



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Funciones Zeta locales de Igusa y polinomios de Bernstein

**Luis Alejandro Cifuentes Espitia**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Matemáticas  
Bogotá, Colombia  
2022

# Funciones Zeta locales de Igusa y polinomios de Bernstein

**Luis Alejandro Cifuentes Espitia**

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magíster en Matemática**

Director

Ph. D en Matemáticas. John Jaime Rodríguez Vega

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias , Departamento de Matemáticas  
Bogotá, Colombia  
2022

# Resumen

## Funciones zeta locales de Igusa y polinomios de Bernstein.

El propósito del presente documento, en el que se desarrolla el trabajo final de maestría, es estudiar la conjetura planteada en 1988 por el matemático Jun-ichi Igusa en [10]; la cual asegura una relación entre los polos de la función zeta local de Igusa  $Z(s, f)$  y los ceros del polinomio de Bernstein-Sato  $b_f$ .

Además, se abordan conceptos básicos en el área de análisis  $p$ -ádico y se estudia el comportamiento de familias particulares de polinomios  $f \in \mathbb{Z}_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$  en dicha conjetura.

Palabras clave: Función zeta local de Igusa, polinomio de Bernstein-Sato, Anillo de entero  $p$ -ádicos.

# Abstract

## Local Igusa zeta functions and Bernstein polynomials.

The purpose of this document, in which the master thesis is presented, is to study the conjecture raised in 1988 by the mathematician Jun-ichi Igusa; which ensures a relationship between the poles of the Igusa local zeta function  $Z(s, f)$  and the zeros of the Bernstein-Sato polynomial  $b_f$ . Also, it addresses basic concepts in the area of  $p$ -adic analysis and aims to study the behavior of particular families of polynomials  $f \in \mathbb{Z}_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , in said conjecture.

Key words: Igusa local zeta function, Bernstein-Sato polynomial, ring of integer number  $p$ -adic.

# Agradecimientos

A mi director John Jaime Rodríguez Vega por guiarme en el transcurso de la elaboración de este documento e introducirme en dicha teoría.

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Números <math>p</math>-ádicos</b>	<b>4</b>
1.1 Valuación $p$ -ádica . . . . .	4
1.2 Completación de un espacio métrico . . . . .	7
1.3 Desarrollo canónico de los números $p$ -ádicos . . . . .	7
1.4 Topología de $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ . . . . .	9
1.4.1 $\mathbb{Z}_p$ enteros $p$ -ádicos . . . . .	10
1.4.2 Integración sobre $\mathbb{Q}_p$ . . . . .	12
1.5 Congruencias y series de Poincaré en $\mathbb{Z}_p$ . . . . .	13
1.5.1 Lema de Hensel y su generalización . . . . .	14
<b>2 Funciones zeta locales de Igusa</b>	<b>17</b>
2.1 Propiedades de $Z(s, f)$ . . . . .	17
2.2 Cálculo de $Z(s, f)$ . . . . .	21
2.2.1 Fórmula de fase estacionaria (FFE) . . . . .	22
2.3 FFE sobre formas fuertemente no degeneradas. . . . .	25
2.4 Conjetura de Igusa . . . . .	30
<b>3 Polinomios de Bernstein-Sato</b>	<b>32</b>
3.1 Ecuación funcional y $b_f$ . . . . .	32
3.2 Polinomios diagonales y conjetura de Igusa. . . . .	34
3.2.1 Singularidades Cuasi-homogéneas . . . . .	35
3.3 Algoritmos para calcular el polinomio de Bernstein-Sato . . . . .	38
3.3.1 $b_f$ de formas fuertemente no degeneradas. . . . .	39
3.3.2 $b_f(s)$ de polinomios cuasi-homogéneos . . . . .	40
3.3.3 $b_f(s)$ de polinomios cuasi-homogéneos con más de una singularidad. . . . .	41
<b>4 Conclusiones</b>	<b>42</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>43</b>

# Introducción

Las distribuciones, fueron introducidas en 1940 por los matemáticos Serguéi Sóbolev y Laurent Schwartz. Estas se definen como funcionales lineales continuos sobre el conjunto de las funciones Schwartz-Bruhat. Dentro de las distribuciones se encuentra una clase especial denominada distribuciones regulares, las cuales se definen mediante la igualdad:

$$(f, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx,$$

con  $f$  una función absolutamente integrable en cada región acotada de  $\mathbb{R}^n$  y  $\phi$  una función Schwartz-Bruhat.

En 1964, los matemáticos I. S. Gelfand, J. Bernstein y M. Atiyah, estudiaron el problema de distribuciones asociadas con funciones dependientes de un parámetro [8]. Dada una función  $f_\lambda$ , con  $\lambda \in \mathbb{C}$ , se observa que la distribución asociada es:

$$(f_\lambda, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x)\phi(x)dx,$$

si se fija  $\phi$ , entonces la integral puede diverger dependiendo el valor del parámetro  $\lambda$ . Podemos considerar esta, como una función de la variable  $\lambda$  y preguntarnos si puede extenderse el dominio. Atiyah, usando el teorema de resolución de singularidades de Hironaka para variedades sobre un cuerpo de característica cero [12] obtuvo dicha extensión de  $(f_\lambda, \phi)$ ; años más tarde Bernstein planteó una nueva técnica para extender el dominio, lo interesante de esta nueva técnica es no depender del teorema de resolución de singularidades de Hironaka. Un ejemplo de lo anterior es el siguiente:

Considere  $f_s(x) = |x|^s \chi_{[0, +\infty]}$ , con  $s$  un parámetro complejo y  $\chi$  la función característica del intervalo  $[0, +\infty)$ , de modo que

$$(f_s, \phi) = \int_0^\infty x^s \phi(x)dx,$$

observe que la integral converge siempre que  $Re(s) > -1$ , para obtener la extensión del dominio se puede proceder de la siguiente forma, observe que

$$\frac{\partial}{\partial x} x^{s+1} = (s+1)x^s,$$

de modo que al sustituir en la integral, se tiene que

$$\int_0^\infty x^s \phi(x)dx = \frac{1}{s+1} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} x^{s+1} \phi(x)dx,$$

y al integrar por partes se encuentra la igualdad

$$\int_0^\infty x^s \phi(x) dx = \frac{-1}{s+1} \int_0^\infty x^{s+1} \phi'(x) dx.$$

Se observa que esta igualdad extiende el dominio a  $Re(s) > -2$  y  $Re(s) \neq -1$ ; con un polo en  $s = -1$ .

Si se denota  $b_f(s) = s+1$ , una de las principales observaciones utilizando este método es que la raíz de  $b_f$  coincide con el polo de la función extendida, esta observación fue recolectada en el siguiente teorema, ver [4].

**Teorema:**

Sea  $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  y  $\phi$  una función Schwartz-Bruhat, entonces la función zeta local arquimediana

$$Z_f(s) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s \phi(x) dx,$$

tiene una extensión meromorfa al plano  $\mathbb{C}$  y sus polos son de la forma  $s = s_0 + ik$ , con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $b_f(s_0) = 0$ .

En 1965 Andre Weil, estudiando las formas de grado superior, introduce las funciones zeta locales, ahora llamadas funciones zeta locales de Igusa, al tomar  $K = \mathbb{Q}_p$  (Cuerpo local no Arquimediano) ver [12]

$$Z_\phi(s, f) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} |f(x)|^s \phi(x) |d\mu|.$$

En 1974 Jun-ichi Igusa y posteriormente J. Denef ver [11], demostraron que  $Z_\phi(s, f)$  tiene una extensión meromorfa al plano complejo (propiedad análoga al caso arquimediano) y además que la extensión es una función racional del argumento  $t = p^{-s}$ . Cabe destacar que la extensión meromorfa de la función  $Z(s, f)$  fue encontrada por Jun-ichi Igusa usando el teorema de Resolución de singularidades de H. Hironaka y no la teoría de polinomios de Bernstein-Sato como en el caso arquimediano, esto hace que el cálculo exacto de los polos de la función  $Z(s, f)$  dependan de resolución de singularidades.

Mediante cálculos específicos, Jun-ichi Igusa observó que el Teorema anterior parece satisfacerse en el caso no Arquimediano, es decir, que los polos de la función zeta local de Igusa contienen información acerca de las raíces del polinomio  $b_f$ ; un hecho muy notable, ya que los polinomios de Bernstein no intervienen en la demostración para obtener la extensión del dominio, así que en 1988 realiza la siguiente conjetura:

**Conjetura:**

La parte real de cualquier polo de la función Zeta local de Igusa  $Z(s, f)$  es una raíz de  $b_f(s)$ .

Los principales avances en dicha conjetura fueron dados por el matemático Loeser [15], quien demuestra la validez de la conjetura para polinomios de dos variables, en polinomios más generales se han conseguido resultados parciales ver [4].

En este trabajo se estudiará la conjetura de Igusa para casos particulares de polinomios cuasi-homogéneos, en especial usando ideas clásicas de la teoría de polinomios de Bernstein mostraremos

que la conjetura es válida para las formas diagonales  $f = x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n}$ , también mostraremos la validez de la conjetura para algunos polinomios semicuasi-homogéneos, en estos casos particulares calcularemos el polinomio de Bernstein de manera explícita usando el software GP Pari.

# 1 Números $p$ -ádicos

En este capítulo se introducen los números  $p$ -ádicos como un cuerpo resultante del proceso de completación del espacio métrico  $(\mathbb{Q}, d_p)$  con  $d_p$  una métrica proveniente de una norma no Arquimediana, los resultados son tomados de [1] capítulos *I*, *II* y *III*.

## 1.1. Valuación $p$ -ádica

**Definición 1** Sea  $K$  un cuerpo, una norma o valuación sobre  $K$  es una función

$$|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

la cual satisface

- $|x| = 0$  si y solo si  $x = 0$ ,
- $|xy| = |x||y|$ ,
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ . (*Desigualdad triangular*)

Una norma es llamada trivial si  $|0| = 0$  y  $|x| = 1$  si  $x \neq 0$ , las normas sobre un cuerpo inducen una métrica sobre el cuerpo definida mediante la igualdad:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Sea  $p$  un número primo fijo, dado un número racional  $\alpha$  distinto de cero, se puede escribir  $\alpha = p^n \frac{a}{b}$ , con  $a$  y  $b$  números enteros no divisibles por  $p$  y  $n$  un entero. Se denota  $n = \text{Ord}_p(\alpha)$  y  $\infty = \text{Ord}_p(0)$ , con esta notación se puede definir el valor absoluto  $p$ -ádico (norma no Arquimediana) de la siguiente forma:

**Definición 2** La función  $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  con

$$\begin{aligned} |0|_p &= 0, \\ |\alpha|_p &= p^{-\text{Ord}_p(\alpha)} \end{aligned}$$

se denomina norma  $p$ -ádica.

La norma  $p$ -ádica satisface las siguientes proposiciones:

- $|x|_p = 0$  si y solo si  $x = 0$ ,

- $|xy|_p = |x|_p|y|_p$ ,
- $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} \leq |x|_p + |y|_p$ ,

para todo  $x, y \in \mathbb{Q}$ .

Note que la métrica inducida por una norma  $|\cdot|_p$ , viene dada por la igualdad,

$$d_p(x, y) = |x - y|_p.$$

El cuerpo  $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$  es conocido como un cuerpo normado no-arquimediano; este nombre surge de observar que el conjunto de los números naturales es un conjunto acotado, pues para cada natural  $n$  se tiene que

$$|n|_p \leq 1,$$

así el axioma arquimediano no se cumple en dichos cuerpos normados.

La diferencia entre el valor absoluto clásico notado  $|\cdot|_\infty$  y  $|\cdot|_p$ , radica en la desigualdad triangular, ya que  $|\cdot|_p$  satisface una desigualdad más fuerte conocida como desigualdad ultramétrica.

Dos normas son equivalentes si las métricas asociadas son equivalentes. Con esta definición se puede enunciar un teorema pilar y motivación del por qué las normas  $p$ -ádicas son relevantes [1].

**Teorema 1** *Teorema de Ostrowski: Cualquier norma no trivial  $|\cdot|$  sobre el cuerpo de los números racionales  $\mathbb{Q}$  es equivalente a la norma real  $|\cdot|_\infty$  ó a una norma  $p$ -ádica  $|\cdot|_p$ , para algún número primo  $p$ .*

El teorema de Ostrowski nos dice que el cuerpo normado de los números racionales solo tiene dos caras, una real y una  $p$ -ádica,

$$(\mathbb{Q}, |\cdot|_\infty),$$

$$(\mathbb{Q}, |\cdot|_p),$$

teniendo en cuenta que cada norma induce una métrica sobre el cuerpo, se tienen los dos siguientes tipos de espacios métricos asociados con el cuerpo de los números racionales,

$$(\mathbb{Q}, d_\infty),$$

$$(\mathbb{Q}, d_p),$$

donde  $d_\infty(x, y) = |x - y|_\infty$  y  $d_p(x, y) = |x - y|_p$ ; es conocido que el espacio métrico  $(\mathbb{Q}, d_\infty)$  no es completo, análoga situación tiene el espacio  $(\mathbb{Q}, d_p)$ , para ello se observan los siguientes resultados.

**Lema 1** *Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $(\mathbb{Q}, d_p)$  la cual cumple que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0,$$

*entonces  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $(\mathbb{Q}, d_p)$ .*

**Demostración:** Sean  $n$  y  $m$  naturales tales que  $m > n$ , si  $m = n + r$  se tiene que

$$|x_{n+r} - x_n|_p = |x_{n+r} - x_{n+r-1} + x_{n+r-1} - x_{n+r-2} + x_{n+r-2} - \dots + x_{n+1} - x_n|_p$$

$$|x_{n+r} - x_{n+r-1} + x_{n+r-1} - x_{n+r-2} + x_{n+r-2} - \dots + x_{n+1} - x_n|_p \leq \max\{|x_{n+r} - x_{n+r-1}|_p, \dots, |x_{n+1} - x_n|_p\}$$

y por hipótesis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+r} - x_n|_p = 0.$$

con lo cual la sucesión es de Cauchy. □

Ahora se muestra un procedimiento para encontrar una sucesión de Cauchy en  $(\mathbb{Q}, d_3)$ ; la idea es poder observar que este espacio no es completo.

