UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Construcción de polígonos regulares

Ricardo Ramírez Chaparro

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
San Andrés, Isla, Colombia
2011

Construcción de polígonos regulares

Ricardo Ramírez Chaparro

Trabajo de Grado

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director

Profesor José Reinaldo Montañez Puentes

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

San Andrés, Isla, Colombia

2011

A mis madre, esposa e instituciones que me colaboraron.

Agradecimientos

Doy los agradecimientos a las personas e instituciones que me colaboraron para el desarrollo del presente trabajo de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

José Reinaldo Montañez, Profesor de la Universidad Nacional de Colombia y director de este trabajo.

A mi esposa, Ari Esther Bustamante Olmos, por su apoyo y colaboración en la digitación del texto.

A Aury Guerrero Bowie, Rectora del Colegio Luis Amigó, por el espacio que me brindó para realizar el trabajo, el uso del internet de la institución y los permisos requeridos.

Resumen

En este trabajo se presenta una revisión del tema “Construcciones de polígonos regulares en la educación básica”. Se señalan las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje de la geometría, atendiendo a factores de tipo epistemológico y cognitivo y tomando estos aspectos como base, se presenta una propuesta didáctica para su aprendizaje.

Frases y Palabras clave: Polígono regular, construcciones con regla y compás.

Abstract

In this work presents a review of the topic “Construction of regular polygons in basic education.” Identifies the difficulties faced by students in the learning of geometry, taking into account factors such epistemological and cognitive and taking these aspect as base, presents a didactic proposal for learning.

Keywords and phrases: regular polygon, constructions with ruler and compass

Contenido

Lista de figuras

Lista de Símbolos y abreviaturas

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término
$\frac{360°}{n}$.	Ángulo central
A	Área
a	Apotema
$\overline{AB}$	Segmento
AB	se llama la longitud del segmento $\overline{AB}$
$\overrightarrow{AB}$	El rayo
B	base mayor
b	base menor
C	Compás
$C2$	Circunferencia 2
$\widehat{\mathrm{CD}}$	Arco CD
D	Diámetro
F_n	Número de Fermat
h	altura
i	parte imaginaria
l	Lado
L	Longitud
m ∠ ABC	medida del ángulo ABC
n – 2	el números de triángulos que resulta
(n – 2)180°	La suma de la medida de los ángulos interiores de un polígono de n lados
n – 3	Total de diagonales trazadas desde un vértice
O	centro de la circunferencia
P	Perímetro
p	número primo
p_i	primos de Fermat

Símbolo	Término
$\overleftrightarrow{PC}$ o $\overleftrightarrow{L}$	Recta PC o Recta L
p_{n+1}	puntos
r	radio de la circunferencia
R	Regla
S_n	superficie n
T	Transportador
u	Modulo
Z	número complejo
$\mid z \mid$	Argumento
$\angle$ BAC o $\hat{A}$ ángulo	Ángulo BAC o ángulo A
°	grado
$\cong$	Congruente
$\sim$	Semejante
$\parallel$	Paralelo
$\perp$	Perpendicular
ΔABC	Triángulo ABC

Operadores relacionales

Símbolo	Término
$=$	igual
$<$	Menor que
$>$	Mayor que
$\leq$	Menor o igual a
$\geq$	Mayor o igual a
$\neq$	Diferente
$\in$	Pertenece a

Operadores comunes

Símbolo	Término
+	más
_	Menos
*	Multiplicación
/	división

Símbolo	Término
$\sqrt{\ }$	Raíz cuadrada
$\pm$	Más menos
$\forall n$	Para todo n

Símbolos tipo letra

Símbolo	Término
$\mathbb{C}$	Números complejos
$\mathbb{Q}$	Números racionales
$\mathbb{R}$	Números reales

Letras griegas

Símbolo	Término
π	Pi
θ, ϕ	el ángulo polar

Subíndices

Subíndice	Término
I, n	I, n

Superíndices

Superíndice	Término
n, r, t, m	Exponente, potencia

Abreviaturas

Abreviatura	Término
ALA	ángulo, lado, ángulo
Cos	Coseno
LAL	Lado, ángulo, lado
LLL	Lado, lado, lado
Sen	Seno

Introducción

Considero que la temática “Construcción de polígonos regulares” involucra para su enseñanza conceptos relacionados con la congruencia y la semejanza y por ende buena parte de los conceptos de la geometría elemental. Ahora bien, los estudiantes no reconocen propiedades de los polígonos regulares ni sus elementos involucrados en su construcción, estas dificultades tienen su origen en la falta de fundamentación en geometría que están asociadas con obstáculos de tipo epistemológico, cognitivo y metodológicos.

La problemática anterior plantea la necesidad de buscar otro tipo de acercamientos de tipo metodológico y didáctico. Es así como en este trabajo, se plantean actividades para que los estudiantes se motiven en el estudio de la geometría, verifiquen que esta se encuentra reflejada en objetos de la vida real y que observen que de cierta manera modela nuestro universo. Pero además, se pretende que las actividades sugeridas desarrollen en los estudiantes la creatividad, la intuición, la capacidad crítica, la capacidad de análisis y la capacidad de síntesis. Las actividades consideran los conceptos necesarios para el aprendizaje del concepto de polígono regular y sus construcciones con regla y compás, la importancia de este hecho radica en que esta es una forma de argumentar. Con el diseño de las actividades se propone una metodología activa, centrada en el estudiante como protagonista de la actividad de enseñanza-aprendizaje. Finalmente, con esta idea en mente, el presente trabajo se propone orientar la enseñanza de la geometría en los niveles básicos.

El trabajo plantea la construcción de polígonos regulares y el uso de la regla y el compás como una propuesta para solucionar la dificultad de aprendizaje que presentan los estudiantes de sexto grado de la institución educativa Bolivariano, relacionados con la dificultad en reconocer, identificar, características, construcción y solución de problemas relacionados con los polígonos regulares. Estas dificultades las encontramos cuando se trabaja la trigonometría y el desarrollo del cálculo a nivel superior.

Los principales objetivos de este trabajo se traducen en brindar al estudiante una presentación clara y lógica de los conceptos y principios básicos de la geometría para que pueda solucionar problemas relacionados con la construcción de polígonos regulares y en general con la geometría. La propuesta está diseñada para que el estudiante sea el protagonista de su propio aprendizaje y romper con el tipo de educación tradicional. Esta propuesta consiste en que el estudiante deje de ser un sujeto pasivo en su proceso de enseñanza – aprendizaje a ser un sujeto activo en dicho proceso. Se desarrollarán talleres constituidos por actividades, donde el estudiante se fundamente y ponga en práctica los conceptos previos y básicos de la geometría, se fundamente y deduzca las características y propiedades de los polígonos regulares, se fundamente y construya con regla y compás rectas paralelas, perpendiculares, ángulos, copiar ángulos, bisectriz de un ángulo, mediatriz de un segmento, polígonos construibles con estos instrumentos, etc. De tal manera que él mismo vaya construyendo significativamente su propio aprendizaje.

Lo nuevo para esta propuesta es que el desarrollo de las actividades en cada taller será por parte del estudiante y el docente será su guía u orientador donde presente dificultades, lo que se quiere es que el docente intervenga lo menos posible, por consiguiente diremos que una metodología a seguir sería donde el estudiante pueda explorar, investigar y descubrir, construir, etc.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos los cuales se describen a continuación.

En el primer capítulo se identifica el problema de aprendizaje relacionado con la construcción de polígonos regulares, se justifica por qué los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de la geometría, en particular porqué los bajos niveles de apropiación y comprensión de los conceptos básicos de esta. Se traza un objetivo general y varios objetivos específicos que orientan la solución del problema de aprendizaje ya identificado, los cuales nos guiarán, entre otros, a fundamentar a los estudiantes en los conceptos básicos, en la teoría que sustenta la construcción de polígonos regulares y a diseñar actividades para los estudiantes, que les permitan apropiarse de los conceptos básicos y la construcción de polígonos regulares.

En el segundo capítulo se hace una síntesis de los elementos fundamentales sobre los conceptos básicos y el sustento matemático para el estudio de la construcción de polígonos regulares con regla y compás; se estudian los conceptos (ver apéndice I), desde las ideas intuitivas de punto, recta y plano hasta aquellos conceptos más elaborados que giran alrededor de la noción de polígono y que justifican cuales polígonos son construibles con regla y compás. Se presenta el sustento matemático para los polígonos que se pueden construir con regla y compás. Hay que tener en cuenta que los elementos como la regla y el compás son elementos ideales y que no todas las construcciones son factibles de realizar usando solamente regla y compás. En este punto, vale la pena mencionar, los tres problemas famosos de la antigüedad, a saber, la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Ahora bien, para el caso que nos ocupa aquellos polígonos regulares que se pueden construir con regla y compás tienen una condición especial sobre su número de lados y que tiene que ver con los números de Fermat, según el matemático Gauss en 1796 de lo cual se hablará más adelante. Teóricamente, existen polígonos regulares de cualquier número de lados y en este capítulo también se presenta la construcción de algunos de ellos, entre otros el cuadrado, el hexágono y el octágono. La idea central para construir un polígono regular de n lados, es partir de una circunferencia y en ella dibujar ángulos centrales de 360°/n. Además, en este capítulo, se presentan algunas observaciones sobre la construcción de polígonos regulares, a partir de otros, realizando bisecciones del arco de la circunferencia comprendida entre dos vértices; como construcciones especiales se presenta la construcción de una rosa de cuatro pétalos. Como lo acabamos de mencionar, los números de Fermat, juegan un papel importante en la construcción de polígonos regulares, estos son de la forma $2^{2^n}+1$. Para que un polígono regular sea construible con regla y compás, el número de lados debe ser de la forma $n = 2^r * p_1 * p_2 * \ldots * p_k$ donde p_i es un número de Fermat. Ahora, si polígonos regulares de a lados y b lados son construibles con regla y compás y a y b son primos relativos, entonces el polígono regular de ab lados también es construible. En este capítulo se hace, además, un estudio que relaciona a los números complejos con las construcciones de polígonos regulares, para ello se hace uso del teorema de DeMoivre, en especial con las raíces complejas de la unidad y así demostrar porque el polígono de 7 o de 9 lados no se puede construir con regla y compás, entre otros. Por último tenemos una mirada a la teoría de cuerpos, la que nos da una respuesta a la imposibilidad de la solución de los tres problemas clásicos de las construcciones geométricas con regla y compás como son la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Finalmente se podrá observar que si a y b son números construibles, también son construibles los números a + b, a – b, ab, a/b y $\sqrt{a}$, llegándose a establecer, de manera un poco informal, que los números construibles con regla y compás tienen estructura de campo.

Además se describe como se realizan ciertas construcciones, como son: construir la mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, la paralela a una recta dada, división de un segmento en n partes iguales, la perpendicular a una recta dada, construcción de polígonos regulares como: el triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono, y el hexágono, por último se trata de los intentos de realizar construcciones únicamente utilizando sólo regla o sólo compás y el porqué de su imposibilidad de otros como el heptágono regular, etc.

En el tercer capítulo se hace una descripción de los aspectos históricos y epistemológicos donde se encuentran temas como los inicios de la geometría, de cómo el hombre fue ideando conceptos de formas, figuras, cuerpos, líneas, los que dieron origen a la parte matemática que designamos con el nombre de geometría, lo cual nace en forma práctica a orillas del río Nilo, en el antiguo Egipto. Para los antiguos griegos, el tratamiento que le dieron a la matemática, fue dividirla en cuatro campos que son: la teoría de los números, la geometría métrica, la teoría del razonamiento, y la geometría no métrica centrada en las construcciones geométricas con regla y compás, en el cual hicieron más aportes. En cuanto a las primeras construcciones de polígonos con regla y compás, podemos decir que existieron considerables intentos para la construcción de figuras con regla y compás entre ellas se encuentra: Abul Wefa (Persa del siglo X), Lorenzo Mascherani. En el siglo XIX el francés Poncelet, el suizo Jacob Steiner, De igual manera en este capítulo se describen los problemas griegos de la construcción con regla y compás como son la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo, con sus respectivas justificaciones matemáticas, porque no se pueden construir con dichos instrumentos.

En cuarto capítulo se hace una descripción de la propuesta didáctica la cual presenta las actividades para el aprendizaje de los conceptos necesarios para superar las dificultades en la construcción de polígonos regulares con regla y compás, se tiene en cuenta el modelo de Van Hiele que comprende cinco niveles de comprensión relacionados con los procesos del pensamiento, los cuales son la Visualización, Análisis, Deducción Informal, Deducción Formal, Rigor. Es de anotar que, puesto que la propuesta está dirigida al grado 6°, solo se consideraran los dos primeros niveles que son la Visualización (percibe los objetos en su totalidad y como unidades), Análisis (Percibe los objetos como formados por parte y dotados de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas).

La propuesta didáctica para la construcción de polígonos regulares, cuenta con el diseño de actividades. Se propone una metodología activa, centrada en el estudiante como protagonista de la actividad de enseñanza-aprendizaje, por lo tanto los talleres están orientados en temas y contenidos en donde los estudiantes presentan dificultades, y así favorezcan su aprendizaje. Es de anotar que estos talleres son una alternativa para la enseñanza de los temas con dificultades y ayudan a que el estudiante se fundamente y ponga en práctica los conceptos previos y básicos de la geometría, deduzca las características y propiedades de los polígonos regulares, construya con regla y compás rectas paralelas, perpendiculares, ángulos, copiar ángulos, bisectriz de un ángulo, mediatriz de un segmento, polígonos construibles con estos instrumentos, etc.; de tal manera que él mismo vaya construyendo significativamente su propio aprendizaje.

También encontrarán en los talleres la construcción de figuras utilizando otros recursos y materiales como son palillos y el geoplano, así como también preguntas sobre posibilidades de construcción de algunas figuras.

La propuesta está diseñada para que en un primer paso se fundamenta al estudiante en los elementos y conceptos necesarios para poder enfrentar la construcción de polígonos regulares con regla y compás, ya que dichas construcciones necesitan de muchos elementos previos de la geometría. En algunos talleres se profundiza en sus contenidos con el objetivo de que el estudiante no le vayan quedando vacios teóricos en geometría, todo esto crea confianza en el estudiante para su aprendizaje y para que desarrolle su pensamiento geométrico.

En las construcciones con regla y compás se debe visualizar que a partir de varios trazos precisos se pretende combinar la mayor cantidad de conceptos geométricos y únicamente se permite utilizar dos sencillos instrumentos. Para la construcción de figuras regulares, es indispensable que el estudiante trabaje con una geometría activa. A través de los talleres el alumno irá elaborando su conocimiento en geometría a partir de actividades sobre objetos reales y concretos.

1. Construcción de polígonos regulares

1.1 Identificación del problema

Los estudiantes no reconocen propiedades de los polígonos regulares ni sus elementos involucrados en su construcción.

1.2 Justificación

Teniendo en cuenta los estándares de matemáticas para sexto y séptimo grado el estudiante debe ser capaz de "Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas", además los objetivos generales para sexto grado en el pensamiento espacial y sistemas geométricos el estudiante debe describir, dibujar y analizar figuras en dos dimensiones, identificar las características de los diferentes elementos de un polígono, identificar y describir relaciones entre diversas formas geométricas , aplicar diferentes transformaciones geométricas sobre una figura. Si el estudiante no tiene claro los conceptos básicos de la geometría euclidiana no tendrá la habilidad para construir figuras planas y alcanzar los objetivos.

Al respecto, la inquietud que surge es:

¿Aportan las actividades de construcción con regla y compás a la comprensión de la construcción de Polígonos Regulares?

Generalmente los estudiantes presentan dificultad en reconocer, identificar, características, propiedades, construcción y solución de problemas relacionados con los polígonos regulares, tal vez por los bajos niveles de apropiación y comprensión de los conceptos básicos de la geometría euclidiana como son las nociones de perpendicularidad y paralelismo, ángulos, bisectriz, mediatriz, clasificación de polígonos, relaciones, propiedades de los cuadriláteros y sus construcciones. Esto se suma al hecho de que en las evaluaciones predomina y se manifiesta una enseñanza memorística, en la que se aplican formulas o algoritmos.

1.3 Objetivo general

Profundizar en los conceptos básicos de geometría plana como fundamento para diseñar actividades que potencien a los estudiantes niños y niñas de sexto grado en la construcción de polígonos regulares usando sus propiedades y relaciones.

1.3.1 Objetivos específicos

- Estudiar los conceptos básicos de la geometría elemental necesarios para entender la construcción de los polígonos regulares.
- Estudiar la teoría que sustenta la construcción de los polígonos regulares con regla y compás.
- Revisar los estándares básicos relacionados con el pensamiento geométrico de los grados sexto y séptimo.
- Diseñar actividades relacionadas con los conceptos básicos, entre otros, segmentos, ángulos y triángulos involucrados en la construcción de polígonos regulares.
- Diseñar actividades relacionadas con el reconocimiento, caracterización y construcción de polígonos regulares.

2. Marco de referencia

2.1 Aspectos conceptuales

Para la elaboración de la propuesta es necesario la identificación de elementos fundamentales para la construcción de polígonos regulares y su sustento matemático, aspectos que se describen en esta sección.

Teóricamente, todo polígono regular puede considerarse inscrito en una circunferencia. En efecto, para construir un polígono regular de n lados basta, dibujar una circunferencia y en ella dibujar ángulos centrales de medida $\frac{360°}{n}$.

Ahora bien, es de anotar que para entender la definición y construcción de un polígono regular, suponemos que se deben conocer previamente conceptos y resultados relacionados con los segmentos, las rectas, los rayos, los ángulos, la medida angular. Ahora, para profundizar en el estudio de los polígonos se requiere las nociones de triángulo, apotema y congruencia de triángulos. La profundización a que se hace referencia considera, entre otros, por ejemplo las diagonales de un polígono, la suma de sus ángulos interiores, su perímetro y su área.

Consideramos que la enseñanza de la geometría en niveles básicos, en particular para el caso que nos ocupa, el nivel 6, no debe ser de carácter formal. Así que al respecto, suponemos como ideas intuitivas, el punto, la recta y el plano, ideas motivadas por los objetos físicos de nuestro entorno. En particular en los textos de Euclides Punto es lo que no tiene partes. Una Línea, para nosotros una recta, es aquella que tiene longitud y no tiene anchura. Una superficie, para nosotros un plano, es lo que tiene ancho y largo solamente, así que estas no tienen espesor; una superficie plana contiene a todas sus rectas.

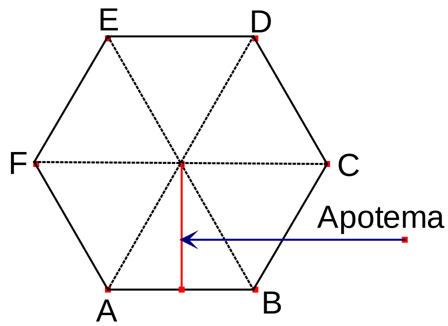
Los siguientes conceptos como segmentos, rayos, ángulos, la longitud de un segmento, la amplitud angular etc., en general, lo señalados arriba, deben tener carácter formal, pero también en lo posible, deben ser motivados por experiencias y modelos cotidianos.

Señalamos un breve recuento de algún aspecto de notación y definiciones de algunos conceptos en cuestión que los encontraremos en el apéndice I.

Polígono: un polígono es una figura formada por la reunión de varios segmentos de manera que no se crucen y solamente se toquen en los extremos. Podemos dar una definición más precisa de la siguiente manera: Sean P_1, P_2, …, P_n, una sucesión de n puntos distintos de un plano con $n \geq 3$. Supongamos que los n segmentos $\overline{P1\ P2}$, $\overline{P2\ P3}$, . … , $\overline{Pn - 1\ Pn}$, $\overline{Pn\ P1}$ tienen las siguientes propiedades: (1) Ningún par de segmentos se intersecan, salvo en sus puntos extremos. (2) Ningún par de segmentos con un extremo común son colineales. Entonces la reunión de los n segmentos se llama Polígono. Los puntos P_1, P_2, …, P_n son los vértices del polígono y los segmentos $\overline{P1\ P2}$, $\overline{P2\ P3}$, . … , $\overline{Pn - 1\ Pn}$, $\overline{Pn\ P1}$ son los lados. Los ángulos del polígono son el $\angle P_nP_1P_2$, el $\angle P_1P_2P_3$, y así sucesivamente. Según el número de lados los polígonos se pueden clasificar en triángulo (tres lados), cuadrado (cuatro lados) pentágono (cinco lados) hexágono (seis lados), heptágono (siete lados) octágono (ocho lados), n – ágono n lados), si un polígono tiene sus ángulos internos congruentes, es equiángulo y si sus lados son congruentes, es equilátero, el segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos de un polígono se llama **Diagonal**. En un polígono de n lados el número total de diagonales trazadas desde un vértice es n – 3, el números de triángulos que resulta es n – 2, y la suma de la medida de los ángulos interiores de un polígono de n lados es (n – 2)180°.

Polígono regular: es aquel que es equilátero y equiángulo, el ángulo central del polígono regular es el formado por dos vértices consecutivos del polígono y el centro del polígono, (Como todo polígono regular puede inscribirse en una circunferencia, al centro de la circunferencia en la cual se inscribe un polígono regular se llama centro del polígono o), al segmento trazado perpendicularmente desde el centro del polígono a cada uno de sus lados se llama **apotema** y su longitud corresponde a la altura de cada uno de los triángulos en que puede descomponerse el polígono regular. (Ver figura 2-1).

Figura 2-1: Polígono regular.



Perímetro: El perímetro de un polígono es la suma de la medida de sus lados.

2.1.1 Acerca de las construcciones con regla y compás

Las construcciones con regla y compás las podemos considerar, quizás de manera un poco exagerada, como un sistema axiomático con vida propia, esto es, inicialmente disponemos de los conceptos y resultados de la geometría elemental, ahora en el caso que nos ocupa, nuestros postulados fundamentales son "tenemos regla sin marcas y tenemos compás" y nuestros teoremas van a ser las construcciones. En este punto es de resaltar, que debe tenerse claro que los objetos de los que disponemos son objetos ideales.

Con esta idea en mente, con la regla solo podemos trazar segmentos y rectas y con el compás podemos trazar circunferencias. Así, una construcción con regla y compás consiste de un número finito de construcciones de este tipo.

Es de anotar que la regla y el compás son objetos ideales, que naturalmente materializamos en aula de clase. Con objetos ideales se quiere decir que son conceptos matemáticos abstractos, como la raíz cuadrada de un número, no son instrumentos físicos. Representan la perfección de la mente y deben utilizarse para crear construcciones ideales, las cuales son tan concluyentes como el álgebra. En el mundo real, en la hoja de papel, los puntos son manchas bidimensionales y los segmentos son franjas de cierto ancho; pero en la mente son manifestaciones plenas de precisión y belleza. Este es el eje sobre el que giran las construcciones; la sutil distinción entre el mayor o menor grado de precisión aproximado y la exactitud del pensamiento.

Es importante anotar que una vez se ha logrado hacer la construcción propuesta, se debe verificar, mediante una demostración matemática, que dicha construcción resuelve realmente el problema.

Se han hecho numerosos estudios a través del tiempo sobre que construcciones pueden realizarse con estos instrumentos, sin embargo, muchas de ellas salen del alcance de nuestros conocimientos (es decir, se requiere más madurez matemática para entender las demostraciones de este hecho), aun así, mencionaremos algunas de ellas, por ejemplo; Gauss atacó el problema de la división de la circunferencia en **n** partes iguales; Gauss descubrió el hecho notable de que se podía construir un polígono regular de 17 lados con regla y compás, mas aun descubrió que si **p** es un numero primo de la forma $2^{2^t} + 1$ era construible un polígono regular de **p** lados con estos instrumentos. También se ha demostrado que si se nos da un cubo de arista 1 no se puede construir con regla y compás un cubo cuyo volumen sea el doble del cubo dado. En cuanto a la trisección de un ángulo se ha probado que no se puede construir con regla y compás un ángulo de 40°, por lo tanto no se puede trisecar un ángulo que mida 120°.

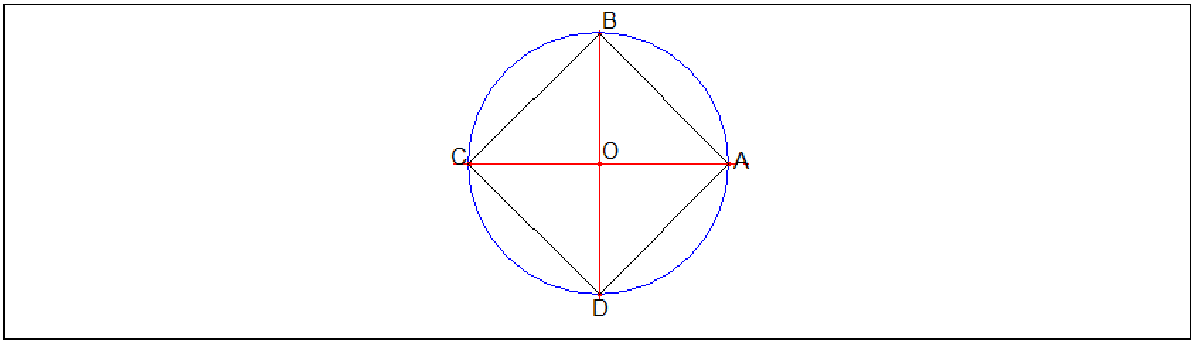
2.1.2 Construcción de polígonos regulares

Como lo advertimos anteriormente, teóricamente, todo polígono regular, digamos de n lados, puede considerarse inscrito en una circunferencia y para ello basta dibujar una circunferencia y en ella dibujar ángulos centrales de medida $\frac{360°}{n}$.

Veamos algunos resultados relacionados con la construcción de algunos polígonos regulares.

Construcción del cuadrado: El polígono regular, que consideramos más sencillo de construir es el cuadrado. En tal caso, dibujamos una circunferencia y dos diámetros perpendiculares, de esta manera, hemos construido ángulos centrales de 90°. Al unir los extremos consecutivos de dichos diámetros se obtiene el cuadrado. La prueba de que efectivamente la figura construida es un cuadrado se sigue de los criterios de congruencia de triángulos rectángulos y de que cada uno de ellos es un triángulo isósceles. Veamos la demostración de carácter formal. (Ver figura 2-2).

Figura 2-2: Construcción del cuadrado



Sean $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diámetros de la circunferencia de centro O y radio r, como lo muestra la figura y supongamos que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

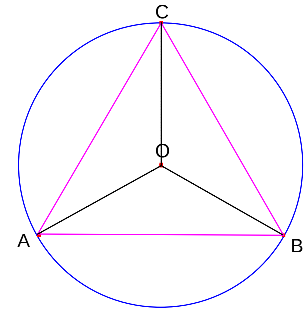
Los triángulos Δ AOB, ΔCOB, Δ DOC y Δ AOD son rectángulos porque los diámetros de la circunferencia son perpendiculares y los diámetros se bisecan en O. Por lo tanto, $\overline{OA}$ = $\overline{OC}$ = $\overline{OB}$ = $\overline{OD}$ = r, radio de la circunferencia y además Δ AOB ≅ ΔCOB ≅ Δ DOC ≅ Δ AOD por el criterio de LAL. De donde AB=BC=CD=DA.

El Δ AOB es isósceles porque $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ por ser radios de la circunferencia, luego los ángulos de la base son congruentes, es decir ∠ ABO ≅ ∠ BAO y cada uno mide 45° ya que el ∠ AOB recto. La justificación de que cada ángulo de la base mide 45° es porque el m∠ AOB + m∠OBA + m∠BAO = 180°, entonces m∠ AOB + 2m∠OBA = 180°, así 90° + 2m∠OBA = 180°, luego 2m∠OBA = 90°, y finalmente m∠OBA = 90°/2 = 45°.

Entonces el ΔCOB también es isósceles y el ∠ CBO ≅ ∠ BCO y cada uno mide 45° ya que el ∠ AOB es recto. Luego el m∠ ABO + m∠ CBO = 90°, esto es que el m∠ ABC = 90°, m∠ BCD = 90°, m∠ CDA = 90° y m∠ DAB = 90°. Por lo tanto el cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

Construcción del triángulo equilátero: Para construir el triángulo equilátero procedemos así, dibujamos una circunferencia de centro O y radio r y dividimos 360° entre el número de lados que es tres (3) y nos da un ángulo central de 120°. Tomamos sobre la circunferencia arcos de 120°, uniendo estos puntos consecutivamente obtenemos un triángulo equilátero. (Ver figura 2-3).

Figura 2-3: Construcción del triángulo equilátero



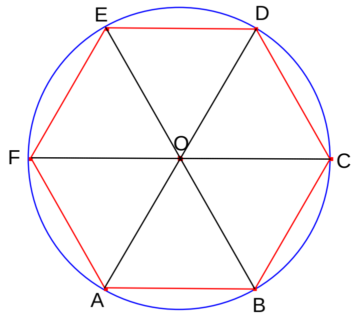
El ángulo central ∠ AOB mide 120°, $\overline{OA}$ = $\overline{OB}$ = r, por ser radios de la circunferencia, luego el ∆ AOB es isósceles, luego los ángulos de la base con congruentes, es decir ∠ OAB ≅ ∠ OBA y cada uno mide 30° ya que el m∠ AOB = 120°. La justificación de que cada ángulo de la base mide 30° es porque el m∠ AOB + m∠OAB + m∠OBA = 180°, entonces m∠ AOB + 2m∠OAB = 180°, así 120° + 2m∠OAB = 180°, luego 2m∠OAB = 60°, y finalmente m∠OAB = 60°/2 = 30°.

Por otra parte tenemos que los triángulos ∆ AOB, ∆ AOC y ∆ BOC son congruentes por el criterio LAL. Según el criterio de congruencia sus ángulos y sus lados son congruentes.

Luego los ángulos ∠ BAO ≅ ∠ CAO ≅ ∠ ACO ≅ ∠ OCB ≅ ∠ CBO ≅ ∠OBA y cada uno mide 30°, entonces m∠ BAO + m∠ CAO = 60°, esto es que los ángulos m∠ BAC = 60°, m∠ ACB = 60° y m∠ CBA = 60°. Y además los lados AB ≅ BC ≅ AC.
Como los tres ángulos y los tres lados del triángulo ∆ ABC son congruentes, entonces el triángulo es equilátero.

Construcción del hexágono regular: Para construir el hexágono regular procedemos así, dibujamos una circunferencia de centro O y radio r y dividimos 360° entre el número de lados que es seis (6) y nos da un ángulo central de 60°. Tomamos sobre la circunferencia arcos de 60°, uniendo estos puntos consecutivamente obtenemos un hexágono regular. (Ver figura 2-4).

Figura 2-4: Construcción del hexágono regular



El ángulo central ∠ AOB mide 60°, $\overline{OA}$ = $\overline{OB}$ = r, por ser radios de la circunferencia de radio r, luego el ∆ AOB es isósceles, luego los ángulos de la base con congruentes, es decir ∠ OAB ≅ ∠ OBA y cada uno mide 60° ya que el m ∠ AOB = 60°. La justificación de que cada ángulo de la base mide 60° es porque el m∠ AOB + m∠OAB + m∠OBA = 180°, entonces m∠ AOB + 2m∠OAB = 180°, así 60° + 2m∠OAB = 180°, luego 2m∠OAB = 120°, y finalmente m∠OAB = 120°/2 = 60°, podemos decir que el triángulo es equilátero.

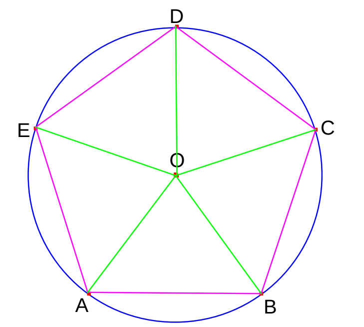
Por otra parte tenemos que los triángulos ∆ AOB, ∆ AOF, ∆ BOC, ∆ COD, ∆ DOE y ∆ EOF son equiláteros y congruentes por el criterio LAL. Según el criterio de congruencia sus ángulos y sus lados son congruentes.

Luego los lados $\overline{OA}$ ≅ $\overline{OB}$ ≅ $\overline{OC}$ ≅ $\overline{OD}$ ≅ $\overline{OE}$ ≅ $\overline{OF}$ = r. los ángulos ∠ OAB ≅ ∠ OBA ≅ ∠ BOC ≅ ∠ COD ≅ ∠ DOE ≅ ∠EOF y cada uno mide 60°.

Construcción del pentágono regular: Para construir el pentágono regular dibujamos una circunferencia de centro O y radio r, y dividimos 360° entre el número de lados que es cinco (5) y nos da un ángulo central de 72°. Tomamos sobre la circunferencia arcos de 72°, uniendo estos puntos consecutivamente obtenemos un hexágono regular. (Ver figura 2-5). Para este polígono regular se mostrará su construcción con regla y compás.

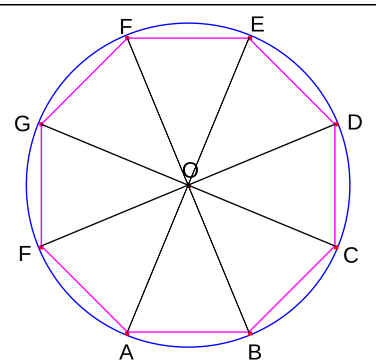
Es de anotar que más adelante se mostrará la forma de construir el pentágono regular con regla y compás.

Figura 2-5: Construcción del pentágono regular



Construcción del octágono regular: Para construir el octágono regular procedemos así, dibujamos una circunferencia de radio r y dividimos 360° entre el número de lados que es ocho (8) y nos da un ángulo central de 45°. Tomamos sobre la circunferencia arcos de 45°, uniendo estos puntos consecutivamente obtenemos un hexágono regular. Con argumento similar a los dados en las construcciones anteriores se tiene que efectivamente el polígono construido es un octágono regular. (Ver figura 2-6).

Figura 2-6: Construcción del octágono regular



OBSERVACIONES

Como en un hexágono inscrito en una circunferencia el lado del hexágono es igual al radio su construcción se haría trasladando sobre la circunferencia su radio seis veces a partir de un punto dado en la circunferencia, de esta forma se determinan los vértices del hexágono.

El triángulo se puede construir a partir del hexágono tomando tres vértices no consecutivos. Pero no solamente se pueden construir estos sino que también podemos construir los polígonos de 12. 24, 48, 96,… lados por bisecciones del arco de la circunferencia comprendidos entre dos vértices. De la misma forma podemos construir los polígonos de 4, 8, 16, 32,… lados a partir de dos diámetros perpendiculares y la intersección de los diámetros sobre la circunferencia determinan los vértices del cuadrado y los otros se obtienen por bisecciones del arco le la circunferencia comprendidos entre dos vértices.

En general, podemos decir que dado un polígono regular de *n* lados se puede trazar el polígono regular correspondiente de $2n$ lados, considerando la circunferencia circunscrita al polígono de n lados y en lugar de bisecar los ángulos comprendidos entre dos vértices, trazando las mediatrices por cada uno de los lados, así la intersección de las mediatrices con la circunferencia determinan los vértices restantes del polígono de $2n$ lados. Esto permite trazar los de $n = 6, 8, 10, 12, 16$, a partir de los casos $n = 3, 4\ y\ 5$.

Si un polígono regular de *n* lados puede construirse con regla y compás, también pueden construirse los polígonos cuyo número de lados sea un divisor de *n*. sólo basta trazar segmentos entre sus vértices de *m* en *m*. De este modo, a partir de un dodecágono (12 lados), si se unen sus vértices de 4 en 4 se obtiene un triángulo (3 lados), de 3 en 3 se llega a un cuadrado (4 lados) y de 2 en 2 se logra un hexágono (6 lados).

Hay una construcción que permite inscribir el triángulo, el hexágono, el dodecágono, el cuadrado y el octágono que es la rosa de *cuatro pétalos*. Su construcción se realiza de la siguiente forma se trazan dos diámetros perpendiculares que intersectan a la circunferencia en cuatro puntos A, B, C y D. Con centro en A y radio AO donde O es el centro de la circunferencia; se traza la circunferencia con centro en B y radio BO donde O es el centro de la circunferencia; se traza la circunferencia con centro en A y radio CO donde O es el centro de la circunferencia; se traza la circunferencia y por último con centro en D y radio DO donde O es el centro de la circunferencia, se traza la circunferencia. Estas circunferencias formarán los pétalos de la rosa con vértices a, b, c, d. Los segmentos (los segmentos se acostumbra a nombrarlos con mayúsculas) $\overline{\mathrm{AC}}$ y $\overline{\mathrm{BD}}$ cortan a la circunferencia en cuatro puntos que son los vértices del cuadrado. Estos puntos y los puntos A, B, C y D son los vértices del octágono. (Ver figura 2-7).Tomando los puntos A, B, C, D y los puntos de intersección de los pétalos con la circunferencia determinan los vértices del dodecágono. Por último el hexágono y el triángulo se trazan a partir del dodecágono. (Ver figura 2-8). Gutiérrez [10]

Figura 2-7: Rosa de cuatro pétalos, construcción del cuadrado, octágono regular.

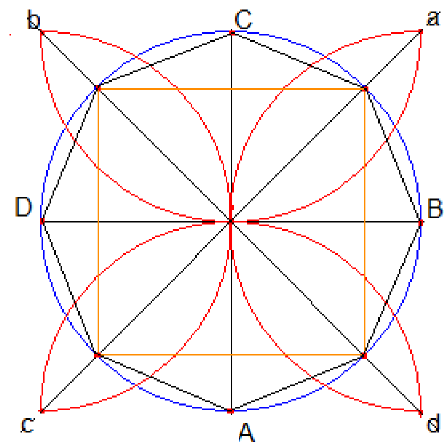
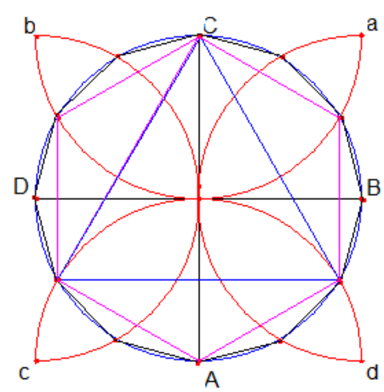


Figura 2-8: Rosa de cuatro pétalos, construcción del triángulo equilátero, hexágono, dodecágono regular.



Es de observar que las construcciones del pentágono y el decágono son menos evidentes.

2.1.3 Los Números de Fermat y la construcción de polígonos regulares con regla y compás

Un polígono regular de n lados es construible con regla y compás en el sentido expuesto, si y sólo, si la descomposición en factores primos de n es de la forma $n = 2^r * p_1 * p_2 * \ldots * p_k$ siendo $r \geq 0$ y los p_i primos de Fermat distintos entre sí, un primo de Fermat es un número de la forma $2^{2^n} + 1$. Zaldivar [19].

Esto quiere decir, que un polígono regular es construible, sí, el número de lados del polígono es una potencia de 2, un número de Fermat, producto de una potencia de 2 y varios primos de Fermat distintos o producto de varios números de Fermat. De esta manera tenemos determinados los polígonos regulares que podemos construir con regla y compás, así por ejemplo, son construibles con regla y compás los siguientes polígonos.

El triángulo, ($2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$)

El cuadrado ($2^2 = 4$)

El pentágono ($2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$)

El hexágono $2(2^{2^0} + 1) = 2(2^1 + 1) = 2(2 + 1) = 2(3) = 6$

El octágono ($2^3 = 8$)

Por lo tanto, entre otros, el **heptágono** regular ($2^{2^n} + 1 \neq 7\ \forall n$) y el **eneágono** regular ($2^{2^n} + 1 \neq 3^2 = 9\ \forall n$) no son construibles con regla y compás. (http://gaussianos.com/construcciones-con-regla-y-compas-iii-los-poligonos-regulares/).

En general, se tiene el siguiente teorema:

El n-gono regular es construible con regla y compás si y solo si, todos los primos impares que dividen n son primos de Fermat cuyo cuadrado no divide n. Fraleigh [8]. Para ilustrar este hecho, el polígono regular de 18 lados (18 – gono) no es construible ya que 3 es un primo de Fermat, pero su cuadrado 9 (3^2) divide a 18 contradiciendo el resultado antes mencionado. Este teorema nos ayuda a probar que el 60-gono regular se puede construir con regla y compás, en efecto, tenemos que 60 = $(2^2)(3)(5)$ y los números 3 y 5 son primos de Fermat, 9 y 25 que son los cuadrados de 3 y 5 respectivamente no dividen a 60. Luego podemos asegurar que 60-gono es construible con regla y compás.

2.1.4 Otras observaciones sobre los números de Fermat

Teniendo la expresión n= $2^a p_1^b p_1^c p_1^{d \cdots}$ podemos realizar las siguientes consideraciones: que los exponentes de los primos sean todos cero, entonces n = 2^r, ahora, si el exponente del 2 es cero, tenemos entonces $n = 2^{2^r} + 1$, luego miraremos algunos de la forma n= $2^a p_1^b p_1^c p_1^d \ldots$.

A continuación se darán algunos ejemplos teniendo en cuenta algunas condiciones, empezaremos con los números de la forma n = 2^r, r ≥ 2, para estos tomaremos algunos valores para r. Cuando r = 2, entonces el polígono de 2^2 = 4 lados se puede construir, cuando r = 3, entonces el polígono de 2^3 = 8 lados se puede construir, cuando r = 4, entonces el polígono de 2^4 = 16 lados se puede construir, cuando r = 5, entonces el polígono de 2^5 = 32 lados se puede construir, etc., entonces los polígonos regulares cuyo número de lados son una potencia de dos se pueden construir.

Si los números son de la forma $n = 2^{2^r} + 1$, r ≥ 0, tomemos algunos valores para r. Cuando r = 0, entonces el polígono de $2^{2^0} + 1$ = 3 lados se puede construir, cuando r = 1, entonces el polígono de $2^{2^1} + 1$ = 5 lados se puede construir, cuando r = 2, entonces el polígono de $2^{2^2} + 1$ = 17 lados se puede construir, cuando r = 3, entonces el polígono de $2^{2^3} + 1$ = 257 lados puede construir, entonces los polígonos regulares cuyo número de lados son un primo de Fermat se pueden construir.

Ahora si los números son de la forma $n = 2^m (2^{2^r} + 1)$, m, r ≥ 0, examinaremos algunos polígonos regulares con el siguiente número de lados. El polígono regular de 3 lados (triángulos equilátero), se puede construir porque 3 es un primo de Fermat y además es de la forma $2^m (2^{2^r} + 1)$, m = 0 y r = 0, El polígono regular de 6 lados (hexágono), se puede construir porque 6 = (2)(3) donde 2 es una potencia de 2 y 3 es un primo de Fermat y además 6 es un número de la forma $2^m (2^{2^r} + 1)$, m = 1 y r = 0, El polígono regula de 7 lados (heptágono), no se puede construir porque para ningún m y r, 7 no es de la forma $2^m (2^{2^r} + 1)$, además 7 no es un primo de Fermat, el polígono regular de 9 lados (eneágono), no se puede construir porque para ningún m y r, 9 no es de la forma $2^m (2^{2^r} + 1)$, además 9 no es un primo de Fermat, el polígono regular de 10 lados (decágono) se puede construir porque 10 = (2)(5) de donde 2 es una potencia de 2 y 5 es un primo de Fermat y además es de la forma $2^m\,(2^{2^r}+1)$, m = 1 y r = 1.

¿Es posible construir polígonos regulares de 45, 48, 47, 52, 53, 2748, etc.? Para verificar si estos polígonos regulares son construibles con regla y compás, se tomara cada número y se hallara su descomposición factorial y se aplica el criterio de construcción.

La descomposición de factorial 45 = 3^2*5, entonces, este polígono regular si se puede construir porque 3 y 5 son primos de Fermat, la descomposición de factorial 48 = 2^4*3, entonces, este polígono regular si se puede construir porque la descomposición factorial de 48 es una potencia de 2 y 3 es un primo de Fermat, como 47 es un número primo no tiene descomposición factorial, y además no es primo de Fermat, entonces no se puede construir, la descomposición de factorial de 52 = 2^2*13, no se puede construir porque 13 no es un primo de Fermat, como 53 es un número primo no tiene descomposición factorial, y no es primo de Fermat, entonces no se puede construir, la descomposición factorial de 2748 = 2^2*3*229, aunque 2 es una potencia de dos, y 3 es un primo de Fermat no se puede construir porque 229 no es un primo de Fermat.

De esta forma podemos determinar si un polígono de n lados se puede construir con regla y compás.

Probar si es posible construir polígonos regulares de 22, 28, 36, 39, 42, 51, 80, 85, 90, 93, 98. Y argumentar las respuestas.

¿Los números de Fermat son realmente primos?

Fermat conjeturo que los números de la forma $n = 2^{2^r}+1$, son todos primos para cada valor de un número natural r, está afirmación la hizo teniendo en cuenta las siguientes evidencias:

Cuando r = 0, entonces $n = 2^{2^r}+1$ = 3.

Cuando r = 1, entonces $n = 2^{2^r}+1$ = 5.

Cuando r = 2, entonces $n = 2^{2^r}+1$ = 17

Cuando r = 3, entonces $n = 2^{2^r}+1$ = 257.

Cuando r = 4, entonces $n = 2^{2^r} + 1$ = 65537.

