\vec{p'}_\gamma) + e(\vec{p'}_\gamma). \tag{4.33}$$

Se aplica entonces la ecuación (4.25), pero con algunas modificaciones (sección **4.2.2** del apéndice **B**). Además, no se integrará con respecto momento $\vec{p}_\gamma$, puesto que se busca analizar la dependencia de las interacciones de los fotones con respecto a su dirección. El término de colisiones se escribe entonces como:

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{1}{p_\gamma}\int \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3 2E_e}\int \frac{d^3p'_e}{(2\pi)^3 2E'_e}\int \frac{d^3p'_\gamma}{(2\pi)^3 2E'_\gamma}(2\pi)^4\delta^3(\vec{p}_\gamma + \vec{p}_e - \vec{p'}_\gamma - \vec{p'}_e)r \\ &* \delta(E_\gamma + E_e - E'_\gamma - E'_e)|M|^2[f(\vec{p'_e})f(\vec{p'_\gamma}) - f(\vec{p_e})f(\vec{p}_\gamma)]. \end{aligned} \tag{4.34}$$

La anterior ecuación puede tratarse basándose en algunas consideraciones físicas. En la época de interés los electrones son no relativistas [28], por esta razón su masa en reposo es mucho mayor que su energía cinética, por lo que en (4.34), los denominadores de las integrales en los que aparece $E(p_e)$y $E(p'_e)$ pueden reemplazarse por sus masas en reposo. Integrando sobre p'_e y usando $E_\gamma = p_\gamma$, la ecuación anterior queda:

$$C[f(\vec{p_\gamma})] = \frac{\pi}{4m_e^2 p_\gamma}\int \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_\gamma}{(2\pi)^3 p'_\gamma}\delta(p_\gamma + E_e - p'_\gamma - E'_e) \\ * |M|^2[f(\vec{p_e} + \vec{p_\gamma} - \vec{p'_\gamma})f(\vec{p'_\gamma}) - f(\vec{p_e})f(\vec{p_\gamma})]. \tag{4.35}$$

Ya que, como se indicó, la energía cinética del electrón es mucho menor que su masa en reposo m_e, es posible hacer una expansión en serie de Taylor de tal manera que se puede aproximar a:

$$E_e = m_e + \frac{p_e^2}{2m_e}, \tag{4.36}$$

por lo que el cambio en la energía en el electrón es:

$$E_e - E'_e = m_e + \frac{p_e^2}{2m_e} - m_e - \frac{(\vec{p_e} + \vec{p_\gamma} - \vec{p'}_\gamma)^2}{2m_e}. \tag{4.37}$$

Puesto que el momento del electrón es mucho más grande que el del fotón, antes como después del choque, es válida la aproximación:

$$E_e - E'_e = \frac{(\vec{p'}_\gamma - \vec{p_\gamma})\cdot\vec{p_e}}{m_e} = (\vec{p_\gamma} - \vec{p'}_\gamma)\cdot\vec{v}_e. \tag{4.38}$$

El término de la derecha de la relación anterior surge debido a que la velocidad del electrón, para una aproximación no relativista, es $\vec{v}_e = \frac{\vec{p_e}}{m_e}$. Igualmente, debido a que $p_e >> p_\gamma$, también es posible hacer una expansión de Taylor del valor de la energía cinética final del electrón alrededor de su valor antes del choque, E_e, lo cual permite hacer la siguiente aproximación en la delta de Dirac de la ecuación (4.35):

$$\delta\left(p_\gamma + \frac{p_e^2}{2m_e} - p'_\gamma - \frac{(\vec{p_e} + \vec{p_\gamma} - \vec{p'}_\gamma)}{2m_e}\right) \approx \delta(p_\gamma - p'_\gamma) + \frac{(\vec{p_\gamma} - \vec{p'}_\gamma)\cdot\vec{p_e}}{m_e}\frac{\partial\delta(p_\gamma - p'_\gamma)}{\partial p'_\gamma}. \tag{4.39}$$

Por iguales razones, la función de distribución de los electrones no se verá afectada en gran medida luego de las interacciones, por lo que $f(\vec{p'_e}) \approx f(\vec{p_e})$. Inmediatamente se observa que en puede factorizarse $f(\vec{p_e})$. Así, en (4.35) aparecerá la integral:

$$\int \frac{d^3p_e f(\vec{p_e})}{(2\pi)^3}, \tag{4.40}$$

que no es otra cosa que el número de electrones por unidad de volumen, n_e.

En cuanto a la amplitud $|M|^2$, ésta es la correspondiente a la dispersión Compton que se toma de manera aproximada como un valor constante dado por:

$$|M|^2 = 8\pi\sigma_T m_e^2, \tag{4.41}$$

donde σ_T es la *sección eficaz de Thomson*.

Según lo dicho anteriormente, ya se ha integrado con respecto a $\vec{p}_e$ y $\vec{p'}_e$. Resta en (4.35) integrar con respecto a $\vec{p'}_\gamma$. Si se hace la integral en coordenadas esféricas se tendrá que:

$$\int d^3p'_\gamma = \int_0^\infty dp'_\gamma p_\gamma^2 \int d\Omega'. \tag{4.42}$$

La función de distribución para los fotones, establecida en (4.30), depende de la perturbación fraccional de temperatura, Θ, por lo que, cuando se inserte dicha función de distribución en el término de colisiones (4.35), al integrar en coordenadas esféricas, aparecerá una integral de Θ sobre el ángulo sólido. Esto motiva a definir:

$$\Theta_0 = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega'\Theta(\hat{p}_\gamma, \vec{x}, t). \tag{4.43}$$

Θ_0 es la *parte monopolar* de la perturbación en la temperatura e indica la desviación del monopolo con respecto al valor promedio de temperatura en el espacio-tiempo.

Colectando las indicaciones anteriores, el término de colisiones para fotones quedará como:

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{n_e\sigma_T}{p_\gamma}\int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)\left(-p'_\gamma\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p'_\gamma}\Theta_0 + p_\gamma\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta\right) \\ &+ \vec{p_\gamma}\cdot\vec{v}_e\frac{\partial\delta(p_\gamma - p'_\gamma)}{\partial p'_\gamma}(\bar{f}'_\gamma - \bar{f}_\gamma)]. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Al resolver esta integral se llega finalmente al término de colisiones para los fotones:

$$C[f(\vec{p}_\gamma)] = -p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta(\hat{p}_\gamma) + \hat{p}_\gamma \cdot \vec{v}_e] \tag{4.45}$$

4.2.3 La ecuación para fotones

La relación (4.1) indica que deben igualarse las ecuaciones (4.32) y (4.45). Luego de cancelar términos comunes se obtiene:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i_\gamma}{a}\frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i_\gamma}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta(\hat{p}_\gamma) + \hat{p}_\gamma \cdot \vec{v}_e]. \tag{4.46}$$

En principio, esta última es la ecuación de Boltzmann para fotones, pero se hará un tratamiento adicional para la misma. En primer lugar se cambiará la coordenada temporal, pasando de tiempo cosmológico a tiempo conforme. Se aplicará a (4.46) la transformada de Fourier para trabajar sobre variable número de onda. Además, se utilizará la *profundidad óptica*, τ (A.37).

Hasta el momento, la dirección de los fotones ha sido determinada por el vector momento unitario, $\hat{p}_\gamma$, pero, una vez aplicada la transformada de Fourier a la ecuación de Boltzmann para fotones, conviene definir una nueva variable que indique la dirección de las partículas:

$$\mu = \frac{\vec{k} \cdot \hat{p}_\gamma}{k}. \tag{4.47}$$

La velocidad se considera irrotacional [28], por lo que tiene la misma dirección que $\vec{k}$, por lo tanto $\tilde{\vec{v}}_e \cdot \hat{p}_\gamma = \tilde{v}_e \mu$. Establecidas estas consideraciones se llega a que la ecuación de Boltzmann para fotones es:

$$\boxed{\dot{\tilde{\Theta}} + ik\mu\tilde{\Theta} + \dot{\tilde{\Phi}} + ik\mu\tilde{\Psi} = -\dot{\tau}(\tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta} + \mu\tilde{v}_e)}. \tag{4.48}$$

4.3 La ecuación de Boltzmann para bariones

Análogamente al tratamiento realizado para los fotones, se utilizará la ecuación de Botlzmann (4.1) para hallar un conjunto de relaciones que determinan la evolución de las partículas bariónicas. En el contexto de la cosmología, se llaman bariones tanto a los electrones como a los protones (apéndice **A.3**), así que es viable partir de un tratamiento general que involucre a los dos tipos de partículas. Cuando se analice el término de colisiones, sin embargo, se hará necesario distinguirlas.

4.3.1 Término $\frac{df}{dt}$ para bariones

El método para tratar la ecuación de primer orden de la función de distribución (4.22) para el caso de los bariones, será diferente al usado para los fotones, en los cuales se partió de usar la estadística de Bose-Einstein, incluyendo una pequeña perturbación. Aquí, se preferirá tomar un camino que consiste en integrar la ecuación (4.22), multiplicando por $\frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}$ e integrando. Escribiendo en la notación compacta definida en el apéndice **A.1** para las colisiones:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}f_b+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int\frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}f_b\frac{p_b\hat{p}_b^i}{E_b}-\left(\frac{a'}{a}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\int\frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}\frac{p_b^2}{E_b}\\&-\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\int\frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}p_b\hat{p}_b^i=\langle C(f_b)\rangle_{p_b}\end{aligned}\tag{4.49}$$

Ahora se analizarán cada uno de los términos que aparecen en la ecuación anterior. La primera integral del término izquierdo es análoga a (4.40), es decir que resulta ser n_b.

Las partículas involucradas son no relativistas por lo que su energía puede aproximarse a su masa en reposo, por lo tanto:

$$\frac{p_b}{E_b}\approx\frac{p_b}{m_b}=v_b.\tag{4.50}$$

Esto induce a definir la velocidad de los bariones como:

$$v_b^i \equiv \frac{1}{n_b} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_b \frac{p_b \hat{p}_b^i}{E_b}. \tag{4.51}$$

La tercera integral se resuelve directamente y da como resultado $-3n_b$. La integral del último término de (4.49) involucra al vector unitario $\hat{p}_b^i$, es decir, la dirección de las partículas. Por esta razón, el resultado de la integral sólo será distinto de cero para la parte perturbada de f_b, es decir para un término de primer orden. Esto implica que el último término es en su totalidad de segundo orden y puede ser despreciado.

Dicho todo esto, la expresión (4.49) queda como:

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial n_b v_b^i}{\partial x^i} + 3\left(\frac{a'}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) n_b = \langle C(f_b)\rangle_{p_b}. \tag{4.52}$$

La densidad de los bariones corresponde a una pequeña perturbación con respecto a su densidad de orden cero:

$$n_b = \bar{n}_b(1 + \delta_b). \tag{4.53}$$

Se inserta esta expresión en (4.52), resultando:

$$\bar{n}_b \left(\frac{\partial \delta_b}{\partial t} + \frac{\partial v_b^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) = \langle C(f_b)\rangle_{p_b}. \tag{4.54}$$

4.3.2 Ecuación para perturbación de densidad bariones

Se parte de analizar la colisión entre una partícula bariónica y una especie 2, que puede ser otra partícula bariónica o un fotón. Usando la notación del apéndice **A.1**, la ecuación (4.54) se escribe como:

$$\bar{n}_b \left(\frac{\partial \delta_b}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial v_b^i}{\partial x^i} + 3\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = \langle c_{p_b p_2}\rangle_{p_b p_b' p_2 p_2'}. \tag{4.55}$$

Lo anterior implica que, para la interacción entre un barión y una partícula 2, el

término $c_{p_b p_2}$ es explícitamente:

$$c_{p_b p_2} = (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p}_b + \vec{p}_2 - \vec{p'}_b - \vec{p}_2)\delta(E_b + E_2 - E'_b - E'_2)\frac{|M|^2}{8E_b E'_b E_2 E'_2}[f(p'_b)f(p'_2) - f(p_b)f(p_2)]. \tag{4.56}$$

Nótese que, para el término de la derecha, la medida de integración es simétrica ante los intercambios $p_b \leftrightarrow p'_b$ y $p_2 \leftrightarrow p'_2$, mientras que el integrando (4.56) es totalmente antisimétrico ante dicho intercambio. Además, el proceso que llevó de (4.49) a (4.55) no se ve tampoco afectado por este intercambio. La única manera de que el resultado tenga sentido es que el término derecho de (4.55) sea igual a 0. Puesto que se ha llegado a que $\langle C(f_b)\rangle = 0$, en (4.55), aplicando transformada de Fourier y cambiando a tiempo conforme, se tiene la ecuación para la densidad de bariones:

$$\boxed{\dot{\tilde{\delta}}_b + ik\tilde{v}_b + 3\dot{\tilde{\Phi}} = 0}. \tag{4.57}$$

4.3.3 Ecuación para la velocidad de bariones

En lo que se tiene hasta el momento se han introducido dos variables que determinan la evolución de los bariones: la densidad fraccional δ_b y su velocidad $\vec{v}_b$, y se cuenta con la ecuación (4.57). Es necesario llegar a una segunda ecuación. El método para obtener dicha ecuación será similar al usado para derivar la ecuación (4.57), pero esta vez, adicionalmente, se multiplicará por $\vec{p}_b$, obteniéndose:

$$\left\langle \frac{df_b}{dt} p_b^i \right\rangle_{p_b} = \langle C(f_b) p_b^i \rangle_{p_b}. \tag{4.58}$$

Lo que estricamente se está indicando es que se debe multiplicar por $\int \frac{d^3 p_b}{(2\pi)^3}\vec{p}_b$. Ahora bien, el momento se define como:

$$p_b^i \equiv \frac{1}{n_b}\int \frac{d^3 p_b}{(2\pi)^3} f(\vec{p}_b) p_b^i. \tag{4.59}$$

Por otra parte, recuérdese que, al definir la velocidad (4.51), se tuvo en cuenta que las partículas bariónicas son no relativistas y se aplicó la aproximación indicada en (4.50). De manera análoga, es válido hacer la aproximación:

$$p_b^i = m_b v_b^i = \frac{1}{n_b}\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3} f_b \frac{p_b \hat{p}_b^i}{E} m_b. \tag{4.60}$$

Esto sugiere que, en lugar de multiplicar la parte izquierda por $\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\vec{p}_b$, se multiplicará por $\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\vec{p}_b}{E_b} m_b$. Una vez establecido esto, se procede a aplicarlo en (4.22):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3} f_b \frac{p_b \hat{p}_b^j}{E_b} m_b + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3} f_b \frac{p_b^2 \hat{p}_b^i \hat{p}_b^j}{E_b^2} m_b - \left(\frac{a'}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}\frac{p_b^3 \hat{p}_b^j}{E_b^2} m_b$$
$$- \frac{1}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}\frac{p_b^2 \hat{p}_b^i \hat{p}_b^j}{E_b} m_b = \langle C(f_b) p_b^j \rangle_{p_b}. \tag{4.61}$$

Puesto que $p_b << E_b$, es posible despreciar los términos cuadráticos $\frac{p_b^2}{E_b^2}$. Al desarrollar la parte izquierda de (4.61) se obtiene:

$$m_b\left(\frac{\partial (n_b v_b^j)}{\partial t} + 4\frac{a'}{a} n_b v_b^j + \frac{n_b}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right) = \langle C(f_b) p_b^j \rangle_{p_b}. \tag{4.62}$$

Como se dijo anteriormente, los dos tipos de partículas bariónicas, electrones y protones, deben ser estudiados de manera independiente. Para los bariones, además de la dispersión Compton, hay otro tipo de interacción: *la dispersión de Coulomb* [10]. Por otra parte, dado que el momento de los protones es mucho mayor que el de los fotones, se puede despreciar el proceso de dispersión de Compton para los protones. Esto indica que (4.62) se convierte en dos ecuaciones, una para electrones y otra para protones, y que el término de colisiones para la ecuación de Boltzmann de los electrones se divide en dos tipos de interacciones:

$$m_e\left(\frac{\partial (n_e v_e^j)}{\partial t} + 4\frac{a'}{a} n_e v_e^j + \frac{n_e}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right) = \langle c_{p_e p_p} p_e^j \rangle_{p_e p'_e p_p p'_p} + \langle c_{p_e p_\gamma} p_e^j \rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}, \tag{4.63}$$

$$m_p\left(\frac{\partial (n_p v_p^j)}{\partial t} + 4\frac{a'}{a} n_p v_p^j + \frac{n_p}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right) = \langle c_{p_e p_b} p_p^j \rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}. \tag{4.64}$$

Para la época en consideración, la *tasa de dispersión de Thomson* (A.35) es mucho mayor que la tasa de expansión del Universo en ese momento. Esto fuerza a que, tanto las densidades como las velocidades de los dos tipos de partículas, tomen el mismo valor: $\delta_e = \delta_p = \delta_b$ y $\vec{v}_e = \vec{v}_p = \vec{v}_b$ [29]. Igualmente, como el número de electrones es igual al número de electrones, se tendrá $n_e = n_p = n_b$. Se procede a sumar las ecuaciones (4.63) y (4.64), factorizando $\bar{n}_b$, y como $m_p >> m_e$, se establece simplemente $m_p = m_b$:

$$\bar{\rho}_b \left(\frac{\partial v_b^j}{\partial t} + \frac{a'}{a} v_b^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right) = \langle c_{p_e p_b} (p_e^j + p_p^j) \rangle_{p_e p'_e p_p p'_p} + \langle c_{p_e p_\gamma} p_e^j \rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}. \tag{4.65}$$

Por la conservación del momento:

$$\vec{p}_e + \vec{p}_p = \vec{p'}_e + \vec{p'}_p, \tag{4.66}$$

$$\vec{p}_e + \vec{p}_\gamma = \vec{p'}_e + \vec{p'}_\gamma, \tag{4.67}$$

el integrando $c_{p_e p_b}(p_e^j + p_p^j)$ sigue siendo antisimétrico ante los intercambios $\vec{p} \leftrightarrow \vec{p'}$, lo que permite usar el mismo argumento explicado en **4.3.2** y concluir que el primer sumando del miembro derecho de la ecuación (4.65) es cero, mientras que para el segundo sumando:

$$\langle c_{p_e p_\gamma} p_e^j \rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma} = -\langle c_{p_e p_\gamma} p_\gamma^j \rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}. \tag{4.68}$$

Luego de aplicar transformada de Fourier y multiplicar por k^j, (4.65) se simplifica a:

$$\bar{\rho}_b \left(\frac{\partial v_b^j}{\partial t} + \frac{a'}{a} v_b^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right) = -\langle \tilde{c}_{p_e p_\gamma} p_\gamma \mu \rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}. \tag{4.69}$$

Nótese que $\langle c_{p_e p_\gamma} \rangle_{p_e p'_e p'_\gamma}$ corresponde exactamente a $C[f(p_\gamma)]$, calculado en (4.45). Por lo tanto, escribiendo explícitamente el lado derecho de la ecuación anterior:

$$\langle \tilde{c}_{p_e p_\gamma} p\mu \rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma} = n_e \sigma_T \int \frac{d^3 p_\gamma}{(2\pi)^3} p_\gamma^2 \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} \mu [\tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta}(\mu) + \tilde{v}_b \mu]. \tag{4.70}$$

Luego de integrar por $\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2}$, definir el *dipolo* como:

$$\Theta_1 \equiv i \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} \mu \Theta, \tag{4.71}$$

la *relación fotón-barión*, R:

$$R = \frac{3\bar{\rho}_b}{4\bar{\rho}_\gamma}, \tag{4.72}$$

y cambiar a tiempo conforme, se llega a la ecuación de Boltzmann de la velocidad de bariones:

$$\boxed{\dot{\tilde{v}}_b + \frac{\dot{a}}{a} \tilde{v}_b + ik\tilde{\Psi} = \frac{\dot{\tau}}{R}(3i\tilde{\Theta}_1 + \tilde{v}_b)}. \tag{4.73}$$

Capítulo 5

OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS

Se ha llegado al capítulo principal de este escrito, en el cual se derivará la ecuación que gobierna a las BAO y se explicará el significado físico de la misma. El capítulo anterior se constituyó en la base metodológica para llegar a ella. Previo a seguir la ruta que lleva de las ecuaciones de Boltzmann, halladas en el capítulo anterior, hasta la ecuación de las BAO, conviene hablar de las condiciones físicas del Universo que permiten la existencia del fenómeno de las oscilaciones acústicas.

Antes del desacople de materia y radiación, la temperatura del Universo era elevada, del orden de miles de K, por lo cual los fotones tenían altas energías. Esto tiene una serie de implicaciones importantes. La primera de ella es que los fotones se encontraban en permanente interacción con los electrones mediante la dispersión de Compton. Además, los electrones no lograban unirse a los protones para formar átomos estables. Los fotones no podían seguir caminos libres prolongados antes de ser, a su vez, dispersados por un electrón. A esta alta interacción se le conoce como *límite de acople fuerte* [31] y provoca que bariones y fotones se muevan como un único fluido, razón por la cual, el modelo que describe este comportamiento es conocido como *aproximación de fluido* [38].

Otra consecuencia de lo anteriormente establecido es que la tasa de dispersión

y la profundidad óptica tendrán valores elevados previo al desacople de materia y radiación. La alta dispersión provoca que cualquier perturbación para escalas menores que el camino medio que recorren los fotones (correspondientes a modos altos), sea eliminada.

El hecho de que fotones y bariones se muevan como un único fluido elimina también las anisotropías, lo que permite despreciar modos altos y aproximar las perturbaciones en la temperatura a sus componentes monopolar y dipolar.

Una última consecuencia es la aparación misma de las oscilaciones acústicas. El fluido fotón-barión se propaga a partir de dos fuerzas opuestas, las fuerzas atractivas de los potenciales gravitacionales y la presión causada por las dispersiones. Por lo tanto, el fenómeno cesa una vez se presenta el desacople de materia y radiación. Las oscilaciones quedan impresas en el fondo de microondas y son observables [16]. A lo largo de este capítulo se ampliará la descripción física hasta aquí introducida.

5.1 Ecuación de las BAO

Se recopilan ahora las ecuaciones de Boltzmann para fotones y bariones, (4.48), (4.57) y (4.73), encontradas en el capítulo anterior, removiendo la tilde ($\sim$) sobre ellas, entendiéndose que ya se ha aplicado la transformada de Fourier y que, por lo tanto, se está trabajando con la variable número de onda, k^i:

$$\dot{\Theta} + ik\mu\Theta + \dot{\Phi} + ik\mu\Psi = -\dot{\tau}(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b), \tag{5.1}$$

$$\dot{\delta}_b + ikv_b + 3\dot{\Phi} = 0, \tag{5.2}$$

$$\dot{v}_b + \frac{\dot{a}}{a}v_b + ik\Psi = \frac{\dot{\tau}}{R}(3i\Theta_1 + v_b). \tag{5.3}$$

Por otra parte, en (4.43), se definió el monopolo y el dipolo fue definido en (4.71). Estas definiciones suscitan a expandir la densidad fraccional de temperatura en

polinomios de Legendre, $P_l(\mu)$:

$$\Theta(\mu) = \sum_{l}^{\infty} (-i)^l \Theta_l P_l(\mu), \tag{5.4}$$

con el *momento multipolar*, Θ_l:

$$\Theta_l = \frac{1}{(-i)^l} \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} P_l(\mu)\Theta(\mu). \tag{5.5}$$

Con esto, la ecuación de Boltzmann para fotones es expresada como una jerarquía infinita de momentos Θ_l. Aún así, es posible despreciar los momentos para $l > 2$ y quedarse únicamente con el monopolo y el dipolo como se mostrará a continuación.

Multiplíquese (5.1) por $P_l(\mu)$ e intégrese sobre μ, para $l > 2$. Para los términos que sólo dependen de μ^m, con $m = 0$ o $m = 1$, se aplica la propiedad de los polinomios de Legendre según (A.32); al realizar la integración indicada, el resultado será cero. Se llegará entonces a:

$$\frac{\partial \Theta_l}{\partial \eta} + \frac{ik}{(-i)^l} \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} P_l(\mu)\mu\Theta = \dot{\tau}\Theta_l \tag{5.6}$$

Al aplicar la relación de recurrencia de los polinomios de Legendre (A.32):

$$\dot{\Theta}_l - \frac{kl}{2l+1}\Theta_{l-1} + \frac{k(l+1)}{2l+1}\Theta_{l+1} = \dot{\tau}\Theta_l. \tag{5.7}$$

A partir del modelo de aproximación de fluido, con la consecuente ausencia de anisotropías, es natural suponer que $\Theta_l < \Theta_{l+1}$, por lo que se puede ignorar el último término del lado izquierdo de la ecuación anterior. Como sólo se está interesado en observar los órdenes de magnitud, se cambia la derivada por una división. Por lo tanto, en cuanto a los órdenes de magnitud se refiere, se puede decir que:

$$\Theta_l \sim \frac{l}{2l+1}\frac{k\eta}{\tau}\Theta_{l-1}. \tag{5.8}$$

Puesto que $\tau >> 1$ (apéndice **A.3**) y para modos superhorizonte, en los que $k\eta << 1$ (A.47), se encuentra que $\Theta_l << \Theta_{l-1}$, lo que justifica ignorar los términos de la expansión para $l > 2$. Modos altos pueden ser ignorados por el argumento

indicado en el inicio de este capítulo.

Una vez establecido que pueden despreciarse los momentos para $l > 2$, se procede a tomar la ecuación (5.1), multiplicar por $P_0(\mu)$ y $P_1(\mu)$ e integrar sobre $\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2}$, llegándose a las siguientes dos ecuaciones:

$$\dot{\Theta}_0 + k\Theta_1 = -\dot{\Phi}, \tag{5.9}$$

$$\dot{\Theta}_1 - \frac{k\Theta_0}{3} = \frac{k\Psi}{3} + \dot{\tau}\left(\Theta_1 - \frac{iv_b}{3}\right). \tag{5.10}$$

Ahora se despeja v_b de la ecuación (5.3):

$$v_b = -3i\Theta_1 + \frac{R}{\dot{\tau}}\left(\dot{v}_b + \frac{\dot{a}}{a}v_b + ik\Psi\right). \tag{5.11}$$

Dado que la densidad de materia cae como $\bar{T}^3$, mientras que la de radiación como $\bar{T}^4$, y tediendo en cuenta los valores al día de hoy para las especies de materia (apéndice **A.3**), se concluye que para la época de interés, la relación fotón barión, R, es mucho menor que 1. Puesto que $\tau >> 1$, se puede hacer una primera aproximación:

$$v_b = -3i\Theta_1. \tag{5.12}$$

Para obtener un resultado más exacto, se reinsertará (5.12) en (5.11), con lo cual:

$$v_b = -3i\Theta_1 + \frac{R}{\dot{\tau}}\left(-3i\dot{\Theta}_1 - 3i\frac{\dot{a}}{a}\Theta_1 + ik\Psi\right), \tag{5.13}$$

lo que permite eliminar v_b en (5.10):

$$\dot{\Theta}_1 + \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{R+1}\Theta_1 - \frac{k}{3(1+R)}\Theta_0 = \frac{k\Psi}{3}. \tag{5.14}$$

(5.9) y (5.14) se constituyen en dos ecuaciones acopladas para Θ_0 y Θ_1, que se pueden descoplar derivando (5.9) y combinándola con (5.9) y (5.14), obteniéndose finalmente:

$$\boxed{\ddot{\Theta}_0 + \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\Theta}_0 + k^2 c_s^2 \Theta_0 = -\frac{k^2}{3}\Psi - \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\Phi} - \ddot{\Phi}}, \tag{5.15}$$

para la cual se ha definido:

$$c_s \equiv \sqrt{\frac{1}{3(1+R)}}, \tag{5.16}$$

la *velocidad del sonido* (apéndice **A.3**) del fluido fotón-barión. La anterior es como tal la ecuación de **Oscilaciones Acústicas para fotones**. A partir de ella, se obtendrá la análoga para los bariones, uno de los propósitos principales de este documento.

Mediante (5.12) en (5.2), se encuentra que:

$$\dot{\delta}_b = 3\dot{\Theta}_0, \tag{5.17}$$

por lo tanto:

$$\delta_b = 3\Theta_0 + cte. \tag{5.18}$$

Queda pendiente entonces hallar el valor de la constante. Para esto, hay que apoyarse en las definiciones de las densidades fraccionales: $\frac{\delta\rho_b}{\bar{\rho}_b}$ y $\Theta = \frac{\delta T}{\bar{T}}$, y en el hecho de que la materia cae como $\bar{T}^3$, lo que implica que:

$$\delta_b \propto \Theta. \tag{5.19}$$

En virtud de esta proporcionalidad, al multiplicar por P_0 e integrar, se encuentra que $\delta_b = 0 \rightarrow \Theta_0 = 0$, siendo la constante en (5.18) igual a cero. Así,

$$\delta_b = 3\Theta_0, \tag{5.20}$$

que, reemplazando en (5.15), permite obtener la ecuación de las Oscilaciones Acústicas Bariónicas:

$$\boxed{\ddot{\delta}_b + \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\delta}_b + k^2 c_s^2 \delta_b = -k^2\Psi - 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\Phi} - 3\ddot{\Phi}}. \tag{5.21}$$

Las ecuaciones (5.15) y (5.21) se expresan también como:

$$\boxed{\ddot{\Theta}_0 + \frac{\dot{R}}{1+R}\dot{\Theta}_0 + k^2 c_s^2 \Theta_0 = -\frac{k^2}{3}\Psi - \frac{\dot{R}}{1+R}\dot{\Phi} - \ddot{\Phi}}, \tag{5.22}$$

$$\boxed{\ddot{\delta}_b + \frac{\dot{R}}{1+R}\dot{\delta}_b + k^2 c_s^2 \delta_b = -k^2\Psi - 3\frac{\dot{R}}{1+R}\dot{\Phi} - 3\ddot{\Phi}}. \tag{5.23}$$

5.2 Interpretación física de la ecuación de las BAO

Muy seguramente se caerá en la tentación de seguir un camino que establezca soluciones analíticas para la ecuación de las BAO (5.21). El problema es altamente no trivial (véase por ejemplo [30]) y en la sección **5.4** se hará una discusión sobre esas soluciones. Esta sección, por lo pronto, se concentrará en ofrecer la interpretación física de esta ecuación. Para esto, se parte de escribir (5.21) como:

$$\ddot{\delta}_b + b\dot{\delta}_b + \omega^2\delta_b = F. \tag{5.24}$$

Esta ecuación, resulta mucho más familiar: es la de un *oscilador armónico forzado amortiguado*. El segundo término del lado izquierdo de (5.24) es de hecho conocido como *damping* (Amortiguamiento). El tercer término corresponde a la presión en el fluido fotón-barión. El papel de fuerza externa es desempeñada por el potencial Ψ y las variaciones temporales del potencial Φ, $\dot{\Phi}$ y $\ddot{\Phi}$, que dan cuenta de los efectos de dilación.