**Ejemplo 1** Sea  $p = 3$ , se tiene que  $1^2 \equiv 7 \pmod{3}$ , se elige  $x_0 = 1$ , luego se busca  $x_1$ , que cumpla que  $x_1^2 \equiv 7 \pmod{3^2}$ , observe que se debe tener que

$$x_1^2 \equiv 7 \pmod{3},$$

así  $x_1 \equiv x_0 = 1 \pmod{3}$ , con lo cual  $x_1 = 1 + 3k$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}$ , es decir que

$(1 + 3k)^2 \equiv 7 \pmod{3^2}$ , desarrollando el cuadrado y factorizar el tres se tiene que

$k \equiv 1 \pmod{3}$ , así  $x_1 = 1 + 3(1)$ , al continuar de la misma forma, se busca un  $x_2$  que cumpla  $x_2^2 \equiv 7 \pmod{3^3}$ , luego

$$x_1^2 \equiv x_1 \pmod{3^2},$$

así  $x_2 = 4 + 3^2k$ , con lo cual  $(4 + 3^2k)^2 \equiv 7 \pmod{3^3}$ , al desarrollar cuadrados y factorizar el nueve se tiene que  $k \equiv 2 \pmod{3}$ , así  $x_2 = 1 + (1)3 + (2)3^2$ .

Si se continúa de esta forma se encuentra una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la cual cumple que

- $x_{n+1} \equiv x_n \pmod{3^{n+1}}$ ,
- $x_{n+1}^2 \equiv 7 \pmod{3^{n+2}}$

Esta sucesión es de Cauchy, observe que la primera condición es equivalente a

$$|x_{n+1} - x_n| = |3^{n+1}\mu| \leq 3^{-n-1},$$

es decir que  $|x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0$  y por el Lema anterior la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.

La condición siguiente garantiza que

$$|x_{n+1}^2 - 7| = |3^{n+2}\mu_1| \leq 3^{-n-2},$$

con lo cual la sucesión al cuadrado converge a 7, y por ende la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  debería converger a una raíz cuadrada de 7, elemento que no existe en  $\mathbb{Q}$ . lo anterior indica que  $(\mathbb{Q}, d_p)$  no es completo.

El ejemplo anterior puede ser generalizado para cualquier otro primo distinto de dos, así podemos concluir que el espacio métrico  $(\mathbb{Q}, d_p)$ , no es completo, para el caso  $p = 2$  se procede buscando raíces cúbicas.

## 1.2. Completación de un espacio métrico

A partir de un cuerpo  $(K, |\cdot|)$  no completo respecto a la norma, se puede crear un cuerpo  $\tilde{K}$  el cual contiene una copia de  $K$  y dotarlo de una norma  $|\cdot|_1$  inducida por  $|\cdot|$  de tal forma que  $(\tilde{K}, |\cdot|_1)$  sea completo.

En la completación, el rol principal lo juegan las sucesiones de Cauchy. Sea  $\{K\}$  el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en el cuerpo normado  $(K, |\cdot|)$ . Al dotar este conjunto de una suma y un producto natural entre sucesiones se obtiene una estructura de anillo conmutativo con unidad, de modo que el ideal maximal de sucesiones infinitesimales  $P \subset \{K\}$  con  $\{a_n\} \in P$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , permite formar la estructura cociente,

$$\tilde{K} = \{K\}/P,$$

los hechos anteriores dotan a  $\tilde{K}$  de una estructura de cuerpo, el cual contiene a  $K$  visto como el conjunto de sucesiones constantes.

Dado  $x \in \tilde{K}$  cuya clase de equivalencia está representada por  $\{x_n\}$ , se define la nueva norma mediante la igualdad:

$$|x|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|,$$

el límite existe, pues

$$||x_m| - |x_n||_\infty \leq |x_m - x_n|,$$

como la sucesión es de Cauchy, se tiene que la sucesión formada por las normas  $\{|x_n|\}$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}$  y, por lo tanto, converge.

Con los ingredientes anteriores se obtiene un cuerpo completo

$$(\tilde{K}, |\cdot|_1).$$

Utilizando el proceso de completación para espacios métricos, se tiene que existen dos tipos de completaciones posibles para el cuerpo de los números racionales, por un lado, el conocido cuerpo de los números reales con la métrica usual,

$$(\mathbb{R}, d_\infty),$$

y un nuevo cuerpo, el cual se denota  $\mathbb{Q}_p$  y es llamado cuerpo de los números  $p$ -ádicos

$$(\mathbb{Q}_p, d_p).$$

## 1.3. Desarrollo canónico de los números $p$ -ádicos

Como se vio antes, el cuerpo de los números racionales  $\mathbb{Q}$  con la norma  $p$ -ádica  $|\cdot|_p$  resulta ser un espacio métrico no completo, al efectuarse el proceso de completación de  $\mathbb{Q}$  con respecto a  $|\cdot|_p$  se genera el cuerpo de los números  $p$ -ádicos y se notará por  $\mathbb{Q}_p$ . En este punto, los elementos del cuerpo de números  $p$ -ádicos son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy y los siguientes lemas proporcionan una forma de observar los elementos de  $\mathbb{Q}_p$  de una manera más cómoda.

**Lema 2** *Considere la serie*

$$\sum_{k=-m}^{\infty} d_k p^k,$$

con  $m$  un entero positivo,  $0 \leq d_k < p - 1$  y  $d_m \neq 0$ , entonces la serie converge en  $\mathbb{Q}_p$ .

**Demostración:** Sea la sucesión de racionales  $\{S_n\}$ , con  $S_n$  la  $n$ -ésima suma parcial, se verá que dicha sucesión es de Cauchy, sea  $\epsilon > 0$ , se elige  $N(\epsilon)$  un natural tal que  $p^{-N(\epsilon)} \leq \epsilon$ , si  $r > n > N(\epsilon)$ , entonces

$$|S_r - S_n|_p = \left| \sum_{k=n+1}^r d_k p^k \right|_p \leq \max\{|d_k p^k|_p\} \leq \max\{|p^k|_p\} \leq p^{-N(\epsilon)} < \epsilon,$$

así la sucesión  $\{S_n\}$  es de Cauchy en el cuerpo  $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$  y por ende converge.  $\square$

El Lema anterior nos indica que el conjunto de elementos de la forma  $\left\{ \sum_{k=-m}^{\infty} d_k p^k \right\}$  representa un subconjunto de los números  $p$ -ádicos [1].

**Teorema 2** *Dado  $x \in \mathbb{Q}_p$ , existe una sucesión de racionales  $\{S_n\}$  con*

$$S_n = \sum_{k=-m}^n d_k p^k,$$

y  $m$  un entero positivo,  $0 \leq d_k < p - 1$ , tal que  $x = [\{S_n\}]$  con  $[\{S_n\}]$  la clase de equivalencia representada por la sucesión de sumas parciales.

En el Ejemplo 1, se vio que en el caso  $\mathbb{Q}_3$  se tiene que,

$$\sqrt{7} = 1 + (1)3 + (2)3^2 + \dots$$

otro ejemplo puede darse al observar que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p},$$

dado que  $|p|_p < 1$  y el término  $p^{n+1}$  es cercano a cero en norma  $p$ -ádica. Con ello en mente se tiene que en  $\mathbb{Q}_p$

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + (p-1)p^3 + (p-1)p^4 + \dots \\ -1 &= (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + (p-1)p^3 + (p-1)p^4 + \dots \end{aligned}$$

El Teorema 2 nos garantiza que cada elemento en  $\mathbb{Q}_p$  se puede representar como una serie de potencias en  $p$  con coeficientes en el conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ .

Debido a que el espacio  $\mathbb{Q}_p$  es ultramétrico se tienen los siguientes resultados.

**Proposición 3** *Sea  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{Q}_p$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  converge si, y sólo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ .*

**Demostración:** Suponga que la serie converge, entonces la sucesión de sumas parciales  $S_k = \sum_{n=0}^k \alpha_n$  es una sucesión de Cauchy. Sea  $\varepsilon > 0$  entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $k > N$  se tiene que

$$|S_{k+1} - S_k|_p = |\alpha_{k+1}|_p < \varepsilon$$

y, por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ .

Por otro lado, suponga que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ , esto implica que

$$|S_{k+1} - S_k|_p < \varepsilon$$

y, por lo tanto, la sucesión de sumas parciales es de Cauchy, así  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  converge.  $\square$

## 1.4. Topología de $(\mathbb{Q}_p, d_p)$

La estructura  $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$  toma forma de espacio métrico, al tomar

$$d_p(x, y) = |x - y|_p,$$

la desigualdad triangular se deduce de observar

$$d_p(x, y) = |x - z + z - y|_p \leq \max\{|x - z|_p, |z - y|_p\} = \max\{d_p(x, z), d_p(z, y)\}$$

la actual desigualdad más fuerte que la desigualdad triangular es llamada desigualdad ultramétrica.

La estructura  $(\mathbb{Q}_p, d_p)$  tiene como base el conjunto de todas las bolas abiertas, se notarán las bolas abiertas como  $B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < p^{-r}\}$  y las bolas cerradas como  $\bar{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^{-r}\}$ .

**Proposición 4** *En el espacio topológico  $(\mathbb{Q}_p, d_p)$  se cumple que:*

1. Para cada elemento  $x \in B_r(a)$ , se tiene que  $B_r(a) = B_r(x)$ .
2. Las bolas  $B_r(a)$  son conjuntos abiertos y cerrados.
3. Dos bolas  $B_r(a)$  y  $B_l(b)$  son disjuntas o una está contenida en la otra.

**Demostración:**

1. Sea  $y \in B_r(a)$ , luego

$$|y - x|_p = |y - a + a - x|_p \leq \max\{|y - a|_p, |x - a|_p\} < p^{-r},$$

con lo cual  $B_r(a) \subset B_r(x)$ , y por un argumento similar se puede concluir que  $B_r(x) \subset B_r(a)$ , con lo cual se tiene la igualdad.

2. Ahora se probará que las bolas  $B_r(a)$  son conjuntos abiertos y cerrados. Note que la bola  $B_r(a) = \{|x - a|_p < p^{-r}\}$  es por definición abierta, por otro lado, al observar que el rango de la norma  $p$ -ádica sobre  $\mathbb{Q}_p$  es el conjunto discreto  $\{p^r\} \cup \{0\}$ , con  $r \in \mathbb{Z}$ , se deduce la igualdad:

$$B_r(a) = \bar{B}_{r+1}(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^{-r-1}\},$$

con lo cual la bola  $B_r(a)$  es un conjunto abierto y cerrado a la vez.

3. Suponga que  $B_r(a) \cap B_l(b) \neq \emptyset$  y  $r \leq l$ , sea  $y_0 \in B_r(a) \cap B_l(b)$ , por la primera parte se tiene que  $B_r(a) = B_r(y_0)$  y  $B_l(b) = B_l(y_0)$ , como  $r \leq l$ , entonces  $B_l(y_0) \subset B_r(y_0)$  con lo cual

$$B_l(b) \subset B_r(a).$$

□

**Proposición 5** *El conjunto  $B_r(a)$  es compacto para cualquier  $r \in \mathbb{Z}$  y  $a \in \mathbb{Q}_p$ .*

**Demostración:** Como  $(\mathbb{Q}_p, d_p)$  es un espacio métrico y  $\mathbb{Q}_p$  es completo con respecto a la métrica  $d_p$ , bajo estas condiciones se puede aplicar el Teorema de Heine-Borel al conjunto  $B_r(a)$  el cual asegura que un conjunto cerrado y acotado es compacto. □

El Teorema 2 garantiza que cada número  $p$ -ádico pueda expresarse de la forma

$$x = \sum_{k=-m}^{\infty} d_k p^k = p^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} d_{-m+k} p^k,$$

con  $d_m \neq 0$ , como

$$|x|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n|_p,$$

y  $S_n = p^{-m} \sum_{k=0}^n d_{-m+k} p^k$ , entonces

$$|S_n|_p = p^m,$$

para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , así

$$|x|_p = p^m.$$

En la siguiente sección se estudiará el anillo de enteros  $p$ -ádicos, un subconjunto clave para el desarrollo posterior del trabajo.

### 1.4.1. $\mathbb{Z}_p$ enteros $p$ -ádicos

**Definición 3** *El conjunto de enteros  $p$ -ádicos se define como*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} = \bar{B}_0(0).$$

La definición anterior lleva a pensar a los enteros  $p$ -ádicos como el conjunto de elementos de la forma

$$p^r \sum_{i=0}^{\infty} d_i p^i,$$

con  $r \geq 0$ .

**Proposición 6** *El conjunto  $\mathbb{Z}_p$  es un sub-anillo de  $\mathbb{Q}_p$*

**Demostración:** Sean  $x, y \in \mathbb{Z}_p$ , luego

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} \leq 1,$$

por otro lado se tiene que

$$|xy|_p = |x|_p |y|_p \leq 1,$$

con lo cual  $x + y \in \mathbb{Z}_p$  y  $xy \in \mathbb{Z}_p$ . □

Al tratar de encontrar los ideales principales del anillo  $\mathbb{Z}_p$ , se observa lo siguiente:

Si  $A \subset \mathbb{Z}_p$  es un ideal, entonces  $pA \subset A$ ; luego los elementos no nulos de  $A$  son de la forma

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p^i,$$

con  $0 \leq x_i < p$ , si el índice más pequeño para el cual  $x_r \neq 0$ , se tiene que los elementos de  $A$  toman la forma

$$p^r \sum_{i=0}^{\infty} x_{r+i} p^i,$$

con lo cual los ideales de  $\mathbb{Z}_p$  son de la forma,

$$p^r \mathbb{Z}_p,$$

lo anterior nos dice que el anillo  $\mathbb{Z}_p$  es un dominio de ideales principales, en el cual se tiene la cadena

$$\{0\} \subset \dots \subset p^2 \mathbb{Z}_p \subset p \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p.$$

Para caracterizar los elementos invertibles en el anillo  $\mathbb{Z}_p$ , se nota que

- Si  $|x|_p = 1$  entonces  $|xx^{-1}|_p = |x|_p |x^{-1}|_p = 1$ , con lo cual  $|x^{-1}|_p = 1$  y  $x^{-1} \in \mathbb{Z}_p$ .
- Si  $x, x^{-1} \in \mathbb{Z}_p$ , entonces  $|x^{-1}|_p = \frac{1}{|x|_p} \geq 1$ , así  $|x^{-1}|_p = 1 = |x|_p$ .