Pero Euler, probó que cuando r = 5, entonces $n = 2^{2^r} + 1$ = (641) (6700417), es un número compuesto. Se ha observado que para 5 ≤ r ≤16, cada número de Fermat es compuesto. También se sabe que son compuestos para los siguientes números aislados de r: 18,19, 21, 23, 25, 26, 27, 30, 32, 36, 38, 39, 42, 52, 55, 58, 63, 73, 77, 81, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228,260, 267,268, 284, 316, 452 y 1945. Apostol [2], Stewart [16]

Por otro lado tenemos el siguiente teorema:

Teorema: Un número de Fermat del tipo $2^{2^r} + 1$ es igual al producto de todos los anteriores más 2.

Prueba: Por inducción

$N_0 = 3$

$N_1 = 5 = N_0 + 2 = 3 + 2 = 5$

$N_2 = 17 = N_0N_1 + 2 = (3)(5) + 2 = 17$

Si para todo número s que precede a n se cumple que:

$N_s = N_0N_1N_2\ldots + 2$, entonces $N_0N_1N_2\ldots N_{n-2}N_{n-1} + 2 = (N_{n-1} - 2)N_{n-1} + 2 = N^2_{n-1} - 2N_{n-1} + 2 = (N_{n-1} - 1)^2 + 1$

$N^2_{n-1} - 2N_{n-1} + 2 = (2^{2^{n-1}} + 1)^2 - 2(2^{2^{n-1}} + 1) + 2$

$N^2_{n-1} - 2N_{n-1} + 2 = 2^{2*2^{n-1}} + 2\left(2^{2^{n-1}}\right) + 1 - 2(2^{2^{n-1}}) - 2 + 2$

$N^2_{n-1} - 2N_{n-1} + 2 = 2^{2*2^{n-1}} + 1$

$N^2_{n-1} - 2N_{n-1} + 2 = 2^{2^n} + 1 = N_n.$

En relación con el resultado anotado arriba, el matemático Gauss en 1796, fue el primero en demostrar que únicamente se pueden construir con regla y compás los polígonos de un número n impar de lados cuando los factores primos de n son números primos de Fermat ($F_n = 2^{2^n} + 1$) y, encontró que se podía construir el polígono de 17 lados. De hecho 17 es el tercer primo de Fermat; los cinco primeros primos de Fermat son 3, 5, 17, 257 y 65537. Es de anotar que Gauss demostró la condición suficiente. . Así que sólo podemos construir estos polígonos, o bien, polígonos cuya cantidad de lados sea una potencia de 2 multiplicada por uno de los 5 números anteriores. 7 y 9 no son de esta forma así que no puedes construir heptágonos ni eneágonos regulares (con regla y compás).

En el año de 1837 Wantzel probó la condición necesaria; que Gauss también creyó, pero que no dio ninguna demostración alguna.

El problema de la construcción del polígono de 17 lados no fué construida por Gauss, es decir no nos mostró los pasos para construirlo, parece ser que la primera construcción física fue realizada por Johannes Erchinger quien sería el primero en mostrar un método para construir el polígono regular de 17 consistente en 4 pasos.
(http://gaussianos.com/construcciones-con-regla-y-compas-iv-la-construccion-del-heptadecagono/)

2.1.5 Construcción de polígonos regulares con regla y compás a partir de otros polígonos regulares construidos.

Los antiguos griegos daban mucha importancia al problema de saber, qué polígonos regulares podían ser construidos con regla y compás. Ellos sabían construir un triángulo regular, un cuadrado y un pentágono y sabían doblar el número de lados de un polígono mediante la bisección del ángulo. También sabían construir un polígono regular de 15 lados combinando un triángulo y un pentágono y otros que se obtienen de la misma forma. (15 = 3*5).

Es evidente que si uno tiene un polígono con *n* lados y $a \mid n$ (*a* es un divisor de *n)*, esto es *n* = *ab*, el polígono con a lados puede obtenerse tomando cada b vértices. De esto lo más interesante es el hecho de que los resultados básicos sobre ecuaciones indeterminadas nos dan o nos proporcionan, bajo ciertas condiciones, un camino para construir polígonos con un gran número de lados.

De polígonos con lados *a* y *b*, donde *a* y *b* son primos entre sí, un polígono con lados *ab* se puede obtener:
Como (a, b) = 1 podemos encontrar enteros x e y tales que ax – by = 1, dividiendo esta ecuación por ab nos da:

$$\frac{ax}{ab} - \frac{by}{ab} = \frac{1}{ab}$$

Entonces nos da:

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = \frac{1}{ab}$$

y multiplicando por 360°, tenemos:

$$x\frac{360°}{b} - y\frac{360°}{a} = \frac{360°}{ab}$$

Esto demuestra que el ángulo central de un polígono con lados ab es la diferencia entre dos múltiplos del ángulo central del polígono de con lados a y b. por ejemplo con polígonos de 3 lados y 5 lados, un polígono de 15 lados es construible. Ore [13]. Acevedo [1]

2.1.6 Los números complejos y la construcción de polígonos regulares

Un número complejo z = x + iy donde x, y $\in \mathbb{R}$ e i es la parte imaginaria que corresponde a $\sqrt{-1}$ ($i = \sqrt{-1}$). El número complejo z puede representarse geométricamente con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, por el punto (x, y), con el que se establece una biyección entre los números complejos y los puntos del plano Euclídeo.

Empleando un sistema de coordenadas polares en el plano, cuyo polo sea el punto 0 y cuyo eje polar, sea el semieje real positivo, el punto (x, y) del complejo z = x + iy, puede representarse por sus coordenadas (r,θ), donde r = | z | ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) se llama el argumento del complejo y θ el ángulo polar.

Como x = rcosθ , y = rsenθ, resulta que z = r(cosθ + isenθ).

Definición: si z = r(cosθ + isenθ), entonces $z^n = [r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^n = r^n[\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)]$ que es la fórmula DeMoivre.

Mirando las raíces de un número complejo tenemos que:

Decimos que u es la raíz n-ésima de un número complejo z (n$\in\mathbb{N}$), a todo complejo talque $u^n = z$.

Denotamos el módulo y el argumento de u por t y ϕ, respectivamente, así que u = t[cosϕ + isenϕ]. Si u es una raíz n-ésima de z = r[cosθ + isenθ], entonces, por el teorema DeMoivre, tenemos:

u^n = z que se puede escribir de la forma t^n[cos(nϕ) + isen(nϕ)] = r[cosθ + isenθ] . Cuando dos números complejos son iguales, sus módulos son necesariamente iguales. Entonces tenemos: t^n = r y cos(nϕ) + isen(nϕ) = cosθ + isenθ, igualando las parte reales e imaginarias de estas ecuaciones, tenemos: cos(nϕ) = cosθ y sen(nϕ) = senθ, de donde se deduce que nϕ = θ + 2kπ, o $\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, donde k es un entero cualquiera. Como k asume los valores enteros sucesivos 0, 1, 2,…, n – 1, obtenemos n raíces diferentes de z. Para k $\geq$ n, los valores de senϕ y cosϕ repiten los valores obtenidos cuando k = 0, 1, 2,…, n – 1. Para ver esto, suponemos que k = n + m donde m = 0, 1, 2,… entonces,

$$\phi = \frac{\theta + 2(n+m)\pi}{n} = \frac{\theta + 2m\pi}{n} + 2\pi$$

Como el seno y el coseno tienen un periodo de 2π, tenemos:

$$\text{sen}\phi = \text{sen}\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right) \text{ y } \cos\phi = \cos\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right)$$

Y así no se obtienen nuevas raíces cuando k $\geq$ n.

2.1.7 Los polígonos regulares y las raíces complejas de la unidad

En este apartado relacionamos los números complejos de la unidad y los polígonos regulares utilizando el teorema DeMoivre, para determinar cuando un polígono regular es construible con regla y compás. Podemos decir que otra forma de justificar porque el heptágono regular no es construible con regla y compás. Si miramos la relación que existe de los puntos del plano con los números complejos, para construir un polígono regular de n lados debe ser construible el número complejo $z = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, en particular para el caso del heptágono debería ser construible el punto $z = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, donde z es raíz del polinomio $x^7 - 1$. La descomposición en polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}$ de este polinomio quedaría así: $(x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ .Como z no es raíz de $(x - 1)$ debe serlo entonces del otro factor. Pero el grado del mismo es 6, y para que un punto fuera construible el grado de su polinomio mínimo irreducible en $\mathbb{Q}$ debería ser una potencia de 2. Por lo tanto no podemos construir el número complejo z y en consecuencia tampoco podemos construir el heptágono regular. Podemos agregar que el octágono se puede construir pero el eneágono o sea el polígono regular de nueve lados no se puede construir. Acevedo [1]

Consideremos ahora el problema de hallar las 3 raíces cubicas de la unidad. Para hallar la forma trigonométrica de 1, tenemos z = 1 +i0, luego r = 1 y $\theta = 0°$

$$1 = \cos 0 + i\text{sen } 0$$

$$\mathrm{u} = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{0\ +\ 2\mathrm{k}\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{0\ +\ 2\mathrm{k}\pi}{3}\right)\right], \mathrm{k} = 0, 1, 2$$

Para k = 0

$u_0 = \cos\left(\frac{0}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{0}{3}\right) = \cos(0) + i\text{sen}(0) = 1 + \mathrm{o}i$

Para k = 1

$u_1 = \cos\left(\frac{0+2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{0+2\pi}{3}\right) = \cos\left(0 + \frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(0 + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$

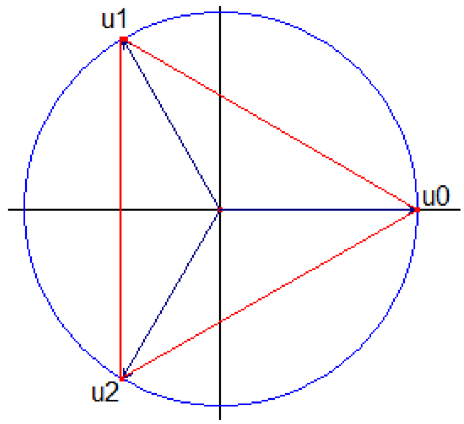
Para k = 2

$u_2 = \cos\left(\frac{0+4\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{0+4\pi}{3}\right) = \cos\left(0 + \frac{4\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(0 + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$.

Las tres raíces cúbicas de 1 las podemos representar en una circunferencia de radio 1 y estas se encontraran espaciadas equitativamente alrededor de la circunferencia con centro en el origen. En general podemos decir que las raíces n-ésimas de un número complejo diferente de cero z están distribuidas proporcionalmente en las circunferencias del círculo de radio $| z |^{1/2}$ con centro en el origen.

Si unimos estos punto de dos en dos obtenemos un polígono regular en este caso un triángulo equilátero como lo muestra la figura 2-9.

Figura 2-9: Triángulo equilátero.



Si seguimos hallando las raíces de la unidad, por ejemplo, las raíces cuartas obtendremos los vértices de un cuadrado, con las raíces quintas obtendremos un pentágono regular, con las raíces sextas obtendremos un hexágono regular, etc., teniendo en cuenta que el de 7, 9 lados por ejemplo no se pueden construir.

Para ver otro ejemplo, ahora hallemos las 4 raíces cuartas de la unidad

Para la forma trigonométrica de 1, tenemos z = 1 +i0, luego r = 1 y $\theta = 0°$

$$1 = \cos 0 + i\text{sen } 0$$

$$u = \sqrt[4]{1}\left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right)\right], k = 0, 1, 2, 3$$

Para k = 0

$u_0 = \cos\left(\frac{0}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{0}{4}\right) = \cos(0) + i\text{sen}(0) = 1 + oi$

Para k = 1

$u_1 = \cos\left(\frac{0+2\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{0+2\pi}{4}\right) = \cos\left(0 + \frac{2\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(0 + \frac{2\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$

Para k = 2

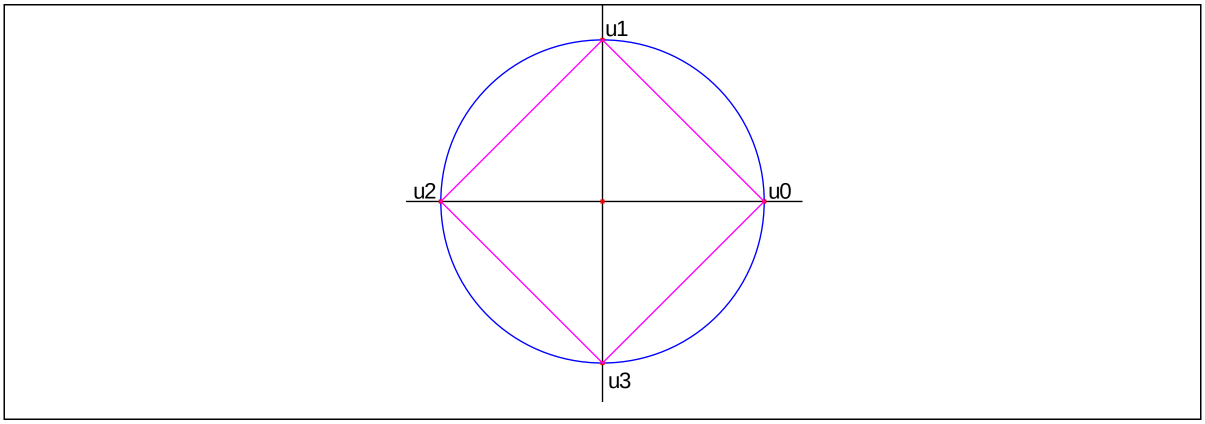
$u_2 = \cos\left(\frac{0+4\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{0+4\pi}{4}\right) = \cos\left(0 + \frac{4\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(0 + \frac{4\pi}{4}\right) = \cos(\pi) + i\text{sen}(\pi) = -1 - 0\, i$

Para k = 3

$u_3 = \cos\left(\frac{0+6\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{0+6\pi}{4}\right) = \cos\left(0 + \frac{6\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(0 + \frac{6\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - 1\, i$

Si unimos estos punto de dos en dos obtenemos un polígono regular en este caso un cuadrado como lo muestra la figura 2-10.

Figura 2-10: Cuadrado.



2.1.8 Los números construibles

La teoría de cuerpos da respuesta a la imposibilidad de la solución de los tres problemas clásicos, de construcciones geométricas con regla y compás, de la Geometría Elemental. Los tres problemas famosos de los geómetras Griegos son: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo Para esto, se traducen los problemas geométricos álgebra. En particular, en este apartado mostraremos de manera informal que los números construibles con regla y compás forman un campo intermedio entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$..

Los tres problemas famosos de los geómetras Griegos son: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

Para demostrar que no es posible duplicar un cubo se considera la ecuación $x^3 - 2 = 0$ y se llega a que esta ecuación no puede ser factorizada en los racionales y dado que el grado no es potencia de 2, se concluye que el cubo no puede ser duplicado por medio de construcciones con regla y compás. En la teoría de Galois se sigue se sigue que para que esta ecuación sea soluble por radicales debe tener propiedades especiales; una de ellas es que tenga como grado una potencia de 2. Fraleigh [8]. Acevedo [1]

Para demostrar que no es posible trisecar un ángulo se considera la ecuación $4X^3 - 3X - 1 = 0$, y se muestra que la ecuación $4X^3 - 3X - 1 = 0$. No tiene solución a que debido a que esta ecuación no puede ser factorizada en los racionales y, dado que es cúbica, se concluye entonces que no se puede trisecar con regla y compás un ángulo arbitrario Fraleigh [8]. Acevedo [1].

Para demostrar que no es posible la cuadratura del círculo, se demuestra que π es trascendente, lo cual significa que no existe un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$ que tenga a π como raíz; esto es equivalente a encontrar una construcción para π con regla y compás, como ya vemos este problema es diferente a los dos anteriores, pues lo que ocurre en este es que no existe una ecuación algebraica asociada con este problema. π no es construible con regla y compás. Acevedo [1]

Teorema: El conjunto de los números construibles con regla y compás es un campo. Fraleigh [8].

Construir un número x con regla y compás se traduce en construir un segmento de longitud x. A continuación se muestra una forma de construir la suma, el producto y el recíproco de un número construible. El resultado enunciado en el teorema puede verificarse siguiendo De Viola [7]. Gutierrez [10]. Fraleigh [8]. Acevedo [1]

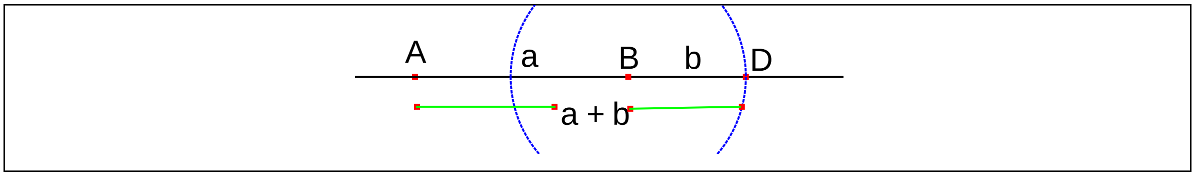
Si a y b son números construibles, entonces a + b, a – b, ab, a/b, y 1/b con $b \neq 0$ son construibles. Los números construibles tienen estructura de campo, para demostrar sus propiedades se requiere de de los teoremas de Pascal y Desargues y omitiremos estas pruebas.

En lo que sigue, supongamos que a y b son construibles y mostremos que a + b, ab y 1/a son construibles.

Construcción de a + b

Prueba: como a y b son construibles, podemos decir que $\overline{AB} = |a|$ y $\overline{CD} = |b|$ sobre una recta tomamos el segmento $\overline{AB}$ y tomando como centro B trazamos una circunferencia de radio la longitud |b|, esta cortará la recta que contiene al segmento $\overline{AB}$ en el punto D y el segmento $\overline{AD}$ será el segmento de longitud |a + b|. (Ver figura 2-11).

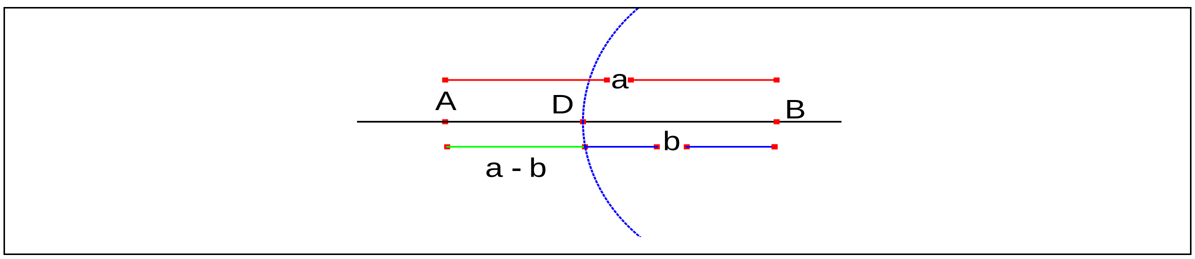
Figura 2-11: Construcción de a + b.



Construcción de a – b

Prueba: Como a y b son construibles, podemos decir que $\overline{AB} = |a|$ y $\overline{CD} = |b|$ sobre una recta tomamos el segmento $\overline{AB}$ y tomando como centro B trazamos una circunferencia de radio la longitud |b|, esta cortará la recta que contiene al segmento $\overline{AB}$ en el punto D y el segmento $\overline{AD}$ será el segmento de longitud |a – b|. (Ver figura 2-12).

Figura 2-12: Construcción de a – b.

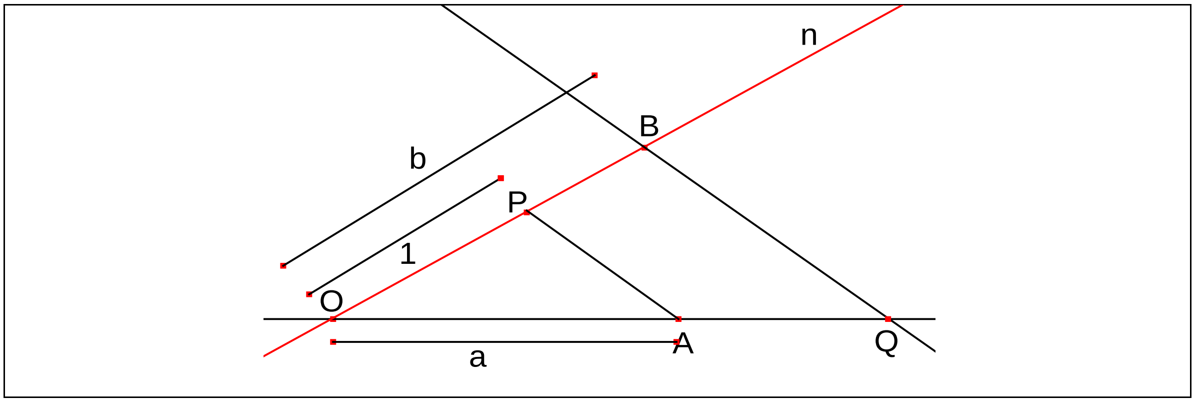


Construcción de ab

Prueba: Tomemos dos recta m y n que se corten en el punto O, en m trazamos (a partir de O) un segmento de longitud |a|, en n trazamos (a partir de O) los segmentos de longitud 1 y |b|, trazamos el segmento que una $\overline{PA}$, por el punto B trazamos una recta paralela a $\overline{PA}$ que corte a la recta m en el punto Q. Así se obtienen dos triángulos semejantes ∆OAP y el ∆OQB de donde

$\frac{\mathrm{OB}}{1} = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OB}}$ Es decir $\frac{|\mathrm{a}|}{1} = \frac{\mathrm{OQ}}{|\mathrm{b}|}$, el segmento $\overline{OQ}$ tiene longitud |ab|, (Ver figura 2-13).

Figura 2-13: construcción de ab.

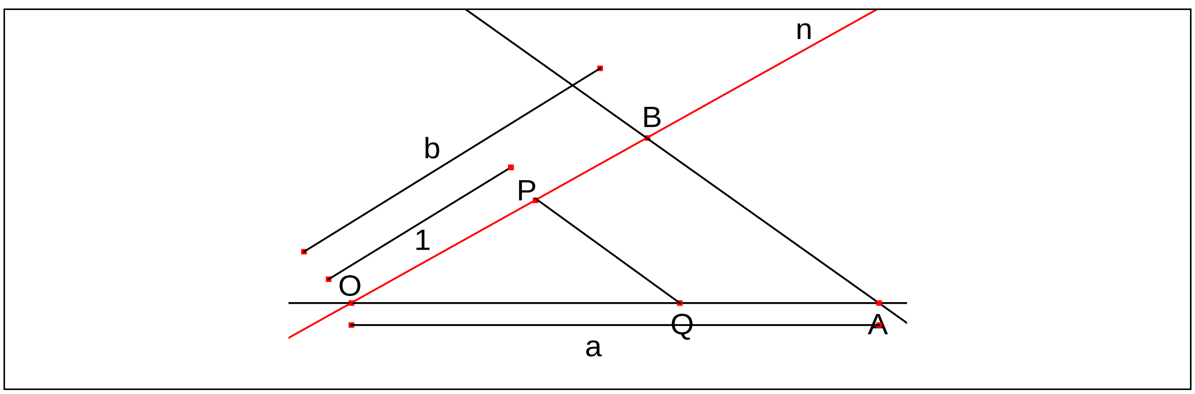


Construcción de a/b

Prueba: Tomemos dos recta m y n que se corten en el punto O, en m trazamos (a partir de O) un segmento de longitud |a|, en n trazamos (partir de O) los segmentos de longitud 1 y |b|, trazamos el segmento que una $\overline{BA}$, por el punto P trazamos una recta paralela a $\overline{BA}$ que corte a la recta m en el punto Q. Así se obtienen dos triángulos semejantes ∆OQP y el ∆OAB de donde

$\frac{\mathrm{OQ}}{1} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$ Es decir $\frac{\mathrm{OQ}}{1} = \frac{|\mathrm{a}|}{|\mathrm{b}|}$, el segmento $\overline{OQ}$ tiene longitud $\frac{|\mathrm{a}|}{|\mathrm{b}|}$. (Ver figura 2-14).

Figura 2-14: construcción de a/b.



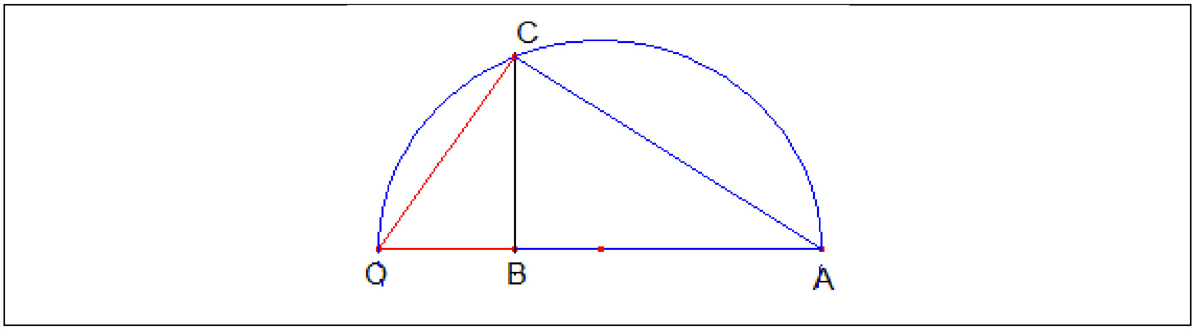
En particular si a =1 es posible construir con regla y compás el número 1/b.

Construcción de $\sqrt{a}$, con a > 0

Prueba: En una recta trazamos un segmento OB de longitud 1y BA de longitud |a|. Trazamos la semicircunferencia de centro el punto medio de OA y radio $\frac{1+a}{2}$. Trazamos la perpendicular a OA que pase por B, que cortara a la semicircunferencia en el punto C. El

Δ OCB es semejante con ΔBCA, tenemos: $\frac{OB}{BC} = \frac{BC}{BA}$ o sea: $\frac{1}{BC} = \frac{BC}{|a|}$ entonces $(BC)^2 = |a|$, luego BC = $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ **,** (Ver figura 2-15).

Figura 2-15: Construcción de $\sqrt{a}$



Para un estudio inicial que muestre relaciones entre Algebra y Geometría pueden consultarse en Pérez [14] y Stewart [16].

2.1.9 Primeras construcciones básicas con regla y compás como estrategia didáctica para el aprendizaje de la construcción de figuras

Una de las formas de abordar la geometría elemental hoy en día está basada en el concepto de métrica: se miden distancias, se miden ángulos y las ideas fundamentales de congruencias y segmentos y congruencia de ángulos se dan en términos de distancia y medida angular. Respectivamente las herramientas utilizadas son una regla graduada con la cual es posible medir longitudes de segmentos con toda precisión y, desde luego, trazar rectas entre dos puntos dados y un transportador que permite medir ángulos. El uso de estos instrumentos llevo a resolver una buena cantidad de problemas teóricos por ejemplo. Muchos de los llamados teoremas de existencia cuya demostración exige una construcción y a plantear otros cuantos que solo pudieron ser resueltos en la época moderna cuando el desarrollo del algebra proporciono otras técnicas matemáticas consideradas, en cierta forma, ajenas al razonamiento geométrico. Gutiérrez [10]

La elaboración de propuestas en la construcción de figuras con instrumentos como los nombrados con anterioridad, hace necesario que se describa cuales fueron las primeras construcciones y la forma como deben ser construidas. Algunas de las construcciones que se pueden realizar con regla y compás se explicaran a continuación:

2.1.10 Mediatriz de un segmento

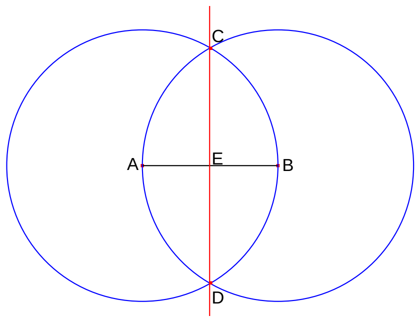


Figura 2-16: Mediatriz de un segmento

A partir de dos puntos A y B podemos construir el segmento que los une. Pinchamos ahora con el en A y trazamos una circunferencia tomando como radio la distancia entre A y B. Después pinchamos en B y trazamos otra circunferencia cuyo radio es la misma distancia anterior. De esta forma hemos construidos dos nuevos puntos: los dos puntos donde se cortan las dos circunferencias C y D. Uniendo esos dos puntos obtenemos la mediatriz del segmento inicial. (Ver figura 2-16).

2.1.11 Bisectriz de un ángulo

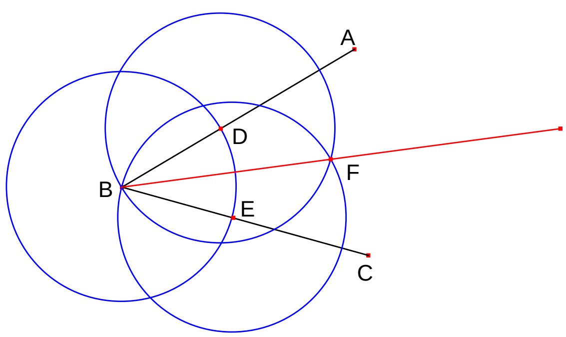


Figura 2-17: Bisectriz de un ángulo.

Para esta construcción se utilizan tres puntos no alineados A, B y C trazamos las rectas que pasan A y B y B y C con centro en B trazamos un arco de circunferencia que corte a la recta AB, obteniendo el punto D. Ahora trazamos un arco de circunferencia con centro D y radio la distancia entre D y B y otro arco con centro en E y radio la misma distancia. Esos dos arcos se cortan en un punto F. Trazamos la recta que une ese punto con B y obtenemos la bisectriz del ángulo formado por A, B y C. (Ver figura 2-17).

2.1.12 Paralela a una recta dada

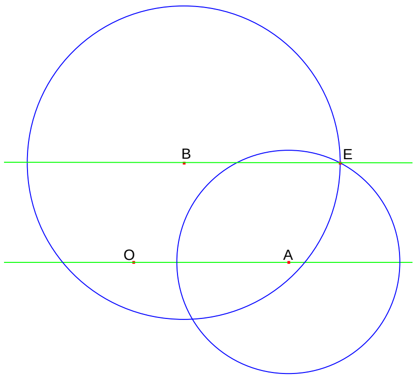


Figura 2-18: Paralela a una recta dada

Para esta construcción se utiliza tres puntos no alineados O, A y B: trazamos la recta que pasa por O y A. Después trazamos un arco de la circunferencia de centro B p_2 y radio de la distancia entre O y A y otro arco de circunferencia de centro A y radio la distancia entre O y A. Acabamos de construir otro punto E: el punto de corte de los dos arcos de circunferencia.

Trazando ahora la recta que pasa por ese punto y por B obtenemos la paralela buscada. (Ver figura 2-18).

2.1.13 División de un segmento en $\mathbf{n}$ partes iguales

Partiendo de $p_0 \ y \ p_1$ trazamos el segmento que los une, que será el que vamos a dividir en n partes iguales. Trazamos arco de circunferencia con centro en cada uno de esos puntos y radio la distancia entre ellos. Obtenemos dos puntos de corte de esos arcos. Tomamos uno de ellos, digamos p_2, y trazamos la semirrecta que parte de p_0 y pasa por p_2. Llamemos a esta semirrecta r. Con centro en p_2 y radio la distancia entre $p_0 \ y \ p_2$ trazamos una circunferencia que cortará a r en otro punto, digamos p_3. Con centro en p_3 y radio la distancia entre $p_0 \ y \ p_2$ trazamos una circunferencia que cortara a r en otro punto, digamos p_4. Continuamos con el proceso hasta que hayamos dividido la semirrecta r en n partes iguales. Según nuestra notación pararíamos en el punto p_{n+1}. Ahora trazamos el segmento que une p_{n+1} con p_1 y vamos trazando semirrectas paralelas a éste que pasen por cada uno de los puntos obtenidos en la semirrecta r y que corten al segmento inicial. Así conseguimos dividirlo en n partes iguales.

2.1.14 Perpendicular a una recta dada

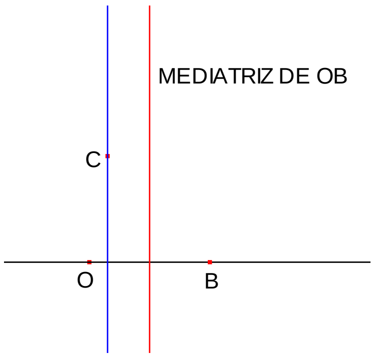


Figura 2-19: Perpendicular a una recta dada.

Para esta construcción se utiliza tres puntos no alineados O, B, C, trazamos la recta que pasa por O y B. Se quiere trazar la recta perpendicular a esa que pasa por C. Trazamos la mediatriz del segmento que une O y B. Si C pertenece a esa mediatriz ya hemos acabado. Y si no pertenece trazamos la paralela a la mediatriz que pasa por C como hemos explicado justo antes. (Ver figura 2-19).

2.1.15 Construcción del triángulo equilátero

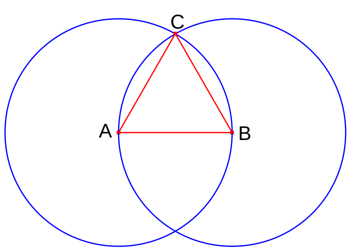


Figura 2-20: Triángulo equilátero.

Triangulo equilátero: Trazamos una circunferencia con centro en A y radio AB y otra con centro en B y mismo radio. Esas dos circunferencias se cortan en dos puntos. Tomamos uno de ellos, digamos C. Trazando los segmentos AC y BC obtenemos el triangulo equilátero ABC. (Ver figura 2-20).

2.1.16 Construcción de un cuadrado

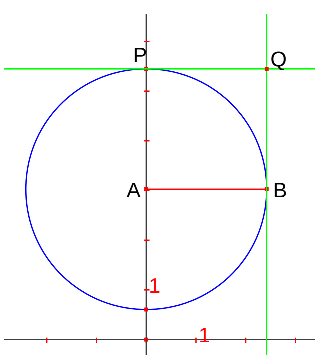


Figura 2-21: Cuadrado.

Cuadrado: Trazamos una circunferencia con centro A y radio AB Esa circunferencia corta al $eje\ Y$ en dos puntos. Tomamos uno de ellos, digamos P. Trazamos la recta paralela al $eje\ X$ que pasa por P y la recta paralela al eje Y que pasa por B. El punto de corte de las mismas, digamos Q, es el vértice que nos faltaba. Trazando los segmentos AP, PQ y QB, obtendremos nuestro cuadrado. (Ver figura 2-21).

2.1.17 Construcción del pentágono regular:

Trazamos dos rectas perpendiculares que denominaremos eje x y eje y, a cuya intersección llamamos O. Trazamos la paralela al $eje\ Y$ que pasa por B, digamos r. Se traza la mediatriz ddel segmento AB obteniendo el punto O como corte con el $eje\ X$. Trazamos la circunferencia de centro B y radio AB, digamos $C1$. Obtenemos el punto M como corte de $C1$ con la recta r. Con centro O trazamos la circunferencia de radio $OM, C2,$ obteniendo el punto S de corte en el eje X. Trazamos ahora la circunferencia de centro A y radio AS, $C3$. Obtenemos el punto P al cortar

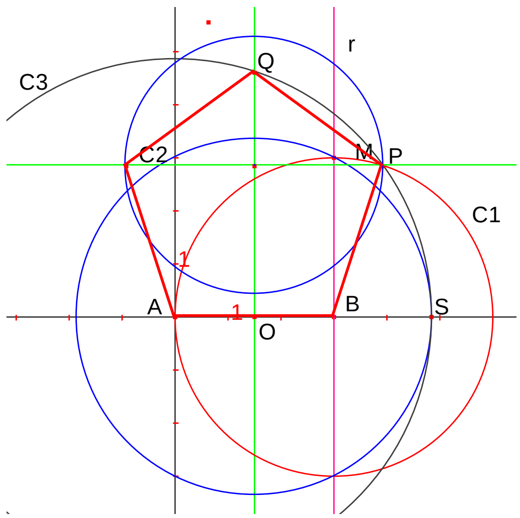


Figura 2-22: Pentágono Regular.

$C1$ y el punto Q como corte con la mediatriz del segmento AB. Para obtener el vértice que nos falta, R, simplemente construimos el punto simétrico a P respecto de la mediatriz del segmento AB. Uniendo los vértices obtenemos el pentágono regular buscado. (Ver figura 2-22).

2.1.18 Construcción del hexágono regular

Con radio AB trazamos circunferencias con centro A y B. Tomamos unos de los puntos digamos de corte, digamos O. Ese es el centro del hexágono. Trazamos ahora la circunferencia de centro O y radio OA. Obtenemos los puntos P y Q como cortes con las circunferencias anteriores y R como corte con el $eje\ Y$. Trazando la paralela al $eje\ Y$ que pasa por B obtenemos el último vértice S, como corte de esta recta y la circunferencia trazada justo antes. Uniendo los vértices obtendremos el hexágono regular buscado. (Ver figura 2-23).

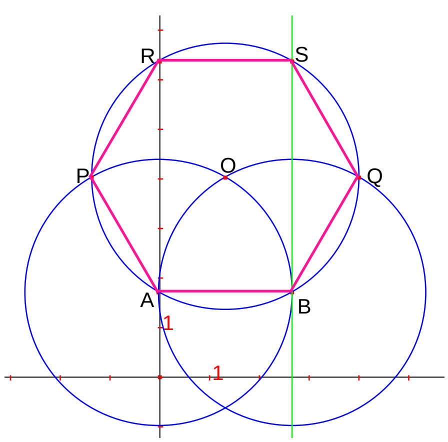


Figura 2-23: Hexágono Regular.

2.1.19 Construcciones sólo con regla o sólo con compás

Se refiere a los intentos de realizar, utilizando únicamente uno de los instrumentos, todas las construcciones que Euclides había logrado con regla y compás.

Esto condujo a resultados que demostraron la posibilidad real de obtener cualquier construcción contando sólo con el compás, exceptuando claro está el trazado de rectas. Se llego a que todos los puntos que conforman una construcción están al alcance del compás y que se puedan despreciar las rectas sin perder el sentido de dicha construcción.

Pero en el caso de la regla, se llegó a la conclusión de que era este instrumento de manera individual no permite realizar todas las construcciones; por ejemplo, no se pueden trazar segmentos equivalentes al valor de la raíz cuadrada de un número. De allí se dedujo que era indispensable contar, por lo menos, con una circunferencia y su centro prefijados en la hoja. O de lo contrario, se debía tener un compás de apertura fija (también denominado tenedor o compás oxidado) que posibilite trazar circunferencias de un único radio.

3. Aspectos históricos - epistemológicos

Para llegar a introducir el tema y para que el estudiante lo maneje y quede inmerso en el trabajo cotidiano, es indispensable el manejo de todos los aspectos que giran alrededor de dichos temas, es entonces relevante, Par el caso que nos ocupa, consideramos importante, conocer iniciar con algunos aspectos de la historia de la geometría, de los polígonos regulares y como fueron las primeras construcciones de polígonos con regla y compás; aspectos que nos permitieron encontrar elementos útiles para el desarrollo de la propuesta.

3.1 Los inicios de la geometría

La palabra geometría está formada por las raíces griegas: “geo”, tierra y “metrón”, medida, por lo tanto, su significado es “medida de la tierra”. Según lo registra la historia, los conceptos geométricos que el hombre ideó para explicarse la naturaleza nacieron en forma práctica a orillas del río Nilo, en el antiguo Egipto. Las principales causas fueron tener que remarcar los límites de los terrenos ribereños y construir diques paralelos para encauzar sus aguas. Esto, debido a los desbordes que causaban las inundaciones periódicas. Pero el verdadero motivo era que las clases altas conocían de esta manera cuanto sembraban sus súbditos para luego saber cuánto debían cobrarles de impuestos.

Para medir las tierras los egipcios y los babilonios aprendieron a calcular el área de los rectángulos y de los triángulos usando cuerdas para resolver problemas de herencia, mas adelante conocieron polígonos como el pentágono, hexágono, heptágono y en especial los círculos. Gracias a estos descubrimientos por parte de estas y otras civilizaciones se lograron: creación del sistema sexagesimal para elaborar el calendario y el almanaque, útiles para el cultivo del cereal; nace la astronomía; la división de la circunferencia en trescientos sesenta grados.

El hombre entonces, ve la necesidad de crear instrumentos que le permitieran acercarse más a la realidad de los objetos u otros; por lo tanto, los primeros instrumentos serán en su principio solo punzones y tablillas encerradas (ver (http://www.geocitiescom/fudbiro/Antecdentes.html)), y más adelante para poder conseguir firmeza en los trazos e idealizar los objetos a dibujar crea la regla y el compás.

3.2 Pensamiento matemático Griego

Para los antiguos griegos, la matemática era un arte y estaba más vinculada con la filosofía que con los problemas prácticos de la vida ordinaria.

El tratamiento que le dieron la dividió en cuatro campos diferenciales y bien reconocibles: la teoría de los números, la geometría métrica (referida al desarrollo de las fórmulas para calcular el área y el volumen de las figuras y cuerpos geométricos conocidos), la teoría del razonamiento, y la geometría no métrica centrada en las construcciones geométricas con regla y compás.

De todo esto, fue el último campo el que ocupó el lugar privilegiado y en el cual hicieron más aportes.

Este tipo de geometría era, según la consideración de Platón (Grecia, 427 – 347 a. C.), el arte de la mente. Su concepción de un mundo de las ideas y de un mundo de los sentidos se ve reflejada directamente en las construcciones. En el mundo que percibimos todos los días, el mundo real, el potencial de la regla y el compás se veía reducido a una simple aproximación que podía alcanzar mayor o menor grado de precisión. Pero en el mundo ideal, el que se manifiesta en nuestras mentes, las construcciones son perfectas y manifiestan de manera pura a la belleza.

La razón de esto se encuentra en que las rectas y las circunferencias eran vistas como las curvas perfectas y básicas a partir de las cuales todas las demás construcciones eran posibles. Y su presencia en el mundo físico se lograba a través de la regla y el compás, los denominados instrumentos divinos.

Con ellos se aseguraba una geometría simple, ordenada, armónica y estéticamente bella. Y fue justamente esto, con el objetivo de mantenerla así, inalterable y cercana a lo ideal, lo que motivó la implementación de restricciones arbitrarías a lo que se podía utilizar para crear las construcciones. Además, Platón consideraba que cualquier otro instrumento haría intervenir y depender demasiado del mundo físico, dejando relegado al mundo de lo ideal y lo perfecto. En tanto que Pappus (Grecia, Siglo V) indicaba que si una construcción puede realizarse con regla y compás, cualquier otra solución utilizando medios distintos no era satisfactoria.

Es importante también mencionar aquellos filósofos griegos que dieron su aporte en la geometría y en la construcción de polígonos y otras figuras ya que gracias a ellos se dio el carácter científico, incorporaron las demostraciones en base a razonamientos. Uno de ellos es Tales de Mileto (600 a.d.c), explicó diferentes principios geométricos a partir de verdades simples y evidentes, fue el primer filosofo que intentó dar una explicación física del universo, que para él era un espacio racional pese a su aparente desorden sin embargo, no busco un creador en dicha racionalidad, pues para el todo nacía del agua, la cual era el elemento básico de lo que estaban hechas todas las cosas. Suponía que la tierra flotaba en un océano infinito.

En geometría, y en base a los conocimientos adquiridos en Egipto, elaboró un conjunto de teoremas generales y de razonamientos deductivos que posteriormente fue recopilado Por Euclides en su obra Elementos.

Otro filósofo importante en el desarrollo de la geometría fue Pitágoras (582-496 a.c), su escuela era reconocida por el pentágono estrellado, que lo llamaba Pentalfa (cinco alfas). Jugaban con piedritas y formaron los números cuadrados y rectangulares, gracias a él y a su escuela se le da un carácter deductivo a la Geometría y su famoso teorema llamado por su nombre “Teorema de Pitágoras”.

Platón mostró la importancia del estudio de la geometría y para él, el orden en el que se debía impartir su enseñanza era el siguiente: las definiciones, los axiomas, los postulados y los teoremas; también Euclides lo tuvo en cuenta para la elaboración de su libro. Los sólidos platónicos, cuerpos platónicos, cuerpos cósmicos, sólidos pitagóricos o poliedros de platón, son cuerpos geométricos caracterizados por ser poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices se unen el mismo número de caras.

Para platón solo existen cinco poliedros regulares, los cuales también se denominan sólidos platónicos, el tetraedro regular, de cuatro caras triangulares; el hexaedro, o cubo de seis caras cuadradas; el octaedro regular, de ocho caras triangulares; el dodecaedro regular, de doce caras pentagonales; y el icosaedro regular de veinte caras triangulares. La denominación de sólidos platónicos se debe a que la escuela platónica atribuyo una correspondencia mística entre el tetraedro, el cubo, el octaedro y el icosaedro, con lo cuatro elementos naturales: tierra, fuego, aire y agua, en cuanto al dodecaedro lo consideraban como la forma que envuelve la totalidad del universo. Castillo [3].

3.3 Las primeras construcciones de polígonos regulares con regla y compás

Se puede decir que una Construcción con Regla y Compás consiste en la determinación de puntos, rectas (o segmentos de ellas) y circunferencia (o arcos de la mismas) a partir de una regla y un compás. Collantes [5]. La geometría clásica griega fue la primera en implementar la norma para que todas las construcciones fueran realizadas con estos instrumentos, y aparte de estos, existieron otros básicos que fueron utilizados. Para los griegos todas las figuras que se imaginaban debían ser sistemáticamente construibles a través de estos instrumentos, de lo contrario lo consideraban poco elegante.