No es sorprendente que la ecuación de las BAO resulte ser la de un oscilador armónico si se recuerda que el fenómeno proviene de un compromiso entre interacciones de

los potenciales gravitacionales, Φ y Ψ, que agrupan a la materia bariónica, mientras que los fenómenos de dispersión de Compton, fruto de los choques entre fotones y electrones, producen una presión que tienden a disiparla. Lo anteriormente dicho puede visualizarse en la figura 5.1.

5.2.1 Las oscilaciones

En una primera aproximación se considera R constante, por lo que la velocidad c_s es también constante, el término de amortiguamiento desaparece y la ecuación (5.24) se reduce a:

$$\ddot{\delta}_b + \omega^2 \delta_b = F. \tag{5.25}$$

La solución homogénea de la ecuación anterior es:

$$\delta_b = \delta_{b_{ini}} cos(kc_s\eta + \varphi). \tag{5.26}$$

En épocas tempranas las perturbaciones de bariones eran constantes (3.27), lo que fuerza a que $\varphi = 0$, es decir:

$$\delta_b = \delta_{b_{ini}} cos(kc_s\eta). \tag{5.27}$$

Esta ecuación indica con claridad que la densidad de bariones se propaga con un movimiento oscilatorio a una velocidad c_s, que depende de las condiciones de densidad del fluido fotón-barión. La propagación del movimiento oscilatorio sugiere definir una distancia alcanzada por la propagación, conocida como *horizonte sónico* d_s:

$$d_s = \int_{\eta_{ini}}^{\eta} c_s d\eta'. \tag{5.28}$$

La descripción anterior, de oscilaciones de materia en un medio, producto de fluctuaciones en la densidad y en la presión, recuerda a la propagación de ondas de presión de un gas, tal como las ondas de sonido. Esto es justamente lo que lleva al nombre de *Oscilaciones Acústicas* y a los nombres de velocidad del sonido para c_s y

Figura 5.1: Oscilaciones de bariones en el fluido fotón-barión. Figura modificada a partir de la imagen tomada de la página: *http* : *//background.uchicago.edu* en mayo de 2017.

horizonte sónico para d_s.

En términos generales, R no es constante, puesto que las densidades medias de bariones y fotones evoluciona a medida que el universo se expande, por lo que el damping no desaparece. De hecho, R crece en la medida en que la contribución de la densidad media de fotones se diluye más rápido que la de bariones. Esto provoca que las oscilaciones se atenúen cada vez más. Finalmente, cuando se presenta el desacople de materia y radiación, el fenómeno cesa, el horizonte sónico llega a un valor máximo y queda "congelado" en el fondo de microondas, lo que actualmente puede observase como una especie de cascarones esféricos con un horizonte sónico de 150 Mpc [3] y con un grosor de los cascarones de 30 Mpc [12]. La figura 5.2 ayuda a formarse una imagen de esta descripción.

5.2.2 Damping o amortiguamiento

En la sección anterior se partió de una primera aproximación consistente en considerar R constante, lo que es equivalente a decir que la densidad del fluido fotón-barión permanece constante. Esta aproximación permitió ver con claridad

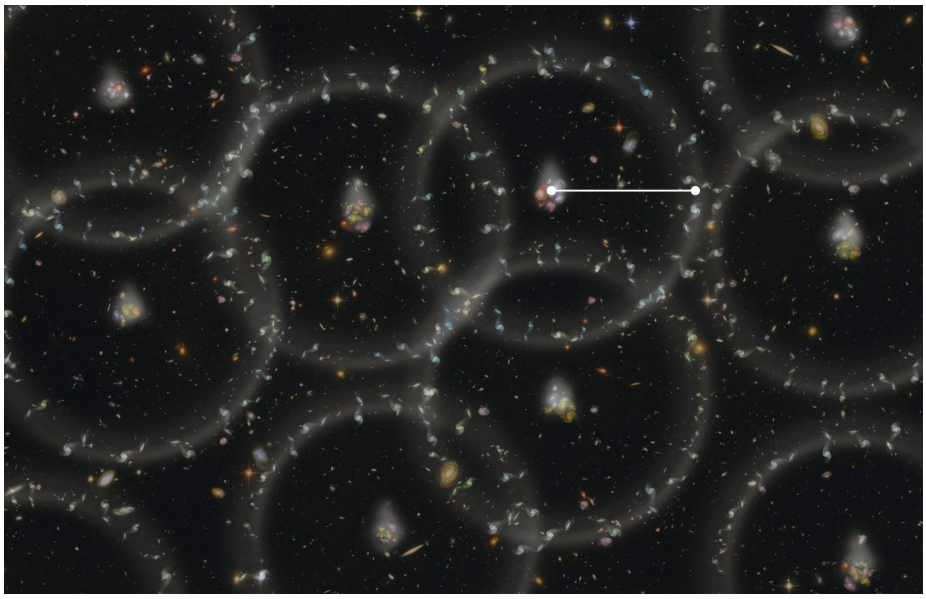

Figura 5.2: Ilustración de las Oscilaciones Acústicas Bariónicas. Imagen tomada de la página: $http://apod.nasa.gov/apod/ap140120.html$ en mayo de 2017.

el comportamiento oscilatorio en las perturbaciones bariónicas. Sin embargo, la densidad del fluido no es constante, debido a la expansión del Universo y a las colisiones entre fotones y bariones. Por esto, el segundo término del miembro izquierdo de la ecuación (5.24) no se puede despreciar y se presenta un amortiguamiento.

El término de amortiguamiento se trata partiendo del hecho de que las colisiones entre fotones y bariones se modelan como un proceso de difusión [15]. En efecto, se trata de un proceso en el que los fotones se ven dispersados por los choques con los bariones. Las perturbaciones de radiación y bariones sufren un amortiguamiento que se aproxima a:

$$\Theta_0, \delta_b \sim e^{-\frac{k^2}{k_D{}^2}}, \tag{5.29}$$

con

$$k_D = \frac{2\pi}{\lambda_D}. \tag{5.30}$$

λ_D es la *longitud de onda de difusión* y representa la distancia promedio que recorre el fotón en un tiempo de Hubble. Esta distancia se calcula tomando en cuenta que el recorrido promedio del fotón es

$$\lambda_D^2 \sim (\bar{\lambda})^2 \#dispersiones. \tag{5.31}$$

El número de dispersiones es el producto de la tasa de dispersión por el tiempo. La tasa de dispersión es dada por (A.37) y el tiempo es el tiempo de Hubble (apéndice **A.3**). $\bar{\lambda}$ es el *camino libre medio de colisión*:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n_e \sigma_T a}. \tag{5.32}$$

Según lo anterior:

$$\lambda_D \sim (n_e \sigma_T a^2 H)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.33}$$

El hecho de que λ_D represente la distancia promedio que viajan los fotones, implica que cualquier perturbación en los bariones a menores longitudes (mayores valores a k_D) es desvanecida por las dispersiones causadas por los fotones.

5.2.3 Comportamiento en función de la magnitud del vector de onda

En esta sección se evalúa el comportamiento de las perturbaciones bariónicas en función de la magnitud del vector de onda k. El análisis se realiza en el tiempo de desacople, ya que, por definición, posterior a ese tiempo, materia y radiación no interactúan más, y, siendo esta interacción la causa de las BAO, carece de sentido el análisis en un tiempo posterior.

Para escalas superhorizonte se observa, a partir de (A.47) y (5.27), que las

perturbaciones de bariones son constantes, determinadas por las condiciones iniciales establecidas en inflación.

Para escalas abajo del horizonte sónico las oscilaciones empiezan a ser importantes. El punto de equilibrio de las oscilaciones se calcula despreciando en la ecuación (5.21) las variaciones de las perturbaciones y de los potenciales, $\dot{\delta}_b$, $\ddot{\delta}_b$, $\dot{\Phi}$ y $\ddot{\Phi}$ [28]:

$$\delta_{b(equilibrio)} = -\frac{1}{c_s^2}\Psi. \tag{5.34}$$

Puesto que el potencial Ψ es diferente de cero (sección **3.3**), el valor de equilibrio de las perturbaciones no es nulo. El amortiguamiento (5.29) lleva a que las perturbaciones de bariones caigan asintóticamente a cero para modos altos. La amplitud de las oscilaciones se reduce a medida que aumenta el valor de k, al igual que el valor de equilibrio de las oscilaciones. Nótese que esta descripción es consecuente con la indicada al inicio de este capítulo, donde se estableció que, para modos altos, las perturbaciones eran eliminadas.

5.3 Soluciones analíticas

Se enunciarán, sin demostración, soluciones analíticas propuestas para la ecuación de las BAO, para lo cual, en primera instancia, se escribirá (5.23) como:

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{\dot{R}}{1+R}\frac{d}{d\eta} + k^2 c_s^2\right)(\delta_b + 3\Phi) = k^2\left(\frac{1}{1+R}\Phi - \Psi\right). \tag{5.35}$$

De nuevo, para obtener las soluciones oscilatorias, se desprecia el término de amortiguamiento. La solución general es [15]:

$$\delta_b + 3\Phi = (\delta_{b_{ini}} + 3\Phi_{ini})cos(kd_s) + \sqrt{3}k\int_{\eta_{ini}}^{\eta} d\eta'\{\Phi(\eta') - \Psi(\eta')\}sen\{[k[d_s(\eta') - ds_(\eta)]\}. \tag{5.36}$$

El primer sumando corresponde a la solución homogénea. Nótese que es equivalente a la ecuación (5.27), cuando se toma a R constante. El segundo sumando es la solución forzada, la cual muestra claramente la influencia de los potenciales

gravitacionales.

El término forzado es tal cual como se indicó en la relación (5.29), una función exponencial con argumento negativo, pero k_D toma una forma más elaborada [15]:

$$\frac{1}{k_D^2} = \int_{\eta_{ini}}^{\eta} d\eta' \frac{1}{6(1+R)n_e\sigma_T a}\left(\frac{R^2}{1+R} + \frac{8}{9}\right). \tag{5.37}$$

Es notable que al tomar en cuenta los órdenes de magnitud de la ecuación anterior se llega a:

$$\frac{1}{k_D^2} \sim \frac{\eta}{n_e\sigma_T a}, \tag{5.38}$$

la cual, junto al hecho de que el orden de magnitud de η, $\eta \sim \frac{1}{aH}$ (A.48), permite obtener la aproximación:

$$\frac{1}{k_D} \sim \lambda_D \sim (n_e\sigma_T a^2 H)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.39}$$

que es la relación (5.39), hallada mediante los argumentos heurísticos explicados en la sección **5.2.2**.

Capítulo 6

DATOS, GRÁFICAS Y MEDICIONES: EL CÓDIGO CAMB

El código CAMB, *Code for Anisotropies in the Microwave Background*, creado por Antony Lewis y Anthony Challinor, es un software desarrollado bajo Fortran 90, que soluciona simultáneamente las ecuaciones de campo de Einsten perturbadas y las ecuaciones de Boltzmann [4]. CAMB ofrece, entre otras, soluciones a las perturbaciones de bariones y de fotones, y a los potenciales gravitacionales, con respecto a diferentes valores de número de onda. El código permite modificar el *redshift* z (apéndice **A.3**), de tal manera que las ecuaciones son resueltas para cualquier época elegida.

En este capítulo se mostrarán las gráficas asociadas al fenómeno de las BAO, que serán analizadas y comparadas con la descripción física detallada en el capítulo **5**. Las mismas se han realizado mediante el trazador gráfico *gnuplot* [19], tomando los datos proporcionados por CAMB.

6.1 Gráficas de las BAO

La gráfica de la figura 6.1 (En este capítulo se llamará indistintamente gráfica o figura a las imágenes que contengan gráficas) corresponde a la perturbación en la densidad de bariones con respecto al número de onda para $z = 1100$. Este es el redshift para la época del desacople, en el cual cesan las oscilaciones acústicas. Todas las gráficas en este capítulo están elaboradas para éste valor de redshift.

En la gráfica 6.1 se evidencian de forma inmediata algunas de las características explicadas en el capítulo **5**: el carácter oscilatorio de la densidad de bariones, el amortiguamiento y el acercamiento asintótico, cayendo a cero, del valor de equilibrio de las oscilaciones (Como complemento, se grafica la velocidad de los bariones, correspondiente a la solución de la ecuación de la ecuación 4.73. Ver gráfica D.1 del apéndice **D**).

En el capítulo anterior también se enunció que las oscilaciones sólo se hacen patentes cuando se entra al horizonte. En la gráfica 6.1 este comportamiento no es evidente, pero si toma el eje x en escala logarítmica, como se aplica en la gráfica 6.2, aparece con claridad.

Para escalas subhorizontes, la densidad de bariones es constante, determinada por las condiciones iniciales. Su valor es pequeño en comparación con la amplitud de las primeras oscilaciones, por lo que la gráfica 6.2 no es de gran ayuda para mostrar que existe perturbación en la densidad de bariones para estas escalas. Pero si se grafica $\frac{\delta_b}{k^2}$ vs $logk$ (De hecho, los datos originales obtenidos en el CAMB son de la forma $\frac{\delta_x}{k^2}$, para una especie x), tal como en la gráfica 6.3, la perturbación en escalas subhorizontes se hace notoria.

Hay un comportamiento interesante y muy particular en las BAO que se revela más fácilmente en la gráfica 6.4, donde se traza δ_b^2 vs k. Los picos de las oscilaciones impares tienen mayor amplitud que los pares, es decir que las sobredensidades son más grandes en magnitud que las subdensidades. Las sobredensidades indican que la gravedad ha cobrado importancia, pero esto implica también que hay una reducción

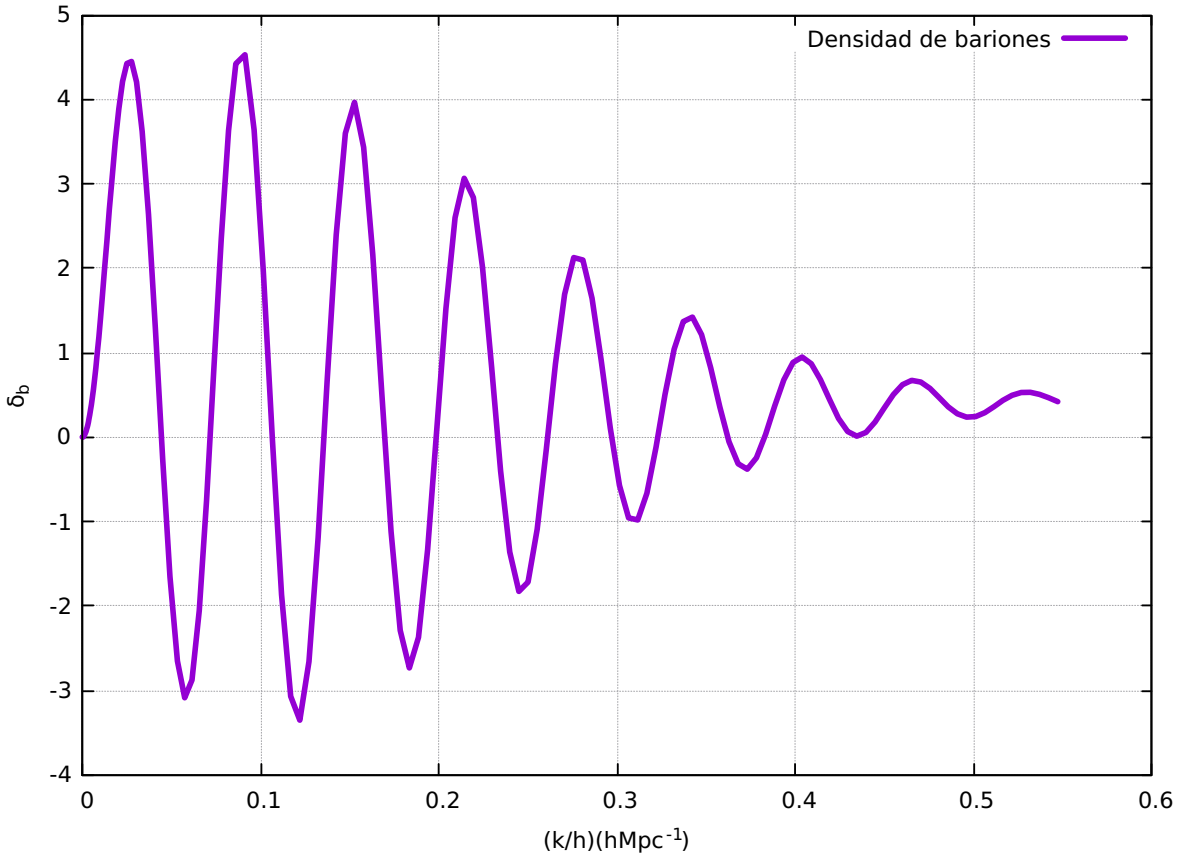

Figura 6.1: Densidad de bariones

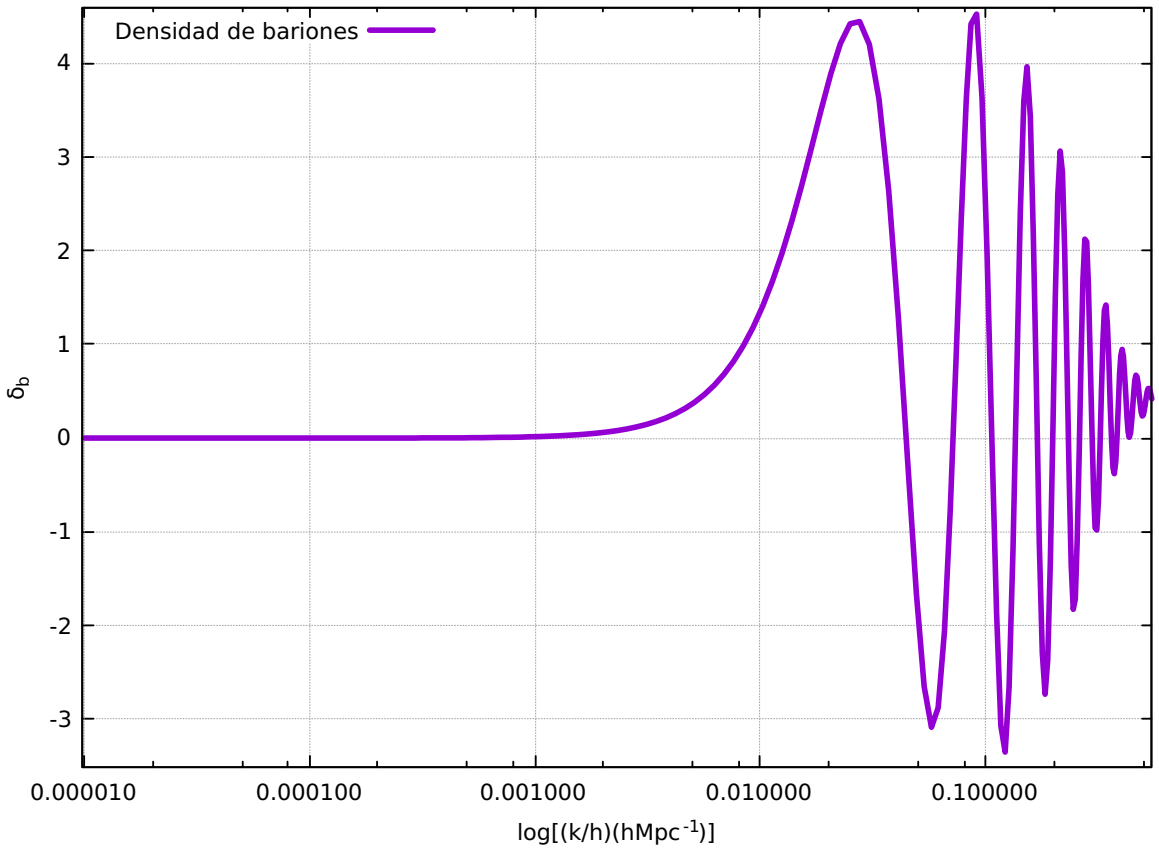

Figura 6.2: Densidad de bariones, escala logarítmica

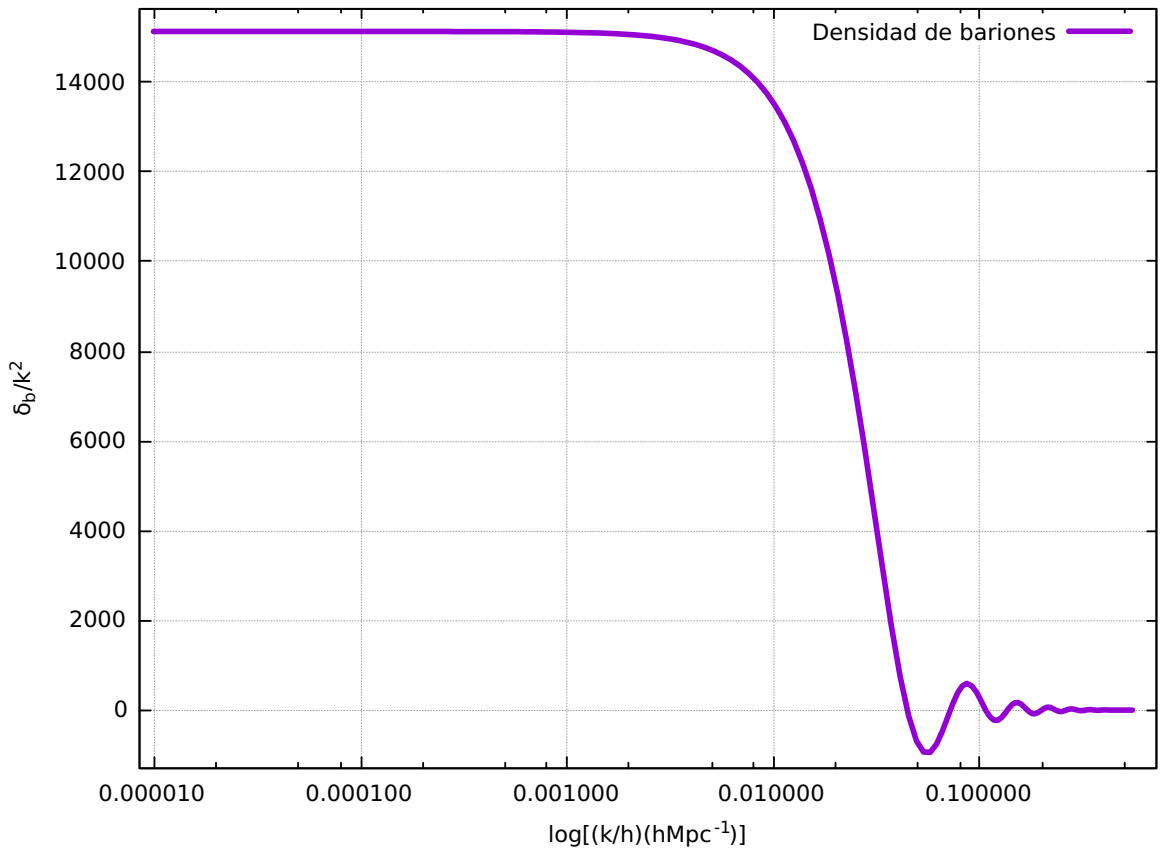

Figura 6.3: Densidad de bariones/k^2

en la presión. En las subdensidades, la baja presión causa que las partículas tengan mayor dificultad de escapar de los pozos gravitacionales y, por lo tanto, la magnitud de las subdensidades permanece baja.

La ecuación (5.20) indica que $\delta_b \propto \Theta_0$. Dado que en el monopolo Θ_0 contiene gran parte de la información de la perturbación en la radiación Θ, es de esperarse que la dos perturbaciones tengan un comportamiento similar con respecto al número de onda. CAMB calcula los valores de Θ, los cuales se muestran en la gráfica 6.5, comparados con δ_b, observándose un comportamiento similar en las curvas. Físicamente esto se explica por el acople fuerte entre materia bariónica y radiación en en fluido fotón-barión.

A lo largo de esta sección se ha mencionado la relación entre las perturbaciones de bariones con los potenciales gravitacionales, por lo que es importante comparar perturbaciones y potenciales. Mediante el software CAMB se hallan los valores de los potenciales gravitacionales y se trazan en la gráfica de la figura (6.6), junto a la densidad de bariones, facilitando su comparación. Estrictamente hablando, CAMB calcula los valores de $\frac{\Psi-\Phi}{2}$, sin embargo, de (3.15), esto es equivalente a tener los valores del potencial Ψ. En la gráfica (6.6) las magnitudes fueron magnificadas, solamente para efectos visuales (La gráfica con los valores reales de los potenciales se encuentra en la gráfica D.2 del apéndice **D**).

La gráfica 6.6 muestra que los potenciales gravitacionales tienden a cero a medida que k crece, lo que implica que el valor de equilibrio de las oscilaciones también tiende a cero, tal como muestra la ecuación (5.34), y como se mencionó en esta misma sección. La gráfica también deja ver que las perturbaciones de los bariones y el potencial Ψ tienen signos opuestos, lo que concuerda con el hecho de que, para el gauge newtoniano, $\Psi < 0$ indica un pozo de potencial y, por ende, una sobredensidad en la materia.