Lo anterior se resume en la notación

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\}.$$

### 1.4.2. Integración sobre $\mathbb{Q}_p$

La Proposición 5 garantiza que la pareja  $(\mathbb{Q}_p, +)$  tiene estructura de grupo topológico localmente compacto. En 1933 los matemáticos Alfred Haar y Von Newman probaron la existencia y unicidad de una medida sobre dichos grupos, la medida existente es conocida como medida de Haar sobre  $(\mathbb{Q}_p, \mathbb{B})$  con  $\mathbb{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por los abiertos de  $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ .

La medida de Haar es una medida  $\mu$  regular, tal que [2]

1. Si  $A \subset \mathbb{Q}_p$  es un abierto no vacío, entonces  $\mu(A) > 0$ ,
2. Si  $A \subset \mathbb{Q}_p$  es compacto, entonces  $0 < \mu(A) < \infty$ ,
3. Si  $A \subset \mathbb{Q}_p$ , entonces para cada  $x \in \mathbb{Q}_p$  (invariante por traslaciones)

$$\mu(A) = \mu(x + A).$$

$\mu$  es única salvo por múltiplos constantes positivos, dentro de las funciones  $\mu$ -integrables están las funciones continuas de valor complejo y soporte compacto.

Como el conjunto  $\mathbb{Z}_p$  es compacto y abierto se puede encontrar una medida de Haar  $\mu'$ , tal que  $\mu'(\mathbb{Z}_p) = k > 0$  y definir la medida de Haar  $\mu$  normalizada mediante la igualdad

$$1 = \mu(\mathbb{Z}_p) = \frac{1}{k} \mu'(\mathbb{Z}_p).$$

**Ejemplo 2** Dado que  $\mathbb{Z}_p$  se puede reescribir mediante la igualdad

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p} (p\mathbb{Z}_p + a),$$

se tiene que

$$1 = \mu(\mathbb{Z}_p) = \sum_{i=0}^{p-1} \mu(p\mathbb{Z}_p + a),$$

por la invarianza en traslaciones se concluye que

$$1 = p\mu(p\mathbb{Z}_p),$$

con lo cual

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} d\mu = \frac{1}{p}.$$

Se puede intentar generalizar el argumento anterior y notar que

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}_p/p^{k+1}\mathbb{Z}_p} (a + p^{k+1}\mathbb{Z}_p),$$

con lo cual si se aplica la medida de Haar normalizada y se tiene en cuenta que  $[\mathbb{Z}_p : p^{k+1}\mathbb{Z}_p] = (p-1)^{k+1}$ , se concluye que para  $k \geq 0$ ,

$$\int_{p^{k+1}\mathbb{Z}_p} d\mu = \frac{1}{p^{k+1}}.$$

El espacio  $\mathbb{Q}_p^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Q}_p\}$ , se construye mediante el producto cartesiano del grupo  $\mathbb{Q}_p$ , y se define la norma no arquimediana

$$|(x_1, x_2, \dots, x_n)|_p = \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_j|_p\}.$$

Con esta norma, la pareja  $(\mathbb{Q}_p^n, |\cdot|_p)$  tiene estructura de grupo topológico localmente compacto y por ende existe una medida de Haar sobre  $\mathbb{Q}_p^n$ , esta medida puede ser entendida como la medida producto de tal manera que  $\mu(\mathbb{Z}_p^n) = 1$ , por lo tanto,

$$\int_{(p^{k+1}\mathbb{Z}_p)^n} d\mu = \frac{1}{p^{(k+1)n}}.$$

## 1.5. Congruencias y series de Poincaré en $\mathbb{Z}_p$

Dados dos enteros  $a, b \in \mathbb{Z}$ , se dice que  $a$  es congruente con  $b$  módulo  $p$ , con  $p$  un número primo,

$$a \equiv b \pmod{p},$$

si se cumple que  $a - b = pk$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}$ ; es decir  $a - b \in p\mathbb{Z}$ , la noción de congruencia puede entonces verse en términos de la norma  $p$ -ádica, obteniendo que  $a \equiv b \pmod{p}$ , si y solo si

$$|a - b|_p \leq p^{-1}.$$

Con este hecho se puede ampliar el concepto de congruencia a los enteros  $p$ -ádicos, teniendo entonces que, dos enteros  $a, b \in \mathbb{Z}_p$  son congruentes, módulo  $p^k$ , si

$$|a - b|_p \leq p^{-k}.$$

Sea  $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$  un polinomio en  $n$  variables con coeficientes en el anillo de enteros  $p$ -ádicos, suponga que el objeto de estudio son las soluciones  $x \in \mathbb{Z}_p^n$  de la congruencia polinomial

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^l},$$

con  $l > 0$ , se denota

$$N_l = \#\{x \in (\mathbb{Z}_p/p^l\mathbb{Z}_p)^n : f(x) \equiv 0 \pmod{p^l}\},$$

la cantidad de soluciones módulo  $p^l$  y nos interesa observar como se comporta  $N_l$  a medida que  $l$  crece, para ello se introduce la serie de Poincaré asociada al polinomio  $f$

$$P_f(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{N_l}{p^{ln}} t^l,$$

como  $\frac{N_l}{p^{ln}} \leq 1$  la función  $P_f(t)$  define una función analítica en el conjunto  $|t| < 1$ . En 1966 Borevich y Shafarevich [3] conjeturaron que  $P_f(t)$  es una función racional y por ende tiene una extensión meromorfa al plano complejo. Este hecho notable fue probado primero por Igusa [10] en 1974; Denef [5] obtuvo el mismo resultado con una aproximación distinta. Igusa y Denef probaron la racionalidad de objetos llamados funciones zeta locas de Igusa.

### 1.5.1. Lema de Hensel y su generalización

En el análisis  $p$ -ádico, uno de los resultados que sirve para encontrar raíces de polinomios bajo ciertas condiciones es el Lema de Hensel, esta sección es basada en [13].

**Teorema 3** *Lema de Hensel*

Sea  $F(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$  un polinomio cuyos coeficientes son enteros  $p$ -ádicos, sea  $F'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1}$  la derivada de  $F(x)$ .

Sea  $a_0$  un entero  $p$ -ádico tal que  $F(a_0) \equiv 0 \pmod{p}$  y  $F'(a_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$ , entonces existe un único entero  $p$ -ádico  $a$  tal que  $F(a) = 0$  y  $a \equiv a_0 \pmod{p}$ .

**Demostración:** Existe una única sucesión de enteros racionales  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , tal que para todo  $n \geq 1$ :

1.  $F(a_n) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$ ,
2.  $a_n \equiv a_{n+1} \pmod{p^n}$ ,
3.  $0 \leq a_n < p^{n+1}$ .

Sea  $\bar{a}_0$  el único entero en  $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  el cual es congruente con  $a_0$  módulo  $p$ , sea  $a_1$  un elemento el cual satisface 2 y 3, entonces  $a_1 = \bar{a}_0 + b_1p$ , con  $0 \leq b_1 \leq p-1$ , al expandir  $F(a_1) = F(\bar{a}_0 + b_1p)$ , se encuentra que

$$F(\bar{a}_0 + b_1p) = \sum (c_i \bar{a}_0^i + i c_i \bar{a}_0^{i-1} b_1p + \text{términos}(p^2)),$$

con lo cual

$$F(\bar{a}_0 + b_1p) \equiv \sum c_i \bar{a}_0^i + \left( \sum i c_i \bar{a}_0^{i-1} \right) b_1p \pmod{p^2},$$

es decir

$$F(a_1) = F(\bar{a}_0 + b_1p) \equiv F(\bar{a}_0) + F'(\bar{a}_0)b_1p \pmod{p^2},$$

como  $F(a_0) \equiv 0 \pmod{p}$  y  $F(a_0) \equiv F(\bar{a}_0) \pmod{p}$ , se tiene que

$$F(\bar{a}_0) \equiv \alpha p \pmod{p^2},$$

para que  $F(a_1) \equiv 0 \pmod{p^2}$ , se debe tener que

$$\alpha + F'(\bar{a}_0)b_1 \equiv 0 \pmod{p}$$

y como  $F'(\bar{a}_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$ , existe un único  $0 \leq b_1 < p$ , que cumple dicha condición, luego se elige

$$a_1 = \bar{a}_0 + b_1p,$$

ahora se procede por inducción, supónganse se conocen  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , para encontrar  $a_n$ , se debe tener que  $a_n = a_{n-1} + b_np^n$ , con  $b_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ . Al expandir  $F(a_{n-1} + b_np^n)$  como antes se tiene que

$$F(a_n) \equiv F(a_{n-1}) + F'(a_{n-1})b_np^n \pmod{p^{n+1}},$$

por hipótesis de inducción,  $F(a_{n-1}) \equiv 0 \pmod{p^n}$  con lo cual

$$\alpha + F'(a_{n-1})b_np^n \equiv 0 \pmod{p^{n+1}},$$

Resolviendo la congruencia existe un único  $0 \leq b_n < p$ , y se elige

$$a_n = a_{n-1} + b_n p^n,$$

con lo anterior se genera una sucesión que satisface las condiciones 1,2 y 3, si,

$$a = \bar{a}_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots$$

se cumple que

$$F(a) = 0,$$

y, por otro lado  $a \equiv a_0 \pmod{p}$ . □

La idea es continuar como en [13] para generalizar el Lema de Hensel.

**Lema 7** Sea  $f(x)$  un polinomio en una variable  $x$ , con coeficientes en los enteros  $p$ -ádicos. Sea  $k > 0$ , y  $a \in \mathbb{Z}_p$  tal que,  $f(a) \equiv 0 \pmod{p^k}$  y  $f'(a) \not\equiv 0 \pmod{p^k}$  entonces, existe un único  $\epsilon \in \mathbb{Z}_p$  tal que

$$f(\epsilon) = 0 \quad y \quad \epsilon \equiv a \pmod{p^k}.$$

**Demostración:** En el caso  $k = 1$ , se tiene el Lema de Hensel, supóngase  $k > 1$ , y sea

$$g(y) = p^{-(k-1)} f(a + p^{k-1} y),$$

$g(y)$  es un polinomio con coeficientes en los enteros  $p$ -ádicos, pues

$$a + p^{k-1} y \equiv a \pmod{p^{k-1}},$$

como  $f(a) \equiv 0 \pmod{p^k}$ , entonces

$$f(a + p^{k-1} y) \equiv 0 \pmod{p^k},$$

así

$$|f(a + p^{k-1} y)|_p \leq p^{1-k}$$

y por ende  $g(y)$  es un polinomio con coeficientes en los enteros  $p$ -ádicos, el cual satisface que

$$g(0) \equiv 0 \pmod{p} \quad y \quad g'(0) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

aplicando el Lema de Hensel existe un único  $\zeta \in \mathbb{Z}_p$ , tal que  $g(\zeta) = 0$  y  $\zeta \equiv 0 \pmod{p}$ . Sea  $\epsilon = a + p^{k-1} \zeta$ , entonces

$$f(\epsilon) = 0 \quad y \quad \epsilon \equiv a \pmod{p^k}.$$

□

**Corolario:** Sea  $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$  y  $k > 0$ . Si  $a \in \mathbb{Z}_p$  es tal que

$$f(a) \equiv 0 \pmod{p} \quad y \quad f'(a) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

entonces existe  $\epsilon \in \mathbb{Z}_p$ , tal que

$$\epsilon + p^k \mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Z}_p : f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}\}.$$

**Demostración:** Como  $a$  satisface las condiciones del Lema de Hensel, entonces, existe un único  $\epsilon \in \mathbb{Z}_p$  que cumple las condiciones

$$f(\epsilon) = 0 \quad y \quad \epsilon \equiv a \pmod{p^k}.$$

Si  $y \in \epsilon + p^k \mathbb{Z}_p$  entonces,  $f(y) \equiv f(\epsilon) = 0 \pmod{p^k}$  y  $y \equiv a \pmod{p}$ .

La contención recíproca se tiene por la unicidad en el Lema de Hensel.  $\square$

La generalización del Lema previo será usado en la demostración de la fórmula de fase estacionaria en el siguiente capítulo.

**Lema 8** Sea  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p$  un polinomio en varias variables y  $k > 0$ , Si existe  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_p^n$  tal que

$$f(a) \equiv 0 \pmod{p} \quad y \quad \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

sean  $\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n \in \mathbb{Z}_p$ , con  $\epsilon_i \equiv a_i \pmod{p}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , entonces existe un  $\epsilon_1(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{Z}_p$ , tal que si  $x_2, x_3, \dots, x_n$  satisfacen  $x_i \equiv \epsilon_i \pmod{p^k}$ , entonces

$$\epsilon_1 + p^k \mathbb{Z}_p = \{x_1 \in a_1 + p \mathbb{Z}_p : f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{(p^k \mathbb{Z}_p)^n}\}.$$

**Demostración:** Para la demostración basta elegir el polinomio

$$g(x) = f(x, a_2, \dots, a_n),$$

y observar que este satisface las condiciones del Lema 7 y el Corolario con  $x = a_1$ .  $\square$

Como una primera aplicación del Lema 8 se observa que el conjunto

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in a + (p \mathbb{Z}_p)^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{(p^k \mathbb{Z}_p)^n}\},$$

puede verse como la unión

$$\bigcup (\epsilon_1(\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n), \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n) + (p^k \mathbb{Z}_p)^n,$$

donde la unión es sobre todas las  $(n-1)$  tuplas  $(\epsilon_2 + p^k \mathbb{Z}_p, \epsilon_3 + p^k \mathbb{Z}_p, \dots, \epsilon_n + p^k \mathbb{Z}_p)$  tal que  $a_i \equiv \epsilon_i \pmod{p}$ . así para calcular la medida del el conjunto se tiene que

$$\mu(\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in a + (p \mathbb{Z}_p)^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{(p^k \mathbb{Z}_p)^n}\}),$$

se puede ver como

$$\sum_{\epsilon_i \equiv a_i \pmod{p}} \mu(p^k \mathbb{Z}_p)^n.$$

## 2 Funciones zeta locales de Igusa

El objetivo de este capítulo es introducir las funciones zeta locales de Igusa siguiendo las referencias [5], [11] y [4], se revisarán algunas propiedades de dichas funciones y se calcularán explícitamente para ciertos tipos de polinomios obteniendo sus polos para poder relacionarlos con los polinomios de Bernstein-Sato asociados, ver capítulo 3.