Existieron considerables intentos para la construcción de figuras con regla y compás entre ellas se encuentra: Abul Wefa (Persa del siglo X), que se preocupó por los objetos que podían ser construidos solo con regla y compás rígida o compás oxidado, un instrumento que permitía trazar circunferencias de único radio prefijado. Para la época del Renacimiento, Leonardo Da Vinci y otros se preocuparon por este tipo de construcciones, pero hasta 1673, cuando apareció en Ámsterdam un libro anónimo (posteriormente se supo que el autor fue George Mohr), llamado Compendius Euclidis Curiosi que daba un tratamiento serio al problema. Más adelante en Londres, William Leybourn, escribió un libro acerca de "juegos y pasatiempos con regla y tenedor (un tenedor puede hacer las veces de compás rígido). En 1794 el italiano Lorenzo

Mascherani prueba que toda construcción con regla y compás podía ser realizada únicamente con el compás (aunque esto fue un aporte por Mohr).

En el siglo XIX el francés Poncelet, demostró que toda construcción con regla y compás puede ser llevada únicamente con regla y compás rígido (o sea un tenedor); y, el suizo Jacob Steiner, prueba que bastaba únicamente con una regla y una circunferencia fija en el papel para realizar las construcciones.

Solo hasta el siglo XIX, las demostraciones de los teoremas fundamentales sobre ecuaciones polinómicas, la comprensión de los números irracionales y trascendentes, y el algebra abstracta fueron explicadas a través de la regla y compás, pero hubo otros teoremas que no fueron posibles de explicar a través de estos instrumentos tales como: la construcción de la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo y la construcción del heptágono regular (el primero de los infinitos polígonos regulares imposible de crear con regla y compás), y el endecágono regular.

La historia muestra, que Napoleón pudo haber demostrado, en el momento en que le propone a Mascherani la posibilidad de realizar cualquier construcción con regla y compás a partir de una colección infinita de palillos de dientes planos y del mismo tamaño; Esta demostración, solo fue validada en el año de 1939 por Dawson. Para el siglo XX, finalmente se prueba que solo hacía falta la regla, el centro de la circunferencia y un arco de tamaño arbitrario de la misma.

Gauss a los 19 años encontró una construcción geométrica para construir el polígono reguilar de 17 lados (17-gono regular), (1796). Euclides proporcionó construcciones, utilizando regla y compás, para polígonos regulares con 3, 5 y 15 lados; también sabía que estos números podían duplicarse repetidamente bisecando ángulos, lo que daba polígonos regulares con 4, 6, 8 y 10 lados, y así sucesivamente, pero Euclides no dio construcciones para polígonos de 7 lados, de 9 lados o de cualquier otro número de los recién listados. Durante aproximadamente dos mil años el mundo matemático supuso que Euclides había dicho la última palabra y no se podía construir ningún otro polígono regular. Stewart [16] Gauss demostró que no era así. Gauss no dejo evidencia alguna de cómo podría construirse el 17-gono regular, pero Johannes Erchinger fue el primero en demostrar un método para construir el 17-gono regular (Heptadecágono), y lo muestra en

64 pasos. También En el año de 1837 Wantzel probó la condición necesaria; que Gauss también creyó, pero que no dio ninguna demostración alguna.

En la actualidad solo se saben construir de forma exacta 5 polígonos regulares, tales que el número de sus lados, n, sea un número primo (n = 3, 5, 17, 257 y 65.537 y se sospecha que no existen más, el de 257 lo construyó Richelot en 1832 y el de 65.537, De Lingen en 1894. (Ortega 2005). Desde el siglo XIX Gauss mostró que para que un polígono fuera construible con regla y compás debía tener una cantidad de lados que fuera un número primo de la forma $2^{2^n} + 1$, (n= 0, 1, 2, . . .) que se llaman primos de Fermat. Conocemos 5 mencionados anteriormente.

3.4 Problemas Griegos

Los problemas más famosos que se propusieron para su resolución por medio de la regla y el compás son la cuadratura del círculo, duplicación del cubo, y la trisección del ángulo; a los que a veces se agrega la construcción del heptágono regular (el primero de los infinitos polígonos regulares imposibles de construir con regla y compás).

En realidad, estos problemas son generalizaciones de otros problemas ya propuestos por los griegos, teniendo en cuenta que la importancia de su geometría no es sólo el aspecto teórico, sino también en lo práctico; se preocuparon de construir sistemáticamente cada figura que imaginaban. Puesto que cualquier ángulo puede ser bisecado de una manera sencilla, era natural plantearse la trisección. Sí la diagonal de un cuadrado es igual al lado de un cuadrado cuya área es el doble que la del primero. Porque no intentar algo similar con dos cubos. Y el caso de la cuadratura encaja dentro de un conjunto de problemas muy habituales para los griegos en los que se debía construir una figura de una forma dada y de área igual a la otra figura dada. Por último el trazado del polígono de siete lados se desprende directamente de la posibilidad real de construir triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos regulares.

La otra característica particular de estos problemas es la sencillez del enunciado, el cual podría pertenecer de manera perfecta a cualquier libro de enseñanza de nivel primario o secundario, pero sin embargo han interesado a la humanidad durante más de 2000 años. Así, el problema puede ser comprendido por una persona ajena a las matemáticas. Al respecto, es de anotar que su solución está relacionada con la teoría de cuerpos. Fraleigh [8]

Se han encontrado numerosas soluciones aproximadas con regla y compás, y soluciones exactas utilizando otros instrumentos. Y aunque se demostró consistentemente que estos problemas no pueden resolverse como pedían los griegos, todavía en nuestros días siguen apareciendo trabajos erróneos que aseguran haber encontrado la verdadera solución.

3.4.1 La trisección del ángulo

A un que es posible trisecar algunos ángulos particulares como por ejemplo el de 90°, el de 180°, se trata de probar que en general es imposible trisectar un ángulo con regla y compás. El argumento para su demostración es formular el problema en términos algebraicos lo cual conduce a una ecuación cubica con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

Si θ es la tercera parte de un ángulo dado α, se verifica:

$$\mathrm{Cos}(\alpha) = \mathrm{Cos}(3\theta) = \mathrm{Cos}(2\theta + \theta)$$

$$\mathrm{Cos}(\alpha) = \mathrm{Cos}(2\theta)\mathrm{Cos}(\theta) - \mathrm{Sen}(2\theta)\mathrm{Sen}(\theta)$$

$$\mathrm{Cos}(\alpha) = [\mathrm{Cos}^2(\theta) - \mathrm{Sen}^2(\theta)]\mathrm{Cos}(\theta) - [2\mathrm{Sen}(\theta)\mathrm{Cos}(\theta)]\mathrm{Sen}(\theta)$$

$$\mathrm{Cos}(\alpha) = \mathrm{Cos}^3(\theta) - 3\mathrm{Sen}^2(\theta)\mathrm{Cos}(\theta)$$

$$\mathrm{Cos}(\alpha) = \mathrm{Cos}^3(\theta) - 3[1 - \mathrm{Cos}^2(\theta)]\mathrm{Cos}(\theta)$$

$$\mathrm{Cos}(\alpha) = 4\mathrm{Cos}^3(\theta) - 3\mathrm{Cos}(\theta)$$

Para probar que en general no es posible hacer la construcción basta tomar un ejemplo para el cual no sea posible. Sea $\alpha = 60°$, entonces: $\mathrm{Cos}(\alpha) = ½$ y $\theta = 20°$. Luego en la ecuación tenemos:

$$\mathrm{Cos}(\alpha) = 4\mathrm{Cos}^3(\theta) - 3\mathrm{Cos}(\theta)$$

$$½ = 4\mathrm{Cos}^3(\theta) - 3\mathrm{Cos}(\theta)$$

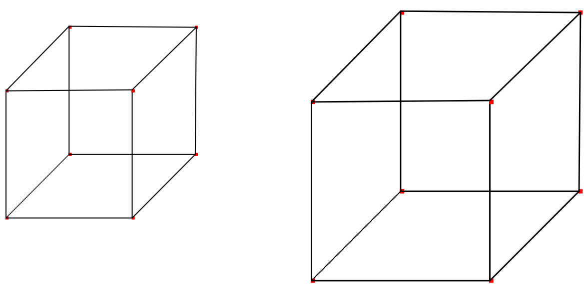
$$8\mathrm{Cos}^3(\theta) - 6\mathrm{Cos}(\theta) - 1 = 0,$$

Como Cos(20°) es la solución de la ecuación y 2Cos(20°) será la solución de la ecuación: $4X^3 - 3X - 1 = 0$, pero las únicas posibles raíces racionales de esta ecuación son $\pm$ 1 y ninguna verifica la ecuación. Luego 2Cos (20°) no puede ser construible y en consecuencia Cos(20°) tampoco. ORE [13]. Wantzel demostró para este caso que: “si una ecuación cúbica con coeficientes racionales no tiene ninguna raíz racional entonces ninguna de sus raíces es representable con regla y compás. Pérez [14].

3.4.2 La duplicación del cubo

Dado un cubo de volumen determinado, se trata de construir, con regla y compás, la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen del cubo dado.(ver figura 3-24).

Figura 3-24: La duplicación del cubo.



Este problema tiene una leyenda: los sacerdotes del templo de Delfos aseguraron que no se acabaría la epidemia de fiebre tifoidea que azotaba a Grecia en el año 430 a. C, mientras no se construyera un templo a Apolo de volumen el doble del existente.

Para este problema basta suponer que el cubo dado tiene volumen la unidad. Se trata entonces de encontrar un número construible x tal que $x^3 = 2$; es decir, un número $x \in \mathbb{C}$, raíz de la ecuación:

$$x^3 - 2 = 0$$

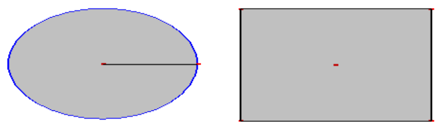
Como es una ecuación cubica con coeficientes racionales, si la ecuación tiene una raíz en $\mathbb{C}$, entonces tiene una raíz en $\mathbb{Q}$. Ore [13].

Sin embargo, las únicas posibles raíces racionales son $\pm$ 1 y $\pm$ 2 y ninguna de estas verifica la ecuación. Por lo tanto, la ecuación no tiene raíces en $\mathbb{C}$ y la construcción es imposible.

Aunque $\sqrt[3]{2}$ si es algebraico, porque es solución de una ecuación polinómica $x^3 - 2 = 0$ no es representable con regla y compás pues aparece un radical cúbico de resultado no racional (sólo lo sería si el radical cúbico fuera exacto o diera un resultado racional ya que este sería construible). Pérez [14].

3.4.3 La cuadratura del círculo

Figura 3-25: La cuadratura del círculo.



Este problema fue propuesto por Anaxágoras en el 500 a.C., Se trata de construir con regla y compás un cuadrado de área igual al círculo dado. (Ver figura 3-25).

Para este problema basta suponer que el círculo dado tiene radio la unidad. Se trata entonces de encontrar un cuadrado de lado $\sqrt{\pi}$.

Como el área del círculo se calcula a través de la formula $A = \pi r^2$ y como el radio es 1 tenemos que $A = \pi$ y la del cuadrado $A = l^2$ (siendo l el lado del cuadrado), esto implica que $l^2 = \pi$ y $l = \sqrt{\pi}$ pero π no es un número que se pueda construir con regla y compás haciendo imposible trazar un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$ el cual sería el lado del cuadrado. *Liendemann* (1852 – 1939) matemático Alemán logró demostrar en 1882 con una modificación del método dado por *Hermite* para el número e, que π es trascendente lo que significa que no existe un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$ que tenga a π como raíz (los números que no son trascendentes se llaman algebraicos). Este problema demuestra que la cuadratura del círculo es imposible, puesto que todo número construible es algebraico. Ore [13]. Wantzell "si una ecuación cúbica con coeficientes racionales no tiene ninguna raíz racional entonces ninguna de sus raíces es representable con regla y compás". Pérez [14].

4. Aspectos didácticos

La Propuesta didáctica está dirigida a estudiantes de grado 6° de educación básica. En particular, se pretende inicialmente aplicarla en la Institución Educativa Bolivariano en el Departamento Archipiélago de San Andrés Isla. El colegio cuenta con 400 estudiantes aproximadamente y el grado sexto con 60 estudiantes, los cuales representan la muestra.

El diseño de las actividades sigue los lineamientos propuestos en el modelo de Van Hiele, en donde se propone una estrategia didáctica para el aprendizaje de la geometría.

Con el desarrollo de las actividades, se pretende que los estudiantes se motiven en el estudio de la geometría, verifiquen que esta se encuentra reflejada en objetos de la vida real y que de cierta manera modela nuestro universo, pero además, se pretende desarrollar la creatividad, la intuición, la capacidad crítica, la capacidad de análisis y la capacidad de síntesis. Las actividades consideran los conceptos necesarios para el aprendizaje del concepto de polígono regular y sus construcciones con regla y compás.

4.1 Modelo de Van Hiele como estrategia didáctica para el aprendizaje de la geometría

Para la propuesta se consideró un modelo de comprensión para la enseñanza de la geometría "el modelo de Van Hiele", siendo este, uno de los modelos más usados en la actualidad (a pesar que se desarrolla en los años cincuenta). El modelo comprende cinco niveles de comprensión relacionados con los procesos del pensamiento. Estos niveles son la Visualización, Análisis, Deducción Informal, Deducción Formal, Rigor, Luque [11].

Para el caso que nos ocupa y la población en cuestión, grado 6°, se pretende que los estudiantes alcancen el segundo nivel, esto es hasta el análisis.

En la Visualización el modelo considera que los estudiantes deben ser capaces de ver el espacio como algo existente alrededor de ellos, ver los conceptos geométricos como entidades totales y los alumnos deben aprender el vocabulario geométrico e identificar formas. Cuando el estudiante es capaz de discernir sobre las características de las figuras, es decir, a encontrarle un sentido visible de las propiedades el estudiante ha alcanzado un nivel de Análisis. Una Deducción Informal es aquella en la que el estudiante puede establecer interrelaciones entre las propiedades de cada figura y también las puede deducir; cuando el estudiante hace una deducción formal sus resultados obtenidos empíricamente se usan junto con técnicas deductivas. Cuando el alumno comprende el significado de la deducción como un todo o comprende el rol de los axiomas, se habla que ha realizado una Deducción Formal, quiere decir, que es capaz de construir demostraciones usando más de una manera. Finalmente, el Rigor es aquel en que el alumno es capaz de trabajar una variedad de sistemas axiomáticos y puede llegar a compararlos.

Para Van Hiele el modelo debía cumplir con algunas propiedades indispensables para el desarrollo de la formación del pensamiento geométrico: la *Secuencialidad*, que supone que cada alumno debe pasar por todos los niveles en orden; *Avance*, que pretende que el progreso de un nivel a otro depende más de algunos contenidos y métodos de instrucción que de la edad; *Intrínseco y Extrínseco,* los objetos geométricos trabajados en un nivel siguen siendo objeto de estudio del siguiente; la Lingüística; que consiste en la utilización adecuada de símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones; y, finalmente la Concordancia, aquella que sugiere que cada nivel de aprendizaje vaya acorde con el progreso esperado. Todas estas propiedades fueron tenidas en cuenta para la realización de los talleres, según el nivel de los estudiantes.

Los procesos utilizados por Van Hiele, fueron los escogidos para la elaboración de los talleres, es decir, en ellas están inmersa la interrogación, la orientación dirigida, la explicación, la orientación libre y la integración; que buscan la organización de la enseñanza de la geometría en donde el estudiante y el docente interactúan en la construcción de conceptos que en algún momento fueron dados pero no fueron aprehendidos por ellos.

Consideramos que las propuestas de Van Hiele para el aprendizaje de la geometría, y los modelos de evaluación sugeridos en la Taxonomía de Bloom, la evaluación por competencias y el modelo de evaluación por evidencias MBE, están relacionados en el sentido de que se pretende jerarquizar, de forma similar, el tipo de problemas y situaciones que lleven al aprendizaje de los conceptos.

4.2 Propuesta didáctica para la construcción de polígonos regulares

Con el diseño de las actividades se propone una metodología activa, centrada en el estudiante como protagonista de la actividad de enseñanza-aprendizaje, además la geometría es una asignatura práctica. El docente únicamente servirá de orientador para la consecución de los objetivos por parte del estudiante. Asimismo se quiere que el aprendizaje sea significativo, participativo y creativo, y que ayude al desarrollo del pensamiento geométrico del estudiante a través de la **conceptualización** , esta se refiere a la construcción de conceptos y de relaciones geométricas, **la investigación**, aquí el estudiante indaga acerca de las características, propiedades y relaciones entre objetos geométricos con el propósito de dotarlas de significados y **la demostración**, para que el estudiante desarrolle procedimientos de resolución de un problema que después tendrán que explicar, probar o demostrar a partir de argumentos que puedan convencer a otros de su veracidad.

A través de la conceptualización, la investigación y la demostración el estudiante debe desarrollar habilidades visuales, de comunicación, de dibujo, de razonamiento y de aplicación.

Es de anotar que los talleres y en especial las actividades que hay en cada uno de ellos, tienen como finalidad contribuir a mejorar la enseñanza y los procesos de aprendizaje, por lo tanto los talleres están orientados en temas y contenidos en donde los estudiantes presentan dificultades, y así favorezcan su aprendizaje, más aún, Lo importante de todo esto es que el estudiante le encuentre sentido a lo que aprende, y asimismo vaya construyendo su conocimiento y desarrolle sus habilidades.

Es importante anotar que los temas o mejor los contenidos de Geometría no han cambiado de una manera importante en las últimas décadas; lo que se quiere con esta propuesta es que el estudiante deje de ser un sujeto pasivo en su proceso de enseñanza – aprendizaje a ser un sujeto activo en dicho proceso. Así por ejemplo, se desarrollarán talleres constituidos por actividades, donde el estudiante se fundamente y ponga en práctica los conceptos previos y básicos de la geometría, se fundamente y deduzca las características y propiedades de los polígonos regulares, se fundamente y construya con regla y compás rectas paralelas, perpendiculares, ángulos, copiar ángulos, bisectriz de un ángulo, mediatriz de un segmento, polígonos construibles con estos instrumentos, etc. De tal manera que él mismo vaya construyendo significativamente su propio aprendizaje.

Es importante anotar que los contenidos y el desarrollo de los talleres tienen una secuencia con el fin de no perder ningún detalle, de esta manera el estudiante se fundamente y desarrolle su pensamiento geométrico, por eso como método de enseñanza-aprendizaje no se utilizará los métodos tradicionales como el expositivo para la transmisión por parte del docente de los conceptos y propiedades fundamentales de segmentos, ángulos, bisectriz, mediatriz, triángulos, polígonos, etc.

El desarrollo de las actividades en cada taller será por parte del estudiante y el docente será su guía u orientador donde presente dificultades, lo que se quiere es que el docente intervenga lo menos posible, por consiguiente diremos que una metodología a seguir sería donde el estudiante pueda explorar, investigar y descubrir, construir, etc.

Consideramos que el estudiante debe familiarizarse con los conceptos previos como punto, recta, plano, segmento, rayo, entre otros por eso tenemos preguntas en las que se le pide que dibuje o construir objetos del entorno que me sugieran la idea de estos, hay preguntas de observación de una figura en la cual tiene que identificar ciertos elementos de ella para poder contestar una preguntas sobre dicha figura, de compresión y análisis como ¿cuántas rectas distintas pueden pasar por dos puntos? O preguntas donde debe responder y justificar o argumentar (comunicar) su respuesta como ¿Es $\overline{\mathrm{AB}} = \overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$? _________ ¿Por qué?, entre otras.

En otros talleres el estudiante debe construir figuras con palillos o sobre un geoplano dándole ciertas condiciones como por ejemplo, construir si se puede un triángulo con dos lados iguales y uno desigual, o construir un triangulo conociendo sus tres lados o dos ángulos y un lado, en otros debe construir por ejemplo la perpendicular a una recta dada por un punto dado de la recta o exterior a ella, o trazar la recta paralela a una recta dada desde un punto exterior a la recta, también se le pide construir polígonos regulares buscando el ángulo central.

En los talleres podemos encontrar preguntas donde debe contestar verdadero o falso las cuales las debe comprender, analizar y luego justificar su repuesta como por ejemplo: un ángulo agudo tiene una medida mayor que un ángulo recto, donde debe dar la repuesta y justificarla, otro ejemplo: la medida de un ángulo depende de la medida de sus lados, de igual forma debe dar repuesta y justificarla, otra de este estilo que se encuentra en los talleres es por ejemplo: ¿siempre que se tiene tres segmentos de diferente longitud, se puede construir un triángulo? O como esta ¿siempre puedo construir un triángulo con dos segmentos de igual longitud y otro diferente. O por ejemplo se le pregunta es posible construir un triángulo rectángulo que sea equilátero.

Se tienen preguntas sobre cuadriláteros para determinar sus diferencias y semejanzas, sobre triángulos para determinar y deducir la relación entre sus lados; y actividades para deducir las propiedades de los polígonos como por ejemplo: ¿Qué relación numérica hay entre el número de lados de un polígono y el número de triángulos que se forman al trazar las diagonales que parten de un mismo vértice? Y Es posible deducir una fórmula para hallar el número de triángulos determinados por las diagonales trazadas desde un vértice para un polígono de n lados. ¿Cuál sería?

La propuesta está diseñada para que en un primer paso se fundamente al estudiante en los elementos y conceptos necesarios para poder enfrentar la construcción de polígonos regulares con regla y compás, ya que dichas construcciones necesitan de muchos elementos previos de la geometría. En algunos talleres se profundiza en sus contenidos con el objetivo de que el estudiante no le vayan quedando vacíos teóricos en geometría, todo esto crea confianza en el estudiante para su aprendizaje y para que desarrolle su pensamiento geométrico.

En el tema de regla y compás, para poderlo abordar, es necesario como esta propuesto en los talleres en los cuales al estudiante se le recuerda la forma de construir una paralela, una perpendicular, una bisectriz, una mediatriz, un triángulo, un triángulo equilátero, paralelogramo, un cuadrado, un pentágono, un hexágono, etc., entre otros, que se pueden construir con regla y compás y de aquellos que no se pueden construir con regla y compás como el heptágono dando su justificación según lo expuesto en el marco conceptual.

Se ha señalado la importancia que según la propuesta de seguir a Van Hiele trae para el aprendizaje de la enseñanza de la geometría. En este sentido la importancia de que el alumno sea participe en el proceso de construcción del conocimiento, en este sentido que construya sus propias figuras, deduzca sus propiedades y relaciones entre dichas figuras. Señalaremos la importancia de que interactúe con regla y compás.

4.3 ¿Por qué construcciones con regla y compás?

En las construcciones con regla y compás se debe visualizar que a partir de varios trazos precisos se pretende combinar la mayor cantidad de conceptos geométricos y únicamente se permite utilizar dos sencillos instrumentos. Los conceptos geométricos implican tratamientos mentales necesarios para el crecimiento cognitivo; y los dos instrumentos mencionados posibilitan la integración. Nos referimos a que el manejo de la regla y el compás, más allá de ser algo práctico, también ayuda a mejorar la capacidad cognitiva. Su correcto manejo requiere conocer y comprender parte de la geometría. Lo fundamental es que el estudiante se encuentre frente a la tarea de visualizar los distintos pasos a realizar, comprender el motivo de cada línea, poner en práctica su precisión y el concepto que tiene de ella, aprovechar al máximo los recursos con los que cuenta, tener claro el objetivo a alcanzar.

Mirando los fines de la educación en la cual se persigue el desarrollo integral del estudiante incluyendo su desarrollo psíquico, su desarrollo motor y su desarrollo intelectual, la construcción de figuras geométricas contribuye en todos estos aspectos, veamos porque:

En el aspecto motor tenemos que en la escuela se desarrollan actividades varias, tendientes a desarrollar las capacidades motoras del niño. Es allí donde se inicia la manipulación de los instrumentos geométricos. En la adolescencia y debido a los varios cambios que experimenta el joven, se nota menudo cierta torpeza en sus movimientos. No es cuestión de controlar sus movimientos, es cuestión de educarlos en forma armónica con la naturaleza. La construcción de una figura le exige aprender a dirigir el movimiento de todos sus músculos y coordinar sus impulsos.

En ese sentido, las construcciones geométricas contribuyen al desarrollo motor del estudiante y además le pueden ayudar a descubrir habilidades que él mismo no había descubierto.

En el aspecto psíquico: ver una figura bien hecha nos permite apreciar la simetría y la belleza. Hacer una figura bien hecha, nos permite sentirnos satisfechos de lo logrado, sentirnos capaces de hacer algo bien, fomenta nuestra autoestima. Es precisamente en la adolescencia periodo de transición entre la niñez y la edad adulta, cuando se necesitan recursos que ayuden al joven a reconocer capacidades propias, a valorarse a sí mismo y las construcciones en la geometría pueden ser un tal recurso.

En el aspecto intelectual: El uso de las propiedades de las figuras geométricas aplicado en la construcción de estas figuras exige un pensamiento, un razonamiento ordenado y claro aspectos estos fundamentales para el desarrollo intelectual del joven. Es posible que la resolución de un problema teórico de tipo “demuestre que ….” Asuste al estudiante. Pero, un problema que diga, “Construya un triángulo equilátero dada la longitud de su altura” es un problema que el estudiante considera practico y divertido aunque el profesor sabe que es un problema de razonamiento teórico.

Usualmente, para resolver un problema de construcción geométrica, se siguen los siguientes pasos:

1. Se supone el problema resuelto y se analizan de acuerdo con la teoría conocida las propiedades que satisfacen y que al utilizarlas llegamos a la solución del problema.
2. Se da un algoritmo de construcción, el procedimiento.
3. De acuerdo con el algoritmo del paso 2, se confecciona la figura correspondiente.
4. Se prueba que la figura satisface las condiciones del problema.

Debemos tener en cuenta, que cada uno de los pasos de la construcción debe ser posible de ejecutar con sólo el uso de la regla y el compás. Tsijli [18].

Como se dijo anteriormente en cada taller el alumno es parte activa del desarrollo de la temática. Para la construcción de figuras regulares, es indispensable que el estudiante trabaje con una geometría activa y viva. A través de los talleres el alumno irá elaborando su conocimiento en geometría a partir de actividades sobre objetos reales y concretos. Es por eso, que se propone la utilización de regla y compás y otras que están descritas en el taller como una de las herramientas que puede desarrollar en ellos esta geometría activa.

La propuesta para la enseñanza de construcción de figuras regulares se puede describir de la siguiente forma: se han diseñado talleres en los cuales se deben desarrollar por actividades donde se puede observar e ir construyendo polígonos regulares con regla y transportador, utilizando el siguiente procedimiento: se traza una circunferencia con el transportador, se divide 360° entre el número de lados del polígono que se quiere construir, para garantizar que los lados del polígono tengan la misma medida y finalmente se marcan puntos sobre la circunferencia, según la medida calculada mediante la división, y se trazan los lados del polígono, el estudiante debe construir ciertos polígonos siguiendo este proceso. Los otros talleres se presentan para la construcción de polígonos regulares utilizando regla y compás donde en las construcciones que vaya realizando tenga que trazar paralelas, perpendiculares, la mediatriz, bisectriz, arcos, etc., entre otros.

Se trabaja con actividades geométricas con una metodología de exploración, investigación y descubrimiento, construcción, etc., con y sobre objetos reales de los que rodean y viven en el mundo del chico. Esta actividad del estudiante debe ser de tipo mental, no confundirla con la manipulación no planificada, debe ser una actividad que sirva al menos como siembra para futuras abstracciones de ideas o conceptos nuevos y que le ayuden realmente a pensar.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

En este trabajo, centrándonos en aspectos fundamentales, se ha considerado como propuesta didáctica, las construcciones con regla y compás para la enseñanza de algunos temas de la geometría elemental.

Se espera que las actividades propuestas, en particular las relacionadas con la regla y el compás, permitan al estudiante aproximarse de una manera autónoma, aunque con la guía del profesor, a los conceptos básicos de la geometría elemental.

Podemos afirmar que:

- Las construcciones con regla y compás favorecen al desarrollo de las capacidades cognitiva, práctica, comunicativa, interpretativa.
- La regla y el compás son instrumentos básicos para realizar construcciones geométricas, su correcto manejo requiere conocer y comprender parte de la geometría.
- Se puede observar que a partir de varios trazos precisos se pretende combinar la mayor cantidad de conceptos geométricos, utilizando únicamente regla y compás.
- Con las construcciones realizadas con regla y compás se pueden por lo menos observar algunas propiedades de los polígonos regulares, como el número de triángulos en que puede descomponerse un polígono regular o que un hexágono se compone de 6 triángulos congruentes, el pentágono de 5 triángulos congruentes, etc.
- También podemos decir que las construcciones con regla y compás son muy útiles para enseñar simetrías como se puede ver en el anexo.
- Al enseñar el tema, es indispensable indicar y si es posible demostrar que no todo se puede lograr con regla y compás, que las construcciones con regla y compas tienen limitaciones insalvables y rigurosamente analizadas.

- Con esto hemos dado los primeros pasos del largo camino que representan las construcciones con regla y compas, queda mucho por aprender.
- A través de la historia de la matemática los trabajos realizados con regla y compás cumplen un papel importante, debido a que se utilizaron con el fin de resolver ciertos problemas y esto motivo una serie de adelantos y nuevas formas de pensar para el mundo científico. Sirvieron para buena parte de la matemática que surgió después.
- Es importante en el desarrollo del presente proyecto sobre construcción de polígonos regulares que el estudiante y el docente tengan el conocimiento de los conceptos básicos y fundamentales y profundizar en aquellos que sean necesarios para lograr los objetivos propuestos.
- Es importante el estudio epistemológico e histórico en la elaboración de este tipo de proyecto ya que se puede verificar los problemas que se pueden solucionar, las dificultades que se presentan en las construcciones con regla y compás.
- Es importante la elaboración de talleres flexibles, donde el estudiante participe activamente en el desarrollo de las diferentes actividades e interactué con el medio que lo rodea para construcción de su propio conocimiento.

5.2 Recomendaciones

Se recomienda a la secretaría de educación que promueva y apoye esta clase de investigaciones para que más adelante sean implementadas en otras instituciones.

Se recomienda a las instituciones educativas que se dé el espacio para realizar investigaciones sobre problemas pedagógicos en el aula de clase y en cada uno de los niveles en espacial en las áreas donde más se presentan dificultades de aprendizaje.

Se recomienda a los docentes que implementen en el aula de clase los talleres propuestos en este trabajo, como estos talleres son de carácter flexible que realicen los cambios pertinentes que ellos crean para mejorarlos y así obtener un mejor resultado cada vez que se implementen.

Se recomienda tener en cuenta los aspectos históricos y epistemológicos, así como trabajos relacionados alrededor de un tema en el momento de abordarlo.

A. Anexo: Conceptos básicos de geometría

TEMA: CONCEPTOS BASICOS DE GEOMETRIA

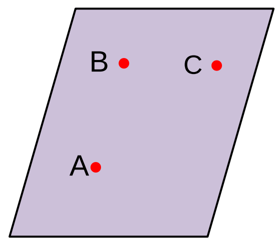
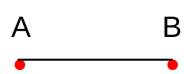
OBJETIVO:

a. Describir los conceptos de punto, recta y plano asociándolos con objetos de la naturaleza.
b. Diferenciar entre segmento y semirrecta y las relaciones entre ellos.

Primero se les explica, que los objetos físicos dan ideas geométricas y se les da ejemplos de objetos o de hechos que sugieran las ideas de punto recta y plano.

Teniendo en cuenta la actividad anterior donde se da el concepto intuitivo de punto, recta y plano podemos decir:

	Figura	Nombre	Símbolo
El **punto** es algo imaginario y por lo tanto no se puede medir. El punto es la figura geométrica más simple. Muestra un lugar.	A •	Punto A	A
Dados dos puntos distintos, existe sólo una **recta** que pasa por esos dos puntos.		Recta AB	$\overleftrightarrow{AB}$

Una superficie plana está conformada por infinitos puntos y se prolongan indefinidamente en todas la direcciones. Para representar un **plano** se utilizan tres de sus puntos, que no estén en una misma recta.		Plano ABC	
Para dos puntos cualesquiera A y B, el **segmento** $\overline{\mathrm{AB}}$ es el conjunto de los puntos A y B, y todos los puntos que están entre A y B. los puntos A y B se llaman los extremos de AB.		Segmento AB	$\overline{\mathrm{AB}}$
Semirrecta Parte de la recta que comprende un punto y todos los puntos que están en una dirección a partir de este.		Semirrecta AB	$\overrightarrow{AB}$

<u>Actividad 1</u>

Escribo o dibujo tres objetos (o partes de ellos) que me sugieran la idea de:

a. Punto	b. Recta
c. Plano	d. Segmento

Actividad 2

Contesta y luego justifica tu respuesta:

a. ¿Cuántas rectas distintas pueden pasar por un punto?

___

___

___

b. ¿Cuántas rectas distintas pueden pasar por dos puntos?

___

___

___

c. ¿Qué figura se forma cuando se cortan la pared del frente y el suelo del salón de clase?

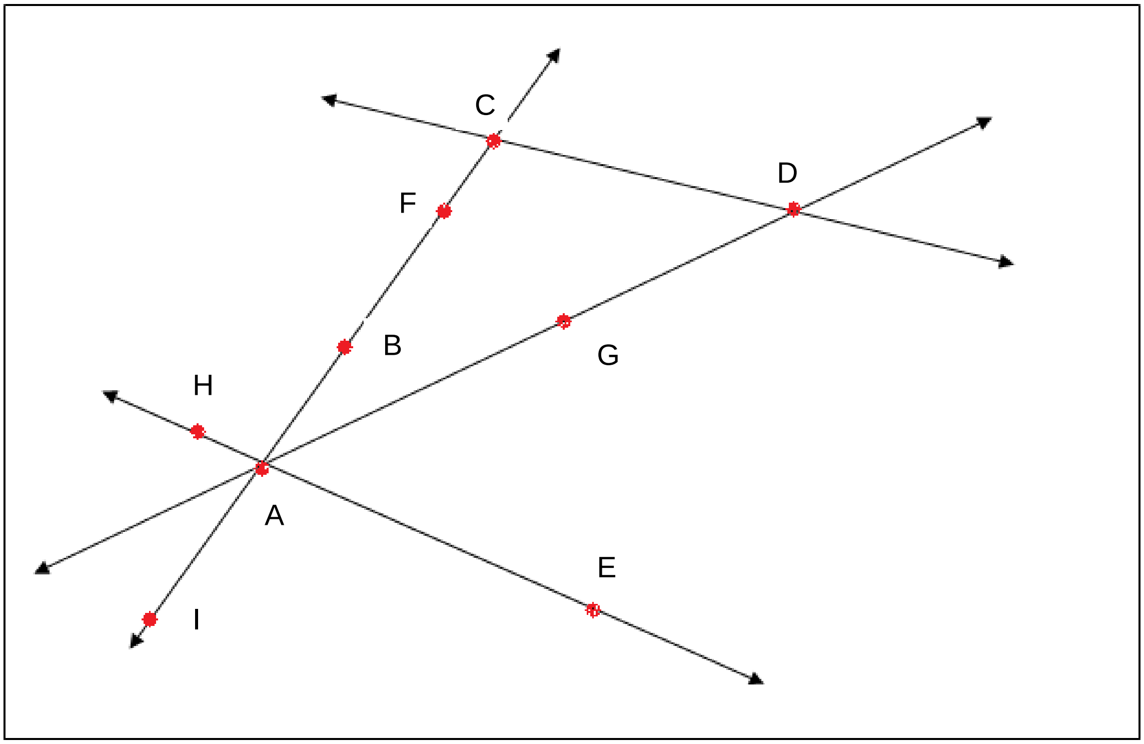
___

___

___

Actividad 3

Observe la siguiente figura y responda:



a. Nombra 5 puntos. _____ _____ _____ _____ _____

b. Nombra tres rectas. _____ _____ _____

c. Nombra un plano. _____

d. Nombra 5 segmentos. _____ _____ _____ _____ _____

e. Nombra 2 segmentos con extremo C. _____ _____

f. Nombra 4 segmentos con extremo A. _____ _____ _____ _____

g. Nombra 2 rectas que pasen por el punto C. _____ _____

h. Nombra 4 semirrectas. _____ _____ _____ _____

i. Nombra 2 semirrectas con extremo B. _____ _____

j. Ordena los segmentos del literal d, de menor a mayor en longitud. _____ _____ _____ _____ _____

k. Dibuje tres puntos que estén en una misma recta. ¿Cómo podríamos llamarlos _________________________________

Actividad 4

A, B y C son tres puntos que no están en línea recta.

a. ¿Cuántos segmentos determinan? ___________
b. ¿Cuáles son? ____
c. ¿Cuántas rectas determina? _________________
d. ¿Cuáles son? ____

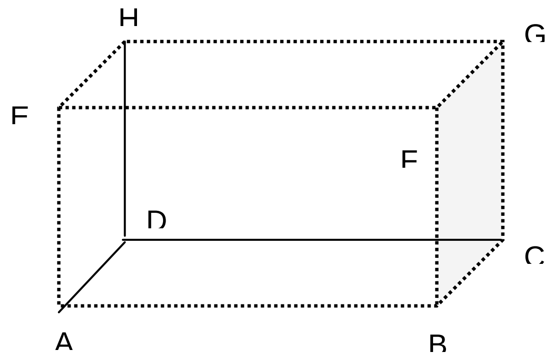
Actividad 5

En cada caso escriba V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

a. $\overline{AB} = A$ _________ ¿Por qué? _______________________________
b. $\overline{AB} = \overleftrightarrow{AB}$ _________ ¿Por qué? _______________________________
c. $\overline{AB} = \overline{BA}$ _________ ¿Por qué? _______________________________
d. $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$ _________ ¿Por qué? _______________________________
e. $\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ _________ ¿Por qué? _______________________________
f. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ _________ ¿Por qué? _______________________________
g. $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}$ _________ ¿Por qué? _______________________________

Actividad 6

Observe la siguiente figura y escribe:



a. Tres segmentos con extremo A. ______ ______ ______

b. Dos planos que contengan a $\overline{EF}$. ______ ______

c. Dos planos que contengan a $\overline{CG}$. ______ ______

d. Seis segmentos diferentes. ______ ______ ______ ______ ______ ______

e. Tres planos diferentes. ______ ______ ______ .

B. Anexo: Segmentos

TEMA: SEGMENTOS

OBJETIVO: Identificar segmentos paralelos y perpendiculares.

Materiales: Palillos, color rojo y azul, escuadra, lápiz y geoplano.

Actividad 1

- Tome una hoja de papel y dóblela por la mitad.
- Doblémosla por segunda vez teniendo mucho cuidado de hacer coincidir el doblez sobre sí mismo.
- Ahora desdoblemos el papel y con un lápiz pintemos las líneas que han quedado marcadas.
- Finalmente, compruebe con un transportador que todos los ángulos que se forman son ángulos rectos.

Actividad 2

Tome objetos dentro del salón donde se puedan formar ángulos rectos. Y compruébelos con una escuadra de triángulo rectángulo. Escribe los objetos encontrados y que cumplen la anterior decisión:

____

____

____

____

Actividad 3

Dibuja cinco (5) ángulos rectos en diferentes posiciones.

Contesta las siguientes preguntas:

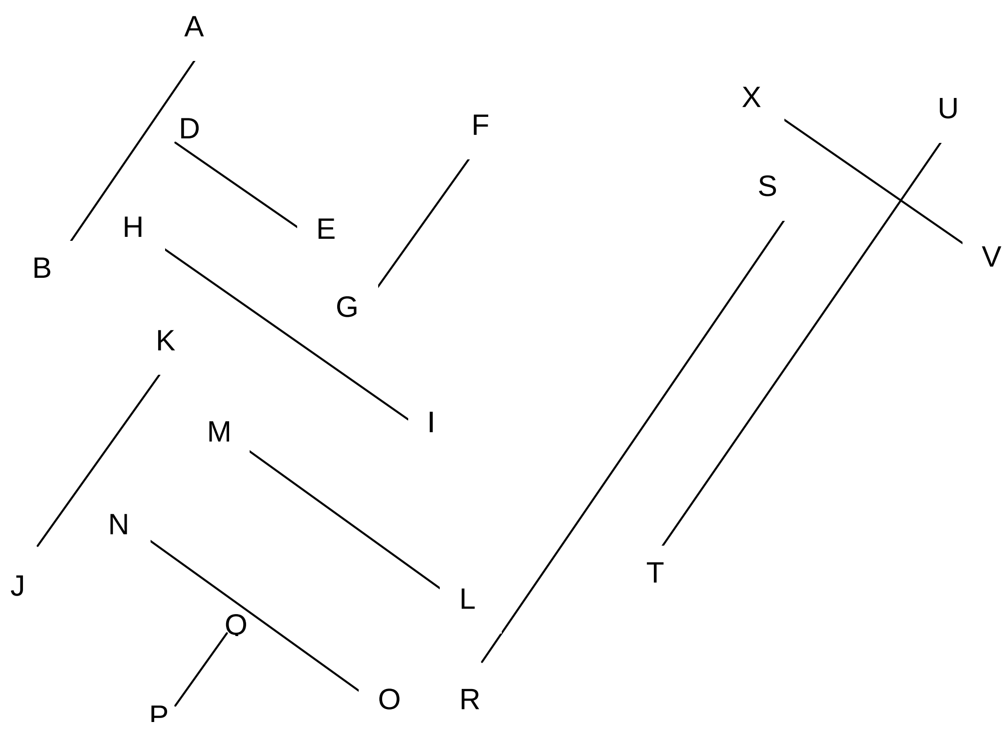
Teniendo en cuenta las actividades 4, 5, 6. Defina segmentos perpendiculares

____

____

Actividad 4

Teniendo en cuenta la siguiente gráfica responda:



a. Nombra cinco (5) pares de segmentos paralelos. _____ _____ _____ _____ _____

b. Nombra cinco (5) pares de segmentos perpendiculares _____ _____ _____ _____ _____

Actividad 5

Dibuja un geoplano de 50 x 50 y dibuja:

a. Cinco pares de segmentos paralelos.

b. Cinco pare de segmentos perpendiculares.

C. Anexo: Ángulos

TEMA: ÁNGULOS

OBJETIVO:

a. Identificar los elementos que construyen un ángulo de acuerdo a sus características.
b. Identificar y construir ángulos de acuerdo con su clasificación.

Materiales: Palillos, cartulina, números, colores, chinche, transportador,

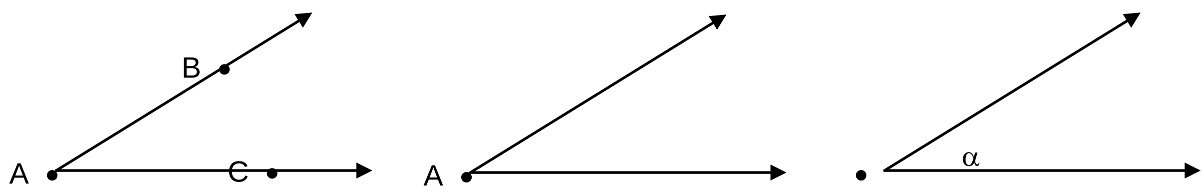
Actividad 1

a. Toma cinco (5) pares de palillos, y con cada par forme figuras de tal forma que dos extremos estén unidos.
b. Dibuja una forma o figura de actividad anterior
c. Le puedes dar un nombre a las figuras anteriormente dibujadas. ¿Cuál sería? ______________________________
d. A las figuras dibujadas en el literal b, le puedes dar un nombre a cada parte. __________si su respuesta es afirmativa ¿cuáles serian? ______________________

Actividad 2

Concepto de ángulo: Si dos semirrectas tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su reunión es un **ángulo**. Las dos semirrectas se llaman los **lados** del ángulo y el extremo común se llama **vértice**.

Si los rayos son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, entonces el ángulo se indica con $\angle$ BAC o con $\angle$CAB. También se pueden simbolizar indicando el vértice con una letra mayúscula así: $\angle$ A o escribiendo una letra griega o un número entre los lados del ángulo.



Actividad 3

Sobre un octavo de cartulina, construye un reloj con sus respectivos números y recorta dos tiras de papel de diferente color para que uno sirva de horario y otro de minutero. Ubica en el centro del reloj una tachuela o chinche para que sostenga las dos tiras de papel, con el fin de que puedan girar alrededor del reloj.

Realice los siguientes movimientos

a. Haga coincidir las dos tiras de papel con el número tres del reloj. El minutero hágalo girar un cuarto de vuelta en sentido contrario a las manecillas del reloj. Dibuja la figura que se forma entre el horario y el minutero, en tu cuaderno.

b. Haga coincidir las dos tiras de papel con el número tres del reloj. El minutero hágalo girar media vuelta en sentido contrario a las manecillas del reloj. Dibuja la figura que se forma entre el horario y el minutero, en tu cuaderno.

c. Haga coincidir las dos tiras de papel con el número tres del reloj. El minutero hágalo girar tres cuartos de vuelta en sentido contrario a las manecillas del reloj. Dibuja la figura que se forma entre el horario y el minutero, en tu cuaderno.

d. Haga coincidir las dos tiras de papel con el número tres del reloj. El minutero hágalo girar una vuelta en sentido contrario a las manecillas del reloj. Dibuja la figura que se forma entre el horario y el minutero, en tu cuaderno.