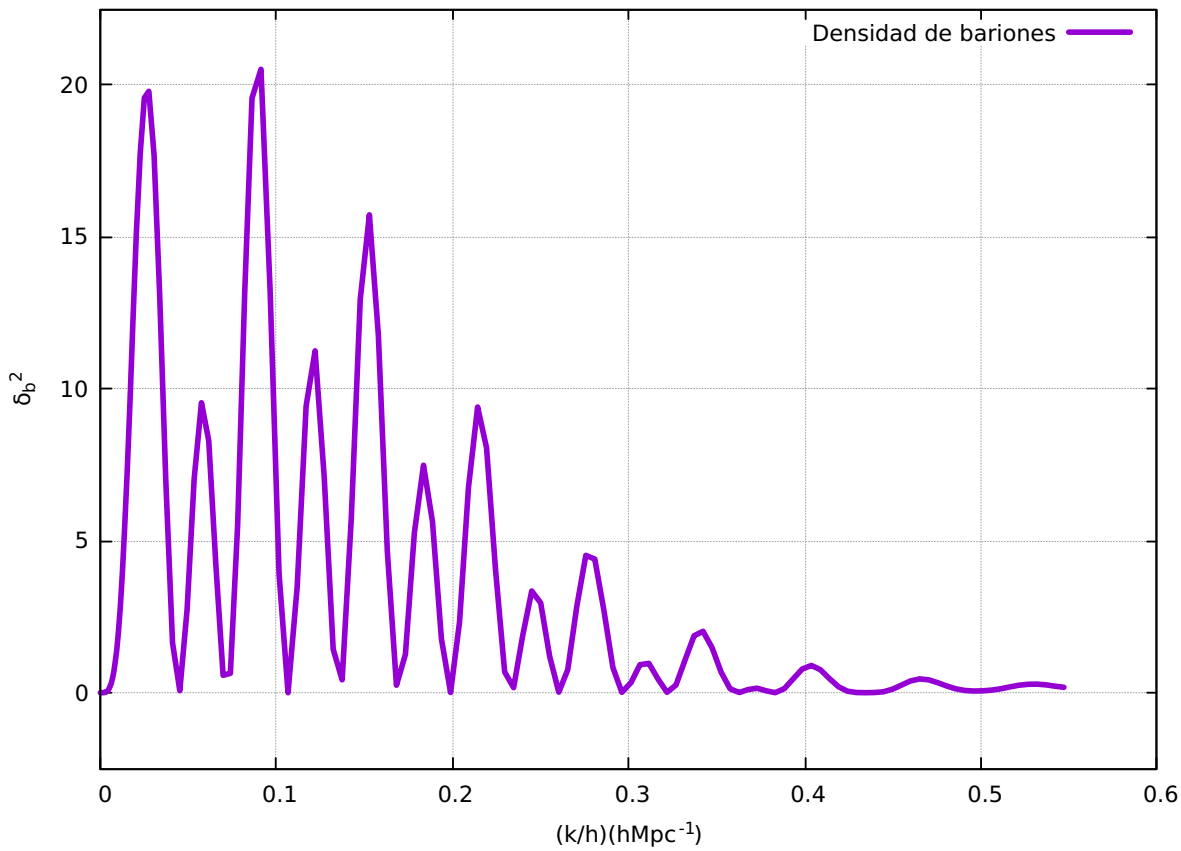

Figura 6.4: Cuadrado de la densidad de bariones

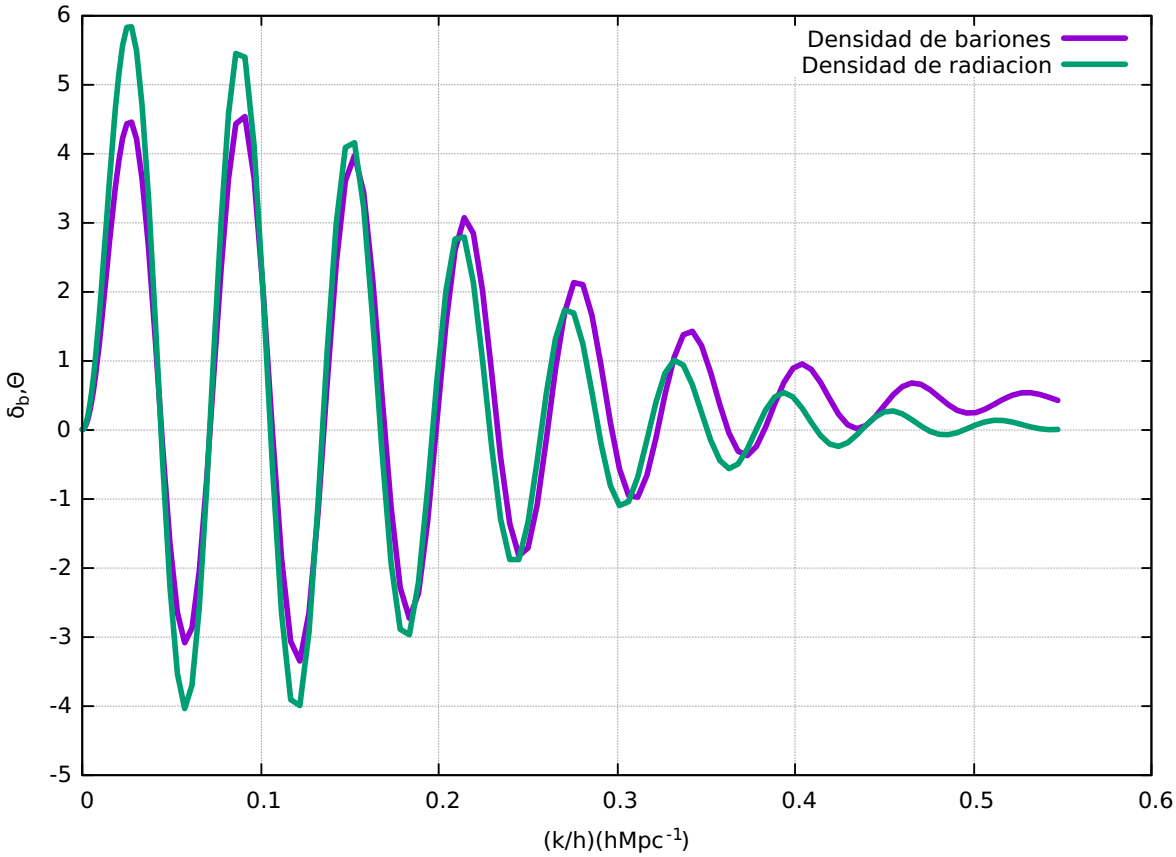

Figura 6.5: Densidad de bariones y de radiación

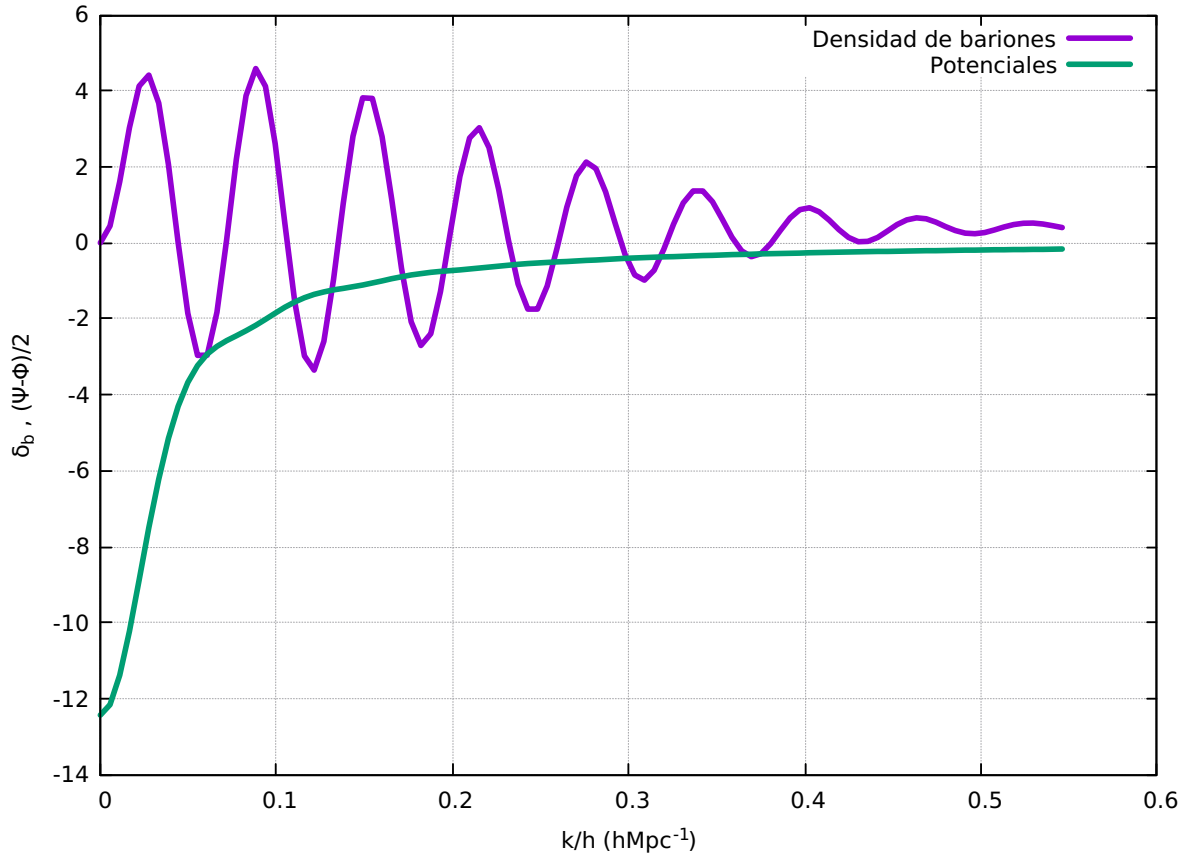

Figura 6.6: Potenciales gravitacionales y densidad de bariones

6.2 Energía Oscura

En **2.3** se discutió sobre cómo la aceleración de la expansión del Universo implica $\omega < -\frac{1}{3}$. Esta condición es cumplida en modelos que incluyen la constante cosmológica, para los cuales $\omega = -1$, llamados *modelos* ΛCDM [23]. En la misma sección se expuso que, siempre que se cumpla la restricción indicada, ω no es necesariamente constante. CAMB trabaja por defecto con modelos ΛCDM, pero ofrece un paquete adicional que explora la opción de modelos de energía oscura con ω variable en el tiempo [4, 24]. El código CAMB utiliza modelos de energía oscura de la forma:

$$\omega(a) = \omega_0 + (1 - a)\omega_a, \tag{6.1}$$

con ω_0 y ω_a constantes [17, 22]. El objetivo es tomar en consideración modelos de energía oscura para los cuales existan valores de $\omega < -1$, para los cuales se dice que cruzan la *división fantasma* [17, 22, 34].

Uno de los trabajos de *Wayne-Hu* [22], en el que se basa esta sección, propone los pares de valores $\omega_0 = -1.15$, $\omega_a = 0.5$ y $\omega_0 = -0.85$, $\omega_a = -0.5$, en la ecuación (6.1). Propone además el par de valores $\omega_0 = -1$, $\omega_0 = 0.5$, que nunca cruzan la división fantasma, es decir, para el cual no se presenta $\omega < -1$.

La figura 6.7 se muestra la comparación de los datos proporcionados por CAMB para la densidad de bariones del modelo ΛCDM y el modelo de energía oscura fantasma con valores $\omega_0 = -1.15$ y $\omega_a = 0.5$. Las gráficas aparecen prácticamente superpuestas, sin embargo, si se limita el rango para $k > 0.25\ hMpc^{-1}$ aparecen marcadas diferencias.

Las gráficas de la figura 6.8 revelan las mencionadas diferencias en la densidad de bariones cuando se limita el rango a $k > 0.25$. Las figuras 6.9 y 6.10 corresponden a las gráficas comparativas de los restantes pares de valores de los parámetros de (6.1) ya indicados.

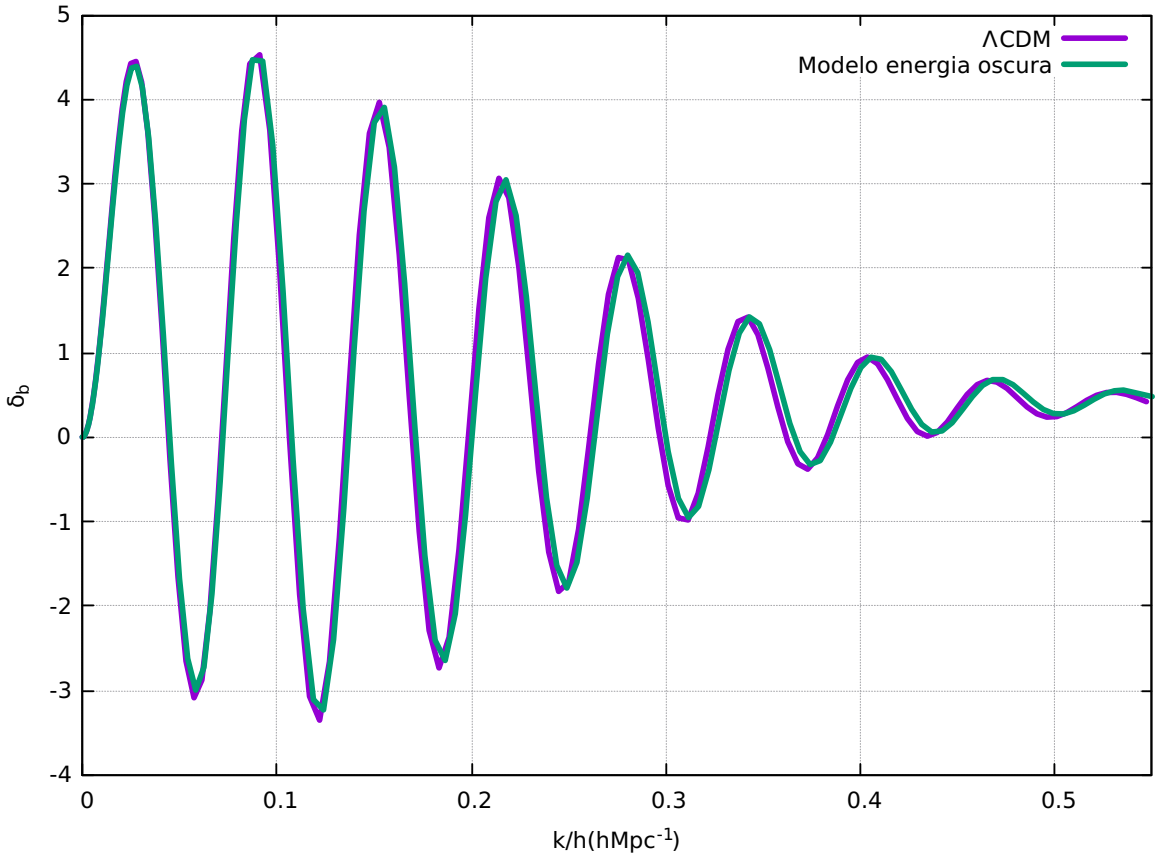

Figura 6.7: Energía oscura fantasma con $\omega_0 = -1.15$ y $\omega_a = 0.5$.

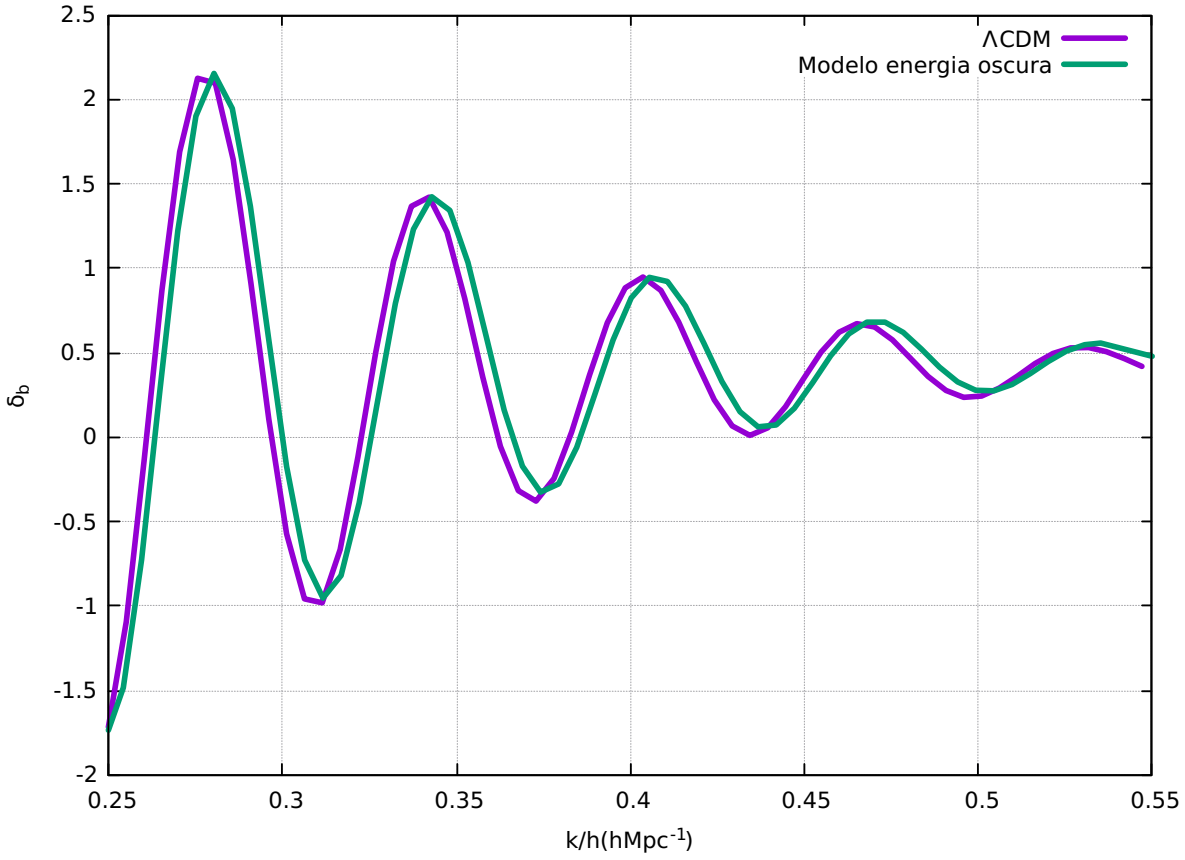

Figura 6.8: Energía oscura fantasma con $\omega_0 = -1.15$ y $\omega_a = 0.5$, $k > 0.25$.

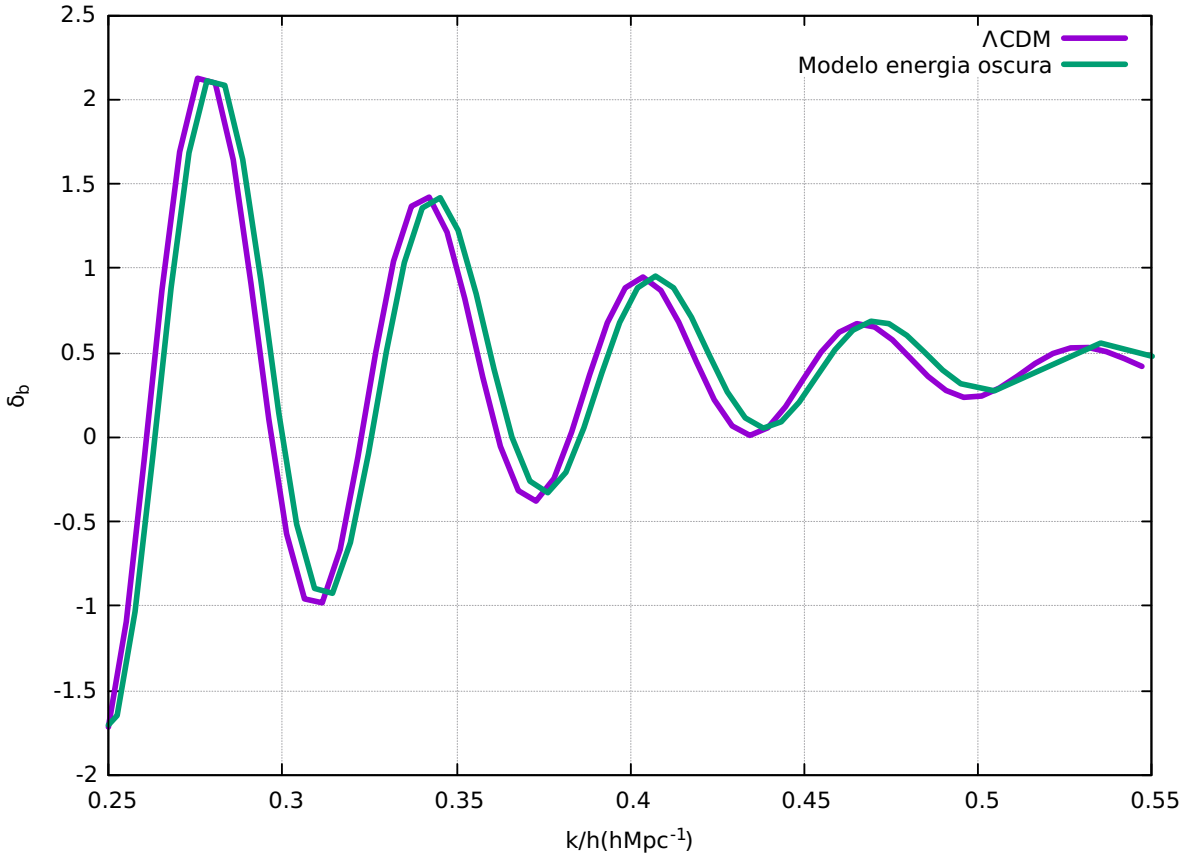

Figura 6.9: Energía oscura fantasma con $\omega_0 = -0.85$ y $\omega_a = -0.5$, $k > 0.25$.

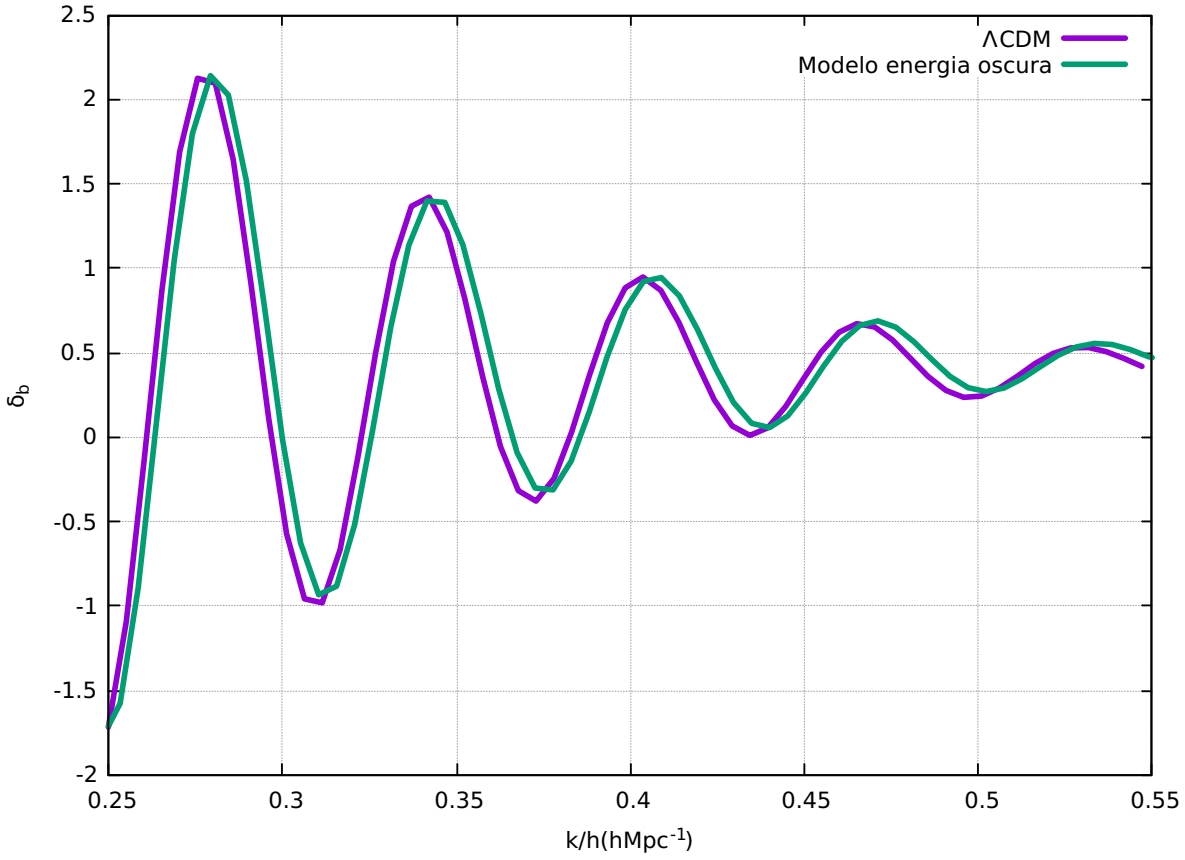

Figura 6.10: Energía oscura con $\omega_0 = -1$ y $\omega_a = 0.5$, $k > 0.25$.

6.3 Comparación con datos medidos

La manera adecuada de confirmar o descartar la validez de los modelos de energía oscura es compararlos con datos medidos de las BAO. Resultados precisos fueron conseguidos por el proyecto **BOSS** (Baryon Oscillation Spectroscopic Survey) [9], a partir de datos de cerca de un millón de galaxias, para corrimientos al rojo de $0.2 < z < 0.7$. La literatura indica que las oscilaciones se evidencian al comparar el *Espectro de Potencias de Materia* [28, 43] obtenido de las mediciones con uno hallado a partir de un modelo que no incluye oscilaciones [2, 3, 25] [1]. Lo dicho anteriormente se expresa como:

$$Espectro\ de\ potencias\ BAO = \frac{P(k)}{P(k)_{smooth}}, \tag{6.2}$$

donde $P(k)$ es el espectro de potencias de materia medido y $P(k)_{smooth}$ es el calculado a partir del modelo que no contiene oscilaciones (Figura 6.11).

Inspirado en esta metodología, se procede a comparar los datos medidos del espectro de potencias, disponibles en la página del proyecto BOSS [8], con un espectro de potencias sin oscilaciones, que se calcula en el software CAMB, al eliminar, en la simulación, el contenido de materia bariónica (Por defecto, CAMB, trabaja con un porcentaje de materia bariónica de 4.62% (Ver apéndice **A.3**). Esta cantidad se modificó a 0.1%, ya que no es permitido por el software establecer una cantidad nula de materia bariónica). En la figura 6.12 se comparan los dos espectros de potencia, calculados por CAMB, uno con contenido de materia bariónica y el otro eliminándolo, que permiten ver claramente que las oscilaciones están asociadas al contenido de bariones y que no se presentan si se anula ese contenido. La comparación de los datos medidos con el espectro de potencias sin contenido bariónica se muestra en la figura 6.13.

Aplicando (6.2) con $P(k)$ de los datos medidos por BOSS y P_{smooth} de los datos de la simulación de CAMB eliminando el contendido de materia bariónica, se cuenta

[1] El grupo hace uso del software CAMB para los proceso de ajustes de las gráficas del espectro de potencias [2]

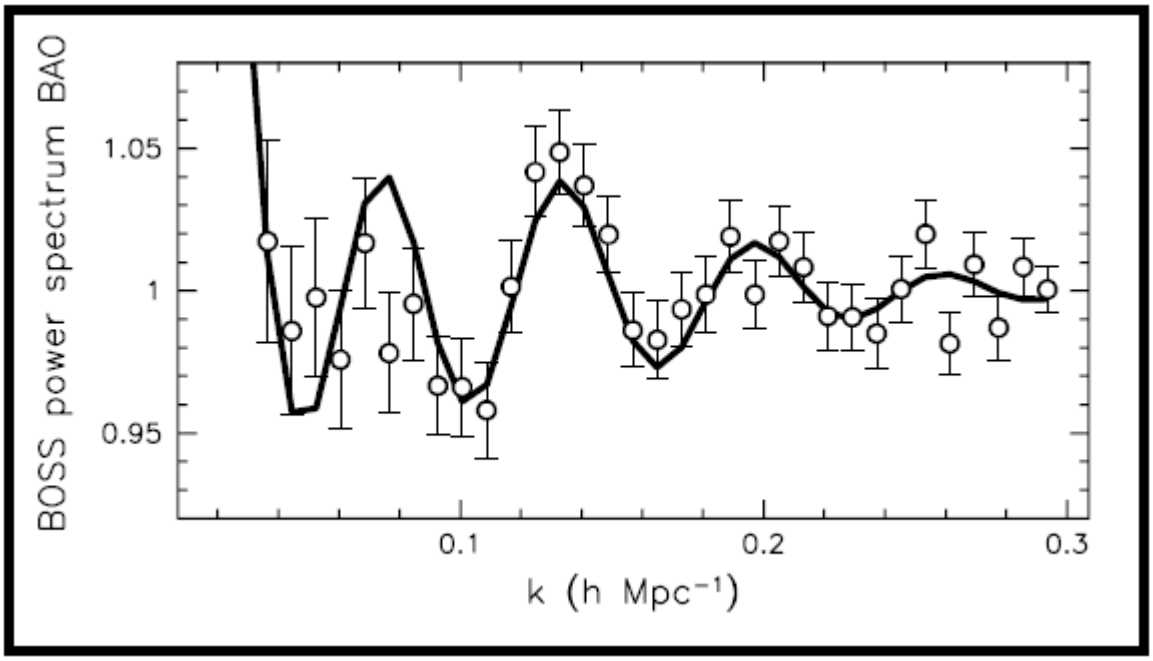

Figura 6.11: Datos medidos de BAO. Imagen tomada del artículo: The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Baryon Acoustic Oscillations in the Data Release 10 and 11 Galaxy Samples en mayo de 2017.

con un conjunto de valores que servirán como referencia para comparar las BAO en los diferentes modelos de energía oscura. En la figura 6.14 se muestran estos valores.

El siguiente paso es contrastar los valores calculados por CAMB para los diferentes modelos de energía oscura con la referencia previamente establecida. Las gráficas 6.15 a 6.18 son las comparaciones de los valores medidos con las arrojadas por CAMB para el modelo ΛCDM y modelos de energía oscura con parámetros $\omega_0 = -1.15$, $\omega_a = 0.5$, $\omega_0 = -0.85$, $\omega_a = -0.5$ y $\omega_0 = -1$ y $\omega_a = 0.5$, respectivamente.

Para cuantificar las comparaciones, se optó por determinar las diferencias entre un máximo y el mínimo que la precede, en las cuatro últimas oscilaciones en la perturbación de la densidad de bariones, observadas en las gráficas. Puesto que la ecuación (6.2) únicamente proporciona un valor relativo para mostrar las oscilaciones, es necesario hacer un ajuste antes de proceder a realizar las comparaciones. Este ajuste se realiza igualando el valor del primer valor medido con el dato del máximo de la primera oscilación hallada con el modelo CDM. Posteriormente se halla la diferencia porcentual entre las magnitudes obtenidas para los distintos modelos de energía oscura y las correspondientes a los valores medidos de las BAO. En las tablas $6.1 - 6.4$ se muestran estos resultados.

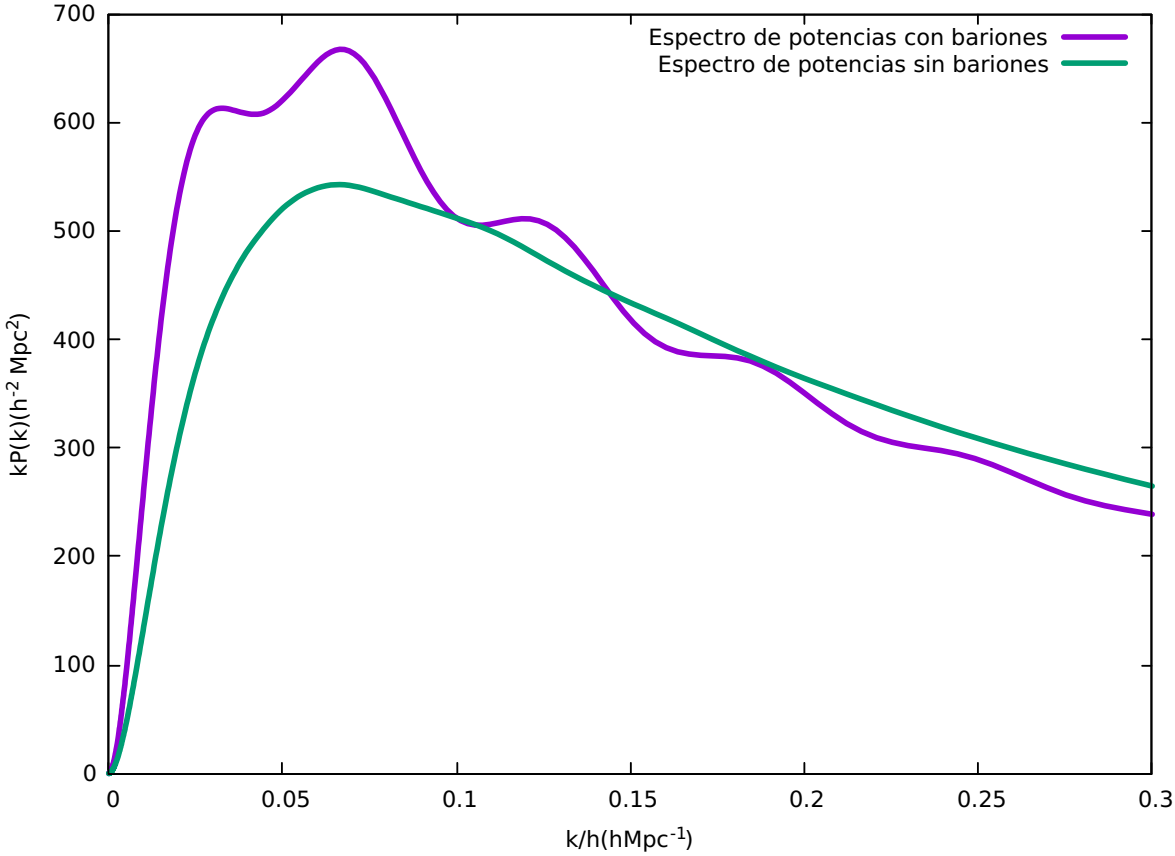

Figura 6.12: Comparación de espectros de potencias de materia con y sin materia bariónica