### 2.1. Propiedades de $Z(s, f)$

Las funciones zeta locales de Igusa en el caso no Arquimediano ( $\mathbb{Q}_p$ ) son herramientas relacionadas con la teoría de formas cuadráticas y de grado superior, estudiadas por el matemático André Weil en los años comprendidos entre 1960 y 1970, cabe destacar que estos objetos tienen sus análogos en cuerpos Arquimedianos ( $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ), los cuales fueron estudiados de forma independiente por los matemáticos Bernsthein, Gel'fand y Atiyah, con una motivación distinta, pues, se parte de un problema planteado en 1954 por I. M. Gel'fand sobre la teoría de distribuciones, las funciones zeta locales en su forma general se encuentran descritas en la forma:

- Caso Arquimediano:  $\mathbb{X} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$$Z_{\Phi}(s, f) = \int_{\mathbb{X}} \exp(\delta\pi^t x\bar{x}) |f(x)|_{\infty}^s d\mu.$$

- Caso no Arquimediano:

$$Z_{\Phi}(s, \chi, f) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \Phi(x) \chi(\text{acf}(x)) |f(x)|_p^s d\mu.$$

Ambas funciones originalmente definidas para  $\text{Re}(s) > 0$ ; en el caso Arquimediano la obtención de la extensión del dominio de la función  $Z_{\Phi}(s, f)$  fue obtenida mediante dos técnicas distintas, una aplicando el Teorema de resolución de singularidades probado por el matemático Hironaka en el año 1964 y la otra, años más tarde aplicando la teoría de polinomios de Bernstein-Sato, esta última técnica garantiza una relación entre los polos de la función zeta local y las raíces del polinomio de Bernstein-Sato  $b_f$ , la parte real de un polo corresponde a una raíz de  $b_f$ .

Análogamente en el caso no Arquimediano se obtiene una extensión analítica de la función  $Z_{\Phi}(s, \chi, f)$  utilizando como herramienta principal nuevamente el Teorema de resolución de singularidades de Hironaka, este hecho fue probado por el matemático Jun-Ichi Igusa en los años 70 quien además probó que dicha extensión es una función racional en el argumento  $p^{-s}$ .

La teoría de los polinomios de Bernstein-Sato ya no puede ser aplicada como en su caso análogo, pues un ingrediente necesario en la prueba es la integración por partes, la cual no se tiene en el cuerpo  $\mathbb{Q}_p$ , por ende no se puede concluir una relación existente entre los ceros de  $b_f$  y los polos de  $Z_\Phi(s, \chi, f)$ .

Para introducir las funciones zeta locales de Igusa, primero se introduce un conjunto de funciones especiales.

**Definición 4** *Una función*

$$\Phi : \mathbb{Q}_p^n \longrightarrow \mathbb{C},$$

es localmente constante, si para todo punto  $x \in \mathbb{Q}_p^n$  existe una vecindad  $V(x)$  de  $x$  tal que  $\Phi(x) = \Phi(y)$  para cada  $y \in V(x)$ .

**Definición 5** *Una función*

$$\Phi : \mathbb{Q}_p^n \longrightarrow \mathbb{C},$$

es de soporte compacto si la clausura topológica del conjunto  $\{x \in \mathbb{Q}_p^n : \Phi(x) \neq 0\}$  es compacto.

El conjunto de funciones de Schwartz-Bruhat  $\mathbb{S}(\mathbb{Q}_p^n)$  está formado por las funciones que son localmente compactas y de soporte compacto, con esto en mente se introduce como en [4] las funciones zeta locales de Igusa.

**Definición 6** *Función zeta local de Igusa:*

Para  $\operatorname{Re}(s) > 0$ ,  $d\mu$  la medida de Haar normalizada en  $\mathbb{Q}_p^n$ ,  $\Phi \in \mathbb{S}(\mathbb{Q}_p^n)$  y  $f[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{Q}_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$Z_\Phi(s, f) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \Phi(x) |f(x)|_p^s d\mu,$$

es la función zeta local de Igusa.

**Ejemplo 3** *Una de las primeras aplicaciones de este tipo de funciones sucede al elegir como caso particular  $\Phi(x) = \frac{\chi(x)(\mathbb{Z}_p - \{0\})}{(1 - p^{-1})|x|_p}$  y  $f(x) = x$ , con lo cual*

$$\zeta_p(s) = Z_\Phi(f, s) = \int_{\mathbb{Z}_p - \{0\}} \frac{|x|_p^{s-1}}{1 - p^{-1}} dx,$$

así

$$\zeta_p(s) = \frac{1}{1 - p^{-1}} \int_{\mathbb{Z}_p - \{0\}} |x|_p^{s-1} dx,$$

teniendo en cuenta que el dominio se puede descomponer de la forma,

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i=0}^{\infty} (p^i \mathbb{Z}_p - p^{i+1} \mathbb{Z}_p),$$

entonces

$$\zeta_p(s) = \frac{1}{1-p^{-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{p^i \mathbb{Z}_p - p^{i+1} \mathbb{Z}_p} |x|_p^{s-1} dx,$$

se tiene así

$$\zeta_p(s) = \frac{1}{1-p^{-1}} \sum_{i=0}^{\infty} p^{-i(s-1)} \left[ \int_{p^i \mathbb{Z}_p} dx - \int_{p^{i+1} \mathbb{Z}_p} dx \right]$$

y como se vio en el Capítulo 1, las integrales toman valores,

$$\zeta_p(s) = \frac{1}{1-p^{-1}} \sum_{i=0}^{\infty} p^{-i(s-1)} (p^{-i}(1-p^{-1})),$$

lo anterior lleva a la igualdad

$$\zeta_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}},$$

y realizando el producto sobre todos los números primos se obtiene que

$$\prod_p \zeta_p(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s),$$

es decir la función zeta de Riemann se puede expresar como un producto de funciones zeta locales de Igusa.

En lo que sigue del proyecto se utilizarán funciones zeta locales del tipo,

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s d\mu,$$

al elegir  $\Phi(x) = \chi_{\mathbb{Z}_p^n}$ , la función característica sobre los enteros  $p$ -ádicos.

Esta elección se hace por la estrecha relación de  $Z(s, f)$  con las series de Poincaré, lo primero que se observará es su dominio de convergencia y la relación existente.

Observe que el conjunto  $\mathbb{Z}_p^n - f^{-1}(0)$  puede expresarse como unión disyunta

$$\mathbb{Z}_p^n - f^{-1}(0) = \bigcup_{k \geq 0} (f^{-1}(p^k \mathbb{Z}_p) - f^{-1}(p^{k+1} \mathbb{Z}_p)),$$

luego se puede expresar  $Z(s, f)$  en la forma

$$Z(s, f) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{f^{-1}(p^k \mathbb{Z}_p) - f^{-1}(p^{k+1} \mathbb{Z}_p)} |f(x)|_p^s d\mu(x),$$

así

$$Z(s, f) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks} \int_{f^{-1}(p^k \mathbb{Z}_p) - f^{-1}(p^{k+1} \mathbb{Z}_p)} d\mu(x),$$

lo anterior indica que

$$Z(s, f) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks} [\mu(f^{-1}(p^k \mathbb{Z}_p^n)) - \mu(f^{-1}(p^{k+1} \mathbb{Z}_p^n))],$$

al observar que

$$f^{-1}(p^k \mathbb{Z}_p^n) - f^{-1}(p^{k+1} \mathbb{Z}_p^n) = \{x \in \mathbb{Z}_p^n : f(x) \cong 0 \pmod{p^k}\} - \{x \in \mathbb{Z}_p^n : f(x) \cong 0 \pmod{p^{k+1}}\},$$

y teniendo en cuenta que

$$\{x \in \mathbb{Z}_p^n : f(x) \cong 0 \pmod{p^k}\} = \bigcup_{x \in (\mathbb{Z}_p/p^k \mathbb{Z}_p)^n : f(x) \cong 0 \pmod{p^k}} (x + p^k \mathbb{Z}_p^n),$$

se tiene que

$$\mu(f^{-1}(p^k \mathbb{Z}_p^n)) = N_k p^{-kn},$$

al sustituir

$$Z(s, f) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks} [N_k p^{-kn} - N_{k+1} p^{-(k+1)n}],$$

encontrando la relación

$$Z(s, f) = P_f(p^{-s}) - \frac{P_f(p^{-s}) - 1}{p^{-s}},$$

con  $P_f(t)$  la serie de Poincaré asociada al polinomio  $f$ , se observa entonces que  $Z(s, f)$  es la composición de dos funciones  $\tilde{Z}(t) = P_f(t) - \frac{P_f(t)-1}{t}$  y  $\psi(s) = p^{-s}$ , es decir

$$Z(s, f) = \tilde{Z}(\psi(s)),$$

así  $Z(s, f)$  es una función analítica para  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

Una primera propiedad de la función  $Z(s, f)$  es su periodicidad, pues  $\psi(s + i \frac{2\pi}{\ln(p)}) = \psi(s)$ , con lo cual

$$Z(s + i \frac{2\pi m}{\ln(p)}, f) = Z(s, f),$$

para  $m \in \mathbb{Z}$ .

La siguiente propiedad más profunda acerca de las funciones  $Z(s, f)$  es debida al matemático Jun-ichi Igusa, quien demuestra en [12] el siguiente Teorema,

**Teorema 4** *Si  $\mathbb{Q}_p$  es el cuerpo de los números  $p$ -ádicos,  $Z_{\Phi}(s, \chi, f)$  admite una prolongación meromorfa a todo  $\mathbb{C}$ , la cual es una función racional de  $t = p^{-s}$ .*

La primera aplicación de este teorema es la demostración de la conjetura de (Borevich shafarevich) en el cuerpo  $\mathbb{Q}_p$  pues la relación

$$Z(s, f) = P_f(p^{-s}) - \frac{P_f(p^{-s}) - 1}{p^{-s}},$$

garantiza que la serie de Poincaré

$$P_f(p^{-s}) = \frac{p^{-s} Z(s, f) + 1}{p^{-s} - 1},$$

es una función racional.

La extensión meromorfa de  $Z(s, f)$  se denota por  $Z(s, f)$ , esto sin producir alguna confusión.

## 2.2. Cálculo de $Z(s, f)$

En esta sección se evidencia como puede ser calculada la función  $Z(s, f)$ , para algunos polinomios  $f$  especiales.

**Ejemplo 4** Sea  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ , con  $m_i > 0$  un entero positivo, la función zeta local de Igusa asociada a  $f$  está dada por

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}|_p^s d\mu,$$

utilizando Fubini se tiene que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} |x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}|_p^s d\mu = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{Z}_p} |x_i^{m_i}|_p^s d\mu,$$

entonces se observa que el cálculo requerido es

$$\int_{\mathbb{Z}_p} |x_i^{m_i}|_p^s d\mu.$$

Para dicho cálculo se recurre a la descomposición

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i \geq 0} (p^i \mathbb{Z}_p - p^{i+1} \mathbb{Z}_p),$$

por lo tanto

$$\int_{\mathbb{Z}_p} |x_i^{m_i}|_p^s d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} p^{-im_i s} \int_{p^i \mathbb{Z}_p - p^{i+1} \mathbb{Z}_p} d\mu,$$

como se vio en el capítulo 1 las integrales toman los valores

$$\int_{p^i \mathbb{Z}_p} d\mu = p^{-i},$$

así

$$\int_{\mathbb{Z}_p} |x_i^{m_i}|_p^s d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} p^{-im_i s} (p^{-i} (1 - p^{-1})),$$

esto es

$$\int_{\mathbb{Z}_p} |x_i^{m_i}|_p^s d\mu = (1 - p^{-1}) \sum_{i=0}^{\infty} p^{-i(m_i s + 1)} = \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-(m_i s + 1)}},$$

con lo cual la función zeta local de Igusa toma la forma

$$Z(s, f) = (1 - p^{-1})^n \prod_{i=1}^n (1 - p^{-(m_i s + 1)})^{-1},$$

con polos de la forma  $s = -\frac{1}{m_i} + i\frac{2\pi k}{m_i}$ .

Otro polinomio para el cual se podría desear calcular  $Z(s, f)$  es  $f(x, y) = x^n + y^m$ , es decir

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^2} |x^n + y^m|_p^s dx dy,$$

en esta ocasión dicho cálculo directo requiere un poco más de análisis ver [6], así es como se evidencia la necesidad de una herramienta que permita el cálculo de  $Z(s, f)$  de una manera más eficiente, es por esto que en el año 1994 Igusa introduce en [9] la fórmula de la fase estacionaria para las funciones zeta locas.

### 2.2.1. Fórmula de fase estacionaria (FFE)

Una de las principales herramientas para el cálculo directo de las funciones zeta locales de Igusa, es la fórmula de fase estacionaria introducida en [9], esta fórmula surge al revisar las integrales oscilantes, la idea general es partir el dominio de integración en puntos singulares y no singulares, calcular de forma cerrada la parte no singular y controlar las singularidades del polinomio.

Se denota  $F_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ , el cuerpo finito de  $p$  elementos,

$$\phi : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = F_p$$

el homomorfismo canónico en el cuerpo  $F_p$ , y se denota  $\bar{x} = \phi(x)$ , es decir,  $\bar{x}$  representa la reducción de  $x$  módulo  $p$ .

Dado un polinomio  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$  cuyos coeficientes no están todos en  $p\mathbb{Z}_p$ , se denota  $\bar{f}(x)$  el polinomio obtenido al reducir los coeficientes de  $f$  módulo  $p$ , se definen los conjuntos

- $Sing_f(\mathbb{Z}_p) = \{X \in \mathbb{Z}_p^n : f(X) = 0, \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n\}$
- $Sing_f(F_p) = \{X \in F_p^n : \bar{f}(X) = 0, \frac{\partial \bar{f}(X)}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n\}$

donde  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  denota la derivada parcial formal usual.