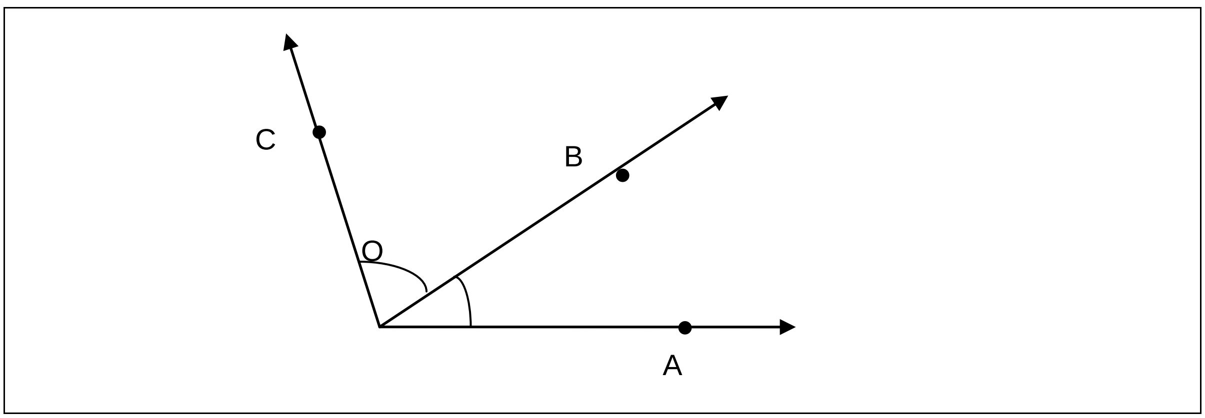
A los ángulos que giran un cuarto de vuelta equivalen a 90° y se les denomina ángulo recto. Los que giran media vuelta equivalen a 180° y se les denomina ángulos llanos o planos. Aquellos ángulos que giran tres cuartos de vuelta equivalen a 270° y a los que giran una vuelta completa equivalen a 360°.

Actividad 4

a. A los ángulos que giran menos de un cuarto de vuelta se le llaman **ÁNGULOS AGUDOS**. También podemos decir que un ángulo agudo mide más de 0° y menos de 90°.
b. A los ángulos que giran un cuarto de vuelta, se le llaman **ÁNGULOS RECTOS**. También podemos decir que un ángulo recto mide 90° .
c. A los ángulos que giran más de un cuarto de vuelta y menos de media vuelta, se le llaman **ÁNGULOS OBTUSOS**. También podemos decir que un ángulo obtuso mide más de 90° y menos de 180°.

Actividad 5

Observa la siguiente figura. (Está formada por tres semirrectas coplanares que tienen el mismo origen)



a. De termine cuántos ángulos se forman en el punto de intersección.

____

____

____

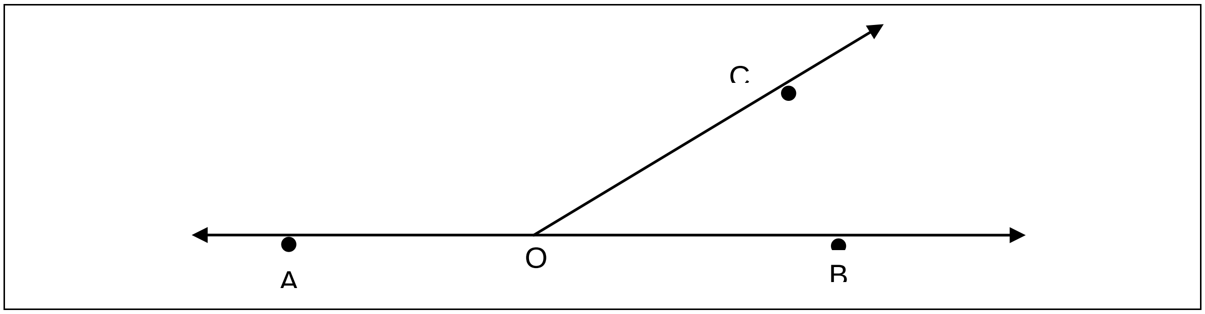
b. Dos de los ángulos que se forman son: ∠ AOB y ∠ BOC, estos ángulos tienen dos características importantes:

1. Tienen un lado en común: $\overrightarrow{OB}$.
2. Tienen el mismo vértice: O

c. Cuando dos ángulos son coplanares, tienen el mismo vértice y un lado común, decimos que son **CONSECUTIVOS**.

Actividad 6

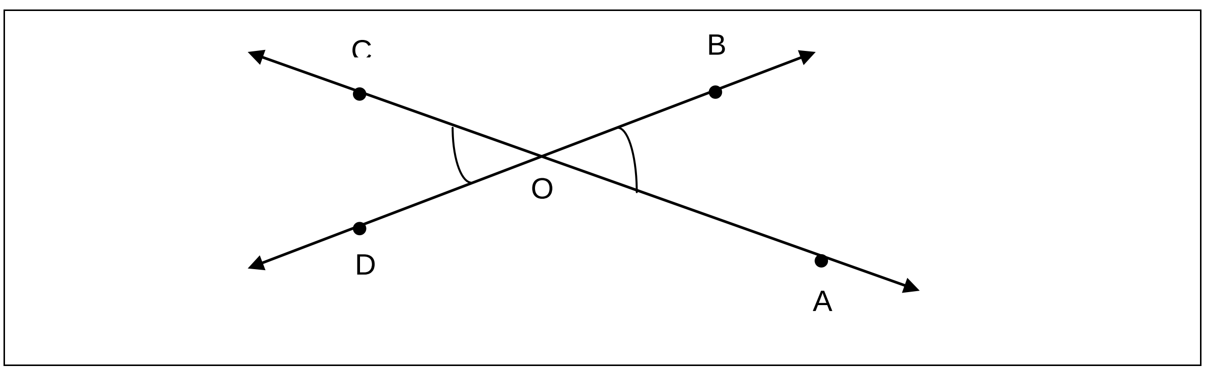
Observe el siguiente gráfico que corresponde a un par de ángulos consecutivos



a. Estos ángulos tienen una característica especial, los lados comunes $\overrightarrow{OA}$. y $\overrightarrow{OB}$. que forman una línea recta.
b. Por estas razones los ángulos consecutivos ∠ COA y ∠ COB se denominan **ÁNGULOS ADYACENTES**.

Actividad 7

Observe la siguiente figura. (Está formada por dos rectas de modo que se corten en un punto O)



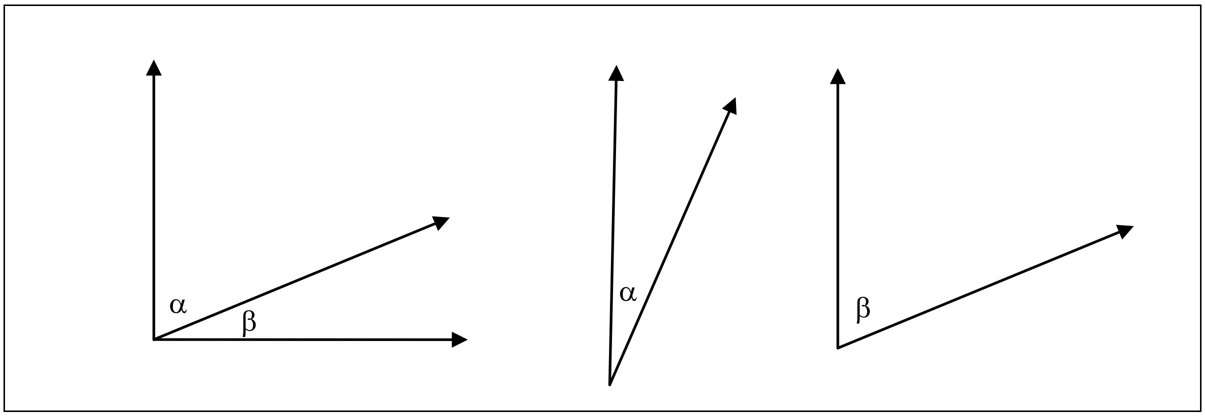
a. Los ángulos ∠ AOB y ∠ COD tienen el mismo vértice.
b. Los lados de uno son semirrectas opuestas de los lados del otro.

c. Por lo anterior los ángulos ∠ AOB y ∠ COD se denominan **OPUESTOS POR EL VÉRTICE**.

d. En la misma figura los ángulos ∠ COB y ∠ AOD también son **OPUESTOS POR EL VÉRTICE**.

Actividad 8

a. Dibuje un ángulo recto y trace una semirrecta cuyo origen coincida con el vértice del ángulo.



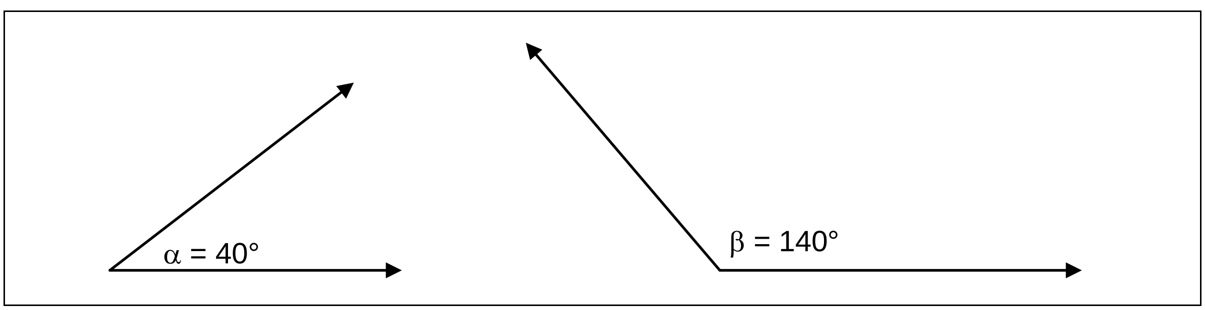
b. ¿Cuánto mide los ángulos α y β? ____

c. ¿Cuántos suman sus medidas? ____

d. Como la suma de sus medidas de los ángulos α y β es 90° decimos que los ángulos son COMPLEMENTARIOS.

Actividad 9

a. Dibuje dos ángulos α y β de tal forma que uno mida 40° y otro que mida 140°.



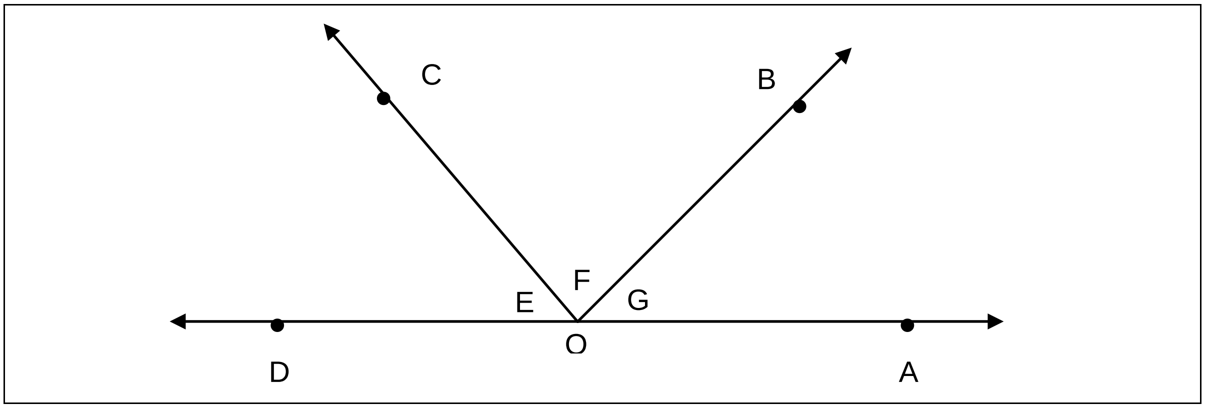
b. ¿Cuántos suman las medidas de los ángulos α y β? ______________________

c. ¿Es posible formar un ángulo llano con estos ángulos? ¿por qué?

d. Como la suma de los ángulos α y β es igual a 180° decimos que los ángulos son **SUPLEMENTARIOS**.

Actividad 10

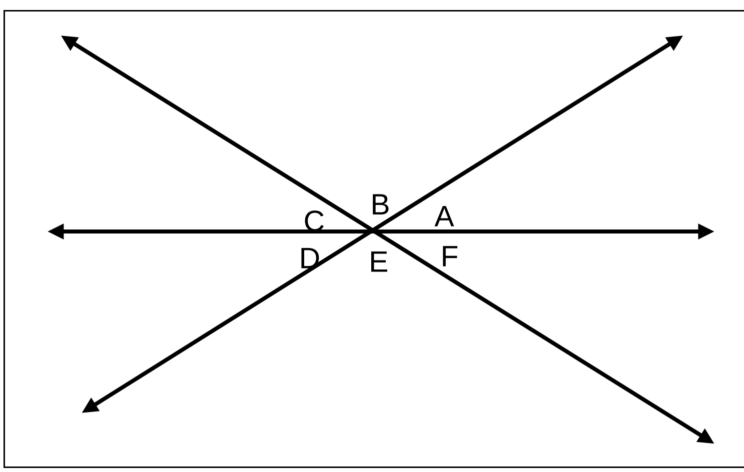
Escribir las posibles parejas de ángulos consecutivos existentes en la figura siguiente:



a. Parejas de ángulos: ____

b. En la misma figura del ejercicio anterior, escribir las posibles parejas de ángulos adyacentes.

c. Escribir las posibles parejas de ángulos opuestos por el vértice existentes en la siguiente figura:



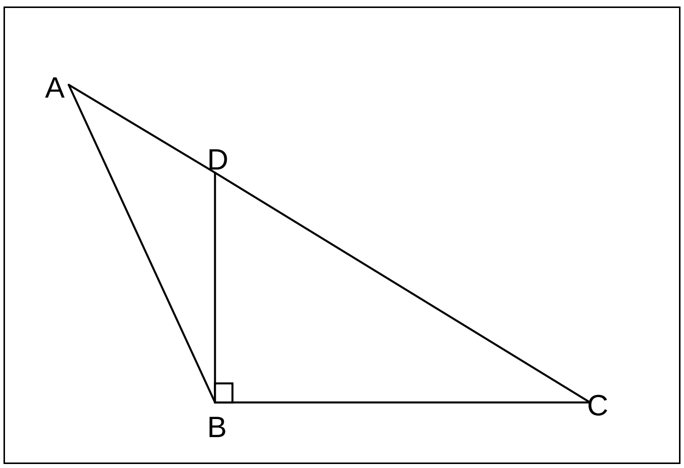
Escríbalos:

d. Hallo el complemento y el suplemento de los siguientes ángulos:

ángulo	Complemento	Suplemento
15°		
48°		
5°		
63°		
83°		

Actividad 11

Teniendo en cuenta la siguiente figura, identifique los siguientes ángulos:



a. Dos ángulos obtusos

_________ _________

b. Un ángulo recto.

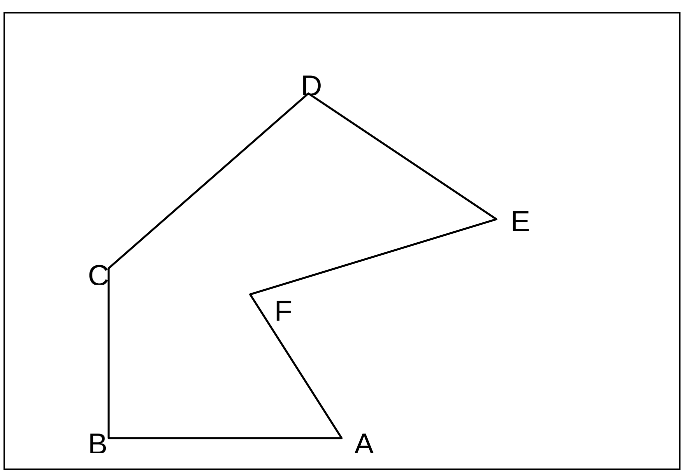
____

c. Tres ángulos agudos

_______ _______ _________

Actividad 12

Teniendo en cuenta la siguiente figura, identifique los siguientes ángulos:



a. Dos ángulos obtusos

_________ _________

b. Un ángulo recto.

____

c. Tres ángulos agudos

_________ _______ _______

Actividad 13

Dibuje un Geoplano de 40 x 40. En dicho Geoplano dibuja los siguientes ángulos:

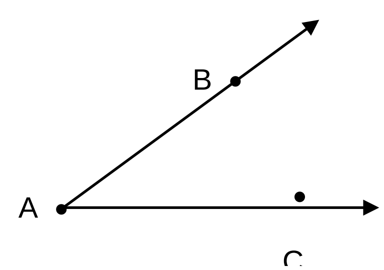
a. Un ángulo agudo
b. Un ángulo recto
c. Un ángulo obtuso
d. Un ángulo plano o llano
e. Un ángulo de una vuelta

Actividad 14:

Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsa (F). Justificar las respuestas falsas.

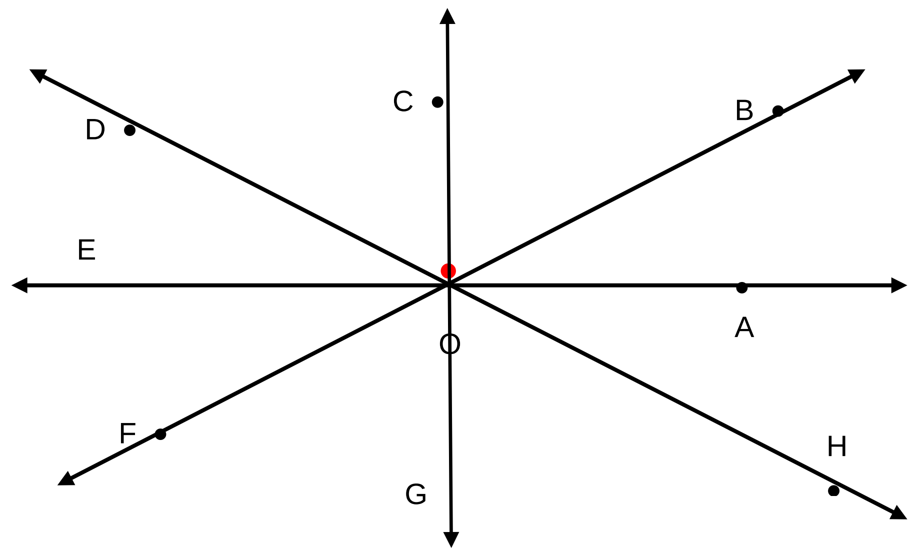
a. Un ángulo agudo tiene una medida mayor que un ángulo recto. ( )
b. La medida de un ángulo depende de la medida de sus lados. ( )
c. Los lados de un ángulo llano forman una línea recta. ( )
d. Cuando se duplica la medida de un ángulo agudo, se forma un ángulo obtuso. (
e. El suplemento de un ángulo siempre es obtuso. ( )
f. Los ángulos adyacentes siempre son suplementarios. ( )
g. Los ángulos suplementarios siempre son adyacentes. ( )
h. Dos ángulos agudos no pueden ser suplementarios. ( )
i. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. ( )

Un ángulo es una figura como las siguientes:



Un ángulo es la unión de dos rayos que tienen su origen común.

a. Nombra los rayos que forman el ángulo de esta figura: __________________________
b. Este ángulo se nombra como ∠ABC
c. Nombra los ángulos que encuentres en la siguiente figura.



Para medir los ángulos se utiliza el transportador

a. Dibuja un ángulo que mida 30°

b. Dibuja un ángulo que mida 90°

Los ángulos que miden 90° se llaman ángulos rectos.

a. Dibuja dos ángulos rectos en diferentes posiciones.

Los ángulos que miden menos de 90° se llaman ángulos agudos

b. Dibuja dos ángulos agudos e indica la medida de cada uno de ellos

c. Dibuja un ángulo que mida 120°

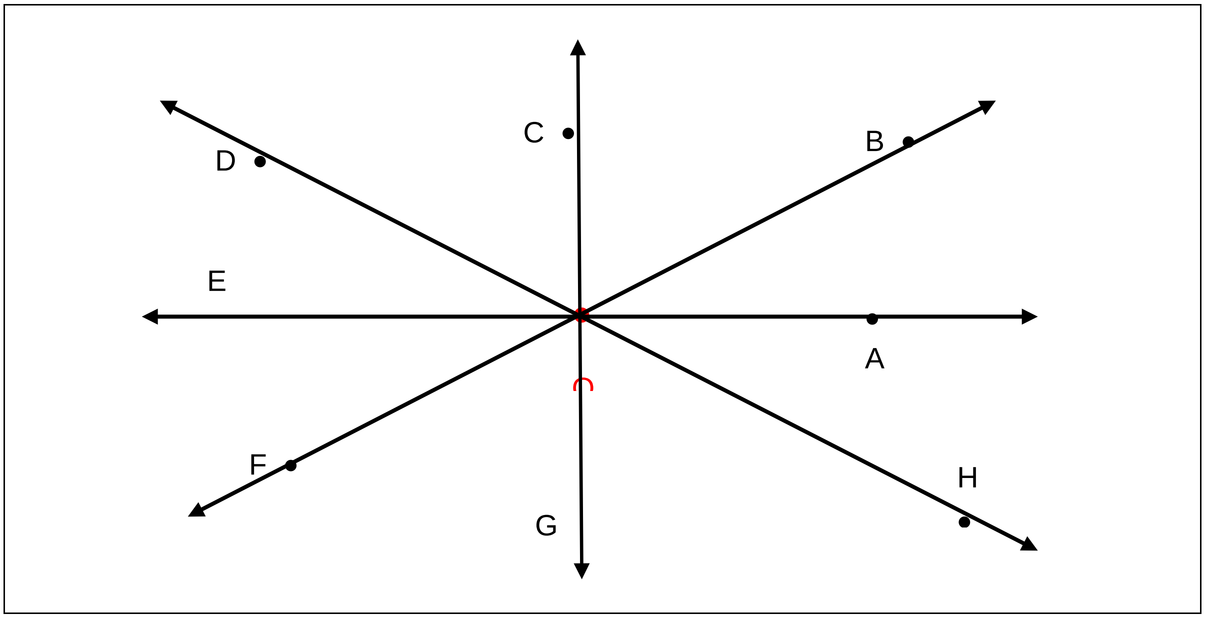
Los ángulos que miden más de 90° pero menos de 180° se llaman ángulos obtusos.

d. Dibuja dos ángulos obtusos e indica la medida de cada uno de ellos.

e. Dibuja un ángulo que mida 180°

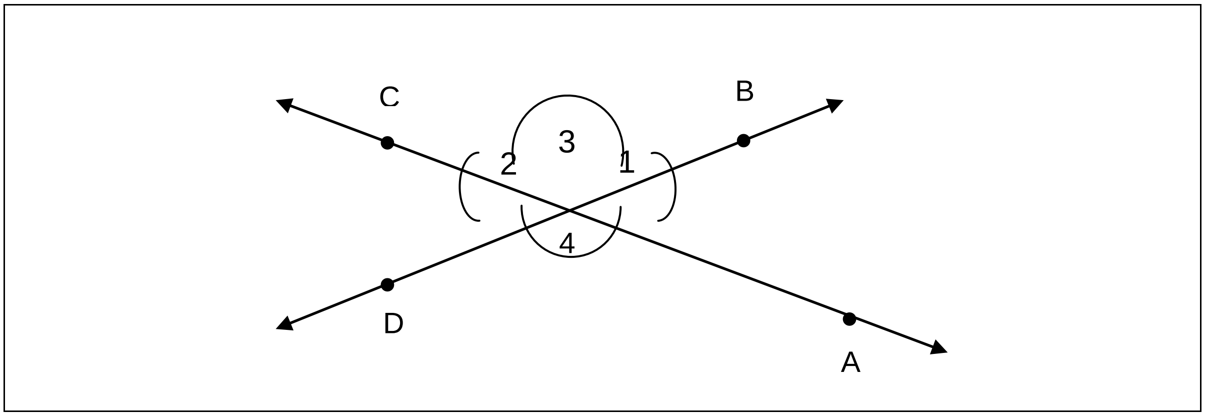
Los ángulos que miden 180° se llaman ángulos llanos.

Halla la medida de cada uno de los siguientes ángulos y escriba al lado de cada uno de ellos si es agudo, recto, obtuso o llano.



a. $m\measuredangle AOB =$ _______________ $\measuredangle AOB$ es un ángulo _________________________
b. $m\measuredangle AOC =$ _______________ $\measuredangle AOC$ es un ángulo _________________________
c. $m\measuredangle BOD =$ _______________ $\measuredangle BOD$ es un ángulo _________________________
d. $m\measuredangle DOF =$ _______________ $\measuredangle DOF$ es un ángulo _________________________
e. $m\measuredangle DOH =$ _______________ $\measuredangle DOH$ es un ángulo _________________________
f. $m\measuredangle COF =$ _______________ $\measuredangle COF$ es un ángulo _________________________
g. $m\measuredangle AOG =$ _______________ $\measuredangle AOG$ es un ángulo _________________________
h. $m\measuredangle EOC =$ _______________ $\measuredangle EOC$ es un ángulo _________________________
i. $m\measuredangle FOC =$ _______________ $\measuredangle FOC$ es un ángulo _________________________
j. $m\measuredangle AOE =$ _______________ $\measuredangle AOE$ es un ángulo _________________________
k. $m\measuredangle COG =$ _______________ $\measuredangle COG$ es un ángulo _________________________
l. $m\measuredangle COH =$ _______________ $\measuredangle COH$ es un ángulo _________________________
m. $m\measuredangle GOH =$ _______________ $\measuredangle GOH$ es un ángulo _________________________

En la figura los ángulos 1 y 2 se llaman opuestos por el vértice



Halla las medidas de los ángulos 1 y 2. ¿Qué puedes concluir?

____

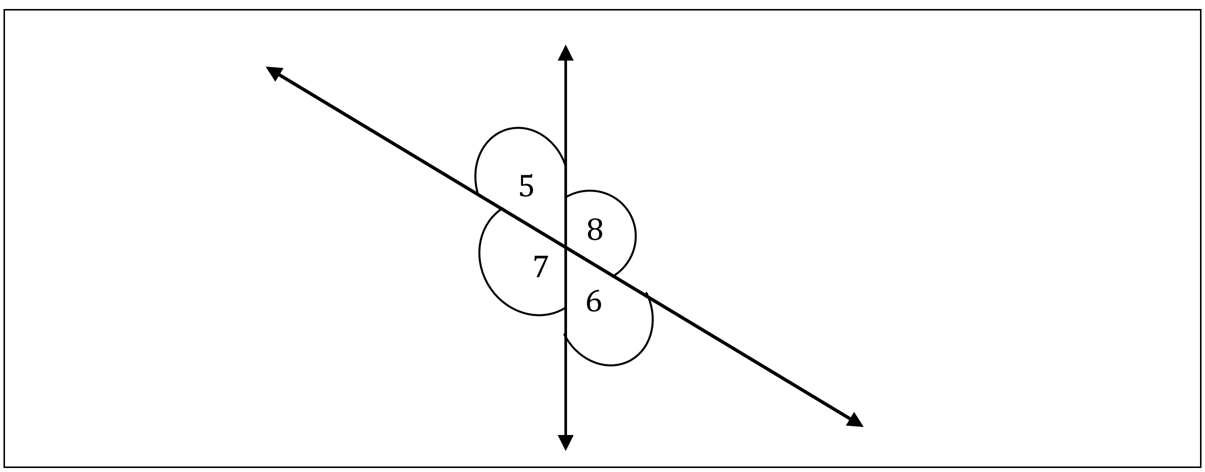
____

Completa las siguientes proposiciones:

a. En la figura anterior los ángulos 3 y _______ son opuestos por el vértice. La medida del ángulo 4 es ________ y la medida del ángulo 3 es__________. ¿Qué puedes concluir?

____

____



b. En la figura los ángulos 5 y _______ son opuestos por el vértice. La medida del ángulo 5 es ____ y la medida del ángulo 6 es__________. ¿Qué puedes concluir?

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90°, se dice que los ángulos son complementarios.

Si dos ángulos son complementarios, se dice que uno es el complemento del otro.

a. Dibuja un ángulo, halle su medida y luego dibuja su complemento.

b. Completa los siguientes enunciados.

- Si un ángulo mide 40°, entonces la medida de su complemento es_________.
- Si un ángulo mide 75°, entonces la medida de su complemento es_________.
- Si un ángulo mide ________, entonces la medida de su complemento es 48°.

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180°, se dice que los ángulos son suplementarios.

Si dos ángulos son complementarios, se dice que uno es el complemento del otro.

a. Dibuja un ángulo, halle su medida y luego dibuja su suplemento.

b. Completa los siguientes enunciados.

- Si un ángulo mide 72°, entonces la medida de su suplemento es ___________.
- Si un ángulo mide 115°, entonces la medida de su suplemento es _________.

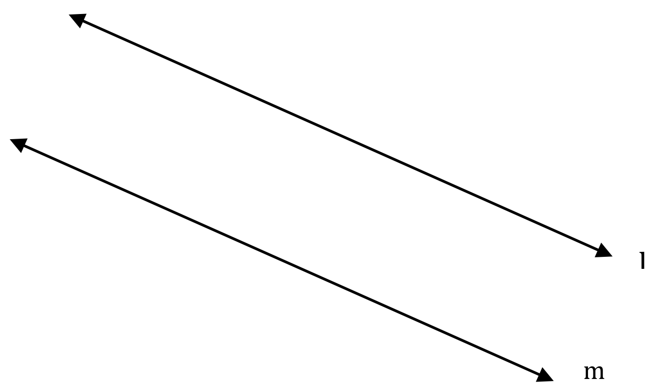
- Si un ángulo mide __________, entonces la medida de su suplemento es 98°.
- La medida de un ángulo es 20° más que su complemento. ¿Cuál es la medida del ángulo y de su complemento?

  La medida del ángulo es ________________

  La medida de su complemento es _______________

RECTAS PARALELAS

Las siguientes rectas son paralelas.

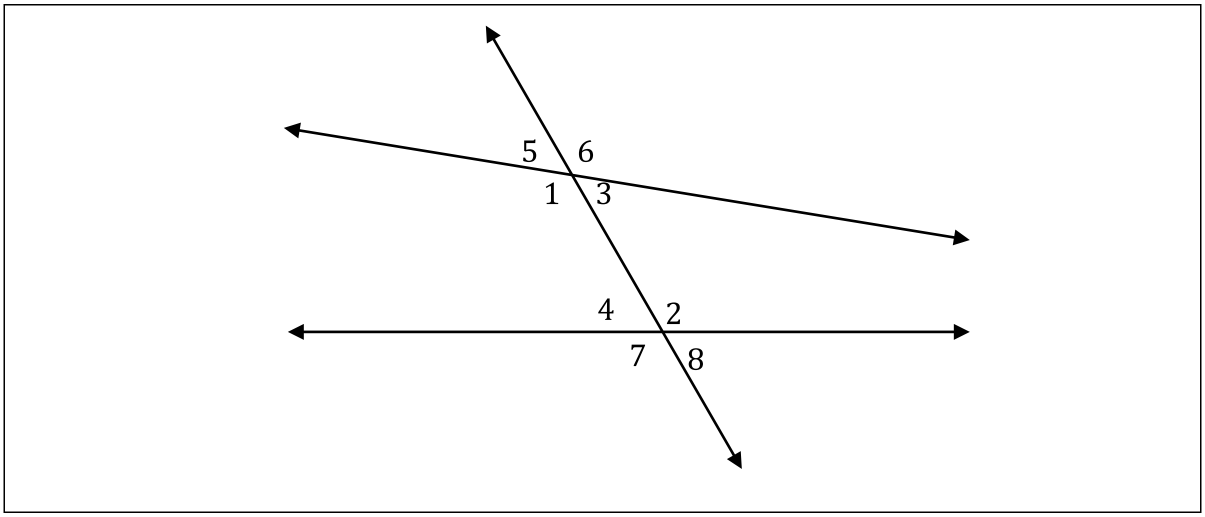


Dos rectas contenidas en un mismo plano son paralelas si no se intersecan.

a. Dibuja rectas paralelas

b. Dibuja rectas paralelas en otras posiciones distintas de la figura anterior.

En la figura los ángulos 1 y 2 se llaman ángulos alternos e internos.



Nombra otro par de ángulos alternos internos que se encuentren en la figura anterior.

____

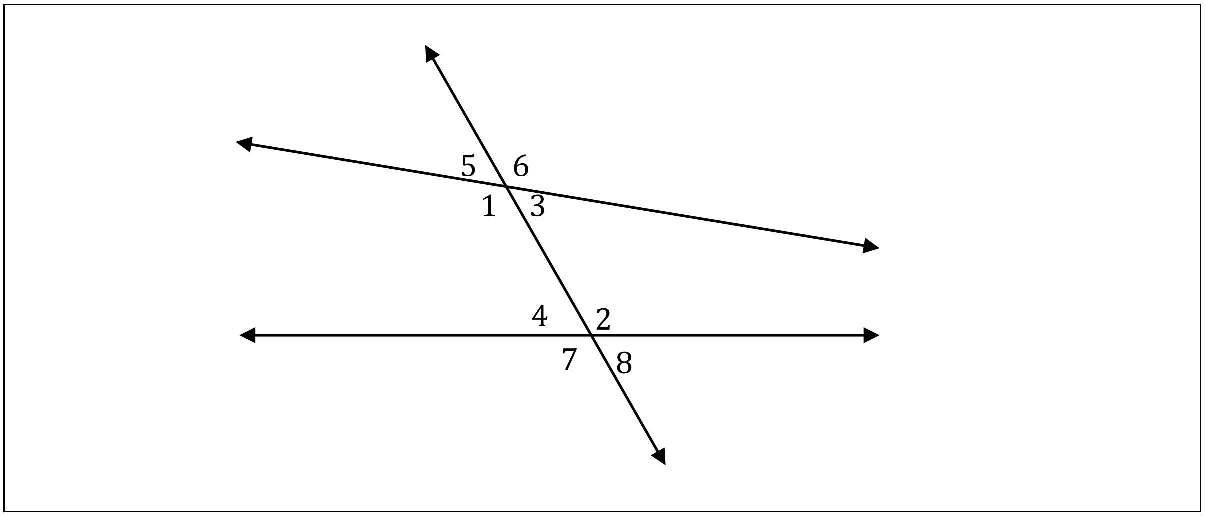
En la figura los ángulos 4 y 5 se llaman ángulos correspondientes.

Nombra otro par de ángulos correspondientes que se encuentren en la figura.

____

_

Observa la siguiente figura.



Completa los siguientes enunciados.

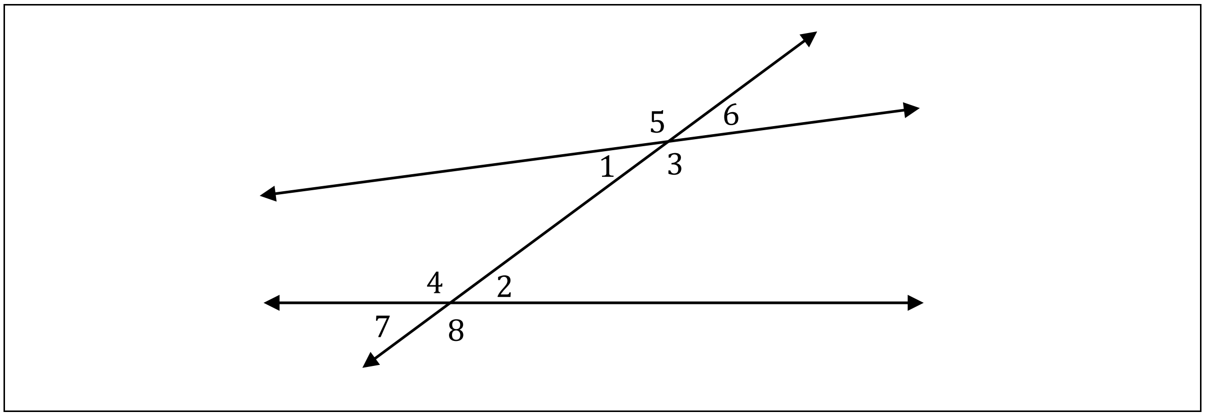
a. Los ángulos ___1_____ y ________ son alternos internos.

b. Los ángulos ________ y ________ son correspondientes.

c. Los ángulos ________ y ________ son alternos internos.

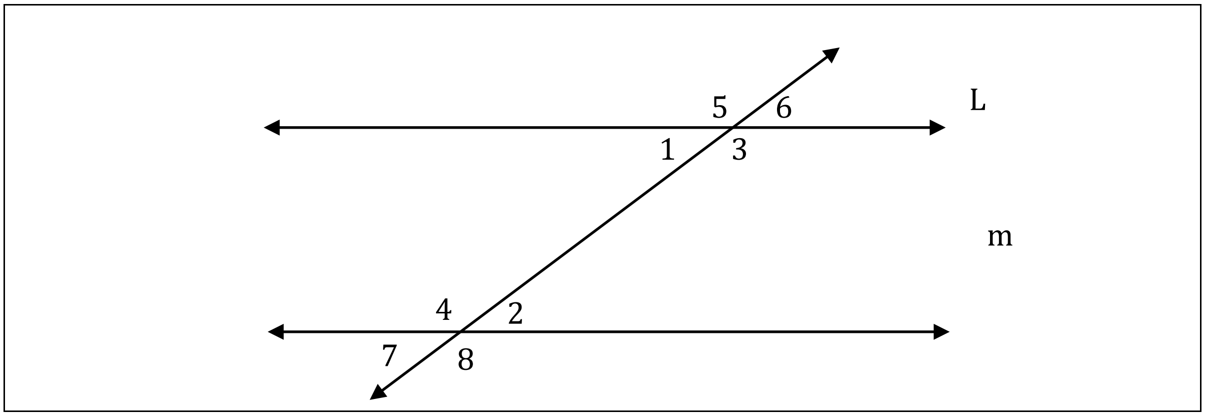
d. Los ángulos ________ y ________ son correspondientes.
e. Los ángulos ________ y ________ son opuestos por el vértice.
f. Los ángulos ________ y ________ son opuestos por el vértice.

Observa la siguiente figura



a. Halle una pareja de ángulos que sean opuestos por el vértice. ____________________
b. Halle una pareja de ángulos que sean alternos internos. ________________________
c. Halle una pareja de ángulos que sean correspondientes. ________________________

En la siguiente figura las rectas L y m son paralelas



Completa los siguientes enunciados.

a. Los ángulos **1** y **2** son alternos internos.
b. El ángulo 1 mide________ y el ángulo 2 mide________ ¿Qué puedes concluir?
____

c. Los ángulos **4** y **5** son correspondientes.

d. El ángulo 4 mide________ y el ángulo 5 mide________. ¿Qué puedes concluir?

____

e. Los ángulos **3** y **4** son alternos internos.

f. El ángulo 3 mide________ y el ángulo 4 mide________ ¿Qué puedes concluir?

____

g. Los ángulos **1** y **7** son correspondientes.

h. El ángulo 1 mide________ y el ángulo 7 mide________. ¿Qué puedes concluir?

____

i. Los ángulos **3** y **8** son correspondientes.

j. El ángulo 3 mide________ y el ángulo 8 mide________. ¿Qué puedes concluir?

____

D. Anexo: Triángulos

TEMA: TRIANGULOS

OBJETIVO:

a. Diferenciar e identificar los elementos de un triángulo.
b. Clasificar los triángulos de acuerdo con sus lados y de acuerdo con sus ángulos.
c. Utilizar las propiedades de los triángulos en la solución de problemas.

Materiales: Palillos, colores, papel, transportador, regla.

Actividad 1

a. Tomando grupos de tres palillos construye una figura cerrada con cada grupo.
b. Dibuja en el siguiente cuadro sus construcciones

c. Las figuras anteriores reciben el nombre triángulos ___________________________
d. Teniendo en cuenta el literal b, escribe las semejanzas y diferencias

Semejanzas	**Diferencias**

e. Escribe tu propio concepto de triángulo

____

____

f. ¿Qué elementos encuentras en un triángulo? Nómbrelos.

____

____

____

____

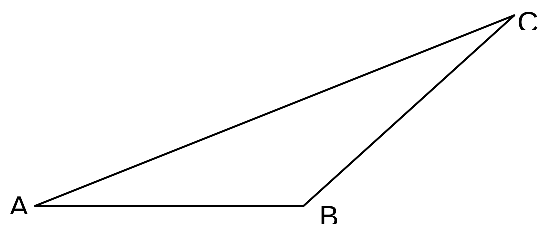
g. Identifica los elementos del siguiente triángulo.

Lados ____________________

Vértices ____________________

Ángulos ____________________

Otros ____________________



Actividad 2

Toma grupos de tres palillos de igual medidas de tal forma que la medida entre los grupos sea diferente. Con cada grupo construye triángulos y dibújelos en el siguiente cuadro.

¿Qué tienen en común los lados de los triángulos?________________________________

A estos triángulos construidos con esa característica le podemos dar el nombre de ***Triángulos Equiláteros***.

*Un **triángulo equilátero** es el que tiene los tres lados iguales o congruentes.*

Actividad 3

Se organizan grupos de tres palillos de manera que en cada uno la longitud de solo dos de ellos sea igual. Construye un triángulo con cada grupo y dibújelos en el siguiente cuadro.

¿Qué tienen en común los lados de los triángulos?________________________________

A estos triángulos construidos con esa característica le podemos dar el nombre de ***Triángulos Isósceles***.

*Un **triángulo Isósceles** es el que tiene los dos lados iguales o congruentes.*

¿Qué sucede cuando se cambia el lado diferente de estos triángulos de pequeño a grande? Experimenta tomando palillos y justifica tus respuestas.

____

____

____

Actividad 4

Se toman tres palillos de diferente longitud y con estos construye un triángulo. De igual forma construye otros triángulos bajo las mismas condiciones. Dibújelos en el siguiente cuadro.

¿Tienen algo en común los lados de los triángulos?________________________

A estos triángulos construidos con esa característica le podemos dar el nombre de ***Triángulos Escalenos***.

*Un **triángulo Escaleno** es el que tiene sus tres lados desiguales.*

Actividad 5

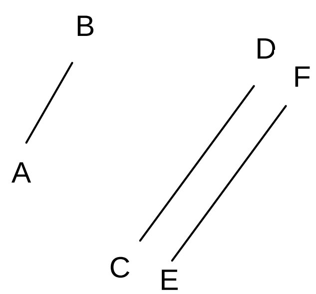
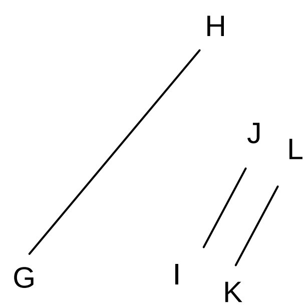
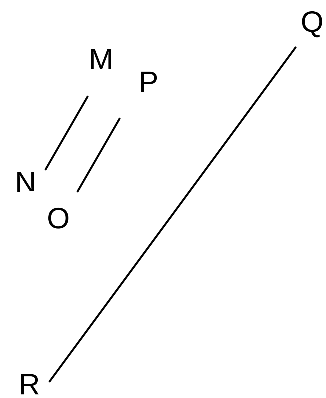
Complete la siguiente tabla

Cómo son los lados…	**Ejemplo de Triángulos gráficamente**	**Nombre**
Los tres lados son iguales o congruentes		
Sólo hay dos lados iguales o congruentes		

No hay dos lados iguales		

Actividad 6

Teniendo en cuenta los siguientes paquetes de palillos

Paquete A	Paquete B	Paquete C
		

a. En el paquete A se dan dos segmentos grandes de igual longitud y un tercero más pequeño.

b. En el paquete B se dan dos segmentos iguales muy pequeños y un tercero relativamente grande.

c. En el paquete C tenemos dos segmentos pequeños de igual longitud y un tercero grande.

Con cada paquete construye un triángulo, analiza cada situación que se presenta y anota tus observaciones.

Actividad 7

Teniendo en cuenta la actividad anterior por cada paquete, compare la suma de la medida de los segmentos iguales con la que tiene diferente medida y las otras combinaciones. (Mida la longitud de cada segmento con una regla)Determina si la suma es mayor, menor o iguales, escribiendo en el cuadrito los signos **<, =, >**

Medida de los segmentos:

a. $\overline{AB}$ = ________ $\overline{CD}$ = ________ $\overline{EF}$ = ________
b. $\overline{GH}$ = ________ $\overline{IJ}$ = ________ $\overline{KL}$ = ________
c. $\overline{MN}$ = ________ $\overline{OP}$ = ________ $\overline{QR}$ = ________

Paquete A	Paquete B	Paquete C
_____ + ______ $\square$ ______	_____ + ______ $\square$ ______	_____ + ______ $\square$ ______
_____ + ______ $\square$ ______	_____ + ______ $\square$ ______	_____ + ______ $\square$ ______
_____ + ______ $\square$ ______	_____ + ______ $\square$ ______	_____ + ______ $\square$ ______

Actividad 8

Teniendo en cuenta la medida de los siguientes segmentos determina con cuáles de ellos se puede construir un triángulo y con cuáles no. 10 cm, 23 cm, 15 cm y 7 cm. Comparando la suma de las longitudes de dos de los segmentos con el tercer segmento que se halla elegido.

Actividad 9

Contesta las siguientes preguntas teniendo en cuenta sexta y séptima y justifica tus respuestas:

a. ¿Siempre puedo construir un triángulo con dos segmentos de igual longitud y el otro diferente?