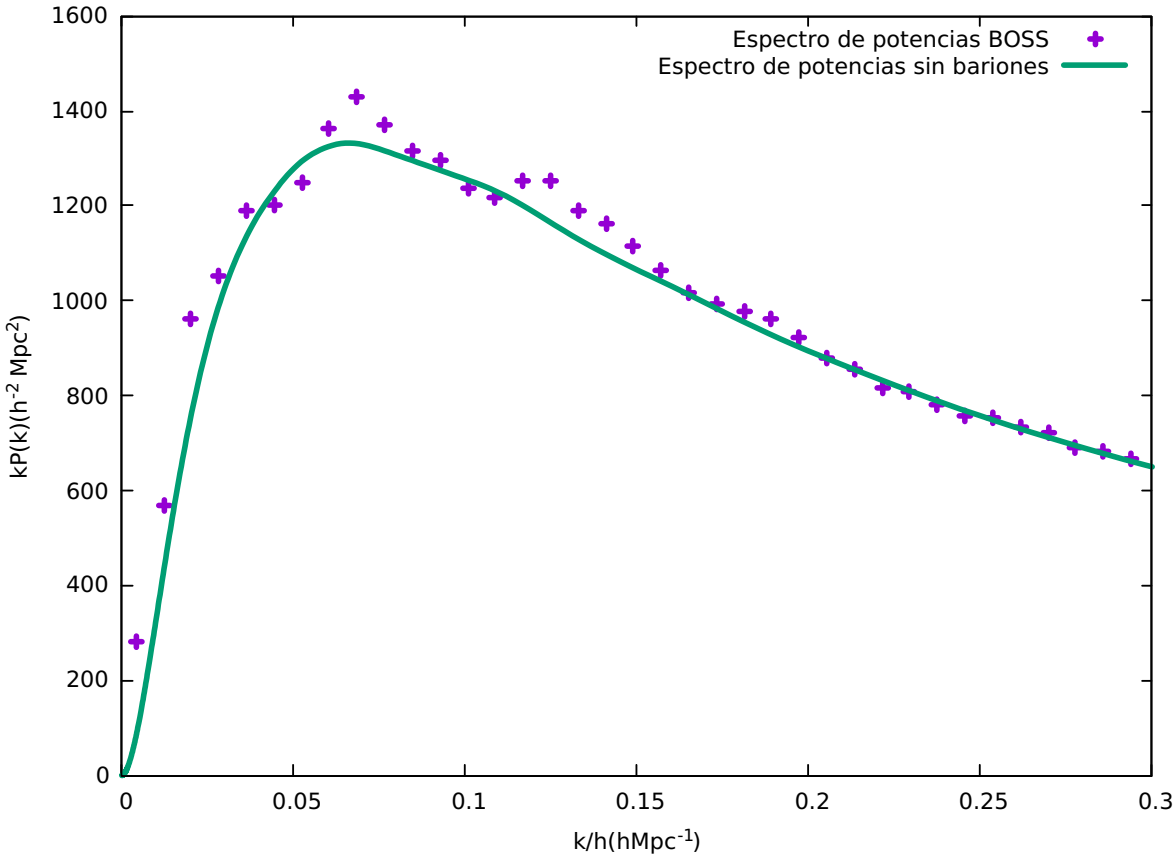

Figura 6.13: Comparación de espectros de potencias de datos medidos con modelo sin materia bariónica

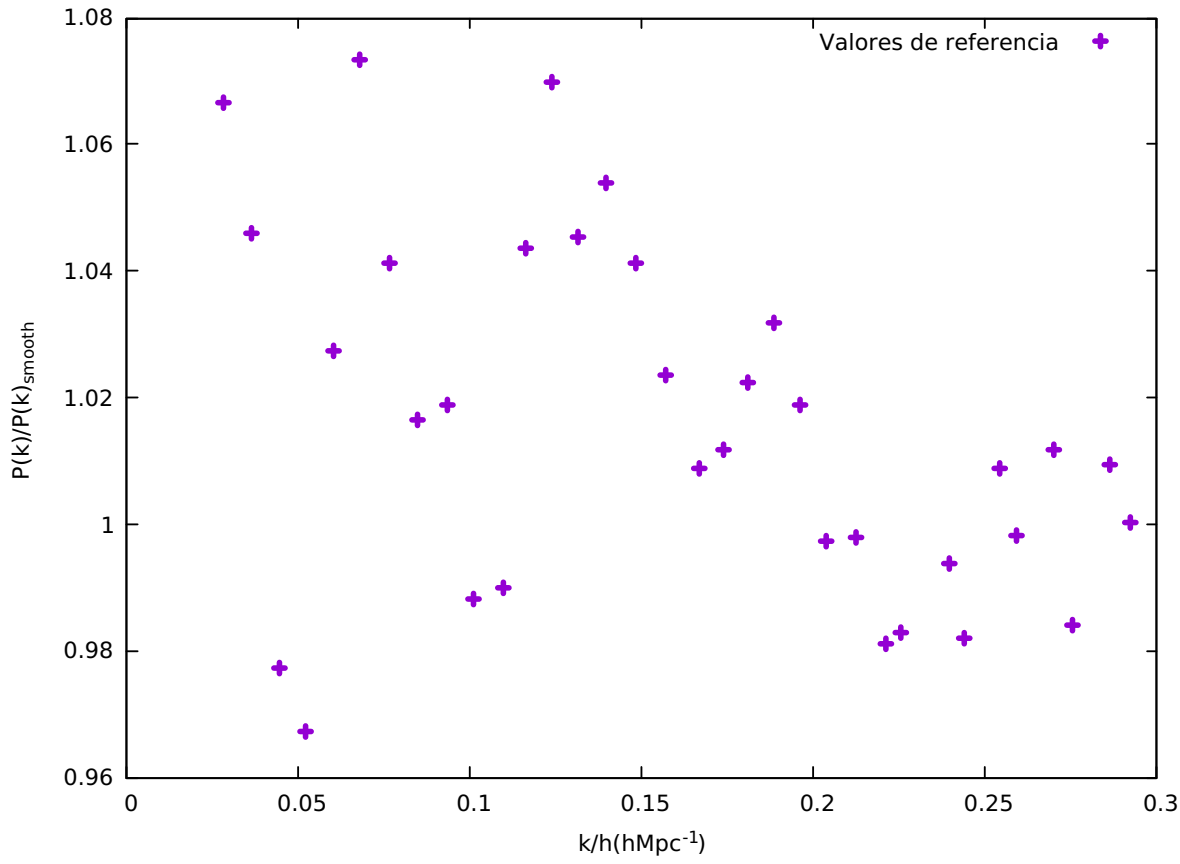

Figura 6.14: Valores de $\frac{P(k)}{P(k)_{smooth}}$.

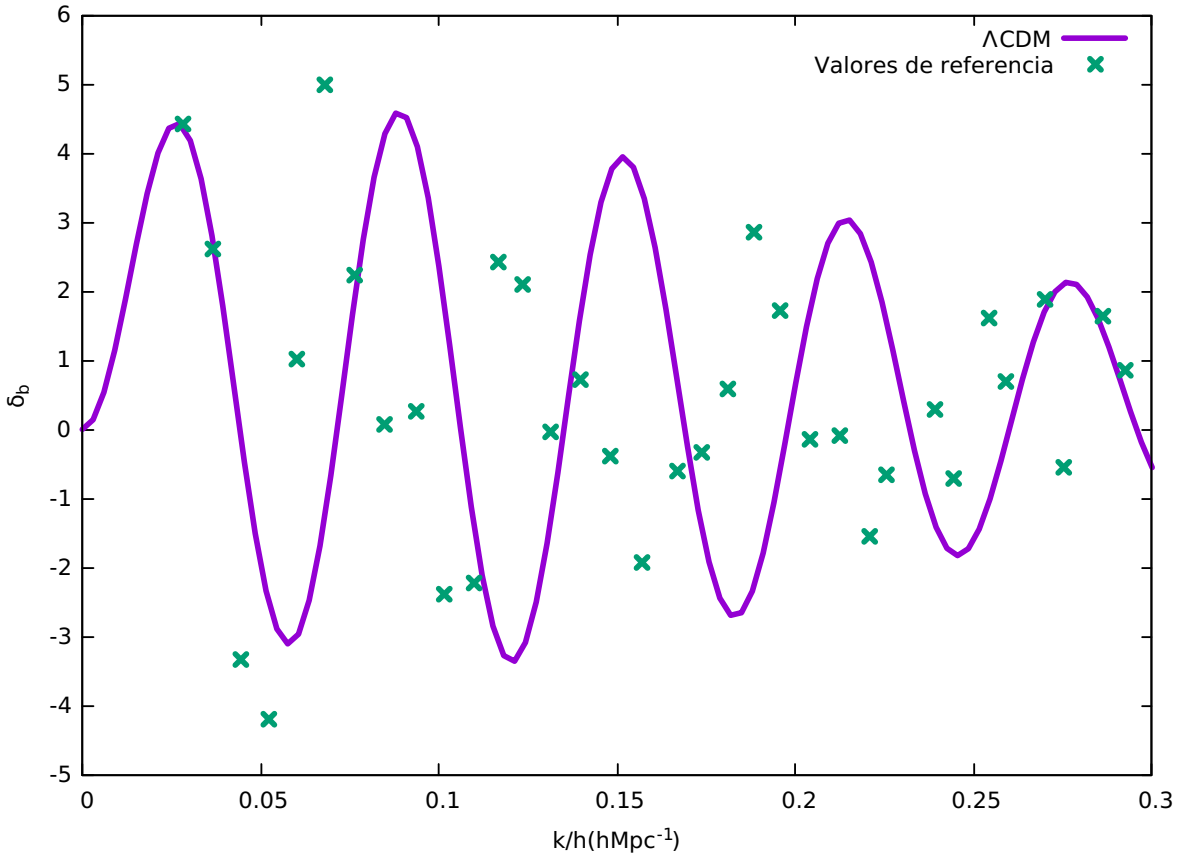

Figura 6.15: Comparación de modelo ΛCDM con valores medidos.

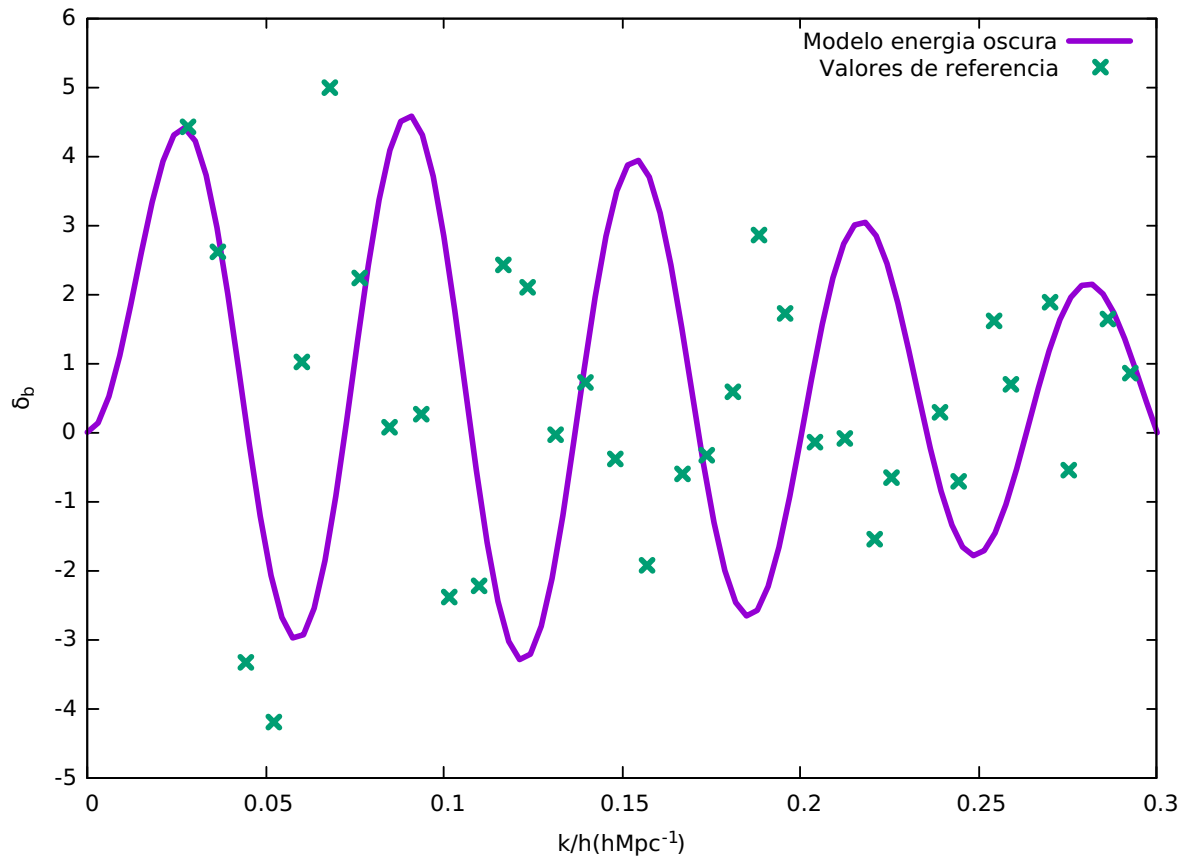

Figura 6.16: Comparación de modelo de energía oscura $\omega_0 = -1.15$ y $\omega_a = 0.5$ con valores medidos.

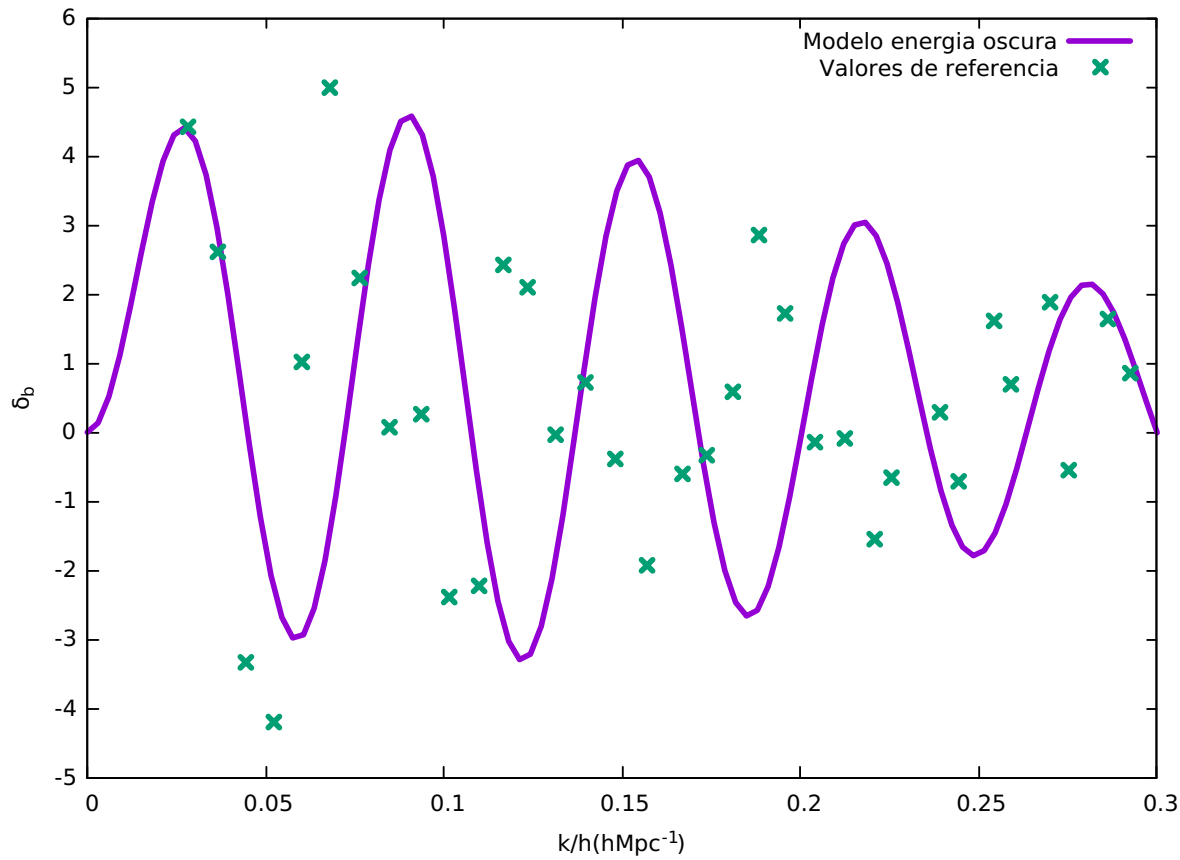

Figura 6.17: Comparación de modelo de energía oscura $\omega_0 = -0.85$ y $\omega_a = -0.5$ con valores medidos.

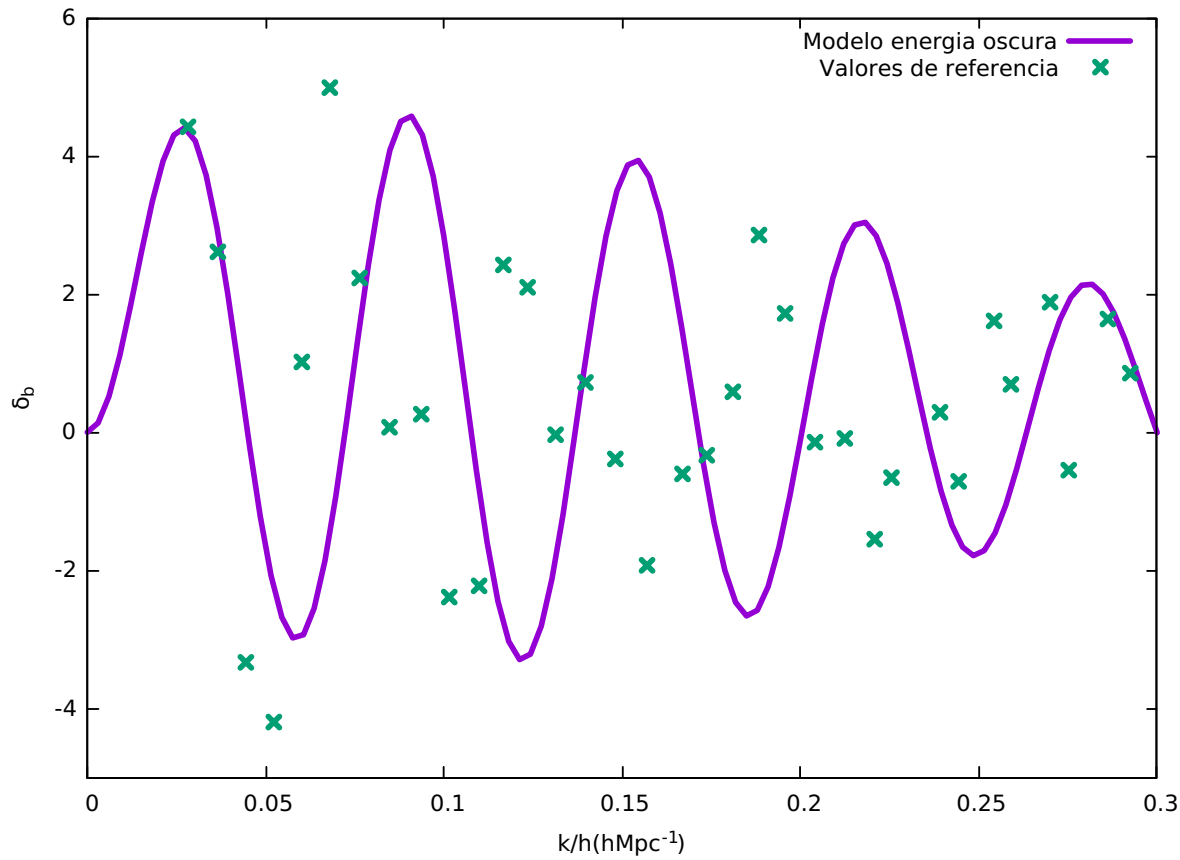

Figura 6.18: Comparación de modelo de energía oscura $\omega_0 = -1$ y $\omega_a = 0.5$ con valores medidos.

Valores medidos	Modelo ΛCDM	Diferencia porcentual
9.201	7.563	17.803 %
4.802	7.248	50.948 %
4.772	5.753	20.549 %
3.411	3.936	15.393 %

Tabla 6.1: Diferencias entre máximos y mínimos. Comparación para modelo ΛCDM.

Valores medidos	Modelo $\omega_0 = -1.15$, $\omega_a = 0.5$	Diferencia porcentual
9.201	7.468	18.839 %
4.802	7.138	48.662 %
4.772	5.695	19.344 %
3.411	3.943	15.590 %

Tabla 6.2: Diferencias entre máximos y mínimos. Comparación para modelo $\omega_0 = -1.15$, $\omega_a = 0.5$.

Valores medidos	Modelo $\omega_0 = -0.85$, $\omega_a = -0.5$	Diferencia porcentual
9.201	7.463	18.886 %
4.802	7.198	49.905 %
4.772	5.713	19.707 %
3.411	3.875	13.605 %

Tabla 6.3: Diferencias entre máximos y mínimos. Comparación para modelo $\omega_0 = -0.85$, $\omega_a = -0.5$.

Valores medidos	Modelo $\omega_0 = -1$, $\omega_a = 0.5$	Diferencia porcentual
9.201	6.484	29.525 %
4.802	7.176	49.448 %
4.772	5.716	19.772 %
3.411	3.304	3.145 %

Tabla 6.4: Diferencias entre máximos y mínimos. Comparación para modelo $\omega_0 = -1$, $\omega_a = 0.5$.

Conclusiones

Finalizado el recorrido que condujo de las perturbaciones cosmológicas y las ecuaciones de Boltzmann a la ecuación que describe el fenómeno de las Oscilaciones Acústicas de Bariones, a la descripción de sus implicaciones físicas y a sus soluciones mediante el uso del software CAMB, con distintos modelos de energía oscura, se ha llegado a las siguientes conclusiones:

- Derivar la ecuación de las Oscilaciones Acústicas Bariónicas presentaba la dificultad causada por el hecho de que era necesario analizar las interacciones entre la materia bariónica y la radiación, y cómo en éstas influye la métrica perturbada, la cual a su vez es afectada por las distintas especies de materia. Esta dificultad se resolvió mediante la Ecuación de Boltzmann (4.1), que permite encontrar la evolución de la función de distribución de las especies de materia a partir de sus colisiones. La evolución de las especies de materia ocurre en un espacio-tiempo perturbado, por lo que es necesario introducir en la ecuación de Boltzmann la métrica perturbada, dada por el gauge newtoniano (3.6).

- El resultado del análisis indicado es un conjunto de tres ecuaciones (4.48), (4.57) y (4.73) que son, respectivamente, la ecuación de densidad de fotones, la ecuación de densidad de bariones y la ecuación de velocidad de bariones. Estas ecuaciones están escritas en términos de la variable número de onda k, lo cual posibilita estudiar el comportamiento de la radiación y la materia bariónica en términos de escalas de distancia, en vez de su posición espacial.

- Partiendo de las ecuaciones de Boltzmann para fotones y bariones se llega a una ecuación diferencial lineal de segundo orden para la densidad de

bariones (5.21). Esta es precisamente la ecuación que describe el fenómeno de las Oscilaciones Acústicas Bariónicas. Está escrita en términos de las variables tiempo conforme, η, y número de onda, y depende de los potenciales gravitacionales, Ψ y Φ, y de sus derivadas con respecto al tiempo conforme.

- La ecuación de las BAO se modela de forma simplificada como un oscilador armónico forzado amortiguado puesto que presenta sus características. Esto se debe a que las BAO son el resultado de la competencia entre los potenciales gravitacionales, que agrupan los bariones, y la dispersión de Compton entre radiación y bariones, que causan una presión que los disipan. Así, la perturbación en la densidad de bariones se propaga como una onda de presión en el fluido fotón barión, a una velocidad dada por (5.16), emulando la propagación de una onda de sonido, siendo esto lo que justifica el nombre de Oscilaciones Acústicas Bariónicas.

- Las oscilaciones propagándose a la velocidad del sonido definen una distancia llamada horizonte sónico (5.28). Al presentarse el desacople de materia y radiación las oscilaciones finalizan y quedan congeladas, evidenciándose en agrupaciones de materia bariónica en una escala del orden de 150 Mpc. Las analogías de la ecuación de las BAO con el oscilador armónico forzado amortiguado no se detienen ahí. Las BAO presentan un amortiguamiento en función de k, debidas a que los fotones dispersan las agrupaciones de bariones, desvaneciendo las perturbaciones. Finalmente, el término forzado viene dado por los potenciales gravitacionales y sus derivadas.

- En la sección **5.3** se mostraron soluciones analíticas de la ecuación de las BAO. Sin embargo, existe una alternativa a su solución que es proporcionada por el código CAMB, el cual resuelve simultáneamente las ecuaciones de perturbaciones y las ecuaciones de Boltzmann de las diferentes especies de materia. CAMB calcula, entre otros, la densidad de bariones y los potenciales gravitacionales en función de k, lo cual permite graficar los datos arrojados y observar comportamientos propios de las BAO.

- Como ejemplo de estos comportamientos propios de las BAO está el que el punto de equilibrio de las oscilaciones no es cero, sino que depende de

las condiciones iniciales. Al graficar simultáneamente los datos de CAMB de los potenciales y la densidad de bariones, se observa como el punto de equilibrio está relacionado con los potenciales, tal como indica (5.34), y como cae asintóticamente a cero al crecer la escala k. Otro comportamiento propio de las BAO es que los picos de las oscilaciones impares son mayores que las pares, consecuencia de que las subdensidades permanecen bajas debido a la dificultad de las partículas bariónicas de escapar de los pozos de potencial, lo que causa que la presión sea también baja.

- La evidencia de la aceleración en la expansión del Universo hace necesario explorar modelos de energía oscura. Uno de los modelos sugeridos es el ΛCDM, que incluye la constante cosmológica, pero existen también otros modelos de energía oscura. La energía oscura no interactúa directamente con los bariones pero sí con los potenciales gravitacionales, por lo cual afectará el comportamiento de las materia bariónica, haciendo que las BAO se conviertan en un método para validar o descartar estos modelos . Mediante el software CAMB se analizaron diferentes modelos de energía oscura, sugeridos por la literatura, observándose que todos predicen los comportamientos esperados de las BAO, indicando, en una primera aproximación, la validez de estos modelos.

- La manera objetiva de comprobar la validez de los modelos de energía oscura a través de las BAO es comparar los datos de las simulaciones con valores medidos. La literatura indica que las BAO se evidencian como oscilaciones en el espectro de potencias de materia, cuando se divide el valor del espectro de potencias medido con un modelo que no incluya oscilaciones. El proyecto BOSS proporciona mediciones del espectro de potencias que fueron relacionadas, a través de (6.2), con un espectro de potencias calculado mediante el código CAMB, donde fue suprimida la materia bariónica para eliminar las oscilaciones. Como resultado se obtiene un conjunto de valores de referencia que permiten comparar las simulaciones de CAMB con diferentes modelos de energía oscura.

- Los diferentes modelos de energía oscura calculados a través de CAMB, incuyendo el modelo ΛCDM, comparados con las mediciones, presentan diferencias relativas de máximo 0.5 en la primera oscilación comparada, y

menores en el resto de las oscilaciones. Del hecho de que ningún modelo presente diferencias elevadas se concluye que ninguno de ellos debe ser descartado.

- Más allá de que ninguno de los modelos de energía oscura sea descartado, la comparación con las mediciones de las BAO, se consituye en un método para ajustar discriminar las prediccion de los distintos modelos. En particular, es notable que se haya obtenido una diferencia porcentual, con respecto a los valores medidos, de apenas 3% en la última oscilación para el modelo con parámetros $\omega_0 = -1$ y $\omega_a = 0.5$ de la ecuación (6.1).

- Para futuras investigaciones, se propone refinar las comparaciones entre los valores de la simulación y los valores medidos en (al menos) dos aspectos. Uno de ellos es la obtención del espectro de potencias sin oscilaciones, $P(k)_{smooth}$, y el otro es la forma de ajustar los valores de referencia que proporciona (6.2), con los valores calculados con CAMB, antes de proceder a a hallar la diferencia relativa como método de comparación.

Bibliografía

[1] Luca Amendola y Shinji Tsujikawa. *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press, 2010.

[2] Lauren Anderson, Éric Aubourg, Stephen Bailey, Florian Beutler, Vaishali Bhardwaj, Michael Blanton, Adam S Bolton, Jon Brinkmann, Joel R Brownstein, Angela Burden, et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations in the data releases 10 and 11 galaxy samples. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 441(1):24–62, 2014.

[3] Lauren Anderson, Eric Aubourg, Stephen Bailey, Dmitry Bizyaev, Michael Blanton, Adam S Bolton, Jon Brinkmann, Joel R Brownstein, Angela Burden, Antonio J Cuesta, et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations in the data release 9 spectroscopic galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427(4):3435–3467, 2012.

[4] Anthony Challinor Antony Lewis. Camb. 2016. URL http://cosmologist.info/.

[5] George B Arfken y Hans J Weber. Mathematical methods for physicists. 1999.

[6] James M. Bardeen. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, 22:1882–1905, 1980. doi:10.1103/PhysRevD.22.1882. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.22.1882.

[7] Daniel Baumann. *Cosmology*. McGraw-Hill, 2012.

[8] BOSS. Boss publications and results. 2017. URL http://www.sdss3.org/science/boss_publications.php.

[9] Proyecto BOSS. Boss: Dark energy and the geometry of space. 2016. URL http://www.sdss3.org/surveys/.

[10] B. H. Bransden y C. J. Joachain. *Physics of atoms and molecules*. Longman Group Limited, 1983.

[11] Sean M Carroll. Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997.

[12] L Castañeda y D Cáceres. Oscilaciones acústicas y el espectro de potencias. *Revista Integración*, 25(2):139–145, 2007.

[13] Leonardo Castañeda. *Notas de clase de cosmología*. Universidad Nacional, Vesrsión borrador 2016.

[14] Lorenzo De La Torre. *Elementos de relatividad*. Universidad de Antioquia, 2008.

[15] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.

[16] Daniel J Eisenstein y Wayne Hu. Baryonic features in the matter transfer function. *The Astrophysical Journal*, 496(2):605, 1998.

[17] Wenjuan Fang, Wayne Hu, y Antony Lewis. Crossing the phantom divide with parametrized post-friedmann dark energy. *Physical Review D*, 78(8):087303, 2008.

[18] Richard P Feynman, Robert B Leighton, y Matthew Sands. The feynman lectures on physics; vol. i. *American Journal of Physics*, 33(9):750–752, 1965.

[19] GNUPLOT. gnuplot homepage. 2017. URL http://www.gnuplot.info/.

[20] Alan H Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23(2):347, 1981.

[21] Javier Hortua y Juan Manuel Tejeiro. Perturbaciones cosmologicas e invariantes gauge. *ciencias.bogota.unal.edu.co*, 2008.

[22] Wayne Hu. Crossing the phantom divide: Dark energy internal degrees of freedom. *Physical Review D*, 71(4):047301, 2005.

[23] Wayne Hu. Parametrized post-friedmann signatures of acceleration in the cmb. *Physical Review D*, 77(10):103524, 2008.

[24] Wayne Hu. Cmb tutorials. 2016. URL http://background.uchicago.edu/.

[25] David Kirkby, Daniel Margala, Anže Slosar, Stephen Bailey, Timothée Delubac, James Rich, Julian E Bautista, Michael Blomqvist, Joel R Brownstein, Bill Carithers, et al. Fitting methods for baryon acoustic oscillations in the lyman-α forest fluctuations in boss data release 9. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(03):024, 2013.

[26] Hideo Kodama y Misao Sasaki. Cosmological perturbation theory. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 78:1–166, 1984.

[27] Hannu Kurki-Suonio. Cosmological perturbation theory. *unpublished lecture notes available online at http://theory. physics. helsinki. fi/ cmb/(referenced 23 Oct. 2005)*, 2005.

[28] J Lesgourges y France Cdx. Cosmological perturbations. En *Searching for New Physics at Small and Large Scales: TASI 2012*, págs. 29–97. World Scientific, 2013.