**Teorema 5** *Fórmula de fase estacionaria*

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s dx = V + \sigma \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1}p^{-s}} + \sum_{q \in S(f, \mathbb{Z}_p)} p^{-n} \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(q+px)|_p^s dx,$$

con

- $V = p^{-n} \text{Card}\{\bar{q} \in F_p : \bar{f}(\bar{q}) \neq 0\},$
- $\sigma = p^{-n} \text{Card}\{\bar{q} \in F_p : \bar{f}(\bar{q}) \neq 0, \frac{\partial \bar{f}(\bar{q})}{\partial x_i} \neq 0, \text{para algún } i = 1, 2, \dots, n\}.$

**Demostración:** Se observa que  $F_p$ , es la unión disyunta de los conjuntos

- $\bar{E}_v = \{\bar{q} \in F_p : \bar{f}(\bar{q}) \neq 0\},$
- $\bar{E}_\sigma = \{\bar{q} \in F_p : \bar{f}(\bar{q}) = 0, \frac{\partial \bar{f}(\bar{q})}{\partial x_i} \neq 0, \text{para algún } i = 1, 2, \dots, n\},$

- $\bar{E}_S = \{\bar{q} \in F_p : \bar{f}(\bar{q}) = 0, \frac{\partial \bar{f}(\bar{q})}{\partial x_i} = 0, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n\}$ .

Si se denota  $E_v = \phi^{-1}(\bar{E}_v)$ ,  $E_\sigma = \phi^{-1}(\bar{E}_\sigma)$  y  $E_S = \phi^{-1}(\bar{E}_S)$ , entonces se tiene la unión disyunta

$$\mathbb{Z}_p^n = E_v \cup E_\sigma \cup E_S,$$

así la integral se descompone de la forma

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s dx = \int_{E_v} |f(x)|_p^s dx + \int_{E_\sigma} |f(x)|_p^s dx + \int_{E_S} |f(x)|_p^s dx.$$

Se realizará el cálculo en cada integral obteniendo el resultado deseado.

- $\int_{E_v} |f(x)|_p^s dx$

Lo primero que se puede notar es que el conjunto  $E_v$  es la unión de todas las clases que se encuentran en el conjunto  $\bar{E}_v$ , es decir,

$$E_v = \bigcup_{\bar{q} \in \bar{E}_v} (q + (p\mathbb{Z}_p)^n),$$

así, se tiene que

$$\int_{E_v} |f(x)|_p^s dx = \sum_{\bar{q} \in \bar{E}_v} \int_{q + (p\mathbb{Z}_p)^n} |f(x)|_p^s,$$

si se realiza la sustitución  $x = q + (p\mathbb{Z}_p)^n$ , con  $dx = p^{-n} du$ , se obtiene que

$$\int_{E_v} |f(x)|_p^s dx = \sum_{\bar{q} \in \bar{E}_v} \int_{\mathbb{Z}_p^n} p^{-n} |f(q + pu)|_p^s du.$$

Observe que por hipótesis  $\bar{f}(\bar{q}) \neq 0$ , ahora como,  $q + pu \cong q \pmod{(p\mathbb{Z}_p)^n}$ , entonces  $f(q + pu) \cong f(q) \pmod{(p\mathbb{Z}_p)}$  y  $f(q) \not\equiv 0 \pmod{(p\mathbb{Z}_p)}$ , así se tiene que  $f(q + pu) \not\equiv 0 \pmod{(p\mathbb{Z}_p)}$ , con lo cual  $|f(q + pu)|_p = 1$ , por ende

$$\int_{E_v} |f(x)|_p^s dx = \sum_{\bar{q} \in \bar{E}_v} \int_{\mathbb{Z}_p^n} p^{-n}$$

luego

$$\int_{E_v} |f(x)|_p^s dx = V.$$

- $\int_{E_\sigma} |f(x)|_p^s dx$

Se definen los conjuntos

$$E_{\sigma,i} = \{X \in q + (p\mathbb{Z}_p)^n : \bar{q} \in \bar{E}_\sigma, f(q) \cong 0 \pmod{(p^i\mathbb{Z}_p)}\}$$

con lo cual se tiene la unión disyunta

$$E_\sigma = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_{\sigma,i} - E_{\sigma,i+1})$$

luego la integral se descompone de la forma

$$\int_{E_\sigma} |f(x)|_p^s dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_{\sigma,i} - E_{\sigma,i+1}} p^{-is} dx$$

por lo tanto

$$\int_{E_\sigma} |f(x)|_p^s dx = \sum_{i=1}^{\infty} p^{-is} (\mu(E_{\sigma,i}) - \mu(E_{\sigma,i+1}))$$

por el lema de Hensel y su generalización se tiene que,

$$\mu(E_{\sigma,i}) = \sigma p^{1-i}$$

así

$$\int_{E_\sigma} |f(x)|_p^s dx = \sum_{i=1}^{\infty} p^{-is} \sigma (p^{1-i} - p^{-i}),$$

por lo tanto

$$\int_{E_\sigma} |f(x)|_p^s dx = \sigma(p-1) \sum_{i=1}^{\infty} p^{-i(s+1)},$$

Como es una serie geométrica se tiene que

$$\int_{E_\sigma} |f(x)|_p^s dx = \sigma(p-1) \frac{p^{-s-1}}{1-p^{-s-1}},$$

con lo cual se concluye que

$$\int_{E_\sigma} |f(x)|_p^s dx = \frac{\sigma(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-s-1}}.$$

▪  $\int_{E_S} |f(x)|_p^s dx$

Como antes tenemos que el dominio se puede escribir como la unión de las clases de equivalencia, así

$$E_S = \bigcup_{\bar{q} \in \bar{E}_S} (q + (p\mathbb{Z}_p)^n),$$

lo anterior indica que la integral se puede descomponer de la forma

$$\int_{E_S} |f(x)|_p^s dx = \sum_{\bar{q} \in \text{Sing}_f(F_p)} \int_{q+(p\mathbb{Z}_p)^n} |f(x)|_p^s dx.$$

realizando la sustitución tenemos que

$$\int_{E_S} |f(x)|_p^s dx = \sum_{\bar{q} \in \text{Sing}_f(F_p)} p^{-n} \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(q + px)|_p^s dx.$$

Con los resultados anteriores tenemos entonces que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s dx = V + \sigma \frac{(1 - p^{-1})p^{-s}}{1 - p^{-1}p^{-s}} + \sum_{\bar{q} \in \text{Sing}_f(F_p)} p^{-n} \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(q + px)|_p^s dx.$$

□

Con la fórmula de fase estacionaria se puede observar que los polos de la función zeta local de Igusa se encuentran estrechamente relacionados con las singularidades de su polinomio módulo  $p\mathbb{Z}_p$ .

Por ejemplo, en el caso particular en el que  $f(x, y, z) = g(x, y) + z$ , con  $f$  y  $g$  polinomios con coeficientes en el anillo de enteros  $p$ -ádicos, se tiene que no hay singularidades de  $f$ , pues  $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$ , así la extensión  $Z(s, f)$  tiene únicamente un polo en

$$s + 1 = 0,$$

es decir, todas las funciones zeta locales de Igusa, tienen como mínimo un polo en  $s + 1 = 0$ .

### 2.3. FFE sobre formas fuertemente no degeneradas.

Sea  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ , esto es dado cualquier  $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ , se cumple que

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

se dice que  $f(x)$  es una forma fuertemente no degenerada sí  $\text{Sing}_f(F_p) = \{0\}$ .

En el proyecto a desarrollar, este tipo de polinomios será una de las familias que se estudiarán debido a la fórmula de fase estacionaria introducida por Igusa, herramienta que nos garantiza en este caso la obtención de las funciones zeta locales de Igusa de manera cerrada.

Sea  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$  una forma fuertemente no degenerada, al aplicar la fórmula de fase estacionaria sobre estos polinomios homogéneos particulares, se obtiene:

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|_p^s dx = v(\bar{f}) + \sigma(\bar{f}) \frac{(1 - p^{-1})p^{-s}}{1 - p^{-1}p^{-s}} + \int_{(p\mathbb{Z}_p)^n} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|_p^s dx,$$

se observa que ésta igualdad se genera debido a su única singularidad  $(0, 0, \dots, 0)$ , realizando las  $n$  sustituciones  $x_i = pu_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ , y  $dx_i = p^{-1}du_i$ , se obtiene la igualdad

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|_p^s dx = v(\bar{f}) + \sigma(\bar{f}) \frac{(1 - p^{-1})p^{-s}}{1 - p^{-1}p^{-s}} + \int_{\mathbb{Z}_p^n} p^{-n} |f(pu_1, pu_2, \dots, pu_n)|_p^s du,$$

en este punto se utiliza la hipótesis en la cual  $f$  es una forma de grado  $d$ , con lo cual

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|_p^s dx = v(\bar{f}) + \sigma(\bar{f}) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + \int_{\mathbb{Z}_p^n} p^{-n} |p^d f(u_1, u_2, \dots, u_n)|_p^s du,$$

y así se obtiene la igualdad

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|_p^s dx = v(\bar{f}) + \sigma(\bar{f}) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + \int_{\mathbb{Z}_p^n} p^{-n} p^{-ds} |f(u_1, u_2, \dots, u_n)|_p^s du,$$

es decir, se encuentra la ecuación funcional,

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|_p^s dx = v(\bar{f}) + \sigma(\bar{f}) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + p^{-n} p^{-ds} Z(s, f),$$

así se concluye que la función zeta local de Igusa asociada a una forma fuertemente no degenerada está dado por

$$Z(s, f) = \frac{1}{1-p^{-n-ds}} \left[ v(\bar{f}) + \sigma(\bar{f}) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} \right].$$

Con lo cual los polos de  $Z(s, f)$  son de la forma  $s = \frac{-n}{d} + i \frac{2\pi k}{d \ln(p)}$ ,  $s = -1 + i \frac{2\pi k}{\ln(p)}$ , esto es, para las formas fuertemente no degeneradas la cantidad de variables sobre el grado son la parte racional del polo de  $Z(s, f)$ .

En el siguiente ejemplo se calcula la función zeta local de Igusa asociada a  $f(x, y) = x^n + y^{2n}$ , lo primero que se puede observar es que dicho polinomio no es homogéneo, por lo tanto, no se puede aplicar la fórmula anterior, obsérvese que este polinomio guarda cierta relación en la parte de las singularidades pues  $Sing_f(F_p) = \{(0, 0)\}$ .

**Ejemplo 5**  $Z(s, x^n + y^{2n})$

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^2} |x^n + y^{2n}|_p^s dx dy = v(\bar{f}) + \sigma(\bar{f}) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + \int_{(p\mathbb{Z}_p)^2} |x^n + y^{2n}|_p^s dx dy,$$

realizando la sustitución  $x = pu_1$ ,  $y = pu_2$ , se tiene que

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^2} |x^n + y^{2n}|_p^s dx dy = v(\bar{f}) + \sigma(\bar{f}) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + p^{-2} \int_{\mathbb{Z}_p^2} |p^n u_1^n + p^{2n} u_2^{2n}|_p^s du_1 du_2,$$

observar que el cálculo necesario está sobre la integral

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^2} |x^n + y^{2n}|_p^s dx dy = v(\bar{f}) + \sigma(\bar{f}) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + p^{-2-ns} \int_{\mathbb{Z}_p^2} |u_1^n + p^n u_2^{2n}|_p^s du_1 du_2.$$

Aquí se pone de manifiesto como se puede aplicar la fórmula de la fase estacionaria de manera recurrente para obtener integrales ya conocidas,

$$\blacksquare \int_{\mathbb{Z}_p^2} |u_1^n + p^n u_2^{2n}|_p^s du_1 du_2 = v(\bar{f}_1) + \sigma(\bar{f}_1) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + \int_{p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p} |u_1^n + p^n u_2^{2n}|_p^s du_1 du,$$

realizando la sustitución  $u_1 = px$ ,  $y = u_2$  con  $du_1 = p^{-1}dx$ , se tiene que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^2} |u_1^n + p^n u_2^{2n}|_p^s du_1 du_2 = v(\bar{f}_1) + \sigma(\bar{f}_1) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + \int_{p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p} p^{-1} |p^n x^n + p^n y^{2n}|_p^s dx dy,$$

con lo cual

$$\int_{\mathbb{Z}_p^2} |u_1^n + p^n u_2^{2n}|_p^s du_1 du_2 = v(\bar{f}_1) + \sigma(\bar{f}_1) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + p^{-1-ns} \int_{\mathbb{Z}_p^2} |x^n + y^{2n}|_p^s dx dy.$$

El resultado anterior puede ser sustituido y obtener la ecuación funcional

$$Z(s, f) = v(\bar{f}) + \sigma(\bar{f}) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + p^{-2-ns} \left[ v(\bar{f}_1) + \sigma(\bar{f}_1) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + p^{-1-ns} Z(s, f) \right],$$

lo anterior implica que la función zeta local de Igusa asociada al polinomio  $f(x, y) = x^n + y^{2n}$ , está dado por

$$Z(s, f) = \frac{1}{1-p^{-(3+2ns)}} \left[ v(\bar{f}) + \sigma(\bar{f}) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + p^{-2-ns} (v(\bar{f}_1) + \sigma(\bar{f}_1) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}}) \right].$$

Se observa que los polos de la función zeta local de Igusa están dados por

$$s = -\frac{3}{2n} + i \frac{2\pi k}{2n \ln(p)} \quad y \quad s = -1 + i \frac{2\pi k}{\ln(p)}.$$

Como se vio antes, en las formas fuertemente no degeneradas se puede calcular la función zeta local de Igusa dependiendo de sus ceros no singulares y conocer de forma exacta los polos de dicha función, en el Ejemplo 5 se trabaja con un polinomio cuasi-homogéneo, es decir  $f(x)$ , es un polinomio cuasi-homogéneo de grado  $d$  con pesos  $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$  primos relativos, si cumple que

$$f(\lambda^{w_1} x_1, \lambda^{w_2} x_2, \lambda^{w_3} x_3, \dots, \lambda^{w_n} x_n) = \lambda^d f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

Así el polinomio del Ejemplo 5 es cuasi-homogéneo de grado  $2n$  y pesos  $(2, 1)$ .