____

____

b. ¿Siempre que se tiene tres segmentos de diferente longitud, se puede construir un triángulo?

____

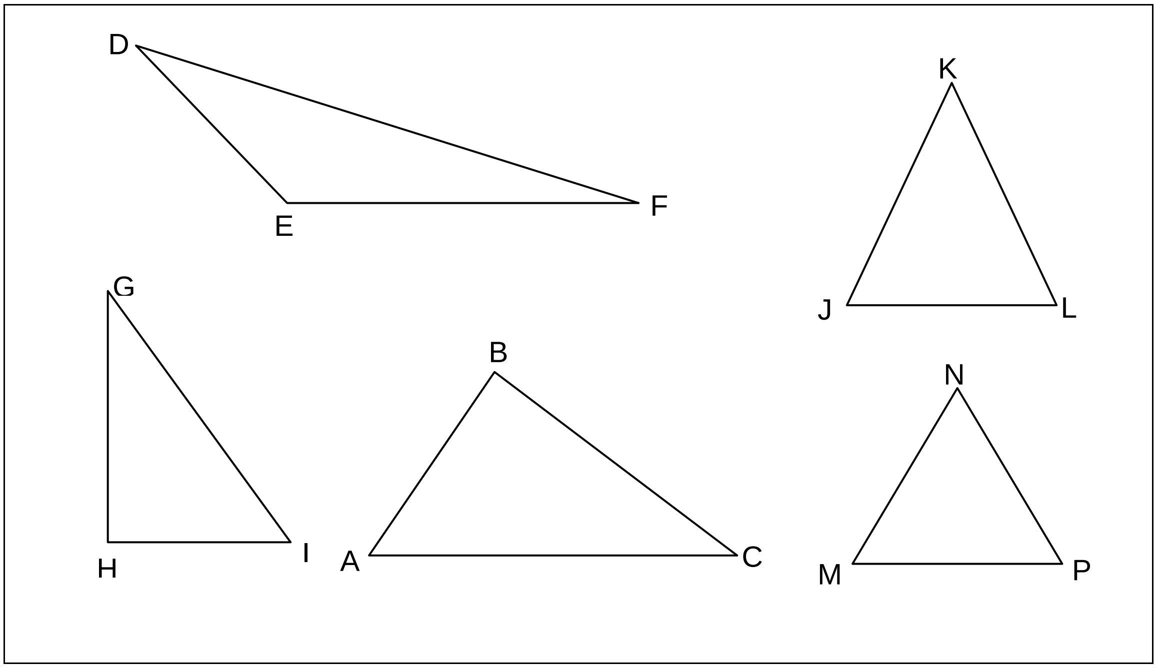
____

c. ¿Siempre es posible construir un triángulo con tres segmentos iguales?

____

____

d. Dados los siguientes triángulos:



En cada triángulo halle la medida de cada lado

Medida de los lados:

a. En el triángulo DEF

$\overline{DE}$ = ________ $\overline{EF}$ = ________ $\overline{DF}$ = ________

b. En el triángulo GHI

$\overline{GH}$ = ________ $\overline{HI}$ = ________ $\overline{GI}$ = ________

c. En el triángulo ABC

$\overline{AB}$ = ________ $\overline{BC}$ = ________ $\overline{AC}$ = ________

d. En el triángulo JKL

$\overline{JK}$ = ________ $\overline{KL}$ = ________ $\overline{JL}$ = ________

e. En el triángulo MNP

$\overline{MN}$ = ________ $\overline{NP}$ = ________ $\overline{MP}$ = ________

f. Completa escribiendo uno de los signos <**,** =**,** >

En el triángulo DEF

$\overline{DE} + \overline{EF}$ ☐	$\overline{DE} + \overline{DF}$ ☐	$\overline{EF} + \overline{DF}$ ☐

En el triángulo GHI

$\overline{GH} + \overline{HI}$ ☐	$\overline{GH} + \overline{GI}$ ☐	$\overline{HI} + \overline{GI}$ ☐

En el triángulo ABC

$\overline{AB} + \overline{BC}$	$\overline{AB} + \overline{AC}$	$\overline{BC} + \overline{AC}$

En el triángulo JKL

$\overline{JK} + \overline{KL}$	$\overline{JK} + \overline{JL}$	$\overline{KL} + \overline{JL}$

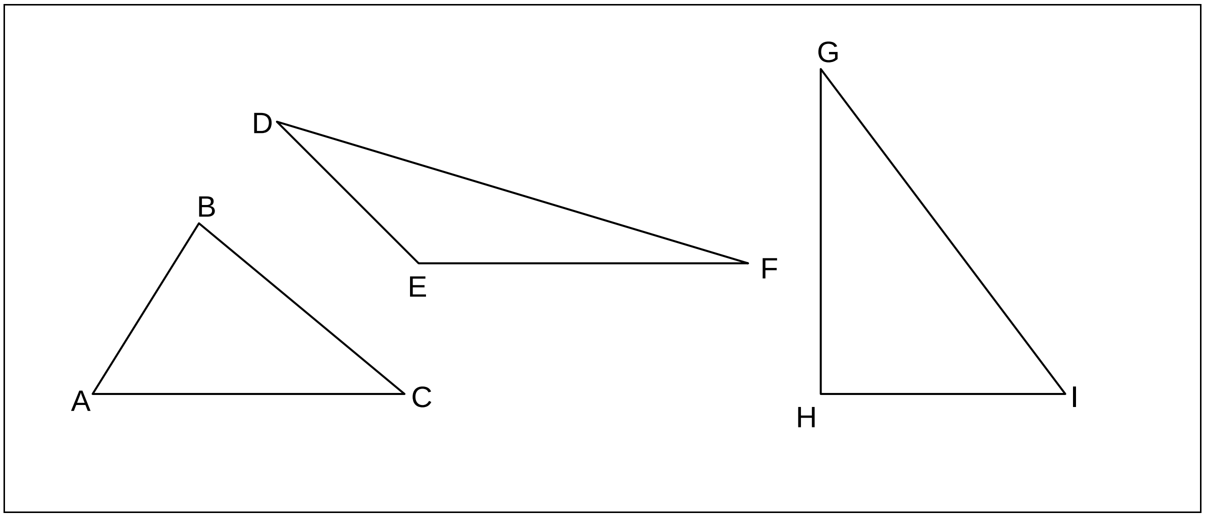
En el triángulo MNP

$\overline{MN} + \overline{NP}$	$\overline{MN} + \overline{MP}$	$\overline{NP} + \overline{MP}$

Observe que la suma de la medida dos lados es siempre mayor que el tercer lado

Actividad 10

Tenga en cuenta los siguientes triángulos:



Mide cada uno de los ángulos con ayuda de un transportador y escribe su medida:

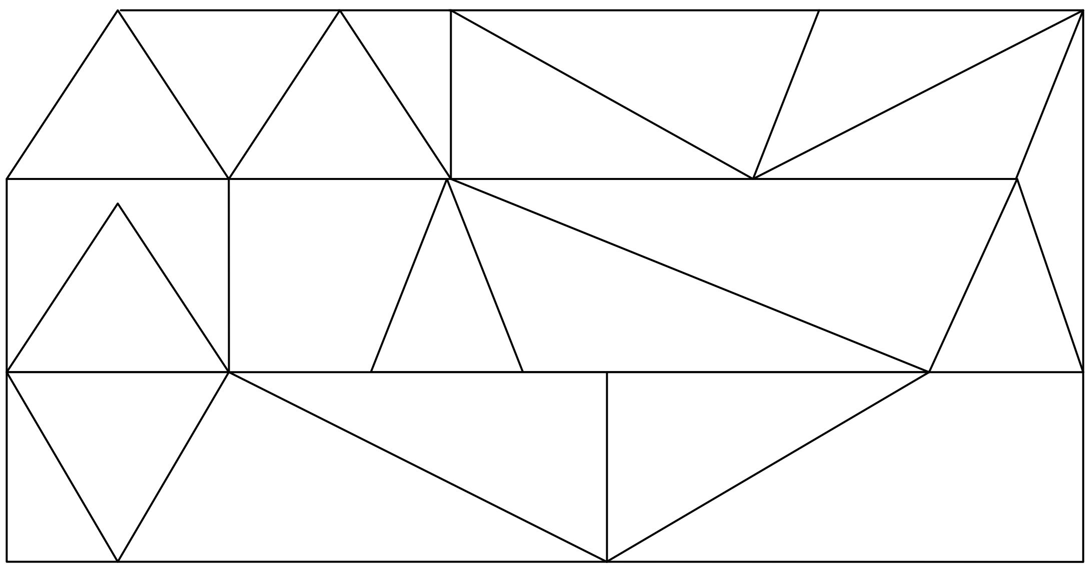
En el triángulo ABC	En el triángulo DEF	En el triángulo GHI
m∠A = ___________ m∠B = ___________ m∠C = ___________	m∠D = ___________ m∠E = ___________ m∠F = ___________	m∠G = ___________ m∠H = ___________ m∠I = ___________

Teniendo en cuenta la medida de los ángulos en cada triángulo podemos decir:

a. Los ángulos A, B y C del triángulo ABC son ángulos agudos. Los triángulos que tienen sus tres ángulos **AGUDOS** recibe el nombre de **TRIÁNGULO ACUTÁNGULO**.
b. El ángulo E del triángulo DEF es un ángulo obtuso. Los triángulos que tienen un ángulo **OBTUSO** recibe el nombre de **TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO**.
c. El ángulo H del triángulo GHI es un ángulo recto. Los triángulos que tienen un ángulo **RECTO** recibe el nombre de **TRIÁNGULO RECTÁNGULO**.

Actividad 11

En el siguiente grafico



Colorea los siguientes triángulos con un color diferente:

a. Cuatro triángulos rectángulos.
b. Seis triángulos acutángulos.
c. Cuatro triángulos obtusángulos.
d. Cuatro triángulos equiláteros.
e. Seis triángulos isósceles.
f. Cinco triángulos escalenos.

Actividad 12

Indique si es posible o no que se pueda construir un triángulo con las siguientes condiciones: (Justifique su respuesta)

a. Un triángulo equilátero y acutángulo.

____

____

b. Un triángulo isósceles y rectángulo.

____

____

c. U n triángulo escaleno y obtusángulo.

____

____

d. Un triángulo rectángulo y equilátero.

____

____

e. Un triángulo obtusángulo e isósceles.

____

____

f. Un triángulo obtusángulo y equilátero.

____

____

g. Un triángulo escaleno y acutángulo.

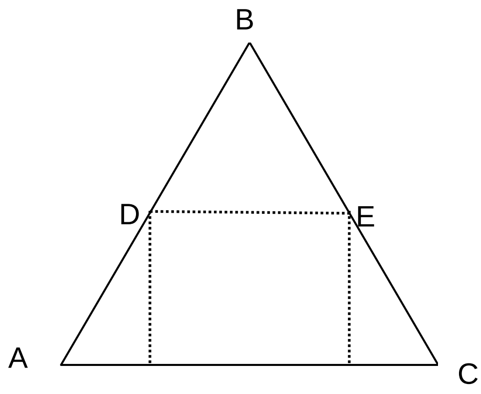
____

____

Actividad 13

Construya un triángulo en un pedazo de papel, para recortar como lo muestra la siguiente figura (un triangulo grande)

a. Marcar los ángulos de diferente color.
b. En el triángulo ABC que muestra la figura D y E son los puntos medios de los lados AB y BC



c. Llevar el vértice B, sobre el lado AC, de tal forma que la línea punteada que paralela al lado AC.

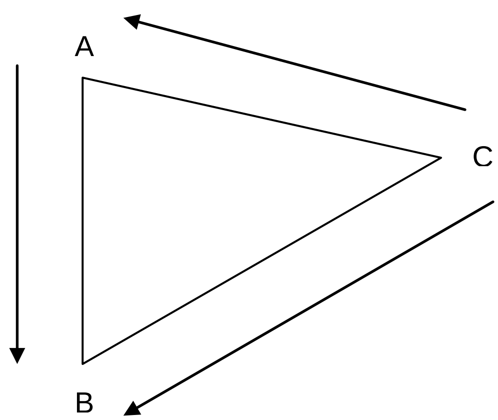
d. Tome el vértice C y lo llevamos donde quedó B. De la misma forma hacemos con el vértice A.

e. La suma de la medida de los ángulos A, B y C es _______________

f. Por lo tanto la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°

Actividad 14

Dibujar un triángulo en el piso del salón. Pasamos a recorrer los lados del triángulo.



a. Se ubica el tacón del estudiante en el punto A, mirando hacia B, y se le pide que camine sobre el lado AB, hasta el punto B, hasta que la punta del zapato quede en B, se le pide que barra el ángulo con vértice en B (punta en B) hasta que el zapato que ubicado sobre el lado BC (el tacón es el que cambia de lado). Luego se le pide al estudiante que se desplace sobre él (de espalda), hasta llegar al punto C, el tacón debe quedar en ese punto.

b. En el punto C gira apoyándose en su tacón hasta ubicar su zapato sobre el lado CA. Se desplaza por el hasta que la punta de su zapato llegue al punto A. Ahora gira apoyándose en la punta del pie, hasta que quede sobre el lado AB.

c. La flecha indica cómo va quedando la mirada del estudiante.

d. En el último giro la mirada queda en sentido opuesto a la posición inicial.

e. Se ha girado media vuelta o sea 180°

Actividad 15

a. Dibuje 5 triángulos (que no sean muy pequeños) y nombremos sus vértices con las letras A, B y C.

b. Medimos con el transportador los tres ángulos de cada triángulo y coloquemos las medidas obtenidas para cada triángulo en el siguiente cuadro.

Triángulo	m∠A	m∠B	m∠c	m∠A + m∠B + m∠C
Primero				
Segundo				
Tercero				
Cuarto				
Quinto				

c. Después sumamos las medidas de los ángulos de cada triángulo y colocamos la suma en la última columna.

d. ¿Cuánto suman, en cada caso, las medidas de los ángulos? _______________

Actividad 16

Responda las siguientes preguntas justificando su respuesta.

a. ¿Puede un triángulo tener dos ángulos rectos?

____

____

b. ¿Puede un triángulo tener dos ángulos obtusos?

____

____

c. ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?

____

____

d. Dos ángulos de un triángulo miden 37° y 61° respectivamente. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?

____

Actividad 17

Responder verdadero o falso a las siguientes proposiciones. Justificar las respuestas falsas.

a. Un triángulo es la figura formada por la unión de tres segmentos. (   )

____

____

b. En todo triángulo, la medida de un lado es siempre mayor que la suma de las medidas de los otros dos. (   )

____

____

c. En un triángulo obtusángulo siempre hay dos ángulos agudos. (   )

____

____

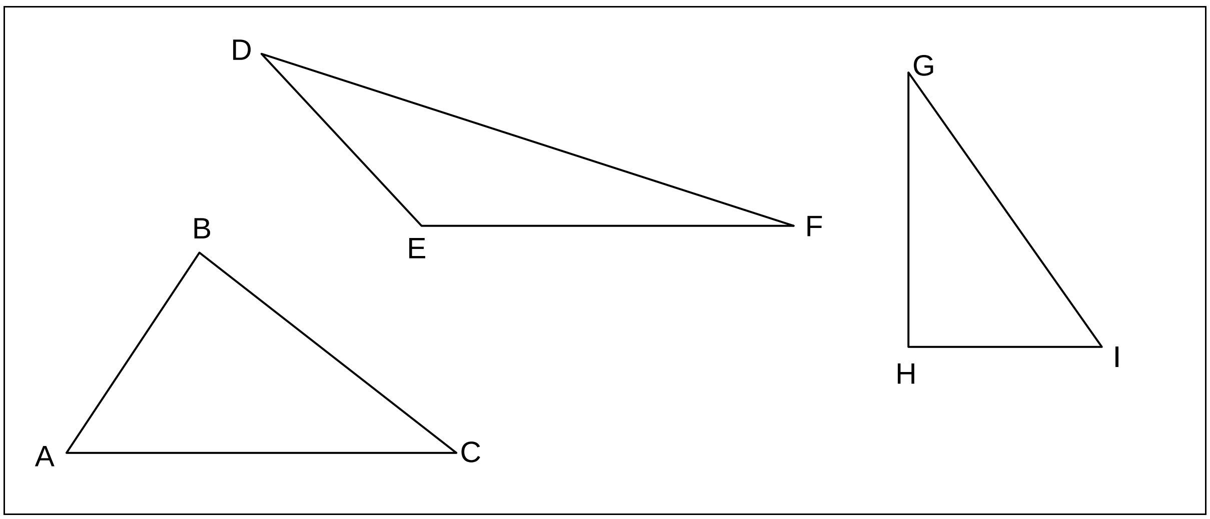
d. En todo triángulo se cumple siempre que la suma de sus ángulos interiores es igual a dos ángulos rectos. (   )

____

____

<u>Actividad 18</u>

a. En cada triángulo mida sus ángulos y sus lados



b. Compete:

En el triángulo ABC	En el triángulo DEF	En el triángulo GHI
$m\angle A$ = ____________ $m\angle B$ = ____________ $m\angle C$ = ____________ $\overline{AB}$ = ______________ $\overline{BC}$ = ______________ $\overline{AC}$ = ______________	$m\angle D$ = ____________ $m\angle E$ = ____________ $m\angle F$ = ____________ $\overline{DE}$ = __________ $\overline{EF}$ = __________ $\overline{DF}$ = __________	$m\angle G$ = ____________ $m\angle H$ = ____________ $m\angle I$ = ____________ $\overline{GH}$ = ___________ $\overline{HI}$ = ___________ $\overline{GI}$ = ___________

c. Compare la medida de los lados y los ángulos

En el Triángulo ABC

i. Medida del lado AB________; medida del ángulo C________
ii. Medida del lado BC________; medida del ángulo A________
iii. Medida del lado AC________; medida del ángulo B________

En el Triángulo DEF

i. Medida del lado DE________; medida del ángulo F________
ii. Medida del lado EF________; medida del ángulo D________
iii. Medida del lado DF________; medida del ángulo E________

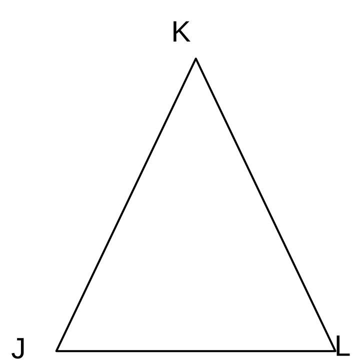
En el Triángulo GHI

i. Medida del lado GH________; medida del ángulo I________
ii. Medida del lado HI________; medida del ángulo G________
iii. Medida del lado GI________; medida del ángulo H________

Se comprueba que:

- *En todo triángulo se cumple que a mayor lado se opone mayor ángulo y a menor lado se opone menor ángulo.*
- *También se cumple que a mayor ángulo se opone mayor lado y a menor ángulo se opone menor lado.*

d. En el siguiente triángulo mida sus ángulos y lados

	$m\angle J$ = ___________ $m\angle K$ = ___________ $m\angle L$ = ___________ $\overline{JK}$ = ____________________ $\overline{KL}$ = ___________________ $\overline{JL}$ = ____________________

e. Compare la medida de los lados y los ángulos

En el Triángulo ABC

i. Medida del lado JK________; medida del ángulo L________
ii. Medida del lado KL________; medida del ángulo J________
iii. Medida del lado JL________; medida del ángulo K________

f. ¿Es el lado $\overline{JK} = \overline{KL}$? Si ( ) No ( )
g. ¿Es la medida del ángulo $\angle J = \angle L$? Si ( ) No ( )

En un triángulo que tiene dos lados iguales se llama triángulo Isósceles, el lado que no es congruente se llama Base y los ángulos que están en el extremo de este lado desigual se llaman ángulos de la base y son congruentes o iguales.

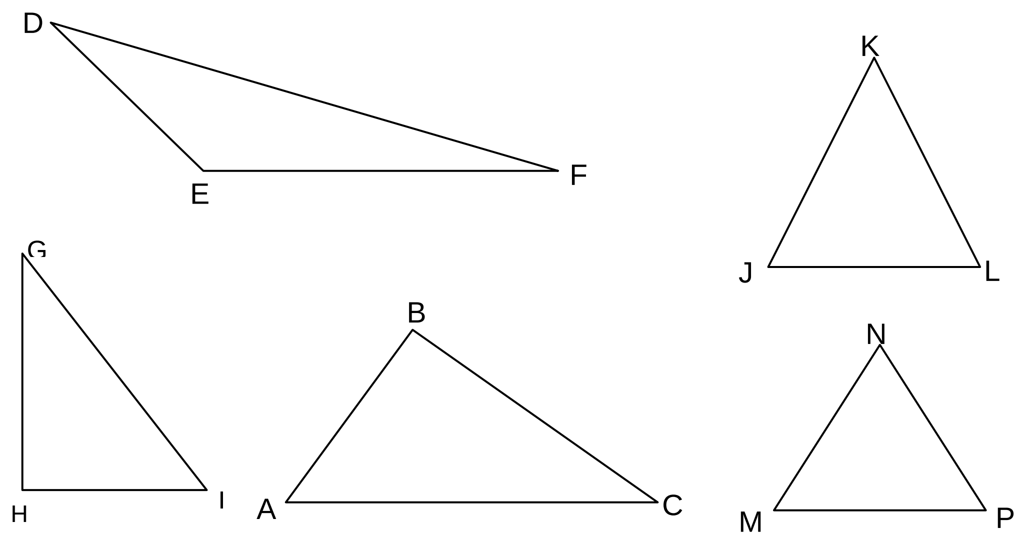
Actividad 19

En el geoplano construir y escribir sus observaciones:

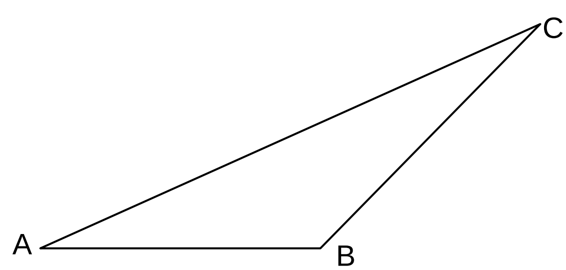
a. Todos los tipos posibles de triángulos y clasificarlos
b. Un triángulo con sus tres lados iguales.
c. Todos los posibles triángulos con dos lados iguales. ¿Cuántos hay?, ¿Cómo son sus ángulos?, ¿hay alguno agudo?, ¿Recto?, ¿Obtuso?, ¿qué relación hay entre los lados iguales y los ángulos iguales?
d. Todos los triángulos posibles con lado desiguales. ¿Cuántos hay?, ¿Cómo son sus ángulos?, ¿son todos desiguales?, ¿puede haber alguno Recto?, ¿Obtuso?, ¿hay alguna relación entre el lado mayor y el ángulo mayor?, ¿hay alguna relación entre el lado menor y el ángulo menor?
e. Un triángulo que tenga sus tres ángulos iguales.
f. Un triángulo que tenga dos ángulos iguales. ¿cómo son sus lados?
g. Un triángulo que no tenga ningún ángulo igual. ¿cómo son sus lados?
h. Todos los triángulos rectángulos posibles. ¿Cuántos hay?, ¿Cómo son sus ángulos?, ¿hay alguno obtuso?, ¿cuál es el ángulo mayor?, ¿y el lado mayor?, ¿hay alguna relación entre ellos?
i. Todos los triángulos que tengan un ángulo obtuso. Dos ángulos obtusos.

TRIANGULOS

a. Un triángulo es una figura como las siguientes



b. En la siguiente figura los lados del triángulo son:



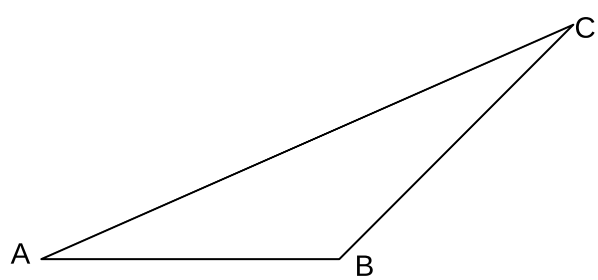
Lados:

____

____

____

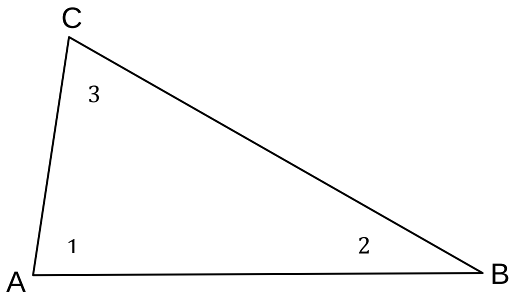
c. ¿Cómo nombra este triángulo?



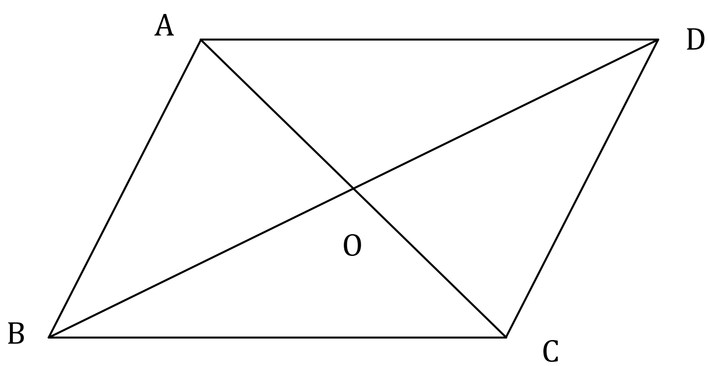
Este triángulo se nombra así:

ΔABC

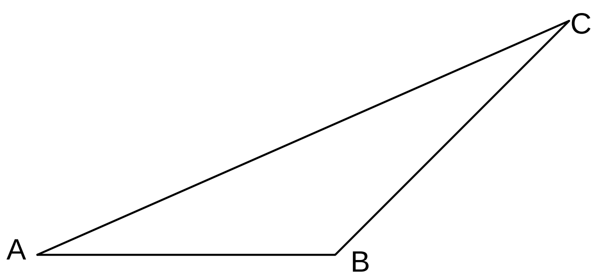
d. Nombra los lados y los ángulos del siguiente triángulo

	Lados __________ __________ __________	Ángulos __________ __________ __________

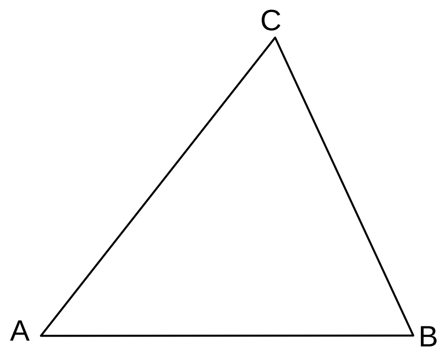
e. Nombra todos los triángulos que encuentres en la siguiente figura.



f. Halla las medidas de los ángulos del siguiente triángulo. ¿Cuál es la suma de las medidas de los tres ángulos?

	Medida de los ángulos ____________________ ____________________ ____________________ Suma de la medida de los tres ángulos es: ____________________

g. Halla las medidas de los ángulos del siguiente triángulo. ¿Cuál es la suma de las medidas de los tres ángulos?



Medida de los ángulos

____

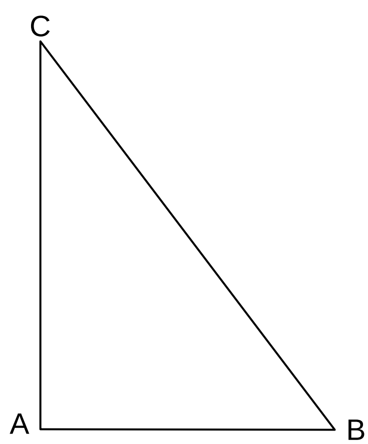
____

____

Suma de la medida de los tres ángulos es:

____

h. Halla las medidas de los ángulos del siguiente triángulo. ¿Cuál es la suma de las medidas de los tres ángulos?



Medida de los ángulos

____

____

____

Suma de la medida de los tres ángulos es:

____

E. Anexo: Polígonos

TEMA: POLIGONOS

OBJETIVO:

a. Construir y clasificar polígonos.
b. Identificar los elementos de un polígono.

<u>Materiales</u>: Geoplano, palillos.

<u>Actividad 1</u>

Un polígono es una línea poligonal cerrada. La unión de dos lados consecutivos se llama vértices. Según la anterior definición dibuja un polígono e identifica sus elementos.

<u>Actividad 2</u>

a. Sobre un geoplano construye polígonos de diferentes números de lados.
b. Teniendo en cuenta los polígonos construidos en el punto a, a cada uno de los polígonos dale un nombre teniendo en cuenta los lados.

Numero de Lados	**Nombre**

c. Los lados de los polígonos anteriormente descritos son iguales o diferente? Justifique su respuesta.

____

____

____

d. Los ángulos de los polígonos nombrados en el literal b son iguales o diferentes?

____

____

____

Actividad 3

En cada uno de los polígonos nombrados en la actividad dos numeral c. complete el siguiente cuadro.

Nombre del Polígono	Números de Lados	Número de Vértices

¿Qué relación hay entre el número de lados y números de vértices?

____

____

____

Actividad 4

a. Tome tres palillos iguales y construye un polígono.
b. Tome cuatro palillos iguales y construye un polígono.
c. Tome cinco palillos iguales y construye un polígono.
d. Tome seis palillos iguales y construye un polígono.
e. Tome siete palillos iguales y construye un polígono.
f. Tome ocho palillos iguales y construye un polígono.
g. Tome nueve palillos iguales y construye un polígono.
h. Tome diez palillos iguales y construye un polígono.

Todos estos polígonos anteriormente construidos tienen sus lados ____________

En cada uno de los polígonos construidos, sus ángulos son iguales? __________

F. Anexo: Polígonos, elementos y sus propiedades

TEMA: POLIGONOS, ELEMENTOS Y SUS PROPIEDADES

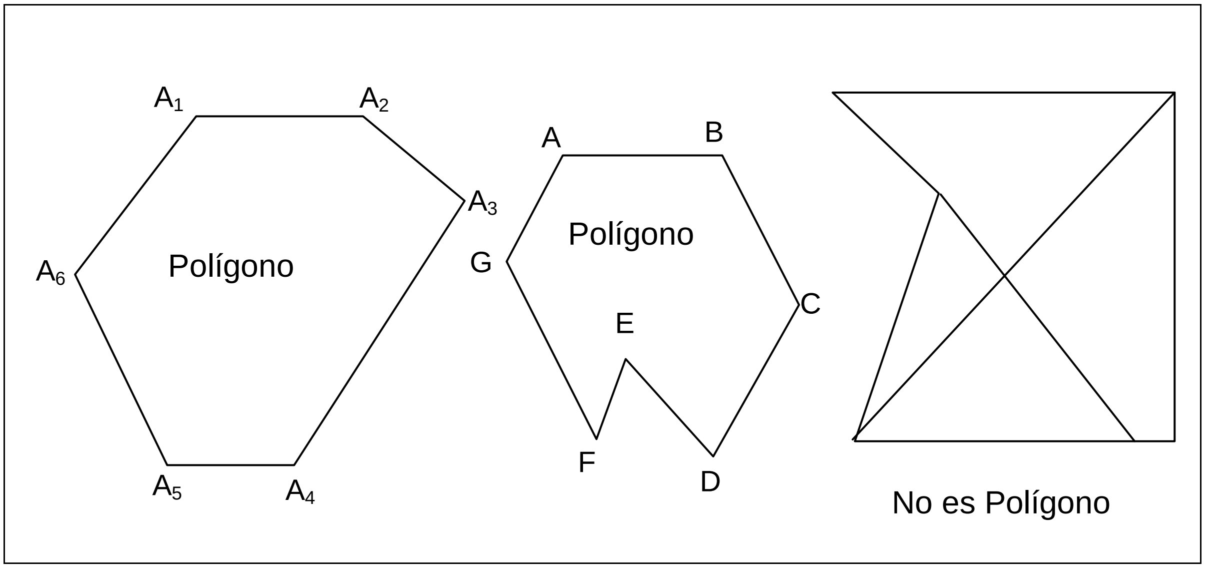
OBJETIVO:

a. Describir las características de un polígono e identificar sus elementos.
b. Calcular el número de diagonales que se pueden trazar desde un mismo vértice de un polígono, y el número total de diagonales.
c. Calcular el número total de triángulos se forman al trazar la diagonal desde un vértice de un polígono, y la suma de los ángulos interiores de un polígono.

<u>Materiales</u>: Regla.

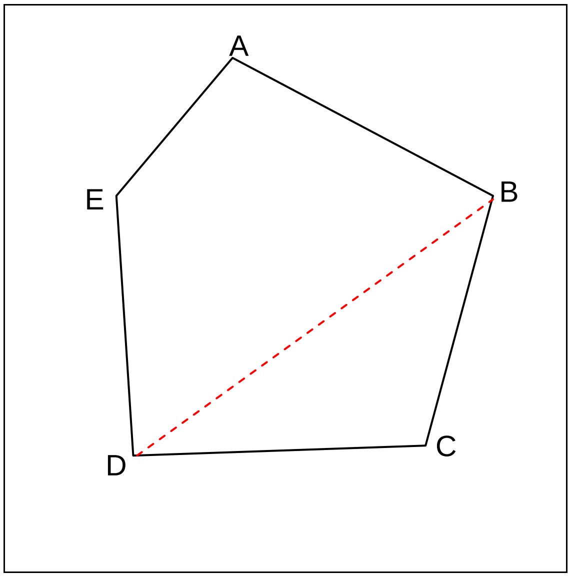
<u>Actividad 1</u>

Definición: Un polígono es una figura plana formada por una línea poligonal cerrada



ELEMENTOS DE UN POLÍGONO

En todo polígono podemos identificar los siguientes elementos:



i. **Vértices**: son los puntos A, B, C, D y E.

j. **Lados**: son los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$.

k. **Lados consecutivos**: son los que tienen un extremo común. $\overline{AB}\ y\ \overline{BC}$, $\overline{BC}\ y\ \overline{CD}$, $\overline{CD}\ y\ \overline{DE}$, $\overline{DE}\ y\ \overline{EA}$, ...

l. **Vértices consecutivos**: son los puntos extremos de cada lado. Un polígono se nombra leyendo sus vértices consecutivos; así: ABCDE.

m. **Diagonal**: es un segmento que une dos vértices no consecutivos. Ejemplo: $\overline{DB}$

Los polígonos de clasifican de acuerdo con el número de lados que tenga, así:

Número de lados	Nombre del polígono
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
N	Polígono de n – lados

Actividad 2

En el siguiente cuadro dibuje siete polígonos de diferente número de lados:

a. En cada uno de los polígonos dibujados, trace todas las diagonales que parten de un sólo vértice. (en cada polígono hágalo con mucho cuidado para poder sacar conclusiones)
b. Teniendo en cuenta el literal a, llene el siguiente cuadro.

Número de lados								n
Número de diagonales								

c. ¿Qué relación numérica hay entre el número de lados de un polígono y el número de diagonales que parten de un mismo vértice?

____

____

____

d. Es posible deducir una fórmula para hallar el número de diagonales para un polígono de n lados. ¿Cuál sería? ____________________

Actividad 3

En el siguiente cuadro dibuje siete polígonos de diferente número de lados:

a. En cada uno de los polígonos dibujados, trace todas las diagonales que parten de un sólo vértice. (en cada polígono hágalo con mucho cuidado para poder sacar conclusiones)

b. ¿Cuántos triángulos se forman al trazar la diagonal desde un vértice en cada polígono. Llene el siguiente cuadro:

Número de lados								n
Número de Triángulos								

c. ¿Qué relación numérica hay entre el número de lados de un polígono y el número de triángulos que se forman al trazar las diagonales que parten de un mismo vértice?

____

____

____

d. Es posible deducir una fórmula para hallar el número de triángulos determinados por las diagonales trazadas desde un vértice para un polígono de n lados. ¿Cuál sería? ____________________

Actividad 4

En el siguiente cuadro dibuje siete polígonos de diferente número de lados:

a. En cada uno de los polígonos dibujados, trace todas las diagonales que parten de un sólo vértice. (en cada polígono hágalo con mucho cuidado para poder sacar conclusiones)
b. ¿Cuántos triángulos se forman al trazar la diagonal desde un vértice en cada polígono. Llene el siguiente cuadro:

Número de lados								n
Número de Triángulos								

c. Recordemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° o dos ángulos rectos. (180° = 2(90°) dos rectos).
d. Por ejemplo si dibujo un cuadrilátero, responda:
   i. ¿Cuántos triángulos se formaron trazando las diagonales desde un mismo vértice? ____________
   ii. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cada triángulo? _________.
   iii. Por lo tanto la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es ______________________

e. Llene el siguiente cuadro teniendo presente el cuadro del literal b, c y d.

Número de lados								n
Número de Triángulos								
Suma de la medida de los ángulos interiores								

f. Es posible deducir una fórmula para hallar la suma de la medida de los ángulos interiores de un polígono de n lados. ¿Cuál sería? ____________________

Actividad 5

a. Dibuje, trace y cuente todas las diagonales que se pueden obtener en los siguientes polígonos: Triángulo, Cuadrilátero, Pentágono, Hexágono, Octágono, Decágono.
b. Llene el siguiente cuadro teniendo en cuenta el literal a.

Número de lados								n
Número de diagonales								

c. Es posible deducir una fórmula para hallar el número total de diagonales que pueden trazarse en un polígono de n lados. ¿Cuál sería? _________________

Actividad 6

Conteste las siguientes preguntas:

a. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? __________________
b. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un cuadrilátero? ________________
c. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un pentágono? _________________
d. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un hexágono? __________________
e. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un octágono? __________________
f. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un eneágono? __________________
g. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un decágono? __________________

G. Anexo: Cuadriláteros

TEMA: Cuadriláteros

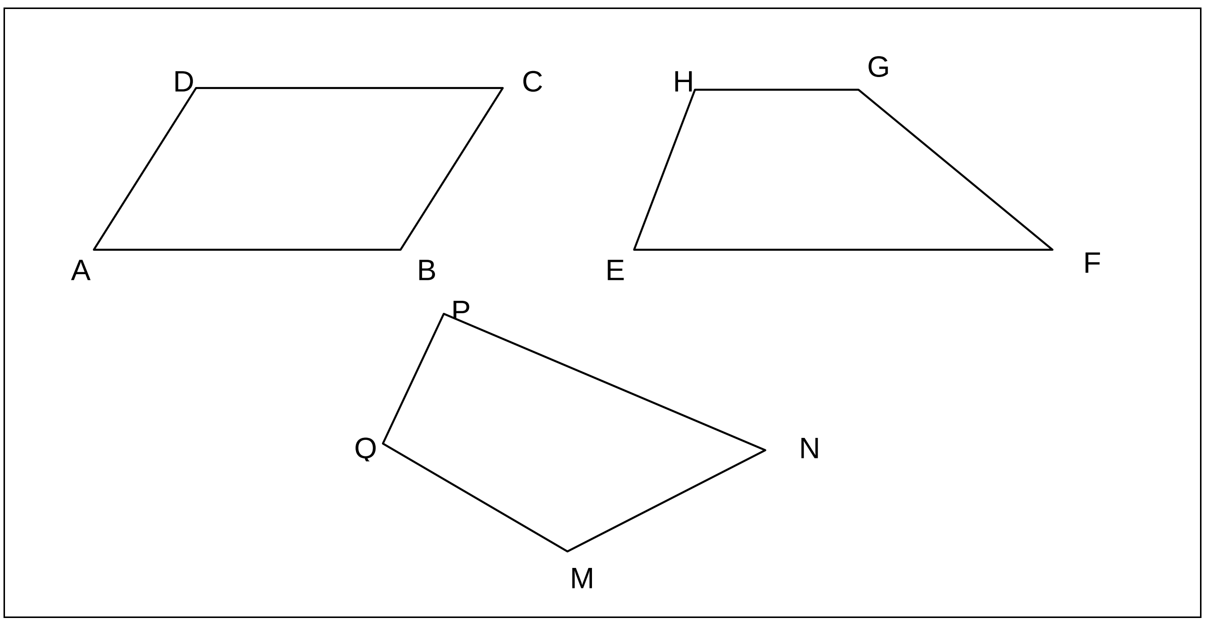
OBJETIVO:

a. Identificar y clasificar los cuadriláteros de acuerdo a sus características.
b. Identificar y aplicar propiedades de los cuadriláteros.

Materiales: Dibujos de figuras geométricas, regla, transportador.

Actividad 1

Observe los polígonos siguientes:



a. ¿Cuántos lados tiene cada uno de estos polígonos? ______________________
b. ¿Qué nombre le podemos dar a estos polígonos? _______________________
c. ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo? _______________________________________

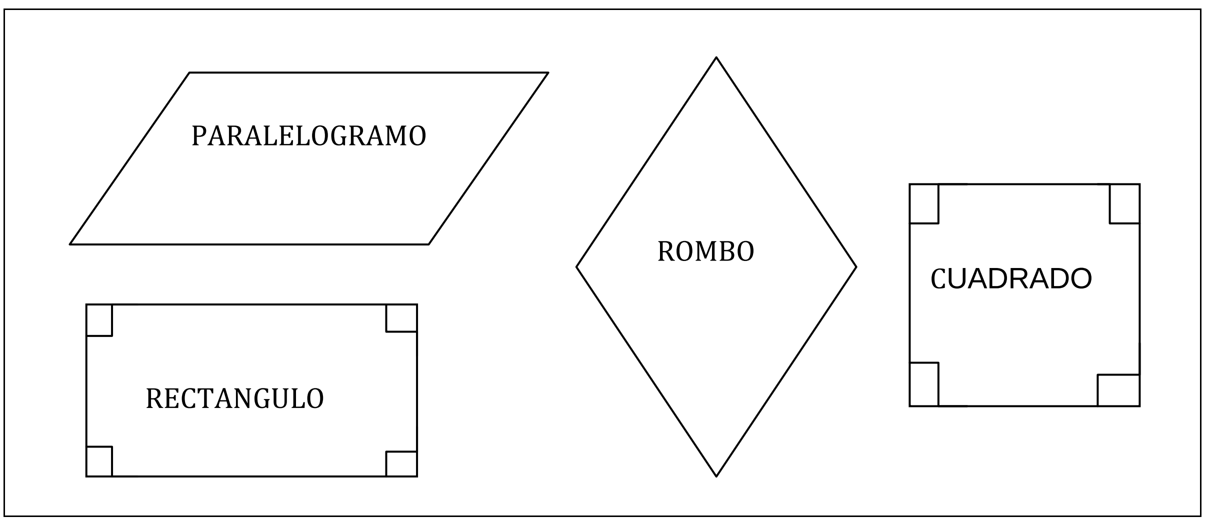
Actividad 2

Si miramos los cuadriláteros de la primera actividad encontramos diferentes clases de cuadriláteros:

a. En el cuadrilátero ABCD tiene dos parejas de lados paralelos. Estos son: _______ //_________ y _________ //_________. Este cuadrilátero se llama **PARALELOGRAMO**.
b. En el cuadrilátero EFGH tiene un par de lados paralelos. Estos son: _______//________. Este cuadrilátero se llama **TRAPECIO**.
c. En el cuadrilátero MNPQ no tiene ningún par de lados paralelos. Este cuadrilátero se llama **TRAPEZOIDE**.

Actividad 3

Entre los paralelogramos podemos identificar algunos que tienen características especiales, observe las siguientes figuras:



Conteste:

RECTÁNGULO: Es un paralelogramo que tiene sus ángulos rectos.

a. ¿Sus cuatro lados son iguales? ____________________________
b. ¿Cuánto suman los ángulos interiores del rectángulo? __________

ROMBO: Es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales.

c. ¿El rombo tiene sus ángulos rectos? Si ( ) No ( )

CUADRADO: Es un paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos.

d. ¿Cuánto suman los ángulos interiores del rectángulo? ___________

e. ¿Todo cuadrado es rombo? Si ( ) No ( ) Justifique su respuesta

____

____

____

f. ¿Todo rombo es un cuadrado? Si ( ) No ( ) Justifique su respuesta

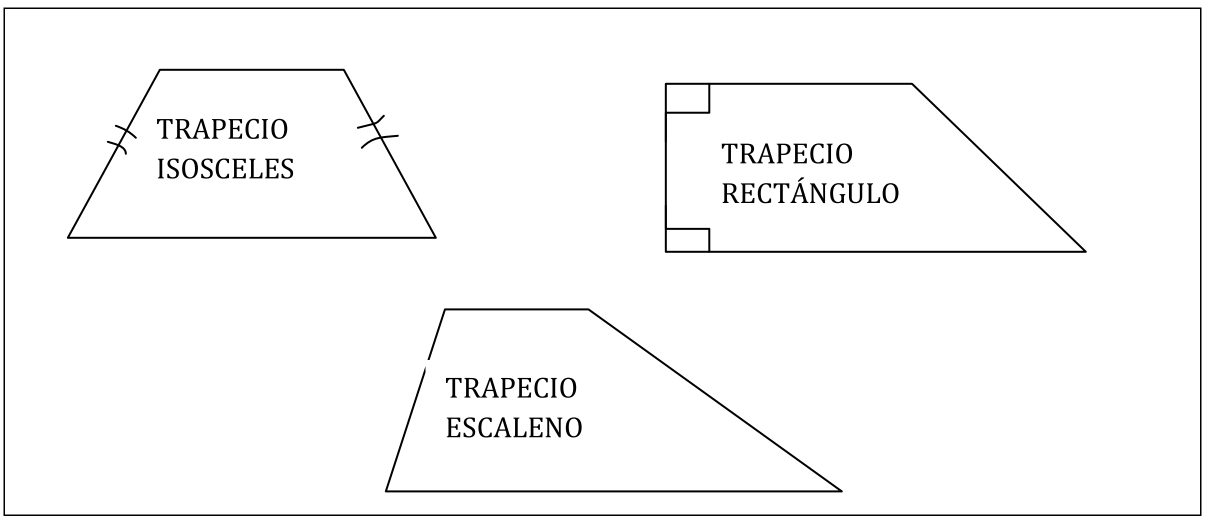
____

____

____

Actividad 4

Los trapecios los podemos clasificar si añadimos nuevas condiciones a los lados o a los ángulos, observe las siguientes figuras:



TRAPECIO ISOSCELES: es el trapecio en el cual los lados no paralelos son iguales.