[29] Chung-Pei Ma y Edmund Bertschinger. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges. *arXiv preprint astro-ph/9506072*, 1995.

[30] Francesco Montanari y Ruth Durrer. Analytic approach to baryon acoustic oscillations. *Physical Review D*, 84(2):023522, 2011.

[31] Sharvari Nadkarni-Ghosh y Alexandre Refregier. The einstein-boltzmann equations revisited. *arXiv preprint arXiv:1612.06697*, 2016.

[32] NASA. Dark energy, dark matter. 2016. URL https://science.nasa.gov/astrophysics/focus-areas/what-is-dark-energy.

[33] NASA. Planck. 2016. URL http://planck.caltech.edu/.

[34] Savas Nesseris y Leandros Perivolaropoulos. Crossing the phantom divide: theoretical implications and observational status. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(01):018, 2007.

[35] Will J Percival, Shaun Cole, Daniel J Eisenstein, Robert C Nichol, John A Peacock, Adrian C Pope, y Alexander S Szalay. Measuring the baryon acoustic oscillation scale using the sloan digital sky survey and 2df galaxy redshift survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 381(3):1053–1066, 2007.

[36] F. Reif. *Fundamentos de física estadística y térmica.* McGraw-Hill, 1965.

[37] Juan Manuel Tejeiro Sarmiento. *Sobre la teoría especial de la relatividad.* Univ. Nacional de Colombia, 2005.

[38] Uros Seljak. A two-fluid approximation for calculating the cosmic microwave background anisotropies. *arXiv preprint astro-ph/9406050*, 1994.

[39] Alonso Sepúlveda Soto. *Física matemática.* Universidad de Antioquia, 2009.

[40] J. Tejeiro. *Principios de Relatividad General.* Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Bogotá., 2005.

[41] Juan Manuel Tejeiro. Estructura matemática de los postulados de equivalencia y relatividad. *MOMENTO-Revista de Física*, (7):53–62, 1992.

[42] Kip S Thorne, Charles W Misner, y John Archibald Wheeler. *Gravitation.* Freeman, 2000.

[43] Oscar Vija. *Teoría de perturbaciones cosmológicas en la era de radiación: caracterización de la función de transferencia.* Universidad Nacional, 2017.

[44] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, tomo 67. Wiley New York, 1972.

Apéndice A

INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

A.1 Sobre la notación

Se ofrecen indicaciones con respecto a la notación usada en el escrito.

Unidades naturales

Se sigue la notación de unidades naturales. Por lo tanto $\hbar = k_B = c = 1$, siendo $\hbar$, la *constante de Planck reducida*, k_B, la *constante de Boltzmann* y c, la velocidad de la luz en el vacío.

Símbolos e índices

Los diferentes subíndices utilizados para denotar las especies de materia tienen la siguiente correspondencia:

$\gamma \rightarrow$ fotones, radiación.

$b \rightarrow$ bariones.

$e \rightarrow$ electrones.

$p \rightarrow$ protones.

$m \rightarrow$ materia.

$\Lambda \rightarrow$ energía oscura.

Cuando estos subíndices son utilizados en funciones que dependen de alguna variable, se evita utilizar la repetición del subíndice en la función y en la variable, siempre y cuando no haya lugar a confusión. Así, por ejemplo, $f_\gamma(\vec{p}_\gamma)$, se denota como $f(\vec{p}_\gamma)$, $f'_e(\vec{p'}_e)$ como $f(\vec{p'}_e)$, $E_b(p_b)$ como $E(p_b)$, etc.

En la notación tensorial se utilizan las convenciones usuales de tomar índices griegos (α, μ, etc.) para coordenadas espacio-temporales, los cuales corren de 0 a 4. Los índices latinos (normalmente la letra i), representan coordenadas espaciales. Estos índices corren de 1 a 3. Se sigue la *convención de Einstein* [14] con respecto a la suma de índices repetidos.

La derivada con respecto al tiempo conforme utiliza la notación:

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{d\eta}. \tag{A.1}$$

La derivada con respecto al tiempo cosmológico del factor de escala a se denota con un superíndice prima:

$$a' \equiv \frac{da}{dt}. \tag{A.2}$$

No debe dar lugar a confusiones con la función reservada al superíndice prima, según se indica en la sección **4.1.2**.

Las variables asociadas al Universo homogéneo e isotrópico, tomadas como fondo en la teoría de perturbaciones cosmológicas, se denotan con una barra: $\bar{g}_{\mu\nu}$, $\bar{\rho}$, etc.

La tilde indica que se ha aplicado la transformada de Fourier a una variable. Por ejemplo:

$$\tilde{\Theta}(\vec{k}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot p\vec{x}} d^3x. \tag{A.3}$$

El término de colisiones

El término de colisiones de la ecuación de Boltzmann puede expresarse en una notación más compacta, basada en la utilizada por el libro Modern Cosmology de Scott Dodelson [15], que evita escribir ecuaciones demasiado largas. En la expresión $< f >_{p_1 p_2 ... p_n}$, f es la función a integrar y los brackets y los subíndices tienen el siguiente significado:

$$<>_{p_1 p_2 ... p_n} = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} ... \int \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3}. \tag{A.4}$$

Se muestra un caso particular a manera de ejemplo. Así:

$$< C >_{p_4} = \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} C. \tag{A.5}$$

Si, a su vez, $C =< cp_1^j >_{p_1 p_2 p_3}$, entonces:

$$< C >_{p_4} =< cp_1^j >_{p_1 p_2 p_3 p_4} = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} cp_1^j. \tag{A.6}$$

Como se indica, esta notación ayuda a compactar términos. Por ejemplo, la ecuación (4.25) :

$$C_1' = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_1'}{(2\pi)^3 2E_1'} \int \frac{d^3 p_2'}{(2\pi)^3 2E_2'} (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p_1} + \vec{p_2} - \vec{p'}_1 - \vec{p'}_1)$$
$$* \, \delta(E_1 + E_2 - E_1' - E_2') |M|^2 (f_1 f_2 - f_1' f_2'),$$

se puede escribir de forma compacta como:

$$C_1' =< c_{p_1 p_2} >_{p_1 p_1' p_2 p_2'}, \tag{A.7}$$

donde $c_{p_1 p_2}$ será:

$$c_{p_1 p_2} = (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p_1} + \vec{p_2} - \vec{p_1'} - \vec{p_1'}) \delta(E_1 + E_2 - E_1' - E_2') \frac{|M|^2}{16 E_1 E_2 E_1' E_2'} (f_1 f_2 - f_1' f_2'). \tag{A.8}$$

Igualmente, al conocerse el integrando, se puede expandir la notación compacta a la notación explícita. Si el integrando es:

$$\begin{aligned} c_{p_1p_2} =& (2\pi)^4\delta^3(\vec{p_1}+\vec{p_2}-\vec{p'_1}-\vec{p'_2})\delta[E(p_1)+E(p_2)-E(p'_1)-E(p'_2)]\frac{|M|^2}{8E(p_1)E(p'_1)E(p_2)E(p'_2)} \\ & * [f(\vec{p'}_1)f(\vec{p'}_2)-f(\vec{p_1})f(\vec{p_2})](p_1^j+p_2^j), \end{aligned} \tag{A.9}$$

al expresar explícitamente un término como, por ejemplo, $\langle c_{p_1p_2}(p_1^j+p_2^j)\rangle_{p_1p'_1p_2p'_2}$, se tendrá:

$$\begin{aligned} \langle c_{p_1p_2}(p_1^j+p_2^j)\rangle_{p_1p'_1p_2p'_2} =& \int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'_1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'_2}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^3(\vec{p_1}+\vec{p_2}-\vec{p'}_1-\vec{p'}_2) \\ & * \delta[E(p_1)+E(p_2)-E(p'_1)-E(p'_2)]\frac{|M|^2}{8E(p_1)E(p'_1)E(p_2)E(p'_2)} \\ & * [f(\vec{p'}_1)f(\vec{p'}_2)-f(\vec{p_1})f(\vec{p_2})](p_1^j+p_2^j). \end{aligned} \tag{A.10}$$

A.2 Herramientas matemáticas

A continuación se muestran diferentes herramientas matemáticas que han sido utilizadas a lo largo del escrito. No se pretende hacer una exposición exhaustiva de dichas herramientas, sino, más bien, enfocarse en ciertas propiedades matemáticas que fueron aprovechadas en el desarrollo del presente trabajo.

Función delta de Dirac

La función delta de Dirac [5], $\delta(x-x_0)$, se define de forma que cumpla la propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0). \tag{A.11}$$

En particular, para $f(x)=1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1. \tag{A.12}$$

La función delta de Dirac tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{A.13}$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x + a) + \delta(x - a)]. \tag{A.14}$$

La función delta de Dirac puede generalizarse a un número mayor de dimensiones. Así, para tres dimensiones, se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = f(\vec{r}_0), \tag{A.15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 1, \tag{A.16}$$

$$\delta(-\vec{r}) = \delta(\vec{r}). \tag{A.17}$$

Transformada de Fourier

La transformada de Fourier [39] es la expansión de una función $f(x)$ en una base continua y ortonormal e^{ikx}, de tal manera que se cumple:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk, \tag{A.18}$$

con:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \tag{A.19}$$

$F(k)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$. Las funciones e^{ikx} se conocen como *modos de Fourier* o simplemente *modos*. Las anteriores relaciones se pueden generalizar a un número mayor de dimensiones. Para tres dimensiones:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot p\vec{x}} d^3k, \tag{A.20}$$

$$F(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot p\vec{x}} d^3x, \tag{A.21}$$

con $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ y $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. $\vec{k}$ es llamado *vector de onda*. Para el vector de onda se cumple:

$$k_i = k^i, k = \sqrt{k^i k^i}. \tag{A.22}$$

Entre las múltiples ventajas que presenta la aplicación de la transformada de Fourier, está la propiedad de la derivada. Si:

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx}, \tag{A.23}$$

se cumple que:

$$G(k) = ikF(k). \tag{A.24}$$

Esta propiedad es útil como método para resolver ecuaciones diferenciales, pues, al cambiar derivadas por multiplicaciones, facilita su resolución en un amplio número de casos.

Polinomios de Legendre

Una función puede ser expandida, en el intervalo $(-1, 1)$ como:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x), \tag{A.25}$$

donde los coeficiones a_l se hallan a través de la relación:

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_l(x), \tag{A.26}$$

con $P_l(x)$, los *Polinomios de Legendre*, definidos como:

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}, \tag{A.27}$$

para $N = \frac{l}{2}$, si l es par, y $N = \frac{l-2}{2}$, si l es impar. Los primeros polinomios de Legendre son [5]:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \tag{A.28}$$

Despejando x^2 de la última relación se obtiene:

$$x^2 = \frac{2}{3} P_2(x) + \frac{1}{3}. \tag{A.29}$$

A continuación se resaltan algunas de las propiedades de los polinomios de Legendre [39], de las cuales se ha hecho uso en este escrito. Así, se tiene por ejemplo que:

$$\int_{-1}^{1} x^m P_l(x) dx = 0, \tag{A.30}$$

con $m > -1$ y si $m < l$ o $m + l$ par.

Otra propiedad de los polinomios de Legendre establece la relación:

$$(l+1)P_{l+1} - (2l+1)xP_l + lP_{l-1} = 0, \tag{A.31}$$

de donde:

$$xP_l = \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1} + \frac{l}{2l+1} P_{l-1}. \tag{A.32}$$

A.3 Definiciones físicas

En esta sección se introducen algunas definiciones físicas de relevancia.

Tiempo cosmológico

El tiempo cosmológico t es el tiempo propio medido por un observador que está en reposo con la expansión del Universo homogéneo e isotrópico.

Tiempo conforme

El tiempo conforme se define a partir del tiempo cosmológico como:

$$\eta \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \tag{A.33}$$

η es siempre creciente, lo que permite que sea usado como coordenada temporal, lo que ayuda a simplificar muchos de los resultados en teoría de perturbaciones.

Tasa de dispersión de Thomson

Se define como:

$$\Gamma = n_e x_e \sigma_T a, \tag{A.34}$$

donde x_e es la *fracción de electrones libres*. En la época de interés en la que se presentan las BAO, x_e tiene un valor de 1, por lo que en este documento se ha tomado siempre la tasa de dispersión de Thomson como:

$$\Gamma = n_e \sigma_T a. \tag{A.35}$$

Profundidad óptica

Una vez definida la tasa de dispersión de Thomson se introduce el término profundidad óptica, mediante la siguiente relación:

$$\tau(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' \Gamma. \tag{A.36}$$

Recordando que se toma $x_e = 1$, la profundidad óptica queda:

$$\tau(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a, \tag{A.37}$$

por lo tanto:

$$\frac{d\tau}{d\eta} = -n_e \sigma_T a. \tag{A.38}$$

La profundidad óptica representa la opacidad del Universo en un tiempo dado, visto desde hoy. Su valor tiende a infinito para $\eta \to 0$.

Especies de materia

En el marco de la cosmología el contenido de materia se agrupa convencionalmente en 5 distintas especies. Todas las especies interactúan gravitacionalmente pero no en todos los casos presentan otro tipo de interacción. Las especies de materia son:

- **Radiación**: Compuesta por fotones, por lo que indistintamente se llama a esta especie radiación o fotones. Es siempre relativista.
- **Bariones**: En el contexto de cosmología se denota como bariones tanto a protones y neutrones como a electrones. Es no relativista e interactúa con ella misma y con la radiación.
- **Neutrinos**: Son relativistas y, para efectos prácticos, no interactúa con el resto de la materia.
- **Materia oscura**: Es no relativista y no interactúa con el resto de materia. Su naturaleza es desconocida.

- **Energía oscura**: Esta especie debe incluirse para explicar la planitud del Universo. Su naturaleza es también desconocida.

Adiconalmente, se llama simplemente *materia* a la suma de la materia bariónica y de materia oscura.

El presente escrito, en los capítulos **4** y **5**, se ha enfocado en encontrar ecuaciones para describir el comportamiento de la materia bariónica y la radiación, con las Oscilaciones Acústicas Bariónicas, como una de sus consecuencias. En el capítulo **6** se analizaron diferentes modelos de Energía oscura y cómo influyen en el fenómeno de las BAO.

El contenido de materia del Universo está distribuido hoy, aproximadamente, de la siguiente manera [15]:

-Materia bariónica: 4 %
-Materia oscura: 26 %
-Energía oscura: 70 %
-Radiación: Menos del 1 %
-Neutrinos: Despreciable.

Dispersión de Compton

La interacción entre materia y radiación en la época de interés, que da lugar a las Oscilaciones Acústicas Bariónicas, es la dispersión de Compton, por lo que es conveniente hacer mención sobre ésta. Se encuentra que la interacción de fotones de alta energía con partículas no relativistas no es otra cosa que un colisión elástica (Figura A.1), en la que se transfiere energía y momento, causando que la longitud de onda de los fotones cambie. Este efecto se estudia entonces, a partir de la conservación del cuadrimomento:

$$P_\gamma + P_e = P'_\gamma + P'_e, \tag{A.39}$$

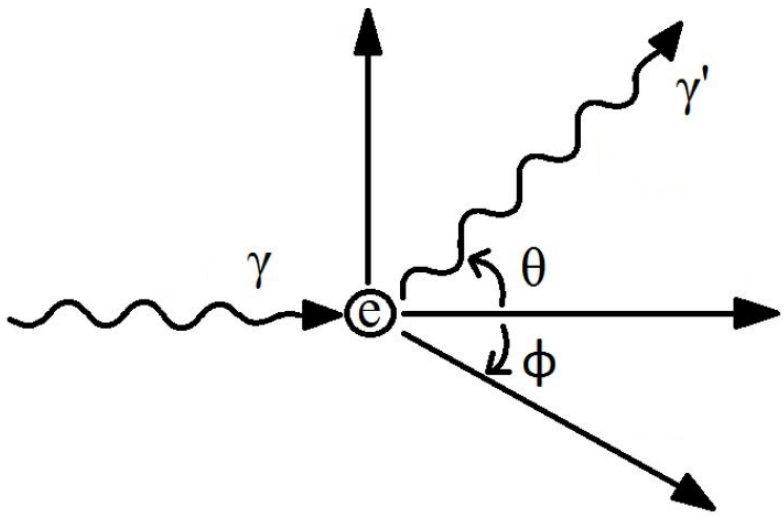

Figura A.1: Dispersión Compton. Figura modificada a partir de la imagen tomada de la página: *https : //lexieslogofphysics.wordpress.com/author/lexiexys/* en mayo de 2017

de la que se obtienen las relaciones que permiten conocer la evolución de las partículas después del choque [37]:

$$P_e'^2 = P^2 = m_e^2 c^2, \tag{A.40}$$

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - cos\theta), \tag{A.41}$$

$$\tan\phi = \frac{m_e c^2 sen\theta}{\left(\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2\right)(1 - cos\theta)}. \tag{A.42}$$

Los ángulos de dispersión, θ y ϕ y la longitud de onda del fotón después del choque λ' se encuentran a partir de la masa en reposo del electrón m_e y de la longitud de onda del fotón antes del choque λ.

Tasa de Hubble

Un parámetro que permite cuantificar la expansión del Universo es la *tasa de Hubble* que se define como:

$$H \equiv \frac{a'}{a}. \tag{A.43}$$

En este escrito no se ha usado explícitamente la tasa de Hubble H, aunque en múltiples ecuaciones aparece el término $\frac{a'}{a}$. Sin embargo, a partir de la tasa de Hubble surgen un par de definiciones de las que sí se ha hecho uso en este escrito. El primero de ellos es el horizonte de Hubble, que es la región para la cual el Universo se expande a una velocidad mayor que la de la luz, y que es determinado por el *radio de Hubble*:

$$R_H \equiv \frac{c}{H}. \tag{A.44}$$

La segunda definición es el tiempo de Hubble, que es el tiempo que tarda la luz en cruzar el horizonte de Hubble, es decir H^{-1}.

Para los modos del orden del radio de Hubble y tomando en cuenta que las longitudes de onda sufren un estiramiento por la expansión del Universo, en unidades $c = 1$ se establece la igualdad:

$$R_H = \frac{1}{H} = \lambda a = \frac{2\pi}{k} a, \tag{A.45}$$

de donde se concluye que $k \sim aH$. En cuanto a órdenes de magnitud:

$$k \sim aH \sim \cancel{a}\left(\frac{\frac{a}{t}}{\cancel{a}}\right) = \frac{a}{t}. \tag{A.46}$$

Igualmente, en cuanto a órdenes de magnitud, el tiempo conforme (A.33) es $\eta \sim \frac{t}{a}$. Al reemplazar en la relación anterior se llega a que $k \sim \frac{1}{\eta}$, lo que implica que para modos superhorizonte:

$$k\eta << 1. \tag{A.47}$$

Se encuentra una importante relación entre tiempo conforme y número de onda para magnitudes del orden del radio de Hubble, $k\eta \sim 1$.

De la relación $\eta \sim \frac{t}{a}$ y de (A.46) también se infiere:

$$\eta \sim \frac{1}{aH} \tag{A.48}$$

Velocidad del sonido

La velocidad del sonido del fluido fotón-barión, tal como se definió en la ecuación (5.16), aparenta ser algo extraña. Dejará de serlo si se parte de la relación, más usual en física, entre velocidad, presión y densidad para una onda de sonido [18]. Así:

$$c_s^2 = \frac{\delta P}{\delta \rho}. \tag{A.49}$$

Para el fluido fotón-barión se suman las contribuciones de estas dos especies de materia:

$$c_s^2 = \frac{\delta P_\gamma + \delta P_b}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_b}. \tag{A.50}$$

Tomando diferenciales:

$$c_s^2 = \frac{\frac{\partial P_\gamma}{\partial \rho_\gamma}\delta\rho_\gamma + \frac{\partial P_b}{\partial \rho_b}\delta\rho_b}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_b}. \tag{A.51}$$

Recordando que para materia $P = 0$ y para radiación la presión es dada por (2.15):

$$c_s^2 = \frac{\frac{1}{3}\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma}{\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma + \bar{\rho}_b \delta_b}. \tag{A.52}$$

Las ecuaciones (2.18) y (2.19) indican que $\bar{\rho}_b = C_b \bar{T}^3$ y $\bar{\rho}_\gamma = C_\gamma \bar{T}^4$, obteniéndose las relaciones:

$$\delta_\gamma = \frac{\partial \bar{\rho}_\gamma}{\partial \bar{T}} \delta T = \frac{4\cancel{C_\gamma}\bar{T}^3}{\cancel{C_\gamma}\bar{T}^4} \delta T = 4\frac{\delta T}{\bar{T}} = 4\delta_T, \tag{A.53}$$

$$\delta_b = \frac{\partial \bar{\rho}_b}{\partial \bar{T}} \delta T = \frac{3\cancel{C_b}\bar{T}^3}{\cancel{C_b}\bar{T}^3} \delta T = 3\frac{\delta T}{\bar{T}} = 3\delta_T. \tag{A.54}$$

Despejando δ_T de las dos ecuaciones anteriores se llega a que las perturbaciones para bariones y radiación cumplen la igualdad $\delta_b = \frac{3}{4}\delta_\gamma$, que se aplica en (A.52):

$$c_s^2 = \frac{\frac{1}{3}\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma}{\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma + \frac{3}{4}\bar{\rho}_b \delta_\gamma}. \tag{A.55}$$

Dividiendo arriba y abajo por $\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma$:

$$c_s^2 = \frac{1}{3\left(1 + \frac{3\bar{\rho}_b}{4\bar{\rho}_\gamma}\right)}. \tag{A.56}$$

Ahora luce más natural la definición de la relación fotón-barión de (4.72), a partir de la cual se escribe:

$$c_s^2 = \frac{1}{3(1+R)}, \tag{A.57}$$

justo como se había definido la velocidad del sonido del fotón-barión en (5.16).

Redshift

En **2.2.2** se indicó que $\lambda \propto a$, por lo que la luz sufre un corrimiento al rojo al expandirse el Universo. Esto motiva a definir el parámetro z, redshift o corrimiento al rojo a partir de:

$$1 + z = \frac{\lambda_{observado}}{\lambda_{emitido}} = \frac{1}{a}. \tag{A.58}$$

Por la relación que hay entre z y a, el redshift puede ser usado como coordenada temporal.

Apéndice B

ECUACIONES DE BOLTZMANN

A lo largo del escrito se mostró el camino que llevó a las ecuaciones de Boltzmann para radiación y bariones (capítulo **4**), y a la de las Oscilaciones Acústicas Bariónicas (capítulo **5**). Se hizo énfasis en exponer los argumentos matemáticos y físicos que permitían hacer aproximaciones, despreciar términos, etc., dejando únicamente las relaciones matemáticas más relevantes y obviando la mayor parte del paso a paso algebraico. Este apéndice y el siguiente pretenden subsanar estos vacíos, con la esperanza de que se convierta en una ayuda al lector interesado en los temas tratados en el presente documento.

Como se indicó anteriormente (pie de página del capítulo **4**) el procedimiento que se expondrá a continuación está basado en el libro Modern Cosmology de Scott Dodelson []. Sin embargo, como también se indicó, no se trata simplemente de completar el paso a paso en la deducción de las ecuaciones sino más bien adaptar el procedimiento del libro a los objetivos específicos de este escrito, que, desde luego, no coinciden enteramente con los de éste, por lo que aparecerán resultados, notación, métodos y ecuaciones que no se encuentran como tal en en el libro en mención.

Capítulo 4. Las ecuaciones de Boltzmann

4.1.1. Término $\frac{df}{dt}$

De (1.4) y (4.8):

$$P^2 = g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = g_{\mu\nu}\left(m_0\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)\left(m_0\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = m_0^2\left(\frac{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}{d\tau^2}\right). \tag{B.1}$$

Mediante (1.1) y (1.20):

$$P^2 = m_0^2\left(\frac{ds^2}{d\tau^2}\right) = m_0^2\left(\frac{ds^2}{-ds^2}\right), \tag{B.2}$$

$$P^2 = -m_0^2. \tag{B.3}$$

Para una métrica que sólo tiene términos en la diagonal, tal como la del gauge newtoniano (3.6):

$$P^2 = g_{00}P^0P^0 + g_{ij}P^iP^j = -m_0^2. \tag{B.4}$$

De (4.12)

$$P^2 = g_{00}(P^0)^2 + p^2 = -m_0^2. \tag{B.5}$$

Con g_{00} de (3.6), despejando P^0:

$$P^0 = \left[\frac{-(m_0^2+p^2)}{-(1+2\Psi)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{B.6}$$

De (4.5) y aproximando por serie de Taylor:

$$P^0 = E(1-\Psi), \tag{B.7}$$

$$p^2 = g_{ij}P^iP^j = g_{ij}p^ip^j. \tag{B.8}$$

De (3.6) y (4.15):

$$p^2 = \delta_{ij} a^2 (1 + 2\Phi) C\hat{p}^i C\hat{p}^j, \tag{B.9}$$

$$p^2 = C^2 a^2 (1 + 2\Phi) \hat{p}^i \hat{p}^i. \tag{B.10}$$

Como $\hat{p}$ es un vector unitario, entonces $\hat{p}^i\hat{p}^i = |\hat{p}| = 1$. Despejando C:

$$C = \frac{p^2}{a(1 + 2\Phi)^{\frac{1}{2}}}. \tag{B.11}$$

Aproximando por serie de Taylor:

$$C = p\frac{1 - \Phi}{a}, \tag{B.12}$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{1}{\frac{dt}{d\lambda}}. \tag{B.13}$$

De la definición (4.10):

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{P^i}{P^0}. \tag{B.14}$$

De P^i de (4.15) y (B.12), y P^0 de (B.7):

$$\frac{dx^i}{dt} = p\hat{p}\frac{1 - \Phi}{a}\frac{1}{E(1 - \Psi)}. \tag{B.15}$$

Aproximando por serie de Taylor:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{p}{E}\hat{p}^i\frac{1 - \Phi}{a}(1 + \Psi), \tag{B.16}$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{p}{E}\frac{\hat{p}^i}{a}[1 + \Psi - \Phi + \cancelto{0}{O(2)}], \tag{B.17}$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{p}{E}\frac{\hat{p}^i}{a}(1 + \Psi - \Phi). \tag{B.18}$$

De la ecuación de las geodésicas (1.18), para $\mu = 0$

$$\frac{d^2x^0}{d\lambda^2} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}, \tag{B.19}$$

De la definición (4.10):

$$\frac{dP^0}{d\lambda} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta, \tag{B.20}$$

$$\frac{dP^0}{d\lambda} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta, \tag{B.21}$$

$$\frac{dP^0}{dt}\frac{dt}{d\lambda} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta. \tag{B.22}$$

De (B.7) y (4.10)

$$\frac{d[E(1-\Psi)]}{dt}E(1-\Psi) = -\Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta, \tag{B.23}$$

$$\frac{d[E(1-\Psi)]}{dt} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E(1-\Psi)}. \tag{B.24}$$

Aproximando el denominador del lado derecho por Taylor, y desarrollando la derivada del lado izquierdo:

$$\frac{dE}{dt}(1-\Psi) - E\frac{d\Psi}{dt} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E}(1+\Psi). \tag{B.25}$$

Se pasa el segundo término de la izquierda al lado derecho. Se escribe la derivada total, $\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}$:

$$\frac{dE}{dt}(1-\Psi)(1+\Psi) = E\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}\right)(1+\Psi) - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E}(1+\Psi)^2. \tag{B.26}$$

Insertando $\frac{dx^i}{dt}$ de (B.18) en la ecuación anterior:

$$\frac{dE}{dt}[1+\cancelto{0}{O(2)}] = E\left[\frac{\partial\Psi}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{p}{E}\frac{\hat{p}^i}{a}(1+\Psi-\Phi)\right] - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E}[1+2\Psi+\cancelto{0}{O(2)}]. \tag{B.27}$$

Al desarrollar los paréntesis y eliminar términos de segundo orden:

$$\frac{dE}{dt} = E\left(\frac{\partial\Psi}{dt} + \frac{p}{E}\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right) - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E}(1+2\Psi). \tag{B.28}$$

Ahora se desarrolla explícitamente el término $\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E}$ mediante la definición (1.9) de la conexión:

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} = \frac{g^{0\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right)\frac{P^\alpha P^\beta}{E}. \tag{B.29}$$

Nótese que este término es simétrico para los índices α y β, lo que indica que, al correr los índices, los términos de las dos primeras derivadas dentro del paréntesis aportan por igual y pueden de hecho sumarse:

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} = \frac{g^{0\nu}}{2}\left(2\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right)\frac{P^\alpha P^\beta}{E}. \tag{B.30}$$

(3.7) no contiene términos g^{0i}, por lo que el único término remanente es g^{00}, forzando a ν a tomar el valor de cero:

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} = \frac{g^{00}}{2}\left(2\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\right)\frac{P^\alpha P^\beta}{E}. \tag{B.31}$$

Se analizan los términos en detalle: g_{00} se toma de (3.6), por lo tanto:

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}(-1-2\Psi) = -2\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}. \tag{B.32}$$

Se desarrolla de manera independiente el término:

$$-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} = -\frac{\partial g_{00}}{\partial t}\frac{P^0 P^0}{E} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\frac{P^i P^j}{E}. \tag{B.33}$$

Con g_{ij} de (3.6), P^0 de (B.7) y P^i de (4.15) y (B.12):

$$-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(-1-2\Psi)\frac{E^2(1-\Psi)^2}{E} - \frac{\partial}{\partial t}\left[a^2\delta_{ij}(1+2\Phi)\right]\frac{P^i P^j}{E}. \tag{B.34}$$

Dado que:

$$\delta_{ij}P^iP^j = p^2\frac{(1-\Phi)^2}{a^2}\delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j = p^2\frac{1-2\Phi+\cancelto{0}{O(2)}}{a^2} = p^2\frac{1-2\Phi}{a^2}, \tag{B.35}$$

reemplazando (B.35) en (B.34):

$$-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} = 2\frac{\partial\Psi}{\partial t}E[1+\cancelto{0}{O(2)}...] - \cancel{a^2}\left[2\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{a'}{a}(1+2\Phi)\right]\frac{p^2}{E}\frac{1-2\Phi}{\cancel{a^2}}. \tag{B.36}$$

Esta última ecuación en (B.31), junto con (B.32), con g^{00} de (3.7) y teniendo en cuenta que $\alpha = 0$, que conduce a que quede solamente P^0, hallado en (B.7):

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} = \frac{-1+2\Psi}{2}\left\{-4\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}P^\beta\frac{E(1-\Psi)}{E} + 2E\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{p^2}{E}\left[2\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{a'}{a}(1+2\Phi)\right](1-2\Phi)\right\}. \tag{B.37}$$