El matemático Wilson Zuñiga en [7] siguiendo las sugerencias propuestas por Igusa en [12], debilita las hipótesis planteadas en las formas fuertemente no degeneradas, trabajando con polinomios cuasi homogéneos y semi-cuasi-homogéneos, encontrando el siguiente resultado

**Teorema 6** (Zuñiga Galindo)

Sea  $f(x) \in \mathbb{Q}_p[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ , un polinomio cuasi homogéneo de grado  $d$  y pesos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , tal que el único cero de su reducción módulo  $p\mathbb{Z}_p$  sea el origen,  $(0, 0, \dots, 0)$  entonces, la función zeta local de Igusa asociada a  $f(x)$  es una función racional de  $t = p^{-s}$ , de manera más precisa.

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s dx = \frac{L(t)}{(1-p^{-1-s})(1-p^{-|\alpha|-sd})},$$

donde  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  y  $L(t)$  un polinomio.

El hecho de resaltar que la función zeta local de Igusa es una función racional en este Teorema, se debe a que la teoría de las funciones zeta locales de Igusa puede ser generalizada en extensiones finitas del cuerpo  $\mathbb{Q}_p$ , de cuerpos, que no son de característica cero (Cuerpos locales no arquimedianos) ver [11]

Dentro de los cuerpos locales no arquimedianos se distinguen dos tipos, aquellos en los cuales su cuerpo residual es de característica cero y aquellos en los cuales la característica es positiva.

El Teorema de prolongación analítica de las funciones zeta locales de Igusa fue demostrado para cuerpos locales no arquimedianos cuyo cuerpo residual es de característica cero, como  $\mathbb{Q}_p$  (ver Teorema 6), pero dejando un vacío en los cuerpos locales no arquimedianos con característica positiva. Uno de los primeros avances en característica positiva fue dado por el colombiano Wilson Zuñiga, quien basado en las sugerencias de Igusa en [12], demuestra la racionalidad de las funciones zeta locales de Igusa asociadas a polinomios cuasi-homogéneos y semi cuasi-homogéneos fuertemente no degenerados en característica arbitraria (Teorema 6).

Si bien se conoce de forma exacta como calcular los polos de las funciones zeta locales de Igusa para formas fuertemente no degeneradas, con el Teorema 6, Zuñiga extiende dicho resultado a polinomios cuasi-homogéneos fuertemente no degenerados, observe que el Ejemplo 5 satisface las hipótesis del Teorema con pesos  $(2, 1)$  y grado  $2n$ , aplicando el Teorema se encuentra que sus polos son de la forma

$$s = -\frac{3}{2n} + i\frac{2\pi k}{2n \ln(p)},$$

$$s = -1 + i\frac{2\pi k}{\ln(p)},$$

lo cual concuerda con los resultados del Ejemplo, otros ejemplos de polinomios cuasi-homogéneos fuertemente no degenerados son:

- $g_1(x, y, z) = x^4 + y^3 + z^2$ , de grado 12 con pesos  $(3, 4, 6)$ ,
- $g_2(x, y, z) = x^3y + y^3 + z^2$ , de grado 18 con pesos  $(4, 6, 9)$ ,
- $g_3(x, y, z) = x^5 + y^3 + z^2$ , de grado 30 con pesos  $(6, 10, 15)$ ,

aplicando el Teorema 6 se tiene que las funciones zeta locales de Igusa asociadas son de la forma

- $Z(s, g_1) = \frac{L_1(t)}{(1 - p^{-1-s})(1 - p^{-13-12s})}$ ,
- $Z(s, g_2) = \frac{L_2(t)}{(1 - p^{-1-s})(1 - p^{-19-18s})}$ ,
- $Z(s, g_3) = \frac{L_3(t)}{(1 - p^{-1-s})(1 - p^{-31-30s})}$ ,

con los resultados anteriores se puede obtener los polos de las respectivas funciones zeta locales de Igusa, para un cálculo directo de  $L_1, L_2$  y  $L_3$ , se puede proceder como en el Ejemplo 5, aplicando de forma iterativa la fórmula de fase estacionaria ver [18].

Si se debilita la hipótesis de fuertemente no degenerado y se introducen más singularidades, el cálculo de las funciones zeta locales se puede dificultar en muchos casos, pero hay polinomios particulares en los cuales el cálculo puede efectuarse de manera cerrada, se debilitará la homogeneidad introduciendo un factor a una forma fuertemente no degenerada.

Sea  $F(y, z, w)$  una forma fuertemente no degenerada de grado  $2d$ , observe que si se toma el polinomio

$$g(x, y, z, w) = x^2 F(y, z, w),$$

entonces

- $g(x, y, z, w) = 0$  sii  $x = 0$  ó  $F(y, z, w) = 0$ ,
- $g_x(x, y, z, w) = 2xF(y, z, w) = 0$  sii  $x = 0$  ó  $F(y, z, w) = 0$ ,
- $g_y(x, y, z, w) = x^2 F_y(y, z, w) = 0$  sii  $x = 0$  ó  $F_y(y, z, w) = 0$ ,
- $g_z(x, y, z, w) = x^2 F_z(y, z, w) = 0$  sii  $x = 0$  ó  $F_z(y, z, w) = 0$ ,
- $g_w(x, y, z, w) = x^2 F_w(y, z, w) = 0$  sii  $x = 0$  ó  $F_w(y, z, w) = 0$ .

Note que: de las igualdades anteriores se obtienen las singularidades de  $g(x, y, z, w)$ , las cuales son

- $(x, y, z, w) = (0, F_p, F_p, F_p)$ ,
- $(x, y, z, w) = (F_p - \{0\}, 0, 0, 0)$ .

Observe que  $g(x, y, z, w)$  es un polinomio cuasi-homogéneo, de peso  $2d$  con exponentes  $(d, 1, 1, 1)$ , con más de una singularidad. Además, dada la forma del polinomio  $g$ , se puede calcular la función zeta local de Igusa aplicando Fubini, pero en lugar de ellos se aplicará la fórmula de fase estacionaria para poder observar la recurrencia, así:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p^4} |g(x, y, z, w)|_p^s |dx| &= v(\bar{g}) + \sigma(\bar{g}) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + \left( \int_{p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p} |g(x, y, z, w)|_p^s |dx| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{a=1}^{p-1} \int_{a+p\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p} |g(x, y, z, w)|_p^s |dx| \right), \end{aligned}$$

realizando las sustituciones respectivas se obtiene la igualdad

$$Z(s, g) = v(\bar{g}) + \sigma(\bar{g}) \frac{(1-p^{-1})p^{-s}}{1-p^{-1-s}} + \left( p^{-1-2s} \int_{\mathbb{Z}_p^4} |g(x, y, z, w)|_p^s |dx| + \sum_{a=1}^{p-1} p^{-4} \int_{\mathbb{Z}_p^4} |g(a+px, py, pz, pw)|_p^s |dx| \right),$$

y dada la forma de  $g$ , se tiene que

$$g(a+px, py, pz, pw) = (a+px)^2 p^{2d} F(y, z, w),$$

con lo cual

$$g(a+px, py, pz, pw) = p^{2d} a^2 F(y, z, w) + 2ap^{1+2d} x F(y, z, w) + p^{2+2d} x^2 F(y, z, w),$$

así, la integral que falta es de la forma

$$\int_{\mathbb{Z}_p^4} |g(a + px, py, pz, pw)|_p^s |dx| = p^{-2ds} \int_{\mathbb{Z}_p^4} |a^2 F(y, z, w) + 2apxF(y, z, w) + p^2 x^2 F(y, z, w)|_p^s |dx|,$$

y aplicando nuevamente la fórmula de fase estacionaria al polinomio

$$g_1(x, y, z, w) = a^2 F(y, z, w) + 2apxF(y, z, w) + p^2 x^2 F(y, z, w),$$

con  $\bar{g}_1(x, y, z, w) = a^2 F(y, z, w)$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p^4} |a^2 F(y, z, w) + 2apxF(y, z, w) + p^2 x^2 F(y, z, w)|_p^s |dx| &= v(\bar{g}_1) + \sigma(\bar{g}_1) \frac{(1 - p^{-1})p^{-s}}{1 - p^{-1-s}} \\ &+ \int_{\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p} |a^2 F(y, z, w) + 2apxF(y, z, w) + p^2 x^2 F(y, z, w)|_p^s |dx|. \end{aligned}$$

Realizando las sustituciones  $y = py, z = pz, w = pw$ , se encuentra que

$$Z(s, g_1) = v(\bar{g}_1) + \sigma(\bar{g}_1) \frac{(1 - p^{-1})p^{-s}}{1 - p^{-1-s}} + p^{-3-2ds} Z(s, g_1),$$

con lo cual

$$Z(s, g_1) = \frac{v(\bar{g}_1)(1 - p^{-1-s}) + \sigma(\bar{g}_1)(1 - p^{-1})p^{-s}}{(1 - p^{-1-s})(1 - p^{-3-2ds})},$$

sustituyendo este resultado se obtiene

$$Z(s, g) = v(\bar{g}) + \sigma(\bar{g}) \frac{(1 - p^{-1})p^{-s}}{1 - p^{-1-s}} + p^{-1-2s} Z(s, g) + \sum_{a=1}^{p-1} (p^{-4-2ds}) \frac{v(\bar{g}_1)(1 - p^{-1-s}) + \sigma(\bar{g}_1)(1 - p^{-1})p^{-s}}{(1 - p^{-1-s})(1 - p^{-3-2ds})},$$

y como la fracción no depende de  $a$ , al despejar la función zeta se tiene que

$$Z(s, g) = \frac{L(p^{-s})}{(1 - p^{-1-2s})(1 - p^{-1-s})(1 - p^{-3-2ds})}.$$

Se puede observar de forma directa que aunque  $g(x, y, z, w)$  es un polinomio cuasi-homogéneo de peso  $2d$  con exponentes  $\alpha_1 = d, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1$ , el factor  $(1 - p^{-(d+3)-2ds})$  no hace parte del denominador de la función  $Z(s, g)$ ; Este hecho no contradice el Teorema 6 planteado por Zuñiga dado que el polinomio contiene más de una singularidad, nos indica que en general el factor  $(1 - p^{-(d+3)-2ds})$  no siempre hace parte del denominador de la función  $Z(s, f)$ , con  $f(x, y, z, w)$  un polinomio cuasi-homogéneo de peso  $2d$  y exponentes  $(d, 1, 1, 1)$ .

## 2.4. Conjetura de Igusa

En las secciones anteriores se han encontrado las funciones zeta locales de Igusa asociadas a cierta gama de polinomios homogéneos y cuasi-homogéneos, al recordar que este tipo de funciones tiene un análogo arquimediano y en él se encuentran resultados como el siguiente ver [4].

**Teorema:**

Sea  $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  y  $\phi$  una función Schwartz-Bruhat, entonces la función zeta local arquimediana

$$Z_f(s) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s \phi(x) dx,$$

tiene una extensión meromorfa al plano  $\mathbb{C}$  y sus polos son de la forma  $s = s_0 - ik$ , con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $b_f(s_0) = 0$ .

Igusa plantea en 1988 que dicho resultado también debería cumplirse en las funciones  $Z(s, f)$ , con  $f(x) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , es decir, la parte real de cada polo de la función  $Z(s, f)$  es un cero del polinomio  $b_f$ , ver [10].

### Conjetura

Dado  $f(x) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , un polinomio en  $n$  variables y coeficientes en los enteros  $p$ -ádicos, si  $b_f$  el polinomio de Bernstein-Sato asociado a  $f$ , entonces, la parte real de cada polo de la función  $Z(s, f)$  es una raíz del polinomio  $b_f$ .

El matemático Loeser en [15], garantiza que la conjetura planteada por Igusa es verdad para polinomios del tipo de dos variables  $f(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ , en el siguiente capítulo se pretende definir los polinomios  $b_f$  en el cuerpo  $\mathbb{Q}_p$  y realizar cálculos computacionales con el fin de obtener los polinomios  $b_f$ , asociados a los tipos de polinomios trabajados en este capítulo para poder observar la conjetura planteada por Igusa.

# 3 Polinomios de Bernstein-Sato

El problema que motiva la existencia de los polinomios de Bernstein-Sato es la extensión meromorfa de la distribución [11], [4].

$$f_+^s = \int_0^\infty \phi(x) f^s(x) dx.$$

La pregunta de la extensión meromorfa fue planteada en 1954 en el congreso de Amsterdam por el matemático I.M.Gelfand, dicho resultado fue probado 15 años después de forma independiente por los matemáticos Atiya y I.N. Bernstein-S.I. Gelfand, cuya herramienta principal fue el teorema de resolución de singularidades de Hironaka.

Al introducir la existencia de la ecuación funcional probada por I.N.Bernstein en el caso polinomial, se genera una prueba más simple de la extensión meromorfa de la distribución  $f_+^s$ , sin hacer uso de la resolución de singularidades. la prueba aportada por Bernstein al mismo tiempo prueba la estrecha relación existente entre los polos obtenidos de  $f_+^s$  y las raíces del polinomio de Bernstein-Sato. Resultados posteriores han probado que dichas raíces son racionales negativos, dado por Kashiwara y Malgrange.

En la siguiente sección se introduce el polinomio de Bernstein-Sato y se da un panorama de la prueba procedente de Bernstein ver [14], además se implementan los algoritmos encontrados para el cálculo de  $b_f$ .

## 3.1. Ecuación funcional y $b_f$

Sea  $\mathbb{Q}_p$  el cuerpo de los números  $p$ -ádicos y  $\mathbb{Q}_p[x]$  con  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , el espacio vectorial de polinomios sobre el cuerpo  $\mathbb{Q}_p$ , el anillo de endomorfismos sobre el espacio vectorial de los polinomios

$$End(\mathbb{Q}_p[x]) = \{\psi : \mathbb{Q}_p[x] \longrightarrow \mathbb{Q}_p[x]\}$$

donde  $\psi$  es una transformación lineal y las operaciones definidas sobre  $End(\mathbb{Q}_p[x])$  son la suma componente a componente y la composición de funciones, contiene los  $2n$  elementos siguientes  $\tilde{x}_i$  y  $\partial_{x_i}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , definidos mediante la igualdad

$$\tilde{x}_i : \mathbb{Q}_p[x] \longrightarrow \mathbb{Q}_p[x]$$

$$\tilde{x}_i(f) = x_i f,$$

$$\partial_{x_i} : \mathbb{Q}_p[x] \longrightarrow \mathbb{Q}_p[x]$$

$$\partial_{x_i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Con lo anterior se puede definir el sub-anillo de los endomorfismos generado por los elementos  $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}\}$ , el cual es llamado **ÁLGEBRA DE WEYL**, es decir el álgebra de Weyl es el sub-anillo más pequeño que contiene a los elementos  $\{\tilde{x}_i, \partial_{x_i}\}$ , este anillo se denota  $A_1$ . El anillo  $A_1$  no es conmutativo, pues,  $\partial_{x_i}\tilde{x}_i$  y  $\tilde{x}_i\partial_{x_i}$  son elementos de  $A_1$  y se cumple que

$$\partial_{x_i}\tilde{x}_i = 1 + \tilde{x}_i\partial_{x_i},$$

con 1 la identidad del anillo.