TRAPECIO RECTÁNGULO: es el trapecio en el cual uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases.

TRAPECIO ESCALENO: es el trapecio que tiene todos los lados desiguales.

Los lados paralelos del trapecio se llaman BASE MAYOR y BASE MENOR

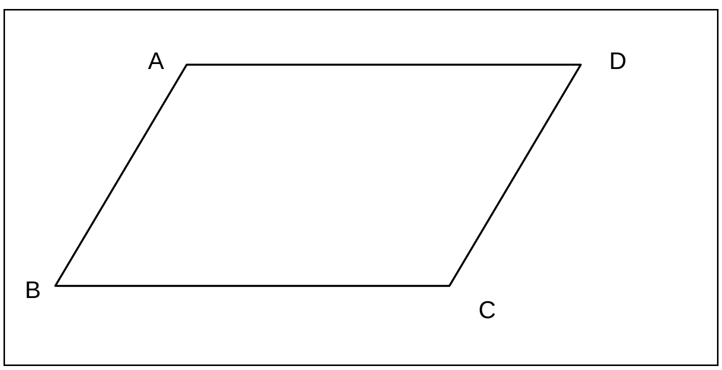
Actividad 5

Indique cuales de las siguientes proposiciones siempre son verdaderas y cuáles no son siempre verdaderas.

a. Los lados opuestos de un trapecio son paralelos. ________________________
b. Todo cuadrilátero tiene dos diagonales. ________________________________
c. Algunos trapecios son equiángulos. ___________________________________
d. Todos los rectángulos son equiángulos. ________________________________
e. Un rombo es un polígono regular. _____________________________________
f. Todo cuadrado es rectángulo. ____
g. Todo cuadrado es rombo. ____
h. Todo cuadrado es un paralelogramo. ___________________________________
i. Todo rectángulo es cuadrado. ____
j. Todo cuadrilátero es cuadrado. _______________________________________
k. Todo cuadrilátero es trapecio. ____
l. Todo cuadrilátero es polígono. _______________________________________

Actividad 6

Dibuje en una hoja un paralelogramo como el que se muestra en la siguiente figura:



a. Midamos los lados opuestos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ y luego los lados opuestos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

b. ¿Cómo son las medidas de los lados opuestos de un paralelogramo.

____

Actividad 7

Dibuje de nuevo el paralelogramo de la actividad sexta.

a. Midamos con el transportador los ángulos A, B, C y D
b. ¿Cómo son las medidas de los ángulos opuestos $\hat{A}, \hat{C}\ y\ \hat{B}, \hat{D}$?

____

c. ¿Cómo son los ángulos contiguos $\hat{A}\ y\ \hat{B};\ \hat{B}\ y\ \hat{C};\ \hat{C}\ y\ \hat{D};\ \hat{D}\ y\ A$?

____

Actividad 8

a. Dibuje un paralelogramo cualquiera.

b. Trace las diagonales y nombre con la letra O el punto donde se corta.

c. Verifique midiendo con una regla que O es punto medio de cada una de las diagonales trazadas.

d. Medidas: ____, ____, ____, ____

e. ¿Qué podemos concluir?

____

____

Actividad 9

a. Dibuje un rectángulo cualquiera.

b. Trace sus diagonales y hallemos sus medidas con ayuda de una regla.

c. Medidas: ___________,

___________.

d. ¿Qué podemos concluir?

____

____

____

Actividad 10

a. Dibuje un rombo cualquiera.

b. Trace sus diagonales.

c. Nombre con la letra O el punto de corte de las dos diagonales.

d. hallemos sus medidas de los ángulos que se forman alrededor del punto O. Con ayuda de un transportador.

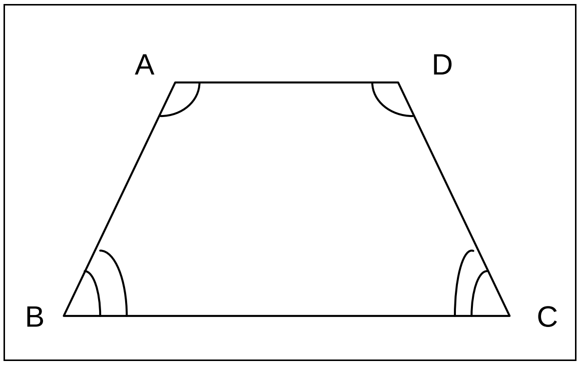
e. Medidas: ___________,

__________, ___________, __________

f. ¿Qué podemos concluir acerca de las diagonales?

Actividad 11

a. Dibuje un trapecio isósceles como se muestra en la figura.



b. Hallemos la medida de los ángulos que se forman en los extremos de la base menor, con ayuda de un transportador.

c. ¿Cómo son estas medidas?

d. Hallemos la medida de los ángulos que se forman en los extremos de la base mayor, con ayuda de un transportador.

e. ¿Cómo son estas medidas?

Actividad 12

Completar el cuadro escribiendo una (X) siempre que el cuadrilátero tenga la propiedad indicada.

Propiedad / Cuadrilátero	Todos los lados son congruentes	Los lados opuestos son		Las diagonales se cortan en su punto medio	Los ángulos opuestos son congruentes	Las diagonales son	
		≅	//			≅	//
Paralelogramo							
Rectángulo							
Rombo							
Cuadrado							
Trapecio							
Trapecio Isósceles							

Actividad 13

Completar el cuadro siguiente con Si o No de acuerdo con que el cuadrilátero tenga la propiedad dada.

	Paralelogramo	Rectángulo	Cuadrado	Rombo
Ambas parejas de lados opuestos son paralelos				
Ambas parejas de lados opuestos son congruentes				
Ambas parejas de ángulos opuesto son congruentes				
Las diagonales son congruentes				
Las diagonales son perpendiculares				
Todos los lados son congruentes				
Todos los ángulos son congruentes				

Actividad 14

Responder falso o verdadero a cada una de las siguientes proposiciones. Justificar las respuestas falsas.

a. Todo paralelogramo es un rectángulo.

____

b. Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares entre sí, el paralelogramo es un cuadrado.

____

c. Un cuadrilátero es un paralelogramo si sus diagonales son mutuamente perpendiculares.

____

d. Las diagonales de un rombo son mutuamente perpendiculares.

____

e. Las diagonales de un paralelogramo son congruentes.

____

f. Un trapecio es equilátero si tiene dos lados congruentes.

____

g. La suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°

h. Las bases de un trapecio son paralelas entre sí.

i. Si un rombo es equiángulo, entonces es cuadrado.

j. Un rombo se puede descomponer en cuatro triángulos rectángulos congruentes.

k. La diagonal divide cada ángulo de un cuadrado en ángulos de 45°.

H. Anexo: Cuadriláteros 2

TEMA: Cuadriláteros 2.

OBJETIVO:

a. Construir y clasificar cuadriláteros
b. Identificar los elementos de los cuadriláteros.

Materiales: Geoplano, palillos,

Actividad 1

En el geoplano o en cuaderno cuadriculado construye figuras de cuatro lados de diferentes tipos. Teniendo en cuenta las figuras construidas contesta:

a. ¿Cuántos vértices tienen? _____________
b. ¿Cuántos ángulos tienen? _____________
c. ¿Cuántos lados tienen? _____________

Actividad 2

a. Construye con cuatro palillos algunos cuadriláteros.
b. Construye con cinco palillos algunos cuadriláteros.
c. Construye con seis palillos algunos cuadriláteros.
d. Construye con siete palillos algunos cuadriláteros.
e. Construye con ocho palillos algunos cuadriláteros.

Actividad 3

Clasifica, con distintos criterios los diferentes cuadriláteros construidos en el ejercicio anterior.

Actividad 4

a. Construye en el geoplano cuadriláteros que tengan todos sus lados iguales.
b. Construye en el geoplano un cuadrilátero que no tenga todos sus lados iguales.
c. ¿Qué nombres reciben los cuadriláteros construidos en el literal a?

____

d. Define que es un cuadrado.

____

____

e. ¿Qué diferencia encuentras entre cuadrado y rombo?

____

____

____

f. ¿Cómo son los ángulos del cuadrado? ¿Cómo son los ángulos del rombo?

____

____

g. ¿Qué relación encuentras entre los lados del cuadrado y los lados del rombo?

____

____

Actividad 5

a. Construye en el geoplano de 5 X 5 todos los cuadriláteros posibles que tengan tres lados iguales entre sí y el cuarto desigual. ¿cuántos hay?

____

____

b. Repite el anterior ejercicio con geoplanos de 6 X 6, 7 X 7, 8 x 8 y 9 X 9. ¿cuántos hay en cada uno?

Actividad 6

Construye en el geoplano cuadriláteros que tengan los lados iguales, dos a dos. ¿Cuántos tipos diferentes encuentras?

____

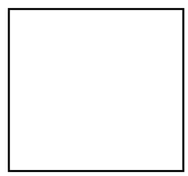
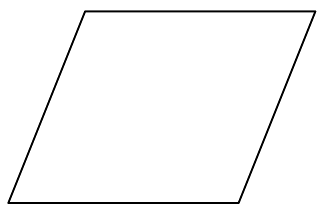
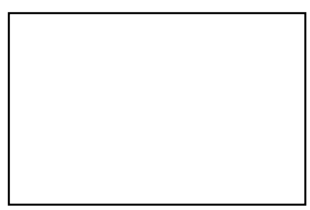
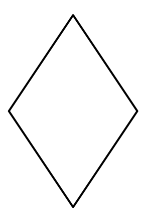
Actividad 7

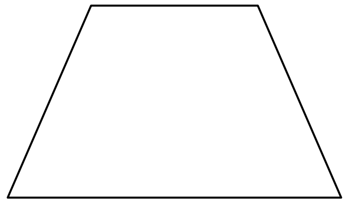
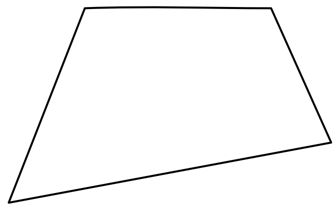
a. Construye un cuadrilátero que tenga sus lados iguales, dos a dos y todos sus ángulos iguales.

b. Construye un cuadrilátero con sus lados iguales dos a dos, y tres de sus ángulos iguales.

c. Construye un cuadrilátero con lados iguales, dos a dos, y ángulos iguales dos a dos.

Actividad 8

Definición	Representación	Nombre
Paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos.		Cuadrado
Cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos		Paralelogramo
Paralelogramo que tiene todos sus ángulos rectos		Rectángulo
Paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales		Rombo

Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos		Trapecio
Cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos		Trapezoide

Actividad 9

Contesta y justifica tus respuestas.

a. ¿Un cuadrado es un rombo? ______________________________

____

b. ¿Un cuadrado es un rectángulo? ______________________________

____

c. ¿Un rectángulo es un cuadrado? ______________________________

____

d. ¿Un paralelogramo es un rectángulo? ______________________________

____

e. ¿Un cuadrilátero que tenga sus lados paralelos dos a dos, es un paralelogramo?

____

____

I. Anexo: Construcciones con regla, transportador y compás - perpendiculares – paralelas - ángulos

TEMA: CONSTRUCCIONES CON REGLA, TRANSPORTADOR Y COMPÁS – PERPENDICULARES – PARALELAS – ÁNGULOS

OBJETIVO:

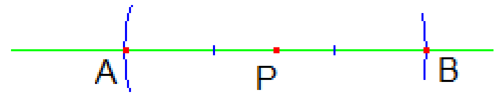
a. Construir la perpendicular a una recta dada por un punto dado de la recta.
b. Construir la perpendicular a una recta dada por un punto exterior a la recta.
c. Copiar ángulos
d. Trazar la bisectriz de un ángulo.
e. Trazar rectas paralelas con escuadra.
f. Traza la recta paralelas a una recta dada desde un punto exterior a la recta.

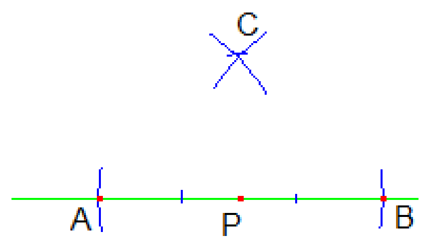
Materiales: regla, compás, transportador.

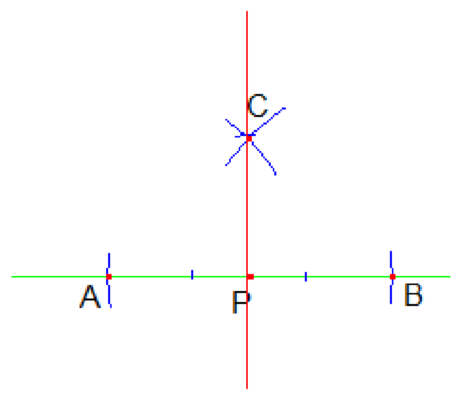
Actividad 1

1. CONSTRUIR LA PERPENDICULAR A UNA RECTA DADA POR UN PUNTO DADO DE LA RECTA.

   Para trazar una perpendicular a una recta L por un punto P de la misma, procedemos así:

a. Con un radio adecuado colocamos la punta del compás en el punto dado, P, y trazamos dos arcos que corten la recta dada en dos puntos A y B	

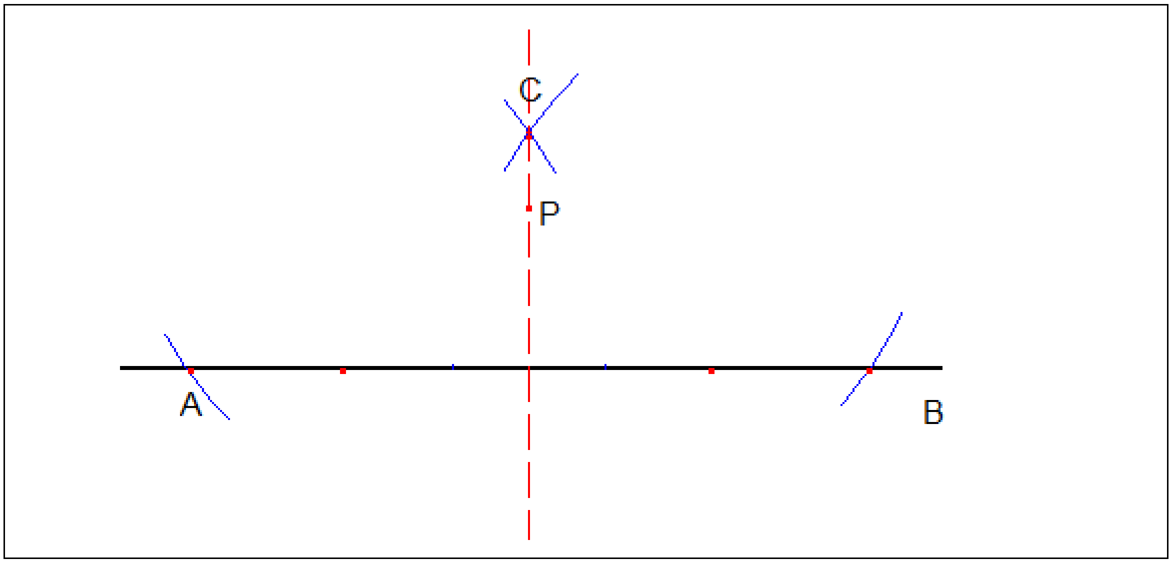
b. Con una abertura cualquiera del compás, colocamos la punta del compás en A y trazamos un arco (puede ser a cualquier lado de la recta); luego hacemos centro en B y con el mismo radio trazamos un arco que corte el arco trazado anteriormente; el punto de corte lo llamamos C.	

c. Trazamos la recta que pasa por los puntos P y C; la recta $\overleftrightarrow{PC}$ es perpendicular a la recta dada en el punto P.	

2. CONSTRUIR LA PERPENDICULAR A UNA RECTA DADA POR UN PUNTO EXTERIOR DE LA RECTA

Para trazar una perpendicular a una recta L desde un punto P, exterior a ella, procedemos así:

a. Haciendo centro en P y con una abertura del compás adecuada (es decir mayor que la distancia de P a L) cortamos la recta en los puntos A y B.



b. A continuación, hacemos centro en A y luego en B, con una misma abertura del compás, y trazamos dos arcos que se cortan en C.

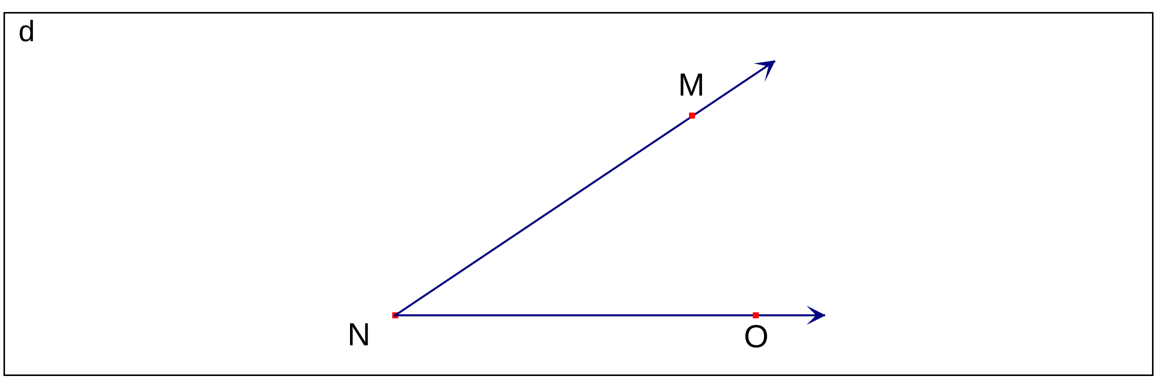
c. Finalmente trazamos una recta que pase por P y por C. Esta es la recta que buscamos.

Ejercicios

1. Trazar, usando regla y compás, una recta perpendicular a un segmento $\overline{AB}$ por el extremo B.
2. Trazar, usando regla y compás, una recta perpendicular a un segmento $\overline{AB}$ por el punto medio.

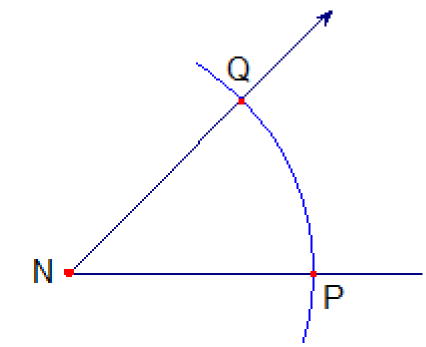
3. COMO COPIAR ANGULOS

Dibuja un ángulo MNO

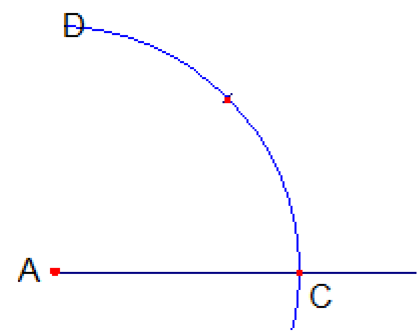


Para copiar el ángulo MNO puedes proceder así:

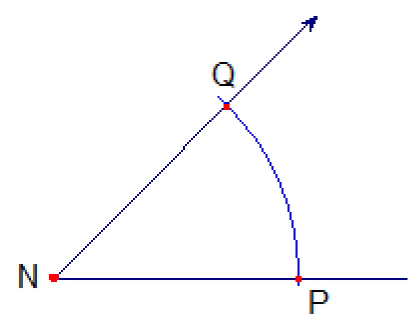
a. Coloca la punta de tu compás sobre N y con el compás (abierto a cualquier radio) cortamos ambos lados del ángulo.



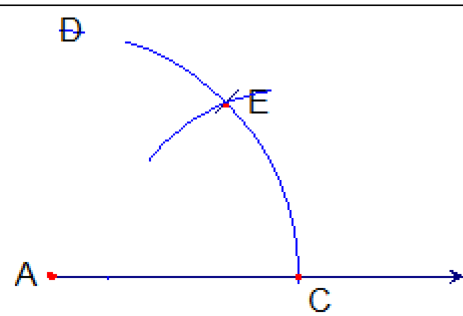
b. Traza una línea y llámela $\overrightarrow{AB}$. Con el mismo radio anterior, coloca la punta de su compás sobre A y traza un arco CD que corte la línea AB en C.



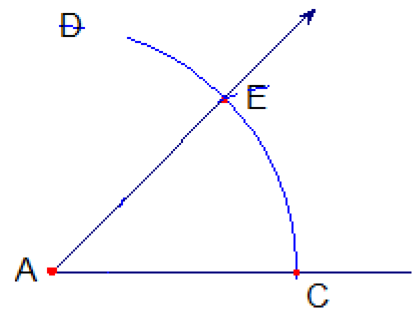
c. Coloca ahora la punta de tu compás sobre P y ábrelo hasta que la punta del lápiz se encuentre en Q.



d. Con la distancia PQ como radio, coloca la punta de tu compás en C y traza un arco que corté al arco CD en E.



e. Traza una línea con la regla que una los puntos A y E. El ángulo ∠ EAB es una copia del ángulo ∠MNO.

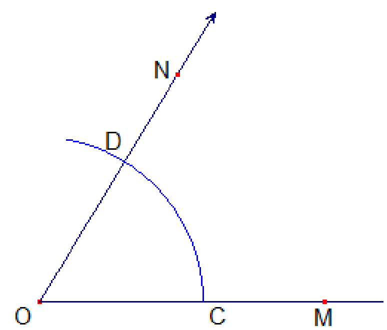


f. Traza los siguientes ángulos con el transportador y cópialos, utilizando regla y compás. 162°, 28° , 90°, 75° y 108°.

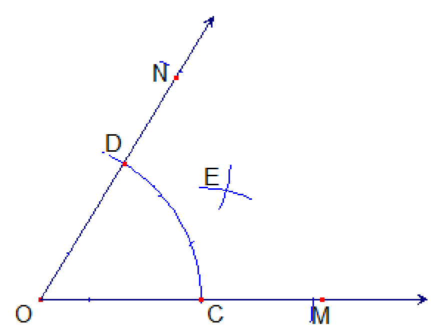
4. TRAZADO DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

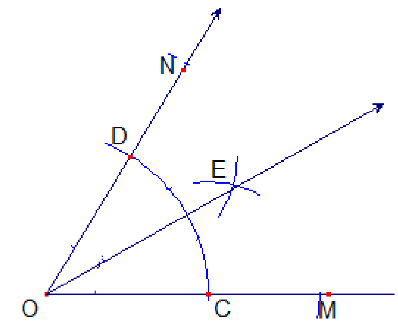
Tracemos la bisectriz del ángulo ∠ MON, con ayuda de la regla y del compás.

a. Haciendo centro en O y con un radio cualquiera, trazamos un arco $\overset{\frown}{CD}$ que corte ambos lados del ángulo.



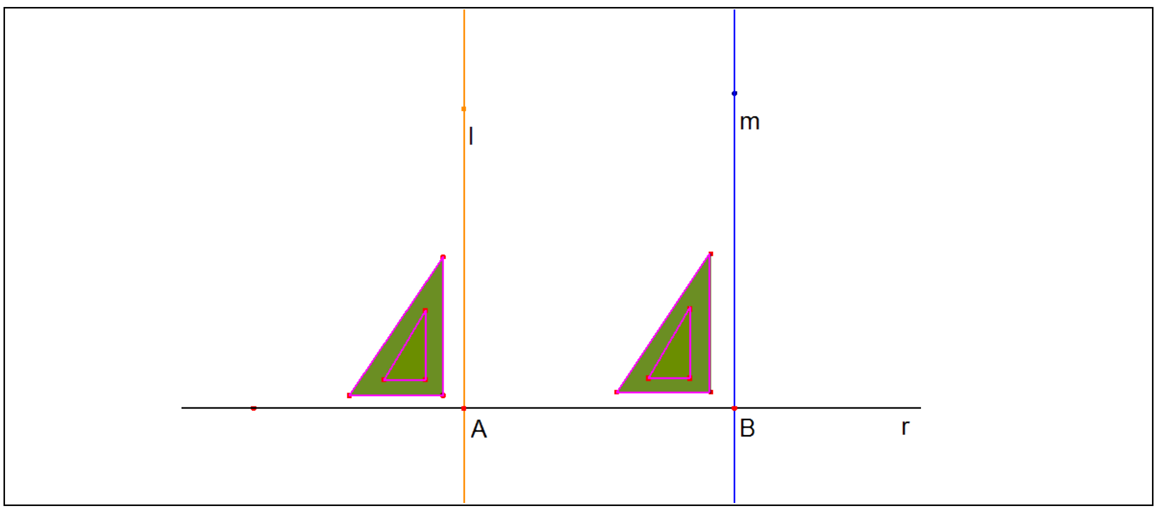
b. Con una abertura del compás un poco mayor que la mitad de la longitud de $\overset{\frown}{CD}$ y haciendo centro, primero en C y luego en D, trazamos dos arcos que se cortan en E.



c. Por último trazamos la semirrecta $\overrightarrow{OE}$ que es la bisectriz del ángulo $\angle$ MON	

d. Construir tres ángulos cuyas medidas sean de 46°, 32° y 80°, respectivamente y trazar después sus bisectrices de dos maneras: una, con el transportador, la otra, con regla y compás.

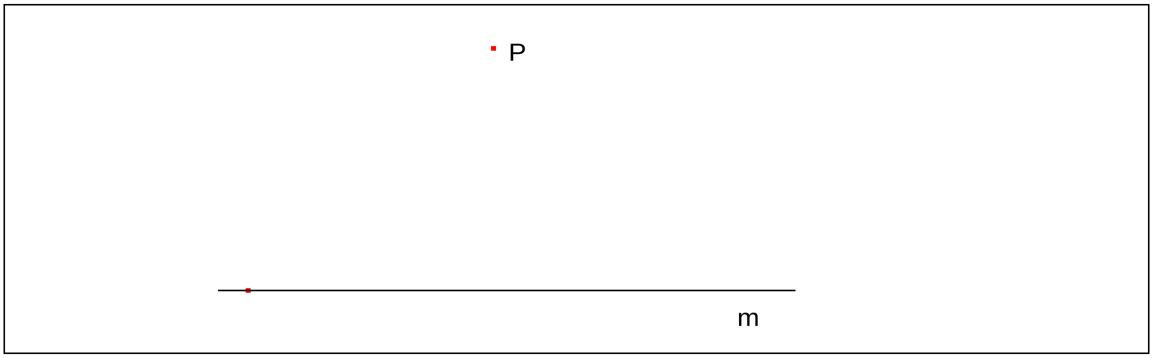
5. TRAZADO DE RECTAS PARALELAS CON ESCUADRA
   a. Tracemos una recta $\overleftrightarrow{L}$ y marquemos en ella dos puntos distintos A y B
   b. Con la ayuda de la escuadra, tracemos dos rectas coplanarias perpendiculares a $\overleftrightarrow{L}$, que pasen por los puntos A y B



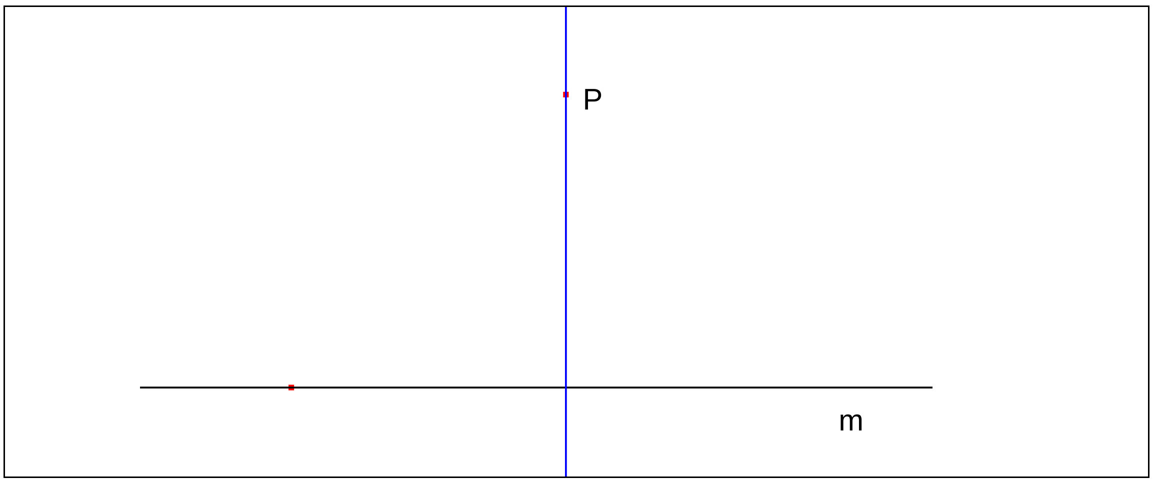
6. TRAZADO DE LA PARALELA A LA RECTA DESDE UN PUNTO EXTERIOR A LA RECTA.

   Dada una recta y un punto exterior a ella, trazar una recta que pase por el punto y sea paralela a la recta dada.

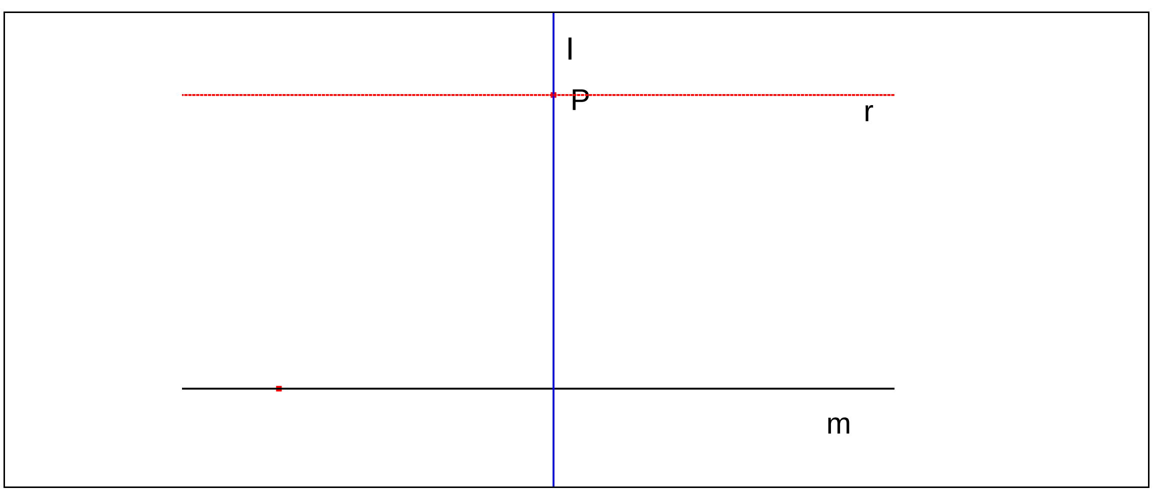
   a. Dibujemos la recta $\overleftrightarrow{m}$ y el punto P exterior a ella



b. Tracemos con la escuadra la perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{m}$ por el punto P. Esta perpendicular es $\overleftrightarrow{L}$.



c. Dibujemos ahora la perpendicular a $\overleftrightarrow{L}$ por el punto P. Esta perpendicular es $\overleftrightarrow{r}$.

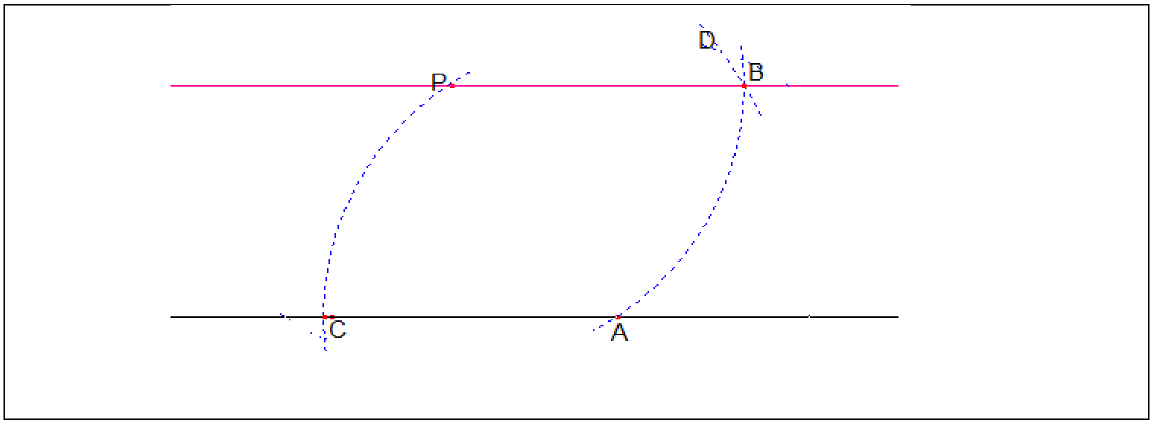


d. Las rectas $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{r}$ son ambas perpendiculares a $\overleftrightarrow{L}$, y por lo tanto son paralelas entre sí. La recta $\overleftrightarrow{r}$ es la única recta paralela a $\overleftrightarrow{m}$ que podemos trazar por el punto P.

7. TRAZADO DE LA RECTA PARALELA A UNA RECTA DADA POR UN PUNTO EXTERIOR.

Vamos a describir la forma de trazar la paralela a una recta dada por un punto exterior utilizando regla y compás.

a. Sea $\overleftrightarrow{L}$ la recta dada y P el punto exterior



b. Con centro en P y radio arbitrario, trazamos el arco AD de modo que corte a $\overleftrightarrow{L}$ en un cierto punto A.
c. Sin cambiar el radio, y con centro A, trazamos el arco CP que cortará a $\overleftrightarrow{L}$ en un punto C.
d. Finalmente, tomamos una abertura de compás igual a CP y haciendo centro en A, cortamos el arco AD en el punto B. Este punto, unido con P, determinará la recta $\overleftrightarrow{PB}$ y $\overleftrightarrow{PB} \parallel \overleftrightarrow{L}$.

J. Anexo: Construcciones con regla y compás - triángulos

TEMA: CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS – TRIÁNGULOS

OBJETIVO:

a. Construir con regla y compás triángulos dados sus tres lados o un lado y los ángulos de los extremos.
b. Construir con regla y compás un paralelogramo.

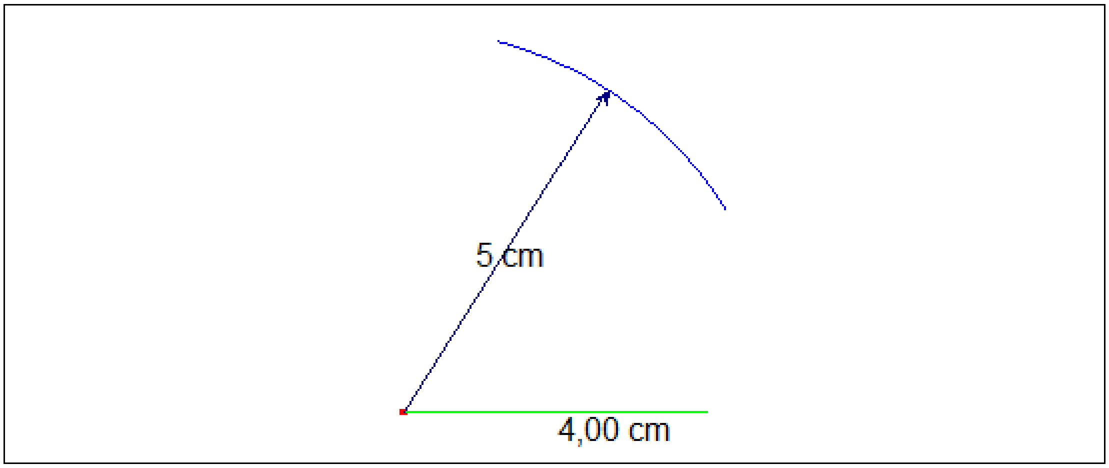
Materiales: regla, compás

<u>Actividad 1</u>

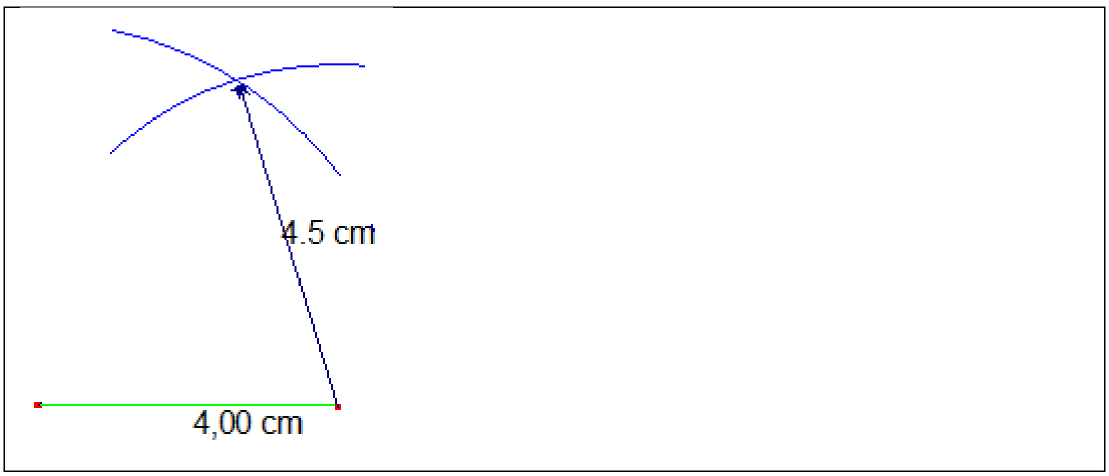
CONSTRUIR UN TRIÁNGULO CONOCIENDO SUS TRES LADOS

Para construir un triángulo cuyos lados miden 4 cm; 5 cm y 4.5 cm respectivamente, hacemos lo siguiente:

a. Trazamos un segmento de 4 cm de longitud.
b. Tomamos en el compás una abertura igual a cualquiera de los otros dos lados del triángulo y, colocando su punta en un extremo del segmento de 4 cm, trazamos un arco:



c. A continuación, abrimos el compás con una abertura igual al tercer lado, 4.5 cm, del triángulo y, utilizando el otro extremo del segmento como centro, trazamos un arco que corte al primero.



d. Finalmente unimos el punto de intersección de los arcos y los extremos del primer segmento trazado, para formar el triángulo.

<u>Actividad 2</u>

Construir un triángulo que tenga un ángulo de 35°, otro de 40° y el lado comprendido entre ellos mida 8cm.

Actividad 3

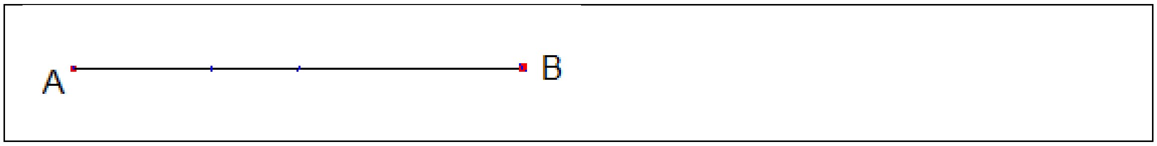
a. Trazar, con regla y compás, un triángulo equilátero cuyo lado mida 8 cm.
b. Trazar, con regla y compás, un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 10 cm. y cuyos lados congruentes miden 12 cm.
c. Trazar, con regla y compás, la mediatriz de un segmento de 12 cm.
d. Trazar, con regla y compás, un triángulo en el cual dos de sus lados miden 12 cm. y 10 cm., y el ángulo comprendido entre ellos de 40°.

Actividad 4

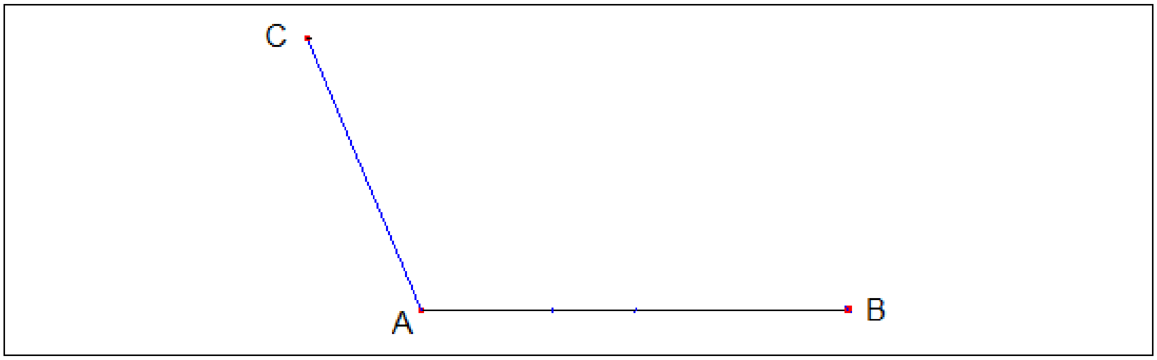
CONSTRUIR UN PARALELOGRAMO CON REGLA Y COMPÁS

Para construir un paralelogramo ABCD con AB=4cm y AC=3cm procedemos de la siguiente manera:

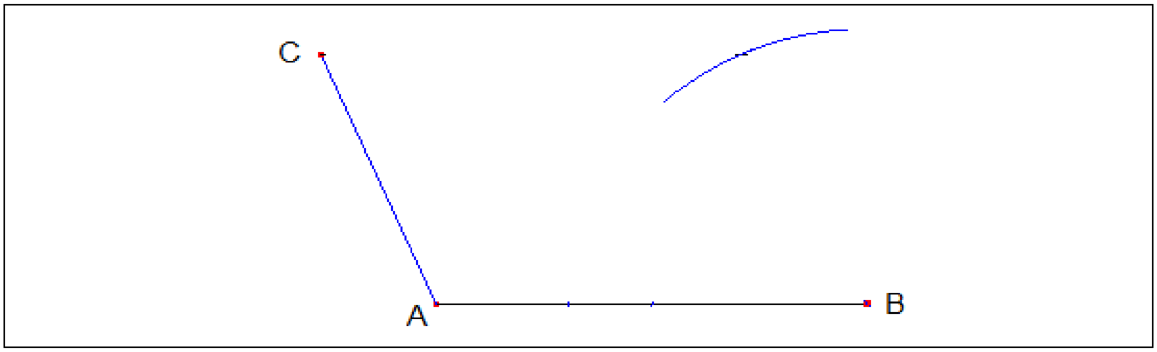
a. Trazo un segmento $\overline{AB}$ de longitud 4 cm.



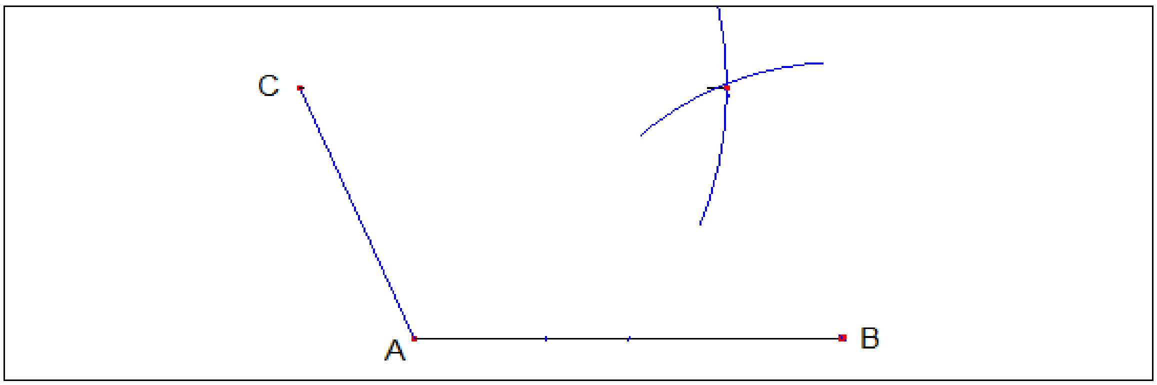
b. Con el segmento $\overline{AB}$ construyo el $\angle$ CAB de cualquier medida, con el segmento $\overline{AC}$ de longitud 3 cm.