Realizando la suma sobre β, con P^0 de (B.7) y P^i de (4.15) y (B.12):

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} =& \frac{-1+2\Psi}{2}\{-4\left[\frac{\partial\Psi}{\partial t}E(1-\Psi) + \frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a}(1-\Phi)(1-\Psi)\right] + 2E\frac{\partial\Psi}{\partial t}\\ &- \frac{p^2}{E}\left[2\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \cancelto{0}{O(2)} + \frac{a'}{a}[1+\cancelto{0}{O(2)}]\right]\}.\end{aligned} \tag{B.38}$$

Rompiendo paréntesis y despreciando términos de segundo orden:

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} = \frac{-1+2\Psi}{2}\left[-4E\frac{\partial\Psi}{\partial t} - 4\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a} + 2E\frac{\partial\Psi}{\partial t} - 2\frac{p^2}{E}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{a'}{a}\right)\right], \tag{B.39}$$

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} = \frac{-1+2\Psi}{2}2\left[-E\frac{\partial\Psi}{\partial t} - 2\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a} - \frac{p^2}{E}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{a'}{a}\right)\right]. \tag{B.40}$$

Reemplazando esta última ecuación en (B.28):

$$\frac{dE}{dt} = E\left(\frac{\partial\Psi}{dt} + \frac{p}{E}\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right) - (1+2\Psi)(-1+2\Psi)\left[-E\frac{\partial\Psi}{\partial t} - 2\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a} - \frac{p^2}{E}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{a'}{a}\right)\right], \tag{B.41}$$

$$\frac{dE}{dt} = E\frac{\partial\Psi}{dt} + E\frac{p}{E}\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} - E\frac{\partial\Psi}{\partial t} - 2\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a} - \frac{p^2}{E}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{a'}{a}\right), \tag{B.42}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a} - \frac{p^2}{E}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{a'}{a}\right). \tag{B.43}$$

Se reemplazan los resultados (B.18) y (B.43) en (4.7):

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\left[\frac{p}{E}\frac{\hat{p}^i}{a}(1+\Psi-\Phi)\right] + \frac{\partial f}{\partial E}\left[-\frac{p^2}{E}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{a'}{a}\right) - \frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a}\right]. \tag{B.44}$$

Una función de distribución orden cero es homogénea, por lo que no depende de las coordenadas de posición. Por esta razón $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ debe ser de orden uno. Esto hace que al multiplicarse por los potenciales gravitacionales se obtengan términos de segundo orden que pueden despreciarse. Se llega así a la relación del miembro izquierdo de la ecuación de Boltzmann, (4.22):

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{p}{E}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial E}\left(\frac{a'}{a}\frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right). \tag{B.45}$$

4.1.2. Término de colisiones C(f)

En la teoría de la relatividad la integral en el espacio de fase se realiza con respecto al momento y la energía [13]:

$$\int d^4p = \int \frac{d^3p}{2\pi}\int dE. \tag{B.46}$$

Se debe tener en cuenta que la energía tiene la ligadura $E^2 = p^2 + m_0^2$, por lo tanto:

$$\int \frac{d^3p}{2\pi} \int dE\delta(E^2 - p^2 - m_0^2). \tag{B.47}$$

Mediante la propiedad (A.14) de la función delta de Dirac:

$$\int dE\delta[E^2 - (p^2 + m_0^2)] = \int dE \frac{\delta(E - \sqrt{p^2 + m_0^2})}{2\sqrt{p^2 + m_0^2}} + \int dE \frac{\delta(E + \sqrt{p^2 + m_0^2})}{2\sqrt{p^2 + m_0^2}}. \tag{B.48}$$

Como no hay energías negativas, la segunda integral no se toma en cuenta. Realizando la primera integral, teniendo en cuenta la relación (4.5):

$$\begin{aligned} \int dE\delta[E^2 - (p^2 + m_0^2)] &= \int dE \frac{\delta(E - \sqrt{p^2 + m_0^2})}{\cancel{2}\sqrt{p^2 + m_0^2}} = \\ \int dE \frac{\delta(E - \sqrt{p^2 + m_0^2})}{2E} &= \frac{1}{2\sqrt{p^2 + m_0^2}} = \frac{1}{2E}, \end{aligned} \tag{B.49}$$

por lo que la medida de integración debe ser:

$$\int \frac{d^3p}{2\pi 2E}. \tag{B.50}$$

4.2 La ecuación de Boltzmann para fotones

4.2.1 La función de distribución de primer orden

Se parte de la estadística de Bose-Einstein:

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} - 1}. \tag{B.51}$$

Se puede despreciar μ y, puesto que para radiación $E_\gamma = p_\gamma$:

$$f_\gamma = \frac{1}{e^{\frac{p_\gamma}{T}} - 1}. \tag{B.52}$$

Se aplica una pequeña perturbación a la temperatura a la temperatura de fondo, y

de la definición (3.5):

$$T = \bar{T} + \delta\bar{T} = \bar{T}\left(1 + \frac{\delta\bar{T}}{\bar{T}}\right) = \bar{T}(1+\Theta). \tag{B.53}$$

Por lo tanto:

$$f_\gamma = \frac{1}{e^{\frac{p_\gamma}{\bar{T}(1+\Theta)}} - 1} \tag{B.54}$$

Ya que $\bar{f}_\gamma$ es:

$$\bar{f}_\gamma = \frac{1}{e^{\frac{p_\gamma}{\bar{T}}} - 1}. \tag{B.55}$$

Se aplica una perturbación sobre $\bar{f}$:

$$f_\gamma = \bar{f}_\gamma + \delta\bar{f}_\gamma. \tag{B.56}$$

Con $\delta\bar{f}_\gamma$:

$$\delta\bar{f}_\gamma = \frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial\bar{T}}\delta\bar{T} = \frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial\bar{T}}\Theta\bar{T}. \tag{B.57}$$

Se calcula:

$$\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial\bar{T}} = \frac{\partial}{\partial\bar{T}}\left(\frac{1}{e^{\frac{p_\gamma}{\bar{T}}} - 1}\right) = \frac{-e^{\frac{p_\gamma}{\bar{T}}}\frac{p_\gamma}{\bar{T}^2}}{\left(e^{\frac{p_\gamma}{\bar{T}}} - 1\right)^2}. \tag{B.58}$$

También:

$$\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} = \frac{\partial}{\partial p_\gamma}\left(\frac{1}{e^{\frac{p_\gamma}{\bar{T}}} - 1}\right) = \frac{e^{\frac{p_\gamma}{\bar{T}}}\frac{1}{\bar{T}}}{\left(e^{\frac{p_\gamma}{\bar{T}}} - 1\right)^2}. \tag{B.59}$$

Haciendo:

$$\frac{\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial T}}{\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}} = \frac{\frac{-\cancel{e^{\frac{p_\gamma}{T}}}\frac{p_\gamma}{\bar{T}^{\cancel{2}}}}{\cancel{\left(e^{\frac{p_\gamma}{T}}-1\right)^2}}}{\frac{\cancel{e^{\frac{p_\gamma}{T}}}\frac{1}{\cancel{\bar{T}}}}{\cancel{\left(e^{\frac{p_\gamma}{T}}-1\right)^2}}} = \frac{-p_\gamma}{\bar{T}}. \tag{B.60}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial \bar{T}}\bar{T} = -p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}. \tag{B.61}$$

Reemplazando esta relación en (B.57) y de ahí en (B.56):

$$f_\gamma = \bar{f}_\gamma - p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta, \tag{B.62}$$

que a su vez se reemplaza en (4.23):

$$\begin{aligned}\frac{df_\gamma}{dt} =& \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{f}_\gamma - p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta\right) + \frac{\hat{p}^i_\gamma}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\bar{f}_\gamma - p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta\right) \\ & - p_\gamma \frac{\partial}{\partial p_\gamma}\left(\bar{f}_\gamma - p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta\right)\left(\frac{a'}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i_\gamma}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right),\end{aligned} \tag{B.63}$$

$$\begin{aligned}\frac{df_\gamma}{dt} =& \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial t} - p_\gamma \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta\right) + \frac{\hat{p}_\gamma}{a}\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial x^i} - \frac{p_\gamma \hat{p}^i_\gamma}{a}\frac{\partial \Theta}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} - \frac{a'}{a}p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} + \frac{a'}{a}p_\gamma \Theta \frac{\partial}{\partial p_\gamma}\left(p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\right) \\ & - p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right) + \cancel{O(2)}^{\,0}.\end{aligned} \tag{B.64}$$

En esta ecuación se hace $\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial x^i} = 0$ pues la función de distribución a orden cero no depende de las coordenadas espaciales. Se separa la ecuación (B.64) para orden cero y primer orden. La ecuación de orden cero se anula porque para el fondo no existen colisiones:

$$\frac{df_\gamma}{dt}\Big|_{orden\ cero} = \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial t} - \frac{a'}{a}p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} = 0 \quad . \tag{B.65}$$

Puesto que la temperatura de fondo depende del tiempo, y por la relación (B.61):

$$\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial \bar{T}}\frac{d\bar{T}}{dt} = -\frac{p_\gamma}{\bar{T}}\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\frac{d\bar{T}}{dt}. \tag{B.66}$$

Reemplazando en (B.65):

$$-\frac{p_\gamma}{\bar{T}}\cancel{\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}}\frac{d\bar{T}}{dt} = \frac{a'}{a}p_\gamma\cancel{\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}}, \tag{B.67}$$

de donde se obtiene la relación:

$$\frac{a'}{a}p_\gamma = -\frac{p_\gamma}{\bar{T}}\frac{d\bar{T}}{dt}. \tag{B.68}$$

El término de primer orden es:

$$\begin{aligned}\frac{df_\gamma}{dt}\,|_{primer\ orden} = &-p_\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta\right) - \frac{p_\gamma \hat{p}^i_\gamma}{a}\frac{\partial \Theta}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} + \frac{a'}{a}p_\gamma\Theta\frac{\partial}{\partial p_\gamma}\left(p_\gamma\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\right)\\ &-p_\gamma\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right).\end{aligned} \tag{B.69}$$

Se desarrolla el primer término:

$$-p_\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta\right) = -p_\gamma\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\frac{\partial \Theta}{\partial t} - p_\gamma\Theta\frac{\partial^2 \bar{f}_\gamma}{\partial t\partial p_\gamma}, \tag{B.70}$$

$$-p_\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta\right) = -p_\gamma\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\frac{\partial \Theta}{\partial t} - p_\gamma\Theta\frac{\partial^2 \bar{f}_\gamma}{\partial \bar{T}\partial p_\gamma}\frac{d\bar{T}}{dt}. \tag{B.71}$$

Para el último término de la derecha de la ecuación anterior se usa la relación (B.61):

$$-p_\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta\right) = -p_\gamma\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{p_\gamma}{\bar{T}}\Theta\frac{d\bar{T}}{dt}\frac{\partial}{\partial p_\gamma}\left(p_\gamma\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\right). \tag{B.72}$$

Se reemplaza este resultado en (B.69), usando la relación (B.68):

$$\frac{df_\gamma}{dt}|_{primer\ orden} = -p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{a'}{a}p_\gamma \Theta \frac{\partial}{\partial p_\gamma}\left(p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\right) - \frac{p_\gamma \hat{p}^i_\gamma}{a}\frac{\partial \Theta}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} + \frac{a'}{a}p_\gamma \Theta \frac{\partial}{\partial p_\gamma}\left(p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\right) - p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right). \tag{B.73}$$

Factorizando el término común se llega finalmente a la ecuación (4.32):

$$\frac{df_\gamma}{dt}|_{primer\ orden} = -p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i_\gamma}{a}\frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i_\gamma}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right). \tag{B.74}$$

4.2.2 El término de colisiones para fotones

Se utiliza la ecuación (4.1), pero con una ligera modificación que se basa en el argumento que se expone a continuación. Se parte de considerar que, en relatividad general, la coordenada temporal con la cual debe trabajarse es, estrictamente hablando, el tiempo propio, ó, en el caso de partículas con masa en reposo nula, un parámetro afín. Al trabajar con el parámetro afín, introducido en **1.2**, la ecuación de Boltzmann (4.1) se convierte en:

$$\frac{df}{d\lambda} = C(f). \tag{B.75}$$

Aún así, se está interesado en plantear las ecuaciones de Boltzmann en tiempo cosmológico, por lo que se hará el siguiente tratamiento:

$$\frac{df}{dt}\frac{dt}{d\lambda} = C(f) \tag{B.76}$$

Como, de acuerdo a (4.10), $\frac{dt}{d\lambda} = P^0$, de (B.7):

$$\frac{df}{dt} = \frac{C(f)}{E(1-\Psi)}. \tag{B.77}$$

Aproximando por Taylor:

$$\frac{df}{dt} = \frac{C(f)}{E}(1+\Psi) \tag{B.78}$$

Como se pueden despreciar términos a partir de segundo orden y, siendo las colisones términos de primer orden:

$$\frac{df}{dt} = \frac{C(f)}{E}. \tag{B.79}$$

Para fotones $E_\gamma = p_\gamma$, entonces, usando (B.79), en lugar de (4.1), el término de colisiones con el que se trabajará toma la forma:

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{1}{p_\gamma}\int \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3 2E(p_e)}\int \frac{d^3p'_e}{(2\pi)^3 2E(p'_e)}\int \frac{d^3p'_\gamma}{(2\pi)^3 2E(p'_\gamma)}(2\pi)^4\delta^3(\vec{p}_\gamma+\vec{p}_e-\vec{p'}_\gamma-\vec{p'}_e) \\ &* \delta[E(p_\gamma)+E(p_e)-E(p'_\gamma)-E(p'_e)]|M|^2[f(\vec{p'}_e)f(\vec{p'}_\gamma)-f(\vec{p}_e)f(\vec{p}_\gamma)]. \end{aligned} \tag{B.80}$$

De nuevo, para fotones $E(p_\gamma) = p_\gamma$, mientras que para los electrones puede hacerse la aproximación por serie de Taylor:

$$E(p_e) = \sqrt{m_e^2+p_e^2} = m_e\sqrt{1+\frac{p_e^2}{m_e^2}} \approx m_e\left(1+\frac{p_e^2}{2m_e^2}\right) = m_e + \frac{p_e^2}{2m_e}. \tag{B.81}$$

Para los términos de energía de los electrones en el denominador, dado que la masa en reposo de los electrones es mucho mayor que su energía cinética, es válido hacer una aproximación aún más radical, tomando $E(p_e) = m_e$. Luego, se integra explícitamente sobre p'_e. Por la propiedad (A.15) de delta de Dirac, basta reemplazar $\vec{p'}_e$ por $\vec{p}_\gamma + \vec{p}_e - \vec{p'}_\gamma$. Con esto en mente, la ecuación (B.80) queda:

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{(2\pi)^{\cancel{4}}}{2\cancel{(2\pi)^3}4m_e^2p_\gamma}\{\int \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_\gamma}{(2\pi)^3p'_\gamma}\delta[p_\gamma+E(p_e)-p'_\gamma-E(|\vec{p}_e+\vec{p}_\gamma-\vec{p'}_\gamma|)] \\ &* |M|^2[f'_e(\vec{p}_e+\vec{p}_\gamma-\vec{p'}_\gamma)f(\vec{p'}_\gamma)-f(\vec{p}_e)f(\vec{p}_\gamma)]\}. \end{aligned} \tag{B.82}$$

La conservación del momento indica que $\vec{p'}_e = \vec{p}_e+\vec{p}_\gamma-\vec{p'}_\gamma$, por lo que, reemplazando en el argumento de la función delta de Dirac de la ecuación anterior:

$$C[f(\vec{p}_\gamma)] = \frac{\pi}{4m_e^2 p_\gamma}\{\int \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_\gamma}{(2\pi)^3 p'_\gamma}\delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p'_e)] \\ * |M|^2[f'_e(\vec{p}_e + \vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma)f(\vec{p'}_\gamma) - f(\vec{p}_e)f(\vec{p}_\gamma)]\}. \tag{B.83}$$

Se revisa la diferencia de energías en el argumento de la delta de Dirac en esta ecuación, usando la aproximación (B.81):

$$E(p_e) - E(p'_e) = E(p_e) - E(|\vec{p}_e + \vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma|) = m_e + \frac{p_e^2}{2m_e} - m_e - \frac{(\vec{p}_e + \vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma)^2}{2m_e}, \tag{B.84}$$

$$E(p_e) - E(p'_e) = \frac{1}{2m_e}[p_e^2 - p_e^2 - p_\gamma^2 - 2(\vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma)\cdot \vec{p}_e]. \tag{B.85}$$

Como el momento del electrón es mucho mayor que el del fotón, se puede despreciar el término cuadrático p_γ^2, quedando:

$$E(p_e) - E(p'_e) = \frac{1}{2m_e}[-2(\vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma)\cdot \vec{p}_e] = \frac{(\vec{p'}_\gamma - \vec{p}_\gamma)\cdot \vec{p}_e}{m_e}. \tag{B.86}$$

Ahora se realizará una expansión en Taylor para la delta de Dirac en la ecuación (B.83). Puesto que, como se indicó, el momento del electrón es mucho mayor que el del fotón, por lo tanto $E(p'_e) \approx E(p_e)$, lo que valida a hacer una aproximación hasta el primer término, alrededor de $E(p_e)$:

$$\delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p'_e)] = \delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p'_e)]|_{E(p'_e)=E(p_e)} \\ + [E(p'_e) - E(p_e)]\frac{\partial\{\delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p'_e)]\}}{\partial E(p'_e)}|_{E(p'_e)=E(p_e)} \tag{B.87}$$

Usando el resultado (B.86):

$$\delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p'_e)] = \delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p'_e)]|_{E(p'_e)=E(p_e)} \\ - \frac{(\vec{p'}_\gamma - \vec{p}_\gamma)\cdot \vec{p}_e}{m_e}\frac{\partial\{\delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p'_e)]\}}{\partial E(p'_e)}|_{E(p'_e)=E(p_e)}. \tag{B.88}$$

Usando la propiedad $\frac{\partial(x-y)}{\partial y} = -\frac{\partial(x-y)}{\partial x}$, con $x = -E(p'_e)$ y $y = p'_\gamma$, por lo que $x - y = -p'_\gamma - E(p'_e)$:

$$\begin{aligned}\delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p'_e)] =& \delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p'_e)]|_{E(p'_e)=E(p_e)} \\ &- \frac{(\vec{p'}_\gamma - \vec{p}_\gamma)\cdot \vec{p}_e}{m_e} \frac{-\partial\{\delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p'_e)]\}}{\partial p'_\gamma}|_{E(p'_e)=E(p_e)}.\end{aligned} \tag{B.89}$$

Evaluando $E(p'_e) = E(p_e)$:

$$\begin{aligned}\delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p'_e)] =& \delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p_e)] \\ &+ \frac{(\vec{p'}_\gamma - \vec{p}_\gamma)\cdot \vec{p}_e}{m_e} \frac{\partial\{\delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p_e)]\}}{\partial p'_\gamma},\end{aligned} \tag{B.90}$$

$$\delta[p_\gamma + E(p_e) - p'_\gamma - E(p'_e)] = \delta(p_\gamma - p'_\gamma) + \frac{(\vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma)\cdot p\vec{p}_e}{m_e} \frac{\partial[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma}. \tag{B.91}$$

Otra consecuencia de que el momento del electrón sea mayor que el del fotón es que se puede hacer la aproximación $f'_e(\vec{p}_e + \vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma) \approx f(\vec{p}_e)$. Reemplazando (B.91) en (B.83):

$$\begin{aligned}C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{\pi}{4m_e^2 p_\gamma}\{\int \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_\gamma}{(2\pi)^3 p'_\gamma}\left[\delta(p_\gamma - p'_\gamma) + \frac{(\vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma)\cdot \vec{p}_e}{m_e}\frac{\partial[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma}\right] \\ &* |M|^2[f(\vec{p}_e)[f(\vec{p'}_\gamma) - f(\vec{p}_\gamma)]\},\end{aligned} \tag{B.92}$$

$$\begin{aligned}C[f(\vec{p_\gamma})] =& \frac{\pi}{4m_e^2 p_\gamma}\{\int \frac{d^3p_e f(\vec{p}_e)}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_\gamma}{(2\pi)^3 p'_\gamma}\left[\delta(p_\gamma - p'_\gamma) + \frac{(\vec{p_\gamma} - \vec{p'_\gamma})\cdot p\vec{p_e}}{m_e}\frac{\partial[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma}\right] \\ &* |M|^2[f(\vec{p'}_\gamma) - f(\vec{p_\gamma})]\}.\end{aligned} \tag{B.93}$$

La primera integral que aparece en la anterior ecuación es n_e, tal como se indicó en la sección **4.2.2**. Los electrones son no relativistas, por lo que se puede hacer $\frac{\vec{p}_e}{m_e} = \vec{v}_e$. La amplitud $|M|^2$ viene dada por (4.41). Para f_γ, se toma la relación que se halló en (B.62). Uniendo todo esto:

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{\cancel{\pi}}{4\cancel{m_e^2}p_\gamma} 8\cancel{\pi}\sigma_T \cancel{m_e^2} n_e \frac{1}{\cancel{(2\pi)^3}} \{ \int \frac{d^3p'_\gamma}{p'_\gamma} \left[\delta(p_\gamma - p'_\gamma) + (\vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma) \cdot p\vec{v}_e \frac{\partial[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma} \right] \\ & * \left[\bar{f}(p'_\gamma) - p'_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p'_\gamma} \Theta(\hat{p}'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma) + p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} \Theta(\hat{p}_\gamma) \right] \}. \end{aligned} \tag{B.94}$$

Utilizando coordenadas esféricas para resolver la integral:

$$\int d^3p'_\gamma = \int_0^\infty dp'_\gamma p'^2_\gamma \int d\Omega', \tag{B.95}$$

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{n_e \sigma_T}{4\pi p_\gamma} \{ \int_0^\infty \frac{dp'_\gamma p'^2_\gamma}{p'_\gamma} \int d\Omega' \left[\delta(p_\gamma - p'_\gamma) + (\vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma) \cdot p\vec{v}_e \frac{\partial[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma} \right] \\ & * \left[\bar{f}(p'_\gamma) - p'_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p'_\gamma} \Theta(\hat{p}'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma) + p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} \Theta(\hat{p}_\gamma) \right] \}. \end{aligned} \tag{B.96}$$

Expandiendo los términos dentro de la integral de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{n_e \sigma_T}{4\pi p_\gamma} \{ \int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma \int d\Omega' \delta(p_\gamma - p'_\gamma) [\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)] \\ & + \int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma \int d\Omega' \delta(p_\gamma - p_\gamma) \left[-p'_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p'_\gamma} \Theta(\hat{p}'_\gamma) + p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} \Theta(\hat{p}_\gamma) \right] \\ & + \int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma \int d\Omega' (\vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma) \cdot p\vec{v}_e \frac{\partial[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma} [\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)] \\ & + \int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma \int d\Omega' (\vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma) \cdot p\vec{v}_e \frac{\partial[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma} \left[-p'_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p'_\gamma} \Theta(\hat{p}'_\gamma) + p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} \Theta(\hat{p}_\gamma) \right] \}. \end{aligned} \tag{B.97}$$

Al desarrollar la integral de la primera línea de esta ecuación:

$$\int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma \int d\Omega' \delta(p_\gamma - p'_\gamma)[\bar{f}_\gamma(\vec{p'}_\gamma) - \bar{f}_\gamma(\vec{p}_\gamma)] = \int d\Omega' \int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma [\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)]$$
$$= \int d\Omega' p_\gamma [\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p'_\gamma)] = 0, \tag{B.98}$$

por lo que esta integral se elimina. Para la integral de la última línea, se observa que corresponde a la multiplicación de los términos $\vec{v}_e$ y Θ. Ambos son términos de primer orden, por lo que su producto es de segundo orden y puede despreciarse. Luego de reagrupar términos en una sola integral, la ecuación (B.97) se reduce a:

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{n_e \sigma_T}{4\pi p_\gamma} \{ \int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma \int d\Omega' \langle \left[\delta(p_\gamma - p'_\gamma) \left(-p'_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p'_\gamma} \Theta(\hat{p}'_\gamma) + p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} \Theta(\hat{p}_\gamma) \right) \right] \\ &+ (\vec{p}_\gamma - \vec{p'}_\gamma) \cdot \vec{v}_e \frac{\partial [\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma} [\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)] \rangle \}. \end{aligned} \tag{B.99}$$

Se realiza la integral con respecto al ángulo sólido barrido por el vector $\hat{p}'_\gamma$. Con $\vec{p'}_\gamma = p'_\gamma \hat{p}'_\gamma$, organizando la integral como:

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{n_e \sigma_T}{4\pi p_\gamma} \{ \int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma \left[\delta(p_\gamma - p'_\gamma) \left(-p'_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p'_\gamma} \right) \int d\Omega' \Theta(\hat{p}'_\gamma) \right. \\ &+ \delta(p_\gamma - p'_\gamma) \left(p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma} \Theta(\hat{p}_\gamma) \right) \int d\Omega' \\ &+ \vec{p}_\gamma \cdot \vec{v}_e \frac{\partial [\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma} [\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)] \int d\Omega' \\ &- \frac{\partial [\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma} [\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)] p'_\gamma \int d\Omega' \hat{p}'_\gamma \cdot \vec{v}_e \}. \end{aligned} \tag{B.100}$$

Dado que $\hat{p}_\gamma$ no depende de $\vec{v}_e$, la proyección $\hat{p}'_\gamma \cdot \vec{v}_e$ tampoco depende de $\hat{p}'_\gamma$, por lo que la última integral de la ecuación anterior es cero. Tomando en cuenta la definición del monopolo (4.43):

$$
\begin{aligned}
C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{n_e\sigma_T}{4\pi p_\gamma}\{\int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma \left[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)\left(-p'_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p'_\gamma}\right) 4\pi\Theta_0\right. \\
&+ \delta(p_\gamma - p'_\gamma)\left(p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\right) 4\pi\Theta(\hat{p}_\gamma) \\
&+ \vec{p}_\gamma \cdot \vec{v}_e \frac{\partial[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma}[\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)]4\pi\}.
\end{aligned} \tag{B.101}
$$

Reorganizando:

$$
\begin{aligned}
C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{\cancel{4\pi} n_e\sigma_T}{\cancel{4\pi} p_\gamma}\{\int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma \left[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)\left(-p'_\gamma \frac{\partial \bar{f}}{\partial p'_\gamma}\Theta_0 + p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta(\hat{p}_\gamma)\right)\right. \\
&+ \vec{p}_\gamma \cdot \vec{v}_e \frac{\partial[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma}[\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)]\}.
\end{aligned} \tag{B.102}
$$

Ahora se divide la integral en la forma:

$$
\begin{aligned}
C[f(\vec{p}_\gamma)] =& \frac{n_e\sigma_T}{p_\gamma}\{\Theta_0 \int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma \left[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)\left(-p'_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p'_\gamma}\right)\right] + p_\gamma \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta(\hat{p}_\gamma)\int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma \delta(p_\gamma - p'_\gamma) \\
&+ \vec{p}_\gamma \cdot \vec{v}_e \int_0^\infty dp'_\gamma p'_\gamma \frac{\partial[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma}[\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)]\}.
\end{aligned} \tag{B.103}
$$

Se realizan las integrales, usando, para la última integral, la siguiente sustitución:

$$
\begin{aligned}
&u' = p'_\gamma[\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)], du' = [\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)]dp'_\gamma + \frac{\partial \bar{f}(p'_\gamma)}{\partial p'_\gamma}dp'_\gamma; \\
&dv' = \frac{\partial[\delta(p_\gamma - p'_\gamma)]}{\partial p'_\gamma}dp'_\gamma, v' = \delta(p_\gamma - p'_\gamma).
\end{aligned} \tag{B.104}
$$

Aplicando la sustitución en la integral:

$$C[f(\vec{p}_\gamma)] = \frac{n_e\sigma_T}{p_\gamma}\{-p_\gamma^2\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta_0 + p_\gamma^2\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\Theta + \vec{p}_\gamma\cdot\vec{v}_e\langle p'_\gamma[\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)]\rangle\delta(p_\gamma - p'_\gamma)$$
$$- \int_0^\infty dp'_\gamma\delta(p_\gamma - p'_\gamma)[\bar{f}(p'_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)] - \int_0^\infty dp'_\gamma\delta(p_\gamma - p'_\gamma)\frac{\partial\bar{f}(p'_\gamma)}{\partial p'_\gamma}\}, \tag{B.105}$$

$$C[f(\vec{p}_\gamma)] = \frac{p_\gamma^2 n_e\sigma_T}{p_\gamma}\left[\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}(-\Theta_0 + \Theta) + \vec{p}_\gamma\cdot\vec{v}_e[\bar{f}(p_\gamma) - \bar{f}(p_\gamma)] - \vec{p}_\gamma\cdot\vec{v}_e\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}\right]. \tag{B.106}$$

Factorizando se obtiene (4.45):

$$C[f(\vec{p}_\gamma)] = -p_\gamma\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}n_e\sigma_T(\Theta_0 - \Theta + \hat{p}_\gamma\cdot\vec{v}_e). \tag{B.107}$$

4.2.3 La ecuación para fotones

La ecuación (4.1), indica que se deben igualar (B.74) y (B.107):

$$\cancel{-p_\gamma\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}_\gamma^i}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}_\gamma^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right) = \cancel{-p_\gamma\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}}n_e\sigma_T(\Theta_0 - \Theta + \hat{p}_\gamma\cdot\vec{v}_e). \tag{B.108}$$

Cancelando términos comunes, se obtiene (4.46):

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}_\gamma^i}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}_\gamma^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} = n_e\sigma_T(\Theta_0 - \Theta + \hat{p}_\gamma\cdot\vec{v}_e). \tag{B.109}$$

Cambiando de tiempo cosmológico a tiempo conforme, definido en (A.33):

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} + \frac{\hat{p}_\gamma^i}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i} + \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + \frac{\hat{p}_\gamma^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} = n_e\sigma_T(\Theta_0 - \Theta + \hat{p}_\gamma\cdot\vec{v}_e). \tag{B.110}$$

Usando la notación indicada en (A.1):

$$\dot{\Theta} + \hat{p}^i_\gamma \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \dot{\Phi} + \hat{p}^i_\gamma \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T a(\Theta_0 - \Theta + \hat{p}_\gamma \cdot \vec{v}_e). \tag{B.111}$$

Aplicando transformada de Fourier:

$$\dot{\tilde{\Theta}} + \hat{p}^i_\gamma i k_i \tilde{\Theta} + \dot{\tilde{\Phi}} + \hat{p}^i_\gamma i k_i \tilde{\Psi} = n_e \sigma_T a(\tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta} + \hat{p}_\gamma \cdot \vec{v}_e). \tag{B.112}$$

Mediante (A.38) con la notación (A.1), utilizando la variable μ según (4.47), de donde resulta $k\mu = \vec{k}\hat{p}_\gamma = k_i \hat{p}^i_\gamma$, y dado que, como se indicó en **4.2.3**, $\tilde{\vec{v}}_e \cdot \hat{p}_\gamma = \tilde{v}_e \mu$, se llega a la ecuación de Boltzmann para fotones (4.48):

$$\dot{\tilde{\Theta}} + ik\mu\tilde{\Theta} + \dot{\tilde{\Phi}} + ik\mu\tilde{\Psi} = -\dot{\tau}(\tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta} + \mu\tilde{v}_e). \tag{B.113}$$

4.3 La ecuación de Boltzmann para bariones

4.3.1 Término $\frac{df}{dt}$ para bariones

La ecuación de Boltzmann para bariones es, según (4.1) y (B.45):

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i_b}{a}\frac{p_b}{E_b}\frac{\partial f_b}{\partial x^i} - \frac{\partial f_b}{\partial E_b}\left(\frac{a'}{a}\frac{p_b^2}{E_b} + \frac{p_b^2}{E_b}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p_b}^i p_b}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right) = C(f_b). \tag{B.114}$$

Se integra esta ecuación con respecto a $\int \frac{d^3 p_b}{(2\pi)^3}$ y, utilizando la notación compacta definida en el apéndice **A.1** para el término de colisiones:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3 p_b}{(2\pi)^3} f_b + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int \frac{d^3 p_b}{(2\pi)^3} f_b \frac{p_b \hat{p}^i_b}{E_b} - \left(\frac{a'}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\int \frac{d^3 p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}\frac{p_b^2}{E_b} \\ &- \frac{1}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\int \frac{d^3 p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b} p_b \hat{p}^i_b = \langle C(f_b)\rangle_{p_b}. \end{aligned} \tag{B.115}$$

La primera y segunda integrales corresponden respectivamente a la densidad de bariones n_b, como se mencionó en **4.3.1**, y a $n_b v^i_b$, de acuerdo a (4.51) de la misma sección. La cuarta integral se puede despreciar, como se indicó así mismo en **4.3.1**.