El teorema de Bernstein consiste en demostrar qué dado  $f \in \mathbb{Q}_p[x]$ , existe un operador diferencial  $P(s)$  tal que

$$P(s)f = 1,$$

para ello se necesita trabajar con módulos sobre el anillo  $A_1$ , esta teoría no hace parte del álgebra conmutativa por las características del anillo  $A_1$ .

### Espacio en el cual se soluciona la ecuación funcional

Sea  $s$  una nueva variable y  $\mathbb{Q}_p(s)$  el cuerpo de funciones racionales, sobre este cuerpo se elige el anillo de polinomios  $\mathbb{Q}_p(s)[x]$  y el conjunto multiplicativo  $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , con  $f \in \mathbb{Q}_p[x]$ , se realiza la localización de este anillo sobre el conjunto multiplicativo y se obtiene el anillo local

$$\mathbb{Q}_p(s)[x]_f = \left\{ \frac{h(s, x)}{f^k} : h(s, x) \in \mathbb{Q}_p(s)[x], k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Con el anillo anterior se puede definir el  $\mathbb{Q}_p(s)[x]_f$ -módulo libre de rango 1 generado por el símbolo formal  $f^s$ , es decir el conjunto de elementos de la forma

$$\mathbb{Q}_p(s)[x]_f f^s = \{h(s, x, k)f^s : h(s, x, k) \in \mathbb{Q}_p(s)[x]_f\}$$

Se puede pensar en el álgebra de Weyl  $A = \langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n} \rangle$  asociada al cuerpo de fracciones  $\mathbb{Q}_p(s)$  y pensar la estructura  $\mathbb{Q}_p(s)[x]_f f^s$  como un  $A[s]$ -módulo a izquierda, teniendo en cuenta que

$$\partial_x(h(x, s, k)f^s) = \partial_x(h(x, s, k))f^s + (sh(x, s, k)\partial_x(f)f^{-1})f^s.$$

La teoría que se encarga del estudio de módulos sobre las álgebras de Weyl, es conocida como D-módulos, Bernstein realiza contribuciones a esta teoría, en particular añadiendo la desigualdad de Bernstein y los módulos holonómicos, los cuales tienen como propiedad principal tener longitud finita.

### Teorema de Bernstein

Sea  $f \in \mathbb{Q}_p[x]$  un polinomio no nulo, entonces existe un polinomio no nulo  $b(s) \in \mathbb{Q}_p[s]$  y un operador diferencial  $P(s) \in A[s]$  tal que la igualdad

$$P(s)f f^s = b(s)f^s$$

se da en el  $A[s]$ -módulo a izquierda  $\mathbb{Q}_p(s)[x]_f f^s$ .

La familia de polinomios  $b(s)$  satisfaciendo la ecuación  $P(s)ff^s = b(s)f^s$  para algún  $P(s) \in A[s]$  es un ideal no nulo en  $\mathbb{Q}_p[s]$ , además, como  $\mathbb{Q}_p[s]$  es un dominio de ideales principales, se tiene que el ideal anterior tiene un único generador mónico que se denota por  $b_f(s)$ , el polinomio de Bernstein-Sato asociado a  $f$ .

## 3.2. Polinomios diagonales y conjetura de Igusa.

En la sección pasada se observa que la demostración de la existencia del polinomio  $b_f$  no garantiza la construcción de dicho polinomio, esto representa una de las primeras barreras para demostrar la conjetura planteada por Igusa; sin embargo, existen familias de polinomios para las cuales se pueden encontrar raíces de  $b_f$  de manera explícita, en esta sección se estudiará una familia de polinomios cuasi-homogéneos con una única singularidad en el origen, aprovechando el resultado del teorema 6, el cual garantiza de forma cerrada los polos de la función  $Z(s, f)$ , para polinomios de este tipo.

**Definición 7** *Los polinomios diagonales son polinomios cuasi-homogéneos de la forma*

$$p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + x_3^{\alpha_3} + \dots + x_n^{\alpha_n},$$

con  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  y  $\alpha_i > 1$ .

Ejemplos de esta familia de polinomios son

- $x^2 + y^3 + z^4$  con pesos (12, 8, 3) y grado 24,
- $x^2 + y^4 + z^6 + w^8$  con pesos (12, 6, 4, 3) y grado 24,
- $x^4 + y^3 + z^5$  con pesos (15, 20, 12) y grado 60.

El teorema 6 garantiza para este tipo de polinomios que la parte real de los polos de la función  $Z(s, f)$  son:  $-1$  y  $-\frac{|\beta|}{d}$ , con  $|\beta|$  la suma de los pesos asociados al polinomio y  $d$  el grado respectivo, la conjetura planteada por Igusa asegura que dichos valores son raíces de  $b_f$ .

Para demostrar la conjetura en este caso se seguirá [14] en donde se especifica el polinomio  $b_f$ .

**Definición 8** *Sea  $f \in \mathbb{Q}_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$  un polinomio, se define el ideal jacobiano como el ideal generado por el conjunto  $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\}$ ,*

$$J(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

En el caso de los polinomios diagonales se tiene que

$$J(f) = (x_1^{\alpha_1-1}, x_2^{\alpha_2-1}, \dots, x_n^{\alpha_n-1}),$$

así, se tiene que  $f \in J(f)$  y  $1 \notin J(f)$ .

### 3.2.1. Singularidades Cuasi-homogéneas

Sea  $f \in \mathbb{Q}_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$  un polinomio diagonal, con pesos  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  y grado  $d$ , se denota  $w_i = \frac{\beta_i}{d}$ , con ello en mente se define el campo de Euler mediante la igualdad

$$\chi = \sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_i,$$

con  $\partial_i$  denotando la derivada parcial con respecto a  $x_i$ .

El hecho de que el polinomio sea de la forma  $x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + \dots + x_n^{\alpha_n}$ , implica que

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_i (x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + \dots + x_n^{\alpha_n}),$$

con esto se tiene que

$$\chi(f) = \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i x_i^{\alpha_i},$$

por otro lado como los pesos del polinomio son  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , entonces  $\beta_i \alpha_i = d$ , para cada  $i$ , con lo cual  $w_i \alpha_i = 1$ , así

$$\chi(f) = f.$$

**Lema 9** Sea  $f \in \mathbb{Q}_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$  un polinomio diagonal, con pesos  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  y grado  $d$ , si  $|w| = \sum_{i=1}^n w_i$ , con  $w_1 = \frac{\beta_1}{d}$ , entonces

$$(s + |w|)f^s = \sum_{i=1}^n w_i \partial_i x_i f^s.$$

**Demostración:** Sea observa que

$$\sum_{i=1}^n w_i \partial_i x_i f^s = \sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_i f^s + \sum_{i=1}^n w_i f^s,$$

es decir se tiene que

$$\sum_{i=1}^n w_i \partial_i x_i f^s = \chi(f^s) + |w|f^s.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\chi(f^s) = \sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_i f^s = s f^{s-1} \chi(f),$$

y como se vio antes  $\chi(f) = f$ , con lo cual

$$\sum_{i=1}^n w_i \partial_i x_i f^s = (s + |w|)f^s.$$

□

**Teorema 7** Sea  $f \in \mathbb{Q}_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$  un polinomio diagonal, con pesos  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  y grado  $d$ , si  $|w| = \sum_{i=1}^n w_i$ , con  $w_1 = \frac{\beta_1}{d}$ , entonces el polinomio de Bernstein-Sato  $b_f$ , satisface lo siguiente:

1.  $b_f(-1) = 0$ ,
2.  $b_f(-|w|) = 0$ .

**Demostración:** Sea  $b_f(s)$  el polinomio de Bernstein-Sato asociado al polinomio  $f$ , luego existe un operador diferencial  $P(s) \in A_n(s)$ , talque

$$P(s)f^{(s+1)} = b_f(s)f^s,$$

si se elige  $s = -1$ , entonces

$$p(-1) \cdot 1 = b_f(-1)f^{-1},$$

como  $P(-1) \cdot 1 \in \mathbb{Q}_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , entonces  $P(-1) \cdot 1f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , luego

$$P(-1) \cdot 1f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_f(-1),$$

si se toma  $x_i = 0$ , entonces  $b_f(-1) = 0$ .

Se observa que además  $P(-1) \cdot 1 = 0$ , como  $P(s) \in A[s]$ , entonces

$$P(s) = p_1(x)(s+1) + \sum_{i=1}^n A_i(s)\partial_i,$$

con  $p_1(x) \in \mathbb{Q}_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$  y  $A_i(s) \in A[s]$ .

Ahora se procede a demostrar que  $b_f(-|w|) = 0$ , por lo anterior se tiene que

$$\tilde{b}_f(s) = \frac{b_f(s)}{s+1},$$

es un polinomio, llamado polinomio reducido, además se tiene que

$$\tilde{b}_f(s)f^s = \frac{b_f(s)f^s}{s+1} = \frac{P(s)f^{s+1}}{s+1},$$

con lo cual

$$\tilde{b}_f(s)f^s = p_1(x)f^{s+1} + \frac{\sum_{i=1}^n A_i(s)\partial_i f^{s+1}}{s+1},$$

dado que  $\frac{\partial_i f^{s+1}}{s+1} = \partial_i f f^s$ , al sustituir se encuentra que

$$\tilde{b}_f(s)f^s = p_1(x)f^{s+1} + \sum_{i=1}^n A_i(s)\partial_i f f^s,$$

con lo cual

$$\tilde{b}_f(s)f^s = [p_1(x)f + \sum_{i=1}^n A_i(s)\partial_i f]f^s.$$

La prueba se realiza por contradicción, supongamos que  $\tilde{b}_f(-|w|) \neq 0$ , luego  $\tilde{b}_f(s)$  y  $(s+|w|)$  son

primos relativos, aplicando la identidad de Bezout, se garantiza que existen polinomios  $c_1(s), c_2(s)$  tales que

$$c_1(s)(s + |w|) + c_2(s)\tilde{b}_f(s) = 1,$$

así se tiene la igualdad

$$[c_1(s)(s + |w|) + c_2(s)\tilde{b}_f(s)]f^s = f^s,$$

al usar el lema 9 y sustituir  $\tilde{b}_f(s)f^s$ , se llega a

$$[c_1(s) \sum_{i=1}^n w_i \partial_i x_i + c_2(s) p_1(x) f + c_2(s) \sum_{i=1}^n A_i(s) \partial_i f] f^s = f^s,$$

reescribiéndolo, teniendo en cuenta que  $\chi(f) = f$ , entonces

$$[c_1(s) \sum_{i=1}^n w_i \partial_i x_i + c_2(s) p_1(x) \sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_i f + c_2(s) \sum_{i=1}^n A_i(s) \partial_i f] f^s = f^s,$$

es decir

$$[\sum_{i=1}^n \partial_i B_i(s) + \sum_{i=1}^n C_i(s) \partial_i f] f^s = f^s,$$

por lo anterior se tiene que

$$[1 - \sum_{i=1}^n \partial_i B_i(s) - \sum_{i=1}^n C_i(s) \partial_i f] f^s = 0,$$

es decir se encontró un operador diferencial que actuando sobre  $f^s$  lo anula, por una clasificación en [14] sobre este tipo de anuladores, se observa que

$$[1 - \sum_{i=1}^n \partial_i B_i(s) - \sum_{i=1}^n C_i(s) \partial_i f] \in \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \partial^\alpha \cdot J(f),$$

así se concluye que  $1 \in J(f)$ , lo cual es una contradicción que surge de suponer que  $\tilde{b}_f(-|w|) \neq 0$   
□

Al aplicar el resultado del teorema 6 a los polinomios diagonales con pesos  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  y grado  $d$  se tiene que

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s dx = \frac{L(s)}{(1 - p^{-1-s})(1 - p^{-|\beta| - sd})},$$

con  $|\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$ , en este caso se observa que la función zeta local de Igusa de  $f$ , tiene dos polos, cuyas partes reales son:

1.  $s = -1$ ,
2.  $s = -\frac{|\beta|}{d} = -|w|$ .

Así, en este caso, la conjetura de Igusa se satisface, pues el teorema 7 garantiza que las partes reales son raíces del polinomio  $b_f$ , asociado al polinomio diagonal.

En [14] utilizando la estructura del ideal jacobiano  $J(f)$  asociado al polinomio  $f$ , se comprueba que

$$b_f(s) = (s + 1) \prod_{\rho \in \Sigma} (s + |w| + \rho),$$

con  $\rho$  un número asociado a la estructura cociente generada por el ideal jacobiano.

Ahora lo que se hará es mediante el uso de algoritmos calcular de forma explícita el polinomio de Bernstein-Sato para casos particulares y ejemplificar en este tipo de casos la conjetura de Igusa.