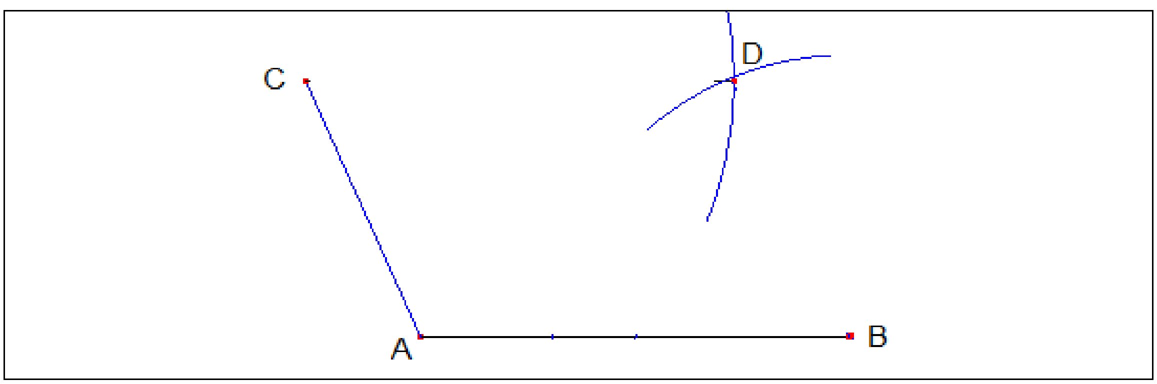
c. Con centro en B y una abertura del compás $\overline{AC}$ trazo un arco



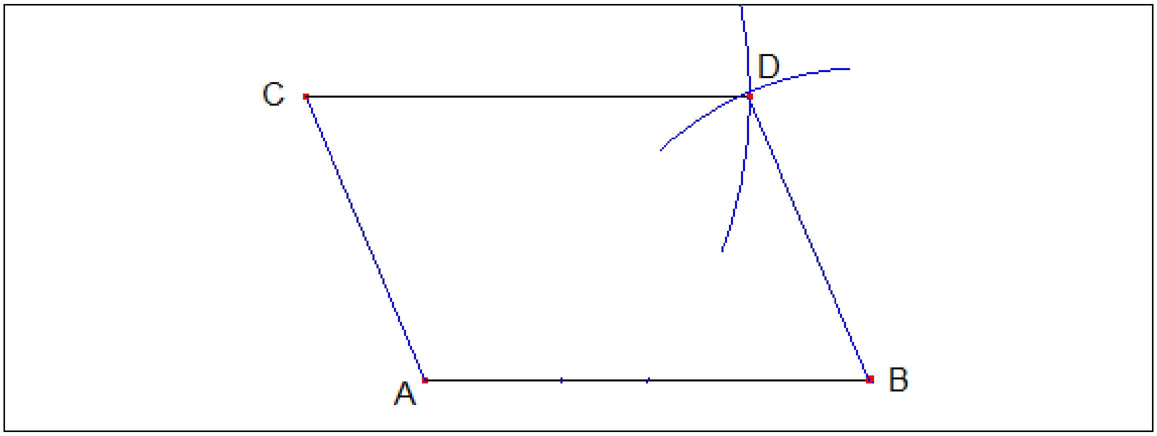
d. Ahora concentro en C y una abertura de compás $\overline{AB}$, trazo un arco que corte al anterior.



e. La intersección de los dos arcos es el punto D.



f. Trazo los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$



g. Con base al proceso anterior, construyo un paralelogramo XYZW, con XY=6 cm y YZ=3 cm.

K. Anexo: Polígonos regulares construcciones con regla, transportador y compás

TEMA: POLIGONOS REGULARES–CONSTRUCCIONES CON REGLA, TRANSPORTADOR Y COMPÁS

OBJETIVO:

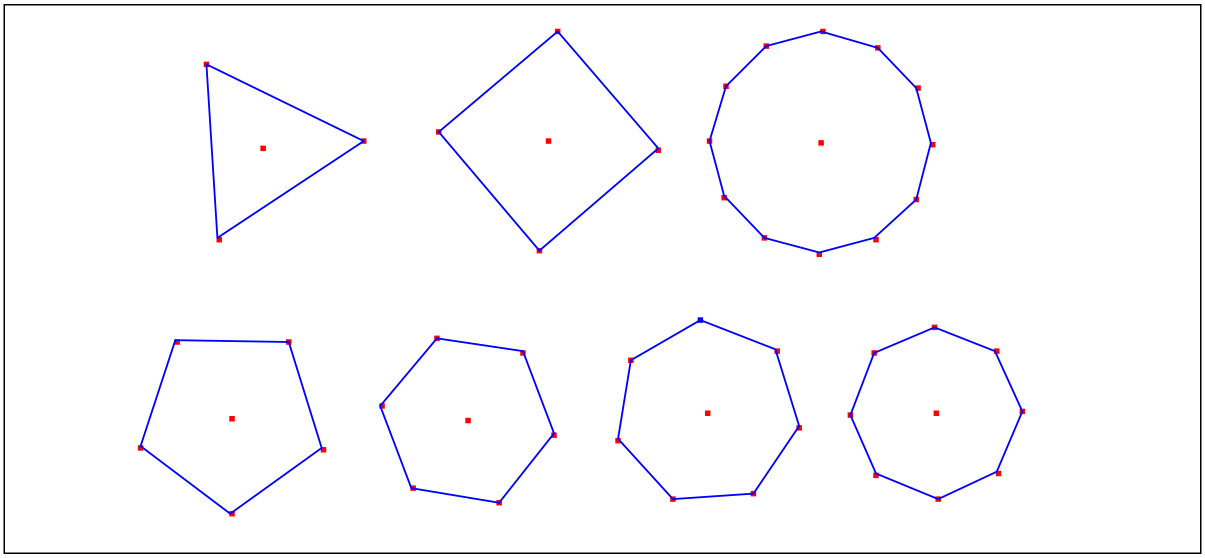
Construir con regla y transportador polígonos regulares inscritos en una circunferencia.

Materiales: regla, transportador, compás.

Actividad 1

Definición: Un polígono en el cual todos sus lados y todos sus ángulos tienen la misma medida, se llama ***polígono regular***.

Las siguientes figuras corresponden a polígonos regular.



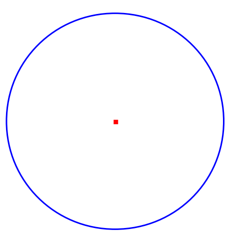
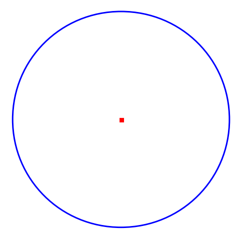
Actividad 2

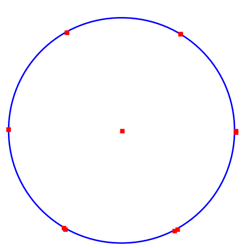
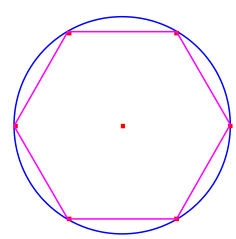
CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES CON REGLA Y TRANSPORTADOR

Teóricamente todo polígono regular puede ser inscrito en una circunferencia, así:

1. Se traza una circunferencia.
2. Se divide 360° entre el número de lados del polígono que se quiere construir.
3. Se dibujan ángulos centrales de (360/n)º
4. Finalmente se marcan puntos sobre la circunferencia, según la medida calculada mediante la división, y se trazan los lados del polígono.

Construcción de un hexágono regular.

1. Se traza una circunferencia de cualquier radio. Luego, se divide 360° entre 6 para establecer que los seis lados del hexágono queden con la misma medida. 	2. 

3. Se dibujan ángulos centrales de 60º y se marcan puntos en la circunferencia cada 60°. 	4. Se trazan los segmentos correspondientes a los lados del hexágono regular 

Actividad 3

Construya con regla y transportador los siguientes polígonos regulares:

1. Un triángulo.
2. Un cuadrado.
3. Un pentágono.
4. Un octágono.
5. Un nonágono.
6. Un decágono.
7. Un dodecágono.
8. Un polígono de 15 lados.
9. Un polígono de 18 lados

L. Anexo: Polígonos regulares construcciones con regla y compás

TEMA: POLIGONOS REGULARES –CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS

OBJETIVO:

Construir con regla y compás polígonos regulares inscritos en una circunferencia.

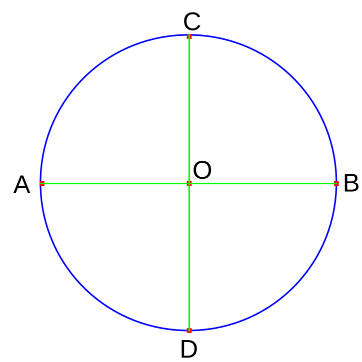
Definición: Un polígono en el cual todos sus lados y todos sus ángulos tienen la misma medida, se llama ***polígono regular***

Materiales: regla, compás

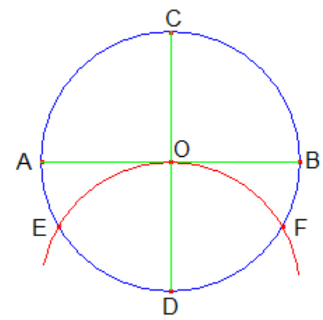
Actividad 1

CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO EQUILATERO

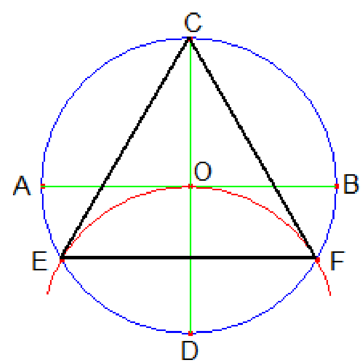
Procedimiento:

a. Traza una circunferencia de cualquier radio, traza dos diámetros: uno horizontal $\overline{AB}$ y el otro vertical $\overline{CD}$	

b. Haz centro en D y utilizando el compás traza un arco que pase por O para pode determinar los puntos E y F.



c. Por último, utilice una regla y une C con F, C con E y E con F para obtener el triángulo equilátero.

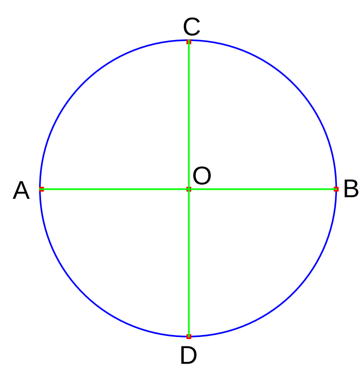


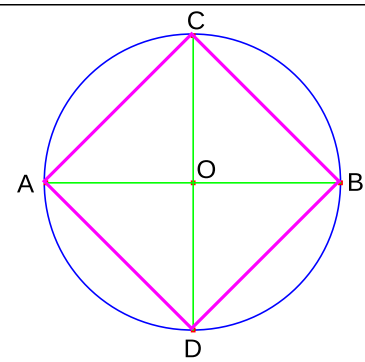
Actividad 2

CONSTRUCCIÓN DE UN CUADRADO

Procedimiento:

a. Traza una circunferencia de cualquier radio, traza dos diámetros: uno horizontal $\overline{AB}$ y el otro vertical $\overline{CD}$.

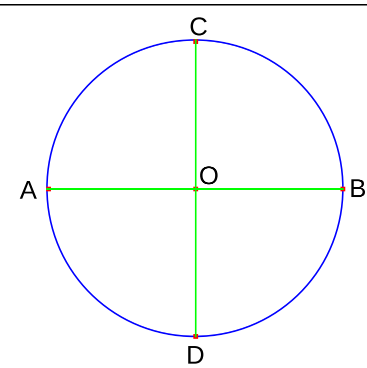


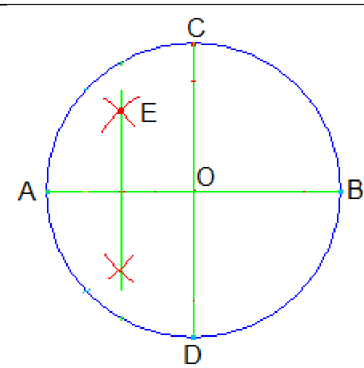
b. Utiliza una regla y une C con A, A con D, D con B y B con C. Finalmente hemos construido un cuadrilátero o cuadrado regular	

Actividad 3

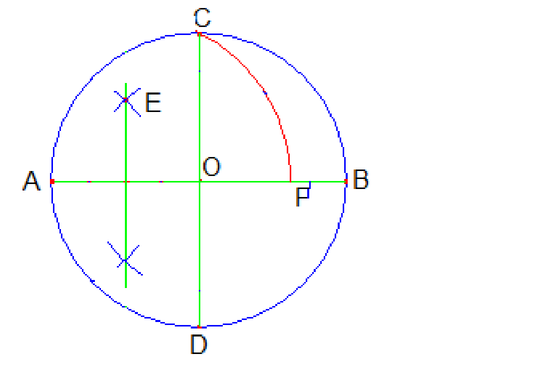
CONSTRUCCIÓN DE UN PENTAGONO REGULAR

Procedimiento:

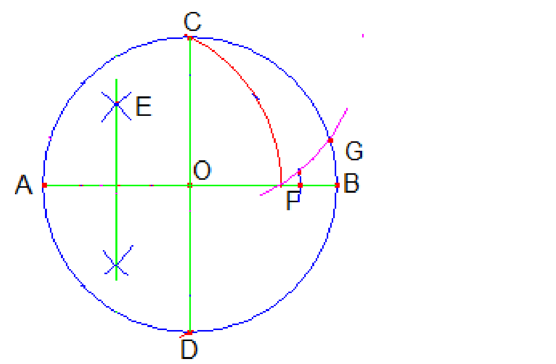
a. Traza una circunferencia de cualquier radio, traza dos diámetros: uno horizontal $\overline{AB}$ y el otro vertical $\overline{CD}$.	

b. Luego, traza una perpendicular por el punto medio del radio $\overline{AO}$ para obtener el punto E.	

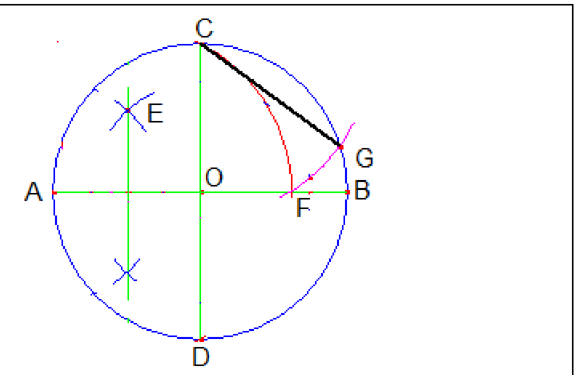
c. Utilizando el compás, haz centro en E y con una abertura $\overline{EC}$, traza un arco que corte al diámetro $\overline{AB}$ para obtener el punto F.



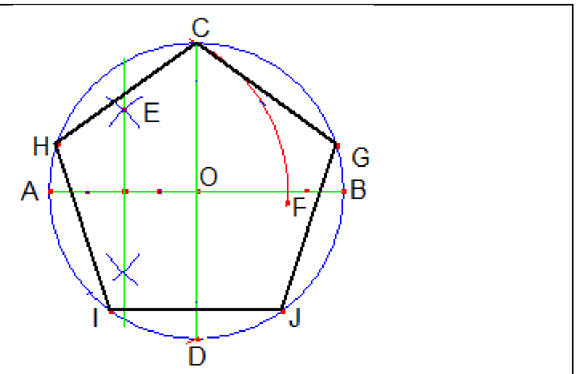
d. Nuevamente con el compás, haz centro en C y con una abertura CF, traza un arco que corte a la circunferencia en el punto G.



e. Traza la cuerda $\overline{CG}$ que será uno de los lados del pentágono. Lleva la distancia $\overline{CG}$ consecutivamente, a partir del punto C para obtener los puntos H, I, J.



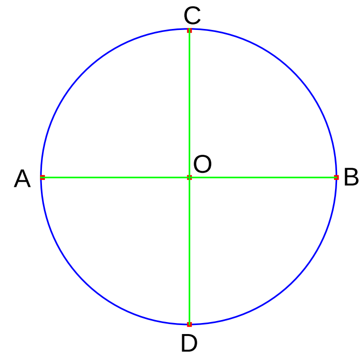
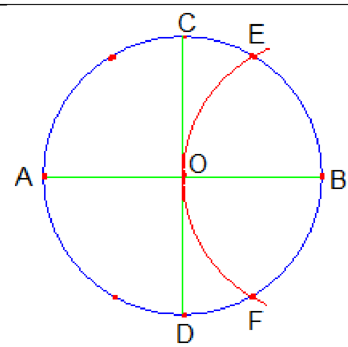
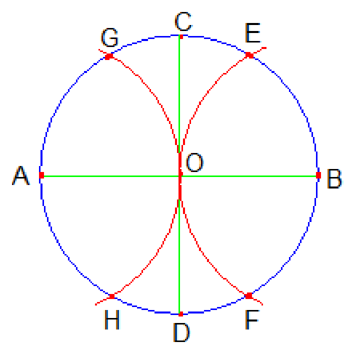
f. Por último, si unes los puntos C, H, I, J y G, obtendrás el pentágono regular.

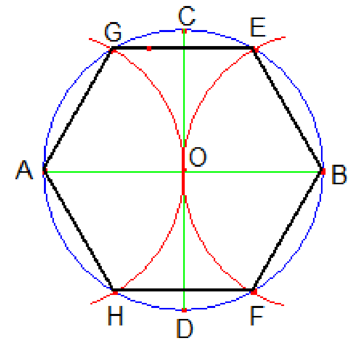


Actividad 4

CONSTRUCCIÓN DE UN HEXÁGONO REGULAR

Procedimiento:

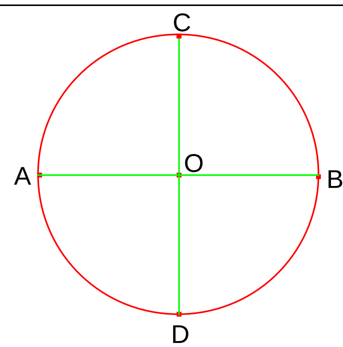
a. Traza una circunferencia de cualquier radio, traza dos diámetros: uno horizontal $\overline{AB}$ y el otro vertical $\overline{CD}$.	
b. Utilizando el compás, haz centro en B y con una abertura que pase por O, traza un arco para determinar los puntos E y F.	
c. Seguidamente haz centro en A y con una abertura que pase por O, traza un arco para determinar los puntos G y H.	

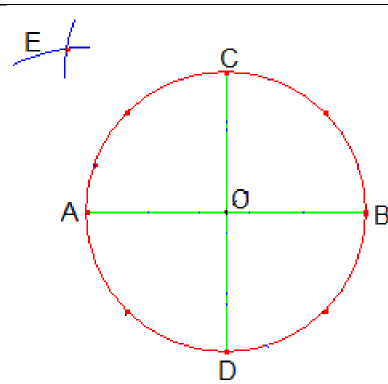
d. Une los puntos G, A, H, F, B y E para obtener el hexágono regular.	

Actividad 5

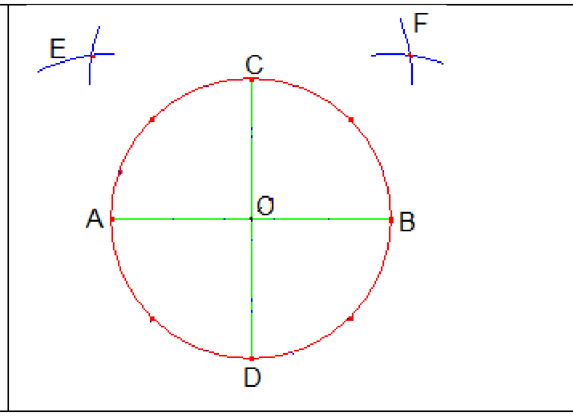
CONSTRUCCIÓN DE UN OCTÁGONO REGULAR

Procedimiento:

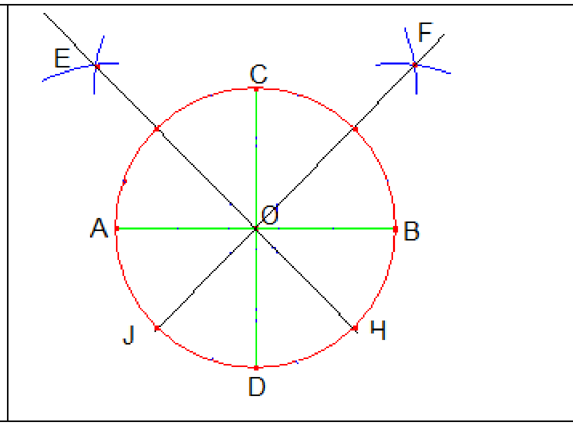
a. Traza una circunferencia de cualquier radio, traza dos diámetros: uno horizontal $\overline{AB}$ y el otro vertical $\overline{CD}$.	

b. Utilizando el compás, haz centro en A y luego en C, con una abertura mayor que la mitad del arco AC traza dos arcos que se corten entre sí para obtener el punto E.	

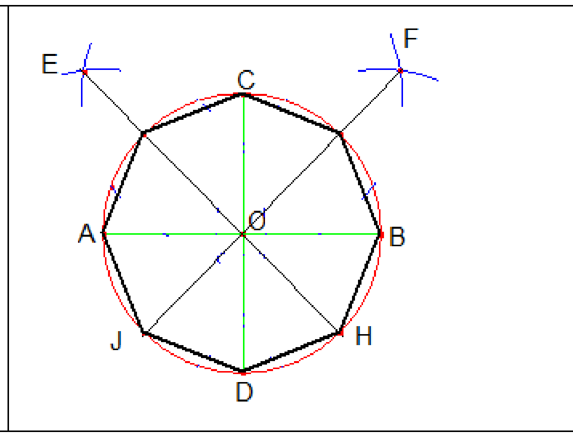
c. A continuación, utilizando nuevamente el compás, haz centro en B y luego en C, con una abertura mayor que la mitad del arco BC traza dos arcos que se corten entre sí para obtener el punto F.



d. Traza la recta determinada por los puntos E y O. para obtener los puntos G y H. Luego traza la recta determinada por los puntos F y O. para obtener los puntos I y J.



e. Finalmente, une los puntos C, G, A, J, D, H, B, I y C para obtener el octágono regular.



M. Anexo: Polígonos regulares construcciones con regla y compás

TEMA: POLIGONOS REGULARES –CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS

OBJETIVO:

Construir con regla y compás de polígonos regulares.

Definición: Un polígono en el cual todos sus lados y todos sus ángulos tienen la misma medida, se llama ***polígono regular***

Materiales: Regla, compás.

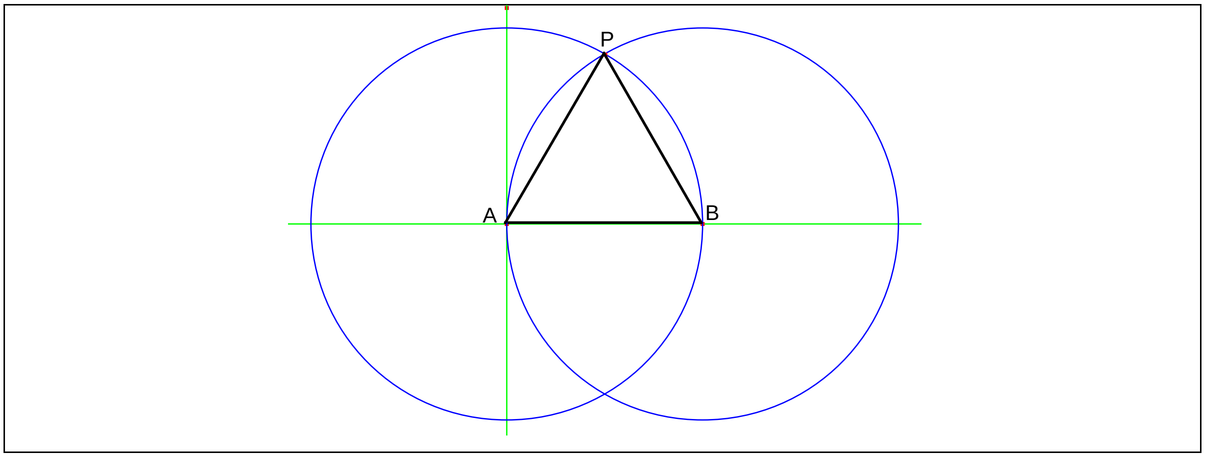
Actividad 1

CONSTRUCCIÓN DE UN POLÍGONO REGULAR DE TRES LADOS: TRIÁNGULO EQUILATERO

Es el polígono regular con menor número de lados que podemos tener

Procedimiento:

a. Trazamos una circunferencia con centro en A y radio $\overline{AB}$ y otra con centro en B y mismo radio. Esas dos circunferencias se cortan en dos puntos.
b. Tomamos uno de ellos, digamos P. Trazando los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ obtenemos el triángulo equilátero APB



Actividad 2

CONSTRUCCIÓN DE UN POLÍGONO REGULAR DE CUATRO LADOS: CUADRADO

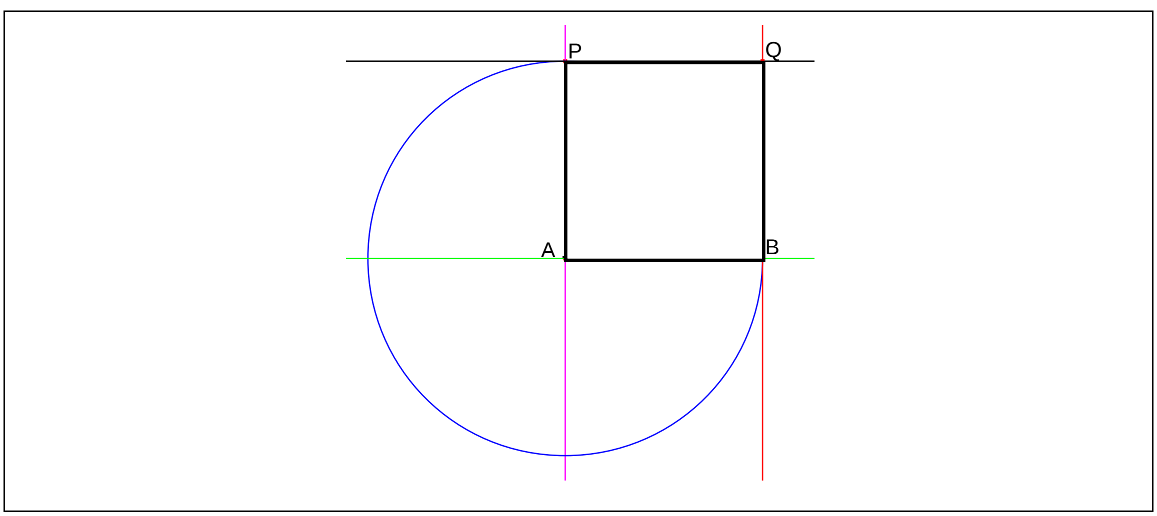
Procedimiento:

a. Trazamos una circunferencia con centro en A y radio $\overline{AB}$. Esa circunferencia corta al eje Y en dos puntos.

b. Tomamos uno de ellos, digamos P.

c. Trazamos la recta paralela al eje X que pasa por P y la recta paralela al eje Y que pasa por B.

d. El punto de corte de las mismas, digamos Q, es el vértice que nos faltaba. Trazando los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{QB}$ obtenemos nuestro cuadrado.



Actividad 3

CONSTRUCCIÓN DE UN POLÍGONO REGULAR DE CINCO LADOS: PENTAGONO REGULAR

Procedimiento:

a. Trazamos la paralela al eje Y que pasa por B, digamos r.

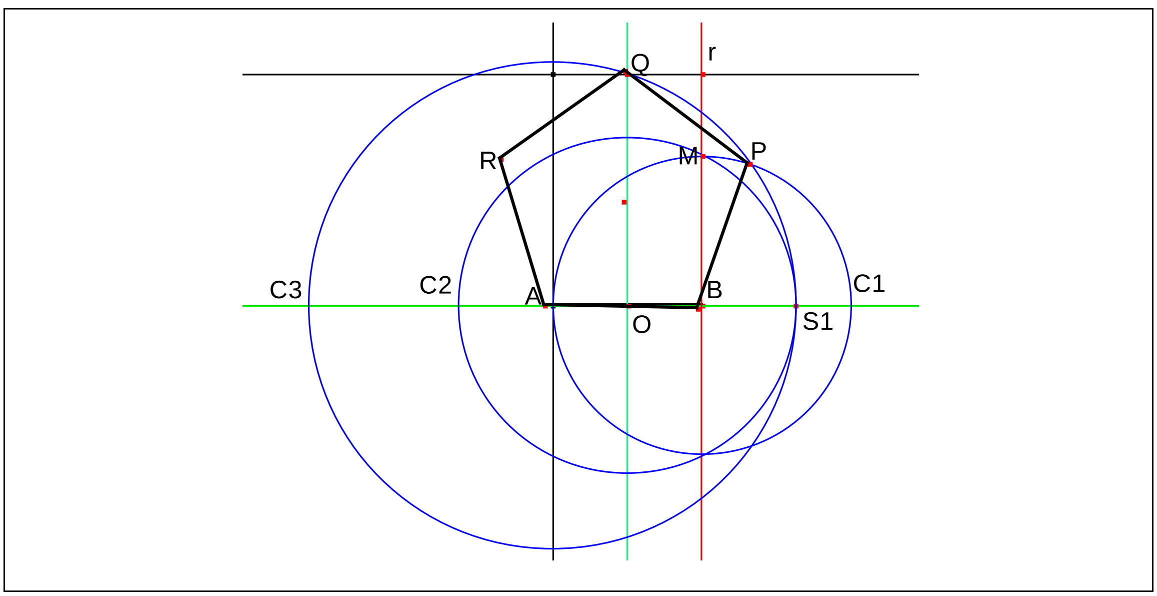
b. Se traza la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ obteniendo el punto O como corte con el eje X.

c. Trazamos la circunferencia de centro B y radio $\overline{AB}$, digamos C1. Obtenemos el punto M como corte de C1 con la recta r.

d. Con centro en O trazamos la circunferencia de radio $\overline{OM}$, C2, obteniendo el punto S de corte con el eje X.

e. Trazamos ahora la circunferencia de centro A y radio $\overline{AS}$, C3. Obtenemos el punto P al cortar con C1 y el punto Q como corte con la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

f. Para obtener el vértice que nos falta, R, simplemente construimos el punto simétrico a P respecto de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$. Uniendo los vértices obtenemos el pentágono regular buscado.



Actividad 4

CONSTRUCCIÓN DE UN POLÍGONO REGULAR DE SEIS LADOS: HEXÁGONO REGULAR

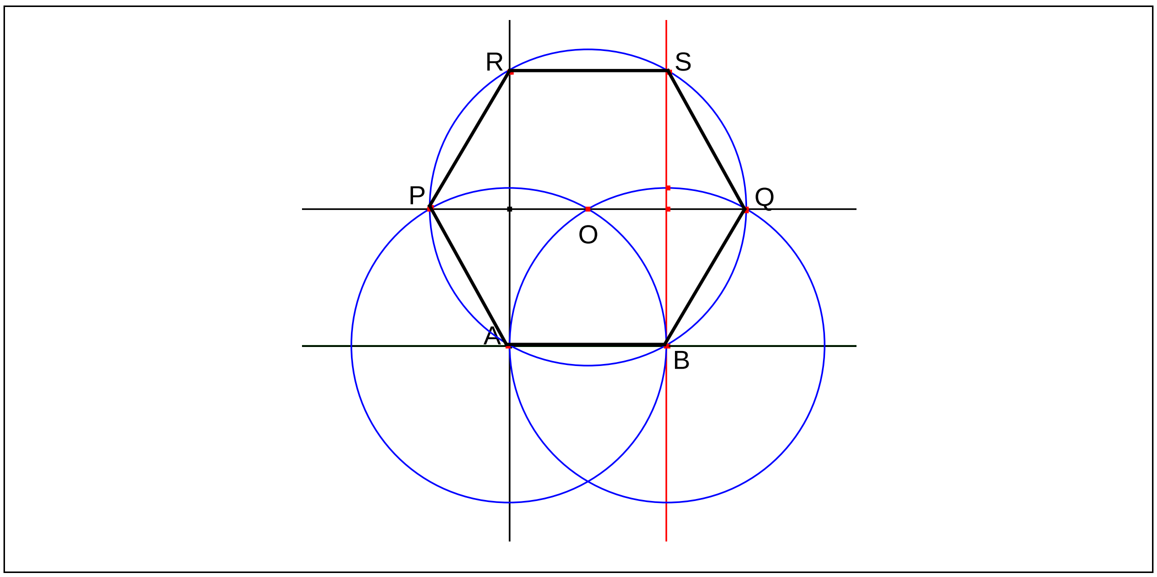
Procedimiento:

a. Con radio $\overline{AB}$ trazamos circunferencias con centro A y B.

b. Tomamos uno de los puntos de corte, digamos O. Ese es el centro del hexágono.

c. Trazamos ahora la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$. Obtenemos los puntos P y Q como cortes con las circunferencias anteriores y R como corte con el eje Y.

d. Trazando la paralela al eje Y que pasa por B obtenemos el último vértice, S, como corte de esta recta y la circunferencia trazada justo antes. Uniendo los vértices obtenemos el hexágono regular buscado.



N. Anexo: Perímetro y áreas

TEMA: Perímetro y Áreas

OBJETIVO:

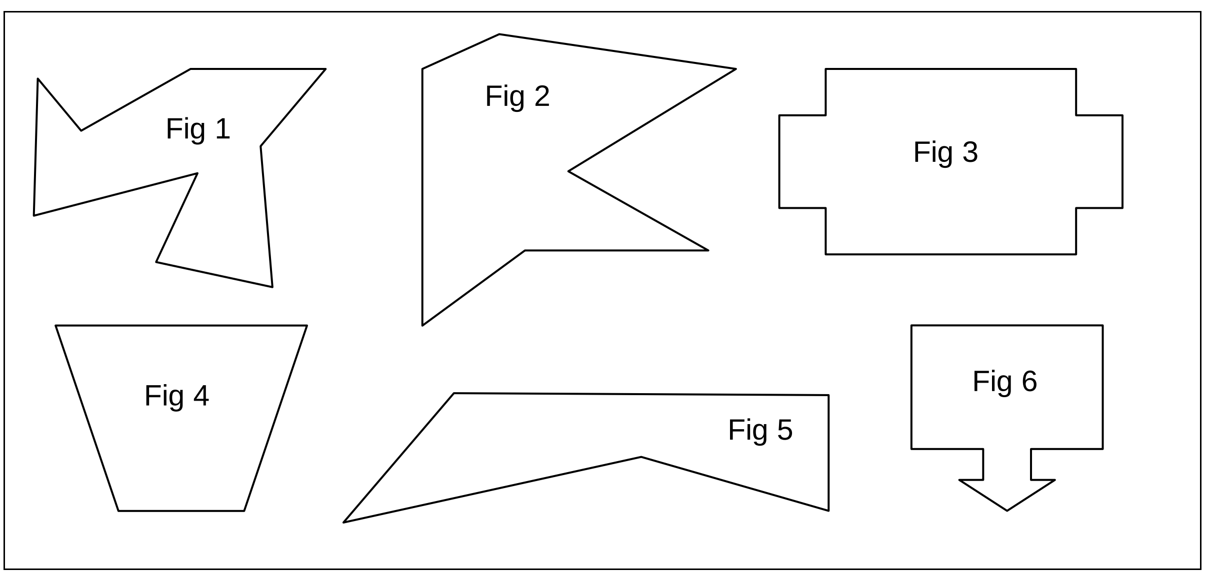
a. Reconocer el perímetro como una característica de las figuras planas.
b. Obtener de una forma constructiva el área de las figuras planas.

Materiales: Regla, la tapa de un frasco, un plato, una moneda, la tapa de una olla, cordón.

Actividad 1

Perímetro *es la medida total del contorno de una figura. El perímetro lo podemos representar con la letra* ***P.***

Observa las siguientes figuras



a. Con la ayuda de una regla mide cada uno de los lados y halle la suma de sus lados.
b. Escribe tus resultados:

Perímetro de la Figura 1:

___

Perímetro de la Figura 2:

___

Perímetro de la Figura 3:

___

Perímetro de la Figura 4:

___

Perímetro de la Figura 5:

___

Perímetro de la Figura 6:

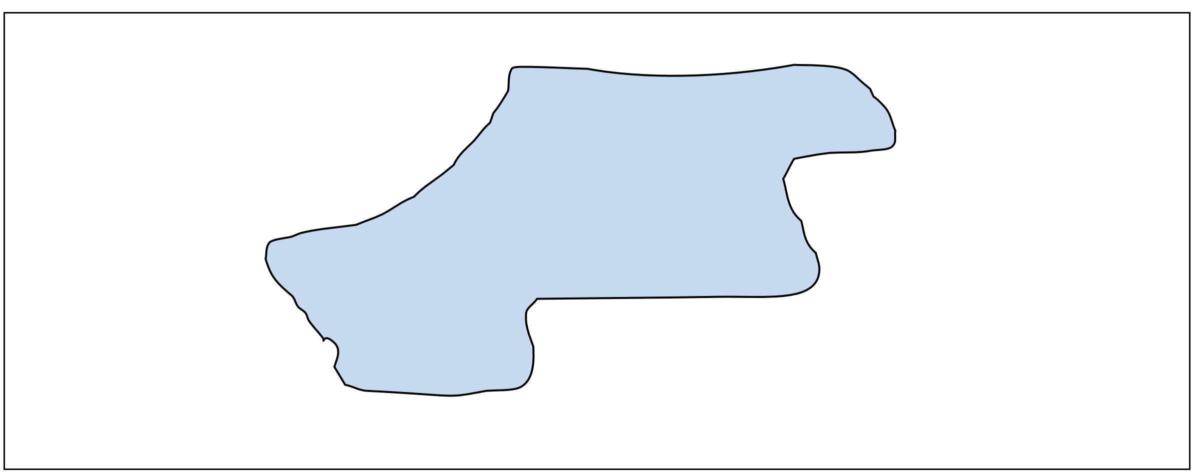
___

Actividad 2

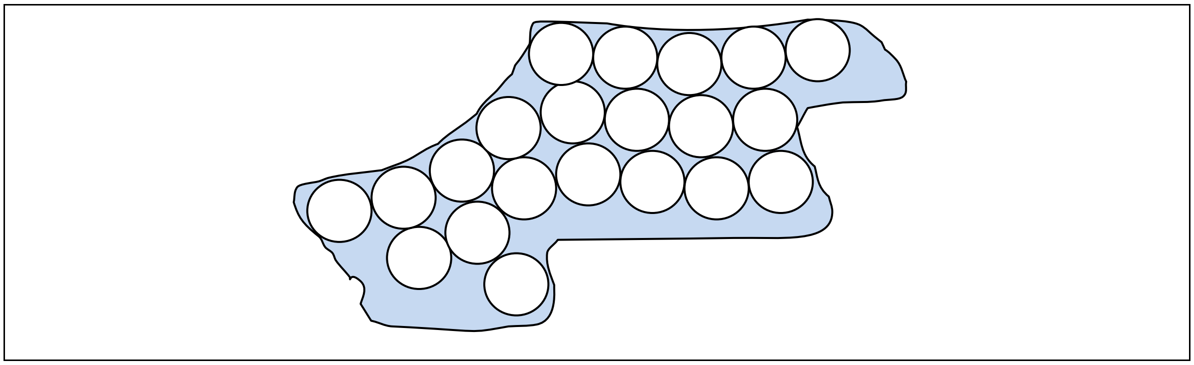
Definición:

Superficie *es el espacio ocupado por una figura en el plano.*

Determinar la medida de las siguientes superficies.



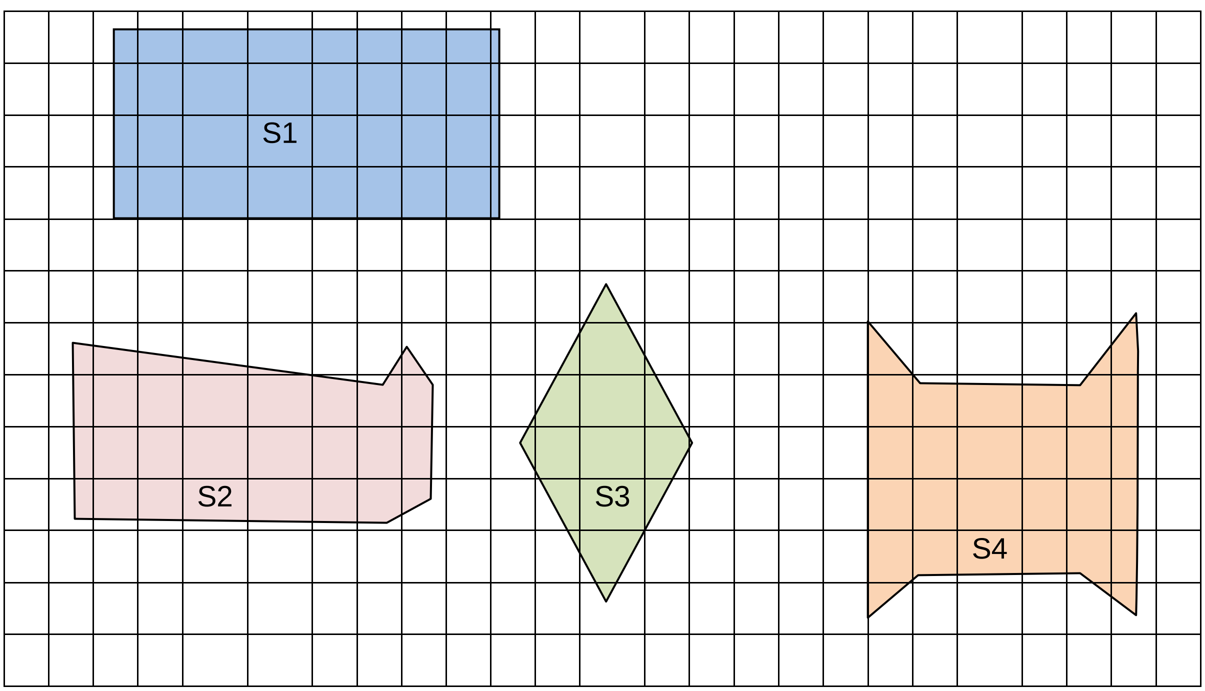
a. Escoger como unidad de medida, por ejemplo, una moneda de 100 pesos y tapar con ella la superficie tratando de no salirse del borde.



b. La superficie ocupa 21 monedas. Pero queda superficies sin ocupar por la moneda, esto quiere decir que la moneda no es una unidad de medida adecuada por lo tanto se deben elegir otra. (se puede escoger un cuadrado o un triángulo que nos ayuda a cubrir la superficie sin dejar superficie sin ocupar).

Actividad 3

Indica cuantos cuadrados enteros o fracción de cuadrados ocupan las superficies siguientes:



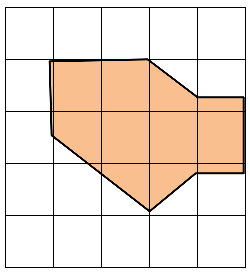
a. La superficie 1 ocupa _______________ cuadrados.

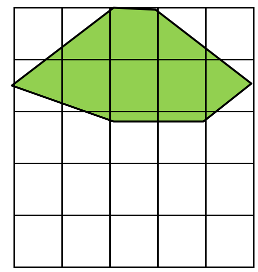
b. La superficie 2 ocupa _______________ cuadrados.

c. La superficie 3 ocupa _______________ cuadrados.

d. La superficie 4 ocupa _______________ cuadrados.

e. ¿Se puede comparar la superficie de las siguientes figuras? Si la respuesta es afirmativa ¿Cuál ocupa mayor superficie? _______________________________





Actividad 4

a. Buscar varios objetos circulares, por ejemplo, la tapa de un frasco, un plato, una moneda, la tapa de una olla, etc.

b. Mide la longitud del borde de la tapa, del plato, de la moneda, de la tapa de la olla, etc., rodeando dicho borde con un cordón.

c. Anota los resultados y comprueba que en todos los casos el cociente entre la longitud (L) y el diámetro (D) es el mismo número.

	Primer objeto	Segundo objeto	Tercer objeto	Cuarto objeto
Longitud (L)				
Diámetro (D)				
Cociente= $\frac{L}{D}$				

d. Cociente= $\frac{L}{D}$ es siempre el mismo número y se designa por la letra griega π. Y su valor es 3.1416…..

e. $\frac{L}{D} = \pi \Rightarrow L = D\pi, \text{como } D = 2\pi, \text{resulta que } L = 2\pi r$

f. La longitud de una circunferencia es igual al producto de su diámetro por el número pi.

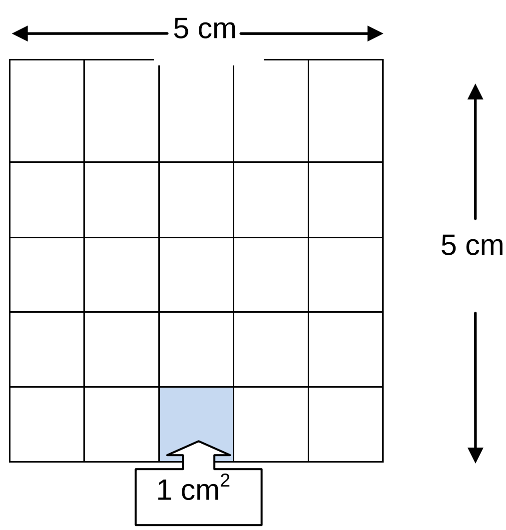
g. El radio de una moneda mide 0,8 cm, ¿Cuál es la longitud d su borde?

h. En una pista circular de 100 m de radio, un auto dio 80 vueltas. ¿Cuántos Kilómetros recorrió el auto?