Resta por realizar la tercera integral, para lo cual se hace uso de la relación mostrada a continuación. A partir de (4.5):

$$\frac{dE}{dp} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}p}{\sqrt{p^2+m_0^2}} = \frac{p}{\sqrt{p^2+m_0^2}} = \frac{p}{E}, \tag{B.116}$$

es decir:

$$\frac{dp}{dE} = \frac{E}{p}, \tag{B.117}$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial f_b}{\partial E_b} = \frac{\partial f_b}{\partial p_b}\frac{dp_b}{dE_b} = \frac{\partial f_b}{\partial p_b}\frac{E_b}{p_b}. \tag{B.118}$$

Reemplazando en la tercera integral de (B.115):

$$\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}\frac{p_b^2}{E_b} = \int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial p_b}\frac{\cancel{E_b}}{\cancel{p_b}}\frac{p_b^{\cancel{2}}}{\cancel{E_b}} = \int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial p_b}p_b. \tag{B.119}$$

Desarrollando la integral en coordenadas esféricas:

$$\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial p_b}p_b = \int_0^\infty dp_b p_b^2 \int d\Omega \frac{\partial f_b}{\partial p_b}p_b = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{\partial f_b}{\partial p_b}p_b^3 dp_b. \tag{B.120}$$

Para desarrollar la última integral en (B.120) se hace la sustitución:

$$\begin{aligned} u &= p_b^3, du = 3p_b^2; \\ dv &= \frac{\partial f_b}{\partial p_b}dp_b, v = f_b. \end{aligned} \tag{B.121}$$

Así:

$$\int_0^\infty \frac{\partial f_b}{\partial p_b}p_b^3 dp_b = \cancel{p_b^3 f_b|_0^\infty} - 3\int_0^\infty p_b^2 f_b dp_b. \tag{B.122}$$

Al reemplazar en (B.120) y a partir **4.3.1**, donde se establece que $n_b = \int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}f_b$:

$$\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{\partial f_b}{\partial p_b}p_b^3 dp_b = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}(-3)\int_0^\infty p_b^2 f_b dp_b = -3\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^3}4\pi p_b^2 dp_b = \\ -3\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}f_b = -3n_b. \tag{B.123}$$

Resultado que se reemplaza en (B.115), junto a los resultados de las demás integrales, según las indicaciones ya establecidas:

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial n_b v_b^i}{\partial x^i} + 3\left(\frac{a'}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) n_b = \langle C(f_b)\rangle_{p_b}. \tag{B.124}$$

Se toma una perturbación para n_b, tal como se definió en (4.53), que se reemplaza en la ecuación anterior:

$$\frac{\partial[\bar{n}_b(1+\delta_b)]}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial\{[\bar{n}_b(1+\delta_b)]v_b^i\}}{\partial x^i} + 3\left(\frac{a'}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)[\bar{n}_b(1+\delta_b)] = \langle C(f_b)\rangle_{p_b}. \tag{B.125}$$

Recordando que el término a orden cero, $\bar{n}_b$, sólo depende de la coordenada temporal y despreciando términos de segundo orden, se desarrolla la ecuación anterior:

$$(1+\delta_b)\frac{\partial \bar{n}_b}{\partial t} + \bar{n}_b\frac{\partial(1+\delta_b)}{\partial t} + \frac{\bar{n}_b}{a}\frac{\partial(v_b^i + \delta_b v_b^i)}{\partial x^i} + 3\bar{n}_b(1+\delta_b)\frac{a'}{a} + 3\bar{n}_b\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 3\bar{n}_b\delta_b\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \langle C(f_b)\rangle_{p_b}. \tag{B.126}$$

Continuando el desarrollo y reorganizando para dejar en primer lugar los términos de orden cero:

$$(1+\delta_b)\left(\frac{\partial \bar{n}_b}{\partial t} + 3\bar{n}_b\frac{a'}{a}\right) + \bar{n}_b\frac{\partial \delta_b}{\partial t} + \frac{\bar{n}_b}{a}\frac{\partial v_b^i}{\partial x^i} + 3\bar{n}_b\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \langle C(f_b)\rangle_{p_b}. \tag{B.127}$$

La ecuación (2.13) indica que el segundo factor del primer término es igual a cero. Factorizando $\bar{n}_b$ se llega a la ecuación (4.54):

$$\bar{n}_b\left(\frac{\partial \delta_b}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial v_b^i}{\partial x^i} + 3\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = \langle C(f_b)\rangle_{p_b}. \tag{B.128}$$

4.3.2 Ecuación para perturbación de densidad de bariones

El término de la derecha de (B.128), según la notación del apéndice **A.1**, es explícitamente:

$$\begin{aligned}\langle C(f_b)\rangle_{p_b} = &\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_b}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_2}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^3(\vec{p}_b+\vec{p}_2-\vec{p'}_b-\vec{p'}_2)\\ &*\,\delta[E(p_b)+E(p_2)-E(p'_b)-E(p'_2)]\frac{|M|^2}{8E(p_b)E(p'_b)E(p_2)E(p'_2)}\\ &*\,[f(p'_b)f(p'_2)-f(p_b)f(p_2)].\end{aligned} \tag{B.129}$$

Al intercambiar las variables $p_b \leftrightarrow p'_b$ y $p_2 \leftrightarrow p'_2$:

$$\begin{aligned}\langle C(f_b)\rangle_{p_b} = &\int \frac{d^3p'_b}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_2}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^3(\vec{p'}_b+\vec{p'}_2-\vec{p}_b-\vec{p}_2)\\ &*\,\delta[E(p'_b)+E(p'_2)-E(p_b)-E(p_2)]\frac{|M|^2}{8E(p'_b)E(p_b)E(p'_2)E(p_2)}\\ &*\,[f(p_b)f(p_2)-f(p'_b)f(p'_2)],\end{aligned} \tag{B.130}$$

$$\begin{aligned}\langle C(f_b)\rangle_{p_b} = &\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_b}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_2}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^3[-(\vec{p}_b+\vec{p}_2-\vec{p'}_b-\vec{p'}_2)]\\ &*\,\delta\{-[E(p_b)+E(p_2)-E(p'_b)-E(p'_2)]\}\frac{|M|^2}{8E(p'_b)E(p_b)E(p'_2)E(p_2)}\\ &*\,\{-[f(p'_b)f(p'_2)-f(p_b)f(p_2)]\}.\end{aligned} \tag{B.131}$$

Dada la propiedad (A.17) de la función delta de Dirac y reorganizando términos:

$$
\begin{aligned}
\langle C(f_b)\rangle_{p_b} = &-\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_b}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_2}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^3(\vec{p}_b+\vec{p}_2-\vec{p'}_b-\vec{p'}_2)\\
&*\,\delta[E(p_b)+E(p_2)-E(p'_b)-E(p'_2)]\frac{|M|^2}{8E(p_b)E(p'_b)E(p_2)E(p'_2)}\\
&*\,[f(p_b)f(p_2)-f(p_b)f(p_2)]\\
&=-\langle C(f_b)\rangle_{p_b}.
\end{aligned}
\tag{B.132}
$$

El hecho de que se llegó a que:

$$
\langle C(f_b)\rangle_{p_b} = -\langle C(f_b)\rangle_{p_b}, \tag{B.133}
$$

implica que el término de colisiones de (B.128) debe ser cero, por lo que esa ecuación, luego de dividir entre $\bar{n}_b$ se reduce a:

$$
\frac{\partial\delta_b}{\partial t}+\frac{1}{a}\frac{\partial v_b^i}{\partial x^i}+3\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0. \tag{B.134}
$$

Cambiando a tiempo conforme y aplicando transformada de Fourier:

$$
\frac{1}{a}\dot{\tilde{\delta}}_b+\frac{1}{a}ik^i\tilde{v}_b^i+3\frac{1}{a}\dot{\tilde{\Phi}}=0. \tag{B.135}
$$

Se asume la velocidad irrotacional, por lo cual $\tilde{v}_b^i=\frac{k^i}{k}\tilde{v}_b$:

$$
\frac{1}{a}\dot{\tilde{\delta}}_b+\frac{1}{a}i\frac{k^ik^i}{k}\tilde{v}_b+3\frac{1}{a}\dot{\tilde{\Phi}}=0. \tag{B.136}
$$

De acuerdo a (A.22) y multiplicando por a:

$$
\frac{a}{a}\dot{\tilde{\delta}}_b+\frac{a}{a}i\frac{k^2}{k}\tilde{v}_b+3\frac{a}{a}\dot{\tilde{\Phi}}=0. \tag{B.137}
$$

Se obtiene la primera ecuación de Boltzmann para bariones (4.57):

$$
\dot{\tilde{\delta}}_b+ik\tilde{v}_b+3\dot{\tilde{\Phi}}=0. \tag{B.138}
$$

4.3.3 Ecuación para la velocidad de bariones

Para obtener la ecuación para la velocidad de bariones, se multiplica (B.115) por $\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{p_b\hat{p}_b^j}{E_b}m_b$ (La parte derecha se multiplica por $\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\vec{p}_b$. La razón de esta equivalencia se explicó en **4.3.3**). Usando la notación compacta indicada en el apéndice **A.1**:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}f_b\frac{p_b\hat{p}_b^j}{E_b}m_b + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}f_b\frac{p_b^2\hat{p}_b^i\hat{p}_b^j}{E_b^2}m_b - \left(\frac{a'}{a}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}\frac{p_b^3\hat{p}_b^j}{E_b^2}m_b$$
$$-\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}\frac{p^2\hat{p}_b^i\hat{p}_b^j}{E_b}m_b = \langle C(f_b)p_b^j\rangle_{p_b}. \tag{B.139}$$

La masa de los bariones, m_b, es constante y se puede factorizar:

$$m_b[\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}f_b\frac{p_b\hat{p}_b^j}{E_b} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}f_b\frac{p_b^2\hat{p}_b^i\hat{p}_b^j}{E_b^2} - \left(\frac{a'}{a}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}\frac{p_b^3\hat{p}_b^j}{E_b^2}$$
$$-\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}\frac{p^2\hat{p}_b^i\hat{p}_b^j}{E_b}] = \langle C(f_b)p_b^j\rangle_{p_b}. \tag{B.140}$$

La primera integral de la ecuación anterior, por la definición (4.51), es $n_b v_b^i$. Como se dijo en **4.3.3**, se desprecia el término $\frac{p_b^2}{E_b^2}$, haciendo que la segunda integral se elimine. La tercera integral se realiza aplicando (B.118):

$$\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}\frac{p_b^3\hat{p}_b^j}{E_b^2} = \int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial p_b}\frac{\cancel{E_b}}{\cancel{p_b}}\frac{p_b^{\cancel{3}}\hat{p}_b^j}{E_b^{\cancel{2}}} = \int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial p_b}\frac{p_b^2\hat{p}_b^j}{E_b}. \tag{B.141}$$

Resolviendo la integral mediante coordenadas esféricas:

$$\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial p_b}\frac{p_b^2\hat{p}_b^j}{E_b} = \int d\Omega\frac{\hat{p}_b^j}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{p_b^4}{E_b}\frac{\partial f_b}{\partial p_b}dp_b. \tag{B.142}$$

Para realizar la integral sobre p_b se aplica la siguiente sustitución, en la que se hace uso de (B.117):

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{p_b^4}{E_b}, \\
du &= \left(\frac{4\cancel{E_b} p_b^3}{E_b^{\cancel{2}}} - \frac{p_b^4}{E_b^2}\frac{dE_b}{dp_b} \right) dp_b = \left(\frac{4p_b^3}{E_b} - \frac{p_b^4}{E_b^2}\frac{p_b}{E_b} \right) dp_b \\
du &= \left(\frac{4p_b^3}{E_b} - \frac{p_b^5}{E_b^3} \right) dp_b; \\
dv &= \frac{\partial f_b}{\partial p_b} dp_b, v = f_b.
\end{aligned}
\tag{B.143}
$$

Se resuelve la integral:

$$
\begin{aligned}
&\int d\Omega \frac{\hat{p}_b^j}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{p_b^4}{E_b}\frac{\partial f_b}{\partial p_b} = \int d\Omega \frac{\hat{p}_b^j}{(2\pi)^3} \left[\cancel{\frac{p_b^4}{E_b} f_b|_0^\infty} - \int \left(\frac{4p_b^3}{E_b} - \frac{p_b^5}{E_b^3} \right) dp_b \right] = \\
&-4 \int d\Omega \frac{\hat{p}_b^j}{(2\pi)^3} \int_0^\infty p_b^2 \frac{p_b}{E_b} f_b + \int d\Omega \frac{\hat{p}_b^j}{(2\pi)^3} \int_0^\infty p_b^2 \frac{p_b^3}{E_b^3} f_b = \\
&-4 \int \frac{dp_b^3}{(2\pi)^3} f_b \frac{p_b \hat{p}_b^j}{E_b} + \int \frac{dp_b^3}{(2\pi)^3} f_b \frac{p_b^3 \hat{p}_b^j}{E_b^3}.
\end{aligned}
\tag{B.144}
$$

Para esta última expresión, la primera integral se obtiene a partir de la definición (4.51), mientras que la segunda se ha despreciado puesto que $\frac{p_b^3}{E_b^3}$ es muy pequeño, siendo $E_b >> p_b$, como previamente se indicó. En resumen:

$$
\int \frac{d^3 p_b}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_b}{\partial E_b} \frac{p_b^3 \hat{p}_b^j}{E_b^2} = -4 n_b v_b^j. \tag{B.145}
$$

Queda pendiente resolver la cuarta integral de (B.140), usando la relación (B.118) y en coordenadas esféricas:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d^3 p_b}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_b}{\partial E_b} \frac{p_b^2 \hat{p}_b^i \hat{p}_b^j}{E_b} = \int \frac{d^3 p_b}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_b}{\partial p_b} \frac{\cancel{E_b}}{\cancel{p_b}} \frac{p_b^{\cancel{2}} \hat{p}_b^i \hat{p}_b^j}{\cancel{E_b}} = \int \frac{d^3 p_b}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_b}{\partial p_b} p_b \hat{p}_b^i \hat{p}_b^j = \\
&\int d\Omega \frac{\hat{p}_b^i \hat{p}_b^j}{(2\pi)^3} \int_0^\infty p_b^3 \frac{\partial f_b}{\partial p_b} dp_b.
\end{aligned}
\tag{B.146}
$$

Nótese que se puede escribir:

$$\int d\Omega \frac{\hat{p}_b^i \hat{p}_b^j}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi}{3}\delta^{ij}\frac{1}{(2\pi)^3} \tag{B.147}$$

y mediante la sustitución:

$$\begin{aligned} u &= p_b^3, du = 3p_b^2 dp_b; \\ dv &= \frac{\partial f_b}{p_b} dp_b, v = f_b. \end{aligned} \tag{B.148}$$

Se hace:

$$\int_0^\infty p_b^3 \frac{\partial f_b}{\partial p_b} dp_b = \cancel{p_b^3 f_b|_0^\infty} - 3\int_0^\infty f_b p_b^2 dp_b. \tag{B.149}$$

Uniendo los resultados (B.147) y (B.149):

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}\frac{p^2\hat{p}_b^i\hat{p}_b^j}{E_b} = \frac{4\pi}{3}\delta^{ij}\frac{1}{(2\pi)^3}\left(-3\int_0^\infty f_b p_b^2 dp_b\right) = \\ &-\delta^{ij}\int \frac{4\pi}{(2\pi)^3} p_b^2 dp_b = -\delta^{ij}\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3} f_b. \end{aligned} \tag{B.150}$$

La última integral es, como ya se ha mencionado, n_b, así que:

$$\int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_b}{\partial E_b}\frac{p^2\hat{p}_b^i\hat{p}_b^j}{E_b} = -\delta^{ij} n_b. \tag{B.151}$$

Colectando los resultados obtenidos para las integrales de (B.140) se llega entonces a:

$$m_b\left[\frac{\partial n_b v_b^j}{\partial t} - \left(\frac{a'}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)(-4n_b v^j) - \frac{1}{a}(-\delta^{ij} n_b)\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right] = \langle C(f_b) p_b^j \rangle_{p_b}. \tag{B.152}$$

Despreciando el producto de segundo orden $\frac{\partial \Phi}{\partial t} v^j$, se llega a la ecuación (4.62):

$$m_b\left(\frac{\partial (n_b v^j)}{\partial t} + 4\frac{a'}{a} n_b v^j + \frac{n_b}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right) = \langle C(f_b) p_b^j \rangle_{p_b}. \tag{B.153}$$

Esta ecuación se divide en dos, una para electrones y otra para protones, y reescribiendo el término de colisiones de acuerdo a la notación compacta explicada

en el apéndice **A.1**:

$$m_e\left(\frac{\partial(n_e v_e^j)}{\partial t}+4\frac{a'}{a}n_e v_e^j+\frac{n_e}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right)=\langle c_{p_e p_b}p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}+\langle c_{p_e p_\gamma}p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}, \quad \text{(B.154)}$$

$$m_p\left(\frac{\partial(n_p v_p^j)}{\partial t}+4\frac{a'}{a}n_p v_p^j+\frac{n_p}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right)=\langle c_{p_e p_b}p_p^j\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}. \quad \text{(B.155)}$$

.

Como se indicó en **4.3.3**, $n_e = n_p = n_b$ y $v_e^j = v_p^j = v_b^j$, las ecuaciones (B.154) y (B.155) se escriben como:

$$m_e\left(\frac{\partial(n_b v_b^j)}{\partial t}+4\frac{a'}{a}n_b v_b^j+\frac{n_b}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right)=\langle c_{p_e p_b}p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}+\langle c_{p_e p_\gamma}p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}, \quad \text{(B.156)}$$

$$m_p\left(\frac{\partial(n_b v_b^j)}{\partial t}+4\frac{a'}{a}n_b v_b^j+\frac{n_b}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right)=\langle c_{p_e p_b}p_p^j\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}. \quad \text{(B.157)}$$

Sumando las dos anteriores ecuaciones:

$$(m_p+m_e)\left(\frac{\partial(n_b v_b^j)}{\partial t}+4\frac{a'}{a}n_b v_b^j+\frac{n_b}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right)=\langle c_{p_e p_b}(p_e^j+p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}+\langle c_{p_e p_\gamma}p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}. \quad \text{(B.158)}$$

Despreciando m_e en comparación con m_p, y tomando simplemente $m_p = m_b$:

$$m_b\left(\frac{\partial(n_b v_b^j)}{\partial t}+4\frac{a'}{a}n_b v_b^j+\frac{n_b}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right)=\langle c_{p_e p_b}(p_e^j+p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}+\langle c_{p_e p_\gamma}p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}. \quad \text{(B.159)}$$

Mediante la perturbación definida en (4.53):

$$m_b\left[\frac{\partial[\bar{n}_b(1+\delta_b)v_b^j]}{\partial t}+4\frac{a'}{a}[\bar{n}_b(1+\delta_b)]v_b^j+\frac{\bar{n}_b(1+\delta_b)}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right]= \quad \text{(B.160)}$$
$$\langle c_{p_e p_b}(p_e^j+p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}+\langle c_{p_e p_\gamma}p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}.$$

Expandiendo y despreciando términos de segundo orden:

$$m_b\left(\frac{\partial(\bar{n}_b v_b^j)}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{n}_b\delta_b v_b^j)}{\partial t}+4\frac{a'}{a}\bar{n}_b v_b^j+\cancelto{O(2)}{4\frac{a'}{a}\bar{n}_b\delta_b v_b^j}+\frac{\bar{n}_b}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}+\cancelto{O(2)}{\frac{\bar{n}_b\delta_b}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}}\right)= \tag{B.161}$$

$$\langle c_{p_e p_b}(p_e^j+p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}+\langle c_{p_e p_\gamma}p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma},$$

$$m_b\left(\bar{n}_b\frac{\partial v_b^j}{\partial t}+v_b^j\frac{\partial\bar{n}_b}{\partial t}+4\frac{a'}{a}\bar{n}_b v_b^j+\frac{\bar{n}_b}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right)=\langle c_{p_e p_b}(p_e^j+p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}+\langle c_{p_e p_\gamma}p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}, \tag{B.162}$$

que se reescribe como:

$$m_b\left[\bar{n}_b\frac{\partial v_b^j}{\partial t}+v_b^j\cancelto{0}{\left(\frac{\partial\bar{n}_b}{\partial t}+3\frac{a'}{a}\bar{n}_b\right)}+\frac{a'}{a}\bar{n}_b v_b^j+\frac{\bar{n}_b}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right]=\langle c_{p_e p_b}(p_e^j+p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}+\langle c_{p_e p_\gamma}p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}, \tag{B.163}$$

donde se aprovechó la relación (2.13). Factorizando $\bar{n}_b$:

$$m_b\bar{n}_b\left(\frac{\partial v_b^j}{\partial t}+\frac{a'}{a}v_b^j+\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right)=\langle c_{p_e p_b}(p_e^j+p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}+\langle c_{p_e p_\gamma}p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}. \tag{B.164}$$

Dado que $\bar{\rho}_b=m_b\bar{n}_b$, se obtiene (4.65):

$$\bar{\rho}_b\left(\frac{\partial v_b^j}{\partial t}+\frac{a'}{a}v_b^j+\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right)=\langle c_{p_e p_b}(p_e^j+p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}+\langle c_{p_e p_\gamma}p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}. \tag{B.165}$$

Ahora se desarrolla el término de colisiones. El primer sumando es explícitamente:

$$\begin{aligned}\langle c_{p_e p_b}(p_e^j + p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p} = &\int \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_e}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p_p}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_p}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^3(\vec{p}_e + \vec{p}_p - \vec{p'}_e - \vec{p}_p)\\ &* \delta[E(p_e) + E(p_p) - E(p'_e) - E(p'_p)]\frac{|M|^2}{8E(p_e)E(p'_e)E(p_p)E(p'_p)}\\ &* [f(p'_e)f(p'_p) - f(p_e)f(p_p)](p_e^j + p_p^j).\end{aligned} \tag{B.166}$$

Se intercambian las variables $p_e \leftrightarrow p'_e$ y $p_p \leftrightarrow p'_p$:

$$\begin{aligned}\langle c_{p_e p_b}(p_e^j + p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p} = &\int \frac{d^3p'_e}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_p}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p_p}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^3](\vec{p'}_e + \vec{p'}_p - \vec{p}_e - \vec{p}_p)\\ &* \delta[E(p'_e) + E(p'_p) - E(p_e) - E(p_p)]\frac{|M|^2}{8E(p'_e)E(p_e)E(p'_p)E(p_p)}\\ &* [f(p_e)f(p_p) - f(p'_e)f(p'_p)(p'^{\,j}_e + p'^{\,j}_p).\end{aligned} \tag{B.167}$$

Usando la conservación del momento (4.66):

$$\begin{aligned}\langle c_{p_e p_b}(p_e^j + p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p} = &\int \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_e}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p_p}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'_p}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^3[-(\vec{p}_e + \vec{p}_p - \vec{p'}_e - \vec{p'}_p)]\\ &* \delta\{-[E(p_e) + E(p_p) - E(p'_e) - E(p'_p)]\}\frac{|M|^2}{8E(p'_e)E(p_e)E(p'_p)E(p_p)}\\ &* \{-[f(p'_e)f(p'_p) - f(p_e)f(p_e)]\}(p_e^j + p_p^j).\end{aligned} \tag{B.168}$$

Dada la propiedad (A.17) de la delta de Dirac y reorganizando términos:

$$\begin{aligned}\langle c_{p_e p_b}(p_e^j + p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p} = &- \int \frac{d^3p_e}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'_e}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p_p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'_p}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p}_e + \vec{p}_p - \vec{p'}_e - \vec{p'}_p) \\ &* \delta[E(p_e) + E(p_p) - E(p'_e) - E(p'_p)] \frac{|M|^2}{8E(p'_e)E(p_e)E(p'_p)E(p_p)} \\ &* [f(p'_e)f(p'_p) - f(p_e)f(p_e)](p_e^j + p_p^j) \\ &= -\langle c_{p_e p_b}(p_e^j + p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}.\end{aligned} \tag{B.169}$$

Se llegó a que:

$$\langle c_{p_e p_b}(p_e^j + p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p} = -\langle c_{p_e p_b}(p_e^j + p_p^j)\rangle_{p_e p'_e p_p p'_p}, \tag{B.170}$$

lo que implica que este término debe ser cero. Para el segundo término de colisiones de (B.165), se parte de que:

$$\langle c_{p_e p_\gamma} p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma} + \langle c_{p_e p_\gamma} p_\gamma^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma} = \langle c_{p_e p_\gamma}(p_e^j + p_\gamma^j)\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}. \tag{B.171}$$

Obsérvese que el término de la derecha de esta ecuación es exactamente igual al primer término de colisiones de (B.165), simplemente haciendo el cambio $p_p \longrightarrow p_\gamma$, por lo que, al realizar el mismo tratamiento que condujo de (B.166) a (B.170), se llegará a que:

$$\langle c_{p_e p_\gamma}(p_e^j + p_\gamma^j)\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma} = 0, \tag{B.172}$$

$$\langle c_{p_e p_\gamma} p_e^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma} = -\langle c_{p_e p_\gamma} p_\gamma^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}. \tag{B.173}$$

Estos resultados permiten reescribir la ecuación (B.165) como:

$$\bar{\rho}_b \left(\frac{\partial v_b^j}{\partial t} + \frac{a'}{a} v_b^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right) = -\langle c_{p_e p_\gamma} p_\gamma^j\rangle_{p_e p'_e p_\gamma p'_\gamma}. \tag{B.174}$$

Se aplica transformada de Fourier y se multiplica por $\frac{k^j}{k}$:

$$\bar{\rho}_b\left(\frac{\partial\tilde{v}_b^j}{\partial t}\frac{k^j}{k}+\frac{a'}{a}\tilde{v}_b^j\frac{k^j}{k}+\frac{1}{a}i\frac{k^jk^j}{k}\tilde{\Psi}\right)=-\left\langle\tilde{c}_{p_ep_\gamma}p_\gamma^j\frac{k^j}{k}\right\rangle_{p_ep'_ep_\gamma p'_\gamma}. \tag{B.175}$$

Usando (A.22):

$$\bar{\rho}_b\left(\frac{\partial(\tilde{v}_b^j\frac{k^j}{k})}{\partial t}+\frac{a'}{a}\tilde{v}_b^j\frac{k^j}{k}+\frac{1}{a}i\frac{k^{\cancel{2}}}{\cancel{k}}\tilde{\Psi}\right)=-\langle\tilde{c}_{p_ep_\gamma}p_\gamma^j\hat{k}^j\rangle_{p_ep'_ep_\gamma p'_\gamma}. \tag{B.176}$$

Recordando que $\tilde{v}_b^j=\frac{k^j}{k}\tilde{v}_b$:

$$\bar{\rho}_b\left(\frac{\partial\tilde{v}_b}{\partial t}+\frac{a'}{a}\tilde{v}_b+\frac{1}{a}ik\tilde{\Psi}\right)=-\langle\tilde{c}_{p_ep_\gamma}p_\gamma\mu\rangle_{p_ep'_ep_\gamma p'_\gamma}. \tag{B.177}$$

Se obtuvo la expresión (4.69). El término de la derecha de la igualdad ya se conoce. En efecto, según la notación del apéndice **A.1** y de la ecuación (B.107):

$$C[f(\vec{p}_\gamma)]=\langle c_{p_ep_\gamma}\rangle_{p_ep'_ep'_\gamma}=-p_\gamma\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}n_e\sigma_T(\Theta_0-\Theta+\hat{p}_\gamma\cdot\vec{v}_e). \tag{B.178}$$

Como se indicó en **4.2.3**, $\tilde{\vec{v}}_e\cdot\hat{p}_\gamma=\tilde{v}_e\mu$. Recordando que $\vec{v}_e=\vec{v}_b$ y $n_e=n_b$, aplicando transformada de Fourier y siguiendo la notación del apéndice **A.1**:

$$-\langle\tilde{c}_{p_ep_\gamma}p_\gamma\mu\rangle_{p_ep'_ep_\gamma p'_\gamma}=-\int\frac{d^3p_\gamma}{(2\pi)^3}p_\gamma\mu\left[-p_\gamma\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}n_b\sigma_T(\tilde{\Theta}_0-\tilde{\Theta}(\mu)+\tilde{v}_b\mu)\right], \tag{B.179}$$

$$-\langle\tilde{c}_{p_ep_\gamma}p_\gamma\mu\rangle_{p_ep'_ep_\gamma p'_\gamma}=\int\frac{d^3p_\gamma}{(2\pi)^3}p_\gamma^2\mu\left[\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}n_b\sigma_T(\tilde{\Theta}_0-\tilde{\Theta}(\mu)+\tilde{v}_b\mu)\right]. \tag{B.180}$$