### 3.3. Algoritmos para calcular el polinomio de Bernstein-Sato

Los matemáticos T.Oaku y M. Noro, han desarrollado algoritmos aplicando la teoría de bases de Grobner al anillo,  $A_1$ , el álgebra de Weyl, ver [16] y [17], para encontrar el polinomio  $b_f$ , este algoritmo es implementado usando el sistema computacional MACAULAY 2 con el paquete D-modulos, lo que se pretende ahora es mediante dichos algoritmos calcular el polinomio  $b_f$  [14], para casos particulares de polinomios en  $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , y verificar la conjetura propuesta por Igusa. Primero se comparará con la familia de polinomios fuertemente no degenerados, ejemplos de ella son

- $f_1(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ ,
- $f_2(x, y, z) = x^3y + y^4 + z^4$ ,
- $f_3(x, y, z, w) = x^3 + y^3 + z^3 + w^3$ .

luego observaremos el comportamiento de la ciertos polinomios cuasi-homogéneos con una única singularidad en el origen como:

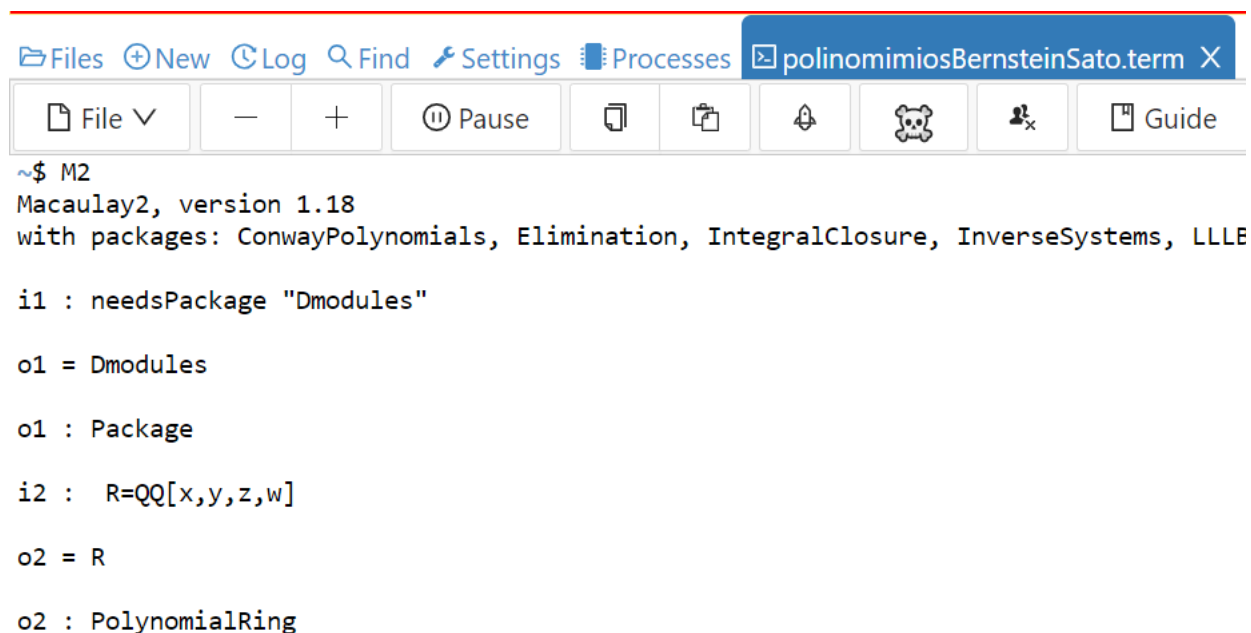
- $g_1(x, y, z) = x^4 + y^3 + z^2$ ,
- $g_2(x, y, z) = x^3y + y^3 + z^2$ ,
- $g_3(x, y, z) = x^5 + y^3 + z^2$ .

Por último calculamos los polinomios  $b_f$  asociados a polinomios cuasi-homogéneos, los cuales poseen más de un punto singular como

- $h_1(x, y, z, w) = x^2y^2 + x^2z^2 + x^2w^2$ ,
- $h_2(x, y, z, w) = x^2y^3z + x^2z^4 + x^2w^4$ ,
- $h_3(x, y, z, w) = x^2y^3 + x^2z^3 + x^2w^3$ .

### 3.3.1. $b_f$ de formas fuertemente no degeneradas.

El algoritmo planteado para encontrar el polinomio de Bernstein-Sato, se implementa en cocalc el cual es una plataforma de computación en la nube, dentro de ella se utiliza el sistema de computación algebraica Macaulay 2.



```

Files New Log Find Settings Processes polinomiosBernsteinSato.term X
File - + Pause Copy Paste Home Search Guide
~$ M2
Macaulay2, version 1.18
with packages: ConwayPolynomials, Elimination, IntegralClosure, InverseSystems, LLL
i1 : needsPackage "Dmodules"

o1 = Dmodules

o1 : Package

i2 : R=QQ[x,y,z,w]

o2 = R

o2 : PolynomialRing

```

Figura 3-1: [https://cocalc.com/share/public\\_paths/13aab75d25725d065cd489f54a211a3b4d12a](https://cocalc.com/share/public_paths/13aab75d25725d065cd489f54a211a3b4d12a)

```

o2 : PolynomialRing

i3 : f_1=x^2+y^2+z^2+w^2

o3 = x2 + y2 + z2 + w2

o3 : R

i4 : b=globalBFunction f_1

o4 = s2 + 3s + 2

o4 : QQ[s]

i5 : factor b

o5 = (s + 1)(s + 2)

```

Figura 3-2:  $f_1(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$

En la primera línea de código se evidencia la librería de Macaulay D-modules, la cual contiene diversos comandos, entre ellos la función `globalBFunction`, se usará dicha función para el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato asociado, así se obtiene que para  $f_1(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ ,

$$b_f(s) = (s + 1)(s + 2),$$

De la misma forma se hará para los polinomios restantes, reportando los resultados encontrados en una tabla y comparándolos con los respectivos polos de la función  $Z(s, f)$ .

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$b_f(s)$
$x^2 + y^2 + z^2 + w^2$	$(s + 1)(s + 2)$
$x^3y + y^4 + z^4$	$(s + 1)^2(s + 2)(2s + 3)(4s + 3)(4s + 5)(4s + 7)(4s + 9)(\frac{1}{512})$
$x^4 + y^4 + z^4 + w^4$	$(s + 1)^2(s + 2)(s + 3)(2s + 5)(2s + 3)(4s + 5)(4s + 7)(4s + 9)(4s + 11)(\frac{1}{1024})$

Utilizando la teoría desarrollada en el capítulo 2, se puede diseñar una tabla de los polos de  $Z(s, f)$ , para  $f$  una forma fuertemente no degenerada, obteniendo que para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Polos de $Z(s, f)$ .
$x^2 + y^2 + z^2 + w^2$	$s = -1 + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}, s = -2 + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}$
$x^3y + y^4 + z^4$	$s = -1 + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}, s = -\frac{3}{4} + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}$
$x^4 + y^4 + z^4 + w^4$	$s = -1 + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}, s = -1 + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}$

Al comparar las dos tablas vemos que la parte real de cada polo de  $Z(s, f)$  es una raíz del polinomio  $b_f(s)$ , al menos para las formas fuertemente no degeneradas tratadas aquí.

Otra observación importante es que  $(s + 1)$  siempre es un factor de  $b_f(s)$  y por la fórmula de fase estacionaria se observa que  $-1$  siempre es la parte real de un polo de  $Z(s, f)$ .

Lo anterior muestra que la conjetura planteada por Igusa se satisface para estos tres polinomios.

### 3.3.2. $b_f(s)$ de polinomios cuasi-homogéneos

Para el caso de polinomios cuasi-homogéneos fuertemente no degenerados encontrados en el capítulo anterior.

$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$b_f(s)$
$x^4 + y^3 + z^2$	$(s + 1)(3s + 4)(3s + 5)(12s + 13)(12s + 17)(12s + 19)(12s + 23)(\frac{1}{186624})$
$x^3y + y^3 + z^2$	$(s + 1)(2s + 3)(18s + 19)(18s + 23)(18s + 25)(18s + 29)(18s + 31)(18s + 35)(\frac{1}{68024448})$
$x^5 + y^3 + z^2$	$(s + 1)(30s + 31)(30s + 37)(30s + 41)(30s + 43)(30s + 47)(30s + 49)(30s + 53)(30s + 59)$

$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Polos de $Z(s, g)$ .
$x^4 + y^3 + z^2$	$s = -1 + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}, s = -\frac{13}{12} + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}$
$x^3y + y^3 + z^2$	$s = -1 + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}, s = -\frac{18}{19} + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}$
$x^5 + y^3 + z^2$	$s = -1 + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}, s = -\frac{31}{30} + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}$

Se encontraron sus respectivos polinomios  $b_f$  y usando el teorema 5 se pueden describir sus polos. Nuevamente, al comparar las tablas, se observa que la conjetura de Igusa se satisface para estos tres polinomios cuasi-homogéneos, además se observa que aunque cada polo de  $Z(s, f)$  tiene asociada una raíz de  $b_f$ , no necesariamente cada raíz de  $b_f$  genera un polo de  $Z(s, f)$ .

### 3.3.3. $b_f(s)$ de polinomios cuasi-homogéneos con más de una singularidad.

$h(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$b_f(s)$
$x^2y^2 + x^2z^2 + x^2w^2$	$(s+1)^2(2s+1)(2s+3)(\frac{1}{4})$
$x^2y^3z + x^2z^4 + x^2w^4$	$(s+1)^3(s+2)(2s+1)(2s+3)(4s+3)(4s+5)(4s+7)(4s+9)(\frac{1}{1024})$
$x^2y^4 + x^2z^4 + x^2w^4$	$(s+1)^3(s+2)(2s+1)(2s+3)(4s+3)(4s+5)(4s+7)(4s+9)(\frac{1}{1024})$

$h(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Polos de $Z(s, h)$ .
$x^2y^2 + x^2z^2 + x^2w^2$	$s = -1 + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}, s = -\frac{1}{2} + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}, s = -\frac{3}{2} + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}$
$x^2y^3z + x^2z^4 + x^2w^4$	$s = -1 + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}, s = -\frac{1}{2} + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}, s = -\frac{3}{4} + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}$
$x^2y^4 + x^2z^4 + x^2w^4$	$s = -1 + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}, s = -\frac{1}{2} + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}, s = -\frac{3}{4} + i\frac{2\pi m}{\ln(p)}$

En esta ocasión las funciones  $Z(s, f)$  cuenta con más de dos polos, aun así se sigue manteniendo la veracidad de la conjetura de Igusa en estos tres casos, podemos observar que el grado de una raíz de  $b_f$ , no implica ser el orden del polo de  $Z(s, f)$ .

Aunque el algoritmo planteado en Macaulay 2 fue efectivo para los polinomios tratados, el algoritmo se queda corto en polinomios homogéneos con grado superior o igual a 5, este tipo de hechos muestran la dificultad existente para el cálculo efectivo de los polinomios de Bernstein-Sato.

## 4 Conclusiones

En el desarrollo del proyecto se encontraron de forma explícita los polos de las funciones zeta locales de Igusa, se evidenció que para dicho cálculo es necesario un control sobre las singularidades; aun así se torna complicado llegar a una fórmula cerrada para las funciones zeta de Igusa usando la fórmula de fase estacionaria demostrada por Igusa. De igual manera se calculó el polinomio de Bernstein-Sato con ayuda computacional, dejando en evidencia la dificultad existente para polinomios con grados superiores. Estas dos observaciones plantean una de las primeras barreras para conseguir una demostración en la conjetura de Igusa.

Para los polinomios que intervienen en este trabajo se puede garantizar que la parte real de cada polo de  $Z(s, f)$  es una raíz del polinomio  $b_f$ . Se observó que la función zeta local de Igusa, posee generalizaciones como las funciones zeta topológicas y zeta motivicas ver [4], las cuales admiten una generalización de la conjetura planteada por Igusa; de modo que dicha conjetura pasa a ser parte de una colección de conjeturas aún sin resolver.

Dentro del trabajo se puede observar que se plantea una relación entre los polinomios de Bernstein-Sato y las funciones  $Z(s, f)$ , pero no se menciona relación alguna entre dichos polinomios y el teorema de resolución de singularidades de Hironaka.

# Bibliografía

- [1] ALBEVERIO, S. ; KHRENNIKOV, A. ; SHELKOVICH, V.: *Theory of p-adic distributions: linear and nonlinear models*. Cambridge University Press, 2010 ( 370)
- [2] ALBIS, V. ; ZUÑIGA, W.: Una introducción elemental a la teoría de las funciones zeta locales de Igusa. En: *Lecturas Matemáticas* 20 (1999), Nr. 1, p. 5–33
- [3] BOREVICH, I. ; SHAFAREVICH, I.: *Number theory*. Academic press, 1986
- [4] BORIES, B.: Zeta functions, Bernstein-Sato polynomials, and the monodromy conjecture. (2013)
- [5] DENEFF, J.: Report on Igusa's local zeta function. En: *Séminaire Bourbaki* 1990 (1991), Nr. 741, p. 359–386
- [6] FIELD, R. ; GARGEYA, V. ; ROBINSON, M. ; SCHOENBERG, F. ; SCOTT, R.: THE IGUSA LOCAL ZETA FUNCTION FOR  $x^n + y^m$ . (1994)
- [7] GALINDO, W.A.Zuñiga: *Igusa's local zeta functions of semicuasihomogeneous polynomials*. World Scientific, 2001 (Trans.Amer.Math)
- [8] GELFAND, I.: *Generalized Functions: Properties and operations, by IM Gelfand and GE Shilov, translated by E. Saletan*. Vol. 1. Academic Press, 1964
- [9] IGUSA, J.: Complex powers and asymptotic expansions. (1974)
- [10] IGUSA, J.: B-functions and p-adic integrals. En: *Algebraic Analysis*. Elsevier, 1988, p. 231–241
- [11] IGUSA, J.: *An Introduction to the Theory of Local Zeta Functions*. American Mathematical Society, 2007 (AMS/IP studies in advanced mathematics.)
- [12] IGUSA, J. ; RAGHAVAN, S.: *Lectures on forms of higher degree*. Vol. 59. Springer Berlin-Heidelberg-New York, 1978
- [13] J, Denef. ; HOORNAERT.K: Newton Polyhedra and Igusa's Local Zeta Function. (2001)
- [14] LE, Dung T.: *Algebraic Approach To Differential Equations*. World Scientific, 2010 (World Scientific)
- [15] LOESER, F.: Fonctions D'Igusa p-adiques et Polynomes de Berstein. En: *American Journal of Mathematics* 110 (1988), Nr. 1, p. 1–21
- [16] NORO.M: An efficient modular algorithm for computing the global b-function. (2002)

- [17] OAKU.T: An algorithm of computing b-functions. (1997)
- [18] RODRIGUEZ, J.: Funciones zeta locales de Igusa de algunos polinomios. (2011)