<u>**Actividad 5**</u>

Área del Cuadrado.

Para calcular el área de cualquier cuadrado haga lo siguiente

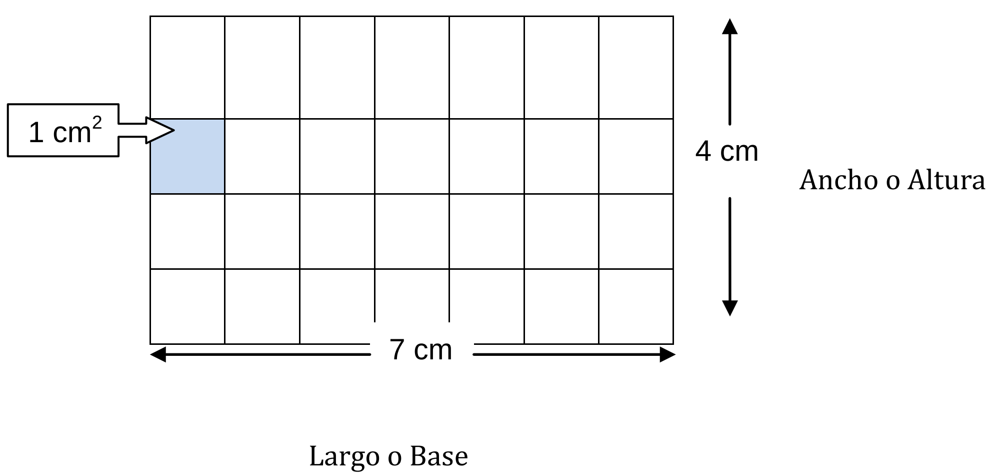


a. Cada cuadrado es 1 cm^2
b. Si contamos el total de cuadritos será de 25 cm^2
c. El resultado de 25 cm^2, también lo podemos hallar multiplicando 5 cm que tiene un lado por 5cm que tiene el otro.
d. Área del cuadrado = Lado X Lado.
e. Área del cuadrado = 5cm X 5cm = 25 cm^2

Actividad 6

Área del Rectángulo:

Observa cómo podemos calcular el área de un rectángulo.

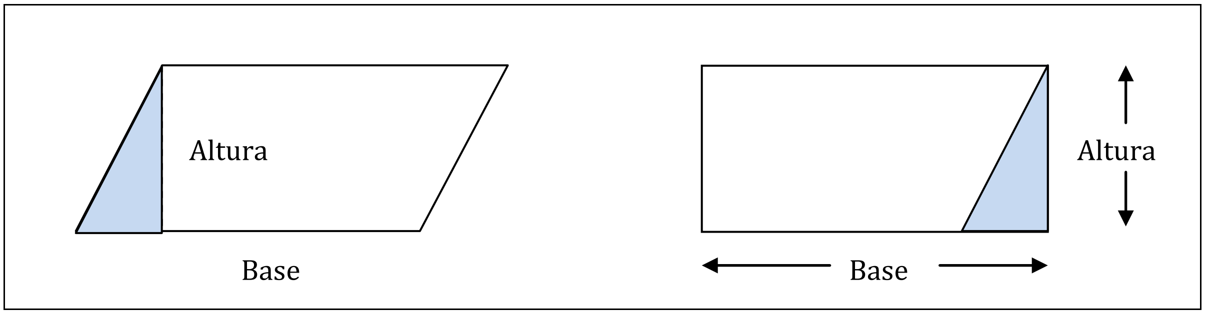


a. Cada cuadrado mide 1 cm2
b. Al contar los cuadritos obtenemos 28 cm2
c. El resultado también lo podemos obtener multiplicando 7 cm que tiene el largo o base por 4cm que mide el ancho o altura. Por lo tanto
d. Área del Rectángulo = Base X Altura
e. Área del Rectángulo = 7 cm X 4 cm = 28 cm2

Actividad 7

Área del Paralelogramo

a. Dibuje en cartulina un paralelogramo como el de la siguiente figura y recórtalo



¿Es igual el área del paralelogramo y la del rectángulo formado? ¿Por qué?

____

____

____

Mide la base y la altura del rectángulo y calcula su área

Ahora mide la base y la altura del paralelogramo. Multiplica los valores y compruebe que el resultado coincide con el área del rectángulo.

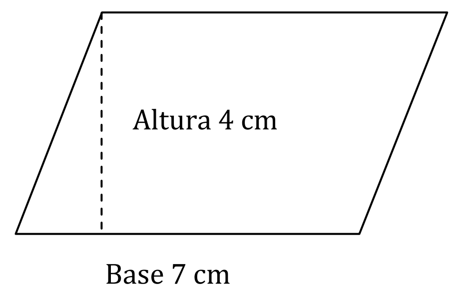
¿Los dos resultados coinciden? Si ________ No ________

Área del Paralelogramo = Base X Altura

Actividad 8

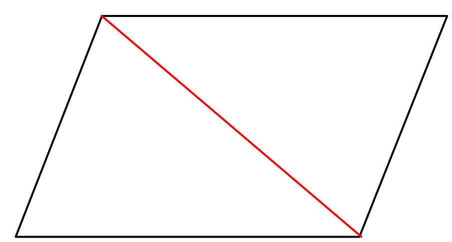
Área del Triángulo

Tenga en cuenta el siguiente paralelogramo y responde:

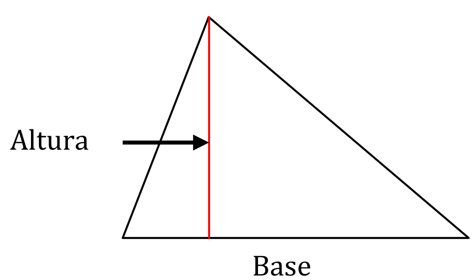


Área del Paralelogramo = _________ X _________ = ________

Trace la diagonal del paralelogramo



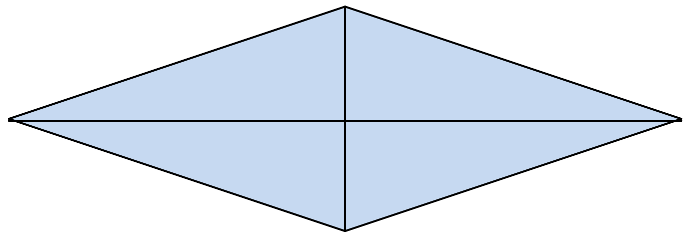
Compruebe que la diagonal divide al paralelogramo en dos triángulos iguales. Por lo tanto el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.



$$A = \frac{\text{Base X Altura}}{2}$$

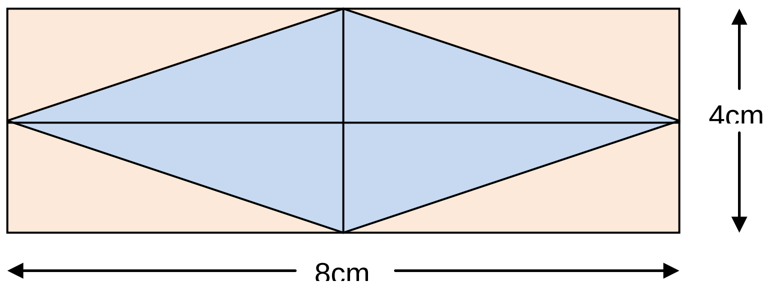
Actividad 9

Área del Rombo



Las medidas de las diagonales de este rombo son: Diagonal Mayor = 8cm y Diagonal menor = 4cm

Trazando paralelas a las diagonales por los vértices se obtiene un rectángulo de lados 8cm y 4cm y cuya área es 8cm X 4cm = 32cm^2



Se observa que el rectángulo tiene 8 triángulos iguales y cuatro de ellos están en el rombo; entonces podemos decir que:

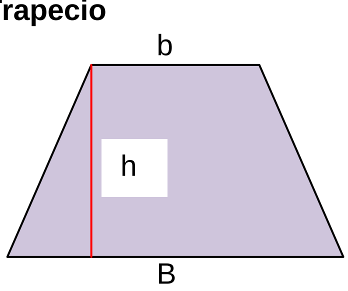
El área del Rombo es la mitad del área del rectángulo.

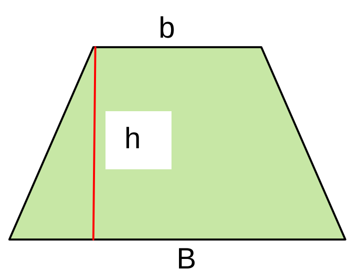
$$\text{Área del Rombo} = \frac{8\text{cm X } 4\text{cm}}{2} = \frac{32\text{cm}^2}{2} = 16\text{cm}^2$$

$$\text{Área } = \frac{\text{Diagonal Mayor X Diagonal menor}}{2} = \frac{\text{D X d}}{2}$$

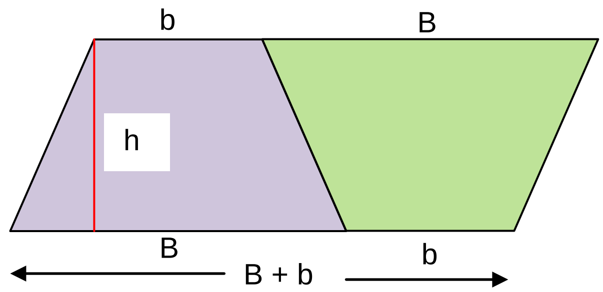
Actividad 10

Área del Trapecio





a. Calca el trapecio verde y el trapecio lila.
b. Recorta el trapecio verde y colócalo junto al trapecio lila como se indica en la figura siguiente



c. Se observa que de esta manera se obtiene un paralelogramo formado por dos trapecios iguales.
d. La base del paralelogramo es B + b y su altura h.
e. El área del paralelogramo es (B + b) X h, luego podemos decir que el área del trapecio será la mitad del área del paralelogramo.

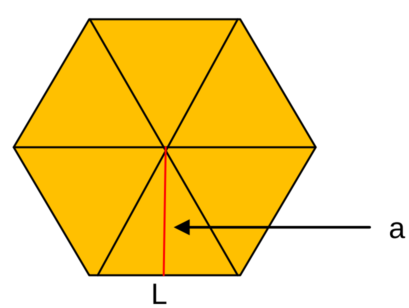
$$\text{Área del trapecio} = \frac{(\text{Base Mayor}+\text{base menor})\text{ X altura}}{2}$$

$$\text{Área } = \frac{(B+b)x\,h}{2}$$

<u>Actividad 11</u>

Área de un Polígono Regular

Es de a notar que todo polígono regular se puede descomponer en triángulos iguales.
Por ejemplo veamos el hexágono regular como lo podemos descomponer en triángulos iguales.



Entonces para hallar el área del hexágono regular basta hallar el área de uno de estos triángulos y multiplicar el resultado por 6.

Como la base de cada triángulo es igual al lado del hexágono y su altura es igual a la apotema del hexágono, tenemos que:

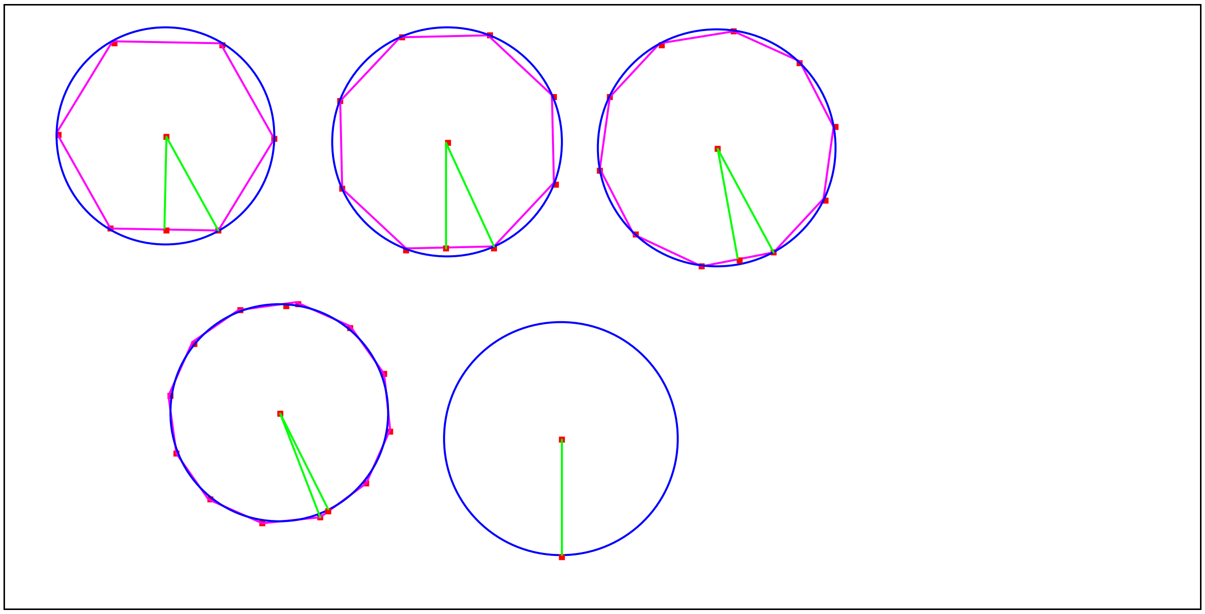
$$\text{Área del hexagono regular} = 6\frac{\text{L x a}}{2} = \frac{\text{6 xL x a}}{2}$$

Como 6L es igual al perímetro del hexágono, tenemos que:

$$\text{Área } = \frac{\text{Perímetro x Apotema}}{2};\ \text{Área } = \frac{\text{P x a}}{2}$$

Actividad 12

Área del Círculo



Observe las figuras del recuadro, los polígonos regulares inscritos de radio r. observe que cuanto mayor es el número de lados del polígono, más se aproxima el área del polígono al área del círculo.

Entonces podemos imaginar el círculo como un polígono de muchos lados, donde el perímetro del polígono sería la longitud de la circunferencia y su apotema sería el radio. Por lo tanto:

$$\text{Área del círculo} \approx \frac{\text{Perímetro x Apotema}}{2} = \frac{\text{Longitud x radio}}{2}$$

Como la longitud de la circunferencia es igual a $2\pi r$, tenemos:

$$\text{Área } = \frac{2\pi r r}{2} = \pi r^2$$

Actividad 13

Responda:

a. Es posible encontrar una fórmula para hallar el perímetro de un polígono regular de cualquier número de lados. Si la encuentra escríbela

____

b. Si el perímetro de un triángulo equilátero es 78cm, ¿cuánto mide un lado?

L = __________

c. Si el perímetro de un decágono regular es 120cm. ¿Cuánto mide cada lado?

L = __________

d. El perímetro de un triángulo isósceles es 24cm. Si el lado desigual mide 6cm, ¿cuánto miden los otros dos lados?

____

e. La longitud de la base de un rectángulo es el doble de la longitud de su altura. El perímetro es 54cm. ¿Cuál es el área?

____

____

f. ¿Cuántos cuadrados distintos, cuyas bases y alturas sean cantidades enteras en cm^2, tiene un área de $36cm^2$?

____

____

Actividad 14

Responder verdadero o falso a cada una de las siguientes proposiciones. Justificar las respuestas falsas.

a. Si dos rectángulos tienen áreas iguales, entonces sus perímetros también son iguales. Verdadero ( ) Falso ( )

____

____

____

b. El área de un circulo es $2\pi r$. Verdadero ( ) Falso ( )

____

____

____

c. Si duplicamos el radio de un círculo, duplicamos su área. Verdadero ( ) Falso ( )

____

____

____

d. El área de un trapecio es igual al semiproducto de su paralela (o base) por la altura. Verdadero ( ) Falso ( )

____

____

____

e. Si duplicamos la base de un triángulo, manteniendo la altura constante el área se duplica. Verdadero ( ) Falso ( )

____

____

____

f. Si un triángulo y un paralelogramo tienen la misma base y la misma área, sus alturas son las mismas. Verdadero ( ) Falso ( )

____

____

____

O. Anexo: Otras construcciones con regla y compás

1. Simetría

La simetría es una propiedad que tienen algunas figuras, que se reconoce por lo general a simple vista y que las hace lucir equilibradas y armoniosas, pues los puntos de la figura se aparecen distribuidos con respecto a un punto o a una recta, de modo que se equilibran los unos con los otros.

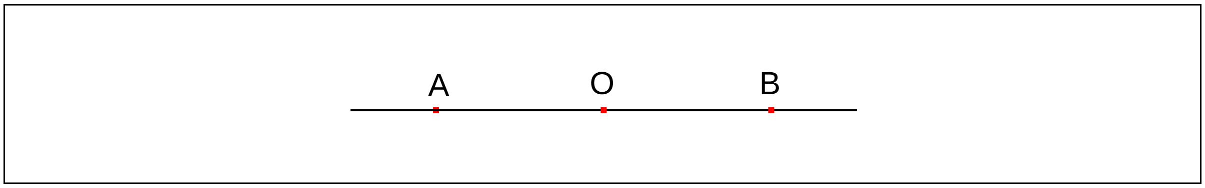
Definición: es la armonía de posición entre las partes o puntos similares respecto unos de otros, y con referencia a un punto o línea determinada.

2. Simetría central

Definición: es la simetría respecto de un punto al que se denomina centro de la simetría.

- Dos puntos son simétricos con respecto a otro llamado centro cuando estando los tres alineados equidistan de él.

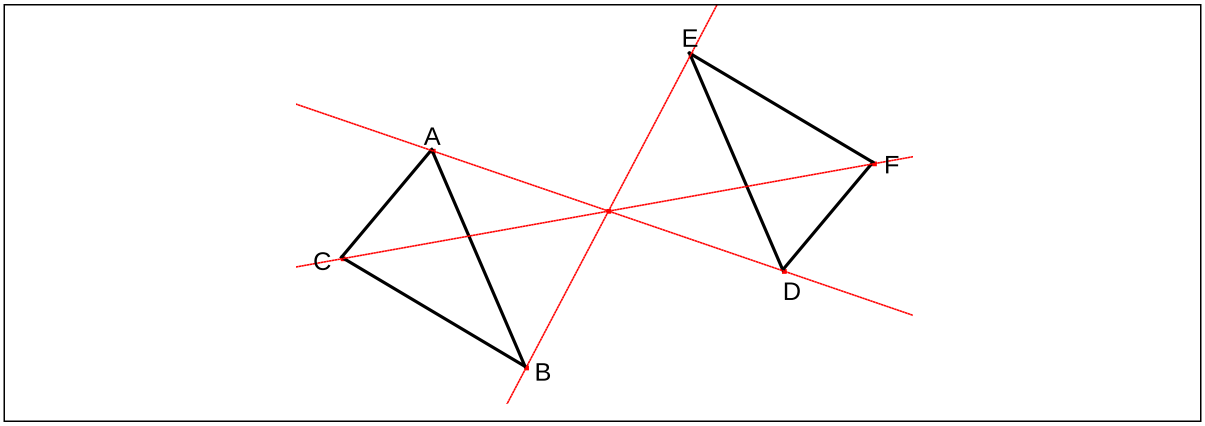
Figura 2-1: Simetría central de dos puntos.



A y B son simétricos con respecto a O, pues A, O y B están alineados y $\overline{AO} = \overline{OB}$

- Dos figuras son simétricas con respecto a un punto llamado centro cuando todo puto de cada una de ellas tiene su simétrico respecto de ese centro en la otra figura.

Figura 2-2: Simetría central de dos figuras.



D es simétrico de A con respecto a O

E es simétrico de B con respecto a O

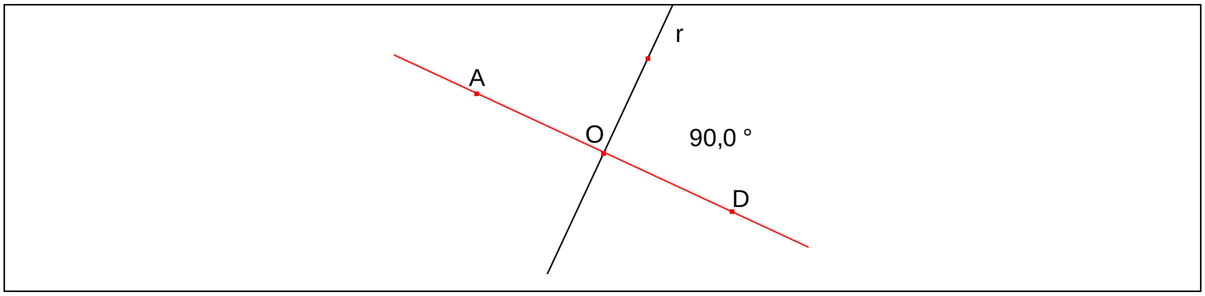
F es simétrico de C con respecto a O.

3. Simetría Axial

Definición: es la simetría respecto de una línea recta a la que se denomina eje de la simetría.

- Dos puntos son simétricos con respecto a una recta llamada eje cuando se encuentran sobre la misma perpendicular a dicha recta y equidistan de ella.

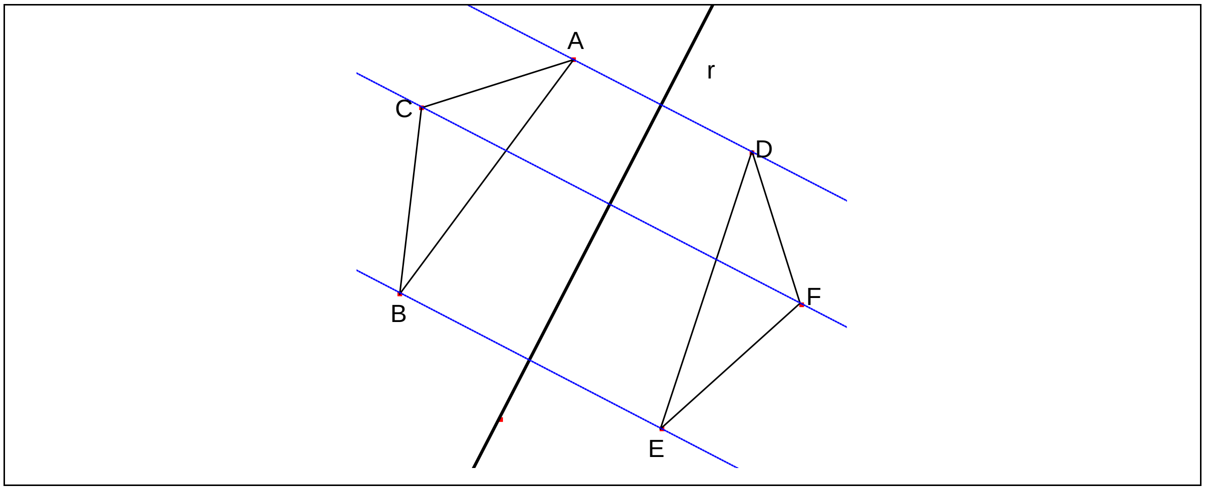
Figura 3-3: Simetría Axial de dos puntos.



A Y B son simétricos con respecto a r, pues $\overline{AB}$ es perpendicular a r y $\overline{AO} = \overline{OB}$ (O es el punto de intersección del segmento $\overline{AB}$ y la recta r).

- Dos figuras son simétricas respecto de una recta llamada eje cuando todo punto de cada una de ellas tiene su simétrico respecto de esa recta en la otra figura.

Figura 3-4: Simetría Axial de dos figuras.



D es simétrico de A con respecto a r

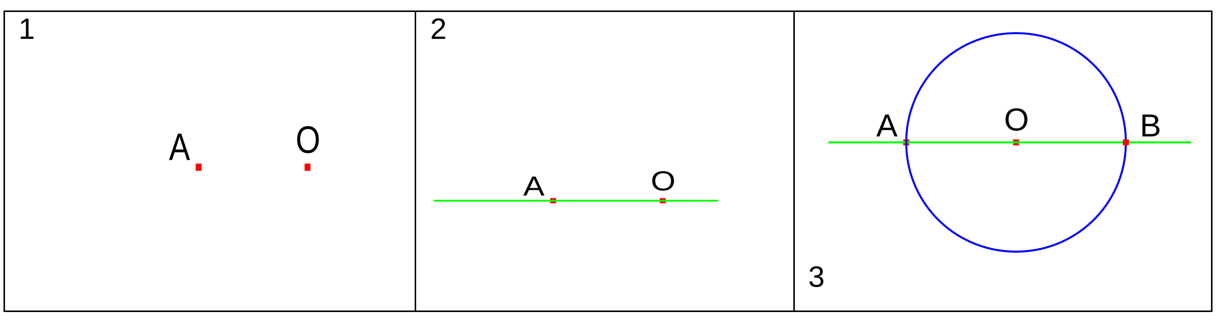
E es simétrico de B con respecto a r

F es simétrico de C con respecto a r

4. Construcción de un punto con respecto a un centro utilizando la regla y el compás.

1. Partimos de un punto A y un centro de simetría O.
2. Trazamos la recta que pasa por los puntos A y O.
3. Con centro en O, trazamos la circunferencia de radio $\overline{OA}$ que intersecta a la recta en un punto B el cual es simétrico de A respecto del punto O.

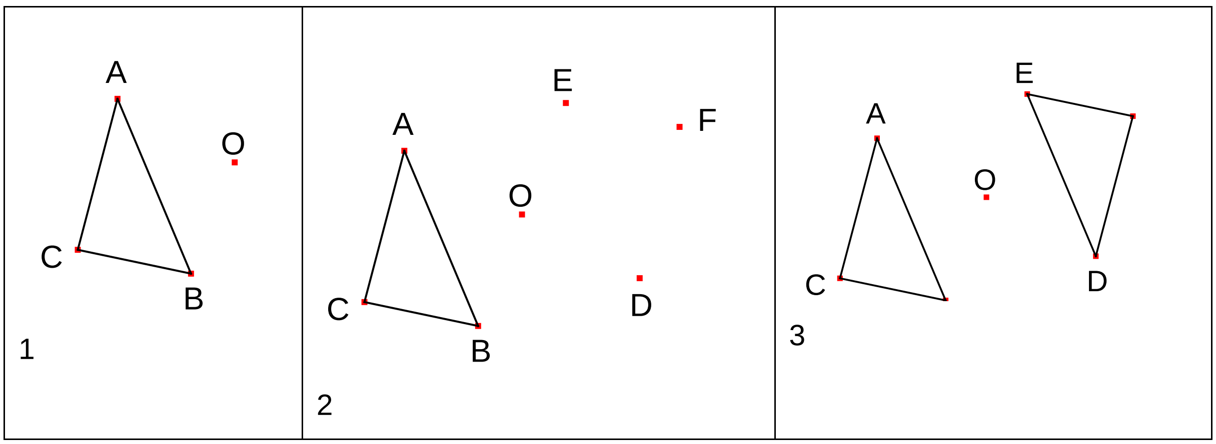
Figura 4-5: Construcción con regla y compás de puntos simétricos.



5. Construcción del simétrico de una figura con respecto a un centro utilizando la regla y el compás.

1. Partimos de un triangulo ABC y un centro se simetría O.
2. Trazamos los puntos simétricos de A, B y C respecto del centro O y los llamamos D, E y F respectivamente.
3. Trazamos los segmentos $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FD}$; queda determinado el triángulo DEF simétrico de ABC respecto del centro O.

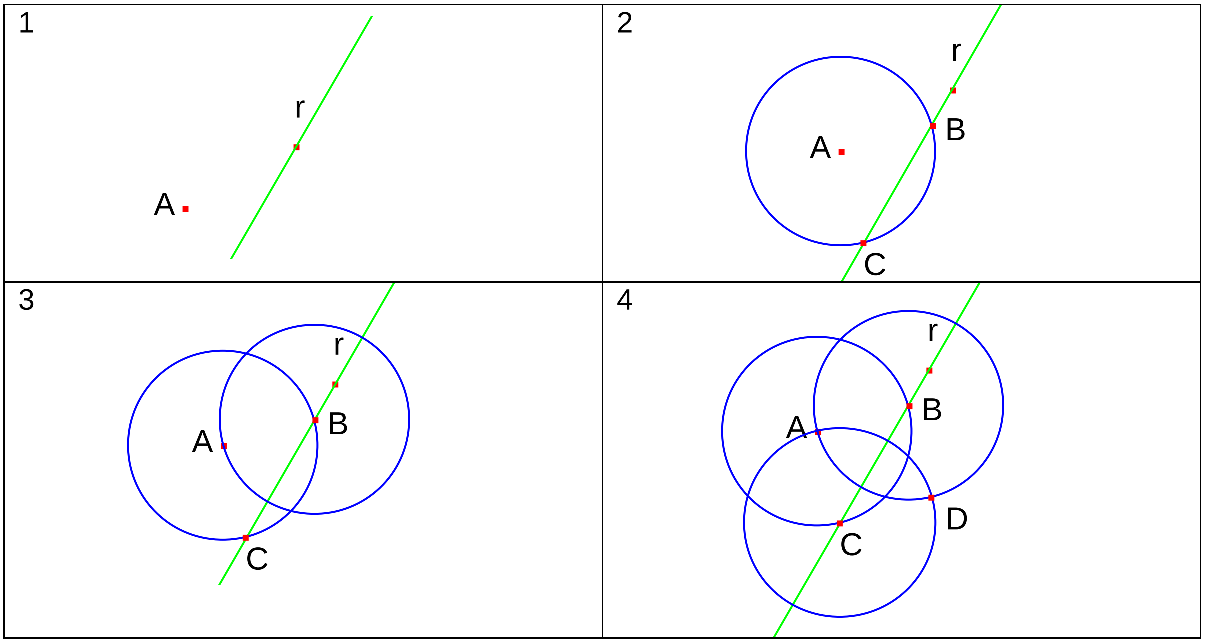
Figura 5-6: Construcción con regla y compás del simétrico de una figura con respecto a un centro.



6. Construcción del simétrico de un punto con respecto a un eje utilizando la regla y el compás.

1. Partimos de un punto A y un eje de simetría r.
2. Con centro en A, trazamos una circunferencia que intersecte al eje r en dos puntos y los llamamos B y C.
3. Con centro en B, trazamos la circunferencia de radio $\overline{BA}$.
4. Con centro en C, trazamos la circunferencia de radio $\overline{CA}$ que intercecta a la circunferencia de centro B en los puntos A y D; queda determinado el punto D simétrico de A respecto del eje r.

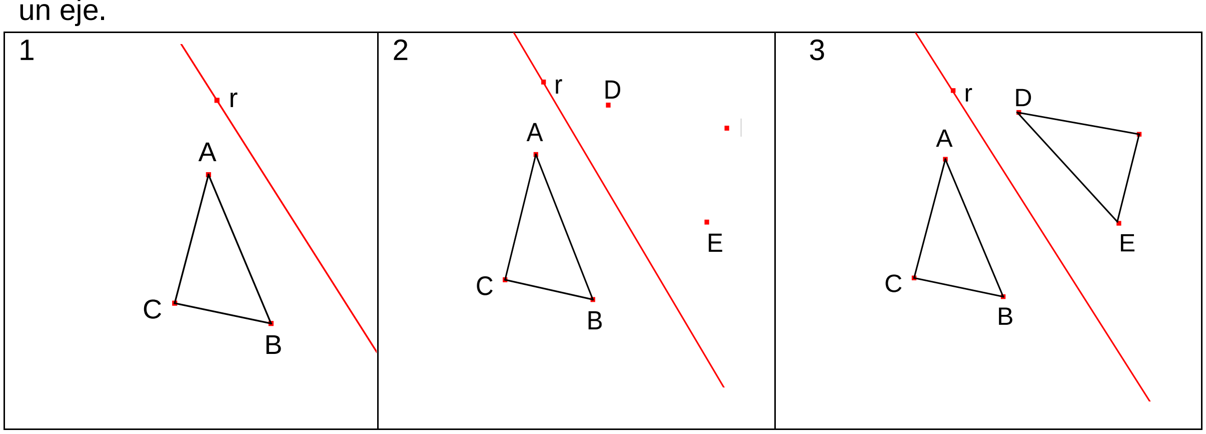
Figura 6-7: Construcción con regla y compás del simétrico de un punto con respecto a un eje.



7. Construcción del simétrico de una figura con respecto a un eje utilizando regla y compás.

1. Partimos de un triángulo ABC y un eje de simetría r.
2. Trazamos los puntos simétricos de A, B y C respecto del eje r y los llamamos D, E y F respectivamente.
3. Trazamos los segmentos $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FD}$; queda determinado el triángulo DEF simétrico de ABC respecto del eje r.

Figura 7-8: Construcción con regla y compás del simétrico de una figura con respecto a un eje.



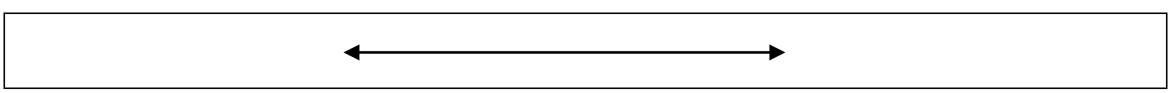
Apéndice I

En lo que sigue haremos un breve recuento, de los conceptos en cuestión y de algunos resultados relacionados. Es de anotar que estos toman como base las referencias Moise [12].

Definiciones

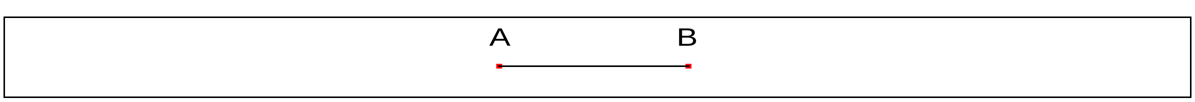
Para tener la idea de punto, que puede ser representada por la huella dejada por un lápiz cuando se deja caer sobre una hoja de papel, o la huella que queda cuando pinchamos con un alfiler una hoja de papel. Recta, como el borde de una hoja de cuaderno que se extiende indefinidamente en ambos sentidos y plano, como la superficie de una mesa, el tablero de la clase, una pared que se extiende indefinidamente en todas las direcciones estos son motivados por objetos reales de nuestro entorno. Es de anotar que cuando decimos recta nos referimos a una figura como la siguiente: (Ver figura 1).

Figura 1: Representación grafica de una recta.



Segmento: Para dos puntos cualesquiera A y B, el segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de los puntos A y B, y de todos los puntos que están entre A y B. (Ver figura 2), los puntos A y B se llaman los extremos de $\overline{AB}$. Cuando de habla que un punto E está entre A y B se debe cumplir que estos puntos sean diferentes sobre una misma recta y se cumple que AE + EB = AB.

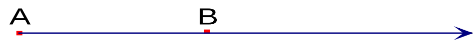
Figura 2: Representación grafica de un segmento.



El número AB se llama la longitud del segmento $\overline{AB}$. AB es un número que da la medida de la distancia entre los extremos, esta medida la hacemos con una regla graduada.

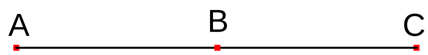
Rayo: un rayo es una figura que se representa (ver figura 3), con esta figura se indica que el rayo empieza en A, pasa por B en línea recta, y se extiende indefinidamente en el mismo sentido. Sean A y B dos puntos de la recta L. El rayo $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de puntos que es la reunión del segmento $\overline{AB}$ y el conjunto de todos los puntos C para los cuales B está entre A y C. El punto A se llama el extremo de $\overrightarrow{AB}$.

Figura 3: Representación grafica de un rayo.



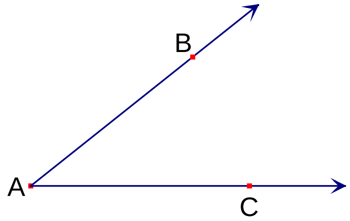
Punto medio de un segmento: Un punto B se llama punto medio de un segmento $\overline{AC}$, si B está entre A y C y AB = BC. Podemos decir que todo segmento tiene un punto medio y que el punto medio de un segmento biseca al segmento. (Ver figura 4).

Figura 4: Punto medio de un segmento.



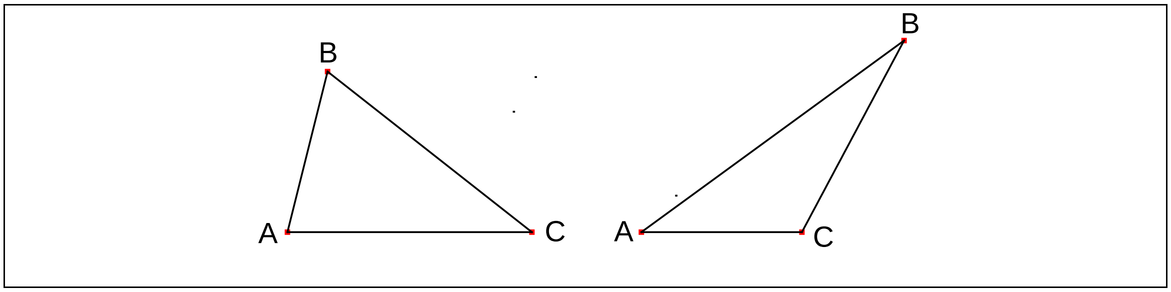
Ángulo: Un ángulo es una figura como: (Ver figura 5). Si dos rayos tienen en mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su reunión es un ángulo. Los rayos se llaman lados del ángulo y el extremo común se llama vértice.

Figura 5: Representación gráfica de un ángulo.



Triángulo: es una figura como (Ver figura 2-6). Si A, B, C son tres puntos no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama un triángulo, y se indica como ∆ABC. Los puntos A, B y C se llaman vértices, y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llaman lados. Todo triángulo ∆ABC determina tres ángulos ∠ BAC, ∠ ABC y ∠ ACB. Un triángulo con sus tres lados congruentes se llama **equilátero,** un triángulo **equiángulo** es aquel que tiene todos sus ángulos congruentes, es de anotar que un triángulo es equilátero, si y solo si, es equiángulo. Un triángulo para el cual dos lados cualesquiera no son congruentes se llama **escaleno**. Un triángulo que tiene dos lados congruentes se llama **isósceles**, además podemos decir que sus ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes y al lado que no es congruente se llama **base**.

Figura 6: Representación gráfica de un Triángulo.



Medida angular: Medimos los ángulos con un trasportador, el número de grados de un ángulo se llama su medida. Si el ángulo ∠ ABC por ejemplo mide t grados, entonces escribimos m ∠ ABC = x°. A cada ángulo ∠ ABC le corresponde un número real entre 0 y 180 este número se llama la medida del ∠ ABC, y se escribe m ∠ ABC.

Congruencia de ángulos: Dos ángulos con la misma medida se llaman ángulos congruentes. Así, ∠ ABC y ∠ DEF son congruentes, si m ∠ ABC = m ∠ DEF y entonces escribimos ∠ ABC ≅ ∠ DEF. Podemos resumir diciendo que dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

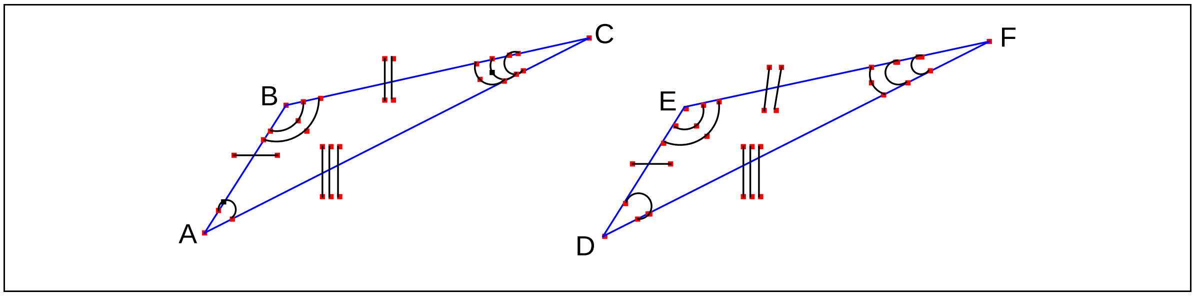
Segmentos congruentes: Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud. Así, el segmento $\overline{AB}$ y el segmento $\overline{CD}$ son congruentes, si AB = CD y entonces escribimos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Podemos resumir diciendo que dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.

Congruencia de triángulos: dos triángulos son congruentes si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño. Una manera de decir esto es que uno cualquiera de los triángulos puede superponerse en el otro de manera que coincida con él exactamente, es decir que sus lados y ángulos coincidan. Para simbolizar que el Δ ABC es congruente con el Δ DEF, escribimos Δ ABC ≅ Δ DEF. También existen unos criterios para determinar cuando dos triángulos son congruentes que son LLL, LAL y ALA.

Si el Δ ABC ≅ Δ DEF, quiere decir que se verifican las siguientes relaciones (ver figura 7):

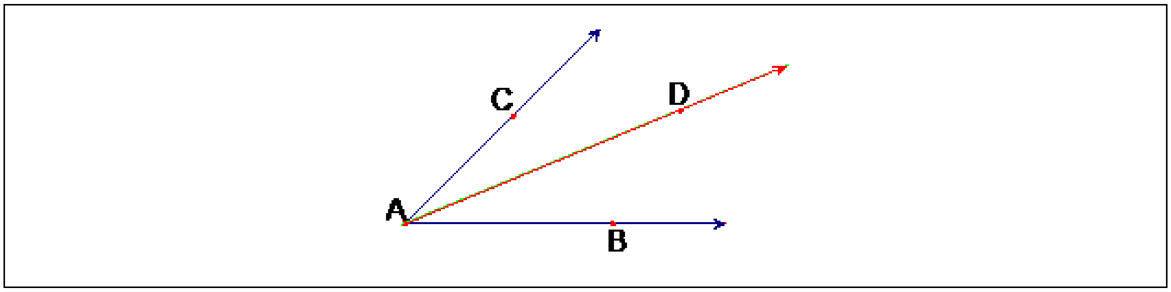
- ∠ A ≅ ∠ D, ∠ B ≅ ∠ E y ∠ C ≅ ∠ F
- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Figura 7: Relaciones que se cumplen en la congruencia de triángulos.



Bisectriz de un ángulo: Si D está en el interior del ∠ ABC y ∠ ABD ≅ ∠ DAC, entonces $\overrightarrow{AD}$ biseca al ∠ ABC, y $\overrightarrow{BD}$ se llama la bisectriz del ∠ ABC, (Ver figura 8) Además podemos decir que todo ángulo tiene exactamente una bisectriz.

Figura 8: Representación grafica de la bisectriz de un ángulo.



Mediatriz: la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. Es de anotar que todo segmento tiene uno y solo un punto medio y por ese punto pasa una recta y solamente una, perpendicular al segmento.

Rectas paralelas: Se dice que dos rectas contenidas en un mismo son paralelas, si no se intersectan.

Rectas perpendiculares: Dos rectas son perpendiculares si al interceptarse forman ángulos rectos.

Ángulo central: El ángulo central de una circunferencia es el ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

Radio: El radio de una circunferencia es el segmento que va desde el centro a un punto de la circunferencia.

Cuerda. De una circunferencia es un segmento cuyos extremos están en la circunferencia.

Bibliografía

[1] ACEVEDO, Myriam, M. Recorriendo el algebra desde la solución de ecuaciones al algebra abstracta. U.N. Bogotá. 1997.

[2] APOSTOL, Tom M. Introducción a la Teoría Analítica de Números. Reverté. 2002.

[3] CASTILLO, Hernando Alfonso. Geometría Plana y del espacio. Universidad Nacional: Bogotá. 2007

[4] CASTILLO, Hernando Alfonso. Geometría Elemental. Publicación del Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.

[5] COLLANTES, Antonio Jesús. Construcciones con Regla y Compás. Acta de Matemática Vulgata. Universidad de Cádiz Volumen 1. Cádiz, España. 2005. Pp. 29-36.

[6] CLEMENS, S.R.; COONEY T. Geometry. Addison-Wesley. Longmon. Edición 11°. México. 1962.

[7] DE VIOLA, Ana. M. Teoría de cuerpos y teoría de Galois. Editorial Reverté. España. 2006.

[8] FRALEIGH, John. Algebra Moderna. Addison-Wesley. 1994.

[9] FRANCO, Flor. Alba. Didáctica de la Geometría Euclidiana. Editorial Magisterio. Bogotá. 2006

[10] GUTIERREZ, María Victoria. Notas de Geometría. Publicación de la Universidad Nacional de Colombia. 1992.

[11] LUQUE, Hildebrando. Didáctica de la Enseñanza de la geometría. 2009.

[12] MOISE, Edwin. Geometría Moderna. Addison-wesley. México. 1996.

[13] ORE, Oystein. Number theory and its history. Editorial Mc. Graw Hill. New York. 1988.

[14] PÉREZ, Miguel. A. Una Historia de las matemáticas, Retos y conquistas a través de sus personajes. Editorial Visión libro. Madrid España.

[15] RECIO, A. Martínez. Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la Geometría. Editorial Síntesis. Madrid.

[16] STEWART, Ian. Historia de las Matemáticas en los últimos 10000 años. Editorial crítica. 2008.

[17] TOMAS, Ortega. Conexiones Matemáticas: Motivación del alumno y competencias matemáticas. Editorial Grao de Iris. Barcelona. 2005.

[18] TSIJLI, Todoro. Geometría Euclidea. Volumen I. Editorial San José EUNED 2004. Costa Rica.

[19] ZALDIVAR, Felipe. Teoría de Galois. Editorial Anthropos. Barcelona. 1996.

www.aulatres.net/1/Curs_wq/pagine_secunddaries/taxonomia_bloom.htm2011

http://www.comenius.usach.cl

http://www.geocitiescom/fudbiro/Antecdentes.html