Se sustituye la expresión anterior en (B.177):

$$\bar{\rho}_b\left(\frac{\partial\tilde{v}_b}{\partial t}+\frac{a'}{a}\tilde{v}_b+\frac{1}{a}ik\tilde{\Psi}\right)=\int\frac{d^3p_\gamma}{(2\pi)^3}p_\gamma^2\mu\left[\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}n_b\sigma_T(\tilde{\Theta}_0-\tilde{\Theta}(\mu)+\tilde{v}_b\mu)\right]. \tag{B.181}$$

Se aplica la integración $\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}$, de tal manera que se cubren todas las direcciones:

$$\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\left[\bar{\rho}_b\left(\frac{\partial\tilde{v}_b}{\partial t}+\frac{a'}{a}\tilde{v}_b+\frac{1}{a}ik\tilde{\Psi}\right)\right]=\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\left\{\int\frac{d^3p_\gamma}{(2\pi)^3}p_\gamma^2\mu\left[\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}n_b\sigma_T(\tilde{\Theta}_0-\tilde{\Theta}(\mu)+\tilde{v}_b\mu)\right]\right\}. \tag{B.182}$$

Sacando de la integral sobre μ los términos que no dependen de esta variable (Esto incluye a todos los términos del lado izquierdo de la igualdad) y realizando la integral del lado derecho usando coordenadas esféricas:

$$\bar{\rho}_b\left(\frac{\partial\tilde{v}_b}{\partial t}+\frac{a'}{a}\tilde{v}_b+\frac{1}{a}ik\tilde{\Psi}\right)\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}=n_b\sigma_T\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\int_0^\infty p_\gamma^4\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}dp_\gamma\left[\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu(\tilde{\Theta}_0-\tilde{\Theta}(\mu)+\tilde{v}_b\mu)\right]. \tag{B.183}$$

La integral sobre p_γ se hace a través de la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned} u&=p_\gamma^4, du=4p_\gamma^3dp_\gamma;\\ dv&=\frac{\partial\bar{f}_\gamma}{\partial p_\gamma}dp_\gamma, v=\bar{f}_\gamma. \end{aligned} \tag{B.184}$$

La ecuación (B.183) queda:

$$\begin{aligned} &\bar{\rho}_b\left(\frac{\partial\tilde{v}_b}{\partial t}+\frac{a'}{a}\tilde{v}_b+\frac{1}{a}ik\tilde{\Psi}\right)\left(\frac{\mu}{2}|_{-1}^{1}\right)=\\ &n_b\sigma_T\left[\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\left(\cancel{p_\gamma^4\bar{f}_\gamma|_0^\infty}-4\int_0^\infty p_\gamma^3\bar{f}_\gamma dp_\gamma\right)\left(\frac{\tilde{\Theta}_0}{2}\int_{-1}^{1}d\mu\mu-\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu\tilde{\Theta}(\mu)+\frac{\tilde{v}_b}{2}\int_{-1}^{1}\mu^2\right)\right], \end{aligned} \tag{B.185}$$

$$\begin{aligned} &\bar{\rho}_b\left(\frac{\partial\tilde{v}_b}{\partial t}+\frac{a'}{a}\tilde{v}_b+\frac{1}{a}ik\tilde{\Psi}\right)\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\\ &n_b\sigma_T\left[-4\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\int_0^\infty p_\gamma^2p_\gamma\bar{f}_\gamma dp_\gamma\left(\frac{\tilde{\Theta}_0}{2}\frac{\mu^2}{2}|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu\tilde{\Theta}(\mu)+\frac{\tilde{v}_b}{2}\frac{\mu^3}{3}|_{-1}^{1}\right)\right., \end{aligned} \tag{B.186}$$

$$\bar{\rho}_b\left(\frac{\partial\tilde{v}_b}{\partial t}+\frac{a'}{a}\tilde{v}_b+\frac{1}{a}ik\tilde{\Psi}\right)=$$
$$n_b\sigma_T\left\{-4\int\frac{d^3p_\gamma}{(2\pi)^3}p_\gamma\bar{f}_\gamma dp_\gamma\left\langle\left[\cancelto{0}{\frac{\tilde{\Theta}_0}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)}\right]-\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu\tilde{\Theta}(\mu)+\frac{\tilde{v}_b}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\right\rangle\right\}. \tag{B.187}$$

Puesto que para fotones $E_\gamma=p_\gamma$:

$$\bar{\rho}_b\left(\frac{\partial\tilde{v}_b}{\partial t}+\frac{a'}{a}\tilde{v}_b+\frac{1}{a}ik\tilde{\Psi}\right)=-4n_b\sigma_T\left\{\int\frac{d^3p_\gamma}{(2\pi)^3}E_\gamma\bar{f}_\gamma dp_\gamma\left[ii\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu\tilde{\Theta}(\mu)+\frac{\tilde{v}_b}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}. \tag{B.188}$$

Ya que $\int\frac{d^3p_\gamma}{(2\pi)^3}E_\gamma\bar{f}_\gamma dp_\gamma$ es simplemente la densidad de energía de los fotones a orden cero, es decir $\bar{\rho}_\gamma$, y mediante la definición de dipolo de (4.71):

$$\bar{\rho}_b\left(\frac{\partial\tilde{v}_b}{\partial t}+\frac{a'}{a}\tilde{v}_b+\frac{1}{a}ik\tilde{\Psi}\right)=-4n_b\sigma_T\bar{\rho}_\gamma\left(i\Theta_1+\frac{\tilde{v}_b}{3}\right). \tag{B.189}$$

Cambiando a tiempo conforme:

$$\bar{\rho}_b\left(\frac{1}{a}\dot{\tilde{v}}_b+\frac{1}{a}\frac{\dot{a}}{a}\tilde{v}_b+\frac{1}{a}ik\tilde{\Psi}\right)=-4n_b\sigma_T\bar{\rho}_\gamma\left(i\Theta_1+\frac{\tilde{v}_b}{3}\right). \tag{B.190}$$

Dado que $n_e=n_b$:

$$\dot{\tilde{v}}_b+\frac{\dot{a}}{a}\tilde{v}_b+ik\tilde{\Psi}=\frac{-4n_e\sigma_T a\bar{\rho}_\gamma}{3\bar{\rho}_b}(3i\Theta_1+\tilde{v}_b). \tag{B.191}$$

De (A.38):

$$\dot{\tilde{v}}_b+\frac{\dot{a}}{a}\tilde{v}_b+ik\tilde{\Psi}=\dot{\tau}\frac{4\bar{\rho}_\gamma}{3\bar{\rho}_b}(3i\Theta_1+\tilde{v}_b), \tag{B.192}$$

y la de relación fotón-barión (4.72), se llega a la segunda ecuación de Boltzmann para bariones (4.73):

$$\dot{\tilde{v}}_b+\frac{\dot{a}}{a}\tilde{v}_b+ik\tilde{\Psi}=\frac{\dot{\tau}}{R}(3i\Theta_1+\tilde{v}_b). \tag{B.193}$$

Appendix C

ECUACIONES DE OSCILACIONES ACÚSTICAS

Se multiplica (5.1) por $\frac{1}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)$, con $l > 2$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} + \frac{1}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)ik\mu\Theta + \frac{1}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)\dot{\Phi} \\
&+ \frac{1}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)ik\mu\Psi = \\
&- \dot{\tau}\left(\frac{1}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)\Theta_0 - \frac{1}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)\Theta + \frac{1}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)\mu v_b\right).
\end{aligned} \tag{C.1}$$

Sacando de la integral los términos que no dependen de la dirección μ:

$$\frac{\partial}{\eta}\left(\frac{1}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)\Theta\right)+\frac{ik}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)\mu\Theta+\frac{1}{2(-i)^l}\dot{\Phi}\cancelto{0}{\int_{-1}^{1}d\mu P_l(\mu)}$$
$$+\frac{ik\Psi}{2(-i)^l}\cancelto{0}{\int_{-1}^{1}d\mu P_l(\mu)\mu}=$$
$$-\dot{\tau}\left(\frac{1}{2(-i)^l}\Theta_0\cancelto{0}{\int_{-1}^{1}d\mu P_l(\mu)}-\frac{1}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)\Theta+\frac{1}{2(-i)^l}v_b\cancelto{0}{\int_{-1}^{1}d\mu P_l(\mu)\mu}\right). \tag{C.2}$$

Se aplicó la propiedad (A.30), puesto que $l > 2$, y la definición (5.5):

$$\frac{\partial\Theta_l}{\partial\eta}+\frac{ik}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)\mu\Theta=\dot{\tau}\Theta_l. \tag{C.3}$$

Mediante la propiedad (A.32):

$$\dot{\Theta}_l+\frac{ik}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\left(\frac{l}{2l+1}P_{l-1}(\mu)+\frac{l+1}{2l+1}P_{l+1}(\mu)\right)\Theta=\dot{\tau}\Theta_l, \tag{C.4}$$

$$\dot{\Theta}_l+\frac{(-i)^{-1}ik}{(-i)^{-1}(-i)^l}\frac{l}{2l+1}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_{l-1}(\mu)\Theta+\frac{-iik}{-i(-i)^l}\frac{l+1}{2l+1}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_{l+1}(\mu)\Theta=\dot{\tau}\Theta_l, \tag{C.5}$$

$$\dot{\Theta}_l-\frac{kl}{2l+1}\frac{1}{(-i)^{l-1}}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_{l-1}(\mu)\Theta+\frac{k(l+1)}{2l+1}\frac{1}{(-i)^{l+1}}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_{l+1}(\mu)\Theta=\dot{\tau}\Theta_l. \tag{C.6}$$

Aplicando la definición (5.5):

$$\dot{\Theta}_l-\frac{kl}{2l+1}\Theta_{l-1}+\frac{k(l+1)}{2l+1}\Theta_{l+1}=\dot{\tau}\Theta_l. \tag{C.7}$$

Ahora se comparan los términos en cuanto a sus órdenes de magnitud. El primer término del lado izquierdo es:

$$\frac{\partial \Theta_l}{\partial \eta} \sim \frac{\Theta_l}{\eta}, \tag{C.8}$$

mientras que el segundo es:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta}\Theta_l \sim \frac{\tau \Theta_l}{\eta} \tag{C.9}$$

Puesto que, como se indicó en el apéndice **A.3**, $\tau >> 1$:

$$\frac{\Theta_l}{\eta} << \frac{\tau \Theta_l}{\eta}, \tag{C.10}$$

lo que implica:

$$\frac{\partial \Theta_l}{\partial \eta} << \frac{\partial \tau}{\partial \eta}, \tag{C.11}$$

indicando que este término puede ser despreciado. Ahora bien, puesto que $\Theta_l < \Theta_{l+1}$ (Ver la introducción del capítulo **5**, para una justificación física de este argumento), se puede comparar sólo el segundo término e ignorar, por lo pronto, el tercero:

$$-\frac{kl}{2l+1}\Theta_{l-1} \sim \frac{\partial \tau}{\partial \eta}\Theta_l. \tag{C.12}$$

Como el interés es en cuanto a los órdenes de magnitud se puede ignorar también el signo:

$$\frac{kl}{2l+1}\Theta_{l-1} \sim \frac{\tau}{\eta}\Theta_l. \tag{C.13}$$

Así:

$$\Theta_l \sim \frac{l}{2l+1}\frac{k\eta}{\tau}\Theta_{l-1}. \tag{C.14}$$

Dado que, según se indica respectivamente en (A.47) y en el apéndice **A.3**, $k\eta << 1$ y $\tau >> 1$, entonces $\tau >> k\eta$, lo que a su vez implica que $\Theta_{l-1} << \Theta_l << \Theta_{l+1}$. La anterior afirmación significa que, por un lado, el tercer sumando del lado izquierdo de (C.7) es mucho menor que el segundo y puede ser también despreciado, por lo que no se hace necesario compararlo con el lado derecho de la igualdad, tal como se hizo con los dos primeros términos. Más general, puesto que el análisis se realiza

para $l > 2$, se tendrá que $\Theta_1 << \Theta_2 << \Theta_3$..., es decir que los términos a partir de Θ_2, pueden ser despreciados, quedando únicamente Θ_0 y Θ_1.

Ya que basta considerar sólo Θ_0 y Θ_1, se toma la ecuación (C.7) y se construye una nueva al multiplicarla por $\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} P_0(\mu)$. Se repite el tratamiento multiplicando por $\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} P_1(\mu)$. Con P_0 de (A.28):

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} \mu i k \Theta + \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} \dot{\Phi} + \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} i k \mu \Psi = \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} [-\dot{\tau}(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b)], \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} \Theta \right) + k \left(i \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} \mu \Theta \right) + \dot{\Phi} \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} + i k \Psi \cancelto{0}{\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} \mu} = \\ &- \dot{\tau} \Theta_0 \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} + \dot{\tau} \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} \Theta - \dot{\tau} v_b \cancelto{0}{\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} \mu} \end{aligned} \tag{C.16}$$

De (5.5) y al realizar las integrales sobre μ (cuyos resultados se han hecho para desarrollos anteriores por lo que se omitirán aquí):

$$\dot{\Theta}_0 + k\Theta_1 + \dot{\Phi} = -\cancel{\tau \Theta_0} + \cancel{\tau \Theta_0}, \tag{C.17}$$

se obtiene (5.9):

$$\dot{\Theta}_0 + k\Theta_1 = -\dot{\Phi}. \tag{C.18}$$

Ahora con $P_1(\mu)$ de (A.28):

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} i\mu \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} \mu i \mu i k \Theta + \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} i \mu \dot{\Phi} + \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} i \mu i k \mu \Psi = \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} i\mu [-\dot{\tau}(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b)], \tag{C.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(i\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu\Theta\right)-k\left(\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu^2\Theta\right)+i\dot{\Phi}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu-k\Psi\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu^2=$$
$$-\dot{\tau}\left(i\Theta_0\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu-i\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu\Theta+iv_b\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu^2\right). \tag{C.20}$$

Mediante la relación (A.29):

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(i\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu\Theta\right)-k\left[(-1)\left(\frac{1}{(-i)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\frac{2}{3}P_2\Theta\right)+\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\frac{1}{3}\Theta\right]+\dot{\Phi}\cancelto{0}{\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu}-k\Psi\frac{\mu^3}{6}|_{-1}^{1}=$$
$$-\dot{\tau}\left(i\Theta_0\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu-i\cancelto{0}{\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mu\Theta}+iv_b\frac{\mu^3}{6}|_{-1}^{1}\right). \tag{C.21}$$

De (5.5):

$$\dot{\Theta}_1+\frac{2k\Theta_2}{3}-\frac{k\Theta_0}{3}-\frac{k\Psi}{3}=-\dot{\tau}\left(-\Theta_1+\frac{iv_b}{3}\right). \tag{C.22}$$

Como se ha indicado durante el actual desarrollo, el término Θ_2 se puede despreciar. Reorganizando:

$$\dot{\Theta}_1-\frac{k\Theta_0}{3}=\frac{k\Psi}{3}+\dot{\tau}\left(\Theta_1-\frac{iv_b}{3}\right). \tag{C.23}$$

A continuación, se despeja v_b de (5.3):

$$v_b=-3i\Theta_1+\frac{R}{\dot{\tau}}\left(\dot{v}_b+\frac{\dot{a}}{a}v_b+ik\Psi\right). \tag{C.24}$$

Aproximando la derivada como orden de magnitud, $\frac{\partial}{\partial\eta}\sim\frac{1}{\eta}$:

$$v_b\approx-3i\Theta_1+R\left(\frac{\cancel{\eta}}{\tau}\frac{v_b}{\cancel{\eta}}+\frac{\cancel{\eta}\cancel{a}}{\tau}\frac{1}{\cancel{\eta}\cancel{a}}+i\frac{k\eta}{\tau}\Psi\right). \tag{C.25}$$

Considerando modos superhorizonte, $k\eta << 1$ (A.47), se puede hacer la aproximación:

$$v_b \approx -3i\Theta_1 + R\left(\frac{v_b}{\tau} + \frac{1}{\tau} + i\frac{\Psi}{\tau}\right). \tag{C.26}$$

Se puede hacer una mayor aproximación para v_b puesto que $\tau >> 1$ y $\Psi << 1$. Además, para la época de interés, $R > 1$ (**5.1**), por lo tanto $\frac{Rv_b}{\tau} << v_b$, por lo que se puede ignorar el segundo sumando del miembro derecho de (C.26), quedando así:

$$v_b \approx -3i\Theta_1, \tag{C.27}$$

resultado que se reemplaza en el miembro derecho de (C.24):

$$v_b = -3i\Theta_1 + \frac{R}{\dot{\tau}}\left(-3i\dot{\Theta}_1 - 3i\frac{\dot{a}}{a}\Theta_1 + ik\Psi\right). \tag{C.28}$$

Se reemplaza (C.28) en (C.23):

$$\dot{\Theta}_1 - \frac{k\Theta_0}{3} = \frac{k\Psi}{3} + \dot{\tau}\Theta_1 - \frac{i\dot{\tau}}{3}\left[-3i\Theta_1 + \frac{R}{\dot{\tau}}\left(-3i\dot{\Theta}_1 - 3i\frac{\dot{a}}{a}\Theta_1 + ik\Psi\right)\right], \tag{C.29}$$

$$\dot{\Theta}_1 - \frac{k\Theta_0}{3} = \frac{k\Psi}{3} + \cancel{\dot{\tau}\Theta_1} - \cancel{\dot{\tau}\Theta_1} - R\dot{\Theta}_1 - R\frac{\dot{a}}{a}\Theta_1 + R\frac{k\Psi}{3}, \tag{C.30}$$

$$(1+R)\dot{\Theta}_1 + \frac{\dot{a}}{a}R\Theta_1 - \frac{k\Theta_0}{3} = (1+R)\frac{k\Psi}{3}, \tag{C.31}$$

$$\dot{\Theta}_1 + \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\Theta_1 - \frac{k}{3(1+R)}\Theta_0 = \frac{k\Psi}{3}, \tag{C.32}$$

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{k\Psi}{3} - \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\Theta_1 + \frac{k}{3(1+R)}\Theta_0. \tag{C.33}$$

Se deriva (C.18) con respecto a η:

$$\ddot{\Theta}_0 + k\dot{\Theta}_1 = -\ddot{\Phi}. \tag{C.34}$$

Se reemplaza (C.33) en (C.34):

$$\ddot{\Theta}_0 + k\left(\frac{k\Psi}{3} - \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\Theta_1 + \frac{k}{3(1+R)}\Theta_0\right) = -\ddot{\Phi}, \tag{C.35}$$

$$\ddot{\Theta}_0 + \frac{k^2\Psi}{3} - \frac{\dot{a}}{a}\frac{kR}{1+R}\Theta_1 + \frac{k^2}{3(1+R)}\Theta_0 = -\ddot{\Phi}. \tag{C.36}$$

Se despeja Θ_1 de (C.18):

$$\Theta_1 = -\frac{\dot{\Phi} + \dot{\Theta}_0}{k} \tag{C.37}$$

y se reemplaza en (C.36):

$$\ddot{\Theta}_0 + \frac{k^2\Psi}{3} - \frac{\dot{a}}{a}\frac{kR}{1+R}\left(-\frac{\dot{\Phi} + \dot{\Theta}_0}{k}\right) + \frac{k^2}{3(1+R)}\Theta_0 = -\ddot{\Phi}, \tag{C.38}$$

$$\ddot{\Theta}_0 + \frac{k^2\Psi}{3} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\Theta}_0 + \frac{k^2}{3(1+R)}\Theta_0 = -\ddot{\Phi}. \tag{C.39}$$

Con la definición (5.16) para c_s:

$$\ddot{\Theta}_0 + \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\Theta}_0 + k^2c_s^2\Theta_0 = -\frac{k^2}{3}\Psi - \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\Phi} - \ddot{\Phi}. \tag{C.40}$$

El siguiente paso consiste en usar la aproximación (C.27) en (5.2):

$$\dot{\delta}_b + ik(-3i\Theta_1) + 3\dot{\Phi} = 0, \tag{C.41}$$

$$\dot{\delta}_b + 3k\Theta_1 + 3\dot{\Phi} = 0. \tag{C.42}$$

Usando (C.37) en (C.42):

$$\dot{\delta}_b + 3\cancel{k}\left(-\frac{\dot{\Phi} + \dot{\Theta}_0}{\cancel{k}}\right) + 3\dot{\Phi} = 0, \tag{C.43}$$

$$\dot{\delta}_b - \cancel{3\dot{\Phi}} - 3\dot{\Theta}_0 + \cancel{3\dot{\Phi}} = 0, \tag{C.44}$$

$$\dot{\delta}_b = 3\dot{\Theta}_0, \tag{C.45}$$

$$\delta_b = 3\Theta_0 + cte. \tag{C.46}$$

Recordando que $\delta_b = \frac{\delta\bar{\rho}_b}{\bar{\rho}_b}$ y $\Theta = \frac{\delta\bar{T}}{\bar{T}}$. De (2.18), aplicando diferenciales:

$$\delta_b = \frac{\delta\bar{\rho}_b}{\bar{\rho}_b} \propto \frac{3\cancel{\bar{T}^2}}{\bar{T}^{\cancel{3}}}\delta\bar{T} \propto \frac{\delta\bar{T}}{\bar{T}} = \Theta. \tag{C.47}$$

Puesto que $\delta_b \propto \Theta$, se escribe:

$$\Theta = C\delta_b. \tag{C.48}$$

En (5.5), para el monopolo:

$$\Theta_0 = \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} C\delta_b. \tag{C.49}$$

Así, $\delta_b = 0 \longrightarrow \Theta_0 = 0$, lo que indica que la constante en (C.46) es a su vez cero y, por lo tanto, $\delta_b = 3\Theta_0$. Despejando Θ_0 se obtiene:

$$\Theta_0 = \frac{\delta_b}{3}, \tag{C.50}$$

que se reemplaza en (C.40):

$$\frac{\ddot{\delta}_b}{3} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\frac{\dot{\delta}_b}{3} + k^2 c_s^2 \frac{\delta_b}{3} = -\frac{k^2}{3}\Psi - \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\Phi} - \ddot{\Phi}, \tag{C.51}$$

$$\ddot{\delta}_b + \frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\delta}_b + k^2 c_s^2 \delta_b = -k^2\Psi - 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{R}{1+R}\dot{\Phi} - 3\ddot{\Phi}. \tag{C.52}$$

Se ha llegado a la ecuación de las BAO (5.21). Combinando (2.12), (2.17) y (4.72):

$$R \propto \frac{a^{-3}}{a^{-4}} \propto a, \tag{C.53}$$

$$R = Ka, \tag{C.54}$$

para alguna constante K, que al despejarla de (C.54) resulta:

$$K = \frac{R}{a}. \tag{C.55}$$

Derivando (C.54) con respecto al tiempo conforme:

$$\dot{R} = K\dot{a}. \tag{C.56}$$

Con K de (C.55):

$$\dot{R} = \frac{\dot{a}}{a}R. \tag{C.57}$$

Reemplazando el último resultado en lo segundos miembros de las ecuaciones (C.40) y (C.52), permite obtener (5.22) y (5.23):

$$\ddot{\Theta}_0 + \frac{\dot{R}}{1+R}\dot{\Theta}_0 + k^2 c_s^2 \Theta_0 = -\frac{k^2}{3}\Psi - \frac{\dot{R}}{1+R}\dot{\Phi} - \ddot{\Phi}, \tag{C.58}$$

$$\ddot{\delta}_b + \frac{\dot{R}}{1+R}\dot{\delta}_b + k^2 c_s^2 \delta_b = -k^2\Psi - 3\frac{\dot{R}}{1+R}\dot{\Phi} - 3\ddot{\Phi}. \tag{C.59}$$

Appendix D

GRÁFICAS COMPLEMENTARIAS

En este apéndice se muestran las gráficas de la velocidad de los bariones y de los potenciales gravitacionales, como complemento a las gráficas del capítulo **6**.

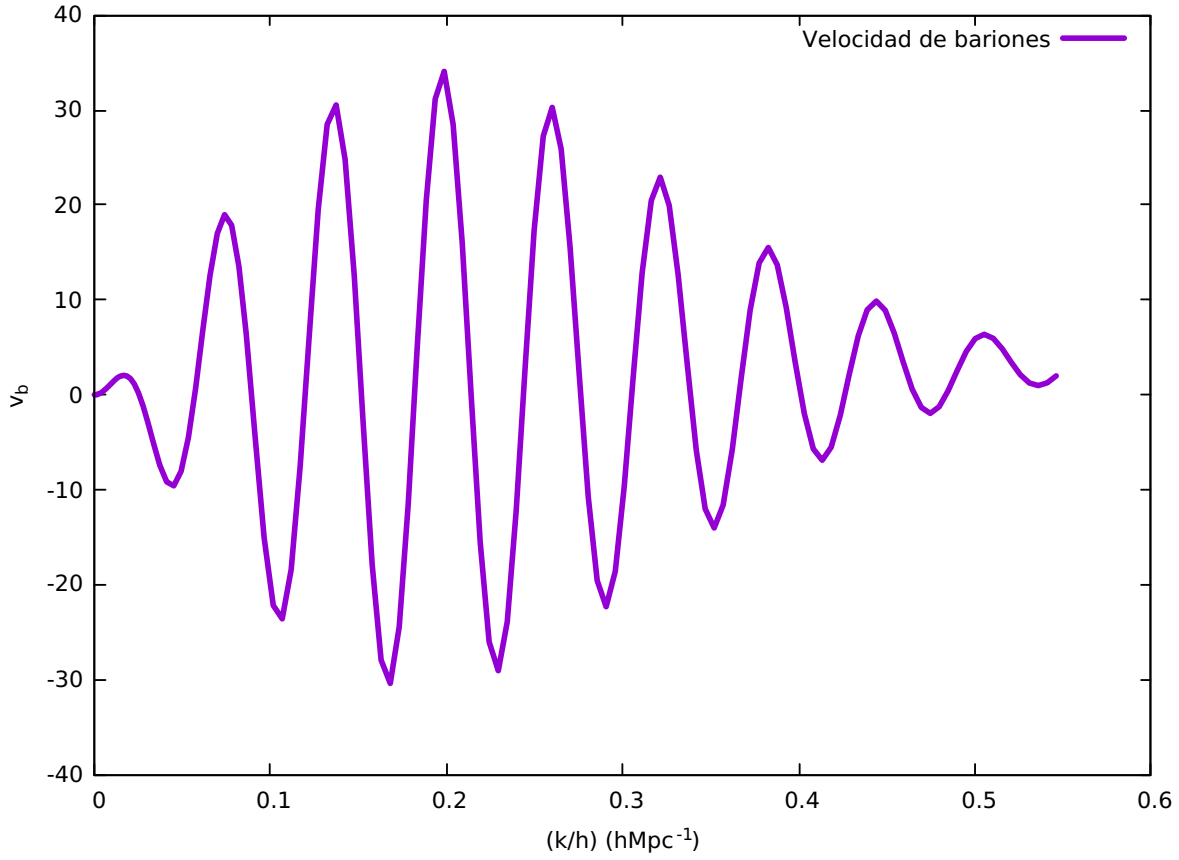

Figura D.1: Velocidad de bariones

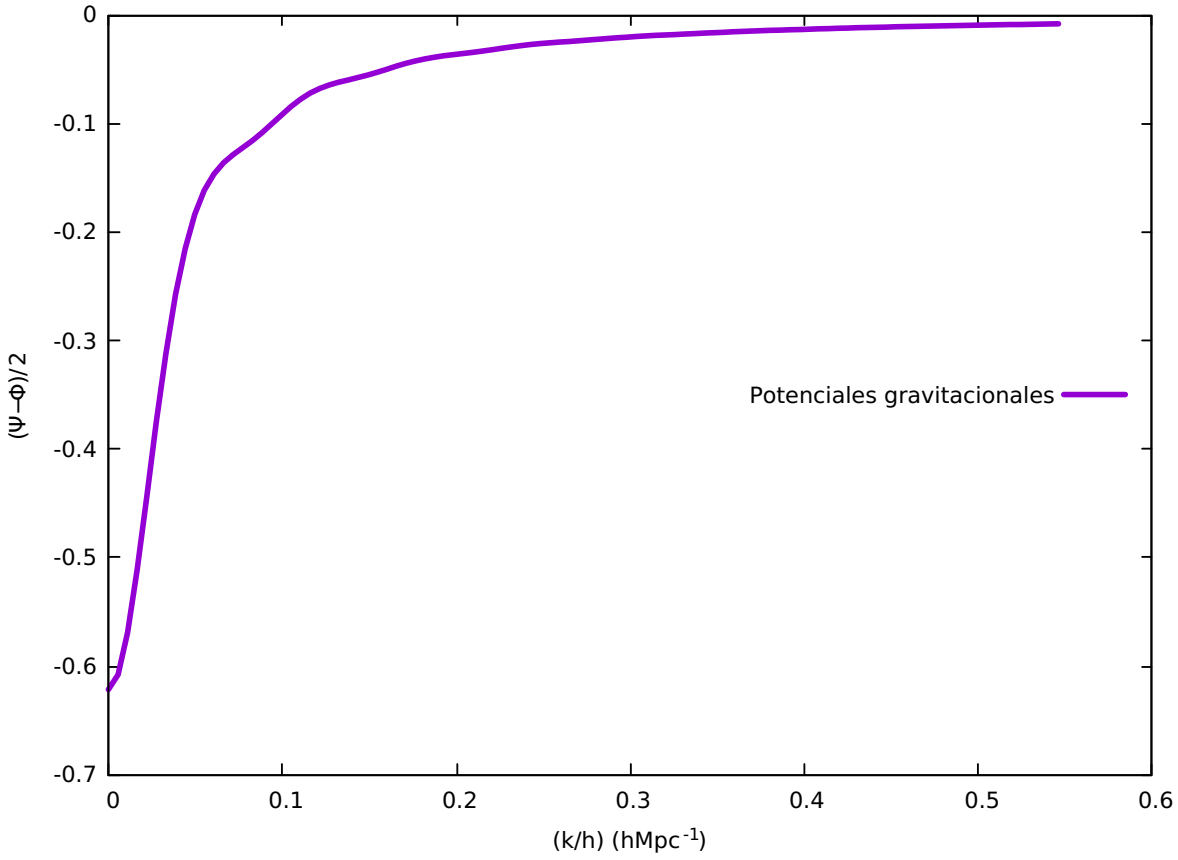

Figura D.2: Potenciales gravitacionales